ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Победители конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко

Функции Комплексного Переменного

ЗАДАЧИ
и
ПРИМЕРЫ С ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

УРСС

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ЗАДАЧИ
и
примеры с подробными решениями

Издание третье,
исправленное

Книга была допущена Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

УРСС
Москва • 2003

ББК 22.161я73

Краснов Михаил Леонтьевич,
Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович

Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 208 с. (Вся высшая математика в задачах.)

ISBN 5-354-00393-8

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по основным разделам теории функций комплексного переменного. В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбирается около 150 типовых задач и примеров.

В книге содержится свыше 500 задач и примеров для самостоятельного решения. Почти все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев даются указания к решению.

Книга предназначается в основном для студентов технических вузов с математической подготовкой, но может принести пользу и инженеру, желающему восстановить в памяти разделы математики, относящиеся к теории функций комплексного переменного.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 21.06.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 3000 экз. Печ. л. 13. Зак. №232

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet*: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00393-8

ГЛАВА 1

Функции комплексного переменного

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy$$

(алгебраическая форма комплексного числа), где x и y — любые действительные числа, а i — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями комплексного числа* z и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z,$$
$$y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексные числа

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

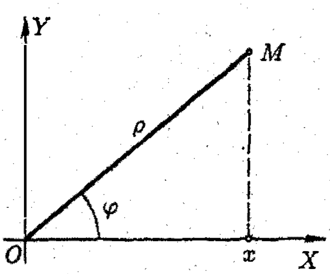


Рис. 1

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (рис. 1). Длина ρ вектора $\overline{OM}$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|z|$, так что $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$; он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi,$$

причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0, \quad y \geqslant 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0, \quad y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \quad y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, \quad \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. *Суммой* $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
2. *Разностью* $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
3. *Произведением* $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$
Из определения произведения комплексных чисел, в частности, следует, что
$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$
4. *Частным* $\dfrac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z, которое удовлетворяет уравнению $zz_2 = z_1$. Для частного имеет место формула
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \tag{2}$$
При этом была использована формула $z_2^{-1} = \dfrac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Формулу (2) можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Действительная часть $\operatorname{Re} z$ и мнимая часть $\operatorname{Im} z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z} - z}{2} = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

Доказательство. По определению имеем

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2. \quad \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$; в) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; г) $\overline{\overline{z}_1 + \overline{z}_2} = z_1 + z_2$.

Пример 2. Найти действительные решения уравнения

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$x = 2, \quad y = 1. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти действительные решения уравнений:

2. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

3. $(x - iy)(a - ib) = i^5$, где a, b — заданные действительные числа, $|a| \neq |b|$.

4. $\dfrac{1}{z - i} + \dfrac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}$, где $z = x + iy$.

5. Представить комплексное число $\dfrac{1}{(a + ib)^2} + \dfrac{1}{(a - ib)^2}$ в алгебраической форме.

6. Доказать, что $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$ (x — действительное).

7. Выразить x и y через u и v, если $\dfrac{1}{x+iy}+\dfrac{1}{u+iv}=1$ (x, y, u, v — действительные числа).

8. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию $\bar{z}=z^2$.

Пример 3. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Решение. Имеем

$$x=-\sin\frac{\pi}{8}<0,\quad y=-\cos\frac{\pi}{8}<0.$$

Главным значением аргумента согласно (1) будет

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]=$$

$$=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right)=-\pi+\frac{3}{8}\pi=-\frac{5}{8}\pi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{5}{8}\pi+2k\pi\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),\qquad |z|=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}}=1.\quad\triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

9. В следующих задачах найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

а) $z=4+3i$; б) $z=-2+2\sqrt{3}i$; в) $z=-7-i$; г) $z=-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$;

д) $z=4-3i$; е) $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$ $\left(\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

Любое комплексное число $z=x+iy$ ($z\neq0$) можно записать в тригонометрической форме

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad\text{где}\quad \rho=|z|,\quad \varphi=\operatorname{Arg} z.$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z=-1-i\sqrt{3}.$$

Решение. Имеем

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2;\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3},\quad \varphi=-\frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно,

$$-1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]. \qquad \triangleright$$

Пример 5. Найти действительные корни уравнения

$$\cos x+i\sin x=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i.$$

Решение. Данное уравнение корней не имеет. В самом деле, это уравнение равносильно следующим: $\cos x=\frac{1}{2}$, $\sin x=\frac{3}{4}$. Последние уравнения несовместны, так как $\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{13}{16}$, что невозможно ни при каких значениях x. $\triangleright$

Любое комплексное число $z\neq 0$ можно записать в показательной форме

$$z=\rho e^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad \rho=|z|, \quad \varphi=\operatorname{Arg} z.$$

Пример 6. Найти все комплексные числа $z\neq 0$, удовлетворяющие условию $z^{n-1}=\overline{z}$.

Решение. Пусть $z=\rho e^{i\varphi}$. Тогда $\overline{z}=\rho e^{-i\varphi}$.
Согласно условию

$$\rho^{n-1}e^{i(n-1)\varphi}=\rho e^{-i\varphi} \quad \text{или} \quad \rho^{n-2}e^{in\varphi}=1,$$

откуда $\rho^{n-2}=1$, т. е. $\rho=1$, и $in\varphi=2k\pi i$, т. е. $\varphi=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$.
Следовательно,

$$z_k=e^{i2\pi k/n} \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

10. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме:

а) -2; б) $2i$; в) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; г) $1-\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$;

д) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$;

в показательной форме:

е) -2; ж) i; з) $-i$; и) $-1-i\sqrt{3}$; к) $\sin\alpha-i\cos\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$; л) $5+3i$.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Их произведение находится по формуле

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Возведение комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т. е.

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n\operatorname{Arg} z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Отсюда получается формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Свойства модуля комплексных чисел

1. $|\overline{z}| = |z|$;
2. $z\overline{z} = |z|^2$;
3. $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4. $|z^n| = |z|^n$;
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$;
6. $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$;
7. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
8. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Пример 7. Вычислить $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

<u>*Решение.*</u> Представим число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Применяя приведенную выше формулу возведения в степень, получим

$$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}\left[\cos\left(60 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(60 \cdot \frac{2}{3}\pi\right)\right] =$$
$$= 2^{60}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 2^{60}. \quad \triangleright$$

Пример 8. Доказать, что многочлен

$$f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha,$$

делится на x^2+1.

<u>*Решение*</u>. Имеем $x^2+1=(x+i)(x-i)$. По формуле Муавра

$$f(i) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - i\sin n\alpha =$$
$$= \cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha - i\sin n\alpha = 0.$$

Аналогично $f(-i)=0$. Значит $f(x)$ делится на x^2+1. ▷

Задачи для самостоятельного решения

11. Доказать, что многочлен

$$f(x) = x^n\sin\alpha - \lambda^{n-1}x\sin n\alpha + \lambda^n\sin(n-1)\alpha$$

делится на $x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2$.

12. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; б) $(2-2i)^7$; в) $(\sqrt{3}-3i)^6$; г) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

13. Доказать, что

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

14. Доказать, что если

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 1, \quad \text{то} \quad (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 1.$$

15. Пользуясь формулой Муавра, выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ следующие функции кратных углов:

а) $\sin 3\varphi$; б) $\cos 3\varphi$; в) $\sin 4\varphi$; г) $\cos 4\varphi$; д) $\sin 5\varphi$; е) $\cos 5\varphi$.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $k=0,1,2,\ldots,n-1$, $\varphi=\arg z$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Корень n-й степени из действительного числа a также имеет n различных значений; среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от четности или нечетности n и знака числа a.

Пример 9. Найти все значения $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение. Приводим комплексное число $1-i$ к тригонометрическому виду

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,3$, найдем

$$(k=0)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$(k=2)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right),$$

$$(k=3)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right).$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти все значения корня:

16. а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt{i}$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[4]{-i}$.

17. а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$; в) $\sqrt{2-i2\sqrt{3}}$.

18. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.

Пример 10. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного z определяется условием

$$\operatorname{Im} z^2 > 2?$$

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} z^2=2xy$.

По условию $2xy>2$, или $xy>1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой $xy=1$. в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой $xy=1$. ▷

Пример 11. Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z+1-i) \leqslant \frac{3}{4}\pi?$$

Решение. Комплексное число

$$z+1-i = z-(-1+i)$$

изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом — точка z. Угол между этим вектором и осью OX есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью OX углы в $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$ радиан (рис. 2). ▷

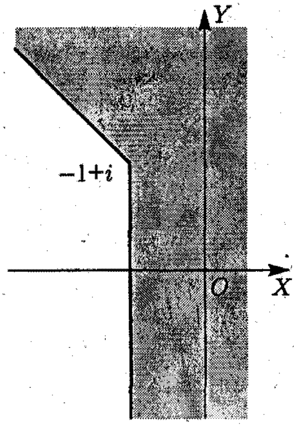


Рис. 2

Пример 12. Какая область определяется условием $|z| + \operatorname{Re} z < 1$?

Решение. Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $|z| = \rho$, $\operatorname{Re} z = \rho\cos\varphi$. По условию $\rho + \rho\cos\varphi < 1$, откуда

$$\rho < \frac{1}{1+\cos\varphi}.$$

Этому условию удовлетворяют все точки, лежащие в области, ограниченной кривой

$$\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}$$

(уравнение параболы в полярных координатах). ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти множества точек на плоскости комплексного переменного z, которые определяются заданными условиями:

19. а) $|z| \geqslant 2$; б) $\frac{1}{|z|} \geqslant 1$, $z \neq 0$; в) $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 2$, $z \neq 0$.

20. а) $|z-5i| = 8$; б) $|z-1-i| \leqslant 4$.

21. а) $1 < |z+i| < 2$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$; б) $2 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{4}{3}\pi$.

22. а) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; б) $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

23. а) $1 \leqslant |z+2+i| \leqslant 2$; б) $|z-1| < |z-i|$; в) $1 < \operatorname{Re} z < 2$.

24. $|z-a| < |1-a\bar{z}|$ (a — действительное, $|a| < 1$).

Задачи для самостоятельного решения

Написать в комплексной форме уравнения следующих линий:

38. а) Координатных осей OX и OY; б) прямой $y = x$; в) прямой $y = kx + b$, где k, b — действительные.

39. а) Равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$; б) окружности $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Разные задачи

Решить уравнения:

40. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$. **41.** $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

42. Найти комплексное число z, изображением которого является точка отрезка $z_1 z_2$, отстоящая от z_2 вдвое дальше, чем от z_1.

43. В какой вектор перейдет вектор $a + ib$ при зеркальном отображении его в биссектрисе первой четверти?

44. В какой вектор перейдет вектор $-\sqrt{3} + 3i$ после поворота на угол 90°?

45. В какой вектор перейдет вектор $-\sqrt{3} - i$ после поворота на угол 120°?

46. Найти угол, на который надо повернуть вектор $4 - 3i$, чтобы получить вектор $-\dfrac{5}{\sqrt{2}} + i\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

47. Найти угол, на который надо повернуть вектор $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$, чтобы получить вектор $-5 + i$.

Решить уравнения:

48. $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ (x — действительное).

49. $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$.

50. Найти вектор, в который перейдет после поворота на 45° и удвоения вектор $z = 3 + 4i$.

51. Центр квадрата находится в точке $z_0 = 1 + i$, а одна из вершин — в точке $z_1 = 1 - i$. В каких точках находятся остальные вершины квадрата?

52. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — корни уравнения $z^n - 1 = 0$ $(n > 1)$. Доказать, что $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$.

Найти следующие суммы:

53. а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;
б) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

54. а) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n - 1)x$;
б) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n - 1)x$.

§ 2. Функции комплексного переменного

Говорят, что в области D определена функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w.

Таким образом, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций u и v действительных переменных x и y

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Пример 1. Пусть $w = z^3 - i\bar{z}$.

Полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим

$$u + iv = (x + iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x).$$

Следовательно, равенство $w = z^3 - i\bar{z}$ равносильно двум равенствам

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - y, \\ v = 3x^2y - x - y^3. \end{cases}$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

55. а) $w = \bar{z} - iz^2$; б) $w = z^2 + i$; в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$; д) $w = \dfrac{iz + 1}{1 + \bar{z}}$; е) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

В следующих задачах найти образы данных точек при указанных отображениях:

56. а) $z_0 = -i$, $w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i$, $w = (z - i)^2$; в) $z_0 = 1$, $w = \dfrac{1}{z - i}$; г) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

Пусть в плоскости z кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u, v) = 0$ этой кривой в плоскости w при отображении с помощью функции $w = f(z) = u + iv$, нужно исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

то параметрические уравнения ее образа при отображении $w = f(z) = u + iv$ будут

$$\begin{cases} u = u[x(t), y(t)] = U(t), \\ v = v[x(t), y(t)] = V(t). \end{cases}$$

Пример 2. В какую кривую отображается единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $w = z^2$?

Решение. Так как по условию $|z| = 1$, то

$$|w| = |z|^2 = 1.$$

Итак, образом окружности $|z| = 1$ в плоскости z является окружность $|w| = 1$ в плоскости w, проходимая дважды. Это следует из того, что поскольку $w = z^2$, то $\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, так что когда точка z описывает полную окружность $|z| = 1$, то ее образ описывает окружность $|w| = 1$ дважды. ▷

Пример 3. Найти образ окружности

$$z = R\cos t + iR\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

при отображении $w = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Данное уравнение окружности можно записать в виде

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

Отделим действительную и мнимую части функции $w = u + iv$. Имеем

$$u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя $x = R\cos t$ и $y = R\sin t$ в u и v, получим параметрические уравнения образа окружности

$$\begin{cases} u = \dfrac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t, \\[2ex] v = \dfrac{2\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t, \end{cases} \qquad (*)$$

или $u^2 + v^2 = 1$.

Итак, образ есть единичная окружность, проходимая дважды, что следует из того, что $0 \leqslant t < 2\pi$, и из формул $(*)$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

57. Установить, на какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ следующие линии плоскости z:

а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$; г) $\arg z^2 = -\frac{\pi}{2}$; д) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; е) $|z| = z$.

58. Найти образы координатных осей OX и OY при следующих отображениях:

а) $w = \frac{z+1}{z-1}$; б) $w = 1 + \frac{1}{z}$.

Основные элементарные функции комплексного переменного

1. *Дробно-рациональная функция*

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m};$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2. *Показательная функция* e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots .$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, где z_1 и z_2 — любые комплексные величины;

б) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т. е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

3. *Тригонометрические функции* $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном значении z. Функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Для функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \tag{1}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{3}$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. *Гиперболические функции* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{5}$$

5. Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned}$$

6. *Логарифмическая функция* $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$; оно обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. *Обратные тригонометрические функции* $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$.

Например, если $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \tag{7}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{8}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \tag{9}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \tag{10}$$

Главные значения обратных тригонометрических функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

8. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ — любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Эта функция, вообще говоря, многозначная; ее главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

9. *Общая показательная функция* $w = a^z$ ($a \neq 0$ — любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z \ln a}$.

Задачи для самостоятельного решения

Выделить действительную и мнимую части у следующих функций:

59. а) $w = 2z - 1$; б) $w = z + z^2$; в) $w = z^{-1}$.

60. а) $w = e^{-z}$; б) $w = e^{\bar{z}^2}$; в) $w = \sin z$; г) $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

61. а) $w = 2^{z^2}$; б) $w = \operatorname{sh} z$; в) $w = \operatorname{tg} z$.

Пример 4. Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке

$$z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

Модуль функции $\sin z$ равен

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Полагая $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{5})$, найдем

$$\left|\sin[\pi + i\ln(2+\sqrt{5})]\right| = \operatorname{sh}[\ln(2+\sqrt{5})] =$$
$$= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2+\sqrt{5} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = 2.$$

Этот пример показывает, что тригонометрическая функция $\sin z$ в комплексной области может принимать значения, по модулю большие единицы. ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти значение модуля и главное значение аргумента данных функций в указанных точках:

62. $w = \cos z$, а) $z_1 = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$; б) $z_2 = \pi + i\ln 2$.

63. $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$. **64.** $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$. **65.** $w = \operatorname{ch}^2 z$, $z_0 = i\ln 3$.

66. Найти логарифмы следующих чисел:

а) e; б) $-i$; в) i; г) $-1-i$; д) $3-2i$; е) i^i.

67. Найти:

а) i^i; б) $i^{1/i}$; в) 1^i; г) $(-1)^{\sqrt{2}}$; д) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; е) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$;

ж) $(1-i)^{3-3i}$.

68. Найти модуль ρ и аргумент φ комплексных чисел:

а) $\operatorname{th}\pi i$; б) 10^i; в) 3^{2-i}.

Пример 5. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arcsin}\dfrac{i\pi}{3}$.

Решение. Полагая в формуле (7) $z = \dfrac{i\pi}{3}$, получим

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left(-\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left[-\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\right] = -i\left[\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) + \pi i + 2k\pi i\right] =$$
$$= (2k+1)\pi - i\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

и

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right) = -i\left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi i\right] =$$

$$= 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad \triangleright$$

Пример 6. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arctg}(1+i)$.

Решение. Полагая в формуле (9) $z = 1 + i$, получим

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Далее

$$\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) = -\ln\sqrt{5}+(2k+1)\pi i - i\operatorname{arctg}2.$$

Окончательно

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\ln\sqrt{5} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

69. а) $e^{i\pi/4}$; б) $\ln(1-i)$. **70.** а) $\sin\pi i$; б) $\cos\pi i$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

71. а) $\operatorname{ctg}\pi i$; б) $\operatorname{Arcsin} i$; в) $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3}$.

72. а) $\operatorname{Arccos} i$; б) $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}$; в) $\operatorname{th}\pi i$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin z = 3$.

Решение. Задача сводится к нахождению величины

$$z = \operatorname{Arcsin} 3.$$

Воспользуемся формулой (7):

$$\operatorname{Arcsin} t = -i\operatorname{Ln}(t+\sqrt{1-t^2}).$$

Будем иметь

$$z = \operatorname{Arcsin} 3 = -i\operatorname{Ln}(3i+\sqrt{-8})$$

или, учитывая то, что

$$\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i,$$

получим

$$z = -i\operatorname{Ln}[(3+\sqrt{8})i], \quad z = -i\operatorname{Ln}[(3-\sqrt{8})i].$$

Так как

$$\arg[(3+\sqrt{8})i] = \arg[(3-\sqrt{8})i] = \frac{\pi}{2},$$

$$|(3+\sqrt{8})i| = 3+\sqrt{8}, \quad |(3-\sqrt{8})i| = 3-\sqrt{8},$$

то

$$\mathrm{Ln}\,[(3 \pm \sqrt{8})i] = \ln(3 \pm \sqrt{8}) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i,$$

где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm \sqrt{8}) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие уравнения:

73. $e^{-z} + 1 = 0$. **74.** $e^{z} + i = 0$. **75.** $4\cos z + 5 = 0$.

76. $\mathrm{sh}\, iz = -i$. **77.** $\sin z = \pi i$. **78.** $e^{ix} = \cos \pi x$ (x — действительное).

79. $e^{2z} + 2e^{z} - 3 = 0$. **80.** $\mathrm{ch}\, z = i$.

81. а) $\ln(z+i) = 0$; б) $\ln(i-z) = 1$.

§ 3. Предел последовательности комплексных чисел. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots .$$

Определение 1. Комплексное число a называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел a, называется сходящейся к числу a, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. *Последовательность* $\{z_n = x_n + iy_n\}$ *сходится к числу* $a = \alpha + i\beta$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Определение 2. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует положительное число M такое, что для всех элементов z_n этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \leqslant M$.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = b$, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm \tau_n) = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n\tau_n) = ab$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\tau_n} = \dfrac{a}{b}$ $(\tau_n \neq 0,\ b \neq 0)$.

Пример 1. Доказать, что последовательность

$$z_n = \frac{n-i}{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет пределом число $a = 1$.

<u>Решение</u>. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такой номер N, что $|z_n - 1| < \varepsilon$, как только $n \geqslant N$. Так как

$$|z_n - 1| = \left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

то неравенство $|z_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$, т. е. при $n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$. Значит, в качестве N можно взять

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

Здесь символ $[x]$ означает целую часть действительного числа x. ▷

Пример 2. Пусть последовательность $\{z_n\}$ имеет предел a. Доказать, что последовательность $\{|z_n|\}$ имеет предел, равный $|a|$.

<u>Решение</u>. В самом деле, так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0. \tag{1}$$

С другой стороны, для любых двух комплексных чисел z_n и a имеет место неравенство (см. с. 8)

$$\big||z_n|-|a|\big| \leqslant |z_n-a|. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|a|$. ▷

Достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел

Пусть $z_n=\rho_n e^{i\varphi_n}$, где $\rho_n=|z_n|$, $\varphi_n=\arg z_n$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\rho_0e^{i\varphi_0}$.

Пример 3. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z,\quad \text{где}\quad z=x+iy.$$

Доказательство. Обозначим

$$z_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+y^2+2xn}{n^2}\right)^{n/2}=e^x.$$

Так как

$$\varphi_n=\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x},$$

то

$$\arg z_n=\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}=y.$$

Пользуясь достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z,$$

что и требовалось доказать. ▷

Пример 4. Доказать, что последовательность

$$z_n=\arg\frac{(-1)^n}{n},\quad n=1,2,\ldots,$$

расходится.

Доказательство. Так как

$$z_n = \arg\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном}, \\ \pi & \text{при } n \text{ нечетном}, \end{cases}$$

то последовательность $\{z_n\}$ имеет вид $\pi, 0, \pi, 0, \ldots$ и предела не имеет. ▷

Пример 5. Пусть

$$x_n = 1 + \rho\cos\alpha + \rho^2\cos 2\alpha + \ldots + \rho^n\cos n\alpha,$$

где $0 < \rho < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение. Положим

$$y_n = \rho\sin\alpha + \rho^2\sin 2\alpha + \ldots + \rho^n\sin n\alpha$$

и рассмотрим предел последовательности комплексных чисел

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots$$
$$\ldots + \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Положим

$$t = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad |t| = \rho < 1.$$

Пользуясь формулой Муавра и формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$z_n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t},$$

и так как $|t| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{1-t}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re}\frac{1}{1-t} = \operatorname{Re}\frac{1}{1 - \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$
$$= \frac{1 - \rho\cos\alpha}{(1 - \rho\cos\alpha)^2 + \rho^2\sin^2\alpha} = \frac{1 - \rho\cos\alpha}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}. \quad ▷$$

Пусть имеем последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots .$$

Если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует натуральное число N такое, что все члены z_n последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $z_n > M$, то говорят, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится к бесконечно удаленной точке* или, просто, к бесконечности, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Пополняя плоскость комплексного переменного так введенной бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, получаем расширенную плоскость комплексного переменного.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется совокупность всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z| > R$ (с присоединением бесконечно удаленной точки), т. е. совокупность всех точек z, лежащих вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса R.

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы следующих последовательностей:

82. $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)e^{i\pi/n}$. **83.** $z_n = \dfrac{i^n}{n}$. **84.** $z_n = (1+3i)^n$.

85. $z_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$. **86.** $z_n = \dfrac{n+2i}{3n+7i}$. **87.** $z_n = \exp\left\{-i\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2n}\right)\right\}$.

88. $z_n = n\sin\dfrac{i}{n}$. **89.** $z_n = n\cos\dfrac{n\pi}{2} + in\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **90.** $z_n = \dfrac{\operatorname{sh} in}{n}$.

91. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Что можно сказать о существовании пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при $n \to \infty$?

Определение 3. *Окрестностью точки* z_0 плоскости комплексной переменной z называется всякая область, содержащая эту точку; *δ-окрестностью точки* z_0 называется множество всех точек z, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке z_0, т. е. множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 4. Число A называется *пределом функции $f(z)$ в точке* z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

Здесь предполагается, что z_0 и A — конечные точки комплексной плоскости.

Приведем еще одно оп еделение предела функции в точке. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 5. Если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, сходящейся к точке z_0, соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к одному и тому же комплексному числу A, то число A называют *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_0:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

Здесь конечность z_0 и A не предполагается.

Существование предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, где

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

равносильно существованию двух пределов

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y),$$

причем

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y).$$

Пределы функций комплексного переменного обладают следующими свойствами.

Пусть существуют пределы

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = B.$$

Тогда

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = AB,$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Определение 6. Функция $f(z)$, заданная в области D, называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иными словами: функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in D$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Для непрерывности функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части, т. е. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, были непрерывны в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y.

Определение 7. Функция $f(z)$ комплексного переменного называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$, непрерывных в области D, также являются непрерывными функциями в этой области, а функция $f(z)/g(z)$ непрерывна в тех точках области D, где $g(z) \neq 0$.

Если функция $f(y)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0 = f(z_0)$, то сложная функция $F[f(z)]$ непрерывна в точке z_0.

Пример 6. Дана линейная функция

$$w = f(z) = az + b,$$

где a и b — комплексные постоянные. Доказать, что в точке z_0 она имеет предел, равный $w_0 = az_0 + b$, $a \neq 0$.

Доказательство. В самом деле, возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|f(z) - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |az - az_0| = |a| \cdot |z - z_0|,$$

то, выбрав в качестве $\delta(\varepsilon) > 0$ число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, будем иметь $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < \delta$. Это означает, что $w_0 = az_0 + b$ есть предел функции $f(z) = az + b$ в точке z_0.

Поскольку

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0),$$

то тем самым доказано, что в любой точке z_0 линейная функция непрерывна. ▷

Пример 7. Показать, что функция $w = z^2$ непрерывна при любом значении z.

Решение. Возьмем произвольную точку z_0 и произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как значение функции $f(z) = z^2$ в точке z_0 равно $f(z_0) = z_0^2$, то покажем, что существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$.

Если $z \to z_0$, то найдется такое число $M > 0$, что $|z| < M$ и $|z_0| < M$. Тогда

$$|z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|)|z - z_0| < 2M|z - z_0|.$$

Если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, то из неравенства $|z - z_0| < \delta$ будет следовать, что

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta \leqslant \varepsilon,$$

т. е. при любом z_0 функция $w = z^2$ является непрерывной. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением предела, показать, что

92. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{2z+1}{z+2} = 1.$ **93.** $\lim\limits_{z\to 3-4i} |z| = 5.$

Вычислить следующие пределы:

94. $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}.$ **95.** $\lim\limits_{z\to \pi/4} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}.$

96. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}.$ **97.** $\lim\limits_{z\to -i\pi/2} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}.$

Доказать, что следующие функции непрерывны на всей комплексной плоскости:

98. $f(z) = \bar{z}.$ **99.** $f(z) = \operatorname{Re} z.$ **100.** $f(z) = \operatorname{Im} z.$

101. $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — комплексные постоянные.

102. Доказать, что рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, непрерывна во всех точках комплексной плоскости z, в которых $Q(z) \neq 0$.

103. Показать, что функция $w = e^z$ непрерывна во всех точках комплексной плоскости.

§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши—Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Обозначим

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* $z \in D$, если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается символом $f'(z)$ (или w', или $\dfrac{dw}{dz}$), так что по определению

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{1}$$

Если $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

называемые *условиями Коши—Римана*.

Обратно, если в некоторой точке (x, y) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x и y и, кроме того, удовлетворяют соотношениям (2), то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$ как функция комплексного переменного z.

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Пример 1. Показать, что функция $w = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Решение. Имеем $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, так что

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (x, y) (они имеют непрерывные частные производные любого порядка) и при этом удовлетворяют условиям (2).

Следовательно, функция $w = e^z$ всюду аналитическая. Для $f(z) = e^z$ получаем согласно формуле (3)

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Итак, $(e^z)' = e^z$. ▷

Пример 2. Является ли функция $w = z\bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Имеем $z\bar{z} = x^2 + y^2$, так что

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) \equiv 0.$$

Условия Коши—Римана в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$$

и удовлетворяются только в точке $(0, 0)$.

Следовательно, функция $w = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Покажем, пользуясь определением 1, что функция $f(z) = z\overline{z}$ дифференцируема в точке $z = 0$. В самом деле, $f(0) = 0$, поэтому

$$\Delta f = f(0+\Delta z) - f(0) = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

и

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta z \cdot \Delta\overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \Delta\overline{z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0.$$

Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю. ▷

Пример 3. Является ли функция $w = \overline{z} = x - iy$ аналитической?

Решение. Здесь $u = (x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ — всюду дифференцируемые функции переменных x и y. Далее

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Так что $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, т. е. первое из условий Коши—Римана не выполняется ни в одной точке комплексной плоскости.

Значит, функция $w = \overline{z}$ — нигде не дифференцируемая, а следовательно, и не аналитическая. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь условиями Коши—Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие — нет:

104. а) $w = z^2\overline{z}$; б) $w = ze^z$; в) $w = |z|\overline{z}$; г) $w = e^{z^2}$; д) $w = |z|\operatorname{Re}\overline{z}$; е) $w = \sin 3z - i$.

105. а) $w = \overline{z}\operatorname{Re} z$; б) $w = \overline{z}\operatorname{Im} z$; в) $w = |z|\operatorname{Im} z$; г) $w = \operatorname{ch} z$.

106. Показать, что в области $\operatorname{Re} z > 0$ $w = \ln z$ — аналитическая функция.

107. Показать непосредственным вычислением, что при натуральном n

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

106. Показать, что если аналитические функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют условию $f'(z) = \varphi'(z)$, то $f(z) = \varphi(z) + \text{const}$.

109. Показать, что при переходе от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ) условия Коши—Римана (2) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

110. Показать, что если аналитическая функция $w = f(z)$ в некоторой области действительна, то она постоянна.

111. Показать, что если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D, то в этой области выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

112. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — аналитическая функция в области D. Показать, что семейства линий $u(x,y) = \text{const}$ и $v(x,y) = \text{const}$ ортогональны.

113. Показать, что модуль и аргумент аналитической функции

$$f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x,y)}$$

связаны соотношениями

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить, если известна ее действительная часть $u(x,y)$ или мнимая часть $v(x,y)$.

Кроме этого, аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно восстановить по одной из следующих формул:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2}, \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) - \overline{C}_0, \tag{5}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2}, \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) + \overline{C}_0, \tag{6}$$

где $\overline{C}_0$ — сопряженное число для $C_0 = f(z_0)$, а $\overline{z}_0$ — сопряженное число для z_0.

Пример 4. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее действительной части $u(x,y) = 2e^x \cos y$ и при дополнительном условии $f(0) = 2$.

Решение. Первый способ. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. По первому из условий Коши—Римана должно быть $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, так что $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Отсюда

$$v(x, y) = \int 2e^x \cos y\, dy = 2e^x \sin y + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя $v(x,y)$ по x и используя второе из условий Коши—Римана, получим

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда $\varphi'(x) = 0$, а значит, $\varphi(x) = C$, где $C = \text{const}$.

Итак, $v(x,y) = 2e^x \sin y + C$, и, следовательно,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$$

Постоянную C найдем из условия $f(0) = 2$, т. е. $2e^0 + iC = 2$; отсюда $C = 0$. Ответ: $f(z) = 2e^z$.

Второй способ. Воспользуемся формулой (5). В нашем примере $u(x,y) = 2e^x \cos y$, $z_0 = 0$, $C_0 = 2$. Значит, по формуле (5) будем иметь $f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos \frac{z}{2i} - 2$. Пользуясь тем, что $\cos \frac{z}{2i} = \cos\left(-\frac{iz}{2}\right) = \operatorname{ch} \frac{z}{2}$, получим окончательно $f(z) = 2e^z$. ▷

Пример 5. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x,y) = 3x + 2xy$ при условии, что $f(-i) = 2$.

Решение. Воспользуемся формулой (6). В нашем примере $v(x,y) = 3x + 2xy$, $z_0 = -i$, $C_0 = 2$, так что

$$f(z) = 2i\left(3\frac{z+i}{2} + 2\frac{z+i}{2} \cdot \frac{z-i}{2i}\right) + 2 = 3iz + z^2.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

114. а) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\quad f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

б) $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ $(x > 0)$, $\quad f(1) = 0$;

в) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $\quad f(i) = 2i - 1$.

115. а) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $\quad f(0) = 0$;

б) $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$, $\quad f(0) = 0$;

в) $v = 2(2\operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $\quad f(0) = 3$.

116. а) $v = -2\sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$, $\quad f(0) = 2$;

б) $v = 2\cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $\quad f(0) = 2$.

Определение 3. Функция $\varphi(x,y)$ называется *гармонической в области D*, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

Однако если $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ — любые две гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ вовсе не обязана быть аналитической функцией: для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и v_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши—Римана.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям (2), называют *сопряженной парой гармонических функций* (порядок функций в паре существенен).

Задачи для самостоятельного решения

117. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; б) $u = 2e^x \cos y$; в) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; г) $u = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

д) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; е) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

118. Могут ли являться действительной или мнимой частями аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ следующие функции:

а) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; б) $u = x^2$; в) $v = \ln(x^2 + y^2)$; г) $v = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)y^2$?

119. При каких условиях трехчлен $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической функцией?

В следующих примерах даны пары $u(x, y)$, $v(x, y)$ гармонических функций. Найти среди них сопряженные пары гармонических функций.

120. а) $u = 3(x^2 - y^2)$, $v = 3x^2y - y^3$; б) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

в) $u = x$, $v = -y$; г) $u = e^x \cos y + 1$, $v = 1 + e^x \sin y$.

121. Пусть функция $u(x, y)$ — гармоническая в области D, где она имеет непрерывные частные производные любого порядка. Показать, что последние также будут гармоническими функциями в области D.

122. Пусть функция $u = u(x, y)$ — гармоническая в области D. Найти все функции f, для которых функция $f(u)$ будет гармонической в области D.

123. Пусть функция $w = f(z)$ — аналитическая в области D. Какие из функций

а) $|w|$; б) $\arg w$; в) $\ln |w|$

будут гармоническими в области D?

124. Доказать, что произведение сопряженных гармонических в области D функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ будет функцией, гармонической в области D.

125. Пусть $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — сопряженная пара гармонических в области D функций. Какие из следующих пар функций будут в области D сопряженными гармоническим функциям:

а) $Au - Bv$, $Bu + Av$, A, B — const;

б) $u^2 - v^2$, uv;

в) $e^u \cos v$, $e^u \sin v$?

Пример 6. Найти все гармонические функции вида $u = f(x^2 + y^2)$, отличные от постоянной.

Решение. Так как искомые функции должны быть гармоническими, то они должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (7)$$

Подставим данную функцию в уравнение (7). Для этого найдем ее производные второго порядка. Положим $t = x^2 + y^2$. Тогда будем иметь $u = f(t)$, где $t = t(x, y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Складывая последние два равенства, получим

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] f''(t) + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) f'(t) = 0,$$

или

$$t f''(t) + f'(t) = 0.$$

Для отыскания функции f мы получили уравнение Эйлера

$$t^2 f''(t) + t f'(t) = 0,$$

общим решением которого является функция

$$f(t) = C_1 \ln t + C_2, \qquad C_1, C_2 \text{ — const.}$$

Итак, искомые гармонические функции имеют вид

$$u = f(x^2 + y^2) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти все гармонические функции указанных видов:

126. $u = f(ax + by)$; a, b — постоянные. **127.** $u = f(xy)$.

128. $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. **129.** $u = f(x^2 - y^2)$. **130.** $u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

131. $u = f\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости z на плоскость w; точнее: при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)| < 1$ — сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости w при отображении $w = f(z)$. Заметим, что если $\varphi = \arg f'(z) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi < 0$ — по часовой.

Пример 7. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z) = 2z$, так что $w'\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ к тригонометрической, получим

$$2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Значит,

$$|f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 4, \qquad \arg f'(z)\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

т. е. коэффициент растяжения $r = 4$, а угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти коэффициент растяжения r и угол поворота φ при заданных отображениях $w = f(z)$ в заданных точках:

132. а) $w = e^z$ в точках $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$ и $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$; б) $w = \sin z$ в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$; в) $w = z^3$ в точках $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.

133. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

а) $w = e^z$; б) $w = \ln z$; в) $w = \dfrac{1}{z}$; г) $w = z^3$.

Если функция $w = f(z)$ — аналитическая в некоторой области D, взаимно однозначно отображает эту область на область $\widetilde{D}$, то кривая L, лежащая в области D, отобразится в некоторую кривую $\widetilde{L}$ в плоскости w, длина которой равна

$$l_w = \int\limits_L |f'(z)| \cdot |dz|. \tag{8}$$

Область D в плоскости z при отображении $w = f(z)$ переходит в область $\widetilde{D}$ в плоскости w, причем площадь области $\widetilde{D}$ выражается формулой

$$S_{\widetilde{D}} = \iint\limits_D |f'(z)|^2 \,dx\,dy. \tag{9}$$

Таким образом, $|f'(z)|^2$ равен коэффициенту искажения площади при отображении $w = f(z)$.

Пример 8. Точка $z = x+iy$ описывает отрезок

$$x = 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1. \tag{10}$$

Чему равна длина линии, получающейся при отображении этого отрезка с помощью функции $w = z^2$?

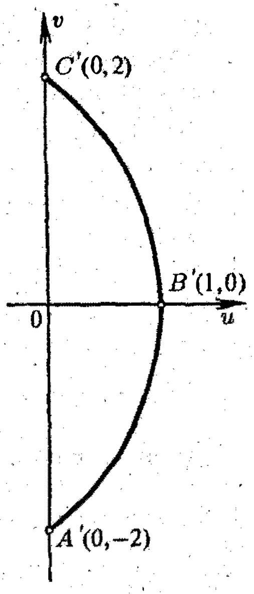


Рис. 3

Решение. П е р в ы й с п о с о б. Имеем $w = z^2$, или

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy,$$

т. е.

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Очевидно, на линии (10) будем иметь

$$\begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases} \tag{11}$$

причем при изменении y от -1 до $+1$ v будет меняться от -2 до $+2$. Из (11) получаем уравнение параболы (рис. 3)

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}. \tag{12}$$

Длина дуги $A'B'C'$ параболы (12)

$$l_w = 2\int\limits_0^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}}\,dv = \int\limits_0^2 \sqrt{4 + v^2}\,dv = 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

Второй способ. Пользуясь формулой (8), будем иметь

$$l_w = \int\limits_L |f'(z)|\cdot|dz| = \int\limits_L |2z|\cdot|dz| =$$

$$= 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+y^2}\,dy = 4\int\limits_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dy = 2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2}). \qquad \triangleright$$

Пример 9. Вычислить площадь области, в которую преобразуется при отображении $w=e^z$ квадрат (рис. 4)

$$a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon,$$
$$-\varepsilon \leqslant y \leqslant \varepsilon$$

(a — действительное, $0<\varepsilon<\pi$, $z=x+iy$).

Вычислить предел отношения площадей этих областей, когда $\varepsilon \to 0$.

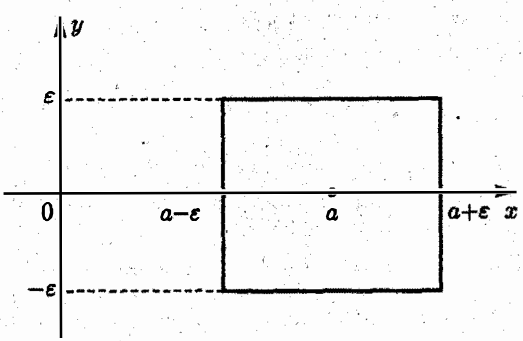


Рис. 4

Решение. Первый способ. Имеем $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, или $w = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = e^x$, $\varphi = y$. Таким образом, при отображении $w = e^z$ в плоскости w получим область, ограниченную двумя лучами $\arg w = -\varepsilon$ и $\arg w = \varepsilon$ и дугами двух окружностей $\rho = e^{a-\varepsilon}$ и $\rho = e^{a+\varepsilon}$ (рис. 5). Площадь отображенной области будет равна

$$S_w = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varphi \int\limits_{e^{a-\varepsilon}}^{e^{a+\varepsilon}} \rho\,d\rho = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1).$$

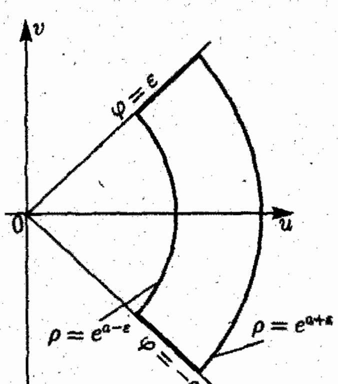


Рис. 5

Второй способ. Применяя формулу (9), имеем

$$S_w = \iint\limits_D |f'(z)|^2\,dx\,dy = \iint\limits_D e^{2x}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{2x}\,dx \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1).$$

Очевидно, что площадь S_z области D равна $S_z = 4\varepsilon^2$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S_w}{S_z} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1)}{4\varepsilon^2} = e^{2a}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

134. Найти площадь образа квадрата $D\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ при отображении $w = z^2$ и длину его границы.

135. Найти площадь образа прямоугольника

$$P = \left\{0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2},\quad 0 < y_1 \leqslant y \leqslant y_2 < \frac{\pi}{2}\right\}$$

при отображении $w = \cos z$.

136. Пусть z описывает область, определяемую условиями

$$1 \leqslant |z| \leqslant 2,\qquad -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Найти площадь области, полученной при отображении $w = z^2$.

137. Найти длину L спирали, на которую с помощью функции $w = e^z$ отображается отрезок $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

138. Найти область P_w, на которую функция $w = e^z$ отображает прямоугольник $P\{1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 8\}$. Вычислить площадь области P_w с помощью формулы (9) и объяснить, почему эта формула дает неправильный результат.

139. Найти площадь фигуры, получающейся при отображении треугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, с помощью функции $w = 1 + iz$.

ГЛАВА 2 Интегрирование. Ряды. Бесконечные произведения

§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а C — кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D.

Пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \tag{1}$$

Интеграл $\int_C f(z)\,dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования C.

Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае

$$\int_L f(z)\,dz = 0,$$

где L — любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D.

Если кривая C задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

и начальная и конечная точки дуги C соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)]z'(t)\,dt, \tag{2}$$

где

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона—Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \tag{3}$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е.

$$\Phi'(z) = f(z)$$

в области D.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 — произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)\,dz = [f(z)\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)\,dz.$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю функции действительного переменного. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур C_1 в w-плоскости на контур C в z-плоскости. Тогда

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)]\varphi'(w)\,dw.$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, то удобно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

В первом случае $\varphi = \text{const}$, а ρ — действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho = \text{const}$, а φ — действительная переменная интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\,dz$$

по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$,

1) по прямой;
2) по параболе $y = x^2$;
3) по ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3 = 1$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Здесь $u = 1 - 2x$, $v = 1 + 2y$.

Применяя формулу (1), получим

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_C (1 - 2x)\, dx - (1 + 2y)\, dy + i \int_C (1 + 2y)\, dx + (1 - 2x)\, dy.$$

1) Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$, будет $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, а значит, $dy = dx$. Поэтому

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)]\, dx +$$

$$+ i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)]\, dx = 2(i - 1).$$

2) Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2x\, dx$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Следовательно,

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_0^1 [1 - 2x - (1 + 2x^2)2x]\, dx +$$

$$+ i \int_0^1 [1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x]\, dx = -2 + \frac{4}{3} i.$$

3) На отрезке $z_1 z_3$: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. На отрезке $z_3 z_2$: $x = 1$, $dx = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Используя свойство линейности криволинейных интегралов, получим

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_{z_1 z_3} (1 + i - 2\bar{z})\, dz + \int_{z_3 z_2} (1 + i - 2\bar{z})\, dz =$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x)\, dx + i \int_0^1 dx - \int_0^1 (1 + 2y)\, dy + i \int_0^1 (1 - 2 \cdot 1)\, dy = -2.$$

Этот пример показывает, что интеграл от непрерывной, но не аналитической функции зависит, вообще говоря, от формы пути интегрирования. ▷

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\, dz,$$

где C — дуга окружности $|z| = 1$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$.

Решение. Положим $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$ и

$$\int\limits_C (z^2 + z\bar{z})\,dz = \int\limits_0^{\pi} ie^{i\varphi}(e^{i2\varphi} + 1)\,d\varphi =$$

$$= i\int\limits_0^{\pi}(e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})\,d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}. \quad \triangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_C e^{\bar{z}}\,dz$, где C — отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$.

Решение. Параметрические уравнения линии C есть

$$x = t, \quad y = -t$$

или в комплексной форме

$$z = t - it,$$

где действительная переменная t изменяется от 0 до π.

Применяя формулу (2), получим

$$\int\limits_C e^{\bar{z}}\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)\,dt = (1-i)\int\limits_0^{\pi} e^{(1+i)t}\,dt = \frac{1-i}{1+i}\,e^{(1+i)t}\Big|_0^{\pi} = (e^{\pi}+1)i. \quad \triangleright$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2 + 2z)\,dz.$$

Решение. Так как подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, то, применяя формулу Ньютона—Лейбница, найдем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz = (z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7+19i. \quad \triangleright$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{i} z\cos z\,dz.$$

Решение. Функции $f(z) = z$ и $\varphi(z) = \cos z$ являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_0^{i} z\cos z\,dz = \int\limits_0^{i} z(\sin z)'\,dz = (z\sin z)\Big|_0^{i} - \int\limits_0^{i}\sin z\,dz =$$

$$= i\sin i + \cos z\Big|_0^{i} = -\operatorname{sh}1 + \operatorname{ch}1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \quad \triangleright$$

Однозначные ветви многозначной функции. Точки ветвления

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области D, отображает D на область G и такова, что обратная функция $z = \varphi(w)$ многозначна в области G. Если существуют однозначные, аналитические в области G функции $z = \varphi_1(w)$, $z = \varphi_2(w)$, $\ldots$, для которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то функции $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \ldots$ называются ***однозначными ветвями функции*** $\varphi(w)$, определенными в области G.

Например, функция $w = z^n$ в каждой точке z_0 ставит в соответствие единственную точку w_0, но одной и той же точке w_0 ($w \neq 0$, $w \neq \infty$) функция $z = \sqrt[n]{w}$ ставит в соответствие n различных точек плоскости z; при этом если $w = \rho e^{i\theta}$, то эти n значений z находятся по формулам $z_k = r e^{i\varphi_k}$, где

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Пусть односвязная область G содержит точку w_0, но не содержит точек $w = 0$ и $w = \infty$. Тогда различным фиксированным значениям k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) при одном и том же выборе числа θ_0 (например, $\theta_0 = \arg w_0$) соответствуют различные ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется ***точкой ветвления*** рассматриваемой многозначной функции. Точками ветвления функции $\sqrt[n]{w}$ являются точки $w = 0$ и $w = \infty$.

После n-кратного обхода вокруг точки $w = 0$ мы вернемся к первоначальной ветви функции $\sqrt[n]{w}$; точки ветвления, обладающие таким свойством, называются ***алгебраическими*** точками ветвления порядка $n-1$. В каждой из этих точек функция имеет только одно значение: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$, т. е. различие ветви функции в этих точках совпадают.

Для логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$ точками ветвления являются $z = 0$ и $z = \infty$, причем $\operatorname{Ln} 0 = \infty$ и $\operatorname{Ln} \infty = \infty$. Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведет к первоначальной ветви функции $\operatorname{Ln} z$. Такие точки ветвления называются ***логарифмическими***. При интегрировании необходимо выделять ветвь многозначной функции. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования.

Если контур интегрирования C замкнут, то начальной точкой z_0 пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где C — верхняя дуга окружности $|z| = 1$. Для $\sqrt{z}$ берется та ветвь, для которой $\sqrt{1} = -1$.

<u>*Решение.*</u> Первый способ. Функция $\sqrt{z}$ имеет два значения:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right] = -|z|\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

где $\varphi = \arg z$.

Так как значения z берутся на единичной окружности, то $|z| = 1$, и, следовательно,

$$\sqrt{z} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Условию $\sqrt{1} = -1$ удовлетворяет второе значение

$$\sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{4}$$

В самом деле, пусть $z = 1$, тогда $\arg z = 0$ и

$$\sqrt{1} = -\cos 0 - i\sin 0 = -1.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1}).$$

Полагая в формуле (4) $z = -1$, найдем

$$\sqrt{-1} = -\left[\cos\frac{\arg(-1)}{2} + i\sin\frac{\arg(-1)}{2}\right] = -\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

Согласно выбору ветви имеем $\sqrt{1} = -1$ и окончательно получим

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1 - i).$$

Второй способ. Полагаем $z = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = 1$, а φ меняется от 0 до π. Из условия $\sqrt{1} = -1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i(\varphi/2+\pi)}$. Теперь

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i(\varphi/2+\pi)}} = \int\limits_0^{\pi} ie^{i(\varphi/2-\pi)}\,d\varphi =$$

$$= 2e^{i(\varphi/2-\pi)}\Big|_0^{\pi} = 2\left(e^{-i\pi/2} - e^{-i\pi}\right) = 2(1 - i). \qquad \triangleright$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_1^{i} \frac{\ln^3 z}{z}\,dz$$

по дуге окружности $|z| = 1$ ($\ln z$ — главное значение логарифма, $\ln 1 = 0$).

Решение. Первый способ. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z}\,dz = \int_1^i \ln^3 z\, d(\ln z) = \left.\frac{\ln^4 z}{4}\right|_1^i = \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

Второй способ. Делаем замену переменной

$$\ln z = w, \quad dw = \frac{dz}{z}.$$

Дуга окружности $|z| = 1$ переходит в отрезок мнимой оси, заключенный между точками $(0, 0)$ и $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Интеграл примет вид

$$I = \int_0^{i\pi/2} w^3\,dw = \left.\frac{w^4}{4}\right|_0^{i\pi/2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^4 i^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Третий способ. Положим $z = e^{i\varphi}$ (здесь $\rho = |z| = 1$). Тогда

$$\ln z = i\varphi, \quad dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Действительная переменная φ изменяется в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. В этом случае получаем

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{i^3\varphi^3 e^{i\varphi} i\,d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\pi/2} \varphi^3\,d\varphi = \left.\frac{\varphi^4}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^4}{64}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

140. $\int_C z \operatorname{Im} z^2\,dz$, C: $|z| = 1$ $(-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0)$.

141. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\,dz$, C — прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

142. $\int_C \ln z\,dz$ ($\ln z$ — главное значение логарифма), C: $|z| = 1$, а) начальная точка пути интегрирования $z_0 = 1$; б) $z_0 = -1$. Обход против часовой стрелки.

143. $\int_C z \operatorname{Re} z\,dz$, C: $|z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

144. $\int\limits_C z\bar{z}\,dz$, C: $|z| = 1$. Обход против часовой стрелки. **145.** $\int\limits_1^i ze^z\,dz$.

146. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, C: а) $z = (2+i)t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; б) ломаная, состоящая из отрезка $[0, 2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ $z_2 = 2+i$.

147. $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)\,dz$. **148.** $\int\limits_0^{i+1} z^3\,dz$. **149.** $\int\limits_1^i (3z^4 - 2z^3)\,dz$.

150. $\int\limits_C e^z\,dz$, C: а) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$; б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

151. $\int\limits_C \cos z\,dz$, C: отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $z_2 = \pi + i$.

152. $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, C: а) верхняя половина окружности $|z| = 1$; выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = 1$; б) $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; $\sqrt{-i} = (1-i)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

153. $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, C: верхняя половина окружности $|z| = 1$; берется та ветвь функции $w = \sqrt[4]{z^3}$, для которой $\sqrt[4]{1} = 1$.

154. $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z)e^{z^2/2}\,dz$. **155.** $\int\limits_0^i z\cos z\,dz$.

156. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$. **157.** $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}\,dz$.

158. $\int\limits_1^i \dfrac{\ln(z+1)}{z+1}\,dz$ по дуге окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

159. $\int\limits_1^i \dfrac{\ln z}{z}\,dz$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

160. $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z\,dz$.

161. $\displaystyle\int\limits_1^i \frac{1+\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}\,dz$ по прямой, соединяющей точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

162. $\displaystyle\int\limits_{-1}^i \frac{\cos z\,dz}{\sqrt{\sin z}}$ по прямой, соединяющей точки $z_1 = -1$ и $z_2 = i$; выбираем ту ветвь функции $\sqrt{\sin z}$, для которой $\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}$.

163. $\displaystyle\int\limits_C \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\,dz$, C: $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{4}$.

164. $\displaystyle\int\limits_C z\operatorname{Im}(z^2)\,dz$, C: $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z = 1$. **165.** $\displaystyle\int\limits_{-i}^i z e^{z^2}\,dz$.

166. $\displaystyle\int\limits_C \operatorname{tg} z\,dz$, C: дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$, $z = 1 + i$.

§ 6. Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C, и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \quad (z_0 \in D), \tag{1}$$

где контур C обходится так, что область D остается все время слева.

Интегральная формула Коши позволяет вычислять некоторые интегралы.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3}\,dz.$$

Решение. Внутри окружности $|z| = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_0 = -1$. Для применения формулы (1) перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3}\,dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)}\,dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\dfrac{\operatorname{ch} iz}{z+3}}{z - (-1)}\,dz.$$

Здесь $z_0 = -1$ и функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$ является аналитической в круге $|z| \leqslant 2$. Поэтому

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1. \qquad \triangleright$$

Пример 2. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл

$$z\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz,$$

если:

$$1)\ C\colon |z-2| = 1; \quad 2)\ C\colon |z-2| = 3; \quad 3)\ C\colon |z-2| = 5.$$

Решение. 1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = 0.$$

2) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\dfrac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz.$$

Функция $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши ($z_0 = 0$), получим

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В области, ограниченной окружностью $|z-2| = 5$, имеем две точки $z = 0$, $z = 6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Непосредственно формулу (1) применять нельзя. В этом случае для вычисления интеграла можно поступать так.

Первый способ. Разложить дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на простейшие. Имеем

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z-6} - \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}\,dz}{z} = \frac{1}{6}2\pi i e^{36} - \frac{1}{6}2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Используя линейность интеграла, получим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz = \frac{1}{8}\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{z-1} - \frac{1}{8}\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\,dz - \\ - \frac{1}{4}\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\,dz.$$

К первым двум интегралам применяем интегральную формулу Коши (1):

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\,dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1, \qquad \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Третий и четвертый интегралы вычисляем с помощью формулы (2):

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i(\operatorname{ch} z)'\Big|_{z=-1} = -2\pi i \operatorname{sh} 1,$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\operatorname{ch} z)''\Big|_{z=-1} = \pi i \operatorname{ch} 1.$$

Окончательно получим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} - \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} + \frac{1}{4}2\pi i \operatorname{sh} 1 - \frac{1}{2}\pi i \operatorname{ch} 1 = \\ = \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1}{2}\pi i = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Второй способ. Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z| \leqslant 2$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z| = 2$, γ_1 и γ_2, подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}. \tag{3}$$

К первому интегралу правой части (3) применим формулу (2), предварительно представив подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}.$$

Функция $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}$ является аналитической внутри γ_1, поэтому в силу формулы (2)

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4}\pi i.$$

Ко второму интегралу в правой части (3) применяем интегральную формулу Коши (1)

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}}{z-1}\, dz = 2\pi i \left.\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\right|_{z=1} = \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4}.$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} + \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

177. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz.$ **178.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\, dz.$ **179.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)}\, dz.$

180. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\, dz.$ **181.** $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z\, dz}{(z-2)^3(z+4)}.$ **182.** $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2}\, dz.$

183. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1}\, dz.$ **184.** $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\, dz.$

185. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1 - \sin z}{z^2}\, dz.$ **186.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\, dz.$

§ 7. Ряды в комплексной области

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{1}$$

где $z_n = x_n + iy_n$.

Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся как ряд

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{2}$$

так и ряд

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{3}$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \tag{4}$$

Ряды (2), (3), (4) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

Решение. Имеем $e^{in} = \cos n + i \sin n$. Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Каждый из этих рядов сходится абсолютно. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно. ▷

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{n}.$$

Решение. Имеем

$$e^{i\pi/n} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$ сходится. Следовательно, данный ряд расходится. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость ряды:

187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$. **188.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n}$. **189.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in^2}{5^{n^2}}$. **190.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$.

191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$. **192.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos in}$. **193.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$.

194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$. **195.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} i\frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}$. **196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$.

Степенной ряд

Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad (5)$$

где c_0, c_1 и т. д. — комплексные постоянные, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом* в комплексной области.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (5) *сходится при некотором значении* $z = z_0$, *то он сходится и притом абсолютно при всех значениях* z, *для которых* $|z| < |z_0|$. *Если ряд* (5) *расходится при* $z = z_1$, *то он расходится и при любом значении* z, *для которого* $|z| > |z_1|$.

Область сходимости ряда (5) есть круг с центром в начале координат. Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0) \qquad (6)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad (7)$$

если указанные пределы существуют.

Пример 3. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

Решение. Имеем

$$c_n = \cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \operatorname{ch} n.$$

Для нахождения радиуса сходимости R применяем формулу (6):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{sh} 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{th} n \cdot \operatorname{sh} 1} = \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1} = e^{-1},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{th} n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + e^{-2n}}{1 - e^{-2n}} = 1.$$

Итак, радиус сходимости данного степенного ряда $R = e^{-1}$. ▷

Пример 4. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

Решение. Находим модуль коэффициента $c_n = (1+i)^n$:

$$|c_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$

Применяя формулу (7), найдем радиус сходимости данного степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$. **198.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n} z^n$. **199.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

200. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$. **201.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n$. **202.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

203. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$. **204.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n$. **205.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$.

206. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1+in)}$. **207.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n$. **208.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n$.

209. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости r, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c'_n z^n$ — радиус сходимости r'.

Оценить радиус сходимости R следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n + c'_n) z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n - c'_n) z^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n c'_n z^n$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c'_n} z^n$ $(c'_n \neq 0)$.

Ряды Тейлора и Лорана

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в точке $z = z_0$, разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{8}$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где Γ — окружность с центром в точке $z = z_0$, целиком лежащая в окрестности точки z_0, в которой функция $f(z)$ аналитична. Центр окружности круга сходимости находится в точке z_0; эта окружность проходит через особую точку ζ функции $f(z)$, ближайшую к точке z_0, т. е. радиус сходимости ряда (8) будет равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Для функций

$$\ln(1+z), \quad (1+z)^\alpha$$

имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots \quad (R = 1), \tag{10}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n + \ldots \quad (R = 1). \tag{11}$$

В частности, при $\alpha = -1$ получим

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots \quad (R = 1). \tag{12}$$

Формула (10) дает разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ главного значения логарифма; чтобы получить ряд Тейлора для других значений многозначной функции $\mathrm{Ln}(1+z)$, следует к ряду (10) прибавлять числа $2n\pi i$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$:

$$\mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + 2n\pi i.$$

Пример 5. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3},$$

используя разложение (12), и найти радиус сходимости ряда.

Решение. Разложим данную функцию на простейшие дроби

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}-\frac{3}{4}\frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя разложение (12) функции $\frac{1}{1+z}$, получим

$$f(z)=\frac{1}{4}(1-z+z^2-z^3+\ldots)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}z^2-\frac{28}{27}z^3+\ldots\right)=-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\ldots.$$

Ближайшей к точке $z_0=0$ особой точкой данной функции является точка $z=-1$. Поэтому радиус сходимости полученного ряда $R=1$. ▷

Пример 6. Разложить по степеням разности $z-3$ функцию

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}.$$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{3-2(z-3+3)}=\frac{1}{-3-2(z-3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Заменяя в разложении (12) z на $\frac{2}{3}(z-3)$, получим

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(z-3)+\frac{2^2}{3^2}(z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(z-3)^3+\ldots\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-\ldots.$$

Этот ряд сходится при условии

$$\left|\frac{2}{3}(z-3)\right|<1,$$

или $|z-3|<\frac{3}{2}$, т. е. радиус сходимости ряда $R=\frac{3}{2}$. ▷

Пример 7. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\operatorname{tg} z$ и найти радиус сходимости ряда.

Решение. Пусть искомый ряд имеет вид

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad f^{(0)}(0) = f(0) = 0.$$

Для нахождения значений производных $f^{(n)}(z)$ в точке $z = 0$ продифференцируем данную функцию. Имеем

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{или} \quad f'(z) = 1 + f^2(z), \tag{13}$$

$$\begin{cases} f''(z) = 2f(z)f'(z), \\ f'''(z) = 2\left[f'^2(z) + f(z)f''(z)\right], \\ f^{\mathrm{IV}}(z) = 2\left[3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)\right], \\ f^{\mathrm{V}}(z) = 2\left[3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{\mathrm{IV}}(z)\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{14}$$

Полагая в (13) и (14) $z = 0$, найдем

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 2; \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0; \quad f^{\mathrm{V}}(0) = 16; \quad \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + \ldots . \tag{15}$$

Ближайшей особой точкой к точке $z = 0$ является точка $\zeta = \frac{\pi}{2}$. Поэтому радиус сходимости полученного ряда $R = \frac{\pi}{2}$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах данные функции разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

210. $\sin(2z + 1)$ по степеням $z + 1$.

211. $\cos z$ по степеням $z + \frac{\pi}{4}$.

212. e^z по степеням $2z - 1$.

213. $\frac{1}{3z + 1}$ по степеням $z + 2$.

214. $\frac{z + 1}{z^2 + 4z - 5}$ по степеням z.

215. $\frac{z}{z^2 + i}$ по степеням z.

216. $\cos^2 \frac{iz}{2}$ по степеням z.

217. $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}$ по степеням z.

218. $\ln(2 - z)$ по степеням z.

219. $\ln(2 + z - z^2)$ по степеням z.

Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z следующих функций. Найти радиус сходимости рядов:

220. $\frac{1}{1 + e^z}$.

221. $\frac{1}{2 + \sin z}$.

222. $\frac{1}{e^{-z} + 5}$.

223. $\ln(1 + e^{-z})$.

224. $\ln\cos z$. **225.** $\ln(1+\cos z)$. **226.** $e^{1/(1-z)}$.

227. Найти функцию $f(z)$, аналитическую в круге $|z| \leqslant 1$ и принимающую на окружности $|z| = 1$ значение

$$\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}, \quad a>1, \quad \theta=\arg z.$$

228. Пусть функция $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ является аналитической в круге $|z| \leqslant 1$. Доказать, что среднее значение функции $\dfrac{f(z)}{z^n}$ на окружности $|z|=1$ равно a_n.

Пусть дан ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{16}$$

Если $c_{-n} \neq 0$ и существует конечный предел

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \tag{17}$$

то этот ряд сходится в области

$$|z-z_0|>r. \tag{18}$$

Пример 8. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}.$$

<u>*Решение*</u>. Здесь $c_{-n}=(1+i)^{n+1}$, $c_{-n-1}=(1+i)^{n+2}$, $z_0=0$. Поэтому

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|(1+i)^{n+2}|}{|(1+i)^{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}|1+i|=\sqrt{2}.$$

Данный ряд сходится в области $|z|>\sqrt{2}$. ▷

Пример 9. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}.$$

<u>*Решение*</u>. Имеем

$$c_{-n}=\sin in=i\,\mathrm{sh}\,n, \quad c_{-n-1}=i\,\mathrm{sh}\,(n+1).$$

Поэтому

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|i\,\mathrm{sh}\,(n+1)|}{|i\,\mathrm{sh}\,n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sh}\,(n+1)}{\mathrm{sh}\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^n-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}}=e.$$

Следовательно, ряд сходится в области $|z+i| > e$, т. е. вне круга с центром в точке $z_0 = -i$ и радиуса e. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить область сходимости следующих рядов:

229. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}$. **230.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$. **231.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$.

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}$. **233.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$. **234.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$. **236.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$.

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{19}$$

сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots, \tag{20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots . \tag{21}$$

Пусть ряд (20) сходится в области $|z-z_0| > r$, т. е. вне круга с центром в точке $z = z_0$ радиуса r, а ряд (21) в круге $|z-z_0| < R$. Тогда, если

1) $r > R$, то ряд (19) расходится всюду;
2) $r < R$, то ряд (19) сходится в кольце $r < |z-z_0| < R$. Здесь $r \geqslant 0$, $0 < R < +\infty$.

Пример 10. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

<u>*Решение*</u>. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}$ имеем

$$c_{-n}=e^{in},\quad c_{-n-1}=e^{i(n+1)}.$$

Следовательно,

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|}=1,$$

так что первый ряд сходится в области $|z+1|>1$.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{e^{in+1/2}}$ имеем

$$c_n=e^{-in-1/2},\quad c_{n+1}=e^{-i(n+1)-1/2}.$$

Его радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|}=1,$$

так что второй ряд сходится в области $|z+1|<1$. Данный ряд расходится всюду. ▷

Пример 11. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n.$$

<u>*Решение*</u>. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ имеем

$$c_{-n}=(3+4i)^n,\quad c_{-n-1}=(3+4i)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|}=\lim_{n\to\infty}|3+4i|=5.$$

Первый ряд сходится в области $|z+2i|>5$. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2i}{6}\right)^n$ имеем

$$c_n=6^{-n}\quad c_{n+1}=6^{-n-1}.$$

Поэтому радиус сходимости этого степенного ряда будет равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|6^{-n}|}{|6^{-n-1}|}=6.$$

Он сходится в области $|z+2i|<6$.

Итак, $r=5<R=6$. Следовательно, данный ряд сходится в кольце $5<|z+2i|<6$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить области сходимости следующих рядов:

237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$.

238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}$.

239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$.

240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$.

241. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$.

242. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

243. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$ $(0!=1)$.

244. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$.

245. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$.

246. $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$.

247. $\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$.

248. $-\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

249. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ $(b\neq 0)$.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ (не исключаются случаи, когда $r=0$ и $R=+\infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{22}$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{23}$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

В формуле (22) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

называется *главной частью* ряда Лорана, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

называется *правильной частью* ряда Лорана.

На практике при нахождении коэффициентов c_n стараются избегать применения формул (23), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используются готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Пример 12. Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 2$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}.$$

Решение. Первый способ. Функция $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в кольце $0 < |z-1| < 2$. Коэффициенты ряда Лорана находим по формуле (23)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z^2-1)^2}}{(z-1)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2},$$

где Γ — любая окружность с центром в точке $z_0 = 1$, лежащая в данном кольце.

Если $n+3 \leqslant 0$, т.е. $n \leqslant -3$, то подынтегральная функция $\dfrac{1}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ будет аналитической во всех точках, заключенных внутри окружности Γ, в том числе и в точке $z=1$. В этом случае

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2} = 0,$$

т.е. $c_n = 0$ при $n = -3, -4, \ldots$. Если $n+3 > 0$, т.е. $n > -3$, то, применяя формулу (2) из § 6 для производной любого порядка от аналитической функции, получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}\,dz = \frac{1}{(n+2)!}\,\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{(-1)^n(n+3)!}{(z+1)^{n+4}}\Bigg|_{z=1} = \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Для $n = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$c_n = \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Ряд Лорана для данной функции в кольце $0 < |z-1| < 2$ будет иметь вид

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{+\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n,$$

или

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{5}{64}(z-1)^2 - \frac{3}{64}(z-1)^3 + \ldots .$$

Второй способ. Нам нужно представить $f(z)$ в виде суммы степеней (положительных и отрицательных) разности $(z-1)$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}. \qquad (24)$$

Первые два слагаемых в правой части (24) имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности $(z-1)$.

Последние два слагаемых запишем в виде

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}, \qquad \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}.$$

Применяя формулу (12), а затем формулу (11) при $\alpha = -2$, получим

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots\right], \qquad (25)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}\left[1 - 2\cdot\frac{z-1}{2} + \frac{-2(-2-1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots\right]. \qquad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (24), найдем

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{16}\left[1 - (z-1) + \frac{3}{2^2}(z-1)^2 - \frac{4}{2^3}(z-1)^3 + \ldots\right],$$

или

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(z-1) +$$

$$+ \frac{5}{64}(z-1)^2 - \frac{3}{64}(z-1)^3 + \ldots . \qquad \triangleright$$

Пример 13. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$$

в окрестности точки $z_0 = 0$.

<u>*Решение.*</u> Для любого комплексного ζ имеем

$$\cos\zeta = -\frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \dots .$$

Полагая $\zeta = \dfrac{1}{z}$, получим

$$z^2\cos\frac{1}{z} = z^2\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots\right) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots,$$

или

$$z^2\cos\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots .$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 0$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 0$. Это «кольцо» можно определить с помощью следующего соотношения: $0 < |z - 0| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$, $z_0 = 0$. Данная функция является аналитической в указанном «кольце». ▷

Пример 14. Рассмотреть различные разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв $z_0 = 0$.

<u>*Решение.*</u> Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Следовательно, имеется три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

а) круг $|z| < 1$;

б) кольцо $1 < |z| < 2$;

в) $2 < |r| < +\infty$ — внешность круга $|z| \leqslant 2$.

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих «колец».
Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}. \tag{27}$$

а) Разложение в круге $|z| < 1$. Преобразуем (27) следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}. \tag{28}$$

Используя формулу (12), получим

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \qquad |z| < 1, \tag{29}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots, \quad |z| < 2. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получим

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \ldots - (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \ldots .$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$.

б) Разложение в кольце $1 < |z| < 2$. Ряд (30) для функции $\frac{1}{1+z/2}$ остается сходящимся в этом кольце, так как $|z| < 2$. Ряд (29) для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится для $|z| > 1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \tag{31}$$

Применяя формулу (12), получим

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots . \tag{32}$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 1$.

Подставляя (30) и (32) в (31), найдем

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots =$$

$$= \ldots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \ldots,$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

в) Разложение для $|z| > 2$. Ряд (30) для функции $\frac{1}{1+z/2}$ при $|z| > 2$ расходится, а ряд (32) для функции $\frac{1}{1-1/z}$ будет сходиться, так как если $|z| > 2$, то и подавно $|z| > 1$.

Функцию $f(z)$ представим в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} + \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right).$$

Используя формулу (12), получим

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right) = \frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right),$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots .$$

Этот пример показывает, что для одной и той же функции $f(z)$ ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец. ▷

Пример 15. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

в окрестности ее особых точек.

Решение. Особые точки функции $f(z)$: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

1) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_1 = 1$, т.е. в кольце $0 < |z-1| < 1$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Правую часть преобразуем так:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}.$$

Применяя разложение (12), в котором z заменено на $-(z-1)$, получим

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - [1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots],$$

или

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n. \tag{33}$$

2) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2 = 2$, т. е. в кольце $0 < |z-2| < 1$. Имеем

$$\frac{2z-3}{z^3-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} =$$
$$= \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \ldots,$$

или

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n. \quad ▷ \tag{34}$$

Задачи для самостоятельного решения

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ следующие функции:

250. $\dfrac{\sin z}{z^2}$. **251.** $\dfrac{\sin^2 z}{z}$. **252.** $\dfrac{e^z}{z}$. **253.** $\dfrac{e^z}{z^3}$.

254. $z^3 e^{1/z}$. **255.** $z^4 \cos\dfrac{1}{z}$. **256.** $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$. **257.** $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

258. $\dfrac{e^z - 1}{z}$. **259.** $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$. **260.** $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

Разложить в ряд Лорана следующие функции в окрестностях указанных точек:

261. $\dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$. **262.** $\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z_0 = 2$. **263.** $\dfrac{1}{ze^{z+i}}$, $z_0 = -i$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

264. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, а) $2 < |z| < 3$; б) $3 < |z| < +\infty$.

265. $\dfrac{1}{z^2+z}$, а) $0 < |z| < 1$; б) $1 < |z| < +\infty$.

266. $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, а) $1 < |z| < 4$; б) $4 < |z| < +\infty$.

267. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$.

268. $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, а) $|z| < 1$; б) $1 < |z| < 2$; в) $2 < |z| < \infty$.

269. $\dfrac{2}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$.

270. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1 < |z+2| < 4$.

271. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2 < |z-1| < +\infty$.

272. $\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $2 < |z| < +\infty$.

273. $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $1 < |z| < 2$.

274. $\dfrac{1}{z^2+1}$, $0 < |z-i| < 2$.

275. $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $4 < |z+2| < +\infty$.

§ 8. Бесконечные произведения и их применение к аналитическим функциям

1°. Бесконечные произведения. Пусть дана последовательность комплексных или действительных чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots .$$

Рассмотрим произведение n ненулевых числовых сомножителей

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n),$$

которое будем обозначать символом p_n, то есть

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k). \tag{1}$$

Полагая n равным $1, 2, 3, \ldots$, получим последовательность комплексных (или действительных) чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, отличных от нуля.

Определение 1. Предел (если он существует)

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = p,$$

называется *значением бесконечного произведения* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ и записывается следующим образом

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = p. \tag{2}$$

Число p_n есть *частичное произведение бесконечного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k).$$

Определение 2. Если бесконечное произведение принимает конечное значение, отличное от нуля, то оно называется сходящимся. Если, напротив, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$ или последовательность $\{p_n\}$ расходится, т. е. не стремится к конечному пределу, то бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ называется расходящимся.

Пример 1. Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{k(k+2)}\right] \tag{3}$$

сходится и найти его значение.

Решение. Поскольку

$$1+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)},$$

частичное произведение p_n можно представить в форме

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\frac{1}{k(k+2)}\right]=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

или

$$p_n=2\cdot\frac{n+1}{n+2}.$$

Таким образом, значение бесконечного произведения (3) есть

$$p=\lim_{n\to\infty}p_n=2. \qquad \triangleright$$

Пример 2. Показать, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1-k}{k}\right) \tag{4}$$

расходится.

Решение. Действительно, так как $1+\dfrac{1-k}{k}=\dfrac{1}{k}$, то

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1-k}{k}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!},\quad p=\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0.$$

Так как p равно нулю, то по определению бесконечное произведение (4) расходится. $\triangleright$

Дадим другую формулировку определения сходимости бесконечного произведения. Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ сходится к числу p $(p\neq 0)$, если для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{p}{p_n}-1\right|<\varepsilon. \tag{5}$$

В самом деле, если произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ сходится к числу p, где $p\neq 0$, то отношение $\dfrac{p}{p_n}$ при неограниченном возрастании n стремится к 1, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{p_n}=\frac{p}{\lim\limits_{n\to\infty}p_n}=\frac{p}{p}=1 \quad (p\neq 0).$$

Наоборот, если отношение $\frac{p}{p_n}$ стремится к единице при неограниченном возрастании n, то произведение $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$ сходится к числу p.

Докажем, что необходимым условием сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$$

является

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{6}$$

Действительно, если

$$p_{n-1} = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_{n-1}),$$
$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_{n-1})(1+u_n),$$

то $\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1+u_n$, или $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1$. Если теперь $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_{n-1} = p$, где $p \neq 0$, то, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Признак сходимости бесконечного произведения.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *абсолютно сходится, то сходится и бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$.

Введем понятие бесконечного абсолютно сходящегося произведения.

Определение 3. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots \tag{7}$$

абсолютно сходится, если сходится произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|) = (1+|u_1|)(1+|u_2|)\ldots(1+|u_n|)\ldots. \tag{8}$$

Теорема 2. *Бесконечное произведение* (7) *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{9}$$

Теорему 1 можно сформулировать теперь следующим образом: любое абсолютно сходящееся произведение сходится.

Определение 4. Бесконечное произведение (7) сходится условно, если оно сходится, а бесконечное произведение (8) расходится.

Пример 3. Показать, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right] = (1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots \tag{10}$$

сходится условно.

Решение. Нетрудно убедиться в том, что

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ 1, & \text{если } n \text{ четное}, \end{cases}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$, т. е. произведение (10) сходится.

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ является расходящимся (гармонический ряд). Тогда бесконечное произведение (10) не сходится абсолютно. Таким образом, бесконечное произведение (10) сходится условно. ▷

Теорема 3. *Пусть дано бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, *где все сомножители положительны, т. е.* $u_k > -1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Тогда бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) \tag{11}$$

сходится, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k) \tag{12}$$

сходится, и расходится, если ряд (12) *расходится.*

Упражнение. Допустим, что ряд (12) сходится и его сумма равна s. Тогда значение p произведения $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ равно $p = e^s$.

Доказательство. Обозначив через p_n n-е частичное произведение и через s_n n-ю частичную сумму ряда (12), имеем

$$s_n = \ln p_n.$$

Отсюда

$$p_n = e^{s_n}. \tag{13}$$

В силу непрерывности экспоненциальной функции для любого значения аргумента и непрерывности логарифмической функции для любого положительного значения аргумента, из (13) следует, что последовательность $\{p_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{s_n\}$. А так как

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^s,$$

что и доказывает формулу $p = e^s$. ■

Теорема 4. *Если все u_k (начиная с некоторого номера N) имеют один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{14}$$

Пример 5. Исследовать на сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\ldots \tag{15}$$

Решение. Здесь все $u_k = -\dfrac{1}{k+1}$ отрицательны и ряд (14)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

очевидно, расходится.

Тогда, в силу теоремы 4, бесконечное произведение (15) расходится. ▷

Замечание. Вычисляя n-е частичное произведение в (15), получим

$$p_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$, бесконечное произведение (15) расходится.

Пример 6. Установить сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)\ldots \tag{16}$$

при $\alpha > 1$.

Решение. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$. Тогда, согласно теореме 4, бесконечное произведение (16) тоже сходится. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Доказать сходимость и найти значения следующих бесконечных произведений:

276. $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{k^2-1}\right)$. **277.** $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$. **278.** $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{k(k+1)}\right)$.

Исследовать на сходимость следующие бесконечные произведения:

279. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{k(k+1)}\right)$. **280.** $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)$.

281. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^p}\right)$, $p>1$. **282.** $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2k+1)^2}\right)$.

2°. Разложение некоторых функций в бесконечные произведения. Известно, что функцию $\sin z$ можно разложить в бесконечное произведение следующим образом:

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1}$$

Подставив в это разложение $z = \dfrac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

ГЛАВА 3

Вычеты функций

§ 9. Нули функции. Изолированные особые точки

1°. Нули функции. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем функции* $f(z)$ *порядка* (или *кратности*) n, если выполняются условия

$$f(z_0)=0, \quad f'(z_0)=0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(z_0)=0, \quad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Если $n=1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = 1+\cos z$ и определить их порядки.

Решение. Приравнивая $f(z)$ нулю, получим $\cos z=-1$, откуда $z_n=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — нули данной функции. Далее

$$f'[(2n+1)\pi]=-\sin(2n+1)\pi=0,$$

$$f''[(2n+1)\pi]=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ являются нулями второго порядка данной функции. ▷

Пример 2. Найти нули функции $f(z)=1-e^z$ и определить их порядки.

Решение. Приравнивая $f(z)$ нулю, найдем нули $z_n=2n\pi i$ $(n=0,\pm1,\ldots)$ функции $f(z)$. Далее

$$f'(2n\pi i)=-e^{2n\pi i}=-1\neq 0.$$

Итак, $f(2n\pi i)=0$, $f'(2n\pi i)\neq 0$, следовательно, точки $z_n=2n\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые нули функции $f(z)=1-e^z$. ▷

Пример 3. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}.$$

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, получим

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)} =$$

$$= \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots} = z^5 \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots}.$$

Положим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \ldots}.$$

Тогда $f(z) = z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в точке $z_0 = 0$, причем $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является для данной функции нулем пятого порядка. ▷

Пример 4. Найти нули функции $f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$ и определить их порядки.

Решение. Полагая $f(z) = 0$, получим $(z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z = 0$, откуда $z^2 + 1 = 0$ или $\operatorname{sh} z = 0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$:

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пусть $z = -i$, тогда $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z + i)^3 \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z) = (z - i)^3 \operatorname{sh} z$ является аналитической в точке $z = -i$, причем $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \sin 1 \neq 0$. Это означает, что точка $z = -i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z = i$ является нулем третьего порядка. *Исследуем нули* $z = k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Производная

$$f'(z) = 6z(z^2 + 1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2 + 1)^3 \operatorname{ch} z$$

в точках $z = k\pi i$ отлична от нуля. Следовательно, $z = k\pi i$ — нули первого порядка. ▷

Задачи для самостоятельного решения

У следующих функций найти нули и определить их порядки:

286. а) $f(z) = z^4 + 4z^2$; б) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

287. а) $f(z) = z^2 \sin z$; б) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$.

288. а) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$; б) $f(z) = \dfrac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}$.

289. а) $f(z) = (z + \pi i)\operatorname{sh} z$; б) $f(z) = \cos z^3$.

290. а) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z})$; б) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$.

Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для следующих функций:

291. $f(z) = \dfrac{z^6}{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2 - \sin^2\dfrac{z}{2}}$. **292.** $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

293. $f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z}$. **294.** $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$.

295. $f(z) = \dfrac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \operatorname{sh} z}$. **296.** $f(z) = (e^z - e^{z^2})\ln(1 - z)$.

297. $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$. **298.** $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

299. Точка z_0 является нулем порядка n для функции $\varphi(z)$ и нулем порядка m для функции $\psi(z)$. Чем является точка z_0 для функций:

$$\text{а) } \varphi(z) + \psi(z); \quad \text{б) } \varphi(z)\cdot\psi(z); \quad \text{в) } \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}?$$

2°. Изолированные особые точки. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z = z_0$.

Точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0.

Пример 5. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.

Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Имеем

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Следовательно, точка $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка. ▷

Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 называют *полюсом порядка n* ($n \geqslant 1$) функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. В случае $n = 1$ полюс называют *простым*.

Пример 6. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$.

Особая точка $z_0 = 0$. Положим $z = \rho e^{i\varphi}$, тогда $f(z) = \dfrac{e^{-i3\varphi}}{\rho^3}$. Очевидно, что $|f(z)| = \dfrac{1}{\rho^3}$, откуда следует, что $|f(z)|$ неограниченно возрастает, когда $z \to 0$ по любому закону. Следовательно, $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$, т. е. точка $z_0 = 0$ есть полюс этой функции. Для функций $\varphi(z) = z^3$ точка $z_0 = 0$ есть нуль третьего порядка, а значит, $z_0 = 0$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$. ▷

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.*

Пример 7. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z = -1$ и $z = 1$. Исследуем точку $z = -1$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\dfrac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}.$$

Здесь

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

аналитична в окрестности точки $z = -1$, причем $\varphi(-1) = \dfrac{1}{2}\sin 1 \neq 0$. Следовательно, точка $z = -1$ является двукратным полюсом данной функции. Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1},$$

заключаем, что точка $z = 1$ есть простой полюс этой функции. ▷

Точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Пример 8. Определить характер особой точки $z = 0$ функции

$$f(z) = e^{1/z^2}.$$

Решение. Рассмотрим поведение этой функции на действительной и мнимой осях. На действительной оси $z = x$ и $f(x) = e^{1/x^2} \to \infty$ при $x \to 0$. На мнимой оси $z = iy$ и $f(iy) = e^{-1/y^2} \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, предел $f(z)$ в точке $z = 0$ не существует ни конечный, ни бесконечный. Точка $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$. ▷

Пример 9. Определить характер особой точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z}.$$

Решение. Точка $z = 0$ есть полюс функции $f(z)$, так как она является нулем знаменателя. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = 2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z$. Для нее $\varphi(0) = 0$. Найдем порядок нуля $z = 0$ этой функции. Имеем

$$\begin{aligned}
\varphi'(z) &= 2z - 2\operatorname{sh} z, & \varphi'(0) &= 0;\\
\varphi''(z) &= 2 - 2\operatorname{ch} z, & \varphi''(0) &= 0;\\
\varphi'''(z) &= -2\operatorname{sh} z, & \varphi'''(0) &= 0;\\
\varphi^{\mathrm{IV}}(z) &= -2\operatorname{ch} z, & \varphi^{\mathrm{IV}}(0) &= -2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $z = 0$ *есть нуль четвертого порядка для* $\varphi(z)$, *а значит, для данной* функции $f(z)$ точка $z = 0$ есть полюс четвертого порядка. ▷

Пример 10. Определить характер особой точки $z = 1$ функции

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{2e^{z-1} - z^2 - 1}{\sin \pi z}.$$

Точка $z = 1$ будет нулем третьего порядка для числителя

$$\psi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1,$$

так как

$$\psi(1) = 0; \quad \psi'(1) = (2e^{z-1} - 2z)\big|_{z=1} = 0;$$

$$\psi''(1) = (2e^{z-1} - 2)\big|_{z=1} = 0; \quad \psi'''(1) = 2e^{z-1}\big|_{z=1} = 2 \neq 0.$$

Точка $z = 1$ есть нуль первого порядка для знаменателя $\sin \pi z$ функции $\varphi(z)$.

Следовательно, точка $z = 1$ будет нулем порядка $3 - 1 = 2$ для функции $\varphi(z)$, а значит — полюсом второго порядка для данной функции. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для следующих функций:

300. а) $\dfrac{1}{z - \sin z}$; б) $\dfrac{1}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}$; в) $\dfrac{1}{e^{-z} + z - 1}$.

301. а) $\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$; б) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z-\operatorname{sh} z}$.

Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

302. а) $\dfrac{1}{1-\sin z}$; б) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$. **303.** а) $e^{1/(z+2)}$; б) $\cos\dfrac{1}{z}$.

304. а) $\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; б) $\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$.

305. а) e^{-1/z^2}; б) $\sin\dfrac{\pi}{z+1}$; в) $\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

306. а) $\dfrac{z^2}{\cos z-1}$; б) $\dfrac{1-\sin z}{\cos z}$; в) $\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$.

Имеют место следующие утверждения.

1. *Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержало главной части.*
2. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержала лишь конечное число членов*

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_{-k}\neq 0).$$

Наибольший из показателей степеней у разностей $z-z_0$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

3. *Точка z_0 тогда и только тогда является существенно особой точкой для функции $f(z)$, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.*

Пример 11. Установить характер особой точки z_0 функции

$$f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z}.$$

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^{-z} в окрестности точки $z_0=0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля

$$f(z)=\frac{1}{z}(1-e^{-z})=\frac{1}{z}\left[1-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ldots\right)=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}-\ldots.$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Функция $f(z)$, доопределенная в точке $z = 0$ единицей, т.е.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-z}}{z}, & \text{если} \quad z \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad z = 0, \end{cases}$$

является аналитической и в точке $z_0 = 0$. ▷

Пример 12. Определить характер особой точки $z_0 = 0$ функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}.$$

Решение. Разлагая функцию $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} - \ldots .$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом пятого порядка, так как наибольший показатель степени у z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен пяти. ▷

Пример 13. Определить характер особой точки $z = 1$ функции

$$f(z) = (z - 1)e^{1/(z-1)}.$$

Решение. Используя разложение

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$$

и полагая $u = \dfrac{1}{z-1}$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = (z - 1)\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + (z - 1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \frac{1}{3!(z-1)^2} + \ldots .$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $z - 1$. Следовательно, точка $z_0 = 1$ является существенно особой точкой функции $f(z)$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить характер указанных особых точек:

307. $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0 = \pi$. **308.** $\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0 = 1$.

309. $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$. **310.** $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$, $z_0 = 0$.

311. $\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0 = -\pi$. **312.** $\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0 = 0$, $z_0 = -1$.

313. $\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, $z_0 = 0$. **314.** $\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0 = 0$.

315. $\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0 = -e$. **316.** $\cos\dfrac{1}{z} + \sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$, $z_0 = 0$.

317. $z \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

§ 10. Вычеты функций

Пусть точка z_0 есть изолированная особая точка функции $f(z)$. ***Вычетом*** функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, обозначаемое символом $\operatorname{res} f(z_0)$ и определяемое равенством

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz. \tag{1}$$

(Другие обозначения: $\operatorname{res}[f(z); z_0]$, $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.) В качестве контура γ можно взять окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек функции $f(z)$. Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$:

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}. \tag{2}$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Если точка z_0 есть полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)(z-z_0)^n\}. \tag{3}$$

В случае простого полюса $(n = 1)$

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \tag{4}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, т. е. z_0 есть простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{5}$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения $\operatorname{res} f(z_0)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0; это и будет $\operatorname{res} f(z_0)$.

Пример 1. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $\dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$ являются точки $z = 0$ и $z = \dfrac{\pi}{4}$. В точке $z = 0$ имеем

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z\to 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}.$$

Следовательно, точка $z = 0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

В точке $z = \dfrac{\pi}{4}$ имеем $\lim\limits_{z\to\pi/4} f(z) = \infty$, т. е. точка $z = \dfrac{\pi}{4}$ есть полюс (первого порядка) функции $f(z)$.

Согласно формуле (4) имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\pi/4} f(z)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\pi/4} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \lim_{z\to\pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin\frac{\pi^2}{16}. \quad \triangleright$$

Пример 2. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

в ее особых точках.

Решение. Особые точки функции $f(z)$ суть $z=-1$ и $z=2$. Точка $z=-1$ для функции $f(z)$ является полюсом третьего порядка. Согласно формуле (3) имеем

$$\operatorname{res} f(-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

Точка $z=2$ — полюс первого порядка, поэтому по формуле (4)

$$\operatorname{res} f(2)=\lim_{z\to2}\frac{e^z}{(z+1)^3}=\frac{e^2}{27}. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ в ее особых точках.

Решение. Особые точки $f(z)$ — нули знаменателя, т. е. корни уравнения $z^4+1=0$. Имеем

$$z_1=e^{i\pi/4},\quad z_2=e^{i3\pi/4},\quad z_3=e^{-i3\pi/4},\quad z_4=e^{-i\pi/4}.$$

Пользуясь формулой (5), получаем

$$\operatorname{res} f(z_1)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{-i3\pi/4},$$

$$\operatorname{res} f(z_2)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i3\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{-i9\pi/4},$$

$$\operatorname{res} f(z_3)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-i3\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{i9\pi/4},$$

$$\operatorname{res} f(z_4)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-i\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{i3\pi/4}. \qquad \triangleright$$

Пример 4. Найти вычет функции

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$$

в ее особой точке.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть точка $z=0$. Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. В самом деле, лорановское разложение функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\ldots\right)=z-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^7}-\ldots,$$

т. е. содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z=0$ равен нулю, так как коэффициент c_{-1} в лорановском разложении $f(z)$ равен нулю. $\triangleright$

Если функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в точке z_0 имеют нули выше первого порядка, то в этом случае бывает удобно функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ заменить их разложениями в ряд Тейлора в окрестности точки z_0.

Пример 5. Найти вычет в точке $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z}.$$

Решение. Точка $z = 0$ является нулем как числителя $\varphi(z) = \sin 3z - 3\sin z$, так и знаменателя $\psi(z) = (\sin z - z)\sin z$. Определим порядки нуля для этих функций, используя разложение в ряд Тейлора $\sin z$ в окрестности точки $z = 0$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots .$$

Имеем

$$\varphi(z) = \sin 3z - 3\sin z = 3z - \frac{3^3z^3}{3!} + \frac{3^5z^5}{5!} - \ldots - 3\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{3^3 - 3}{3!}z^3 + \frac{3^5 - 3}{5!}z^5 - \ldots = z^3\varphi_1(z),$$

где

$$\varphi_1(z) = -\frac{3^3 - 3}{3!} + \frac{3^5 - 3}{5!}z^2 - \ldots, \quad \varphi_1(0) = -4 \neq 0;$$

$$\psi(z) = (\sin z - z)\sin z = \left(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= z^4\left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots\right)\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right) = z^4\psi_1(z),$$

где

$$\psi_1(z) = \left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots\right)\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right), \quad \psi_1(0) = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z} = \frac{z^3\varphi_1(z)}{z^4\psi_1(z)} = \frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)},$$

и так как $\varphi_1(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$, то точка $z = 0$ является простым полюсом данной функции, поэтому ее вычет в этой точке находим по формуле (5)

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)}z = \frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)} = \frac{-4}{-\frac{1}{6}} = 24. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие вычеты:

318. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

319. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{\sin 2z - 2z}{(1 - \cos z)^2}$.

320. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z)\sin z}$.

321. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{(1 - \operatorname{ch} z)\operatorname{sh} z}{(1 - \cos z)\sin^2 z}$.

322. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. **323.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}$.

Пример 6. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$$

в ее особых точках.

Решение. Особыми точками данной функции будут $z = 1$ и $z = 0$. Точка $z = 1$ — простой полюс, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \left.\frac{e^{1/z}}{-1}\right|_{z=1} = -e.$$

Для установления характера особой точки $z = 0$ разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки. Имеем

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots, \qquad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$$

Перемножая эти ряды, получим

$$\frac{e^{1/z}}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots\right)(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right)\frac{1}{z} + c_{-2}\frac{1}{z^2} + \ldots + \text{правильная часть},$$

где $c_{-k} \neq 0$, $k = 2, 3, \ldots$.

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z, то точка $z = 0$ является существенно особой точкой данной функции. Ее вычет в точке $z = 0$ равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e - 1. \qquad \triangleright$$

Пример 7. Найти вычет функции

$$f(z) = \cos z \sin\frac{1}{z}$$

в ее особой точке $z = 0$.

Решение. Для установления характера особой точки разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$. Имеем

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots.$$

Перемножая эти ряды, получим

$$f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!5!}+\ldots\right)\frac{1}{z}-$$

$$-\left(\frac{1}{0!3!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{4!7!}+\ldots\right)\frac{1}{z^3}+\ldots+\text{ правильная часть.}$$

Итак, ряд Лорана в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$$\cos z\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}\frac{1}{z}+c_{-3}\frac{1}{z^3}+\ldots+\text{ правильная часть,}$$

где $c_{-(2k-1)}\neq 0,\ k=1,2,\ldots$.

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов, а значит, точка $z=0$ — существенно особая точка данной функции. Искомый вычет равен

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left(\cos z\sin\frac{1}{z}\right)=c_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$$ ▷

Пример 8. Найти вычет функции

$$w=z^2\sin\frac{1}{z+1}$$

в ее особой точке.

Решение. Особой точкой данной функции является точка $z=-1$. Для установления характера этой точки разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=-1$. Для этого выразим z^2 через степени разности $z-(-1)=z+1$. Имеем

$$z^2=[(z+1)-1]^2=(z+1)^2-2(z+1)+1. \tag{6}$$

Ряд Лорана для функции $\sin\dfrac{1}{z+1}$ в окрестности точки $z=-1$ имеет вид

$$\sin\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\ldots. \tag{7}$$

Перемножая (6) и (7), найдем

$$w=z^2\sin\frac{1}{z+1}=[(z+1)^2-2(z+1)+1]\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\ldots\right]=$$

$$=\left(1-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z+1}+\frac{2}{3!}\frac{1}{(z+1)^2}+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{(z+1)^3}+\ldots+[-2+(z+1)].$$

Ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями суммы $z+1$. Следовательно, точка $z=-1$ является существенно особой точкой данной функции и ее вычет в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=-1}w=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}.$$ ▷

Пример 9. Найти вычет функции

$$f(z) = e^{1/z^2}\cos z$$

в точке $z = 0$.

Решение. Так как вычет в точке $z = 0$ равен коэффициенту при z^{-1}, то сразу получаем, что в данном случае этот вычет равен нулю, поскольку функция $f(z)$ — четная и ее разложение в окрестности точки $z = 0$ не может содержать нечетных степеней z. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти вычеты в особых точках следующих функций:

324. $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \dfrac{\pi}{4}z}$.

325. $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

326. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

327. $f(z) = \dfrac{e^z}{\dfrac{1}{4} - \sin^2 z}$.

328. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

329. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

330. $f(z) = \dfrac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$.

331. $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

332. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z} + z^3$.

333. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z - \dfrac{i}{2}\right)^2}$.

334. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.

335. $f(z) = e^{z^2 + 1/z^2}$.

336. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$.

337. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 - \dfrac{\pi}{2}z^2}$.

338. $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$.

339. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n > 0$ — целое).

340. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.

341. $f(z) = \sin z \cos\dfrac{1}{z}$.

342. $f(z) = e^{z/(z-1)}$.

343. $f(z) = \dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{1-z}$.

344. $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1+z}$.

345. $f(z) = e^{(z^2+1)/z}$.

346. $f(z) = e^z \sin\dfrac{1}{z}$.

§ 11. Теорема Коши о вычетах. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

1°. Теорема Коши о вычетах.

Теорема. *Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz.$$

Решение. В области $|z| < 4$ функция $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 + z}$ аналитична всюду, кроме $z = 0$ и $z = -1$.

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz = 2\pi i(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)).$$

Точка $z = 0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$, ибо

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1.$$

Поэтому $\operatorname{res} f(0) = 0$. Точка $z = -1$ — полюс первого порядка,

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z\to -1} \left(\frac{e^z - 1}{z(z+1)}(z+1) \right) = 1 - e^{-1}.$$

Таким образом,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz = 2\pi i(1 - e^{-1}).$$ ▷

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz.$$

Решение. В области D: $|z| < 2$ функция $f(z) = \operatorname{tg} z$ аналитична всюду, кроме точек $z = \dfrac{\pi}{2}$ и $z = -\dfrac{\pi}{2}$, являющихся простыми полюсами. Все другие особые точки $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ лежат вне области D и поэтому не учитываются.

Имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pi/2} = -1, \quad \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz = -4\pi i. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz.$$

Решение. В области D: $|z-i| < \dfrac{3}{2}$ функция $f(z) = \dfrac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z = i$ — полюс первого порядка и $z = 0$ — существенно особая точка.

По формуле (5) из § 9 имеем

$$\operatorname{res} f(i) = \left.\frac{e^{1/z^2}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Для нахождения вычета в точке $z = 0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Однако в данном случае искать ряд Лорана нет необходимости: функция $f(z)$ четная, и поэтому можно заранее сказать, что в ее лорановском разложении будут содержаться только четные степени z и $\dfrac{1}{z}$. Так что $c_{-1} = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e}. \qquad \triangleright$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

Решение. В круге $|z| \leqslant 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки $z = 1$ и $z = 0$. Легко установить, что $z = 1$ есть простой полюс, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=1}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right) = \left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1} = \sin 1.$$

Для установления характера особой точки $z = 0$ напишем ряд Лорана для функции $\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ в окрестности этой точки. Имеем

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z} = -(1+z+z^2+\ldots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots\right)\frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots + \text{правильная часть.}$$

$$c_{-k} \neq 0, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z, то точка $z = 0$ является существенно особой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} = c_{-1} = -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots\right) = -\sin 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i(\sin 1 - \sin 1) = 0. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

347. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z\,dz.$ **348.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, где C: $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$.

349. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z^3(z+1)}.$ **350.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz.$ **351.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz.$

352. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}\,dz.$ **353.** $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z\,dz}{e^z+3}.$ **354.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z}.$

355. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z\,dz}{z^4+2z^2+1}.$ **356.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}\,dz}{(z-\pi)^3}.$

357. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz$, C: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. **358.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$, C: $x^2+y^2-2x=0$.

359. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, C: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. **360.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz$, C: $x^2+y^2=16$.

361. $\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}\,dz$, C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$. **362.** $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}\,dz$, C: $x^2+y^2=2x$.

363. $\int\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}\,dz$. **364.** $\int\limits_{|z|=1/3} (z+1)e^{1/z}\,dz$.

365. $\int\limits_{|z|=2/3} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$.

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Говорят, что функции $f(z)$ ***аналитична в бесконечно удаленной точке*** $z=\infty$, если функция

$$\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

аналитична в точке $\zeta=0$.

Например, функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ аналитична в точке $z=\infty$, поскольку функция

$$\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sin\zeta$$

аналитична в точке $\zeta=0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z=\infty$).

Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Функция $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ имеет в бесконечности неизолированную особенность: полюсы $z_k=k\pi$ этой функции накапливаются в бесконечности, если $k\to\infty$.

Говорят, что $z=\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Критерии типа бесконечно удаленной особой точки, связанные с разложением Лорана, изменяются по сравнению с критериями для конечных особых точек.

Теорема 1. *Если $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z; если $z=\infty$ — полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z,* *в случае существенной особенности — бесконечное число положительных степеней z.*

При этом лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки будем называть разложение $f(z)$ в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z = 0$ (кроме, быть может, самой этой точки $z = \infty$).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = \infty$ (кроме, быть может, самой этой точки).

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечности называют величину

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-} f(z)\, dz, \tag{1}$$

где γ^- — достаточно большая окружность $|z| = \rho$, **проходимая по часовой стрелке** (так что окрестность точки $z = \infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = a$).

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \tag{2}$$

Пример 5. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ в бесконечности.

Для функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ имеем $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$. Это выражение можно рассматривать как ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки. Имеем очевидно, что

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1,$$

так что точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, и мы полагаем, как обычно, $f(\infty) = 1$. Здесь $c_{-1} = 1$ и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(\infty) = -1. \qquad \triangleright$$

Из этого примера следует, что вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки, *в отличие от конечной устранимой особой точки, может оказаться отличным от нуля.*

Известные разложения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ можно рассматривать также как лорановские разложения в окрестности точки $z = \infty$. Так как все эти разложения содержат бесконечное множество положительных степеней z, то перечисленные функции имеют в точке $z = \infty$ существенную особенность.

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.*

Так что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечные особые точки функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k) = 0,$$

или

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k). \tag{3}$$

Последнее соотношение бывает удобно использовать при вычислении некоторых интегралов.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$$

Решение. Полюсами (конечными) подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

являются корни z_1, z_2, z_3, z_4 уравнения $z^4 = -1$, которые все лежат внутри окружности $|z| = 2$. Функция $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \ldots,$$

из которого видно, что $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$. В силу равенства (3)

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 0. \qquad \triangleright$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}\,dz.$$

Решение. Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}$$

внутри окружности $|z| = 3$ имеет пять особых точек, являющихся кратными полюсами. Использование основной теоремы о вычетах приводит к большим вычислениям. Для вычисления данного интеграла удобнее использовать равенство (3), в силу которого будем иметь

$$I = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty). \tag{3'}$$

Так как функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}=\frac{z^{17}}{z^6\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3\left(1+\frac{3}{z^3}\right)^4 z^{12}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3\left(1+\frac{3}{z^3}\right)^4},$$

то отсюда видно, что правильная часть лорановского разложения этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ начинается с члена $1/z$. Следовательно, $\operatorname{res} f(\infty)=-1$. Подставляя эту величину в равенство (3), получим $I=2\pi i$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

366. $f(z)=\dfrac{z^3-z^2+z+6}{z^2}$. **367.** $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4}$.

368. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$. **369.** $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$. **370.** $f(z)=e^{1/z^2}$. **371.** $f(z)=z^3e^{1/z}$.

372. Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z)=\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(\zeta)$ — аналитична в точке $\zeta=0$. Доказать, что $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\varphi'(0)$.

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить следующие интегралы:

373. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3}\,dz$. **374.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^{12}}$. **375.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{1000z+2}{1+z^{1224}}\,dz$.

376. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{e^z}{z-1}\,dz$. **377.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$. **378.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z^9}{z^{10}-1}\,dz$.

2°. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. *1. Интегралы от рациональных функций.* Пусть $f(x)$ — рациональная функция, $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены соответственно степеней m и n. Если $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x)\neq 0$) и $n\geqslant m+2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sigma, \tag{4}$$

где σ обозначает сумму вычетов функции $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}\quad(a>0).$$

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ — четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, которая на действительной оси, т. е. при $z=x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z=ai$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен

$$\operatorname{res} f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[f(z)(z-ai)^2]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{ai4}.$$

Пользуясь формулой (4), получим

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{4a}.\quad\triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы с бесконечными пределами:

379. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ **380.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\quad(a>0,\ b>0).$

381. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$ **382.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$ **383.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$

384. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}.$ **385.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{x+1}{x^6+1}\,dx.$

386. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx.$ **387.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}.$ **388.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

389. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4} \quad (a>0,\ b>0).$

390. Доказать формулу $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi.$

---

2. Интегралы вида

$$\int\limits_0^{\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx, \qquad \int\limits_0^{\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx,$$

где $R(x)$ — правильная рациональная дробь, $\lambda > 0$ — любое вещественное число.

При вычислении таких интегралов удобно пользоваться следующей леммой:

Лемма Жордана. *Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости* $(0 < \arg z < \pi)$, *за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при* $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0,$$

где контур C_R — полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 *и радиусом* R (рис. 7).

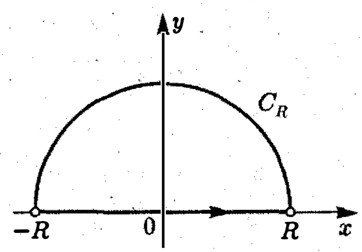


Рис. 7

Пример 9. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}\,dx \quad (a>0,\ k>0).$$

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Нетрудно видеть, что если $z = x$, то $\operatorname{Im} f(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x) = \dfrac{x\sin ax}{x^2+k^2}$. Рассмотрим контур, указанный на рис. 7. При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z) = \dfrac{z}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству

$|g(z)| < \dfrac{R}{R^2 - k^2}$ и, следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$. Значит, по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\, dz = 0. \tag{5}$$

Для любого $R > k$ по теореме о вычетах имеем

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}\, dx + \int\limits_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\, dz = 2\pi i\sigma,$$

где

$$\sigma = \operatorname*{res}_{z=ik} \left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right) = \lim_{z\to ik} \left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right) = \frac{1}{2}e^{-ak}.$$

В пределе при $R \to \infty$, учитывая соотношение (5), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}\, dx = \pi i e^{-ak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}\, dx = \pi e^{-ak}.$$

В силу того, что подынтегральная функция четная, окончательно получим

$$I = \frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$ ▷

Пример 10. Найти интегральное представление единичной функции (функции Хевисайда)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{e^{-izt}}{z}\, dz,$$

где контур C изображен на рис. 8.

Замыкая контур полуокружностью C_R, лежащей в верхней полуплоскости, замечаем, что при $t < 0$ в силу леммы Жордана интегралы

$$\int\limits_{C_R} \frac{e^{-izt}}{z}\, dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty,$$

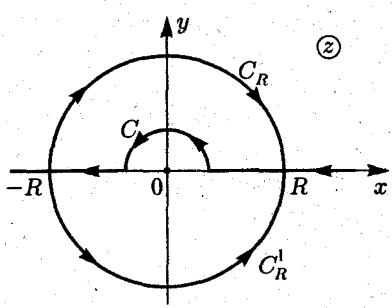


Рис. 8

и, так как в области с таким замкнутым контуром подынтегральная функция аналитична, получаем, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Построим теперь замыкание контура с помощью окружности C_R^1, лежащей в нижней полуплоскости. Теперь при $t > 0$ опять получаем в силу леммы Жордана, что интегралы

$$\int\limits_{C_R^1} \frac{e^{-izt}}{z}\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Но теперь точка $z = 0$ лежит внутри контура интегрирования. Значит, в силу теоремы Коши о вычетах

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-izt}}{z}\,dz = 1 \quad (t > 0).$$

Итак,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-izt}}{z}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Таким образом, рассмотренный интеграл представляет собой разрывную функцию. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

391. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2 - 2x + 10}$.

392. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2 + 4x + 20}\,dx$.

393. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

394. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+9}$.

395. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}\,dx \quad (a > 0)$.

396. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx \quad (a > 0)$.

397. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2+x^2}\,dx \quad (m > 0,\ a > 0)$.

398. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}\,dx$.

399. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{(x^2+1)(x^2+9)} \quad (\lambda > 0)$.

400. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3\sin ax}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (a > 0)$.

401. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

402. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3x^2-a^2}{(x^2+b^2)^2}\cos mx\,dx$.

Пример 11. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx \qquad (6)$$

$$(a > 0,\ b > 0).$$

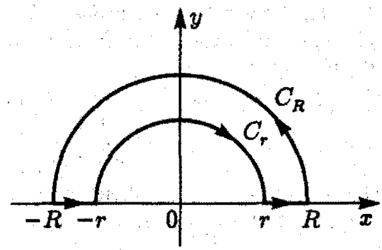


Рис. 9

<u>*Решение*</u>. Введем функцию

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$$

такую, что при $z = x$ $\operatorname{Im} f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией в (6). Функция $f(z)$ имеет особенность на вещественной оси — полюс первого порядка в точке $z = 0$. Поэтому контур интегрирования выберем так, как указано на рис. 9 (особая точка $z = 0$ обходится малым полукругом C_r $(r < b)$; полукруг C_R выбираем так, чтобы $b < R$).

Таким образом, внутри замкнутого контура находится лишь один полюс функции $f(z)$ в точке $z = bi$. Согласно теореме Коши о вычетах

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx + \int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz + \\ + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz = 2\pi i\sigma, \qquad (7)$$

где

$$\sigma = \operatorname*{res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \lim_{z\to bi} \frac{e^{iaz}(z-bi)}{z(z^2+b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}. \qquad (8)$$

Заменяя в первом интеграле (7) x на $-x$ и объединяя его с третьим интегралом, получим

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx = \\ = \int_r^R \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx. \qquad (9)$$

Так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{1}{b^2},$$

то подынтегральная функция $\dfrac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ представима в виде

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}\frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z},$$

где $\lim\limits_{z\to 0}\psi(z)=0$. Полагая $z=re^{i\varphi}$, находим

$$\int\limits_{C_r}\frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+b^2)}=\frac{1}{b^2}\int\limits_{C_r}\frac{dz}{z}+\int\limits_{C_r}\frac{\psi(z)}{z}\,dz=-\frac{i\pi}{b^2}+i\int\limits_{\pi}^{0}\psi(re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{10}$$

Интеграл в правой части (10) при $r\to 0$ имеет пределом нуль

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{\pi}^{0}\psi(re^{i\varphi})\,d\varphi=0. \tag{11}$$

Наконец, согласно лемме Жордана, четвертый интеграл в левой части (7) стремится к нулю при $R\to\infty$, ибо функция $g(z)=\dfrac{1}{z(z^2+b^2)}$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz=0. \tag{12}$$

Таким образом, при $R\to\infty$ и $r\to 0$ равенство (7) с учетом соотношений (8)–(12) принимает вид

$$2i\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx-\frac{\pi i}{b^2}=-\pi i\frac{e^{-ab}}{b^2},$$

откуда

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

403. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$ **404.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx.$

405. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx\quad(a>0,\ b>0).$

406. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)^2}\,dx.$

3. Вычисление интегралов, содержащих показательную функцию

Пример 12. Вычислить интегралы Френеля

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx,$$

$$I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx,$$

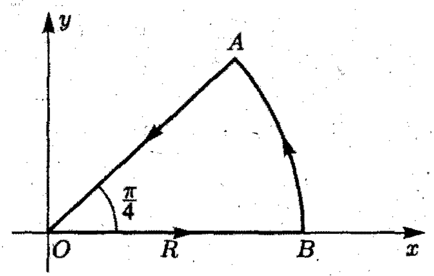


Рис. 10

зная, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = e^{iz^2}$ и контур, указанный на рис. 10 (круговой сектор $OBAO$, где $OA = OB = R$ и $\angle BOA = \frac{\pi}{4}$). Внутри этого контура $f(z)$ — аналитическая, и по теореме Коши

$$\int\limits_{OBAO} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz + \int\limits_{AO} e^{iz^2}\,dz = 0. \tag{14}$$

Покажем, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz = 0. \tag{15}$$

Действительно, полагая $z^2 = \xi$, получим $dz = \dfrac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$ и

$$\int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz = \int\limits_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}\,d\xi,$$

где Γ_{R^2} — четверть дуги окружности радиуса R^2.

Функция $g(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, а значит,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}}\,d\xi = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz = 0.$$

На отрезке AO: $z = \rho e^{i\pi/4}$, $z^2 = \rho^2 e^{i\pi/2} = \rho^2 i$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Отсюда

$$\int\limits_{AO} e^{iz^2}\,dz = \int_R^0 e^{-\rho^2} e^{i\pi/4}\,d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2}\,d\rho. \tag{16}$$

Перейдя в (14) к пределу при $R \to \infty$, с учетом (15), (16), и (13) будем иметь

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2}\,dx = e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

или

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

откуда получаем

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad \triangleright$$

Пример 13. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \quad (0 < a < 1).$$

<u>*Решение.*</u> Выберем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

и контур, указанный на рис. 11 (прямоугольник со сторонами $2R$ и 2π). Внутри этого контура $f(z)$ аналитична, за исключением точки $Z = \pi i$, которая является для нее простым полюсом

$$\operatorname{res} f(\pi i) = \left.\frac{e^{az}}{(1+e^z)'}\right|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

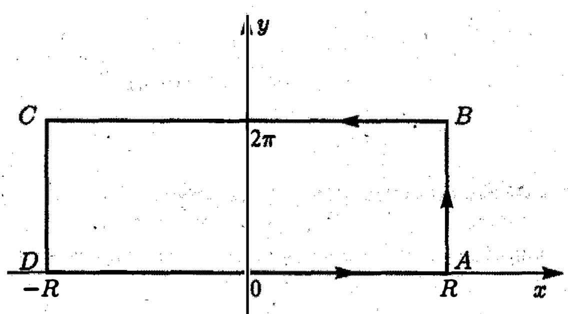


Рис. 11

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{DA} f(z)\,dz + \int\limits_{AB} f(z)\,dz + \int\limits_{BC} f(z)\,dz + \int\limits_{CD} f(z)\,dz = -2\pi i e^{a\pi i}. \tag{17}$$

На отрезке DA: $z = x$, $-R \leqslant x \leqslant R$; поэтому

$$\int_{DA} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx. \tag{18}$$

На отрезке AB: $z = R + iy$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$; поэтому

$$\left|\frac{e^{az}}{1+e^z}\right| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^R-1}.$$

Значит,

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}\,dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty \quad (\text{ибо} \quad 0<a<1). \tag{19}$$

Аналогично получаем

$$\left|\int_{CD} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}2\pi \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty. \tag{20}$$

На отрезке BC: $z = x + 2\pi i$, $-R \leqslant x \leqslant R$; поэтому

$$\int_{BC} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx. \tag{21}$$

Переходя к пределу в (17) при $R\to\infty$ и учитывая (18)–(21), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы, содержащие показательную функцию:

407. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

Указание. Взять $f(z) = e^{-az^2}$, контур — прямоугольник со сторонами $2R$ и $\dfrac{b}{2a}$.

408. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x}\,dx \quad (0 < a < 1,\ 0 < b < 1).$

Указание. Взять $f(z) = \dfrac{e^{az} - e^{bz}}{1+e^z}$, контур — как на рис. 11.

---

4. *Вычисление интегралов вида*

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,dx, \tag{22}$$

где R — рациональная функция аргументов $\cos x$ и $\sin x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования.

Полагаем $e^{ix} = z$, тогда $dx = \dfrac{dz}{iz}$ и

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Очевидно, в этом случае $|z| = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Интеграл (22) принимает вид

$$\int\limits_C F(z)\,dz, \tag{23}$$

где C — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Согласно теореме Коши о вычетах интеграл (23) равен $2\pi\sigma i$, где σ есть сумма вычетов относительно полюсов, заключенных внутри окружности C.

Пример 14. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} \quad (a > b > 0).$$

Решение. Применяя подстановку $e^{ix} = z$, получим после простых преобразований

$$I = \frac{4}{i}\int\limits_C \frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2} = \frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} F(z_k).$$

Внутри единичного круга при условии, что $a > b > 0$, находится только один полюс (двукратный)

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Вычет функции

$$F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$$

относительно этого полюса

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right) = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Итак,

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

409. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}$ $(0 < p < 1)$. **410.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\, dx}{1 - 2p\cos 2x + p^2}$ $(0 < p < 1)$.

411. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{1 - 2p\cos x + p^2}$ $(p > 1)$. **412.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{1 - 2p\sin x + p^2}$ $(0 < p < 1)$.

413. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}$ $(a > 1)$. **414.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x - a)\, dx$ $(\operatorname{Im} a > 0)$.

415. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b\cos x}\, dx$ $(a > b > 0)$.

416. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x}$ $(0 < a < 1)$.

417. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}$ $(0 < b < a)$.

3°. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов. 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_k$, не совпадающих ни с одной из точек $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и пусть $f(z)$ удовлетворяет условию

$f(z) = O(z^{-2})$ при $z \to \infty$ [1]. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=z_m} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \tag{24}$$

Пример 15. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

где $a \neq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

Эта функция всюду аналитична, кроме точек $z_1 = ai$ и $z_2 = -ai$, которые являются простыми полюсами. Так как

$$f(z) = \frac{1}{z^2\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = O(z^{-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Применяя формулу (24), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \left(\operatorname*{res}_{z=ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} + \operatorname*{res}_{z=-ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} \right).$$

Для функции $\dfrac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2}$ точки $z_1 = ai$ и $z_2 = -ai$ являются простыми полюсами, а значит, ее вычеты будут равны

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} = \left. \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{2z} \right|_{z=z_k} = \frac{\operatorname{ctg} \pi z_k}{2z_k}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \left(\frac{\operatorname{ctg} \pi ai}{2ai} + \frac{\operatorname{ctg} (-\pi ai)}{-2ai} \right) = \frac{\pi}{a} i \operatorname{ctg} (\pi ai) = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a.$$

---

[1] Запись «$f(z) = O(g(z))$ при $z \to \infty$» означает, что соотношение $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ограничено при $z \to \infty$:

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leqslant C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}, \quad C > 0.$$

Ряд в левой части последнего равенства можно записать в следующем виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \ldots + \frac{1}{(-n)^2+a^2} + \ldots + \frac{1}{(-2)^2+a^2} + \frac{1}{(-1)^2+a^2} +$$

$$+\frac{1}{0^2+a^2} + \frac{1}{1^2+a^2} + \frac{1}{2^2+a^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+a^2} + \ldots = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}.$$

Искомая сумма данного ряда будет равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{a}\operatorname{cth}\pi a - \frac{1}{a^2 2} = \frac{\pi a \operatorname{cth}\pi a - 1}{2a^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти суммы следующих рядов, в которых число a не является целым:

418. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$. **419.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-a^4}$.

420. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$. **421.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2. Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, кроме конечного числа полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_k$, не совпадающих ни с одной из точек $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, и пусть $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant e^{\alpha|\operatorname{Im} z|}\varepsilon(|z|), \tag{25}$$

где $\varepsilon(|z|) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in G_\rho$; $0 \leqslant \alpha < \pi$. Здесь G_ρ — вся плоскость с выброшенными из нее кругами $|z - z_m| \leqslant \rho$, $m = 1, 2, \ldots, k$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{m=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=z_m} \frac{f(z)}{\sin \pi z}. \tag{26}$$

Пример 16. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}, \quad a \neq 0.$$

Решение. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ имеет два простых полюса $z_1 = ai$ и $z_2 = -ai$ и она удовлетворяет условию (25), так как

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+a^2|} \leqslant \frac{1}{|z|^2-|a|^2},$$

здесь $\alpha = 0$, $\varepsilon(|z|) = \dfrac{1}{|z|^2-|a|^2} \to 0$ при $z \to \infty$.

Применяя формулу (26), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\pi\left(\operatorname*{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z} + \operatorname*{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z}\right).$$

Находим вычеты функции $\dfrac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z}$ в точках z_k, $k = 1, 2$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z} = \frac{1}{2z_k\sin\pi z_k + (z_k^2+a^2)\pi\cos\pi z_k},$$

откуда

$$\operatorname*{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z} = \frac{1}{2ai\sin\pi ai} = -\frac{1}{2a\operatorname{sh}\pi a},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin\pi z} = -\frac{1}{2a\operatorname{sh}\pi a}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a\operatorname{sh}\pi a}.$$

Далее имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \ldots + \frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2+a^2} + \ldots + \frac{(-1)^{-2}}{(-2)^2+a^2} + \frac{(-1)^{-1}}{(-1)^2+a^2} +$$

$$+ \frac{(-1)^0}{0^2+a^2} + \frac{(-1)^1}{1^2+a^2} + \frac{(-1)^2}{2^2+a^2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \ldots = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2},$$

а значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi}{2a\operatorname{sh}\pi a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}\left(1 + \frac{\pi a}{\operatorname{sh}\pi a}\right). \ \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти суммы следующих рядов, считая число a нецелым:

422. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$. **423.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

424. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha n}{n^2+a^2}$, $-\pi < \alpha < \pi$.

425. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^2}$.

§ 12. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше

Определение. *Логарифмической производной* функции $f(z)$ называется функция $\varphi(z)$, являющаяся производной от логарифма функции $f(z)$:

$$\varphi(z) = [\operatorname{Ln} f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Особыми точками функции $\varphi(z)$ могут быть только нули или особые точки функции $f(z)$.

Вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки, являющейся нулем функции $f(z)$, равен порядку нуля, а относительно точки, являющейся полюсом функции, — порядку этого полюса со знаком минус.

Пример 1. Найти вычеты логарифмической производной функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z+1}$$

относительно ее нулей и полюсов.

Решение. Данная функция имеет бесконечное множество простых нулей $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и один простой полюс $z = -1$. Отсюда

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти вычеты логарифмических производных данных функций относительно их нулей и полюсов:

426. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. **427.** $f(z) = \cos^3 z$.

428. а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$; б) $f(z) = \sin z$.

Пусть функция $f(z) \neq 0$ аналитична во всех точках замкнутого контура C. Величина

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

называется *логарифмическим вычетом функции* $f(z)$ относительно замкнутого контура C.

Теорема о логарифмическом вычете. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D, кроме конечного числа полюсов, и на границе C этой области не имеет ни нулей, ни полюсов. Тогда разность между числом нулей и полюсов $f(z)$ в D, подсчитанных с их порядками, будет равна логарифмическому вычету функции $f(z)$ относительно замкнутого контура C:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

где N — число нулей $f(z)$ в D, P — число полюсов $f(z)$ в D.

Логарифмический вычет многочлена

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

относительно контура C равен числу нулей этого многочлена (с учетом их кратности) в области D, ограниченной контуром C.

Пример 2. Найти логарифмический вычет функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{e^{iz} - 1}$$

относительно контура C: $|z| = 8$.

<u>*Решение.*</u> Находим нули z_k функции $f(z)$. Для этого решаем уравнение $\operatorname{ch} z = 0$ или $e^z + e^{-z} = 0$. Записав последнее уравнение в виде $e^{2z} = -1$, найдем

$2z = \mathrm{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$, так что $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (все нули простые). Для нахождения полюсов функции $f(z)$ решаем уравнение $e^{iz} - 1 = 0$ или $e^{iz} = 1$. Имеем $iz = \mathrm{Ln}\,1 = 2m\pi i$, $z_m = 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В круге $|z| < 8$ находятся нули

$$z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, -3)$$

и простые полюсы

$$z_m = 2mn \quad (m = 0, \pm 1)$$

функции $f(z)$. Число нулей $N = 6$, число полюсов $P = 3$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=8}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 6 - 3 = 3. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти логарифмический вычет функции

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$$

относительно окружности $|z| = \pi$.

◁ *Решение.* Полагая $1 + z^2 = 0$, находим два простых нуля функции $f(z)$: $a_1 = -i$, $a_2 = i$. Полагая $1 - \cos 2\pi z = 0$, найдем полюсы функции $f(z)$: $z_n = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Кратность полюсов $k = 2$.

В круге $|z| < \pi$ данная функция имеет два простых нуля $a_1 = -i$, $a_2 = i$ и семь двукратных полюсов

$$z_1 = -3, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 1, \quad z_6 = 2, \quad z_7 = 3.$$

Итак, $N = 2$ и $P = 7$. В силу теоремы о логарифмическом вычете получаем, что логарифмический вычет данной функции $f(z)$ относительно окружности $|z| = \pi$ будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2 - 7\cdot 2 = -12. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти логарифмические вычеты данных функций относительно указанных контуров:

429. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^3}$, $\quad C$: $|z| = 2$.

430. $f(z) = \cos z + \sin z$, $\quad C$: $|z| = 4$.

431. $f(z) = (e^z - 2)^2$, $\quad C$: $|z| = 8$.

432. $f(z) = \mathrm{th}\, z$, $\quad C$: $|z| = 8$.

433. $f(z) = \mathrm{tg}^3 z$, $\quad C$: $|z| = 6$.

434. $f(z) = 1 - \mathrm{th}^2 z$, $\quad C$: $|z| = 2$.

Принцип аргумента. *Логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно замкнутого контура C равен приращению $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ аргумента $f(z)$ при обходе контура C, деленному на 2π:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Следовательно, разность между числом нулей и полюсов функции $f(z)$, заключенных в области D, равна

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Другими словами, разность $N - P$ равна числу оборотов, которые совершает в плоскости w вектор, идущий из точки $w = 0$ в точку $w = f(z)$, когда точка z описывает контур C (число оборотов считается положительным, если вектор вращается против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае).

В частном случае, когда функция $w = f(z)$ является аналитической в области D и на ее границе C, на которой она не обращается в нуль, логарифмический вычет $f(z)$ относительно C дает число нулей $f(z)$ в D, которое равно изменению $\operatorname{Arg} f(z)$ при обходе контура C, деленному на 2π:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z) = N.$$

Это имеет место, например, для многочлена $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Пример 4. Найти число корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ уравнения

$$Q_5(z) \equiv z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0.$$

Решение. В силу принципа аргумента число нулей внутри контура C равно

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z),$$

где контур C состоит из полуокружности C_R: $|z| = R$, $\operatorname{Re} z > 0$, и ее диаметра на мнимой оси; радиус R считаем столь большим, что все нули многочлена $Q_5(z)$, находящиеся в правой полуплоскости, попадают внутрь полукруга $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$. Имеем

$$Q_5(z) = z^5\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{Arg} Q_5(z) = \operatorname{Arg}\left[z^5\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)\right] =$$

$$= \operatorname{Arg} z^5 + \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right) =$$
$$= 5\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right).$$

Приращение аргумента $Q_5(z)$ при обходе в положительном направлении полуокружности C_R будет равно

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5 \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right).$$

Оба предела в правой части существуют и равны соответственно

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = \pi, \qquad \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi.$$

Пусть теперь точка z движется по мнимой оси от $z = iR$ до $z = -iR$. Положим $z = it$, $-R \leqslant t \leqslant R$. Тогда

$$Q_5(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t),$$

откуда

$$\begin{cases} u = t^4 - 1, \\ v = t^5 - 2t^3 - 8t. \end{cases} \tag{1}$$

Это — параметрические уравнения линии, которую описывает точка $w = Q_5(z)$ в плоскости (u, v), когда точка z пробегает мнимую ось сверху вниз. Для построения этой линии найдем точки ее пересечения с координатными осями Ou и Ov. Приравняв u и v нулю, получим соответственно

$$t^4 - 1 = 0, \quad \text{или} \quad t = \pm 1, \tag{2}$$
$$t^5 - 2t^3 - 8t = 0, \quad \text{или} \quad t = \pm 2, \quad t = 0. \tag{3}$$

Заметим, что уравнения (2), (3) не имеют общих корней (действительных), так что многочлен $Q_5(z)$ не имеет нулей на мнимой оси. Следовательно, применение принципа аргумента к контуру законно. Корни уравнений (2) и (3) располагаем в порядке убывания, т. е. в порядке обхода контура, и находим соответствующие значения u и v:

№	t	u	v
1	2	15	0
2	1	0	−9
3	0	−1	0
4	−1	0	9
5	−2	15	0

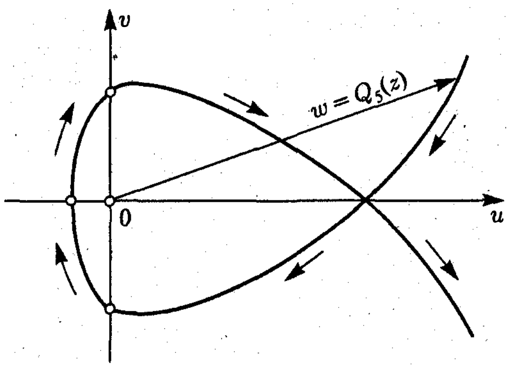


Рис. 12

Далее

$$\lim_{t\to\pm\infty} u = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} v = \pm\infty.$$

Эти данные позволяют построить интересующую нас линию (рис. 12).

Из рис. 12 видно, что вектор $w = Q_5(z)$ повернется на угол $\varphi = 3\pi$ в отрицательном направлении. Следовательно,

$$\Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi,$$

откуда число нулей в правой полуплоскости будет равно

$$N = \frac{2\pi}{2\pi} = 1. \qquad \triangleright$$

Пример 5. Найти число корней уравнения

$$Q_7(z) \equiv z^7 - 2z - 5 = 0$$

в правой полуплоскости.

Решение. Выбираем контур C, как указано в примере 4. Тогда

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) = \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}(z^7 - 2z - 5) =$$
$$= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left[z^7\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)\right] = 7\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) =$$
$$= 7\pi + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) \to 7\pi \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

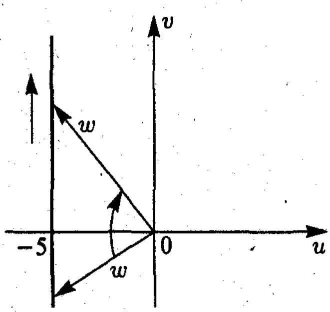


Рис. 13

Полагаем $z = it$ $(-R \leqslant t \leqslant R)$. Тогда

$$Q_7(it) = u(t) + iv(t) = -5 + i(-t^7 - 2t),$$

откуда

$$\begin{cases} u = -5, \\ v = -t(t^6 + 2). \end{cases}$$

Так как $u \neq 0$, то применение принципа аргумента законно ($Q_7(z)$ на мнимой оси не имеет нулей). Эта линия — прямая (рис. 13). Вектор $w = Q_7(z)$ делает поворот в отрицательном направлении на π радиан. Значит,

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) \xrightarrow[R\to\infty]{} 7\pi - \pi = 6\pi$$

и

$$N = \frac{6\pi}{2\pi} = 3,$$

т. е. данное уравнение имеет три корня в правой полуплоскости. $\triangleright$

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих уравнений определить число корней в правой полуплоскости:

435. $z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$. **436.** $z^3-2z-5=0$.

437. $z^3-4z^2+5=0$. **438.** $2z^3-z^2-7z+5=0$.

439. $z^5+5z^4-5=0$. **440.** $z^{12}-z+1=0$.

Теорема Руше. *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, аналитические в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром C, во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству $|f(z)|>|\varphi(z)|$. Тогда их сумма $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ и функция $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).*

Пример 6. Найти число нулей функции

$$F(z)=z^8-4z^5+z^2-1$$

внутри единичного круга $|z|<1$.

Решение. Представим функцию $F(z)$ в виде суммы двух функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, которые выберем, например, так:

$$f(z)=-4z^5,\quad \varphi(z)=z^8+z^2-1.$$

Тогда на окружности $|z|=1$ будем иметь

$$|f(z)|=|-4z^5|=4,$$

$$|\varphi(z)|=|z^8+z^2-1|\leqslant|z^8|+|z^2|+1=3.$$

Итак, на границе $|z|=1$ круга выполняется неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$. Функция $f(z)=-4z^5$ имеет пятикратный нуль в начале координат. В силу теоремы Руше функция

$$F(z)=f(z)+\varphi(z)=z^8-4z^5+z^2-1$$

имеет в круге $|z|<1$ пять нулей. Заметим, что возможен и другой выбор функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, например, такой:

$$f(z)=z^8-4z^5,\quad \varphi(z)=z^2-1.$$ ▷

Пример 7. Определить число корней уравнения

$$z^6-6z+10=0$$

внутри круга $|z|<1$.

Решение. Положим, например $f(z)=10$ и $\varphi(z)=z^6-6z$. На окружности $|z|=1$ имеем

$$|f(z)|=10,\quad |\varphi(z)|=|z^6-6z|\leqslant|z^6|+6|z|=7.$$

Итак, во всех точках окружности $|z|=1$ выполняется неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$. Функция $f(z)=10$ не имеет нулей внутри круга $|z|<1$, а значит, по теореме Руше, не имеет нулей и функция $z^6-6z+10$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой Руше, найти число корней данных уравнений в указанных областях:

441. $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$, $|z| < 2$.

442. $z^3 + z + 1 = 0$, $|z| < \frac{1}{2}$.

443. $z^5 + z^2 + 1 = 0$, $|z| < 2$.

444. $z^8 + 6z + 10 = 0$, $|z| < 1$.

445. $27z^{11} - 18z + 10 = 0$, $|z| < 1$.

446. $z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0$, $|z| < 1$.

Пример 8. Сколько корней уравнения

$$z^4 - 5z + 1 = 0 \tag{4}$$

находится в кольце $1 < |z| < 2$?

Решение. Пусть N — число корней уравнения (4) в кольце $1 < |z| < 2$. Тогда $N = N_2 - N_1$, где N_1 — число корней уравнения (4) в круге $|z| < 1$, N_2 — число корней уравнения (4) в круге $|z| < 2$ $(N_2 \geqslant N_1)$. Нетрудно видеть, что на окружности $|z| = 1$ уравнение (4) корней не имеет: если $|z| = 1$, то $|z^4 - 5z + 1| \geqslant 3$.

Для нахождения N_1 возьмем $f(z) = -5z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$. На окружности $|z| = 1$ имеем $|f(z)| > |\varphi(z)|$, так как $|f(z)| = |-5z| = 5$, $|\varphi(z)| = |z^4 + 1| \leqslant |z^4| + 1 = 2$. Функция $f(z) = -5z$ в круге $|z| < 1$ имеет один нуль, следовательно, $N_1 = 1$

Для нахождения N_2 возьмем $f(z) = z^4$, $\varphi(z) = 1 - 5z$. На окружности $|z| = 2$ имеем $|f(z)| > |\varphi(z)|$, так как $|f(z)| = |z^4| = 2^4 = 16$, $|\varphi(z)| = |1 - 5z| \leqslant 1 + 5|z| = 11$. Функция $f(z) = z^4$ имеет четыре корня в круге $|z| < 2$, и, следовательно, $N_2 = 4$.

Число корней уравнения (4) в кольце $1 < |z| < 2$ будет $N = 4 - 1 = 3$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах определить количество корней данных уравнений в указанных кольцах:

447. $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$, $2 < |z| < 3$.

448. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$, $1 < |z| < 2$.

449. $z^6 - 8z + 10 = 0$, $1 < |z| < 3$.

Пример 9. Найти число корней уравнения

$$z^2 - ae^z = 0, \quad \text{где} \quad 0 < a < e^{-1},$$

в единичном круге $|z| < 1$.

Решение. Положим $f(z) = z^2$ и $\varphi(z) = -ae^z$. На окружности $|z| = 1$ имеем

$$|f(z)| = |z^2| = 1,$$

$$|\varphi(z)| = |-ae^z| = a|e^z| = a|e^{x+iy}| = ae^x \leqslant ae < 1$$

в силу условий $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 < a < e^{-1}$.

Итак, $|f(z)| > |\varphi(z)|$, если $|z| = 1$. Функция $f(z) = z^2$ в круге $|z| < 1$ имеет двукратный корень в начале координат. Следовательно, по теореме Руше исходное уравнение в круге имеет два корня. ▷

Замечание. Рассмотрим действительную функцию $F(x) = x^2 - ae^x$. Эта функция на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ непрерывна. Кроме того,

$$F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0, \qquad \text{так как} \quad 0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1,$$

$$F(0) = -a < 0,$$

$$F(1) = 1 - ae > 0, \qquad \text{так как} \quad a < e^{-1}.$$

Таким образом, на концах отрезков $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $F(x)$ принимает значения разных знаков. Отсюда следует, что данное уравнение в круге $|z| < 1$ имеет два действительных корня разных знаков.

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах определить число корней данных уравнений в указанных областях:

450. $e^{z-\lambda} = z \quad (\lambda > 1), \quad |z| < 1.$

451. $e^z = az^n$, где n — натуральное число и $|a| > \dfrac{e^R}{R^n}$, $|z| < R$.

452. $z^2 - \cos z = 0, \quad |z| < 2.$

453. $z^4 - \sin z = 0, \quad |z| < \pi.$

454. $z^2 + \operatorname{ch} iz = 0, \quad |z| < 0{,}5.$

455. $\operatorname{ch} z = z^2 - 4z, \quad |z| < 1.$

456. $2^z = 4z, \quad |z| < 1.$

Пример 10. Найти число корней уравнения

$$\lambda - z - e^{-z} = 0, \quad \lambda > 1,$$

в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Решение. Рассмотрим контур, составленный из отрезка $[-iR, iR]$ и правой полуокружности $|z| = R$. Положим $f(z) = z - \lambda$ и $\varphi(z) = e^{-z}$. На отрезке $[-iR, iR]$, где $z = iy$, имеем

$$|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geqslant \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-iy}| = 1,$$

и, следовательно, $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

На полуокружности $|z| = R$, где $\operatorname{Re} z = x > 0$ при достаточно большом R ($R > \lambda + 1$), имеем $|f(z)| > |\varphi(z)|$, так как

$$|f(z)| = |z - \lambda| \geqslant |z| - \lambda = R - \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = |e^{-x}e^{-iy}| = e^{-x}|e^{-iy}| = e^{-x} \leqslant 1 \quad (x > 0).$$

По теореме Руше внутри указанного контура при сколь угодно большом R данное уравнение имеет столько же корней, сколько их имеет уравнение $f(z) = z - \lambda = 0$, т. е. один корень. А значит, и во всей правой полуплоскости данное уравнение имеет единственный корень. ▷

Задачи для самостоятельного решения

457. Показать, что уравнение $ze^{\lambda - z} = 1$, где $\lambda > 1$, имеет в единичном круге $|z| \leqslant 1$ единственный действительный и положительный корень.

458. Показать, что уравнение $1 + z + \alpha z^n = 0$, где n — натуральное число, большее единицы, при всяком α имеет в круге $|z| \leqslant 2$ по крайней мере один корень.

459. Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, аналитические в некоторой окрестности точки a, C — круг с центром в точке a такой, что вдоль окружности этого круга имеем

$$|\alpha f(z)| + |\beta\varphi(z)| < r.$$

Показать, что уравнение $F(z) = z - a - \alpha f(z) - \beta f(z) = 0$ имеет внутри круга C один и только один корень.

ГЛАВА 4

Конформные отображения

§ 13. Конформные отображения

1°. Понятие конформного отображения.

Определение. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется *конформным*, если в точке z_0 оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений (рис. 14).

Это означает, что:

1) если при отображении $w = f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0, будет равен углу Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке w_0, т. е. $\Phi = \varphi$;

2) если в плоскости комплексного переменного z возьмем бесконечно малый круг с центром в точке z_0, то в плоскости w ему будет соответствовать бесконечно малый круг с центром в точке w_0.

Поэтому говорят, что *конформное отображение обладает свойством консерватизма углов и подобия в малом.*

Если при отображении $w = f(z)$ углы между соответствующими направлениями равны не только по величине, но и по направлению отсчета, то такое отображение называется конформным отображением первого рода.

Конформное отображение, при котором углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяется направление их отсчета на противоположное, называется *конформным отображением второго рода.*

Простейшим примером конформного отображения первого рода является отображение $w = z$, а отображения второго рода — отображение $w = \bar{z}$.

В дальнейшем будем рассматривать только конформные отображения первого рода.

Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в области D*, если оно конформно в каждой точке этой области.

Критерий конформности. *Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным в области D, необходимо и достаточно, чтобы*

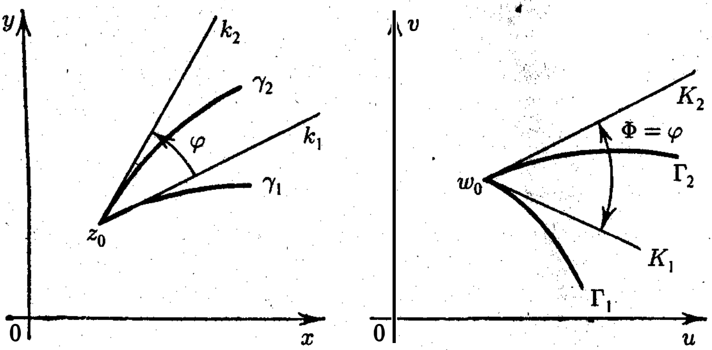


Рис. 14

в этой области функция $w = f(z)$ была однолистной[1] *и аналитической, причем $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$.*

Если не предполагать однолистности $f(z)$, то отображение, осуществляемое этой функцией, не будет взаимно однозначным, а тем самым не будет и конформным. Например, функция $w = z^4$, заданная в полукольце $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, является аналитической в нем, и, кроме того, всюду в полукольце выполняется условие $w' = 4z^3 \neq 0$. Однако функция $w = z^4$ отображает заданное полукольцо на область $1 \leqslant |w| \leqslant 16$, $0 \leqslant \arg w \leqslant 4\pi$, т. е. область, дважды покрывающую соответствующее кольцо на плоскости w, что и нарушает взаимно однозначное соответствие.

Пример 1. В каких областях D отображения

$$\text{а) } w = 2z, \qquad \text{б) } w = (z-2)^2$$

являются конформными?

<u>*Решение*</u>. а) Так как функция $f(z) = 2z$ является аналитической и однолистной во всей комплексной плоскости z, а ее производная $f'(z) = 2 \neq 0$, то данное отображение является конформным во всей комплексной плоскости.

б) Отображение $w = (z-2)^2$ является всюду конформным, кроме точки $z = 2$, в которой производная $f'(z) = 2(z-2)$ обращается в нуль. ▷

Задача для самостоятельного решения

460. Указать области конформности для следующих отображений:

а) $w=e^{-3z}$; б) $w=z^2-4z$; в) $w=-iz^2$; г) $w=\operatorname{sh}(1-z)$; д) $w=(z+2i)^3$.

[1] Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D, если она в различных точках области D принимает различные значения.

2°. Общие теоремы теории конформных отображений.

1. Теорема Римана. *Существует аналитическая функция $w = f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную плоскую область D на другую G, если только ни одна из этих областей не совпадает со всей плоскостью с одной выключенной точкой или всей расширенной плоскостью.*

Имеется бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих отображение области D на область G. Единственность отображающей функции $w = f(z)$ будет обеспечена, если потребовать, чтобы выполнялось одно из условий:

а) заданная точка z_0 области D перешла в заданную точку w_0 области G, а линия, выходящая из z_0, повернулась на данный угол α ($w_0 = f(z_0)$, $\arg f'(z_0) = \alpha$);

б) точка z_0 области D и точка z_1 границы γ перешли соответственно в точку w_0 области G и в точку w_1 границы Γ ($w_0 = f(z_0)$, $w_1 = f(z_1)$);

в) три граничные точки z_1, z_2, z_3 области D перешли в три граничные точки w_1, w_2, w_3 области G ($w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$), при этом, если при движении по границе γ от z_1 к z_3 через z_2 область D остается слева (справа), то при движении по границе Γ от w_1 к w_3 через w_2 область G также должна оставаться слева (справа).

В случаях б) и в) функция $f(z)$ предполагается непрерывной в замкнутой области D.

2. Принцип взаимно однозначного соответствия границ. *Пусть область D ограничена гладким или кусочно гладким контуром γ. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в D и на γ, отображает контур γ на некоторый контур Γ, ограничивающий область G, причем когда точка z обходит контур γ так, что область D остается слева, соответствующая точка w обходит контур Γ так, что область G также остается слева. Тогда область D с помощью функции $w = f(z)$ отобразится взаимно однозначно и конформно на область G.*

3. Принцип симметрии. *Пусть область D, содержащая в составе своей границы некоторый прямолинейный отрезок γ (конечной или бесконечной длины), отображается функцией $w = f(z)$ на область G так, что γ переходит в прямолинейный отрезок Γ, входящий в границу области* (рис. 15). *Обозначим соответственно через l и L прямые, на которых лежат отрезки γ и Γ. Принцип симметрии утверждает: если функция $w = f(z)$ аналитична в области D, а также во всех внутренних точках граничного отрезка γ, то эта функция аналитична также в области D^*, симметричной с D относительно прямой l, и обладает тем свойством, что любые две точки z_1 и z_2 (из которых* *одна лежит в D), симметричные относительно l, отображаются в точки w_1 и w_2, симметричные относительно прямой L.*

Пример 2. В области D, ограниченной контуром γ:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

задана функция

$$w = 3z + i.$$

В какую область перейдет D при отображении, осуществляемом этой функцией?

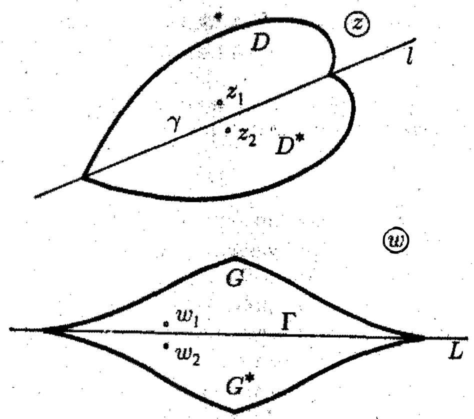


Рис. 15

Решение. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда соотношение $w = 3z + i$ перепишется в виде $u + iv = 3x + i(3y + 1)$, так что $u = 3x$, $v = 3y + 1$. Отсюда $x = \frac{u}{3}$, $y = \frac{(v-1)}{3}$.

Контур γ отображается в контур Γ:

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{u}{3} = 0, \quad \text{или} \quad (u-3)^2 + (v-1)^2 = 9,$$

т. е. окружность радиуса 3 с центром в точке $M(3, 1)$. Положительное направление обхода контура γ соответствует положительному направлению обхода контура Γ. В этом можно убедиться, задав контуры параметрическими уравнениями:

$$\gamma\colon\ x = 1 + \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$
$$\Gamma\colon\ u = 3 + 3\cos\varphi, \quad v = 3\sin\varphi + 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ область D отобразится в область G — внутренность области, ограниченной окружностью Γ.

Это можно проверить еше так: взять любую точку $z \in D$ и найти ее образ при отображении $w = 3z + i$. Например, точка $z = 1$ переходит в точку $w = 3 + i$, которая находится внутри контура Γ. ▷

Пример 3. Даны точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$, симметричные относительно прямой $y = x$. Показать, что функция $w = e^{-i\pi/2}z$ переводит z_1 и z_2 в точки $w_1 = 3 - 2i$ и $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $v = -u$.

Решение. Нетрудно проверить, что функция $w = e^{-i\pi/2}z$ отображает прямую $y = x$ в прямую $v = -u$. Функция $w = e^{-i\pi/2}z$ аналитична всюду. В силу принципа симметрии точки $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 2 + 3i$, симметричные относительно прямой $y = x$, перейдут в точки $w_1 = 3 - 2i$ и $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $v = -u$. ▷

Пример 4. Показать, что функция $w = e^{\pi z/n}$ отображает полосу $0 < \operatorname{Im} z < h$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. Будем проходить границу области D так, чтобы область D оставалась при этом слева. Так как

$$w = u + iv = e^{\pi(x+iy)/h} = e^{\pi x/h} e^{i\pi y/h},$$

то, когда точка z пробегает действительную ось Ox от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ (при $y = 0$), соответствующая точка $w = e^{\pi x/h}$ пробегает действительную положительную полуось Ou плоскости w от точки $u = 0$ до точки $u = +\infty$, $v = 0$. Когда точка $z = x + ih$ пробегает верхнюю границу полосы от точки $+\infty + ih$ до точки $-\infty + ih$ (что соответствует изменению x от $+\infty$ до $-\infty$), то соответствующая точка $w = e^{\pi x/h} e^{i\pi} = -e^{\pi x/h}$ пробегает действительную отрицательную полуось Ou плоскости w от точки $-\infty$ до точки 0. Так как функция $w = e^{\pi z/h}$ аналитична в области D: $0 < \operatorname{Im} z < h$ и на ее границе, то она конформно отображает эту область на область G: $\operatorname{Im} w > 0$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

461. Показать, что полукольцо $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, с помощью функции $w = z^2$ отображается на кольцо $1 \leqslant |w| \leqslant 4$, $0 \leqslant \arg w \leqslant 2\pi$.

462. Показать, что угол $0 < \arg z < \pi/5$, $0 < |z| < +\infty$, с помощью функции $w = z^5$ отображается на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, так что точка $z = 0$ переходит в точку $w = 0$.

463. Показать, что полоса $1 \leqslant y < 1 + 2\pi$ с помощью функции $w = e^z$ отображается на полную плоскость w с разрезом вдоль положительной части оси Ou.

3°. Конформные отображения, осуществляемые линейной функцией $w = az + b$, функцией $w = \frac{1}{z}$ и дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Линейная функция

Линейная функция $w = az+b$, где a и b — постоянные комплексные числа $(a \neq 0)$, осуществляет конформное отображение всей плоскости z на всю плоскость w, так как при любом z имеем $w' = a \neq 0$.

Частные случаи:

1. $$w = z + b \tag{1}$$

осуществляет преобразование параллельного переноса.

2. $$w = e^{i\alpha} z, \tag{2}$$

где α — действительное число, осуществляет преобразование поворота вокруг начала координат на угол α.

3. $$w = rz, \tag{3}$$

подобия с центром подобия в начале координат, r — коэффициент подобия.

Общий случай линейного отображения

$$w = az + b, \quad \text{где} \quad a = re^{i\alpha}, \tag{4}$$

осуществляется путем последовательного применения:

1) поворота вокруг начала координат на угол α,
2) преобразования подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным r,
3) параллельного переноса с помощью вектора, соответствующего комплексному числу b.

Отметим, что линейное преобразование оставляет неподвижными две точки $z_1 = \infty$ и $z_2 = \dfrac{b}{1-a}$. При $a = 1$ получаем $z_2 = \infty$, т. е. в этом случае обе неподвижные точки совпадают.

Пример 5. Показать, что линейное отображение $w = az + b$ вполне определяется, если потребовать, чтобы две различные точки z_1 и z_2 переходили соответственно в произвольно заданные, но различные точки w_1 и w_2.

Решение. В самом деле, задание отображения $w = az + b$ будет осуществлено, если известны значения параметров a и b. Покажем, что наши условия позволяют однозначно найти эти параметры. Пусть при $z = z_1$ получаем $w = w_1$, т. е. $w_1 = az_1 + b$, а при $z = z_2$ получаем $w_2 = az_2 + b$.

Из этих равенств находим

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}, \quad b = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_1 \neq z_2).$$

Полученные соотношения однозначно определяют параметры a и b. ▷

Пример 6. Показать, что линейное отображение (4) можно задать, потребовав, чтобы точка z_1 переходила в точку w_1 и чтобы производная $\dfrac{dw}{dz}$ в точке z_1 имела заданное значение a.

Решение. Чтобы задать отображение (4), надо задать значения параметров a и b. Из условия, что точка z_1 должна переходить в точку w_1, получаем $w_1 = az_1 + b$. Вычитая это равенство из (4), получим $w - w_1 = a(z - z_1)$. Очевидно, что $\dfrac{dw}{dz} = a$ при всяком z. Поэтому, задав значение производной $\dfrac{dw}{dz}$ в точке z_1, мы определим параметр a. Линейное отображение $w - w_1 = a(z - z_1)$ тем самым полностью определено (параметр $b = w_1 - az_1$). ▷

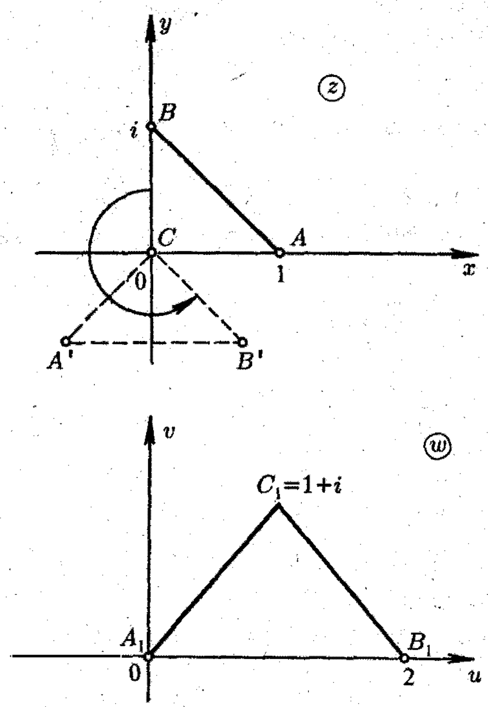


Рис. 16

Пример 7. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $1+i, 0, 2$ в плоскости w.

Решение. Первый способ. Из рис. 16 видим, что $\triangle ABC$ переходит в подобный ему $\triangle A_1B_1C_1$ путем следующих операций:

1) поворот вокруг начала координат на угол $\frac{5}{4}\pi$, что соответствует преобразованию

$$w_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi}z;$$

2) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом $r=\sqrt{2}$ (так как $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\sqrt{2}$):

$$w_2 = \sqrt{2}w_1;$$

3) параллельный перенос, смещающий точку $C(0,0)$ в точку $C_1(1,1)$ (получаем $b=1+i$):

$$w = w_2 + 1 + i.$$

Учитывая, что $e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим окончательно

$$w = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 1 + i = (1-z)(1+i).$$

Второй способ. Пусть искомая функция есть $w = az + b$, где a и b — пока неопределенные константы. По условию задачи точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ должны перейти соответственно в точки $w_1 = 1 + i$ и $w_2 = 0$. Получаем систему уравнений для определения a и b:

$$\begin{cases} 1 + i = b, \\ 0 = a + b. \end{cases}$$

Отсюда $a = -1 - i$, $b = 1 + i$, а значит,

$$w = (1+i)(1-z).$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

464. Указать геометрический смысл (сдвиг, растяжение, поворот) следующих преобразований:

а) $w = z + 3i$; б) $w = z + 5$; в) $w = iz$;

г) $w = e^{i\pi/6}z$; д) $w = 3z$; е) $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$.

465. Найти общий вид линейных функций, с помощью которых осуществляются преобразования:

а) верхней полуплоскости на себя;

б) верхней полуплоскости на нижнюю полуплоскость;

в) верхней полуплоскости на правую полуплоскость.

466. Найти линейный отображения $w = az + b$, оставляющие точку z_0 неподвижной и переводящие точку z_1 в точку w_1:

а) $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 2 + i$, $w_1 = 4 - 3i$;

б) $z_0 = -i$, $z_1 = 1 - 2i$, $w_1 = 2 - 3i$;

в) $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 3 - 2i$, $w_1 = 3i$.

467. Найти линейную функцию $w = f(z)$, отображающую полосу, заключенную между прямыми $x = a$, $x = a + h$, на полосу $0 < u < 1$ в плоскости (w).

2. Функция

$$w = \frac{1}{z}. \tag{5}$$

Точки M и M' называются *симметричными* относительно окружности Г, если

1) они находятся на одном луче, выходящем из центра окружности;
2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности: $OM \cdot OM' = R^2$ (рис. 17).

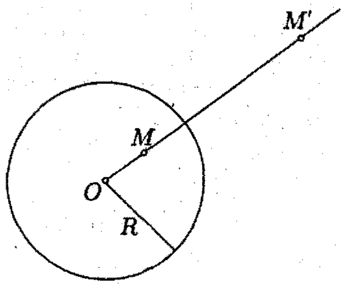


Рис. 17

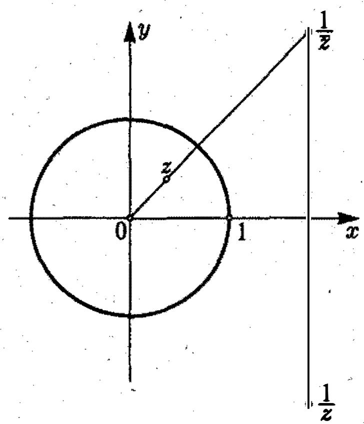


Рис. 18

Замечание. Точки окружности Γ симметричны самим себе относительно этой окружности.

Для центра O окружности Γ симметричной точкой относительно Γ является бесконечно удаленная точка.

Если центр окружности Γ находится в начале координат и одна из симметричных относительно Γ точек изображает комплексное число z, то другая соответствует комплексному числу $\frac{R^2}{\bar z}$.

Преобразование $w = \frac{1}{z}$ состоит из двух симметричных отражений: относительно единичной окружности и относительно действительной оси (рис. 18) и называется *инверсией*.

Преобразование $w = \frac{1}{z}$ является конформным во всей расширенной плоскости, причем точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$, а точке $z = \infty$ соответствует точка $w = 0$. (Считают, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке одной из плоскостей (z или w) равен углу между образами этих линий в начале координат другой плоскости). Окружности (а также прямые) при отображении $w = \frac{1}{z}$ переходят в окружности или прямые. Неподвижные точки $z_1 = +1$ и $z_2 = -1$.

Пример 8. Найти образ окружности $|z| = 3$ при отображении $w = \frac{25}{z}$.

Решение. Первый способ. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда соотношение $w = \frac{25}{z}$ перепишется в виде

$$u + iv = \frac{25}{x + iy} = \frac{25x}{x^2 + y^2} - i\frac{25y}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$u = \frac{25x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{25y}{x^2+y^2}. \tag{а}$$

Уравнение окружности $|z| = 3$ в декартовых координатах запишется в виде

$$x^2 + y^2 = 9. \tag{б}$$

Исключая из (а) и (б) x и y, получим

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2,$$

т. е. окружность радиуса $R = \frac{25}{3}$ с центром в начале координат в плоскости w.

Второй способ. *Запишем z и w в показательной форме*

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = re^{i\theta}.$$

Тогда при отображении $w = \frac{25}{z}$ получим

$$re^{i\theta} = \frac{25}{\rho e^{i\varphi}},$$

откуда $r = \frac{25}{\rho}$, $\theta = -\varphi$, где $\rho = 3$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Значит,

$$w = \frac{25}{3}e^{-i\varphi}$$

есть окружность радиуса $r = \frac{25}{3}$ с центром в начале координат, проходимая по часовой стрелке, когда исходная окружность проходится против часовой стрелки.

Третий способ. Из равенства $w = \frac{25}{z}$ имеем $z = \frac{25}{w}$. Подставляя это выражение для z в уравнение окружности $|z| = 3$ и пользуясь свойством модуля, получим

$$\left|\frac{25}{w}\right| = 3, \quad \text{или} \quad \frac{25}{|w|} = 3,$$

откуда $|w| = \frac{25}{3}$. Следовательно, образом окружности $|z| = 3$ при отображении $w = \frac{25}{z}$ будет окружность $|w| = \frac{25}{3}$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

468. На какую область отображает функция $w = \frac{1}{z}$ полуполосу

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0?$$

469. Найти образы следующих множеств при отображении $w = \frac{1}{z}$:

а) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; б) $|z| = 1$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$; в) $2 \leqslant x \leqslant 4$, $y = 0$;
г) $-2 < y < -1$, $x = 0$; д) $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

---

3. Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{6}$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные и $ad-bc \neq 0$, взаимно однозначно и конформно отображает расширенную плоскость z на расширенную плоскость w. Преобразование, осуществляемое дробно-линейной функцией, называется *дробно-линейным*. Каждое дробно-линейное преобразование может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразования вида $w = \frac{1}{z}$.

Пример 9. Найти условия, при которых дробно-линейная функция (6)

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. При этом отображении требуется, чтобы граница области $\operatorname{Im} z > 0$ — ось Ox, проходимая слева направо, отображалась в границу области $\operatorname{Im} w > 0$, т. е. в ось Ou, тоже проходимую слева направо. Таким образом, при любых действительных значениях z должны быть действительными и значения w. Это, очевидно, возможно лишь при действительных значениях чисел a, b, c, d. Далее, каждому $z = x + iy$, где $y > 0$, должно соответствовать такое $w = u + iv$, у которого $v > 0$. Подставив $z = x + iy$ в формулу (6), получим

$$w = u + iv = \frac{(ax+b)(cx+d) + acy^2}{(cx+d)^2 + y^2} + i\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+y^2},$$

откуда

$$v = \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+y^2}.$$

Так как здесь $y > 0$ и знаменатель положителен, то для положительности v необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $ad - bc > 0$. Это и есть искомое условие. ▷

Свойства дробно-линейного преобразования

1. *Круговое свойство.* Дробно-линейное преобразование окружность отображает в окружность. (Прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса.)

2. *Свойство симметрии.* Две точки z_1 и z_2, симметричные относительно окружности C, отображаются в точки w_1 и w_2, симметричные относительно окружности Γ, на которую отображается окружность C.

Следствие. *Если при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ прямая или окружность γ переходит в окружность Γ и одна из двух точек, симметричных относительно γ, переходит в центр окружности Γ, то другая точка необходимо переходит в бесконечно удаленную точку.*

3. Существует единственная дробно-линейная функция, которая три заданные точки z_1, z_2, z_3 плоскости z переводит в три заданные точки w_1, w_2, w_3 плоскости w. Она имеет вид

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{7}$$

Пример 10. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.

Решение. Воспользовавшись формулой (7), будем иметь

$$\frac{w+1}{w-0} \cdot \frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{z-1}{z-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-1},$$

откуда $w = i\dfrac{i-z}{i+z}$. ▷

Замечание. Если одна из точек z_k или w_k $(k = 1, 2, 3)$ является бесконечно удаленной, то в формуле (7) надо заменить единицами все разности, содержащие эту точку.

Пример 11. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точку z_1 в точку $w_1 = 0$, а точку z_2 в точку $w_2 = \infty$.

Решение. Возьмем произвольную точку z_3, отличную от точек z_1 и z_2, и предположим, что она переходит в точку w_3, отличную от точек w_1 и w_2. Тогда по формуле (7) с учетом замечания будем иметь

$$\frac{w-0}{1} \cdot \frac{1}{w_3 - 0} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

откуда

$$w = K\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

где

$$K = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} w_3, \tag{8}$$

т.е. K есть произвольное комплексное число, $K \neq 0$. ▷

Пример 12. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка z_0 $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$ перешла в центр $w = 0$ круга.

Решение. Так как точка z_0 переводится искомой дробно-линейной функцией $w = w(z)$ в центр круга, т. е. $w(z_0) = 0$, то сопряженная ей точка $\bar{z}_0$

должна перейти в точку $w = \infty$ (по свойству симметрии). Далее воспользуемся формулой (8) и получим

$$w = K\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

где K — постоянный множитель. При любом K эта функция отображает верхнюю полуплоскость на некоторый круг с центром в точке $w = 0$. Подберем K так, чтобы круг был единичным. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка $z = 0$ (граничная точка области $\operatorname{Im} z > 0$) перешла в точку единичной окружности $|w| = 1$. Тогда

$$1 = |w| = |K| \cdot \left|\frac{z_0}{\bar{z}_0}\right|, \quad \text{откуда} \quad |K| = 1, \quad \text{так что} \quad K = e^{i\alpha},$$

где α — любое действительное число. Итак,

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad \triangleright \tag{9}$$

Замечание. Найдем производную w' в точке $z_0 = a + ib$ $(b > 0)$.

$$w'(z_0) = -\frac{ie^{i\alpha}}{2b}, \quad \text{или} \quad w'(z_0) = \frac{1}{2b}e^{i\alpha} \cdot e^{-i\pi/2} = \frac{e^{i(\alpha - \pi/2)}}{2b}.$$

Значит, $\arg w'(z_0) = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, так что по геометрическому смыслу производной при отображении (9) угол поворота кривых в точке z_0 равен $\alpha - \dfrac{\pi}{2}$.

По теореме Римана существует единственное отображение $w = w(z)$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что всякое дробно-линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид (9).

Пример 13. Отобразить единичный круг $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$.

Решение. Пусть искомое дробно-линейное отображение $w = w(z)$ переводит точку z_0, находящуюся внутри круга $|z| < 1$, в центр круга $|w| < 1$, так что $w(z_0) = 0$. Тогда точка $z_0^* = \dfrac{1}{\bar{z}_0}$, симметричная относительно единичной окружности $|z| = 1$, перейдет в точку ∞, т. е. $w(z_0^*) = \infty$. Тогда по формуле (8) получим

$$w = K\frac{z - z_0}{z - \dfrac{1}{\bar{z}_0}}, \quad \text{или} \quad w = K_1\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

где $K_1 = -K\bar{z}_0$ — некоторое постоянное комплексное число.

Подберем постоянную K_1 так, чтобы круг в плоскости w был единичным. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка $z = 1$ перешла в точку на единичной окружности $|w| = 1$. Тогда получим

$$1 = |w| = |K_1| \cdot \left|\frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0}\right|,$$

откуда $|K_1| = 1$, потому что $|1 - z_0| = |1 - \bar{z}_0|$. Следовательно, $K_1 = e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число.

Итак,

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \tag{10}$$

где $|z_0| < 1$, α — любое действительное число. ▷

Замечание. Так как

$$w'(z) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - z\bar{z}_0}, \quad \text{то} \quad w'(z_0) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |z_0|^2},$$

т. е. $\arg w'(z_0) = \alpha$. Это означает, что при отображении (10) угол поворота кривых в точке z_0 равен α.

По теореме Римана существует единственное отображение $w = w(z)$ единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$.

Следовательно, всякое дробно-линейное отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $w < 1$ имеет вид (10).

Пример 14. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую конформно единичный круг на себя и такую, что

$$f\left(\frac{i-1}{2}\right) = 0, \quad \arg f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

<u>*Решение.*</u> По формуле

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

(α — любое действительное число) получаем отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$, так что точка $z_0 = \dfrac{i-1}{2}$ переходит в центр $w = 0$. Имеем

$$w = f(z) = e^{i\alpha}\frac{z - \dfrac{i-1}{2}}{1 + z\cdot\dfrac{1+i}{2}}, \quad \text{или} \quad f(z) = e^{i\alpha}\frac{2z + 1 - i}{2 + z(1+i)}.$$

Так как

$$f'(z) = e^{i\alpha}\frac{2}{[2 + (1+i)z]^2},$$

то

$$f'(z_0) = f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = 2e^{i\alpha}.$$

Согласно условию $\arg f'\left(\dfrac{i-1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ получаем $\arg(2e^{i\alpha}) = \dfrac{\pi}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, а потому

$$f(z) = i\frac{2z + 1 - i}{2 + (1+i)z}, \quad \text{или} \quad f(z) = \frac{1 + (2z+1)i}{2 + z(1+i)}. \quad ▷$$

Задачи для самостоятельного решения

470. Найти дробно-линейное преобразование, переводящее действительную ось в единичную окружность.

Найти образы следующих областей при заданных дробно-линейный отображениях:

471. Кольцо $1 < |z| < 2$ при $w = \dfrac{z+1}{z+2}$.

472. Внешность круга $|z| > 1$ при $w = \dfrac{z+i}{z-i}$.

473. Круг $|z| < 1$ при $w = \dfrac{z-1}{z+i}$.

474. Определить, во что переходит внутренность круга $|z| < 1$ при дробно-линейном отображении, которое переводит точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

475. Найти точки, симметричные с точкой $z = 1 + i$ относительно следующих линий:

а) $x = 0$; б) $|z| = \sqrt{2}$; в) $|z - 1 - i| = 2$.

476. Найти общий вид дробно-линейной функции, отображающей:

а) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;

б) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

477. Найти отображение верхней полуплоскости на себя, если:

$$w(0) = 1, \quad w(1) = 2, \quad w(2) = \infty.$$

478. Найти отображение на единичный круг $|w| < 1$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ так, чтобы

а) $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$; б) $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

479. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ переходили в точки $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ окружности.

480. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую круг $|z| < 1$ на нижнюю полуплоскость так, чтобы точки $1, i, -i$ перешли в точки $1, 0, -1$.

481. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ так, чтобы точки $-1, 1, i$ перешли в точки $\infty, 0, 1$.

482. Найти конформное отображение круга $|z| < 5$ в круг $|w| < 1$ так, чтобы $-5, 4 + 3i, 5$ перешли в точки $-1, i, 1$.

483. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую конформно единичный круг на себя и такую, что

а) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; б) $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$.

484. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z - 2| < 3$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точки $-1, 5, i\sqrt{5}$ перешли соответственно в точки $1, i, -1$.

485. На какую область в плоскости w отобразит функция $w = i\dfrac{1-z}{1+z}$ верхний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$?

486. Найти образ области D: $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ при отображении $w = \dfrac{1}{z} + 1$.

4°. Конформные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями.

1. Степенная функция

$$w = z^n, \tag{11}$$

где $n \geqslant 2$ — целое положительное число.

Отображение, осуществляемое степенной функцией, является конформным во всей плоскости, кроме точки $z = 0$: при $z \neq 0$ имеем $w' = nz^{n-1}$; при $z = 0$ $w' = 0$. При $z = 0$ конформность нарушается, так как при отображении с помощью функции (11) углы увеличиваются в n раз. Угол $0 < \varphi < \dfrac{2\pi}{n}$ функцией (11) отображается взаимно однозначно на всю плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\varphi = 0$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$ — нижний край разреза. Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые плоскость z разбивают лучи $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$ (k — целое число), причем при отображении угла $\dfrac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \dfrac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) на плоскость с разрезом лучу $\varphi = \dfrac{2(k-1)\pi}{n}$ соответствует верхний, а лучу $\varphi < \dfrac{2k\pi}{n}$ — нижний край разреза.

Пример 15. Отобразить сектор $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z_1 = e^{i\pi/8}$ перешла в центр $w_1 = 0$, а точка $z_2 = 0$ — в точку $w_2 = 1$.

Решение. Сектор $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 19, *а*) с помощью функции $t = z^4$ отобразим на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ (рис. 19, *б*). Точка $z_1 = e^{i\pi/8}$ перейдет в точку $t_1 = z_1^4 = i$, а $z_2 = 0$ перейдет в точку $t^2 = 0$.

Затем отобразим полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $t_1 = i$ перешла в центр круга (рис. 19, *в*). Воспользовавшись формулой (9), получим

$$w = e^{i\varphi}\frac{t-i}{t+i}.$$

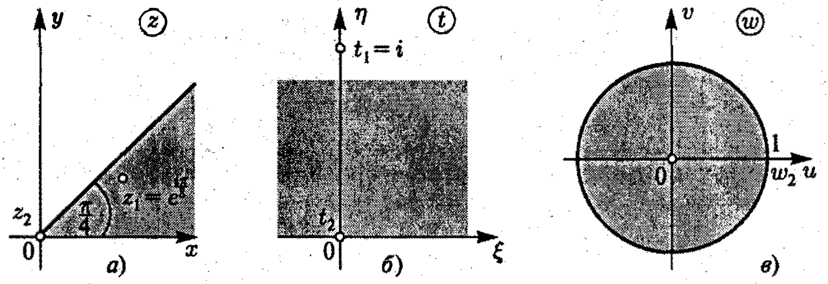


Рис. 19

Требование, чтобы точка $t_2 = 0$ перешла в точку $w_2 = 1$, дает $e^{i\varphi} = -1$. Подставляя в выражение для w значение $e^{i\varphi} = -1$ и $t = z^4$, получим окончательно

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i}. \qquad \triangleright$$

Пример 16. Найти функцию, отображающую верхнюю половину круга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. Заданная область представляет собой двуугольник с вершинами в точках $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ и углом при вершине $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 20, *а*).

Вспомогательная функция $t = \dfrac{1+z}{1-z}$ осуществляет конформное отображение этого двуугольника на первый квадрант плоскости t (рис. 20, *б*). Функция $w = t^2$ или $w = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ дает искомое отображение (рис. 20, *в*). $\triangleright$

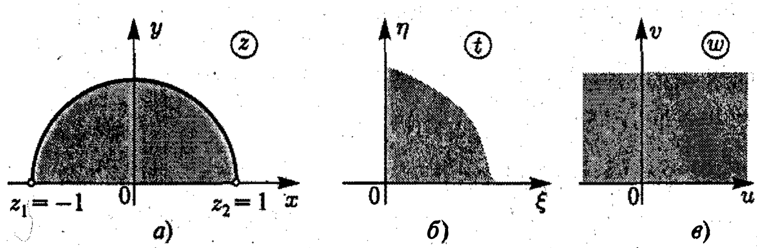


Рис. 20

2. Радикал

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к степенной функции $z = w^n$, является n-значной, т. е. каждому $z = \rho e^{i\varphi}$ ($z \neq 0$ и $z \neq \infty$) отвечает n значений w по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Каждая из функций w_k есть ветвь многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$. Точка $z = 0$ является точкой ветвления этой функции.

На расширенной z-плоскости с любым разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$, в частности, с разрезом вдоль положительной части действительной оси, можно выделить n однозначных ветвей w_k. Эти ветви однолистно отображают расширенную плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси на секторы

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} < \arg w < \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 17. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = ai$ $(a > 0)$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (устранить разрез).

Решение. 1) С помощью отображения $t = z^2$ удвоим углы в начале координат. При этом отрезок z_1z_2 перейдет в отрезок t_1t_2 расширенной t-плоскости от точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = -a^2$, а луч $\arg z = \pi$ (отрицательная действительная полуось) — в луч $\arg w = 2\pi$. Таким образом, исходная область отобразилась на расширенную t-плоскость с разрезом от точки $t_2 = -a^2$ до точки $t = +\infty$.

2) С помощью линейной функции $\tau = t + a^2$ сдвинем начало разреза в начало координат. Расширенная τ-плоскость получается разрезанной от точки $\tau = 0$ до точки $\tau = +\infty$.

3) С помощью функции $w = \sqrt{\tau}$ (точнее, ее ветви, принимающей положительные значения на верхнем берегу разреза) отображаем разрезанную τ-плоскость на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Итак,

$$w = \sqrt{\tau} = \sqrt{t + a^2} = \sqrt{z^2 + a^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти отображения на верхнюю полуплоскость следующих областей:

487. Плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 1]$.

488. Полосы $0 < x < 1$ с разрезом по лучу $x = \dfrac{1}{2}$, $a \leqslant y < \infty$ $(a > 0)$.

489. Плоскости с разрезами по лучам $y = 0$, $-\infty < x \leqslant a$ и $y = 0$, $b \leqslant x < +\infty$ $(a < b)$.

3. Показательная функция. Отображение, осуществляемое показательной функцией

$$w = e^z,$$

конформно во всей плоскости, так как $w' = e^z \neq 0$ во всякой конечной точке плоскости z.

Если плоскость z разбить на полосы

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

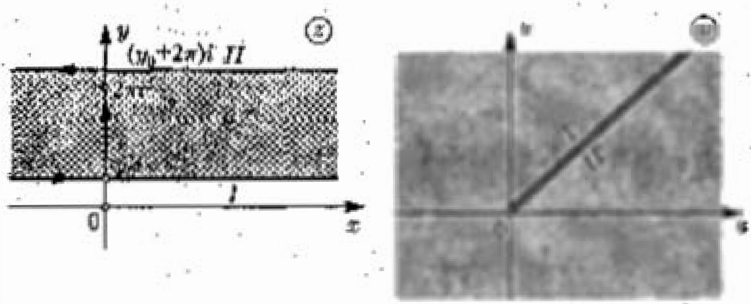


Рис. 21

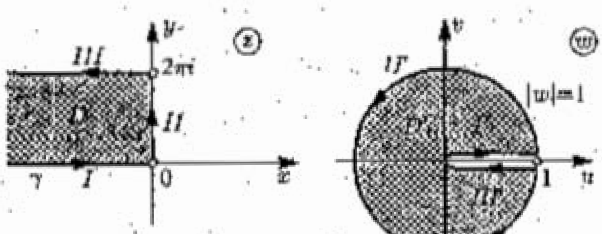
то каждая из этих полос отобразится функцией $w = e^z$ взаимно однозначно на всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси. При этом считаем, что нижней границе $y = 2k\pi$ полосы соответствует верхний край разреза, а верхней границе $y = 2(k+1)\pi$ — нижний края разреза. При этом точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $z_k = x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$ переходят в одну и ту же точку плоскости w. Это означает, что показательная функция является бесконечнолистной периодической функцией комплексной переменной z с мнимым периодом $2\pi i$. Областью ее однолистности является любая полоса $y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi$, отображающаяся на полную плоскость w с разрезом по лучу $\arg w = y_0$ (рис. 21).

Отметим, что показательная функция $w = e^z$ не обращается в нуль ни при каком значении z.

Пример 16. Во что преобразуется полуполоса

$$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad \operatorname{Re} z < 0$$

с помощью функции $w = e^z$?



а)

б)

Рис. 22

Решение. Положим $z = x + iy$, $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y, \quad \text{где} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < y < 2\pi.$$

так что $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$. Очевидно, точки $w = \rho e^{i\varphi}$, удовлетворяющие этим условиям, заполняют круг $|w| < 1$ с разрезом по отрезку прямой, соединяющей точки $w = 0$ и $w = 1$. В самом деле, обойдем контур γ области D в положительном направлении, начиная с участка I $(-\infty < x < 0,\ y = 0)$, далее II $(x = 0,\ 0 < y < 2\pi)$ и, наконец, III $(y = 2\pi$, а x изменяется от 0 до $-\infty)$. Очевидно, этим участкам в плоскости w будут соответствовать участки I', II', III'; где участок I' совпадает с верхним краем разреза, а III' — с нижним краем (рис. 22). ▷

4. Логарифмическая функция

$$w = \operatorname{Ln} z$$

определяется как функция, обратная показательной. Для определенности будем рассматривать главное значение логарифма z, т.е. то значение, которое соответствует главному значению аргумента

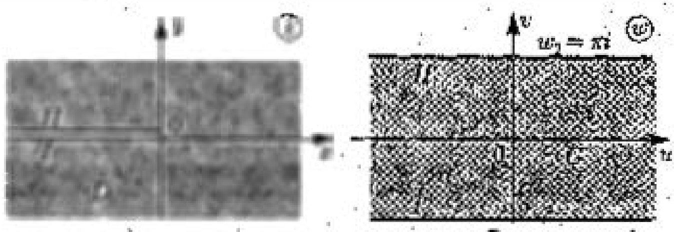
$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Эта функция — аналитическая во всех конечных точках $z \neq 0$ и $w' = \dfrac{1}{z} \neq 0$. Значит, отображение с помощью функции $w = \ln z$ конформно во всех таких точках. Отметим, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$, причем $\operatorname{Ln} 0 = \infty$ и $\operatorname{Ln}\infty = \infty$.

Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведет вновь к первоначальной ветви функции $\operatorname{Ln} z$. Такие точки ветвления называются *логарифмическими*.

Пример 19. Найти функцию, отображающую плоскость z с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от точки $z = 0$ до точки $z = -\infty$ на полосу $-\pi < v < \pi$ в плоскости w.

Решение. При рассмотрении показательной функции $w = e^z$ было указано (с. 140), что любая полоса $y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi$ отображается этой функцией на полную плоскость w с разрезом по лучу $\arg w_0 = y_0$.



а) б)

Рис. 23

Рассмотрим обратное отображение, а именно, отображение полосы $v_0 \leqslant v < v_0 + 2\pi$, где $v_0 = -\pi$, плоскости w на всю плоскость z с разрезом по лучу $\arg z_0 = v_0 = -\pi$ (рис. 23). Очевидно, такое отображение дает функция

$z = e^w$; следовательно, искомое отображение будет $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z$. Когда точка z пробегает по нижнему берегу разреза I от $x = -\infty$ до $x = 0$, то в плоскости w соответствующая точка опишет линию I' от $u = +\infty$ до $u = -\infty$ $(v = -\pi)$. Далее, когда точка z пробегает по верхнему берегу разреза II от $x = 0$ до $x = -\infty$, то в плоскости w соответствующая точка опишет линию II' от $u = -\infty$ до $u = +\infty$ $(v = \pi)$, так что область D и соответствующая ей область G остаются при обходе контуров справа. ▷

5. Тригонометрические функции

$$w = \sin z, \qquad w = \cos z.$$

Для любого комплексного z

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Пример 20. Во что отображается полуполоса $0 < x < \pi$, $y > 0$ (рис. 24) с помощью функции $\cos z$?

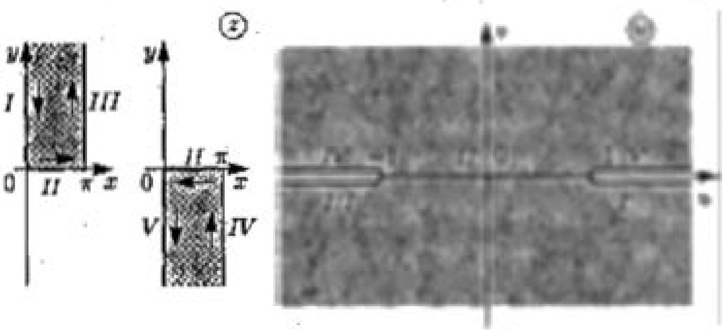


Рис. 24

Решение. Имеем $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. Если точка z пробегает участок границы I от $y = +\infty$ до $y = 0$ (при $x = 0$), то соответствующая точка в плоскости w пробегает участок I' от $u = +\infty$ до $u = 1$ (при $v = 0$). Если точка z пробегает участок II от $x = 0$ до $x = \pi$ (при $y = 0$), то $w = \cos x$ опишет участок II' от $u = 1$ до $u = -1$ (при $v = 0$). Наконец, если точка z пробегает участок III от $y = 0$ до $y = +\infty$ (при $x = \pi$), то $w = -\operatorname{ch} y$ пробегает участок III' от $u = -1$ до $u = -\infty$ (при $v = 0$). Итак, если точка z обходит границу полуполосы $0 < x < \pi$, $y > 0$ так, что полуполоса остается слева, то точка w пробегает справа налево всю действительную ось, и поэтому из принципа взаимно однозначного соответствия границ следует, что функция $w = \cos z$ отображает рассматриваемую полуполосу на нижнюю полуплоскость w.

Аналогично показывается, что полуполоса $0 < x < \pi$, $y < 0$ функцией $w = \cos z$ отображается на верхнюю полуплоскость w.

Стороне полуполосы $x = \pi$, $y < 0$ соответствует отрезок $-\infty < u < -1$ действительной оси плоскости w, стороне $0 < x < \pi$, $y = 0$ (проколотой от π к 0) соответствует отрезок $-1 < u < 1$ и стороне $x = 0$, $y < 0$ — отрезок $1 < u < +\infty$. Отрезок $-\infty < u < -1$ действительной оси плоскости w пробегается дважды, а именно, на него отображается сторона $x = \pi$, $y > 0$ первой полуполосы и сторона $x = \pi$, $y < 0$ второй полуполосы. Чтобы отображение $w = \cos z$ было взаимно однозначным, надо в плоскости w сделать разрез вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1, а также от 1 до $+\infty$.

Итак, функция $w = \cos z$ отображает полосу $0 < x < \pi$ на всю плоскость w с разрезами по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$. ▷

6. Функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{12}$$

является аналитической во всей плоскости, кроме точки $z = 0$, где она имеет полюс первого порядка.

Производная функции Жуковского $w' = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$, а значит, отображение, осуществляемое этой функцией, везде конформно, кроме точек $z = \pm 1$. Функция $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает конформно область $|z| < 1$ на всю плоскость w, разрезанную по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси. Граница области — окружность $|z| = 1$ — отображается на этот отрезок, причем верхняя полуокружность отображается на нижний, а нижняя — на верхний край разреза.

Аналогично область $|z| > 1$ отображается на второй экземпляр плоскости w, разрезанной по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси, причем верхняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ отображается на верхний берег, а нижняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ — на нижний берег разреза (рис. 25).

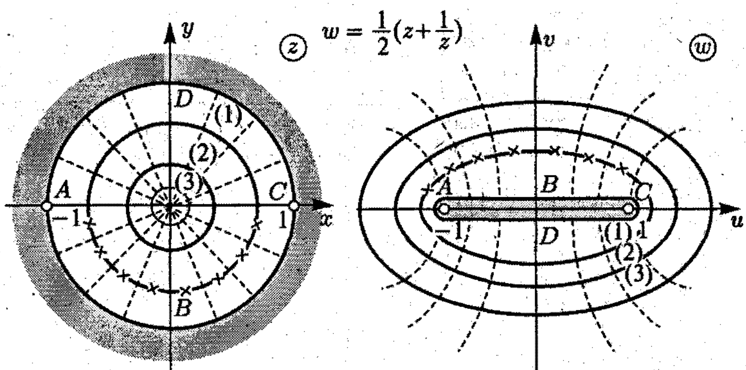


Рис. 25

Всякая окружность радиуса $R \neq 1$ отображается функцией (12) в эллипс с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left|R - \frac{1}{R}\right|$$

и фокусами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Лучи $\arg z = \varphi$ (кроме $\varphi = 0$; $\pm\frac{\pi}{2}$, π) отображаются на соответствующие ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1;$$

лучи $\arg z = 0$, $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$, $\arg z = \pi$ отображаются на дважды пробегаемые бесконечные отрезки действительной или мнимой осей.

Пример 21. Пользуясь функцией Жуковского, найти образ области

$$0 < |z| < 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Подставим $z = re^{i\varphi}$ в функцию Жуковского

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

и выделим действительную и мнимую части; получим

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

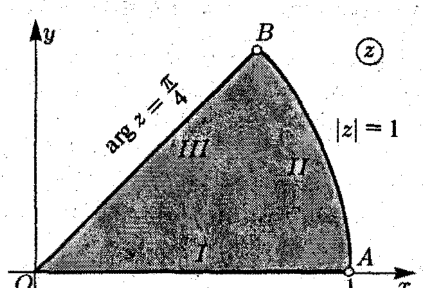


Рис. 26

Обходя контур сектора в положительном направлении $OABO$ (рис. 26), получим: отрезок OA перейдет в бесконечный отрезок действительной оси, пробегаемый от $u = +\infty$ до $u = 1$ (рис. 27); дуга AB окружности $|z| = 1$ перейдет в отрезок действительной оси $A'B'$, а отрезок BO перейдет в кривую

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right),$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

или $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ (гипербола).

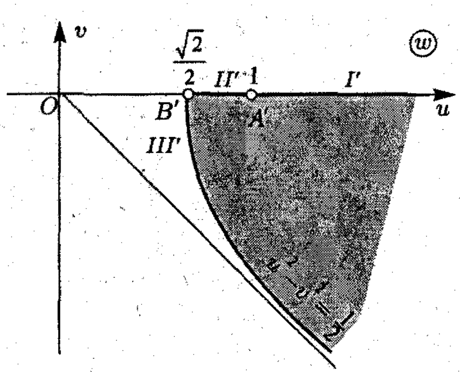


Рис. 27

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ получим, что заданный сектор переводится функцией Жуковского в область

$$u^2 - v^2 > \frac{1}{2}, \quad u > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v < 0. \qquad \triangleright$$

Пример 22. Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг в разрезом, идущим от центра по действительной оси.

Решение. 1) С помощью функции $w_1 = \sqrt{z}$ отобразим единичный круг на верхний полукруг. При этом верхний берег разреза OA, т. е. отрезок $[1, 0]$, остается на месте, а нижний берег OA' перейдет в отрезок $[-1, 0]$ на плоскости W_1.

2) С помощью функции

$$w_2 = \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}$$

отобразим полученную в 1) полуокружность в первый квадрант плоскости W_2. При этом точка $w_1 = 1$ перейдет в точку $w_2 = \infty$, а точка $w_1 = -1$ перейдет в точку $w_2 = 0$.

3) Наконец, с помощью функции $w = w_2^2$ отобразим первый квадрант на верхнюю полуплоскость.

Окончательно получаем

$$w = w_2^2 = \left(\frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1}\right)^2. \qquad \triangleright$$

Пример 23. Найти функцию, отображающую область, заключенную между двумя окружностями, пересекающимися в действительных точках $z = a$ и $z = b$ $(a < b)$ под углом $\pi\lambda$, $0 < \lambda < 1$ (рис. 28), на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точка $z = a$ перешла в точку $w = 0$, а точка $z = b$ — в точку $w = \infty$.

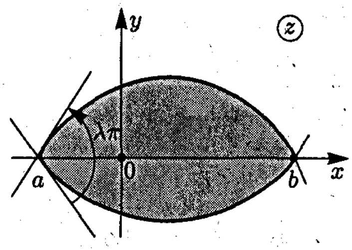


Рис. 28

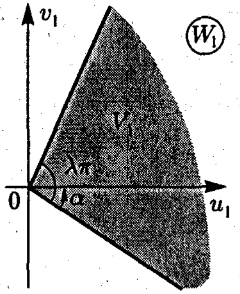


Рис. 29

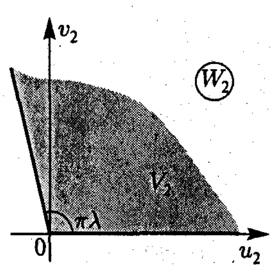


Рис. 30

Решение. 1) Преобразуем луночку ab в угол величины $\lambda\pi$, $0 < \lambda < 1$, так, чтобы точка $z = a$ перешла в точку $w = 0$, а точка $z = b$ перешла в точку $w = \infty$. Это делается с помощью функции $w_1 = \dfrac{z-a}{b-z}$ (рис. 29).

2) Преобразование $w_2 = w_1 e^{i\alpha}$ поворачивает угол V_1 раствора $\lambda\pi$ против часовой стрелки на угол α. Таким образом, в плоскости W_2 мы получаем угол V_2 того же раствора, что и угол V_1 (рис. 30).

3) Преобразование $w = w_2^{1/\lambda}$ переводит угол V_2 в полуплоскость. Таким образом, искомое преобразование имеет вид

$$w = c\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{1/\lambda},$$

где c — некоторая комплексная постоянная, которая выбирается так, чтобы отображение осуществлялось на верхнюю полуплоскость. ▷

Пример 24. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область D: $|z| < 2$, $|z-1| > 1$ (рис. 31).

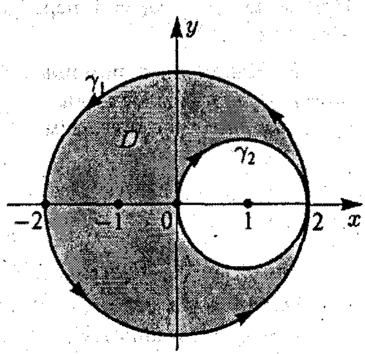


Рис. 31

Решение. 1) Функция

$$w_1 = \frac{z}{z-2}$$

отображает заданную область в полосу

$$\Pi_1:\ \left\{0 < u < \frac{1}{2},\ -\infty < v < +\infty\right\}.$$

Действительно, положив $z = 2e^{i\varphi}$, получим

$$w_1 = u + iv = \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{i\varphi}-2} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-1} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Отделяя действительную и мнимую части, будем иметь

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Таким образом, окружность $|z| = 2$ преобразуется функцией $w_1 = \dfrac{z}{z-2}$ в прямую

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

пробегаемую снизу вверх (рис. 32). В частности, точки $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$ и $z_3 = -2i$ перейдут в точки $w = \dfrac{1-i}{2}$, $w = \dfrac{1}{2}$, $w = \dfrac{1+i}{2}$. Эта же функция переводит окружность $|z-1| = 1$ в прямую $u = 0$, $-\infty < v < +\infty$. В самом деле, подставляя в (13) значение $z = 1 + e^{i\varphi}$, получим

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \frac{e^{i\varphi}+1}{e^{i\varphi}-1} = -i\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

где φ изменяется от 2π до 0. Значит, когда точка z пробегает окружность γ_2, то соответствующая точка w_1 пробегает прямую Γ_2 (ось v_1 на плоскости W_1) сверху вниз. При отображении $w_1 = \dfrac{z}{z-2}$ внутренняя точка $z = -1$ области D переходит во внутреннюю точку $w_1 = \dfrac{1}{3}$ полосы Π_1 (рис. 32). Следовательно, функция $w_1 = \dfrac{z}{z-2}$ осуществляет отображение области D на полосу Π_1.

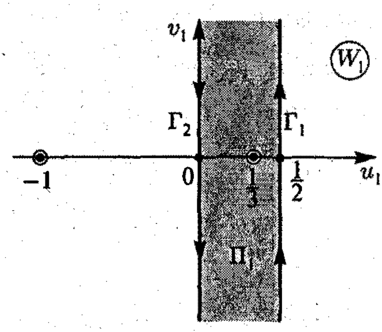


Рис. 32

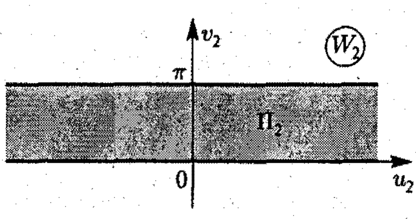


Рис. 33

2) Функция $w_2 = 2\pi i w_1$ переводит вертикальную полосу

$$\Pi_1\colon \left\{0 < u_1 < \frac{1}{2},\ -\infty < v_1 < +\infty\right\}$$

в горизонтальную полосу

$$\Pi_2\colon \{-\infty < u_2 < +\infty,\ 0 < v_2 < \pi\} \quad \text{(рис. 33).}$$

3) Функция $w = e^{w_2}$ полосу Π_2 переводит в верхнюю полуплоскость плоскости W.

Итак, окончательно получаем

$$w = e^{w_2} = e^{2\pi i w_1} = e^{2\pi i z/(z-2)}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

490. Найти функцию, отображающую единичный круг на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси.

491. Найти функцию, отображающую угол между лучами

$$z = z_0 + e^{i\varphi_1 t}, \quad z = z_0 + e^{i\varphi_2 t},$$

где $t \geqslant 0$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2$ на верхнюю полуплоскость.

492. Найти функцию, отображающую горизонтальную полосу $\{0 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ на верхний полукруг $|z| < 1$.

493. Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу $\{0 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

494. На что отображает функция $w = \ln z$ полукольцо $\{r \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ в плоскости z?

495. Найти функцию, отображающую область $\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ на область $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{4}$.

496. Отобразить плоскость с прямолинейным разрезом по вещественной оси $0 < a < x < b$ на верхнюю полуплоскость w.

497. Отобразить плоскость z с прямолинейными разрезами $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, где a и b вещественны, $b < a$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

498. Найти функцию, отображающую первый квадрант $0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точкам $z = 1 + i$, $z = 0$ отвечали точки $w = 0$, $w = 1$.

В следующих задачах найти область плоскости w, на которую функция $w = f(z)$ отображает данную область D плоскости z:

499. $w = z^2 + 1$, D: четверть круга $|z| < 1$, $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$.

500. $w = e^{2z}$, D: полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re} z < 0$

501. $w = \ln z + 1$, D: часть кругового кольца $1 < |z| < e$, заключенная в угле $0 < \arg z < e$.

Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость каждую из указанных областей:

502. Сектор $|z| < 2$, $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

503. Полосу $a < \operatorname{Re} z < b$, $a > 0$.

Найти функции, отображающие:

504. Круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу от точки $z = 0$ до точки $z = -1$ на полуполосу $-\pi < v < \pi$, $u < 0$.

505. Полуполосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

506. Полосу $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty$, $0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}$ на плоскость w с разрезами $-\infty < u \leqslant -1$, $v = 0$ и $1 \leqslant u < +\infty$, $v = 0$.

507. Лунку, ограниченную окружностями $|z - 1| = 1$, $|z - 2| = 2$, на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

508. Найти дробно-линейную функцию, отображающую область D: $\{|z+1| > 1;\ |z+2| < 2\}$ на полосу P: $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$.

509. Найти функцию, отображающую лунку между двумя окружностями $|z-1| = 1$, $|z+i| = 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

510. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую кольцо $1 < |z| \leqslant 2$ на область $\dfrac{u^2}{25} + \dfrac{v^2}{9} \leqslant 1$ с разрезом $-4 \leqslant u \leqslant 4$, $v = 0$.

511. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с исключенным полукругом $|z| < \dfrac{1}{2}$ в круг $|w| < 1$.

512. Найти конформное отображение сектора $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{8}$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z_1 = e^{i\pi/16}$ перешла в центр $w_1 = 0$, а точка $z = 0$ перешла в точку $w = 1$.

513. Отобразить полосу $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ на первый квадрант $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$.

514. Найти области, в которые функция $w = \operatorname{tg} z$ переводит:

а) полосу $-\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{4}$; б) полосу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

§ 14. Преобразование многоугольников. Интеграл Кристоффеля—Шварца

Пусть на комплексной плоскости w задан многоугольник с вершинами в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$, пронумерованных вдоль положительного направления обхода многоугольника, т. е. так, что при обходе многоугольника его внутренность остается слева. Пусть $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ — внутренние углы при вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа. Так как сумма всех внутренних углов n-угольника должна быть равной $(n-2)\pi$, то

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2 \quad (n > 2),$$

где каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не больше 2, то есть $0 < \alpha_k \leqslant 2$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Здесь угол $\alpha_k\pi$ получается при вращении против часовой стрелки отрезка A_kA_{k+1} до совпадения с отрезком $A_{k-1}A_k$ (рис. 34).

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность ограниченного многоугольника с углами $\alpha_k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ при вершинах. Далее, пусть фиксированы точки a_k действительной оси Ox:*

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty,$$

соответствующие вершинам многоугольника. Тогда функцию $f(z)$ можно представить интегралом Кристоффеля—Шварца

$$f(z) = C_1 \int_0^z (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\tau - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\tau + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые комплексные постоянные.

Точки a_k предполагаются известными, хотя в задачах о конформных преобразованиях обычно заданы только вершины многоугольника A_k. Три числа из a_k (например, a_1, a_2, a_3) можно задать произвольно; остальные $n-3$ числа a_k, а также постоянные C_1, C_2 определяются условиями задачи.

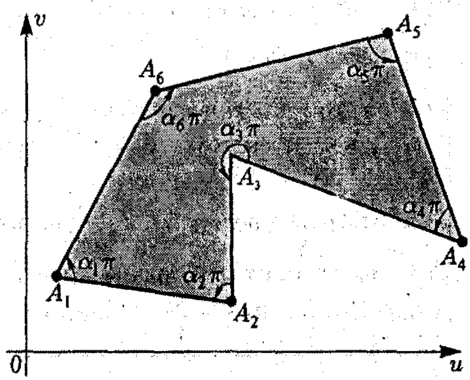


Рис. 34

Формула Кристоффеля—Шварца применима и для многоугольников, у которых одна или несколько вершин лежат в бесконечно удаленной точке, при условии, что угол между сторонами многоугольника в бесконечности определяется как угол между этими же сторонами или их продолжением в конечной точке, взятый со знаком минус.

Если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка, то соответствующий множитель в подынтегральном выражении выпадает.

Пример 1. Найти функцию $w = f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область

$$0 < \arg w < \alpha\pi, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < 2,$$

плоскости w.

Решение. Так как данная область является многоугольником с вершинами $A_1(w = 0)$ и $A_2(w = \infty)$, то для решения можно использовать интеграл Кристоффеля—Шварца, который определяет искомую функцию в виде

$$w = f(z) = C_1 \int_0^z (\tau - a_1)^{\alpha - 1}\, d\tau + C_2.$$

Допустим, что на оси Ox плоскости z вершинам A_1 и A_2 соответствуют, например, точки a_1 и a_2 такие, что

$$a_1(z = 0) \to A_1(w = 0), \quad a_2(z = \infty) \to A_2(w = \infty). \tag{1}$$

Тогда

$$w = f(z) = C_1 \int_0^z \tau^{\alpha-1}\,d\tau + C_2 = \frac{C_1}{\alpha} z^\alpha + C_2.$$

Из условия $w = 0$ при $z = 0$ получим $C_2 = 0$. Функция $w = \dfrac{C_1}{\alpha} z^\alpha$ определена с точностью до постоянного множителя, который определяет преобразование подобия. Такой произвол связан с тем фактом, что условие (1) задает соответствие только двух точек границы, а функция, осуществляющая конформное отображение, однозначно определяется соответствием трех пар граничных точек. Если потребовать дополнительно соответствия еще одной пары точек, например, $w = 1$ и $z = 1$, то из этого условия найдем $1 = \dfrac{C_1}{\alpha} 1^\alpha$, откуда $C_1 = \alpha$.

Таким образом, функция $w = z^\alpha$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на данную область плоскости w. ▷

Пример 2. Отобразить полуполосу $0 < u < \pi$, $v < 0$ плоскости w на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, если задано следующее соответствие между парами точек плоскостей w и z:

$$w(A_1 = 0, A_2 = -i\infty, A_3 = \pi) \to z(a_1 = 1, a_2 = \infty, a_3 = -1).$$

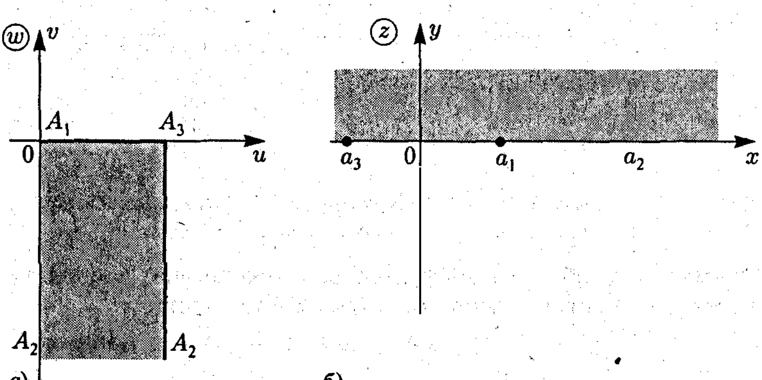


Рис. 35

Решение. Полуполоса $0 < u < \pi$, $v < 0$ плоскости w является «треугольником» с вершинами $A_1 = 0$, $A_2 = -i\infty$, $A_3 = \pi$ (рис. 35). Углы «треугольника» при вершинах A_1, A_2, A_3 равны соответственно $\dfrac{\pi}{2}$, 0, $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\alpha_1\pi = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha_2\pi = 0$, $\alpha_3\pi = \dfrac{\pi}{2}$, откуда $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{2}$ (здесь $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, как для любого треугольника).

Группируем полученные данные в следующей таблице:

n	A_n	a_n	α_n
1	0	1	$\frac{1}{2}$
2	$-i\infty$	∞	0
3	π	-1	$\frac{1}{2}$

Используя формулу Кристоффеля—Шварца, получим

$$w = \widetilde{C}_1 \int\limits_0^z (\tau-1)^{\frac{1}{2}-1}(\tau+1)^{\frac{1}{2}-1}\,d\tau + C_2 =$$

$$= C_1 \int\limits_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + C_2 = C_1 \arcsin z + C_2 \quad \left(C_1 = \frac{\widetilde{C}_1}{i}\right).$$

Множитель, соответствующий вершине «треугольника», лежащей в бесконечно удаленной точке, в подынтегральном выражении выпадает.

Чтобы определить постоянные C_1 и C_2, используем заданное соответствие точек:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \arcsin 1 + C_2, \\ \pi = C_1 \arcsin(-1) + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \dfrac{\pi}{2} + C_2 = 0, \\ -C_1 \dfrac{\pi}{2} + C_2 = \pi, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, искомая функция

$$w = -\arcsin z + \frac{\pi}{2} = \arccos z.$$

Функция $z = \cos w$, обратная к функции $w = \arccos z$, отображает полуполосу $0 < u < \pi$, $v < 0$ плоскости w на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. ▷

Пример 3. Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на многоугольник на плоскости w (рис. 36) так, чтобы

$$w(A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = \infty)$$

соответствовало

$$z(a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty).$$

Решение. Рассмотрим данную область плоскости w как внутреннюю область «треугольника» с вершинами $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = \infty$ и углами при этих вершинах

$$\alpha_1\pi = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha_2\pi = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3\pi = -\pi.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = -1 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1).$$

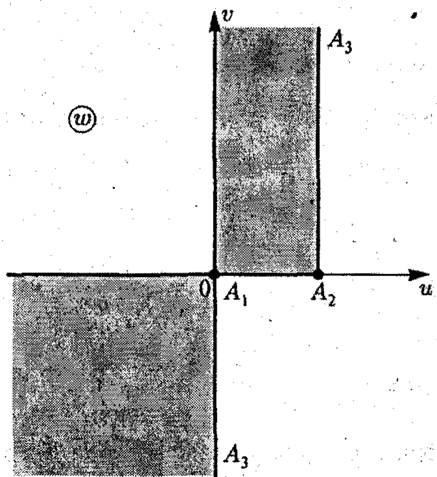


Рис. 36

По этим данным строим следующую таблицу:

n	A_n	a_n	α_n
1	0	0	$\frac{3}{2}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$
3	∞	∞	-1

В этом случае интеграл Кристоффеля—Шварца примет вид

$$w = \widetilde{C}_1 \int\limits_0^z (\tau - 0)^{3/2-1}(\tau - 1)^{1/2-1}\,d\tau + C_2 = \widetilde{C}_1 \int\limits_0^z \tau^{1/2}(\tau - 1)^{-1/2}\,d\tau + C_2 =$$

$$= \widetilde{C}_1 \int\limits_0^z \frac{\sqrt{\tau}\,d\tau}{\sqrt{\tau - 1}} + C_2 = C_1 \int\limits_0^z \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau}}\,d\tau + C_2 \quad \left(C_1 = \frac{\widetilde{C}_1}{i}\right).$$

Заменой $\sqrt{\tau} = t$, $\tau = t^2$, $d\tau = 2t\,dt$ полученный интеграл сводится к интегралу

$$\int\limits_0^z \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau}}\,d\tau = 2\int\limits_0^{\sqrt{z}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int\limits_0^{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}\right) dt =$$

$$= 2\arcsin\sqrt{z} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{z - z^2} + \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{z}\right) = \arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z - z^2}.$$

Таким образом,

$$w = C_1\left(\arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z - z^2}\right) + C_2.$$

Используя указанное соответствие точек, находим константы C_1 и C_2. Имеем

$$\begin{cases} 0 = C_1(\arcsin 0 - 0) + C_2, \\ 1 = C_1(\arcsin 1 - 0) + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $C_2 = 0$.

В итоге получим

$$w = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z - z^2}\right). \qquad \triangleright$$

Пример 4. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область плоскости w, указанную на рис. 37, при условии, что

$$w(A_1 = -h,\ A_2 = -\infty,\ A_3 = h,\ A_4 = \infty) \to$$
$$\to z(a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = \infty).$$

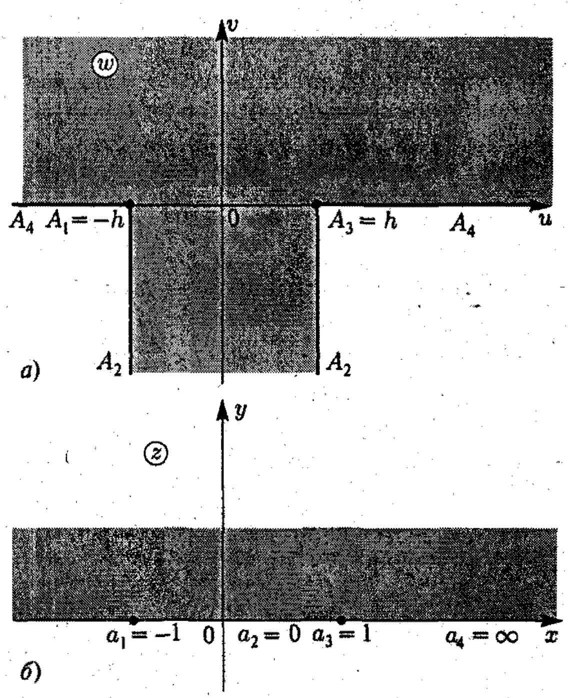


Рис. 37

Решение. Данная область (рис. 37) является «четырехугольником» $A_1A_2A_3A_4$ с углами

$$\alpha_1\pi = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha_2\pi = 0, \quad \alpha_3\pi = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha_4\pi = -\pi,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_4 = -1$$

($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2$, как для любого четырехугольника).

Применяя формулу Кристоффеля—Шварца, получаем

$$w = C_1 \int (z+1)^{3/2-1}(z-0)^{0-1}(z-1)^{3/2-1}\,dz + C_2 =$$

$$= C_1 \int \sqrt{z^2-1}\,\frac{dz}{z} + C_2 = C_1 \int \frac{z^2-1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz + C_2 =$$

$$= C_1 \left[\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-1}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{z}\right)^2}}\,d\left(\frac{1}{z}\right)\right] + C_2 =$$

$$= C_1 \left(\sqrt{z^2-1} + \arcsin\frac{1}{z}\right) + C_2.$$

Здесь мы использовали тот факт, что C_2 — произвольная постоянная, что позволило заменить определенный интеграл неопределенным.

Используя данное соответствие точек, находим C_1 и C_2. Имеем

$$\begin{cases} h = C_1\dfrac{\pi}{2} + C_2, \\ -h = -C_1\dfrac{\pi}{2} + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \dfrac{2h}{\pi}$, $C_2 = 0$. Искомая функция имеет вид

$$w = \frac{2h}{\pi}\left(\sqrt{z^2-1} + \arcsin\frac{1}{z}\right). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

515. Найти функцию $w = f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область плоскости w (рис. 38) так, чтобы имело место соответствие

$$w(A_1 = 0, A_2 = i, A_3 = \infty) \to z(a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty).$$

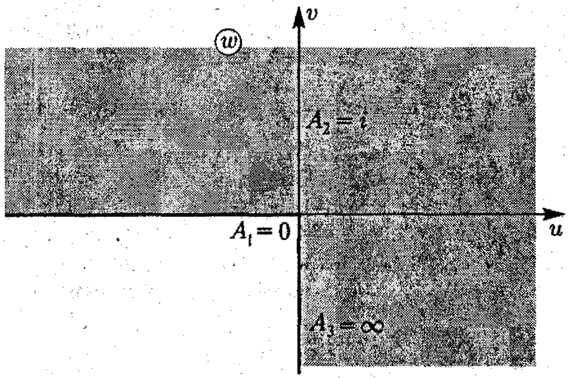


Рис. 38

516. Найти функцию $w = f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область плоскости w (рис. 39) так, чтобы имело место соответствие

$$w(A_1 = \infty, A_2 = i, A_3 = \infty) \to z(a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty).$$

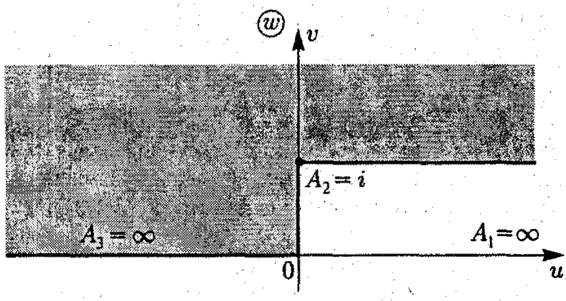


Рис. 39

517. Найти функцию $w = f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область плоскости w (рис. 40) так, чтобы выполнялось

$$w(A_1 = \infty, A_2 = \infty, A_3 = i) \to z(a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty).$$

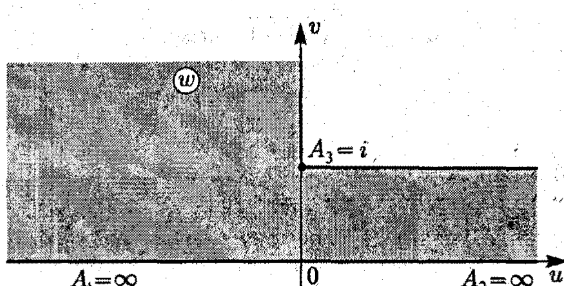


Рис. 40

518. Найти функцию $w = f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область плоскости w (рис. 41) так, чтобы имело место соответствие

$$w(A_1 = 0,\ A_2 = \infty,\ A_3 = \infty) \to z(a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = \infty).$$

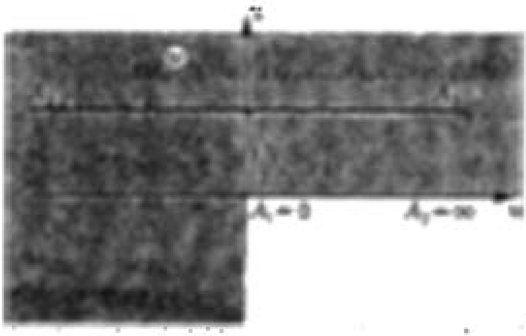


Рис. 41

Приложение 1

§ 15. Комплексный потенциал. Его гидродинамический смысл

Пусть дано стационарное плоское векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}, \tag{1}$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты координатных осей Ox и Oy соответственно.

Так как точка (x, y) в плоскости xOy и ее радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ являются изображением комплексного числа $z = x + iy$, где i — мнимая единица, то вектор $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ в свою очередь будет являться изображением комплексного числа $P(x, y) + iQ(x, y)$. Поэтому вектор $\mathbf{a}$ наряду с (1) можно записать в виде

$$\mathbf{a} = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Следовательно, векторное поле (1) можно задать, указав две действительные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ двух действительных переменных x и y или одну функцию комплексного переменного z

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Приложение функций комплексного переменного к гидродинамике

Стационарное безвихревое плоское течение несжимаемой жидкости полностью характеризуется аналитической функцией

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

которая называется *комплексным потенциалом* или *характеристической функцией течения*. Действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ называются соответственно *потенциальной функцией* и *функцией тока*.

Линии $u(x, y) = \text{const}$ называются *эквипотенциальными линиями* или *линиями уровня*. Линии $v(x, y) = \text{const}$ называют *линиями тока*.

Каждая частица жидкости движется по линии тока.

Известно, что скорость $\mathbf{V}$ течения жидкости, задаваемого функцией $f(z)$ в любой точке $z = x + iy$, определяется как по величине, так и по направлению комплексным числом

$$\mathbf{V} = Ve^{i\varphi} = V_{Ox} + iV_{Oy} = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y},$$

т. е. числом, сопряженным со значением производной комплексного потенциала в точке z. Величина скорости равна

$$V = |\mathbf{V}| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|,$$

а направление вектора скорости $\mathbf{V}$ образует с положительным направлением оси Ox угол

$$\varphi = \arg \overline{f'(z)} = -\arg f'(z).$$

Проекции V_{Ox} и V_{Oy} вектора скорости $\mathbf{V}$ на оси координат Ox и Oy равны

$$V_{Ox} = np_{Ox}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V_{Oy} = np_{Oy}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

или, в силу условий Коши—Римана,

$$V_{Ox} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad V_{Oy} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Будем считать, что координаты $V_{Ox} = V_{Ox}(x, y)$ и $V_{Oy} = V_{Oy}(x, y)$ вектора скорости $\mathbf{V}$ в области их определения являются непрерывно дифференцируемыми функциями, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Определение. *Циркуляцией вектора скорости* $\mathbf{V}$ вдоль замкнутой кривой L, обход которой совершается в положительном направлении, называется величина

$$\Gamma_L = \oint_L V_{Ox}\,dx + V_{Oy}\,dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy.$$

Здесь предполагается, что кривая L не содержит особых точек скорости $\mathbf{V}$, а внутри L их может быть конечное число.

Циркуляция Γ_L характеризует степень завихренности течения жидкости.

Определение. *Потоком вектора скорости* $\mathbf{V}$ через замкнутую кривую L называется величина

$$N_L = \oint_L V_{Ox}\,dy - V_{Oy}\,dx = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx = \oint_L \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy.$$

Кривая L обходится в положительном направлении, т. е. при обходе L область, ограниченная ею, остается слева (здесь берется внешняя нормаль к замкнутой кривой L). Предполагается, что кривая L не проходит через особые точки скорости $\mathbf{V}$, т. е. производной $f'(z)$.

Поток N_L вектора скорости $\mathbf{V}$ определяет количество жидкости, протекающей через линию L за единицу времени.

Формулы для циркуляции Γ_L и потока N_L вектора скорости $\mathbf{V}$ объединяются в одну формулу

$$\Gamma_L + iN_L = \oint\limits_L f'(z)\,dz, \tag{2}$$

позволяющую находить циркуляцию и поток с помощью вычетов. В том случае, когда производная $f'(z)$ (а значит, и скорость $\mathbf{V} = \overline{f'(z)}$) имеет конечное число особых точек z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\Gamma_L + iN_L = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f'(z_k).$$

Точки, в которых $\mathbf{V} = 0$, а значит, и $f'(z) = 0$, называются *критическими точками* течения.

Пример 1. Движение жидкости задается комплексным потенциалом $f(z) = z^2$. Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости $\mathbf{V}$, проекции вектора скорости V_{Ox} и V_{Oy} на оси координат Ox и Oy.

Решение. Полагая $z = x + iy$, имеем

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

откуда потенциал скоростей $u(x, y) = x^2 - y^2$ и функция тока $v(x, y) = 2xy$. Линии уровня $u(x, y) = \mathrm{const}$ — гиперболы $x^2 - y^2 = \mathrm{const}$. Линии тока $v(x, y) = \mathrm{const}$ — гиперболы $xy = \mathrm{const}$. Величина вектора скорости

$$V = |\overline{f'(z)}| = |2\bar{z}| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Направление вектора скорости определяется углом

$$\varphi = -\arg f'(z) = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Проекции вектора скорости на координатные оси Ox и Oy

$$V_{Ox} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad V_{Oy} = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Начало координат $O(0, 0)$ является точкой покоя жидкости. ▷

Пример 2. Движение жидкости задается комплексным потенциалом $f(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Найти величину потока N_L через окружность $2|z| = 3$ и циркуляцию Γ_L по ней.

Решение. Находим производную комплексного потенциала

$$f'(z) = \pi \operatorname{cth} \pi z,$$

Применяя формулу (2), получим

$$\Gamma_L + iN_L = \pi \int\limits_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z \, dz = \pi \int\limits_{|z|=3/2} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} \, dz.$$

Подынтегральная функция имеет внутри окружности $2|z| = 3$ три простых полюса: $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$. Ее вычеты в этих полюсах равны

$$\operatorname{res} f'(z_k) = \pi \frac{1}{\pi} = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\int\limits_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z \, dz = 6\pi i.$$

Следовательно,

$$\Gamma_L + iN_L = 6\pi^2 i.$$

Отсюда циркуляция $\Gamma_L = 0$, поток $N_L = 6\pi^2$. ▷

Пример 3. Найти комплексный потенциал $f(z)$ течения жидкости, если известно уравнение эквипотенциальных линий

$$\operatorname{ch} x \sin y + 2xy = c,$$

где $c = \text{const}$ и $f(0) = 0$.

Решение. Из условия следует, что потенциальная функция $u(x, y)$, т. е. действительная часть аналитической функции $f(z)$ — искомого комплексного потенциала, — равна

$$u = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y,$$

и вопрос сводится к восстановлению аналитической функции по ее действительной части.

Найдем функцию $f(z)$, зная ее действительную часть $u(x, y)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

По первому из условий Коши—Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, так что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

Отсюда находим

$$v(x, y) = y^2 - \operatorname{sh} x \cos y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Дифференцируя $v(x, y)$ по x и используя второе из условий Коши—Римана, найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{ch} x \cos y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \operatorname{ch} x \cos y,$$

откуда $\varphi'(x) = -2x$, а значит, $\varphi(x) = -x^2 + c$, $c = \text{const}$. Итак,

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y + c.$$

Следовательно,

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) + ic.$$

Из условия $f(0) = 0$ находим: $0 + i0 = c$, $c = 0$.

Таким образом, искомый комплексный потенциал

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y),$$

или

$$f(z) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z).$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Течение жидкости определяется комплексным потенциалом. Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси координат.

519. $f(z) = z^2 + 2z + 2$. **520.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$. **521.** $f(z) = \ln(z - 1)$.

522. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий уровня

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = \text{const} \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

523. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий тока

$$\cos x \operatorname{sh} y = \text{const} \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

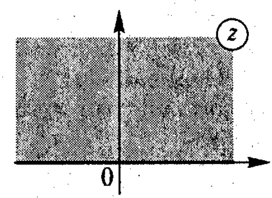
524. Найти циркуляцию по окружности $|z \pm a| = a$, если известен комплексный потенциал течения жидкости

$$f(z) = 5i \ln(z^2 - a^2).$$

Приложение 2

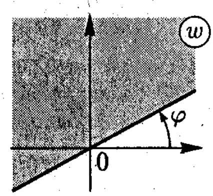
Таблица конформных отображений

Основные элементарные функции



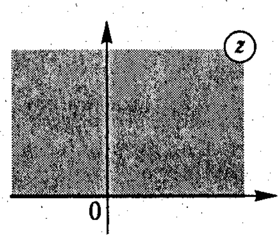
$\operatorname{Im} z > 0$

$$w = e^{i\varphi} z$$
$$z = e^{-i\varphi} w$$



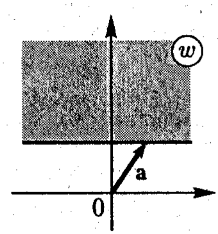
$\varphi < \operatorname{Arg} w < \pi + \varphi$

№ 1



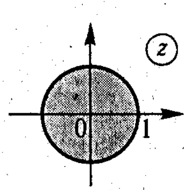
$\operatorname{Im} z > 0$

$$w = z + a$$
$$z = w - a$$



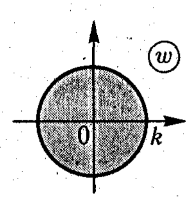
$\operatorname{Im} w > \operatorname{Im} a$

№ 2



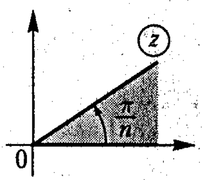
$|z| < 1$

$$w = kz$$
$$z = \frac{1}{k} w$$
$$k > 1$$



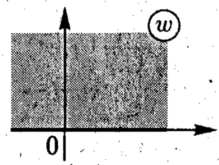
$|w| < k$

№ 3



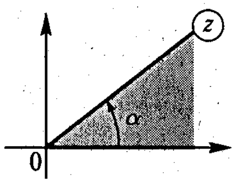
$0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n$

$$w = z^n$$
$$z = \sqrt[n]{w}$$
$$n = 2, 3, \ldots$$



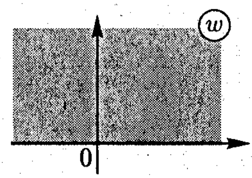
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 4



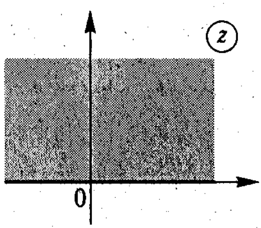
$0 < \operatorname{Arg} z < \alpha < \pi$

$$w = z^{\pi/\alpha}$$
$$z = w^{\alpha/\pi}$$



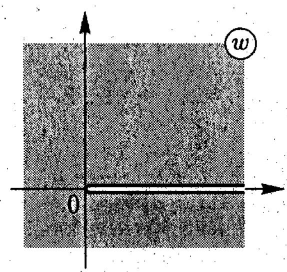
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 5



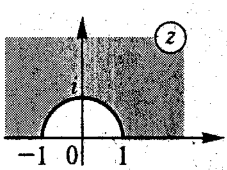
$\operatorname{Im} z > 0$

$$w = z^2$$
$$z = \sqrt{w}$$



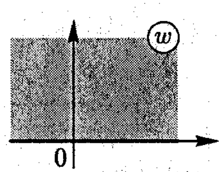
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 6



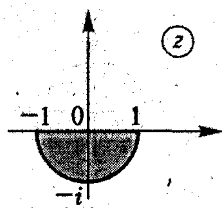
$\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1$

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



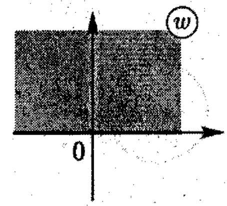
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 7



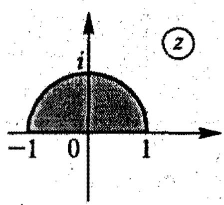
$\operatorname{Im} z<0,\ |z|<1$

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



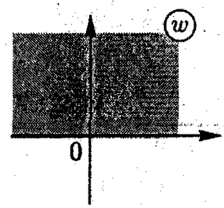
$\operatorname{Im} w>0$

№ 8



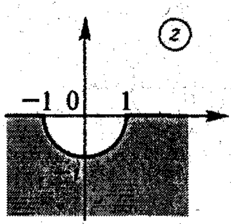
$\operatorname{Im} z>0,\ |z|<0$

$$w=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



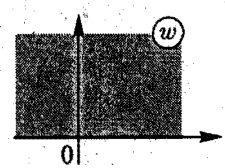
$\operatorname{Im} w>0$

№ 9



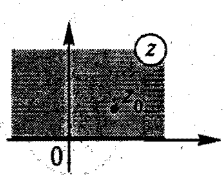
$\operatorname{Im} z<0,\ |z|>1$

$$w=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



$\operatorname{Im} w>0$

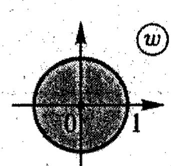
№ 10



$\operatorname{Im} z>0$

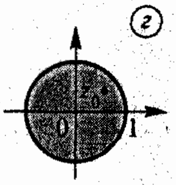
$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$

$$w(z_0)=0$$



$|w|<1$

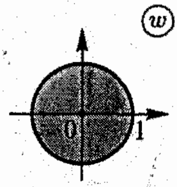
№ 11



$$w = e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

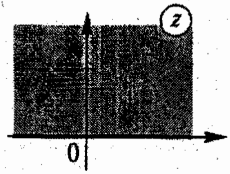
$$w(z_0)=0$$

$$\operatorname{Arg} w'(z_0)=\alpha$$



$|z|<1$ $|w|<1$

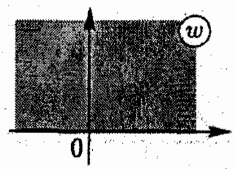
№ 12



$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

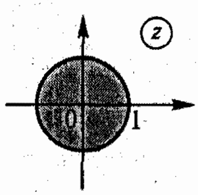
a, b, c, d – действительные

$ad-bc>0$



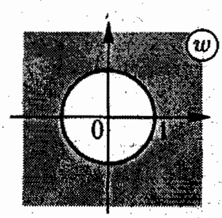
$\operatorname{Im} z>0$ $\operatorname{Im} w>0$

№ 13



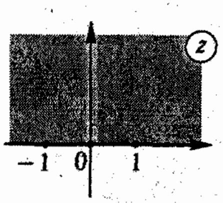
$$w=\frac{1}{z}$$

$$z=\frac{1}{w}$$



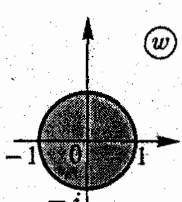
$|z|<1$ $|w|>1$

№ 14



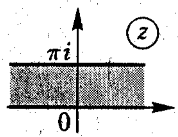
$$\frac{w+1}{w+i}\ \frac{i+1}{1+1}=$$

$$=\frac{z+1}{z+0}\ \frac{1-0}{1+1}$$



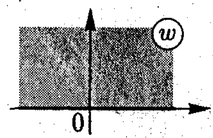
$\operatorname{Im} z>0$ $|w|<1$

№ 15



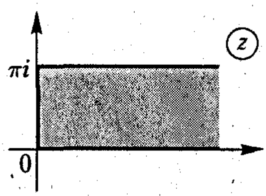
$w = e^z$

$z = \ln w$



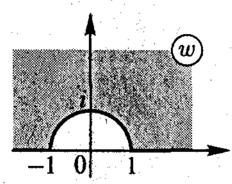
$0 < \operatorname{Im} z < \pi$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w > 0$

№ 16



$w = e^z$

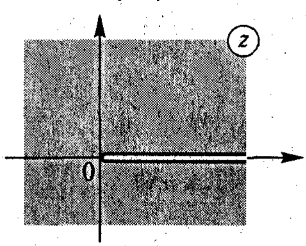
$z = \ln w$



$0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0$ $\qquad$ $\operatorname{Im} > 0,\ |w| > 1$

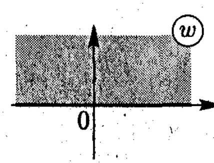
№ 17

Плоскость с разрезами



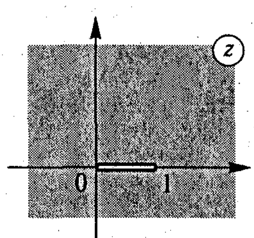
$w = \sqrt{z}$

$z = w^2$



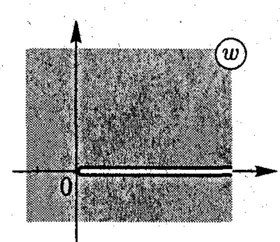
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w > 0$

№ 18



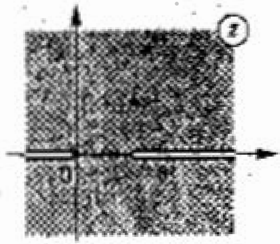
$$w = \frac{z}{1-z}$$

$$z = \frac{w}{w+1}$$



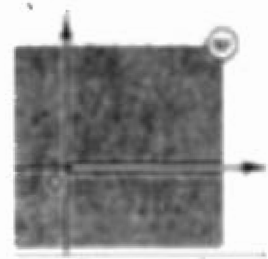
Плоскость с разрезом по отрезку $[0, 1]$ $\qquad$ Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 19



$$w = \frac{z}{z-1}$$

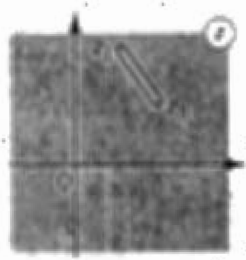
$$z = \frac{w}{w-1}$$



Плоскость с разрезами по действительным лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

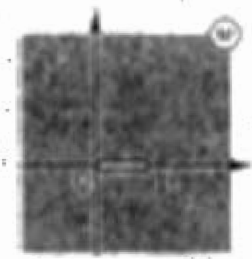
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 20



$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

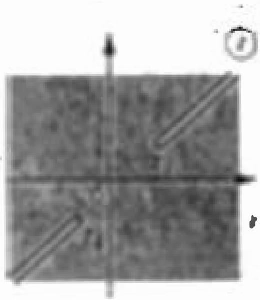
$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезом по отрезку $[z_0, z_1]$

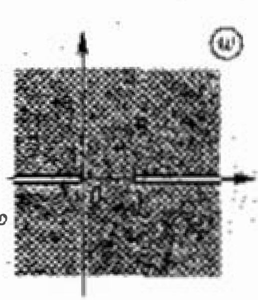
Плоскость с разрезом по отрезку $[0, 1]$

№ 21



$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

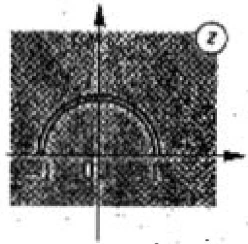
$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезами по лучам, лежащим на прямой, проходящей через начало координат

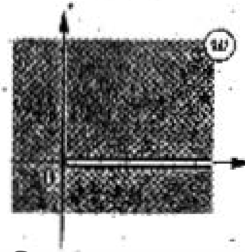
Плоскость с разрезами по действительным лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

№ 22



$$w = \frac{1}{i}\,\frac{z-1}{z+1}$$

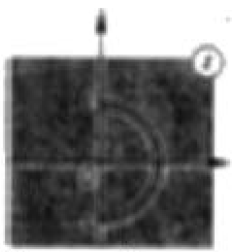
$$z = \frac{iw+1}{1-iw}$$



Плоскость с разрезом по дуге окружности $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$

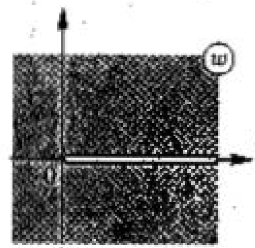
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0,+\infty[$

№23



$$w = \frac{1}{i}\,\frac{z-i}{z+i}$$

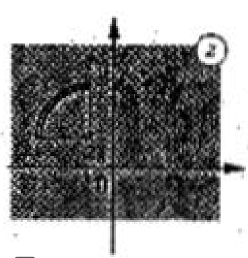
$$z = \frac{w+i}{1+iw}$$



Плоскость с разрезом по дуге окружности $|z|=1$, $\operatorname{Re} z>0$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0,+\infty[$

№24

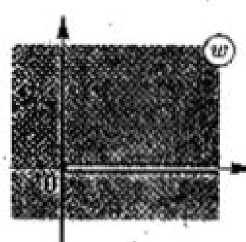


$$w = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

$$z_1 = z(\varphi_1),$$

$$z_2 = z(\varphi_2),$$

$$z_3 = z\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

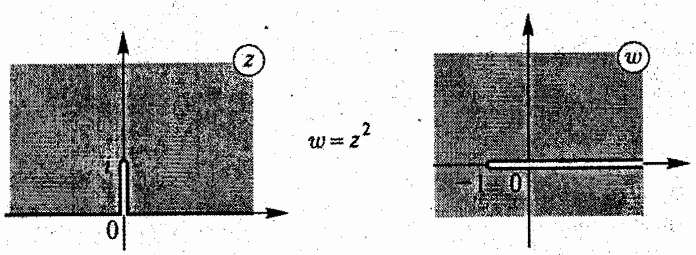


Плоскость с разрезом по дуге окружности $|z-z_0|=r$; $z=z_0+re^{i\varphi}$, $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0,+\infty[$

№25

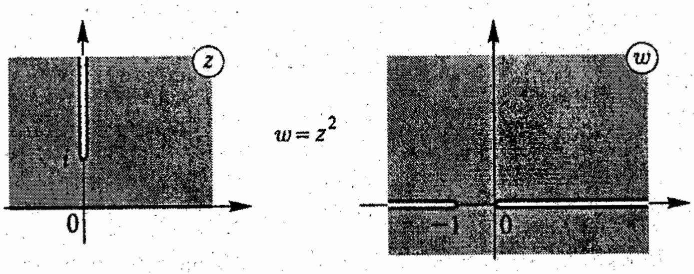
Полуплоскость с разрезами



Полуплоскость Im $z > 0$
с разрезом по отрезку $[0, i]$

Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[-1, +\infty[$

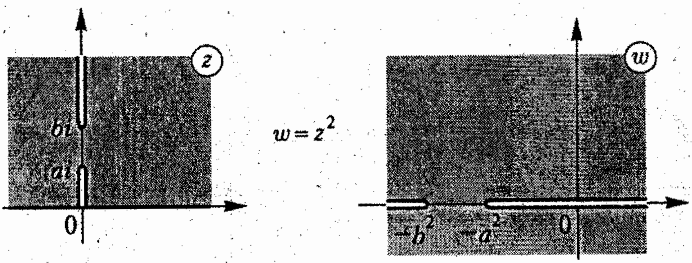
№ 26



Полуплоскость Im $z > 0$
с разрезом по отрезку $[i, +i\infty[$

Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, -1]$ и $[0, +\infty[$

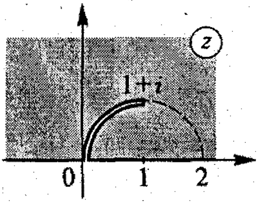
№ 27



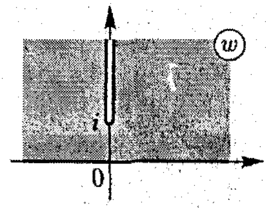
Полуплоскость Im $z > 0$ с
разрезами по отрезку $[0, ai]$
и мнимому лучу $]bi, +i\infty[$
$0 < a < b$

Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, -b^2]$ и $[-a^2, +\infty[$

№ 28



$$w = \frac{z-1}{z}$$
$$z = \frac{1}{1-w}$$

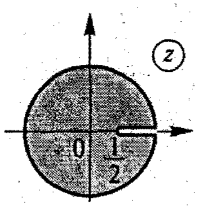


Полуплоскость с разрезом по дуге окружности
$|z-1|=1,\ z=1+e^{i\varphi}$,
$\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

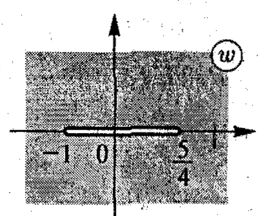
Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ с разрезом по мнимому лучу $[i, +i\infty[$

№ 29

Круг с разрезами



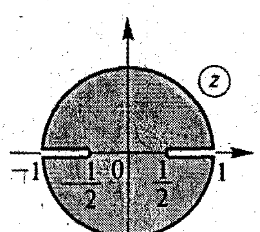
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



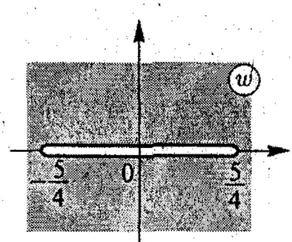
Круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$

Плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 5/4]$

№30



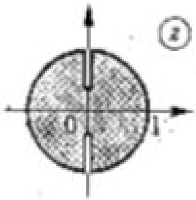
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



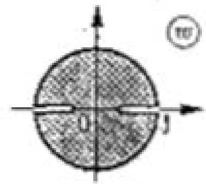
Круг $|z|<1$ с разрезами по отрезкам $[-1, -1/2]$ и $[1/2, 1]$

Плоскость с разрезом по отрезку $[-5/4, 5/4]$

№ 31



$w = \frac{z}{i}$

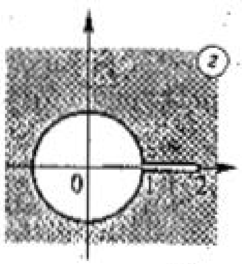


Круг $|z| < 1$
с симметричными
разрезами по мнимой оси

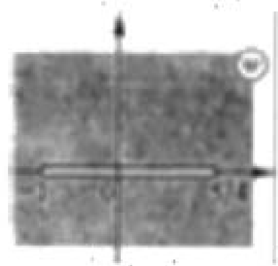
Круг $|w| < 1$
с симметричными разрезами
по действительной оси

№ 32

Внешность круга с разрезами



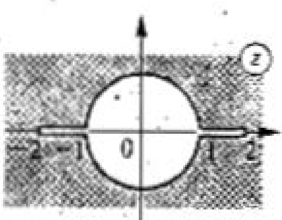
$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$



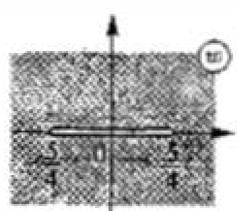
Внешность
единичного круга ($|z| > 1$)
с разрезом по отрезку [1, 2]

Плоскость с разрезом
по отрезку [−1, 5/4]

№ 33



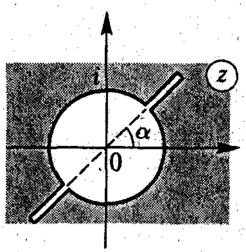
$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$



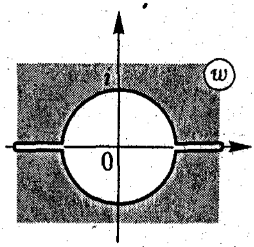
Внешность единичного круга
($|z| > 1$) с разрезом по отрезкам
[−2, −1] и [1, 2]

Плоскость с разрезом
по отрезку [− 5/4, 5/4]

№ 34



$w = e^{-i\alpha} z$

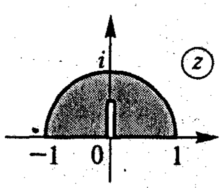


Внешность единичного круга ($|z|>1$) с разрезами по отрезкам, являющимися продолжениями его диаметра

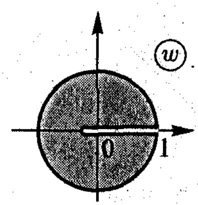
Внешность единичного круга ($|w|>1$) с разрезами по отрезкам, лежащим на действительной оси

№ 35

Полукруг с разрезами



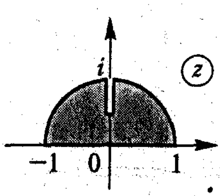
$w = z^2$



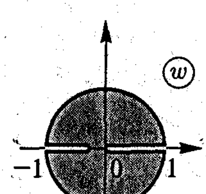
Полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по отрезку $[0, i/2]$

Круг $|w|<1$ с разрезом по отрезку $[-1/4, 1]$

№ 36



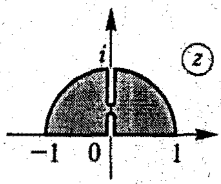
$w = z^2$



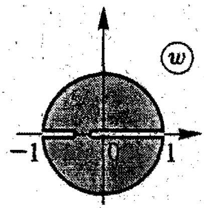
Полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, с разрезом по отрезку $[i/2, i]$

Круг $|w|<1$ с разрезами по отрезкам $[-1, -1/4]$ и $[0, 1]$

№ 37



$w=z^2$

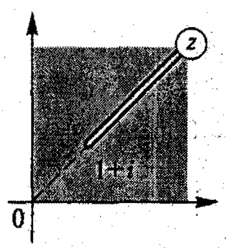


Полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$,
с разрезами по отрезкам
$[0, ai]$ и $[bi, i]$, где
$0<a<b<1$

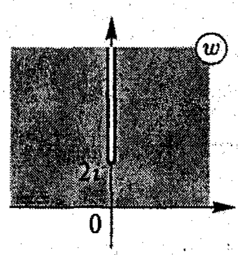
Круг $|w|<1$
с разрезами по отрезкам
$[-1, -b^2]$ и $[-a^2, 1]$

№ 38

Угол с разрезами



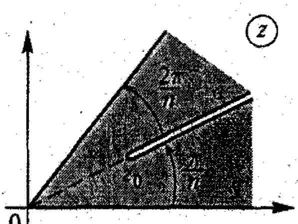
$w=z^2$



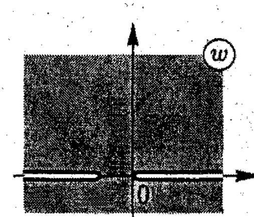
Угол $0<\operatorname{Arg} z<\pi/2$
с разрезом по действительному
лучу $\operatorname{Arg} z=\pi/4$
с началом в точке $1+i$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ с разрезом
по мнимому лучу $[2i, +i\infty[$

№ 39



$w=z^n$

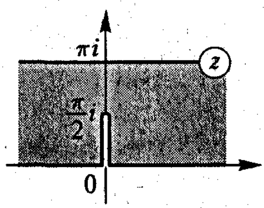


Угол $0<\operatorname{Arg} z<2\pi/n$
с разрезом по действительному
лучу $\operatorname{Arg} z=\pi/n$
с началом в точке $z_0=e^{i\pi/n}a$; $a>0$

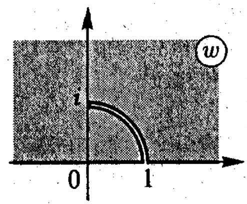
Плоскость с разрезами
по действительным лучам
$]-\infty, -a^n]$ и $[0, +\infty[$

№ 40

Полоса с разрезами



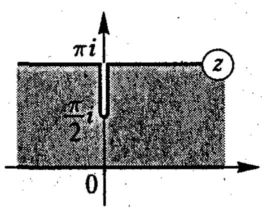
$w=e^z$



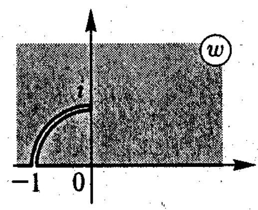
Полоса $0<\operatorname{Im} z<\pi$ с разрезом по мнимому отрезку $[0, \pi i/2]$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ con с разрезом по дуге окружности $w=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$

№ 41



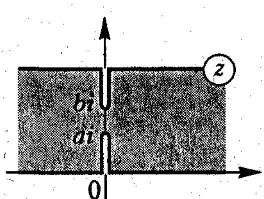
$w=e^z$



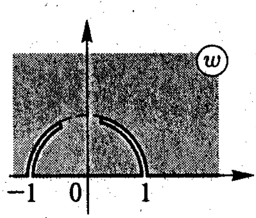
Полоса $0<\operatorname{Im} z<\pi$ с разрезом по мнимому отрезку $[\pi i/2, \pi i]$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ с разрезом по дуге окружности $w=e^{i\varphi}$, $\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi$

№ 42



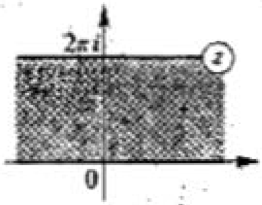
$w=e^z$



Полоса $0<\operatorname{Im} z<\pi$ с разрезами по мнимым отрезкам $[0, ai]$ и $[bi, \pi i]$, где $0<a<b<\pi$

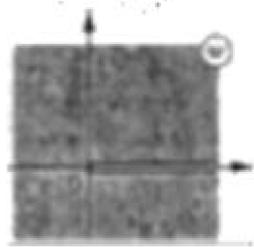
Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ с разрезами по дуге окружности $w=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant a$, $b\leqslant\varphi\leqslant\pi$

№ 43



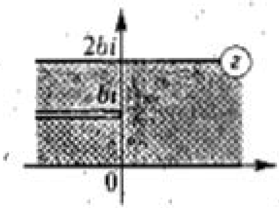
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$

$w = e^z$



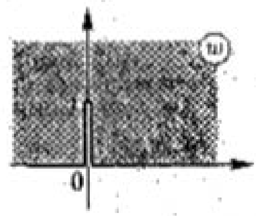
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 44



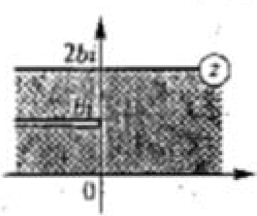
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2b$ с разрезом по лучу $\operatorname{Im} z = b$, $\operatorname{Re} z \leq 0$

$w = e^{\pi z/2b}$



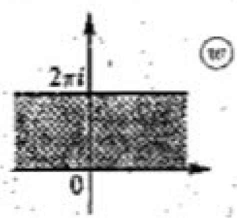
Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ с разрезом по мнимому отрезку $[0, i]$

№ 45



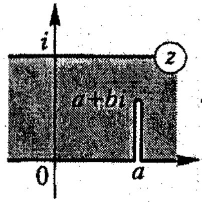
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2b$ с разрезом по действительному лучу $\operatorname{Im} z = b$, $\operatorname{Re} z \leq 0$

$w = \ln(e^{\pi z/b} + 1)$

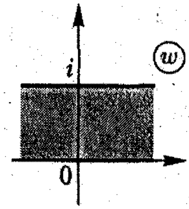


Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$

№ 46



$$w=\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi b}{2}}$$

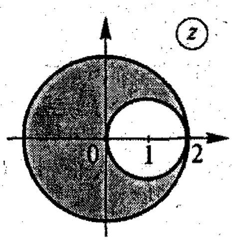


Полоса $0<\operatorname{Im} z<1$ с разрезом по отрезку $\operatorname{Re} z=a,\ 0\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant b<1$

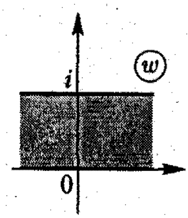
Полоса $0<\operatorname{Im} w<1$

№ 47

Различные области



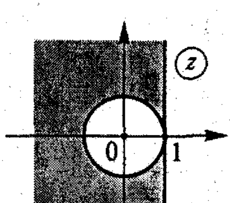
$$w=2i\frac{z}{z-2}$$



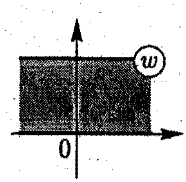
Область $|z|<2,\ |z-1|>1$

Полоса $0<\operatorname{Im} w<1$

№ 48



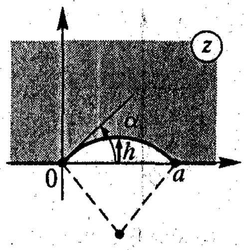
$$w=i\,\frac{z+1}{z-1}$$



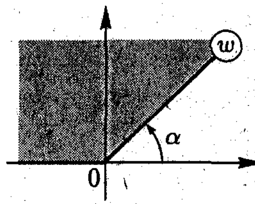
Область $\operatorname{Re} z<1$, с удаленным кругом $|z|<1$

Полоса $0<\operatorname{Im} w<1$

№ 49



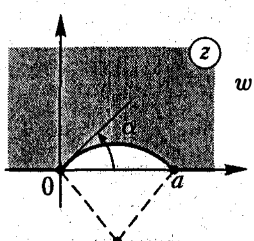
$$w=\frac{z}{a-z}$$



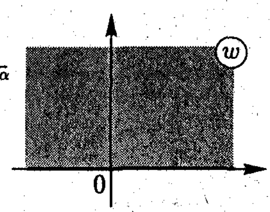
Полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с удаленным круговым сегментом

Угол $\alpha<\operatorname{Arg} w<\pi$

№ 50



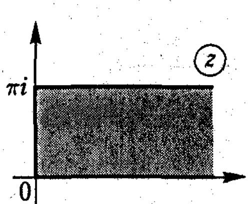
$$w=-\left(\frac{z}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$



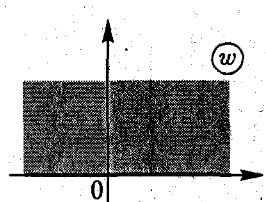
Полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с удаленным круговым сегментом

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

№ 51



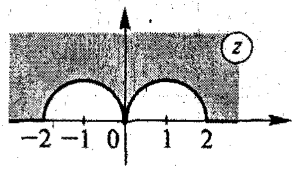
$$w=\operatorname{ch} z$$



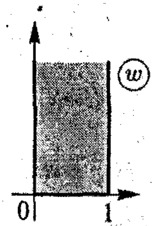
Полуполоса $0<\operatorname{Im} z<\pi$, $\operatorname{Re} z>0$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

№ 52



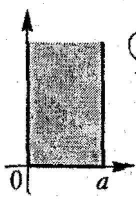
$$w = \frac{z-2}{z}$$



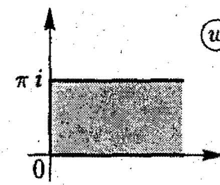
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с удаленными полукругами

Полуполоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$

№ 53



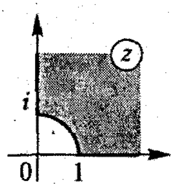
$$w = \frac{\pi}{i}\left(\frac{z}{a} - 1\right)$$



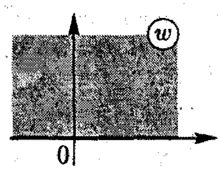
Полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < a$, $\operatorname{Im} z > 0$

Полуполоса $0 < \operatorname{Im} w < \pi$, $\operatorname{Re} w > 0$

№ 54



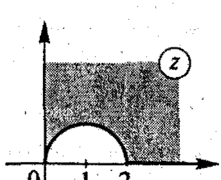
$$w = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$



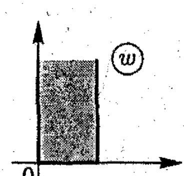
Угол $\operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0$ с удаленным сектором единичного круга $|z| < 1$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 55



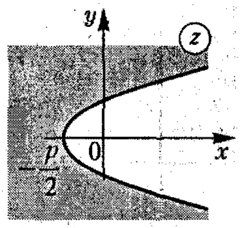
$$w = -\frac{2}{z}$$



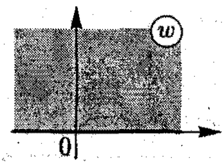
Угол $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ с удаленным полукругом

Полуполоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$

№ 56



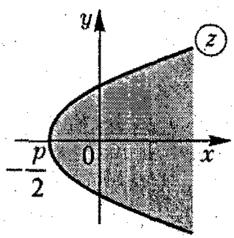
$$w=\sqrt{z}-i\sqrt{\frac{p}{2}}$$



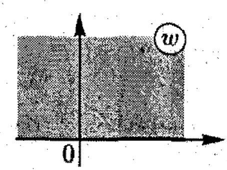
Внешность параболы
$y^2=2p(x+p/2),\ p>0,$
$z=x+iy$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

№ 57



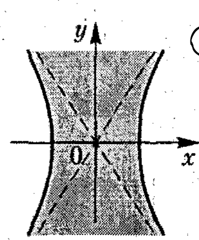
$$w=i\sqrt{2}\,\operatorname{ch}\pi\sqrt{\frac{z}{2p}}$$



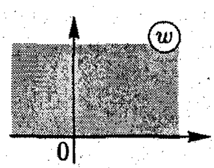
Внутренность параболы
$y^2=2p(x+p/2),\ p>0,$
$z=x+iy$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

№ 58



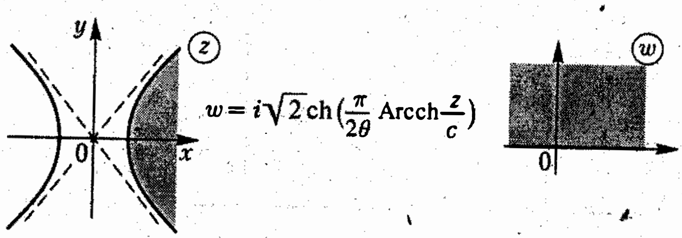
$$w=\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{ce^{i\theta}}\right)^{\frac{\pi}{\pi-2\theta}}$$



Внешность гиперболы
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ c=\sqrt{a^2+b^2}$
$\theta=\operatorname{Arcsin}\frac{a}{c}$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

№ 59

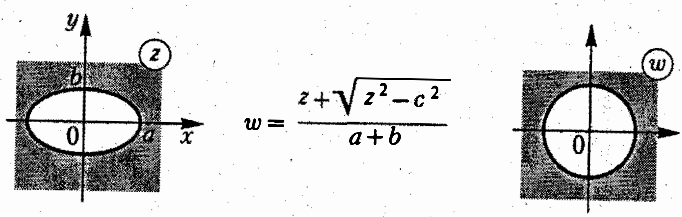


$$w = i\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2\theta}\,\mathrm{Arcch}\frac{z}{c}\right)$$

Внутренность правой ветви гиперболы
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c = \sqrt{a^2 + b^2},$
$\theta = \mathrm{Arcsin}\,\frac{a}{c}$

Полуплоскость $\mathrm{Im}\ w > 0$

№ 60

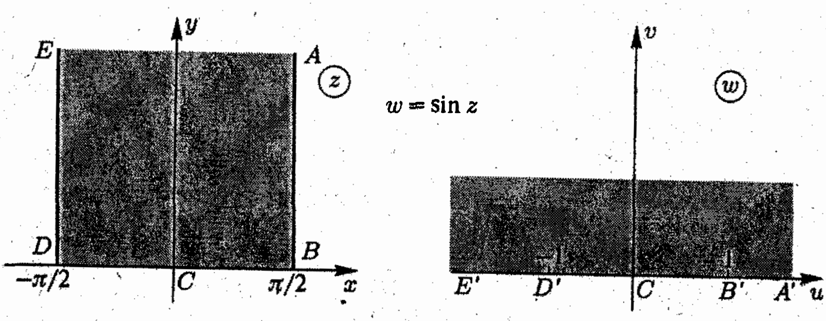


$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}$$

Внешность эллипса
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0,$
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

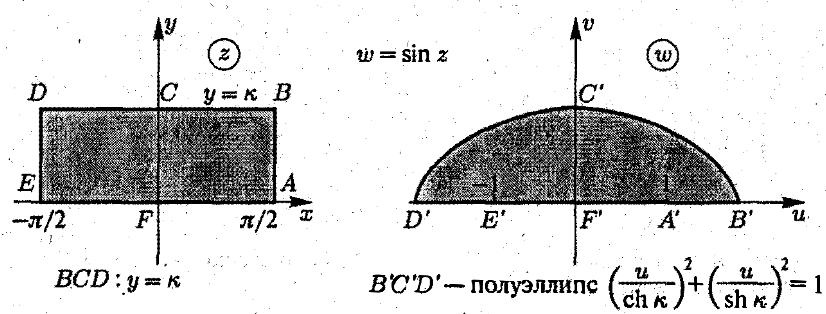
Внешность круга
($|w| > 1$)

№ 61



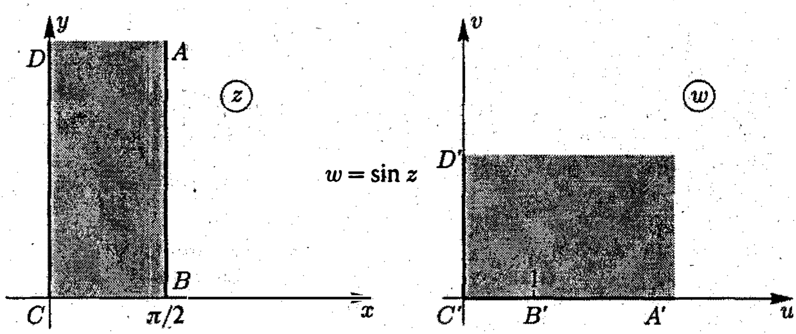
$$w = \sin z$$

№ 62



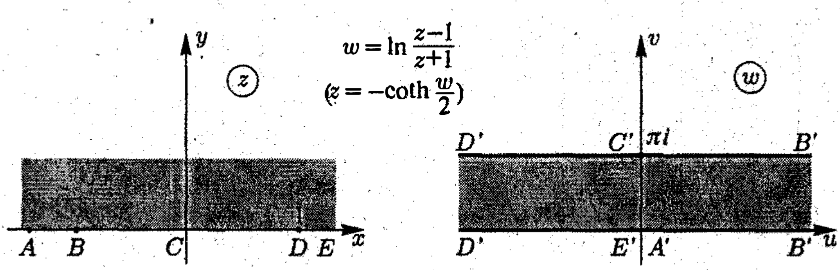
y
z
D
C
y = κ
B
E
A
−π/2
F
π/2
x
BCD : y = κ
w = sin z
v
w
C'
−1
1
D'
E'
F'
A'
B'
u
B'C'D' — полуэллипс $\left(\frac{u}{\operatorname{ch}\kappa}\right)^2+\left(\frac{u}{\operatorname{sh}\kappa}\right)^2=1$

№ 63



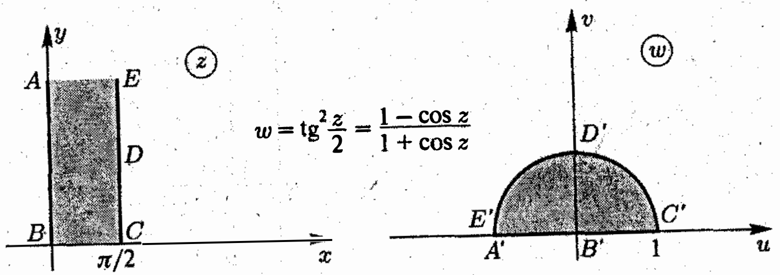
y
D
A
z
B
C
π/2
x
w = sin z
v
w
D'
1
C'
B'
A'
u

№ 64

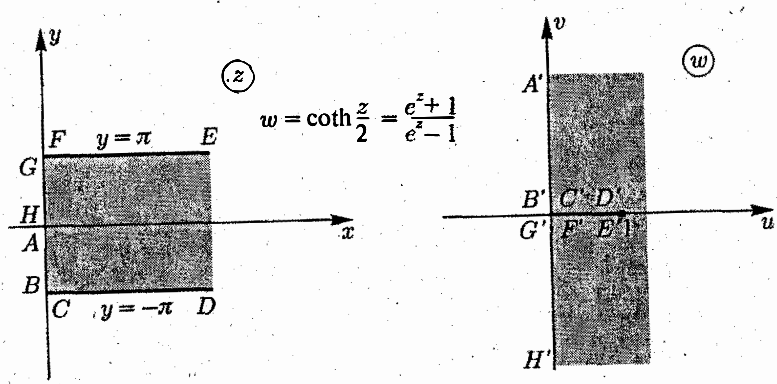


y
z
A
B
C
1
D
E
x
$w = \ln\frac{z-1}{z+1}$
$(z = -\coth\frac{w}{2})$
v
w
D'
C'
πi
B'
D'
E'
A'
B'
u

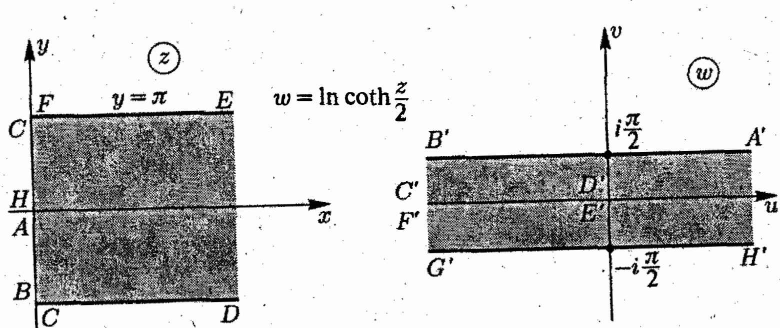
№ 65


y
A
E
D
B
C
π/2
x
z
w = tg² z/2 = (1 − cos z)/(1 + cos z)
v
w
D'
E'
C'
A'
B'
1
u

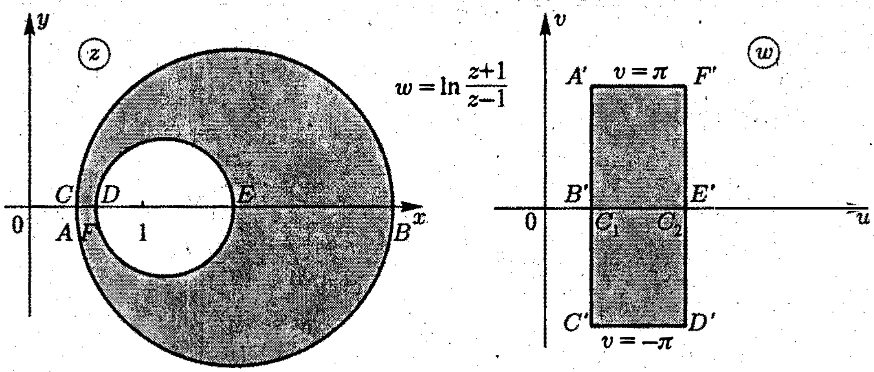
№ 66


y
z
F
y = π
E
G
H
A
B
C
y = −π
D
x
w = coth z/2 = (e^z + 1)/(e^z − 1)
v
w
A'
B'
C'
D'
G'
F'
E'
1
u
H'

№ 67


y
z
F
y = π
E
C
H
A
B
C
D
x
w = ln coth z/2
v
w
B'
iπ/2
A'
C'
D'
F'
E'
u
G'
−iπ/2
H'

№ 68



Центром окружности является точка $z = \coth C_n$ $(n = 1,2)$

Размер области $R = \dfrac{1}{\operatorname{sh} C_n}$ $(n = 1,2)$

№ 69

Ответы

2. $x = \frac{20}{17}$, $y = -\frac{36}{17}$. **3.** $x = \frac{-b}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-a}{a^2+b^2}$.

4. Действительного решения нет.

5. $\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$. **7.** $x = \frac{u^2+v^2-u}{(1-u)^2+v^2}$, $y = -\frac{v}{(1-u)^2+v^2}$.

8. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. а) $\rho=5$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\rho=4$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; в) $\rho=5\sqrt{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} - \pi$; г) $\rho=1$, $\varphi = \frac{4}{5}\pi$; д) $\rho=5$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; е) $\rho=1$, $\varphi = 2\pi - \alpha$.

10. а) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$; г) $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$; д) $1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; е) $2e^{i\pi}$; ж) $1\cdot e^{i\pi/2}$; з) $1\cdot e^{-i\pi/2}$; и) $2e^{-2\pi i/3}$; к) $1\cdot e^{(\alpha-\pi/2)i}$; л) $\sqrt{34}e^{i\operatorname{arctg}(3/5)}$.

11. Указание. Так как

$$x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2 = [x - \lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha)][x - \lambda(\cos\alpha - i\sin\alpha)],$$

то надо показать, что $f[\lambda(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)] = 0$.

12. а) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; б) $2^{10}(1+i)$; в) 1728; г) 1.

13. Указание. Воспользуемся соотношением

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)}$$

и применим формулу Муавра к числителю и знаменателю.

15. а) $3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$; б) $\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$;

в) $4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$; г) $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$;

д) $5\sin\varphi\cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$; е) $\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$.

16. а) $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; в) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$, $-i$;
г) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$.

17. а) $\pm1, \pm i$; б) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i), \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[6]{12}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$;
в) $\pm(\sqrt{3}-i)$.

18. $\sqrt[10]{2}(\cos 6^\circ+i\sin 6^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 222^\circ+i\sin 222^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 294^\circ+i\sin 294^\circ)$.

19. а) Вся комплексная плоскость, из которой вырезан круг радиуса 2 с центром в начале координат. б) Круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат, причем центр этого круга удален (круг «проколот»). в) Вся комплексная плоскость, из которой вырезан круг радиуса $r=\frac{1}{2}$ с центром в начале координат.

20. а) Окружность радиуса $r=8$ с центром в точке $z=5i$. б) Круг вместе с границей радиуса $r=4$ с центром в точке $z=1+i$.

21. а) Часть кольца, ограниченная двумя лучами $\arg z=\frac{\pi}{4}$ и $\arg z=\frac{\pi}{2}$ и окружностями радиусов $r=1$ и $r=2$ с центром в точке $z=-i$. б) Часть кольца, ограниченная двумя лучами $\arg z=\frac{\pi}{8}$ и $\arg z=\frac{4\pi}{3}$ и окружностями радиусов $r=2$ и $r=3$ с центром в точке $z=0$. Множество также включает часть луча $\arg z=\frac{4\pi}{3}$ между указанными окружностями и часть окружности радиуса 3 между указанными лучами.

22. а) Правая полуплоскость, включая и ось OY; б) полоса между прямыми $y=0$ и $y=1$, включая эти прямые.

23. а) Концентрическое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $R_1=1$ и $R_2=2$ с центром в точке $z_0=-(2+i)$. Обе окружности принадлежат множеству; б) часть плоскости, расположенная ниже прямой $y=x$; в) полоса между прямыми $x=1$ и $x=2$.

24. Внутренность единичной окружности.

25. а) Внешность параболы $y=\frac{x^2}{4}-1$; б) действительная полуось, включая и точку $(0, 0)$.

26. Внутренность гиперболы $xy=-\frac{1}{2}$.

27. Кольцевая область между эллипсами $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ и $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$, включая и сами эллипсы.

28. а) Внутренность окружности $x^2+(y-1)^2=1$; б) область, заключенная между окружностями

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \quad \text{и} \quad (x-2)^2+(y-2)^2=8.$$

29. Прямую $x=-2$. **30.** Прямую $y=2$.

31. а) Гипербола $xy=1$; б) гипербола $x^2-y^2=1$; в) окружность $x^2+(y+1)^2=1$.

32. а) Окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$; б) гипербола $xy=-1$.

33. Гипербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$. **34.** Окружность $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

35. а) Эллипс $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$; б) луч на оси OY от -1 до $-\infty$.

36. а) Гипербола $\frac{(y+9/4)^2}{(3/4)^2}-\frac{x^2}{(3\sqrt{2}/2)^2}=1$; б) эллипс $\frac{(x-3/2)^2}{(9/2)^2}+\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$.

37. а) Окружность $x^2+y^2=1$; б) прямая, перпендикулярная к отрезку z_1z_2 и проходящая через его середину; в) гипербола $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$; г) парабола $y^2=2x+1$.

38. а) $\bar{z}-z=0$ и $z+\bar{z}=0$; б) $z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$; в) $k(z+\bar{z})+2b+i(z-\bar{z})=0$.

39. а) $z^2+\bar{z}^2=2a^2$; б) $z\bar{z}+z+\bar{z}=0$.

40. $-(1+\sqrt[3]{2})$; $-1+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$. **41.** -1; 3; $1\pm 2i$.

42. $z=\frac{2z_1+z_2}{3}$. **43.** $b+ai$. **44.** $-3-i\sqrt{3}$. **45.** $\sqrt{3}-i$.

46. Решение. По условию задачи имеем $(4-3i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{5}{\sqrt{2}}(-1+i)$ или

$$\begin{cases} 4\cos\varphi+3\sin\varphi=-\frac{5}{\sqrt{2}}, \\ -3\cos\varphi+4\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\varphi=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{7}$, а значит, $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

47. $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **48.** $x_k=\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$.

49. $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. **50.** $-\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$.

51. $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = -1 + i$.

53. Решение. Рассмотрим сумму

$$S_n = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx).$$

Применяя формулу Муавра, получим

$$S_n = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^n.$$

Это есть сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \cos x + i\sin x$ и первым членом $a_1 = \cos x + i\sin x$. Она равна

$$S_n = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos nx + i\sin nx)(\cos x + i\sin x)}{1 - (\cos x + i\sin x)}.$$

Отделяя действительную и мнимую части, найдем

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Отсюда

$$\text{а) } \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\frac{(n+1)x}{2};$$

$$\text{б) } \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\frac{(n+1)x}{2};$$

54. а) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; б) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$. **55.** а) $u = x + 2xy$, $v = y^2 - x^2 - y$; б) $u = x^2 - y^2$, $v = 1 + 2xy$; в) $u = 3xy^2 - x^3$, $v = 1 - 3x^2y + y^3$; г) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;

д) $u = \dfrac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2}$, $v = \dfrac{x^2 + y - y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$; е) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

56. а) $w = -1$; б) $w = -3 - 4i$; в) $w = \dfrac{1+i}{2}$; г) $w = -\dfrac{5 + 12i}{13}$.

57. а) Окружиость $u^2 + v^2 = 4$, проходимая по ходу часовой стрелки; б) ось Ov (исключая точку O), проходимая так: сначала от 0 до $+\infty$, а затем от $-\infty$ до 0; в) луч, идущий по биссектрисе III координатного угла из ∞ в 0; г) луч, идущий по биссектрисе II координатного угла из ∞ в 0; д) биссектриса II координатного угла, пробегаемая из 0 до ∞, и биссектриса IV координатного угла, пробегаемая из ∞ в 0; е) положительная действительная полуось, пробегаемая из $+\infty$ в 0.

58. а) Ось Ox переходит в ось OU, причем при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ ось OU пробегается от $+1$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $+1$ (точка 1 исключается). Ось OY переходит в окружность $u^2+v^2=1$. б) Ось OX переходит в ось OU так же, как и в п. а). Ось OY переходит в прямую $u=1$, пробегаемую от точки $+1$ до $1+i\infty$ и от $1-i\infty$ до $+1$ (точка 1 исключается).

59. а) $u=2x-1$, $v=2y$; б) $u=x^2-y^2+x$, $v=(2x+1)y$;
в) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

60. а) $u=e^{-x}\cos y$, $v=-e^{-x}\sin y$; б) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=-e^{x^2-y^2}\sin 2xy$; в) $u=\sin x\operatorname{ch} y$, $v=\cos x\operatorname{sh} y$; г) $u=\operatorname{ch} x\cos(y-1)$, $v=\operatorname{sh} x\sin(y-1)$.

61. а) $\begin{cases} u=e^{(x^2-y^2)\ln 2-4k\pi xy}\cos\left[2k\pi(x^2-y^2)+2\ln 2\cdot xy\right], \\ v=e^{(x^2-y^2)\ln 2-4k\pi xy}\sin\left[2k\pi(x^2-y^2)+2\ln 2\cdot xy\right] \end{cases}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$;

б) $u=\operatorname{sh} x\cos y$, $v=\operatorname{ch} x\sin y$; в) $u=\dfrac{\sin x\cos x}{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$, $v=\dfrac{\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$.

62. а) $\rho=\dfrac{3}{4}$, $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$; б) $\rho=\dfrac{5}{4}$, $\varphi_0=\pi$. **63.** $\rho=\operatorname{ch}1$, $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$.

64. $\rho=\pi$, $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$. **65.** $\rho=\cos^2(\ln 3)$, $\varphi_0=0$.

66. а) $1+2k\pi i$. Здесь и далее, если не оговорено противное, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$;
б) $\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi i$; в) $\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$; г) $\ln\sqrt{2}+\left(2k-\dfrac{3}{4}\right)\pi i$;

д) $\ln\sqrt{13}+\left(2k\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\right)i$; е) $-\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi+2m\pi\cdot i$ $(k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

67. а) $e^{-(2k+1/2)\pi}$; б) $e^{(2k+1/2)\pi}$; в) $e^{-2k\pi}$; г) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$; д) $e^{-(4k+1/2)\pi}$;
е) $e^{(i-1)(4k+1/6)\pi}$; ж) $2^{3/2}e^{3(2k\pi-\pi/4)-3(\pi/4+\ln\sqrt{2}-2k\pi)i}$.

68. а) $\rho=0$, φ — неопределен; б) $\rho=e^{-2k\pi}$, $\varphi=\ln 10+2m\pi$ $(k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; в) $\rho=9e^{2k\pi}$, $\varphi=-\ln 3+2m\pi$ $(k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

69. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{4}\pi i$. **70.** а) $i\operatorname{sh}\pi$; б) $\operatorname{ch}\pi$; в) $i\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}$.

71. а) $-i\operatorname{cth}\pi$; б) $2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$; в) $k\pi+i\ln\sqrt{2}$.

72. а) $\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$, $\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$; б) i; в) 0.

73. $z_k=(2k+1)\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

74. $z_k = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

75. $z_k = (2k+1)\pi \pm i \ln 2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

78. $z_k = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

77. $z_{2k} = 2k\pi - i \ln\left(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi\right)$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i \ln\left(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

78. $x = 0$. **79.** $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

80. $z_k = \ln(1 + \sqrt{2}) + \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $z_k = \ln(\sqrt{2} - 1) + \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

81. а) $z = 1 - i$; б) $z = -e + i$. **82.** 1. **83.** 0. **84.** Не существует. **85.** 0.

86. $\dfrac{1}{3}$. **87.** $-i$. **88.** i. **89.** Не существует. **90.** 0. **94.** i. **95.** $\sqrt{2}$. **96.** $-i$. **97.** $-2i$. **104.** а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) да.

105. а) нет; б) нет; в) нет; г) да.

109. *Указание.* Для любых двух направлений, характеризующихся единичными векторами s^0 и n^0, связанными условием $n^0 = is^0$, имеют место обобщенные условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{1}$$

Чтобы получить условия Коши—Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

надо в качестве s^0 взять единичный вектор касательной к окружности $|z| = \rho$, направленный против часовой стрелки, а за n^0 — вектор внутренней нормали к окружности. Кроме этого, надо учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\rho\,\partial \varphi}.$$

Тогда легко из (1) получим (2). Отметим, что условия Коши—Римана в декартовых координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

получаются из (1) при

$$s^0 = 1, \quad n^0 = i.$$

114. а) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; б) $f(z) = \ln z$; в) $f(z) = z^2 + 2z$.

115. а) $f(z) = 2\operatorname{sh} z - z^2$; б) $f(z) = 2\sin z - z$; в) $f(z) = 4\operatorname{ch}^2 z + z^2 - 1$.

116. а) $f(z) = 2\cos 2z + z$; б) $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$.

118. а) да; б) нет; в) да; г) нет. **119.** $a + c = 0$.

120. а) нет; б) да; в) нет; г) да. **122.** $f(u) = c_1 u + c_2$, c_1 и $c_2 = \text{const}$.

123. а) нет; б) да; в) да. *Указание.* Показать, что функция $\ln w$ аналитична в области D.

125. а) да; б) нет; в) нет. **126.** $u = c_1(ax + by) + c_2$. **127.** $u = c_1 xy + c_2$.

128. $u = c_1 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + c_2$. **129.** $u = c_1(x^2 - y^2) + c_2$.

130. $u = c_1\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$, c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

131. $u = c_1 \dfrac{x}{x^2 + y^2} + c_2$. **132.** а) $r_1 = 2$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $r_2 = \dfrac{1}{e}$, $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$;
б) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$; $r_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}$, $\varphi_2 = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$;
в) $r_1 = 15$, $\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$; $r_2 = 3\left(1 + \dfrac{\pi^2}{4}\right)$, $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4\pi}{\pi^2 - 4}$.

133. а) Полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается, полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$ сжимается. б) В любой точке z (кроме $z = 0$), лежащей внутри окружности $|z| = 1$, имеет место растяжение, а для точек, лежащих вне этой окружности, — сжатие. в) То же, что и в п. б). г) Часть комплексной плоскости, лежащая внутри окружности $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, сжимается; часть плоскости, лежащая вне этой окружности, — растягивается.

134. $S_{\tilde{D}} = \dfrac{8}{3}$, $l_w = 2(1 + \sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

135. $S_{\tilde{D}} = \dfrac{x_2 - x_1}{4}(\operatorname{sh} 2y_2 - \operatorname{sh} 2y_1) - \dfrac{y_2 - y_1}{4}(\sin 2x_2 - \sin 2x_1)$.

136. $7{,}5\pi$. **137.** $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

138. Данный прямоугольник отображается в кольцо $e \leqslant |w| \leqslant e^2$, площадь которого равна $\pi(e^4 - e^2)$. По формуле (9) получаем $4(e^4 - e^2)$. Ошибка происходит из-за того, что при заданных условиях отображение не является взаимно однозначным.

139. $\dfrac{1}{2}$. **140.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **141.** $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i)$. **142.** а) $2\pi i$; б) $-2\pi i$.

143. 0. **144.** 0. **145.** $(i - 1)e^i$. **146.** а) $2 + i$; б) $2 + 2i$.

147. $-2(1 + i)$. **148.** -1. **149.** $\dfrac{3}{5}(i - 1)$.

150. а) $e\cos 1 - 1 + ie\sin 1$; б) $e\cos 1 - 1 + ie\sin 1$.

151. $-(1 + i\operatorname{sh} 1)$. **152.** а) $2(i-1)$; б) $2\sqrt{2}i$. **153.** $2\sqrt{2} - 4 + i2\sqrt{2}$.

154. $-7e^{-2} + (3-2i)e^{i}$. **155.** $e^{-1} - 1$.

156. $\cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}$. **157.** $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

158. $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\ln^2 2\right) + i\frac{\pi}{8}\ln 2$. **159.** $-\frac{\pi^2}{8}$.

160. $\frac{1}{4}[1 - \cos(2+2i)]$. **161.** $-\left(\operatorname{tg} 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1 + \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1\right) + i\operatorname{th} 1$.

162. $\sqrt{2\operatorname{sh} 1} + i(\sqrt{2\operatorname{sh} 1} - 2\sqrt{\sin 1})$. **163.** $\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2 + \frac{1}{2}\right)i$.

164. $-\frac{4}{3}$. **165.** 0. **166.** $-\ln\sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} + i\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$.

167. πi. **168.** πe^{-1}. **169.** $\frac{\pi}{2}i$. **170.** $\pi\operatorname{sh} 1$.

171. 0. **172.** $\frac{2}{3}\pi\operatorname{ch}\pi\cdot i$. **173.** 0. **174.** $-\frac{\pi}{45}i$. **175.** π.

176. 0. **177.** $-\pi i$. **178.** $2\pi i$. **179.** $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$.

180. 0. **181.** $-\frac{\pi i}{27}$. **182.** $\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sh} 1$. **183.** $\pi^3 i$.

184. 0. **185.** $-2\pi i$. **186.** $-\frac{1+i}{2}e^{t}$.

187. Расходится. **188.** Сходится. **189.** Сходится. **190.** Сходится.

191. Расходится. **192.** Сходится абсолютно.

193. Сходится. **194.** Расходится. **195.** Сходится. **196.** Расходится.

197. $R = 1$. **198.** $R = 1$. **199.** $R = \sqrt{2}$. **200.** $R = \infty$.

201. $R = 1$. **202.** $R = \infty$. **203.** $R = 1$. **204.** $R = 1$.

205. $R = 1$. **206.** $R = \infty$. **207.** $R = 1$. **208.** e^{-1}.

209. а) и б) $R \geqslant \frac{r + r' - |r - r'|}{2}$; в) $R \geqslant rr'$; г) $R \leqslant \frac{r}{r'}$.

210. $-\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1 - \ldots$, $R = \infty$.

211. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right]$, $R=\infty$.

212. $\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}(2z-1)+\frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2+\frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3+\ldots\right]$, $R=\infty$.

213. $-\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\frac{3^2}{5^2}(z+2)^2+\frac{3^3}{5^3}(z+2)^3+\ldots\right]$, $R=\frac{5}{3}$.

214. $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots$, $R=1$. **215.** $-iz+z^3+iz^5-z^7-\ldots$, $R=1$.

216. $1+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)$, $R=\infty$. **217.** $\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)$, $R=\infty$.

218. $\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2\cdot 4}+\frac{z^3}{3\cdot 8}+\ldots\right)$, $R=2$.

219. $\ln 2+\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{2\cdot 4}+\frac{7z^3}{3\cdot 8}-\ldots$, $R=1$.

220. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!2^3}z^3+\frac{3}{5!2^3}z^5+\ldots$, $R=\pi$.

221. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{2!2^2}z^2-\frac{1}{3!2^3}z^3+\ldots$, $R=\sqrt{\ln^2(2-\sqrt{3})+\pi^2}$.

222. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}z-\frac{4}{2!6^3}z^2+\frac{1}{3!6^3}z^3+\ldots$, $R=\sqrt{\ln^2 5+\pi^2}$.

223. $\ln 2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2!2^2}z^2-\frac{1}{4!2^3}z^4+\ldots$, $R=\pi$.

224. $-\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{4!}z^4-\frac{16}{6!}z^6+\ldots$, $R=\frac{\pi}{2}$.

225. $\ln 2-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{4\cdot 4!}-\frac{1}{2\cdot 6!}z^6+\ldots$, $R=\pi$.

226. $e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\ldots\right)$, $R=1$.

227. $f(z)=\frac{1}{a-z}$, $|z|<1$. **229.** $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

230. $|z|>2$. **231.** $|z|>e^{-1}$. **232.** $|z|>e$.

233. $|z+1|>\frac{1}{4}$. **234.** $|z-2-i|>\frac{1}{2}$. **235.** $|z+2i|>3$.

236. $|z+1-i|>1$. **237.** $|z+1+i|<1$. **238.** $|z-i|<2$.

239. $0 < |z-2+i| < 1$. **240.** $2 < |z| < 4$. **241.** Расходится всюду.

242. $1 < |z| < 2$. **243.** $|z-i| > e$. **244.** $1 < |z| < 2$.

245. $|z+1| > 2$. **246.** $0 < |z-i| < 2$. **247.** $0 < |z| < 1$.

248. $0 < |z-1| < 1$. **249.** 1) Если $|a| > |b|$, то всюду расходится; 2) если $|a| < |b|$, то сходится в кольце $|a| < |z| < |b|$.

250. $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots$. **251.** $\frac{2}{2!}z - \frac{8}{4!}z^3 + \frac{32}{6!}z^5 - \ldots$.

252. $\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$. **253.** $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots$.

254. $z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \ldots$. **255.** $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \ldots$.

256. $\frac{4^2}{2!2z^3} - \frac{4^4}{4!2z^5} + \frac{4^6}{6!2z^7} - \ldots$. **257.** $\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \ldots$.

258. $1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots$. **259.** $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots$.

260. $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \ldots$. **261.** $\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}$.

262. $\frac{\sin 2}{z-2} - \frac{\sin 2}{2!}(z-2) - \frac{\cos 2}{3!}(z-2)^2 + \frac{\sin 2}{4!}(z-2)^3 + \frac{\cos 2}{5!}(z-2)^4 - \ldots$.

263. $(1-i) + (z+i) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{i}{1!}\right)\frac{1}{z+i} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{i}{2!}\right)\frac{1}{(z+i)^2} + \ldots =$

$= (1-i) + (z+i) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{i}{n!}\right](z+i)^{-n}$.

264. а) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.

265. а) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$.

266. а) Не разлагается; б) $\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3} - \frac{2^3+2}{z^4} + \frac{2^4-1}{z^5} - \frac{2^5-2}{z^6} + \ldots\right)$.

267. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$. **268.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n - \frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$; в) $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}$.

269. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$. **270.** Не разлагается.

271. $\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$. **272.** $z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot 4^{n+1}}{z^{2n+1}}$.

273. $-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{4^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}$. **274.** $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$.

275. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$. **276.** 2. **277.** $\frac{1}{2}$ **278.** $\frac{1}{3}$

279. Сходится **280.** Не сходится **281.** Сходится **282.** Сходится

286. а) $z=0$ — второго порядка, $z_{1,2}=\pm 2i$ — простые;
б) $z_n=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые.

287. а) $z=0$ — третьего порядка, $z_n=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые.
б) $z=0$ — простой, $z_n=n\pi i$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ — второго порядка.

288. а) $z_n=(2n+1)\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — второго порядка;
б) $z_n=(4n+1)\pi i/2$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — второго порядка.

289. а) $z=-\pi i$ — второго порядка; $z_n=n\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые;
б) $z_n=\sqrt[3]{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $z_n=\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\,\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ — простые.

290. а) $z_{1,2}=\pm\pi i$ — второго порядка, $z_n=(2n+1)\pi i$ $(n=1,\pm2,\pm3,\ldots)$ — простые; б) нулей нет.

291. Второго порядка. **292.** Третьего порядка.

293. Простой нуль. **294.** Четвертого порядка.

295. Первого порядка. **296.** Второго порядка.

297. Четвертого порядка. **298.** Пятнадцатого порядка.

299. а) Нулем, порядок которого не ниже чем $\min(n,m)$; б) нулем порядка $n+m$; в) нулем порядка $n-m$, если $n>m$; правильной точкой, не являющейся нулем, если $n=m$; особой точкой, если $n<m$.

300. а) Полюс третьего порядка; б) полюс четвертого порядка; в) полюс второго порядка.

301. а) Полюс простой; б) полюс второго порядка.

302. а) $z_n=(4n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — полюсы второго порядка;
б) $z=0$ — устранимая особая точка.

303. а) $z=-2$ — существенно особая точка; б) $z=0$ — существенно особая точка.

304. а) $z=0$ — полюс второго порядка, $z=-1$ — полюс второго порядка; б) $z=0$ — полюс второго порядка, $z=2n\pi i$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые полюсы.

305. а) $z=0$ — существенно особая точка; б) $z=-1$ — существенно особая точка; в) $z=0$ — существенно особая точка.

306. а) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=2\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ — полюсы второго порядка; б) $z=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — устранимые особые точки; $z=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые полюсы; в) $z=\pi$ — простой полюс; $z=k\pi$ $(k=0,-1,\pm2,\pm3,\ldots)$ — полюсы второго порядка.

307. Устранимая особая точка. **308.** Полюс простой.

309. Полюс простой. **310.** Устранимая особая точка.

311. Существенно особая точка.

312. $z=0$ — полюс четвертого порядка, $z=-1$ — полюс простой.

313. Устранимая особая точка. **314.** Устранимая особая точка.

315. Полюс простой. **316.** Устранимая особая точка.

317. Существенно особая точка.

318. 1. **319.** $-\dfrac{16}{3}$. **320.** 1. **321.** -1. **322.** 0. **323.** 0.

324. $\operatorname{res} f(0)=0$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=\dfrac{-8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

325. $\operatorname{res}(0)=\dfrac{1}{24}$.

326. $\operatorname{res} f(-i)=-\dfrac{1+3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{res} f(i)=-\dfrac{1-3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{res} f(3)=\dfrac{\operatorname{ch} 3}{10}$.

327. $$\operatorname{res} f\left[(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right]=\begin{cases}-\dfrac{2}{\sqrt3}e^{\pi/6+2n\pi};\\[2mm] \dfrac{2}{\sqrt3}e^{-\pi/6+(2n-1)\pi},\end{cases}$$

$$\operatorname{res} f\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt3}e^{-\pi/6+2n\pi},\\[2mm] -\dfrac{2}{\sqrt3}e^{\pi/6+(2n-1)\pi}\end{cases}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

328. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{5}{2}$, $\operatorname{res} f(1) = e$. **329.** $\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{27}$, $\operatorname{res} f(2) = -\frac{1}{27}$.

330. $\operatorname{res} f(0) = 0$, $\operatorname{res} f(z_1) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}e^{i}$, $\operatorname{res} f(z_2) = \frac{(1-i)}{4\sqrt{2}}e^{-i}$, $\operatorname{res} f(z_3) = \frac{(1+i)}{4\sqrt{2}}e^{i}$, $\operatorname{res} f(z_4) = -\frac{(1-i)}{4\sqrt{2}}e^{-i}$, где z_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — корни уравнения $z^4 + 1 = 0$.

331. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$. **332.** $\operatorname{res} f(0) = 0$.

333. $\operatorname{res} f(-i) = \frac{4}{9}\operatorname{sh} 2 \cdot i$, $\operatorname{res} f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{9}(e + 2e^{-1})i$.

334. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$, $\operatorname{res} f(3) = \frac{2}{27}\sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$.

335. $\operatorname{res} f(0) = 0$. **336.** $\operatorname{res} f(-3) = \frac{1}{8}e^{-3i}$, $\operatorname{res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}$, $\operatorname{res} f(1) = \frac{e^{i}}{8}$.

337. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **338.** $\operatorname{res} f(i) = -1$.

339. $\operatorname{res} f(1) = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots[2n-(n-2)]}{(n-1)!}$.

340. $\operatorname{res} f(n\pi) = 0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **341.** $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!(2n)!}$ в точке $z = 0$.

342. e в точке $z = 1$. **343.** $\sin 1$ в точке $z = 0$; $-\sin 1$ в точке $z = 1$.

344. $1 - e^{-1}$ в точке $z = 0$; e^{-1} в точке $z = -1$.

345. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$ в точке $z = 0$. **346.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$ в точке $z = 0$.

347. 0. **348.** 0. **349.** $(1 - 2e^{-1})\pi i$.

350. $2(1 - e^{-1})\pi i$. **351.** $-\frac{1}{3}\pi i$. **352.** 0.

353. $-\frac{4}{3}\ln 3 \cdot \pi i$. **354.** $2\pi i$. **355.** $[\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)]\frac{\pi}{2}$.

356. πi. **357.** 0. **358.** $2\pi i \frac{e^2}{3}$. **359.** $-\pi^2 i$. **360.** $2\pi i$.

361. $\frac{\sin 1 - 4\cos 1}{12}\pi i$. **362.** $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **363.** 0. **364.** $3\pi i$. **365.** 0.

366. $z=\infty$ — простой полюс. **367.** $z=\infty$ — устранимая особая точка.

368. $z=\infty$ — существенно особая точка.

369. $z=\infty$ — устранимая особая точка.

370. $z=\infty$ — устранимая особая точка.

371. $z=\infty$ — полюс третьего порядка.

373. $2\pi i$. **374.** 0. **375.** 0. **376.** $2\pi e i$.

377. $-\frac{\pi}{3}i$. **378.** $2\pi i$. **379.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **380.** $\frac{\pi}{ab(a+b)}$.

381. $\frac{3}{8}\pi$. **382.** $\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n}\pi$. **383.** $-\frac{\pi}{27}$.

384. $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)^3}\left(\frac{5b^2-a^2}{b^3}+\frac{b^2-5a^2}{a^3}\right)$.

385. $\frac{2}{3}\pi$. **386.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{n}\pi}$. **387.** $\frac{2}{3}\pi$. **388.** $\frac{\pi}{2}$.

389. $\frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}$. **391.** $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$. **392.** $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2+\sin 2)$.

393. $\frac{\pi}{12}e^{-2}(2e-1)$. **394.** $\frac{\pi}{3}e^{-3}$. **395.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-a/\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

396. $\frac{\pi}{2a}e^{-a}$. **397.** $\frac{\pi}{2a}e^{-ma}$.

398. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\sin\frac{1}{2}$. **399.** $\frac{\pi}{16}\left(e^{-\lambda}-\frac{1}{3}e^{-3\lambda}\right)$.

400. $\frac{\pi}{4}(2-a)e^{-a}$. **401.** 0. **402.** $\frac{\pi}{4b^3}e^{-bm}[3b^2-a^2-mb(3b^2+a^2)]$.

403. $\frac{\pi}{2}$. **404.** $\frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$. **405.** $\frac{b-a}{2}\pi$.

406. $\frac{\pi}{2a^4}-\frac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m+\frac{2}{a}\right)$. **407.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/(4a)}$.

408. $\pi\left(\frac{1}{\sin a\pi}-\frac{1}{\sin b\pi}\right)$. **409.** $\frac{2\pi}{1-p^2}$.

410. $\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$. **411.** $\frac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$. **412.** 0.

413. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **414.** πi. **415.** $\dfrac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$.

416. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. **417.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **418.** $\dfrac{1-\pi a\operatorname{ctg}\pi a}{2a^2}$.

419. $\dfrac{1}{2a^4}-\dfrac{\pi}{4a^3}(\operatorname{ctg}\pi a+\operatorname{cth}\pi a)$. **420.** $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$.

421. $\dfrac{\pi^2}{8}$. **422.** $\dfrac{\pi^2\operatorname{ctg}\pi a}{\sin\pi a}$. **423.** $\dfrac{\pi^3}{32}$.

424. $\dfrac{\pi\operatorname{ch}\alpha a}{2a\operatorname{sh}\pi a}+\dfrac{1}{2a^2}$. **425.** $\dfrac{1}{4a^4}\left(\dfrac{\pi^2a^2\operatorname{ch}\pi a}{\operatorname{sh}^2\pi a}+\dfrac{\pi a}{\operatorname{sh}\pi a}-2\right)$.

426. $\operatorname*{res}_{z=k\pi}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=1$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$. **427.** $\operatorname*{res}_{z=\pi/2+k\pi}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=3$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

428. а) $\operatorname*{res}_{z=0}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-1$, $\operatorname*{res}_{z=\pi/2+k\pi}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$;
б) $\operatorname*{res}_{z=k\pi}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

429. -2. **430.** 3. **431.** 6. **432.** -1. **433.** -3. **434.** -4. **435.** 2.
436. 1. **437.** 1. **438.** 1. **439.** 2. **440.** 6. **441.** 3. **442.** Нет.
443. 5. **444.** Нет. **445.** 11. **446.** 6. **447.** 2. **448.** 3. **449.** 4.
450. 1. **451.** n. **452.** 2. **453.** 4. **454.** Нет. **455.** 1. **456.** 1.

460. а) Вся плоскость; б) вся плоскость, кроме точки $z=2$; в) вся плоскость, кроме точки $z=0$; г) вся плоскость, кроме точек $z_k=1-\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; д) вся плоскость, кроме точки $z=-2i$.

464. а) и б) — параллельный перенос; в), г) и е) — поворот; д) — растяжение.

465. а) $w=az+b$; б) $w=-az+b$; в) $w=-i(az+b)$, где a и b — действительные числа, $a>0$.

466. а) $w=-\dfrac{1+8i}{5}z+\dfrac{14+2i}{5}$; б) $w=2z+i$; в) $w=iz-2$.

467. $w=\dfrac{z-a}{h}$.

468. *Указание.* Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$, получим

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Обходя границу полуполосы, например, так, что область остается слева, в силу принципа соответствия границ находим, что образом полуполосы будет четвертый квадрант с выброшенным полукругом $\left|z-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

469. а) $\arg w = -\frac{\pi}{3}$; б) $|w| = 1$, $-\pi < \arg w < -\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{1}{4} \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$, $v = 0$; г) $\frac{1}{2} < v < 1$, $u = 0$; д) $\left|w-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, $u > 0$.

470. $w = \frac{z-i}{iz-i}$. **471.** $\left|w-\frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3}$, $u < \frac{3}{4}$. **472.** $\operatorname{Re} w > 0$.

473. $u < v$. **474.** $u + v < 0$. **475.** а) $-1+i$; б) $1+i$; в) ∞.

476. а) $w = -az + b$; б) $w = -i(az+b)$, где a и b — действительные числа, $a > 0$.

477. $w = \frac{2}{2-z}$. **478.** а) $w = \frac{z-i}{z+i}$; б) $w = i\frac{z-2i}{z+2i}$.

479. $w = \frac{z-i}{iz-1}$. **480.** $w = \frac{i-1-(1+i)z}{(3i-1)z-1-3i}$.

481. $w = i\frac{1-z}{1+z}$. Воспользоваться формулой (7).

482. $w = \frac{2z-5}{10-z}$. Воспользоваться формулой (7).

483. Решение. Воспользоваться формулой $w = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$, где z_0 — точка первого круга, переходящая в центр второго. В случае а) имеем $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, т. е. $z_0 = \frac{1}{2}$. Используя условие $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, получим $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Итак, $w = i\frac{2z-1}{2-z}$. В случае б) аналогично получим $w = -iz$.

484. $w = \frac{5-z+\sqrt{5}(i-1)(z+1)}{5-z+\sqrt{5}(i+1)(z+1)}$. **485.** Первый квадрант плоскости w.

486. Область $\frac{1}{2} \leqslant |w-1| \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(w-1) \leqslant 0$.

487. $w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$. **488.** $w = \sqrt{e^{2\pi z i} + e^{-2\pi a}}$.

489. $w = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$. **490.** $w = \left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^2$.

Указание. Сначала отобразить круг на верхнюю полуплоскость, а затем преобразовать ее в плоскость с разрезом.

491. $w = [(z-z_0)e^{-i\varphi_1}]^{\pi/(\varphi_2-\varphi_1)}$. **492.** $w = -e^{-z}$. **493.** $w = \left(\dfrac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2$.

494. На прямоугольник $\{\ln r \leqslant u \leqslant \ln R,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$.

495. $w_1 = ze^{-i\pi/2}$, $w = \sqrt{w_1} = \sqrt{z}e^{-i\pi/4}$ $(\sqrt{1} = 1)$.

496. $w_1 = \dfrac{z-a}{b-z}$, $w = \sqrt{w_1} = \sqrt{\dfrac{z-a}{b-z}}$.

497. $w_1 = z-a$, $w_2 = \dfrac{w_1}{w_1-(b-a)}$, $w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$.

498. $w_1 = z^2$, тогда $w_1\big|_{z=1+i} = 2i$. Согласно формуле (9) $w = e^{i\varphi}\dfrac{w_1-2i}{w_1+2i} = e^{i\varphi}\dfrac{z^2-2i}{z^2+2i}$. Из условия $w(0) = 1$ находим, что $e^{i\varphi} = -1$. Окончательно $w = \dfrac{2i-z^2}{2i+z^2}$.

499. Верхний полукруг $|w-1| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

500. Четверть круга $|w| < 1$, $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$.

501. Прямоугольник с вершинами в точках $1, 2, 2+ie, 1+ie$.

502. $w_1 = z^4$, $w_2 = \dfrac{16+w_1}{16-w_1}$, $w = w_2^2 = \left(\dfrac{16+z^4}{16-z^4}\right)^2$.

503. $w_1 = z-a$, $w_2 = \dfrac{\pi i}{b-a}w_1$, $w = e^{w_2} = e^{\pi i(z-a)/(b-a)}$. **504.** $w = \ln z$.

505. $w_1 = e^{-z}$, $w_2 = -w_1$, $w_3 = \dfrac{w_2+1}{1-w_2}$, $w = w_3^2 = \left(\dfrac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)^2$.

506. $w_1 = 2iz$, $w_2 = w_1 + \dfrac{\pi}{2}$, $w = \sin w_2 = \sin\left(2iz + \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch} 2z$.

507. $w = 2\cdot\dfrac{z-2}{z}$. **508.** $w = 2i\dfrac{z+2}{z}$.

509. $w = \left(\dfrac{z}{z-1+i}\right)^2$. **510.** $w = 2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

511. $w_1 = 2z$, $w_2 = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$, $w = \dfrac{w_2-i}{w_2+i} = \dfrac{4z^2-4iz+1}{4z^2+4iz+1}$.

512. $w = -\dfrac{z^8 - i}{z^8 + i}$. **513.** $w = e^{i2z}$.

514. а) единичный круг $|w| < 1$; б) вся плоскость w с разрезом вдоль отрезка $u = 0$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$.

515. $\omega = \dfrac{i}{2}(3 - z)\sqrt{z}$. **516.** $\omega = \dfrac{1}{\pi}(z - \ln z - 1 + i\pi)$.

517. $\omega = \dfrac{1}{\pi}\left(\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - \dfrac{2}{\sqrt{z}}\right)$. **518.** $\omega = \dfrac{1}{\pi}\left(\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 2\sqrt{z}\right)$.

519. Потенциал скоростей $u = x^2 - y^2 + 2x + 2$; функция тока $v = 2(x+1)y$; линии уровня $x^2 - y^2 + 2x = c_1$ — гиперболы; линии тока $xy + y = c_2$ — гиперболы; величина скорости $V = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$; направление скорости

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x+1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1$$

(см. формулу (1) на стр. 4); проекции скорости на оси Ox и Oy: $V_{Ox} = 2(x+1)$, $V_{Oy} = -2y$.

520. Потенциал скоростей $u = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; функция тока $v = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; линии уровня $x^2 - y^2 = c_1(x^2+y^2)^2$; линии тока $xy = c_2(x^2+y^2)^2$; величина скорости $V = \dfrac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; направление скорости

$$\varphi = 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (3m-1)\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

проекции скорости на оси Ox и Oy:

$$V_{Ox} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad V_{Oy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

521. Потенциал скоростей $u = \dfrac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2]$; функция тока $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}$; линии уровня $(x-1)^2 + y^2 = c_1$ — окружности; линии тока $y = c_2(x-1)$ — прямые; величина скорости $V = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$; направление скорости

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-1} + \pi m, \quad m = -1, 0, 1;$$

проекции скорости на оси Ox и Oy:

$$V_{Ox} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad V_{Oy} = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

522. $f(z) = (1-i)z^2 + z$. **523.** $f(z) = \sin z + c$.

524. $\Gamma_L = -10\pi$ по обеим окружностям.

Оглавление

Дифференциальные уравнения

Векторный анализ

Вариационное исчисление

Интегральные уравнения

Функции комплексного переменного

Операционное исчисление

Теория устойчивости

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по основным разделам теории функций комплексного переменного.

В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбирается около 150 типовых задач и примеров.

В книге содержится свыше 500 задач и примеров для самостоятельного решения. Почти все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев даются указания к решению.

Книга предназначается в основном для студентов технических вузов с математической подготовкой, но может принести пользу и инженеру, желающему восстановить в памяти разделы математики, относящиеся к теории функций комплексного переменного.

ВСЕ ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в *Internet*: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23, 135-42-46

1246 ID 3019
9 785354 003938