студенты-
физики

Линейная алгебра
Теоретические задачи

Барон Яков

2 семестр
Бадьин А.В.

2013

Теор. задачи (лин. алгебра).

№1. $\mathbb{R}^{N\times N}$ - лин. пр-во;

$\mathbb{R}_0^{N\times N}$ - подмн-во, состоящее из симметр. матриц ($A^T=A$)

Д-ть: $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ - подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

т.к. $A^T=A$, то $a_i^j=a_j^i$

1) пусть $A,B\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$. $A+B=C$

$c_j^i=a_j^i+b_j^i=a_i^j+b_i^j=c_i^j \Rightarrow C\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$.

2) пусть $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$. $\lambda A=C$

$c_j^i=\lambda a_j^i=\lambda a_i^j=c_i^j \Rightarrow C\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$.

Итак, $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ - подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

Базис строится следующим образом:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\1&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&1&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

Кол-во базисных элементов при передвижении „1" по диагоналям меняется след. образом: $N, N-1, \dots, 1$. Тогда размерность подпр-ва $\mathbb{R}_0^{N\times N}$: $n=S_n=\frac{(N+1)}{2}\cdot N$.

№2 $\mathbb{R}^{N\times N}$ - лин. пр-во;

$\mathbb{R}_0^{N\times N}$ - подмн-во, состоящее из антисим. матриц ($A^T=-A$)

Д-ть: $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ - подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

т.к. $A^T=-A$, то $a_i^j=-a_j^i \Leftrightarrow a_j^i=-a_i^j$

1) пусть $A,B\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$. $A+B=C$

$c_j^i=a_j^i+b_j^i=-a_i^j-b_i^j=-(a_i^j+b_i^j)=-c_i^j \Rightarrow C\in\mathbb{R}_0^{N\times N}$.

2) пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$. $\lambda A = C$

2

$c_j^i = \lambda a_j^i = \lambda(-a_i^j) = -(\lambda a_i^j) = -c_i^j \Rightarrow C \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$.

Итак, $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ – подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

т.к. $a_j^i = -a_i^j$, то $a_j^i = 0$. Базис строится след. образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Без учёта базисных эл-тов, у которых „1" перемещается по диагонали, по аналогии с номером 1, имеем:

$n = \frac{(N+1)}{2}N - N = \frac{(N-1)}{2}N$ – размерность подпр-ва $\mathbb{R}_0^{N\times N}$.

№3. $\mathbb{R}^{N\times N}$ – лин. пр-во;

$\mathbb{R}_0^{N\times N}$ – подлин-во, состоящее из матриц с нулевым следом.

Д-ть: $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ – подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

т.к. $\mathrm{tr}A = 0$, то $\sum\limits_{i=j} a_j^i = 0$.

1) пусть $A, B \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$. $A+B=C$

$\sum\limits_{i=j} c_j^i = \sum\limits_{i=j} a_j^i + \sum\limits_{i=j} b_j^i = 0+0 = 0 = \mathrm{tr}C \Rightarrow C \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$.

2) пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$. $\lambda A = C$

$\sum\limits_{i=j} c_j^i = \sum\limits_{i=j} \lambda a_j^i = \lambda \sum\limits_{i=j} a_j^i = \lambda \cdot 0 = 0 = \mathrm{tr}C \Rightarrow C \in \mathbb{R}_0^{N\times N}$.

Итак, $\mathbb{R}_0^{N\times N}$ – подпр-во пр-ва $\mathbb{R}^{N\times N}$.

Из условия $\mathrm{tr}A = 0$ имеем: $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0$, или:

$a_{nn} = -a_{11} - a_{22} - \dots - a_{(n-1)(n-1)}$. Отсюда, для базисных эл-тов, связанных с диагональю, имеем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \ldots + c_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

След-но, таких базисных эл-тов: $N-1$.

Помимо „диагональных" базисных эл-тов будут присутствовать (N^2-N) эл-тов следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом: $n = N^2 - \cancel{N} + \cancel{N} - 1 = N^2 - 1$ — размерность подпр-ва $\mathbb{R}_0^{N\times N}$.

№4. $\mathbb{R}^{N\times N}$ — лин. пр-во;

Q_1 — подпр-во симметричных матриц $(A^T = A)$;

Q_2 — подпр-во антисимметричных матриц $(A^T = -A)$;

Д-ть: $\mathbb{R}^{N\times N} = Q_1 \oplus Q_2$.

Пусть $B \in Q_1$: $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{1n} & \ldots & & b_{nn} \end{pmatrix}$; $C \in Q_2$: $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & -c_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{1n} & \ldots & & 0 \end{pmatrix}$;

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Рассмотрим сумму $B+C$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} - c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} + c_{1n} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выберем элементы b_{ij} и c_{ij} так, что:

$$\begin{cases} b_{ij} - c_{ij} = a_{ji}, \\ b_{ij} + c_{ij} = a_{ij}; \end{cases} \longrightarrow \quad b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}. \qquad i \neq j$$

Очевидно, при таком выборе b_{ij} и c_{ij}: $B + C = A$. Таким образом: $\mathbb{R}^{N\times N} = Q_1 \oplus Q_2$.

№5. $\mathbb{R}^{N\times N}$ – лин. пр-во;

Q_1 – подпр-во матриц с нулевым следом;

Q_2 – подпр-во матриц вида λI, где $\lambda \in \mathbb{R}$, I – единичная матрица.

Пусть $B \in Q_1$: $\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$; $C \in Q_2$: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

$\sum\limits_{i=j} b_{ij} = 0$

Рассмотрим сумму $B+C$: $\begin{pmatrix} b_{11}+\lambda & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22}+\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn}+\lambda \end{pmatrix}$.

Выберем эл-ты b_{ij} и λ так, что: при $i \neq j$: $b_{ij} = a_{ij}$; при $i=j$:

$$\begin{cases} b_{11}+\lambda = a_{11}, \\ b_{22}+\lambda = a_{22}, \\ \dots\dots\dots \\ b_{nn}+\lambda = a_{nn}, \\ b_{11}+\dots+b_{nn} = 0; \end{cases}$$

Складывая все ур-ния, получаем: $\lambda = \dfrac{a_{11}+\dots+a_{nn}}{N}$. Тогда:

$b_{11} = \dfrac{(N-1)a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn}}{N}$; $b_{22} = \dfrac{-a_{11} + (N-1)a_{22} - \dots - a_{nn}}{N}$; $\dots$;

$b_{nn} = \dfrac{-a_{11} - a_{22} - \dots + (N-1)a_{nn}}{N}$.

Очевидно, при таком выборе b_{ij} и λ: $B+C=A$. Таким образом: $\mathbb{R}^{N\times N} = Q_1 \oplus Q_2$.

№6. $\mathbb{R}^N$ – лин. пр-во;

Q_1 – подпр-во столбцов, сумма эл-тов которых равны нулю;

Q_2 – подпр-во столбцов вида $\lambda\cdot(1,\dots,1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Д-ть: $\mathbb{R}^N = Q_1 \oplus Q_2$

Пусть $\beta \in Q_1$: $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$; $\gamma \in Q_2$: $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}^N$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 0$

Рассмотрим сумму $\beta + \gamma$: $\begin{pmatrix} \beta_1 + \lambda \\ \beta_2 + \lambda \\ \vdots \\ \beta_n + \lambda \end{pmatrix}$.

Выберем эл-ты β_i и λ так, что: $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + \lambda, \\ \alpha_2 = \beta_2 + \lambda, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = \beta_n + \lambda, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 0; \end{cases}$

Складывая все ур-ния, получаем: $\lambda = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}{N}$. Тогда:

$$\beta_1 = \frac{(N-1)\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n}{N}, \beta_2 = \frac{-\alpha_1 + (N-1)\alpha_2 - \ldots - \alpha_n}{N}, \ldots, \beta_n = \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots + (N-1)\alpha_n}{N}.$$

Очевидно, при таком выборе β_i и λ: $\beta + \gamma = \alpha$. Таким образом: $\mathbb{R}^N = Q_1 \oplus Q_2$.

N7. $\mathbb{C}^N$ – лин. пр-во.

Д-ть: $\mathbb{C}^N$ – лин. пр-во над полем $\mathbb{R}$ (и над полем $\mathbb{C}$).

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Проверим опр. лин. пр-ва:

1) пусть $x, y \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $(x+y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y+x)^j$; $\boxed{x+y=y+x}$

2) пусть $x, y, z \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $((x+y)+z)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = (x + (y+z))^j$; $\boxed{(x+y)+z = x+(y+z)}$

3) пусть $\widehat{\theta}$ – нул. эл-т пр-ва $\mathbb{C}^N$, $x \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда:
$(x + \widehat{\theta})^j = x^j + \widehat{\theta}^j = x^j + 0 = x^j$; $\boxed{x + \widehat{\theta} = x}$

4) пусть $x \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $(x + (-1)x)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \widehat{\theta}^j$; $\boxed{x + (-1)x = \widehat{\theta}}$

5) пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $((\alpha\beta)x)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = (\alpha(\beta x))^j$; $\boxed{(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)}$

6) пусть $x \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $(1x)^j = 1 \cdot x^j = x^j$; $\boxed{1x = x}$

7) пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда:

$((\alpha+\beta)x)^j = (\alpha+\beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j$; $\boxed{(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x}$

8) пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{C}^N$, $y \in \mathbb{C}^N$, $j = \overline{1,N}$. Тогда:

$(\lambda(x+y))^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j$; $\boxed{\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y}$

Итак, $\mathbb{C}^N$ - лин. пр-во над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

Простейшие базисы для двух случаев выглядят след. образом:

$\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \to n = 2N$ - размерность.

$\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to n = N$ - размерность.

N8. $P_{2N}(\mathbb{R})$ - лин. пр-во;

Q: $F(-1) = 0$ и $F(1) = 0$.

Явл. ли Q подпр-вом пр-ва $P_{2N}(\mathbb{R})$?

Проверим опр. подпр-ва:

1) $Q \subseteq P_{2N}(\mathbb{R})$;

2) $Q \neq \varnothing$;

3) $\forall F_1 \in Q\ \forall F_2 \in Q$: $F_1 = (x-1)^{\alpha_1}(x+1)^{\beta_1} \cdot f_1$, где f_1 - остаточный многочлен, после разложения полинома

$F_2 = (x-1)^{\alpha_2}(x+1)^{\beta_2} \cdot f_2$, где f_2 - —//—

$F_1 + F_2 = (x-1)^{\alpha_1}(x+1)^{\beta_1}\left[f_1 + (x-1)^{\alpha_2-\alpha_1}(x+1)^{\beta_2-\beta_1} \cdot f_2\right] \in Q$

(при $\alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_2 > \beta_1$)

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall F_1 \in Q$: $\lambda F_1 = \lambda(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta} \cdot f_1 \in Q$.

Итак, Q - подпр-во пр-ва $P_{2N}(\mathbb{R})$.

Простейший базис данного подпр-ва:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to n = 2N - 2$ - размерность.

№9. L - лин. пр-во, $\dim L = N \in \mathbb{N}$.

$C_1 = \alpha(e, e')$

$C_2 = \alpha(e', e'')$

Найти: $\alpha(e'', e)$ - ?

$$e' = eC_1, \quad e'' = e'C_2 \longrightarrow e'' = e\underbrace{C_1C_2}_{\alpha(e,e'')}$$

$$\alpha(e, e'')\alpha(e'', e) = I$$

$$C_1C_2\alpha(e'', e) = I$$

$$C_2\alpha(e'', e) = C_1^{-1}$$

$$\boxed{\alpha(e'', e) = C_2^{-1}C_1^{-1}.}$$

№10. $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$ - лин. пр-во.

$X, Y \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$

Д-ть: $(X, Y) = tr(X^T Y)$.

$$\left.\begin{array}{l} X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1} \Rightarrow X^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2} \\ Y \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1} \end{array}\right\} \Rightarrow X^T Y \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$$

$$X^T: \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N_2} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{N_1 1} & x_{N_1 2} & \cdots & x_{N_1 N_2} \end{pmatrix}; \quad Y: \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{N_1 1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{N_1 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1N_2} & y_{2N_2} & \cdots & y_{N_1 N_2} \end{pmatrix}$$

$$X^T Y: \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{1k} y_{1k} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{N_1 k} y_{N_1 k} \end{pmatrix} \Rightarrow tr(X^T Y) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} x_{ik} y_{ik}$$

Проверим опр. скалярного произведения:

1) $(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{ik} y_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} y_{ik} x_{ik} = (Y, X)$;

2) $(X_1 + X_2, Y) = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} (x^1 + x^2)_{ik} y_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x^1_{ik} y_{ik} + \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x^2_{ik} y_{ik} =$

$= (X_1, Y) + (X_2, Y)$;

3) $(\lambda X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} (\lambda x)_{ik} y_{ik} = \lambda \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{ik} y_{ik} = \lambda (X, Y)$;

4) $(X, X) = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{ik} x_{ik} > 0$. Значит, можно ввести скалярное произведение по ф-ле $(X, Y) = tr(X^T Y)$ в пр-ве $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

№11. L - лин. пр-во, $\dim L \geq 2$.

f - лин. форма в пр-ве L.

Явл. ли $A(x,y) = f(x)\cdot f(y)$ билинейной формой?

т.к. f - лин. форма, то: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x,y \in L$,
$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in L$.

Проверим $A(x,y)$ на билинейность:

$A(x+z,y) = f(x+z)f(y) = (f(x)+f(z))f(y) = f(x)f(y) + f(z)f(y) = A(x,y) + A(z,y)$,

$A(\lambda x,y) = f(\lambda x)f(y) = \lambda f(x)f(y) = \lambda A(x,y)$,

$A(x,y+z) = f(x)f(y+z) = f(x)(f(y)+f(z)) = f(x)f(y) + f(x)f(z) = A(x,y) + A(x,z)$,

$A(x,\lambda y) = f(x)f(\lambda y) = f(x)\cdot\lambda f(y) = \lambda f(x)f(y) = \lambda A(x,y)$.

Итак, $A(x,y)$ - билинейная форма.

Может ли эта билин. форма задавать скалярное произведение в L, т.е.: $(x,y) \overset{?}{=} A(x,y) = f(x)\cdot f(y)$.

Проверим определение скал. пр-ния:

1) $(x,y) = f(x)\cdot f(y) = f(y)\cdot f(x) = (y,x)$;

2) $(x_1+x_2,y) = f(x_1+x_2)f(y) = f(x_1)f(y) + f(x_2)f(y) = (x_1,y) + (x_2,y)$;

3) $(\lambda x,y) = f(\lambda x)f(y) = \lambda f(x)f(y) = \lambda(x,y)$;

4) $(x,x) = f(x)f(x) = f^2(x) > 0$.

Итак, билинейная форма $A(x,y)$ может задавать скалярное пр-ние в L.

№12. H - лин. евклидово пр-во;
$e_1,\dots,e_N$ - ОНБ;

A - лин. оператор в пр-ве H.

Д-ть: $[A]^k_m = (e_k, Ae_m)$ при $k,m = \overline{1,N}$

$Ae_m = [A]^k_m(e)e_k$. Тогда: $[A]^k_m = (e_k, [A]^k_m e_k) = [A]^k_m \underbrace{(e_k,e_k)}_{=1,\text{ т.к. ОНБ}} = [A]^k_m$.

№13. H – лин. евклидово пр-во;

$e_1, \dots, e_N$ – ОНБ; A – лин. оператор в пр-ве H.

Д-ть: $tr A = \sum\limits_{k=1}^{N} (e_k, Ae_k)$.

$Ae_k = [A]^i_k(e) e_i$. Тогда: $tr A = \sum\limits_{i,k=1}^{N} (e_k, [A]^i_k e_i) = \sum\limits_{i,k=1}^{N} [A]^i_k (e_k, e_i) =$
$= \sum\limits_{i,k=1}^{N} [A]^i_k \delta^k_i = \sum\limits_{k=1}^{N} [A]^k_k = tr A$.

№14. H – лин. евклидово пр-во; $\dim H \in \mathbb{N}$

P – лин. самосопряжённый оператор в пр-ве H; $P^2 = P$.

Д-ть: P – оператор ортогонального проектирования на подпр-во $R(P)$.

Пусть P_x – проекция эл-та X на подпр-во $R(P)$;
X – элемент.

Для того, чтобы P являлся оператором о/г проектирования, нужно: $(P_x, X - P_x) = 0$

$(P_x, X - P_x) = (P_x, x) - (P_x, P_x)$

$P^* = P \Rightarrow PP^* = P^*P = P^2$, $P^2 = P$ $\Rightarrow P^*P = P$

$\Rightarrow (P_x, X - P_x) = (P_x, x) - (P_x, Px) =$
$= (P_x, X) - (P^*PX, x) = (PX, x) -$
$- (PX, x) = 0$

№15. H – лин. евклидово пр-во;

A – лин. оператор в пр-ве H.

Д-ть: (A – о/г оператор) $\Leftrightarrow \|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H$.

1) пусть A – о/г оператор, т.е. $\forall x, y \in H: (Ax, Ay) = (x, y)$

пусть $y = x$, тогда: $(Ax, Ax) = (x, x) \rightarrow \|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H$.

2) пусть $\|Ax\| = \|x\|$ или $(Ax, Ax) = (x, x)$.

пусть $x = y + z$, тогда: $(A(y+z), A(y+z)) = (y+z, y+z)$

$\cancel{(Ay, Ay)} + 2(Ay, Az) + \cancel{(Az, Az)} = \cancel{(y, y)} + 2(y, z) + \cancel{(z, z)}$

$(Ay, Az) = (y, z) \rightarrow$ A – о/г оператор.

№16. H - лин. евклидово пр-во;

A, B - лин. самосопр. операторы в пр-ве H;

Д-ть: AB - самосопр. оператор $\Leftrightarrow AB = BA$.

1) пусть (AB) - с/с оператор, т.е. $(AB)^* = AB$ и $((AB)x, y) = (x, (AB)y)$

$((AB)x, y) = (x, (AB)^* y) = (x, (B^* A^*)y)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{т.к. } A \text{ - с/с, то } A = A^* \\ \text{т.к. } B \text{ - с/с, то } B = B^* \end{array}\right\} \Rightarrow ((AB)x, y) = (x, (BA)y)$$

с др. стороны: $((AB)x, y) = (x, (AB)y)$.

Значит, $(AB) = (BA)$.

2) пусть $AB = BA$

$$\left.\begin{array}{l} AB(x, y) = BA(x, y) \\ (x, y) = (y, x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB(x, y) = BA(y, x) \\ ((AB)x, y) = ((BA)y, x) \end{array}$$

$$((BA)y, x) = (x, (BA)y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ((AB)x, y) = (x, (BA)y) \\ AB = BA \end{array}\right\} \Rightarrow ((AB)x, y) = (x, (AB)y), \text{ т.е.}$$

(AB) - с/с оператор.

№17. L - лин. пр-во; A - лин. оператор в L.

Q_1, Q_2 - собств. подпр-ва оператора A.

Д-ть: $Q_1 + Q_2$ - inv подпр-во оператора A.

Явл. ли $(Q_1 + Q_2)$ собств. подпр-вом оператора A?

$Q_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$, $\forall x \in Q_1 : Ax = \lambda_1 x$

$Q_2 = \ker(A - \lambda_2 I)$, $\forall x \in Q_2 : Ax = \lambda_2 x$

$Q_1 + Q_2 = \{(x_1 + x_2) : x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\}$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 + x_2) \in (Q_1 + Q_2) \\ A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \underbrace{\lambda_1 x_1}_{\in Q_1} + \underbrace{\lambda_2 x_2}_{\in Q_2} \in (Q_1 + Q_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (Q_1 + Q_2) \text{ - inv подпр-во оператора } A.$$

$A(x_1 + x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, значит нельзя представить $A(x_1 + x_2)$ в виде $\lambda'(x_1 + x_2)$. Поэтому $(Q_1 + Q_2)$ не явл. собств. подпр-вом оператора A.

№18. H – ориентированное лин. евклидово пр-во;
e_1, e_2, e_3 – правый ОНБ.
$a \in H$; $Ax = [x, a]$ при $x \in H$.
Д-ть: A – лин. оператор в пр-ве H
Найти: $[A](e)$, $\ker A$, $\operatorname{im} A$, λ_i, X_i (собств. векторы).

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A(x+y) = [x+y, a] = [x,a] + [y,a] = Ax + Ay \\ &2)\ A(\lambda x) = [\lambda x, a] = \lambda [x, a] = \lambda Ax \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&A \text{ – лин. оператор} \\ &\text{в пр-ве } H.\end{aligned}$$

$$Ae_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 e_3 - a_3 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}; \quad Ae_3 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Тогда:

$$[A](e) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Найдём $\ker A$, т.е. решим ур-ние $AX = \Theta$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} /:(-a_3) \\ -a_2 \mathrm{I} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1/a_3 \\ 0 & -a_1 & a_1 a_2/a_3 \\ 0 & a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:(-a_1) \\ -a_3 \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1/a_3 \\ 0 & 1 & -a_2/a_3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \frac{a_1}{a_3} x^3 \\ x^2 &= \frac{a_2}{a_3} x^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ker A = C \begin{pmatrix} a_1/a_3 \\ a_2/a_3 \\ 1 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cup \{\theta\}$$

$$\operatorname{im} A = \{AX\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_3 x_2 - a_2 x_3 \\ -a_3 x_1 + a_1 x_3 \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 \end{pmatrix} \right\} = L(Ae_1, Ae_2, Ae_3).$$

Найдём собственные значения оператора A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & -\lambda & a_1 \\ a_2 & -a_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda a_2^2 - \lambda a_1^2 - \lambda a_3^2 = \lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0$$

Значит, $\lambda = 0$.

Тогда, очевидно: $X_0 \in \ker A \rightarrow X_0 = C' \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

№19. H – лин. унитарное пр-во.

A – лин. оператор в пр-ве H.

Д-ть: $i(A-A^*)$ – с/с оператор

Обозначим матрицу оператора: $C = i(A-A^*)$. Тогда:

$C^* = (i(A-A^*))^* = i^*(A-A^*)^* = -i(A^*-(A^*)^*) = -i(A^*-A) = i(A-A^*) = C$.

$C^* = C \Rightarrow i(A-A^*)$ – самосопряжённый оператор.

№20. 1) Пусть $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

Тогда $\underbrace{PP^T = P^TP = I}$, где $P^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Получаем систему ур-ний:

$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ ac+bd=0, \\ c^2+d^2=1, \\ a^2+c^2=1, \\ ab+cd=0, \\ b^2+d^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} b^2=c^2, \\ a^2=d^2, \\ a^2+b^2=1, \\ ac+bd=0, \\ ab+cd=0; \end{cases}$

Полагая $a=\cos\varphi$, $b=-\sin\varphi$, получаем: $c=\pm\sin\varphi$, $d=\pm\cos\varphi$.

Таким образом, общий вид ортогональной матрицы 2×2:

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

2) Преобразования Лоренца в пр-ве $E^{1,1}$ имеют вид:

$x' = \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(x-vt)$; $t' = \dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(t-\frac{v}{c^2}x)$. Тогда имеем:

$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\sqrt{\gamma^2-1} \\ -\sqrt{\gamma^2-1} & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

Полагая $\gamma=\operatorname{ch}\varphi$ и $\gamma=-\operatorname{ch}\varphi$, получим общий вид преобразований Лоренца: $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$ или

$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$.

N21. L - комплексное лин. пр-во, $\dim L = 3$;
λ - с. зн. оператора A $(m_A(\lambda) = 3)$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

ГК = 3 ГК = 1 ГК = 2 ГК = 2

N22 L - комплексное лин. пр-во, $\dim L = 3$;
λ_1, λ_2 - с. зн. оператора A $(m_A(\lambda_1) = 2,\ m_A(\lambda_2) = 1)$;

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

ГК = 2, 1 ГК = 1, 1 ГК = 1, 1 ГК = 2, 1

N23. L - комплексное лин. пр-во, $\dim L = 4$;
λ - с. зн. оператора A $(m_A(\lambda) = 4)$;

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix},$$

ГК = 4 ГК = 3 ГК = 3 ГК = 3 ГК = 2

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

ГК = 2 ГК = 1 ГК = 2

N24. L - лин. комплексное пр-во, $\dim L = 4$;
λ_1, λ_2 - с. зн. оператора A $(m_A(\lambda_1) = 3,\ m_A(\lambda_2) = 1)$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix},$$

ГК = 3, 1 ГК = 2, 1 ГК = 1, 1 ГК = 2, 1 ГК = 2, 1

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

ГК = 2, 1 ГК = 3, 1 ГК = 2, 1

N25. L – лин. комплексное пр-во, $\dim L = 4$;
λ_1, λ_2 – с. зн. оператора A $(m_A(\lambda_1) = m_A(\lambda_2) = 2)$.
$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

ГК = 2,2 ГК = 1,2 ГК = 1,1 ГК = 2,2 ГК = 1,2

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

ГК = 1, 1

N26. L – лин. пр-во над полем $\mathbb{K}$, $\dim L \in \mathbb{N}$.
A – лин. оператор в пр-ве L. $R(A - \lambda I) = L$, $(\lambda \in \mathbb{K})$ – ?
Очевидно, $R(A - \lambda I) = \{Ax - \lambda x : x \in \mathcal{D}(A) \wedge \lambda \in \mathbb{K}\}$.
При $Ax = \lambda x$: $R(A - \lambda I) = \{\theta\} \neq L$, а значит условие $R(A - \lambda I) = L$ выполняется при $\lambda \notin S\mathcal{D}(A)$, где $S\mathcal{D}(A)$ – пр-во собственных значений оператора A.

N27. По аналогии с N26:
условие $R(A - \lambda I) \neq L$ выполняется при $\lambda \in S\mathcal{D}(A)$.