студенты-
физики

Линейная алгебра
Практические задачи

Барон Яков

2 семестр
Бадьин А.В.

2013

Практ. задачи (лин. алгебра):

N1. $P_2(\mathbb{R})$ - лин. пр-во.

$x_1(t) = -1 + 3t + 2t^2$; $x_2(t) = 2t + 3t^2$; $x_3(t) = -1 + 7t + 8t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} /:(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{6} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array} \Rightarrow$$

x_1, x_2 - базис $L(x_1, x_2, x_3)$.

$\dim L(x_1, x_2, x_3) = 2$.

$x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 = x_1 + 2x_2$.

N2. $P_2(\mathbb{R})$ - лин. пр-во.

$x_1(t) = 1 + t^2$; $x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2$; $x_3(t) = 2 + t + t^2$; $x_4(t) = 4 + t + 3t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5\mathrm{II} \\ /:2 \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1, x_2$ - базис $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$,
$\dim L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

Достроим найденный базис до базиса пр-ва $P_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\det = 2 \neq 0$, значит базис: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является базисом пр-ва $P_2(\mathbb{R})$.

N3. $\mathbb{R}^3$ - лин. евклидово пр-во.

$(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$; $x_1 = (1, 1, 1)^T$; $x_2 = (1, 0, 0)^T$; $x_3 = (0, 1, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} /:(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} /:(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array} \Rightarrow$$

x_1, x_2, x_3 - базис $L(x_1, x_2, x_3)$, т.е. x_1, x_2, x_3 - лин. независимы

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$e_1 = x_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$; $e_2 = x_2 - \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}$;

$e_3 = x_3 - \frac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1/3}{2/3} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$.

№4. $P_2([-1,1])$ – лин. евклидово пр-во.

$(x,y)=\int\limits_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$; $x_1(t)=1$; $x_2(t)=t$; $x_3(t)=t^2$ при $t\in[-1,1]$

$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \;\;x_1\;\;x_2\;\;x_3\end{array} \Rightarrow$ x_1,x_2,x_3 – базис $L(x_1,x_2,x_3)$, т.е. x_1,x_2,x_3 – лин. независимы.

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$e_1=x_1=1=\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

$e_2=x_2-\frac{(x_2,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1=t-\frac{\int_{-1}^{1}t\,dt}{\int_{-1}^{1}dt}\cdot 1=t-\frac{0}{2}\cdot 1=t=\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$

$e_3=x_3-\frac{(x_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2-\frac{(x_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1=t^2-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\cdot t\,dt}{\int_{-1}^{1}t^2dt}\cdot t-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1}dt}\cdot 1=t^2-\frac{2/3}{2}=t^2-\frac{1}{3}=$

$=\boxed{\begin{pmatrix}-1/3\\0\\1\end{pmatrix}}.$

№5. H – лин. евклидово пр-во;
e_1,e_2,e_3,e_4 – ОНБ.

$[x_1](e)=(1,0,0,1)^T$, $[x_2](e)=(1,1,0,0)^T$, $[x](e)=(1,0,0,0)^T$.

$x=x_{pr}+x^{\perp}=a_1x_1+a_2x_2+x^{\perp}$.

Очевидно, что $(x^{\perp},x_1)=(x^{\perp},x_2)=0$.

$$\begin{cases}(x,x_1)=a_1(x_1,x_1)+a_2(x_2,x_1)+(x^{\perp},x_1)=a_1(x_1,x_1)+a_2(x_2,x_1);\\(x,x_2)=a_1(x_1,x_2)+a_2(x_2,x_2)+(x^{\perp},x_2)=a_1(x_1,x_2)+a_2(x_2,x_2);\end{cases}$$

$(x,x_1)=1$; $(x_1,x_1)=2$; $(x_2,x_1)=(x_1,x_2)=1$; $(x_2,x_2)=2$. Тогда:

$\begin{cases}2a_1+a_2=1,\\a_1+2a_2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=1/3,\\a_1=1/3.\end{cases}$ Итак: $x_{pr}=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=\boxed{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)^T}$,

$x^{\perp}=x-x_{pr}=\boxed{\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)^T}.$

N6. $P_1([-1,1])$ – лин. евклидово пр-во;

$(x,y)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$. $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t$ при $t\in[-1,1]$.

$(e_1,e_2)=\int\limits_{-1}^{1} t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0 \Rightarrow$ $e_1\perp e_2$, т.е. e_1, e_2 – лин. независимы
$\dim P_1=2$, а значит e_1, e_2 – базис пр-ва P_1.

Найдём ковариантный метрический тензор:

$g_{ij}=(e_i,e_j)$: $g_{11}=\int\limits_{-1}^{1} dt=2$; $g_{12}=g_{21}=\int\limits_{-1}^{1} t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0$

$g_{22}=\int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt=\frac{2}{3}$. Таким образом:

$G=g_{ij}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2/3\end{pmatrix}$ – ковар-ный метрич. тензор пр-ва P_1 в базисе e.

N7. $p\in\mathbb{R}$

$X_{1,p}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $X_{2,p}=\begin{pmatrix}2p & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $X_{3,p}=\begin{pmatrix}-p & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2p & -p\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\\ +\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2p & -p\\ 0 & 1-2p & 2+p\\ 0 & 3+2p & 2-p\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -\frac{3+2p}{1-2p}\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2p & -p\\ 0 & 1-2p & 2+p\\ 0 & 0 & -\frac{4(1+3p)}{1-2p}\end{pmatrix}$$

1) $p=1/2$: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 5/2\\ 0 & 4 & 3/2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 5/2\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 1\\ 0 & 5/2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}A=3$; $\dim L=3$
базис: X_1, X_2, X_3

2) $p=-1/3$: $A=\begin{pmatrix}1 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 5/3 & 5/3\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}A=2$, $\dim L=2$ | базис: $(X_1,X_2)\vee(X_2,X_3)\vee(X_1,X_3)$.

N8. $\mathbb{R}^2$ – лин. пр-во: $e_1=(1,2)^T$, $e_2=(2,5)^T$, $e_1'=(2,1)^T$, $e_2'=(-1,3)^T$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}_{-2\mathrm{I}}\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-2\mathrm{II}}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ e_1\quad e_2\end{array}\Rightarrow e_1, e_2 \text{ – базис пр-ва } \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{/:2}\sim\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{-\mathrm{I}}\sim\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 7/2\end{pmatrix}_{\times\frac{2}{7}}\sim\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{+\frac{1}{2}\mathrm{II}}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ e_1'\quad e_2'\end{array}\Rightarrow e_1', e_2' \text{ – базис пр-ва } \mathbb{R}^2.$$

$$e' = e\,\alpha(e,e') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \alpha(e,e');$$

$$\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-2\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)^{-2\mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right);$$

$$\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$$\alpha(e,e') \cdot \alpha(e',e) = I \Rightarrow \alpha(e',e) = \alpha(e,e')^{-1};$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & -11 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)^{/:8} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -11/8 & 1/8 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)_{+3\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -11/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 7/8 & 3/8 & 1 \end{array}\right)_{\times 8/7} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -11/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 8/7 \end{array}\right)^{+\frac{11}{8}\mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 8/7 \end{array}\right);$$

$$\alpha(e',e) = \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}}.$$

№9. H – лин. евклидово пр-во;

e_1, e_2 – ОНБ; $x = 2e_1 + e_2$, $y = e_1 + 3e_2$

$$\|x\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}; \quad \|y\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}; \quad \angle(x;y) = \arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$f_1 = x = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}; \quad f_2 = y - \frac{(y,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

№10. H – лин. евклидово пр-во;

e_1, e_2, e_3 – ОНБ;

Q – подпр-во пр-ва H $(x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0)$.

$x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$ – ур-ние пл-ти. Тогда вектор нормали к ней: $\vec{N} = \{1, -2, 3\}$. Очевидно, любой вектор вида $\lambda\vec{N}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, перпендикулярен любому вектору данного подпр-ва Q. Значит подпр-во $Q^\perp$ с базисом $\vec{N}$ можно рассматривать как ортогональное дополнение к пр-ву Q.

№ 11. $P_1([0,2])$ - лин. пр-во.

$(Ax)(t) = \int\limits_0^2 (t-\tau)x(\tau)\,d\tau$ при $x \in P_1([0,2])$, $t \in [0,2]$.

$e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0,2]$.

$$\left.\begin{aligned} Ae_1 &= \int\limits_0^2 (t-\tau)\,d\tau = t\tau\Big|_0^2 - \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^2 = 2t-2 \\ Ae_2 &= \int\limits_0^2 (t-\tau)\tau\,d\tau = t\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\tau^3}{3}\Big|_0^2 = 2t - \frac{8}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -8/3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 12. H - лин. евклидово пр-во.

e_1, e_2, e_3, e_4 - ОНБ

$[x_1](e) = (1,0,0,1)^T$; $[x_2](e) = (1,1,0,0)^T$

Воспользуемся процессом ортогонализации Грама-Шмидта:

$$u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = x_2 - \frac{(x_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

По опр. оператора ортогонального проектирования:

$$P_x = \frac{(u_1,x)}{(u_1,u_1)}u_1 + \frac{(u_2,x)}{(u_2,u_2)}u_2; \quad \begin{aligned} (u_1,u_1) &= 2 \\ (u_2,u_2) &= 3/2 \end{aligned}$$

$$P_{e_1} = \frac{(u_1,e_1)}{(u_1,u_1)}u_1 + \frac{(u_2,e_1)}{(u_2,u_2)}u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P_{e_2} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}; \quad P_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_{e_4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

— матрица оператора проектирования на подпр-во $L(x_1, x_2)$ в базисе e.

№ 13. $p \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)^{-\mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ p & 1 & -p \end{array}\right)_{-p\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ 0 & 1-p^2 & -p-p^2 \end{array}\right)$$

$$p^2 \neq 1: \left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)^{/:(1+p)}_{-p\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-p & -p \end{array}\right)^{-\mathrm{II}}_{/:(1-p)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{p}{1-p} \\ 0 & 1 & \frac{p}{p-1} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists$ решение.

а) $p=1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 1 \\ \operatorname{rang} B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ система несовместна.

б) $p=-1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 1 \\ \operatorname{rang} B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ система совместна,

$$x_1 = x_2 - 1 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

N14. L - лин. пр-во; e_1, e_2, e_3 - базис;

$$[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha(e,e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A](e') - ?$$

$$[A](e') = \alpha^{-1}(e,e')[A](e)\alpha(e,e')$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /:(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-\mathrm{II}}_{/:(-1)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)_{-\mathrm{III}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \alpha^{-1}(e,e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[A](e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

N15. L - лин. пр-во; e_1, e_2, e_3 - базис; $[A](e) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \to \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \; (m_A(\lambda_1) = 2), \\ \lambda_2 = 2 \; (m_A(\lambda_2) = 1). \end{array}$$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = -x_3 \rightarrow f^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

базис

$\dim(\ker(A - \lambda_1 I)) = 2.$

$\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix} /:(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{базис}}$

$\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 1.$

N16. H - лин. евклидово пр-во; e_1, e_2, e_3 - ОНБ.

A - с/с оператор; $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти: ОН базис e' из собств. векторов; $\alpha(e, e')$; $\alpha(e', e)$; $[A](e')$ - ?

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(5-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5\ (m_A(\lambda_1) = 2;\ m_A(\lambda_2) = 1).$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{pmatrix} /:2 \rightarrow x_1 = x_3 \rightarrow f_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ f_2 = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$

$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\lambda_2 = 5$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{matrix} /:(-2) \\ /:(-4) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow f_3 = C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Итак, F_1, F_2, F_3 - ОНБ e' из собственных векторов.

$$\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} /:1/\sqrt{2} \\ \\ -1/\sqrt{2}\,\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ \\ /:\sqrt{2} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\alpha(e', e) = \alpha^{-1}(e, e') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$[A](e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

N17. H - лин. евклидово пр-во, $\dim H = 2$.

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Какая из матриц явл. матрицей с/с оператора?

Известно, что в евклидовом пр-ве все корни характеристического полинома с/с оператора - вещественные числа. Проверим обе матрицы на это св-во:

X_1: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 14 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ вещественных корней нет.

X_2: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & -14 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-8) + 42 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$(\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2) \in \mathbb{R} \Rightarrow X_2$ - матрица лин. с/с оператора в пр-ве H.

N18. $(Ax)(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$ при $x \in L(\cos, \sin)$, $t \in \mathbb{R}$.

Найти: $[A](\cos, \sin)$, λ_i, f_i - ?

$L(\cos, \sin) = a\cos t + b\sin t \Rightarrow e_1 = \cos t$, $e_2 = \sin t$

$Ae_1 = \frac{d^2}{dt^2}(\cos t) = -\cos t$; $Ae_2 = \frac{d^2}{dt^2}(\sin t) = -\sin t$

$[A](\cos, \sin) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0 \to \lambda_1 = -1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

N19. L - лин. вещ. пр-во, e_1, e_2 - базис

$F_1(x,y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$;

$F_2(x,y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$;

$F_3(x,y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

Какие из б/ф F_1, F_2, F_3 задают скал./псевдоскал. произведение?

$F_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $F_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $F_1 = F_1^T$, $\left.\begin{matrix}\delta_1 > 0 \\ \delta_2 > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ F_1 - положительно определённая $\Big\} \Rightarrow$ F_1 можно принять за скалярное произведение

2) $F_2 \neq F_2^T \Rightarrow$ нельзя F_2 принять ни за скалярное ни за псевдоскалярное произведение.

3) $F_3 = F_3^T$, $\left.\begin{matrix}\delta_1 > 0 \\ \delta_2 < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ F_3 - знакопеременная $\Big\} \Rightarrow$ F_3 можно принять за псевдоскалярное произведение.

N20. L - лин. вещ. пр-во; e_1, e_2 - базис

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: [F_\lambda](e) = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$.

При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ можно $[F_\lambda]$ принять за скал./псевдоскал. произведение?

$[F_\lambda]$ задаёт скалярное пр-ние, если $[F_\lambda]$ - „+"-определённая, т.е.:

$$\begin{cases} \delta_1 > 0, \\ \delta_2 > 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda(1-\lambda) > 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda > 0, \\ (1-\lambda) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda < 0, \\ 1-\lambda < 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0, \\ \begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda < 1; \end{cases} \end{cases} \to 0 < \lambda < 1.$$

$[F_\lambda]$ задаёт псевдоскалярное пр-ние, если $[F_\lambda]$ - знакопеременная, т.е.:

$$\begin{cases} \delta_1 > 0, \\ \delta_2 < 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda(1-\lambda) < 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda > 0, \\ 1-\lambda < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda < 0, \\ 1-\lambda > 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} \lambda > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \lambda > 1, \\ \lambda < 0; \end{array}\right. \end{cases} \to \lambda > 1.$$

N21. L - лин. вещ. пр-во; e_1, e_2 - базис;

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: [Q_\lambda](e) = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$.

Для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ исследовать $[Q_\lambda]$ на знакоопределённость и записать её канонический вид.

$[Q_\lambda]$ – „+“ – опр., если $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$:

$\begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda(1-\lambda) > 0; \end{cases} \to 0 < \lambda < 1.$

$[Q_\lambda]$ – „–“ – опр., если $\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0$:

$\begin{cases} \lambda < 0, \\ \lambda(1-\lambda) > 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda > 0, \\ 1-\lambda > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda < 0, \\ 1-\lambda < 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} \lambda < 0 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < \lambda < 1, \\ \text{нет реш.}; \end{array}\right. \end{cases} \to$ ни при каких λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -2\lambda \\ -2\lambda & 4-\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)(4-\alpha) - 4\lambda^2 = 4\lambda - 4\alpha - \lambda\alpha + \alpha^2 - 4\lambda^2 =$$

$$= \alpha^2 - (\lambda+4)\alpha - 4\lambda(\lambda-1) = 0$$

$$\mathcal{D} = (\lambda+4)^2 + 4\cdot 4\lambda(\lambda-1) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 + 16\lambda^2 - 16\lambda = 17\lambda^2 - 8\lambda + 16 > 0\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$\alpha_{1,2} = \dfrac{\lambda+4 \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2}$. Таким образом канон. вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+4+\sqrt{\mathcal{D}}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda+4-\sqrt{\mathcal{D}}}{2} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{D} = 17\lambda^2 - 8\lambda + 16.$$

№22. L – лин. вещ. пр-во; e_1, e_2, e_3, e_4 – базис

$Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3$ в базисе e.

Найти: $[Q](e)$; методом Лагранжа привести к канон. виду; $[Q](e')$, где e' – канон. базис; $\alpha(e,e')$, $\alpha(e',e)$ – ?

$[Q](e) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\begin{cases} x^1 = y^1 + y^3, \\ x^2 = y^2, \\ x^3 = y^1 - y^3, \\ x^4 = y^4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^1 = \frac{x^1 + x^3}{2}, \\ y^2 = x^2, \\ y^3 = \frac{x^1 - x^3}{2}, \\ y^4 = x^4. \end{cases}$

Тогда: $Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = y^1y^2 + \cancel{y^3y^2} + (y^1)^2 - (y^3)^2 + y^2y^1 - \cancel{y^2y^3} =$

$= (y^1)^2 + 2y^1y^2 - (y^3)^2 = (y^1+y^2)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2,$

Пусть: $\begin{cases} z^1 = y^1 + y^2 = \dfrac{x^1+2x^2+x^3}{2}, \\ z^2 = y^2 = x^2, \\ z^3 = y^3 = \dfrac{x^1 - x^3}{2}, \\ z^4 = y^4 = x^4. \end{cases}$ Тогда: $Q(x) = (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$.

$$[Q](e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(e,e') = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /:(1/2) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2}\mathrm{I} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /:(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2\mathrm{II} \\ \\ -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \alpha(e,e')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e',e) = \alpha(e,e')^{-1}$$

№23. H – мн. евклидово пр-во; e_1, e_2, e_3 – ОНБ.

$Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2$.

Найти: $[Q](e)$; ОНБ, в котором диаг. вид; $\alpha(e,e')$, $\alpha(e',e)$; $[Q](e')$ – ?

$$[Q](e) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 4\right) = -(1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)^2(5-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix}$$

$\underline{\lambda_1 = 1:}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{pmatrix} \to x_1 = x_3 \to f_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\searrow f_2 = c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=5:$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{matrix} /:(-2) \\ /:(-4) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow f_3 = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Таким образом, F_1, F_2, F_3 – ОНБ(e'), в котором $[Q](e)$ имеет диагональный вид, а именно:

$[Q](e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\alpha(e',e) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

№24. L – лин. вещ. пр-во; e_1, e_2, e_3 – базис;

$Q_1(x) = 2(x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 9(x^2)^2 + 8x^2x^3 + 2(x^3)^2$;

$Q_2(x) = 3(x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + 5(x^2)^2 + 4x^2x^3 + (x^3)^2$.

Найти: $[Q_1](e)$, $[Q_2](e)$; $[Q_1](e')$, $[Q_2](e')$; $\alpha(e,e')$.

$[Q_1](e) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $[Q_2](e) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

По критерию Сильвестра: $[Q_2](e)$ – „+"-опр. кв/ф.