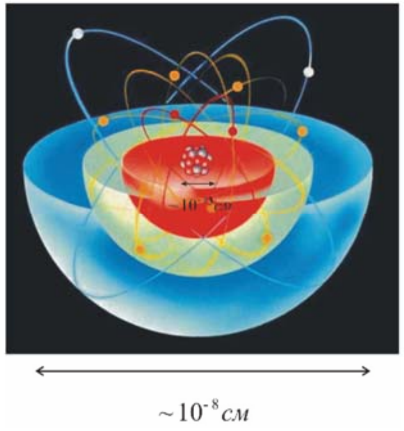
Лекция 1.

- Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе. Электрический заряд. Микроскопические носители заряда. Опыт Милликена. Закон сохранения электрического заряда. Развитие физики электричества в работах М.В.Ломоносова.
- Электростатика. Закон Кулона и его полевая трактовка. Вектор напряженности электрического поля. Принцип суперпозиции электрических полей.

Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе.

Фундаментальные взаимодействия (силы) в природе

Вид взаимодействия (силы)	Скорость процесса t при энергии W=1 Гэв, с	Относительная величина силы	Радиус действия, см
Сильные	10^{-24}	1	10^{-13}
Электромагнит-ные	10^{-21}	10^{-2}	∞
Слабые	10^{-10}	10^{-10}	10^{-16}
Гравитационные	10^{+23}	10^{-38}	∞

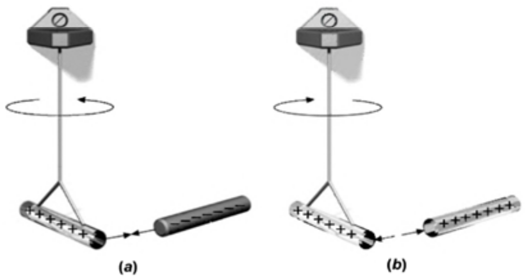


Электромагнитное взаимодействие. Электрический заряд.

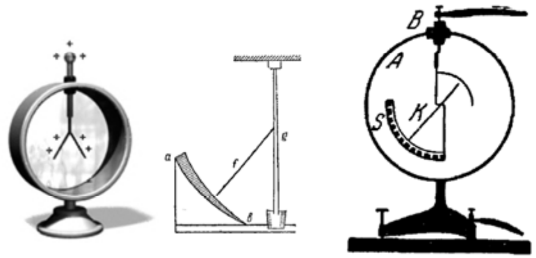
- Электромагнитным взаимодействием называется взаимодействие между электрически заряженными телами или электрически заряженными телами и электромагнитным полем.
- Если тело электрически заряжено, то говорят, что оно имеет электрический заряд. То есть, электрический заряд - это физическая величина, являющаяся источником электромагнитных взаимодействий.
- Взаимодействие между покоящимися заряженными телами (или кратко зарядами) называют электрическими или, точнее, электростатическими взаимодействиями.

Электризация трением. Притяжение мелких предметов наэлектризованными телами.

Два вида электрических зарядов (положительные и отрицательные).

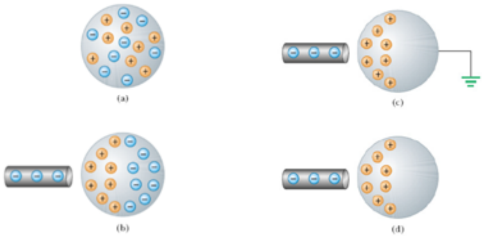


Электроскопы и электрометры.

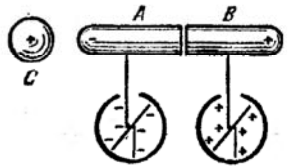


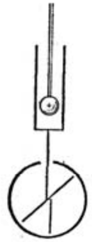
Электрометр Г.В.Рихмана (1745)

Электростатическая индукция. Электризация проводника через влияние.



1.6

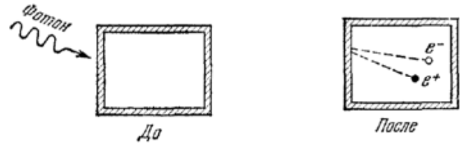




1.7

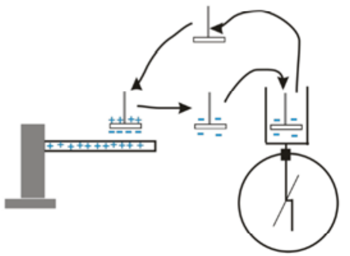
Закон сохранения электрического заряда.

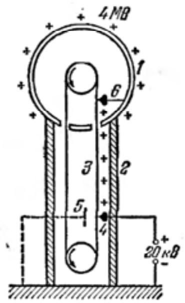
- Алгебраическая сумма зарядов в изолированной системе сохраняется неизменной при любых электрических взаимодействиях и превращениях веществ внутри этой системы.



1.8

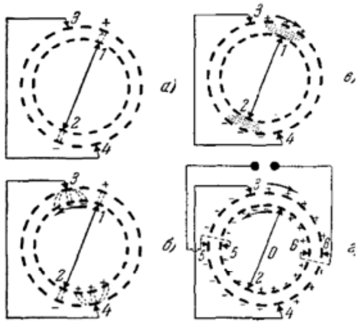
Принцип работы электрофорной машины. Генератор Ван-де-Граафа.





1.9

Принцип работы электростатической машины.



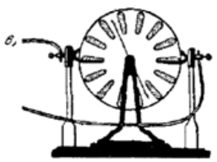


Схема действия электростатической машины Гольтца.

1.10

Микроскопические носители заряда. Опыты Милликена (1908-1916гг.).

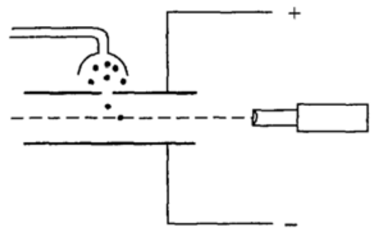
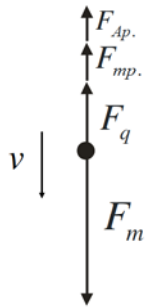


Схема опыта Милликена

1.11



$$F_m = F_q + F_{mp.} + F_{Ap.}$$

$$mg = qE + 6\pi\eta a v + m_{воздуха} g$$

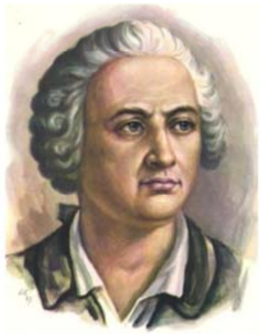
$$(q_1 - q_0),(q_2 - q_0),(q_3 - q_0),\ldots$$

$$e = 1{,}602189 \cdot 10^{-19}\ Кл$$

1.12

Михаил Васильевич Ломоносов (1711-1765)

1711г., 8(19) ноября в деревне Мишанинской Куростровской волости Архангельской губернии в семье помора родился М. В. Ломоносов.



1.13.1

Молекулярно-кинетическое учение М.В.Ломоносова

- В работе «О причине теплоты и стужи. Рассуждения Михаила Ломоносова» написано «…теплота состоит в движении материи, …. . Сие движение есть внутреннее, то есть в теплых и горячих телах движутся нечувствительные частицы, из которых состоят самые тела;». М.В.Ломоносов в этой же работе указал на возможность существования абсолютного нуля температуры «… должна существовать наибольшая и последняя степень холода, которая должна существовать в полном прекращении вращательного движения частиц».

1.13.2

Молекулярно-кинетическое учение М.В.Ломоносова

- М.В.Ломоносов в работе «Опыт теории упругости воздуха Михаила Ломоносова» объяснил упругие свойства атмосферного воздуха механизмом отталкивания атомов воздуха друг от друга. Он пишет: « … отдельные атомы воздуха, в беспорядочном чередовании, сталкиваются с ближайшими через нечувствительные промежутки времени, … таким образом, непрерывно отталкиваемые друг от друга частыми взаимными толчками, они стремятся рассеяться во все стороны.».

1.13.3

Закон сохранения материи

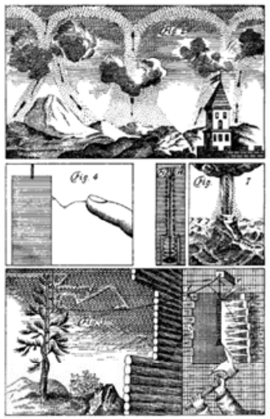
- В письме к Леонарду Эйлеру от 5 июля 1748 года в следующей формулировке: «Но все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого, сколько часов я затрачиваю на сон, столько же отнимаю от бодрствования, и т. д. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им двинутому.»

1.13.4

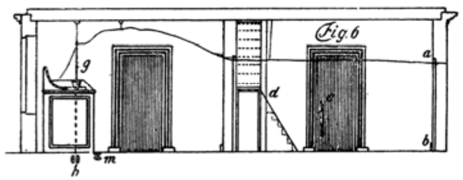
Природа атмосферного электричества

- В работе « Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих, предложенное от Михаила Ломоносова» (1753 год) написано: «В сем состоянии, по незыблемым естества законам, верхней части атмосферы должно опуститься в нижнюю и столь глубоко погрузиться, поколе, перемешавшись с теплым воздухом, в равновесии остановится. … Уже довольно явствует, какие движения воздуха, кроме дыхания ветров, электрическое трение произвести могут;»

1.13.5



1.13.6



1.13.7

Атмосферное электричество.

Опыт со змеем Франклина

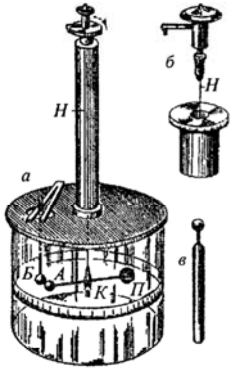
Громоотвод Франклина, изготовленный Далибаром во Франции 10 марта 1752 года, представлял собой заостренный вертикальный железный штырь, 40 футов в высоту, установленный на деревянной подставке, не являющейся проводником электричества.

Электростатика. Закон Кулона.

- **Электростатика** – раздел электромагнетизма, в котором изучается взаимодействие неподвижных зарядов.
- Закон взаимодействия неподвижных заряженных тел был открыт в 1785 году Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов

1.14

Шарль Огюсте́н де Куло́н (фр. *Charles-Augustin de Coulomb*, 14 июня 1736— 23 августа 1806) — французский военныйинженер и учёный-физик, исследователь электромагнитных и механических явлений; член Парижской Академии наук. Его именем названы единица электрического заряда и закон взаимодействия электрических зарядов.



Крутильные весы Кулона

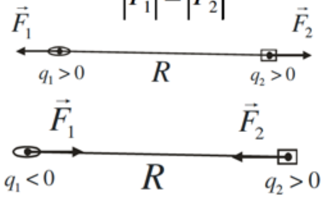
Закон Кулона.

- Величина силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$\left|\vec{F}\right| \sim \frac{|q_1||q_2|}{R^2} \qquad \left|\vec{F}\right| = k\frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

- Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль линии, соединяющей эти заряды, и по модулю равны. Одного знака заряды отталкиваются, разного знака – притягиваются.

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$$



Единица заряда

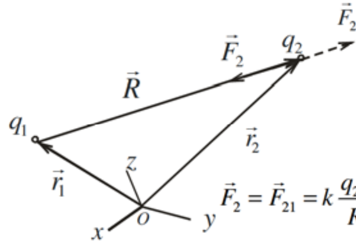
$$1\text{Кл} = 1\text{А}\cdot 1\text{с} = 1\text{А}\cdot\text{с} \qquad 1\text{Кл} = 0{,}1\text{С}\cdot 1\text{СГСЭ}_q$$

$$k = C^2\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2} \approx 9\cdot 10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\Phi}{\text{м}}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

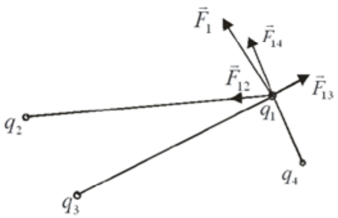
Векторная форма записи закона Кулона



$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} = k\frac{q_2 q_1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = k\frac{q_2 q_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$

Принцип суперпозиции для сил взаимодействия точечных зарядов.



Из опыта следует

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \sum_i \vec{F}_{1i}$$

Полевая трактовка закона Кулона. Электрическое поле.

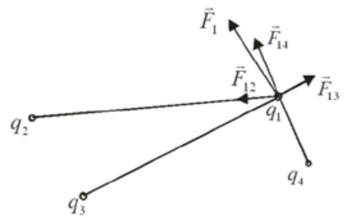
$$\vec{F}_1 = \sum_i \vec{F}_{1i} = \sum_i k\frac{q_1 q_i}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_i\right|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_i\right|}.$$

Введем величину вектора напряженности электрического поля по формуле

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_1}{q_1} = \sum_i k\frac{q_i}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_i\right|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_i\right|}.$$

$$\vec{F}_1 = q_1\vec{E}(\vec{r}_1)$$

Измерение напряженности. Пробный заряд.

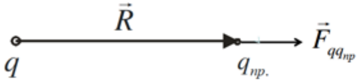


$$q_1 = q_{пр}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{пр}}{q_{пр}}$$

$$\vec{F}_1 = q_1\vec{E}(\vec{r}_1)$$

Напряженность электрического поля точечного заряда.



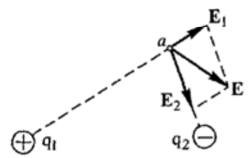
$$\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qq_{np}}}{q_{np}} = \frac{1}{q_{np}}\frac{qq_{np}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}$$

Модуль вектора напряженности равен

$$\left|\vec{E}_q\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{R^2}$$

1.22

Полевая трактовка принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции электрических полей.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

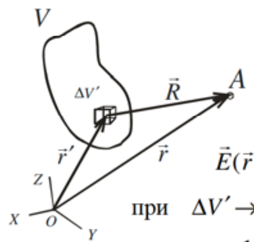
1.23

Объемная, поверхностная и линейная плотности электрического заряда

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \sigma = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \gamma = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}$$

1.24

Напряженность электрического поля, создаваемая непрерывным распределением зарядов



где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \Delta q = \rho(\vec{r}')\Delta V'.$

$$\Delta\vec{E}_{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\Delta q}\Delta\vec{E}_{\Delta q} = \sum_{\Delta V'}\frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}\Delta V'$$

при $\Delta V' \to 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}\rho(\vec{r}')dV'$$

1.25

В случае распределения зарядов на поверхности S и на участке линии L для напряженности электрического поля имеем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}\sigma(\vec{r}')dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}\gamma(\vec{r}')dl'$$

1.26

Лекция 2.

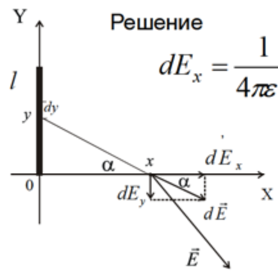
- Линии напряженности электрического поля. Поток вектора напряженности электрического поля. Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса, её представление в дифференциальной форме.
- Потенциальность электростатического поля и её представление в дифференциальной форме. Потенциал. Нормировка потенциала. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

2.1

Пример решения задач электростатики

- Тонкая палочка длины l равномерно заряжена с линейной зарядовой плотностью γ. Палочка ориентирована вдоль оси Y, как показано на рисунке. Найти напряженность электрического поля на оси абсцисс в произвольной точке x.

2.2



Решение

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\, dy}{x^2 + y^2}\cos\alpha$$

Учитывая, что

$$\gamma = \frac{q}{l}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

имеем

$$E_x = \int dE_x = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}x\int_0^l \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}x\frac{1}{x^2}\frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\bigg|_{y=0}^{y=l} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}}$$

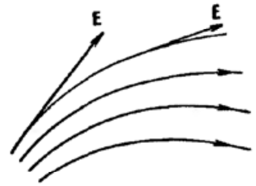
Аналогично для y компоненты получим

$$E_y = \int dE_y = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(l^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{x}\right)$$

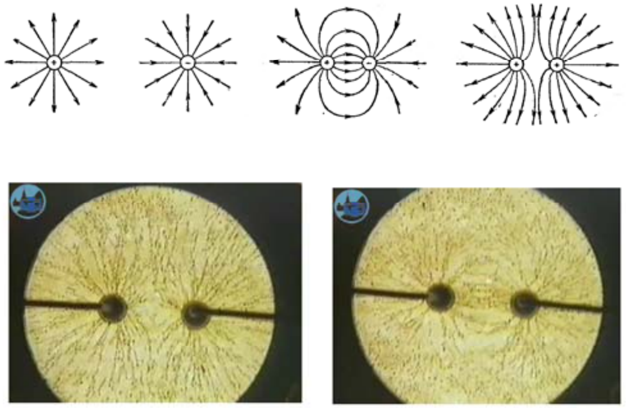
2.3

Линии напряженности электрического поля.

- Это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой же точке.

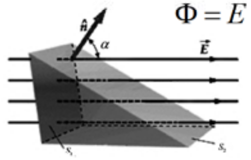


2.4



2.5

Поток вектора напряженности электрического поля.



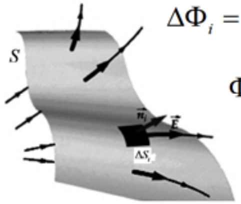
$$\Phi = E\cdot S_2\cdot\cos\alpha = \vec{E}\cdot\vec{n}S_2 = E_n S_2 = E\cdot S_1,$$

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

$\Phi \sim N$ - количество линий $\vec{E}$,

$$N_1 = N_2.$$

$$S_1 = S_2\cos\alpha;$$



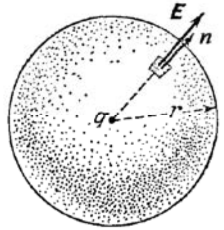
$$\Delta\Phi_i = \left|\vec{E}_i\right|\Delta S_i\cos\alpha_i = \vec{E}_i\cdot\Delta S_i\vec{n}_i = \vec{E}_i\Delta\vec{S}_i$$

$$\Phi_S = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{E}_i\underbrace{\Delta\vec{S}_i}_{}^{\Delta\vec{S}_i};$$

При $i\to\infty$ $\quad \Phi_S = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S}.$

2.6

Поток вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд *q*.



$$\Phi = \oint\limits_{S=4\pi r^2}\vec{E}d\vec{S} = \sum_i E\cdot\Delta S_i\cdot 1 = = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

2.7

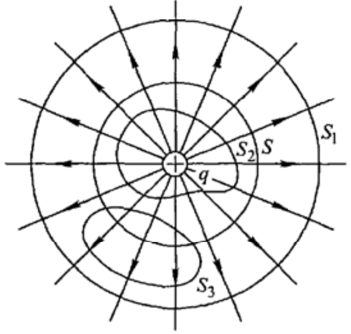
Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса

$$\int\limits_{S_V}\vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

2.8

Доказательство теоремы Остроградского–Гаусса в общем случае.

а) используя свойства силовых линий



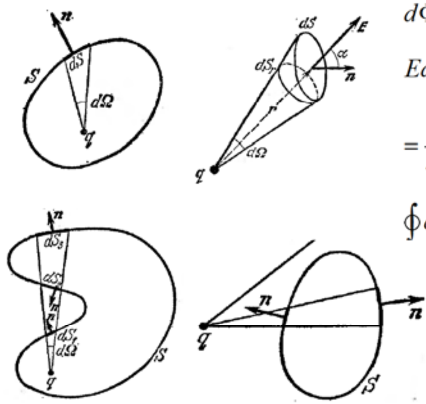
$$\Phi \sim N_S$$

$$N_S = N_{S_1} = N_{S_2},$$

$$N_{S_3} = 0.$$

2.9

б) непосредсвенное вычисление потока $\vec{E}$.



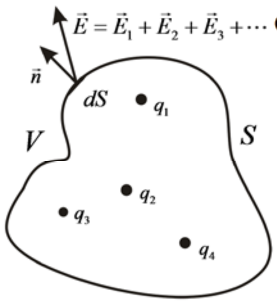
$$d\Phi = EdS\cos\alpha =$$

$$EdS_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS_r}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega.$$

$$\oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

2.10



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$ Согласно принципу суперпозиции

$$\oint\vec{E}d\vec{S} = \oint(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots)d\vec{S} = = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \cdots}{\varepsilon_0} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

Для непрерывного распределения зарядов имеем

$$\oint\limits_{S_V}\vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0} = \frac{\int\limits_V \rho dV}{\varepsilon_0}.$$

2.11

Примеры использования теоремы Остроградского–Гаусса.

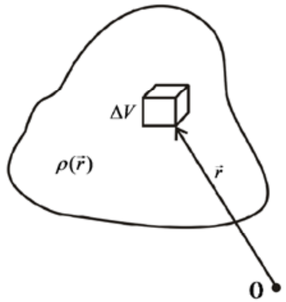
- Теорема Ирншоу.

Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов неустойчива, если на них действуют только электрические силы.

- Поле однородно заряженной сферы.
- Поле однородно заряженной бесконечной плоскости.
- Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра.

2.12

Дифференциальная форма электростатической теоремы Остроградского–Гаусса



$$\oint\limits_{S_{\Delta V}}\vec{E}d\vec{S} \simeq \frac{\rho\Delta V}{\varepsilon_0};$$

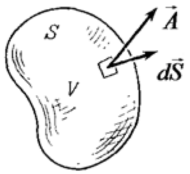
$$\underbrace{\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\limits_{S_{\Delta V}}\vec{E}d\vec{S}}{\Delta V}}_{\mathrm{div}\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

В декартовой системе координат

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

2.13

Формула Гаусса-Остроградского.



$$\oint_{S_V} \vec{A}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{A}\,dV$$

С помощью этой формулы несложно из интегральной электростатической теоремы Остр.-Гаусса получить ее дифференциальную формулу и наоборот.

$$\oint_{S_V} \vec{E}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}dV = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0};\Rightarrow \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Потенциальность электростатического поля. Потенциал.

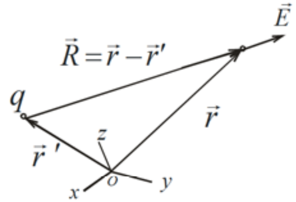
$$\vec{E} = -\nabla\varphi,$$

$$\text{где } \varphi = \varphi(x,y,z) - \text{потенциал}$$

Замечание. Потенциал определен с точностью до константы, то есть $\varphi' = \varphi + C$ тоже потенциал. Для однозначности потенциал нормируют, задавая ему определенное значение в некоторой точке пространства. Обычно выбирают нулевое значение потенциала на бесконечности или поверхности Земли.

Потенциал электрического поля точечного заряда.

$$\vec{E} = k\frac{q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = k\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\nabla_{\vec{r}}\left(k\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+C\right),$$



$$\varphi = k\frac{q}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}'|}_{R}} + C, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Если $\varphi(\infty) = 0$, то $C = 0$,

$$\varphi = k\frac{q}{R}.$$

Потенциал поля системы зарядов.

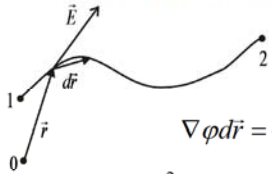
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = -\sum_i \nabla\varphi_i(\vec{r}) = -\nabla\left(\sum_i \varphi_i(\vec{r})\right),$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}.$$

В случае непрерывного распределения зарядов $q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{dV'}_{dx'dy'dz'}.$$

Работа сил электростатического поля.



$$A_{12} = \int_1^2 \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}_q} d\vec{r} = -q\int_1^2 \nabla\varphi d\vec{r},$$

$$\nabla\varphi d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi(x,y,z),$$

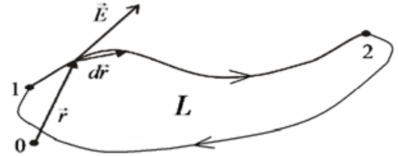
$$A_{12} = -q\int_1^2 \nabla\varphi d\vec{r} = -q\int_1^2 d\varphi = \underbrace{q\varphi_1}_{\Pi_1} - \underbrace{q\varphi_2}_{\Pi_2}.$$

$\Pi = q\varphi$ – потенциальная энергия заряда в поле $\vec{E}$.

Единицы измерения φ и E.

$$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}; \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi;\Rightarrow [E] = \frac{[\varphi]}{[l]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.



$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L \vec{E}d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r} + \int_2^1 \vec{E}d\vec{r} =$$

$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \text{ то есть } \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Формула Стокса. Теорема о циркуляции, её представление в дифференциальной форме.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_{S_L} \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \Rightarrow \mathrm{rot}\vec{E} = 0.$$

Лекция 3.

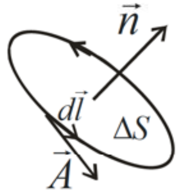
- Ротор векторной функции. Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.
- Уравнения Лапласа и Пуассона.
- Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов.

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|},$$

$$\varphi(r) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'.$$

Ротор векторной функции



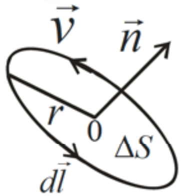
$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}}{\Delta S} = (\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{n})$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

3.3

Физический смысл ротора в рамках гидродинамической аналогии



$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{v}d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{v2\pi r}{\pi r^2} = \frac{\omega r2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega$$

3.4

Физический смысл ротора в электростатике

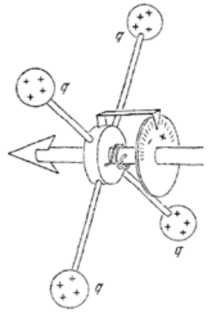


Рис. 2.30. «Ротор-метр»

3.5

Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.

$$\int\limits_{S_V}\vec{E}d\vec{S} = \frac{\int\limits_V \rho dV}{\varepsilon_0}, \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = 0.$$

3.6

Уравнения Лапласа и Пуассона.

Если $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то тождественно $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$. Тогда

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{div}\nabla\varphi = -\Delta\varphi, \text{ где } \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Уравнение Пуассона

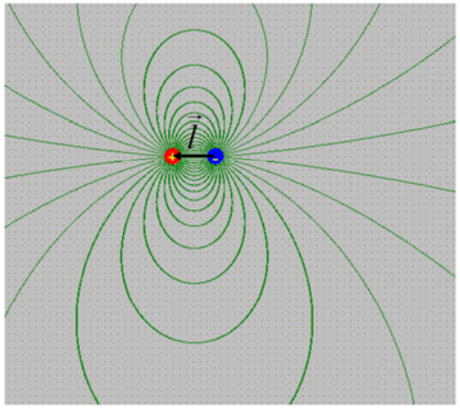
$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

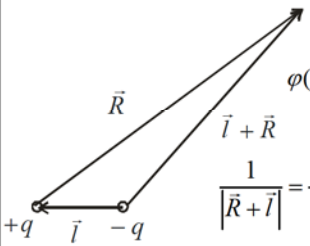
3.7

Электрический диполь.



3.8

Потенциал диполя.



$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R}-\frac{q}{\left|\vec{R}+\vec{l}\right|}\right), \quad \text{где } q>0.$$

$$\frac{1}{\left|\vec{R}+\vec{l}\right|} = \frac{1}{\left[\left(\vec{R}+\vec{l}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left(R^2+2\vec{R}\vec{l}+l^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{R\left(1+2\frac{\vec{R}\vec{l}}{R^2}+\frac{l^2}{R^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{R}-\frac{\vec{l}\vec{R}}{R^3}; \quad \varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

$\vec{p} = q\vec{l}$ – электрический момент диполя или дипольный момент.

3.9

Поле диполя

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \qquad E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} =$$

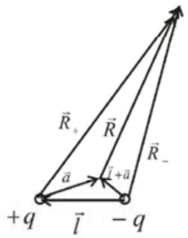
$$= -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{p_x x+p_y y+p_z z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = -k(\vec{p}\vec{R})\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{R^5}-k\frac{p_x}{R^3} =$$

$$= k\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})x}{R^5}-\frac{p_x}{R^3}\right),$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{p}}{R^3}\right).$$

3.10

Потенциал и поле диполя(общий случай).



$$\vec{R}_+ = \vec{a}+\vec{R}$$

$$\vec{R}_- = \vec{l}+\vec{a}+\vec{R}$$

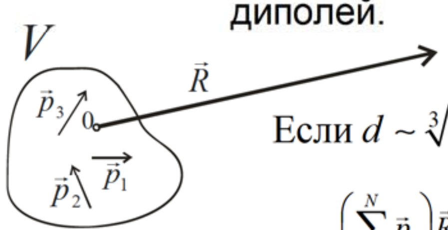
Если $\vec{l}$ и $\vec{a} << \vec{R}$, то потенциал и поле будут равны

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{p}}{R^3}\right).$$

3.11

Потенциал и поле системы диполей.



Если $d \sim \sqrt[3]{V} << R$, то

$$\varphi_d = \sum_{i=1}^{N}\varphi_d^i = \sum_{i=1}^{N} k\frac{\vec{p}_i\vec{R}}{R^3} = k\frac{\left(\sum_i^N \vec{p}_i\right)\vec{R}}{R^3} = k\frac{\vec{P}\vec{R}}{R^3},$$

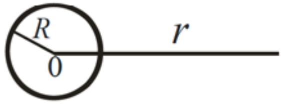
где $\vec{P} = \sum_i^N \vec{p}_i$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{P}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{P}}{R^3}\right).$$

Пример решения задач электростатики с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

- Определить потенциал однородно заряженного шара, если радиус шара R, а его плотность заряда ρ.

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right)$$



$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

При $r > R$, $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0.$

Общее решение этого уравнения равно

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Граничные условия

1) Нормировка потенциала. Если $r \to \infty$, то $\varphi \to 0$. Отсюда $C_2 = 0$.

2) Условие точечности заряда. Если $r >> R$, то $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$. Отсуда $C_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$.

При $r \le R$, $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$

Общее решение этого уравнения равно

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Граничные условия

1) Если $r \to 0$, то φ - ограничено. Отсюда $C_3 = 0$.

2) Условие непрерывности потенциала $\varphi(R-0) = \varphi(R+0)$.

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R} = \frac{R^2\rho}{3\varepsilon_0}.$$

Находим $C_4 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ и $\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$.

В частности, для вектора напряженности

$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ имеем:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}, \quad \text{при } r \le R;$$

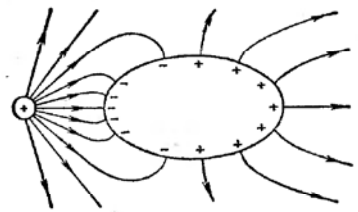
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{при } r > R.$$

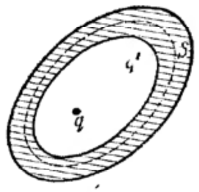
Лекция 4.

- Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция. Напряженность поля у поверхности и внутри проводника. Распределение заряда по поверхности проводника. Электростатическая защита. Проводящий шар в однородном электростатическом поле. Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость. Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция.

- Явление перераспределения зарядов на проводнике при наличии внешнего стационарного электрического поля называется электростатической индукцией





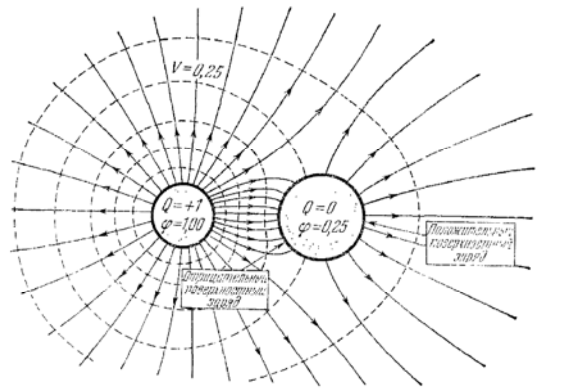
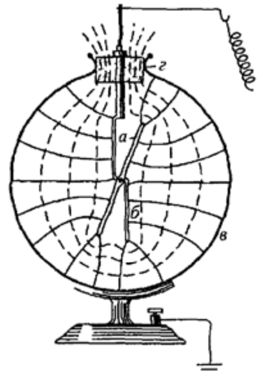


Рис. 3.5. Электрическое поле около двух сферических проводников, из которых один имеет заряд, равный +1, а другой — равный нулю. Штриховые кривые являются пересечениями эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. Нулевой потенциал находится в бесконечности.

Электростатическая защита.

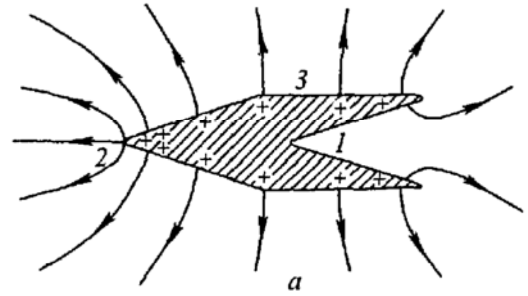
4.5

Электрометр или электростатический вольтметр.



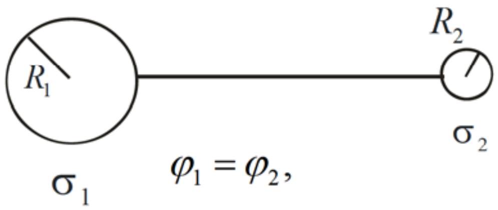
4.6

Распределение заряда по поверхности проводника.



4.7

Поверхностная плотность заряда пропорциональна кривизне поверхности

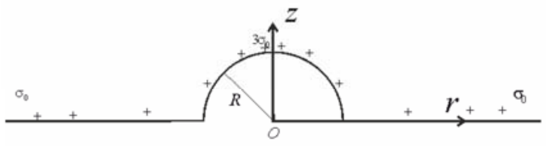


$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2},$$

$$\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 \cdot R_2.$$

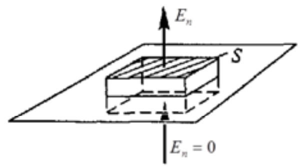
4.8



$$\sigma = 3\sigma_0 \frac{z}{R}, \qquad \sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

4.8.1

Напряженность поля у поверхности проводника.

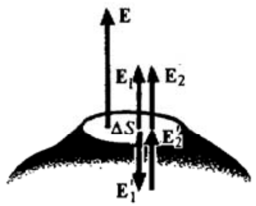


$$E_n S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_\tau = 0.$$

4.9

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E$$

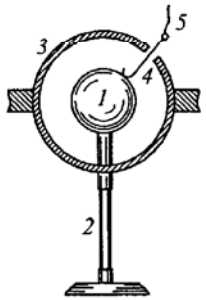


50

Механизм образования поля вблизи поверхности проводника

4.10

Метод Кавендиша проверки закона Кулона



$$F \sim \frac{q_1 q_2}{R^{2\pm\delta}}$$

$$\delta < 1/21600$$

4.11

Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость.

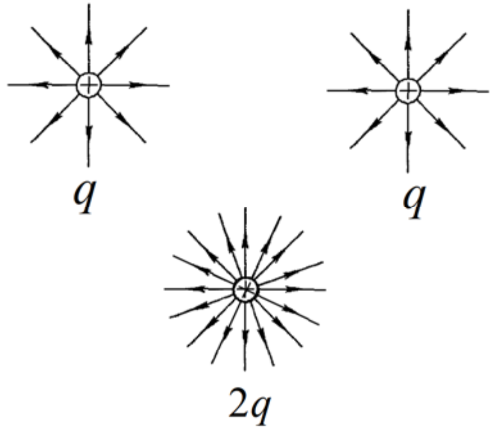
$$\varphi(\vec r) = \int_S k \frac{\sigma(r')}{|\vec r - \vec r'|} dS', \quad q = \int_S \sigma(r') dS'$$

$$\varphi = \frac{1}{c} q$$

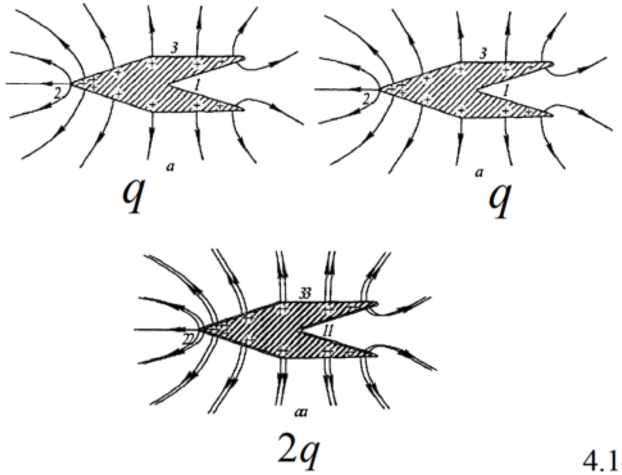
Электроемкость шара

$$c = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{k\frac{q}{R}} = \frac{R}{k}, \quad c_{Земли} = \frac{6,4\cdot 10^6}{9\cdot 10^9} \approx 0,7\cdot 10^{-3} Ф$$

4.12

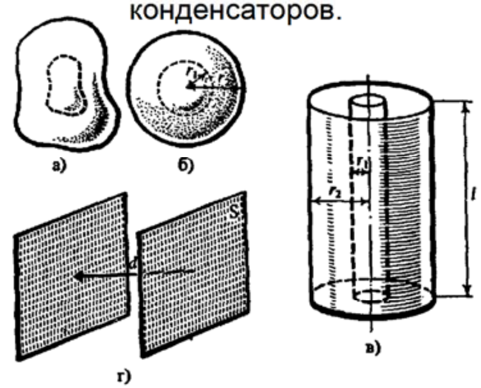


4.13



4.14

Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.



4.15

Емкость конденсатора $c=\frac{q}{U}=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}$,

Плоский конденсатор

$$c=\frac{q}{U}=\frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

Сферический кондесатор

$$c=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}\right)}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1},$$

Цилиндрический кондесатор

$$U=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_2}{R_1},\quad c=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}l$$

4.16

Потенциальные и емкостные коэффициенты

$\varphi_i=\sum_j V_{ij}q_j$, где $V_{ij}=V_{ji}$ - потенциальные коэфф.

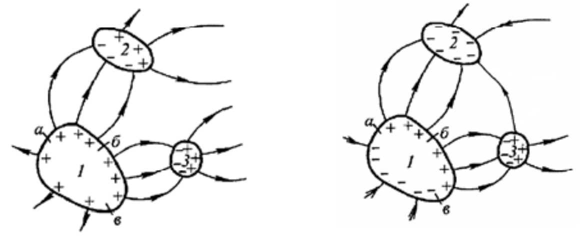
$q_j=\sum_i C_{ji}\varphi_i$, где $C_{ji}=C_{ij}$ - емкостные коэфф.

(Сивухин § 27,28)

$V_{ij}>0;\ V_{ii}>V_{ij}.$

$C_{ii}>0;\ C_{ij}<0;\ \sum_j C_{ij}>0.$

4.17



$\varphi_1\sim q_1,\qquad \varphi_2\sim q_2,$

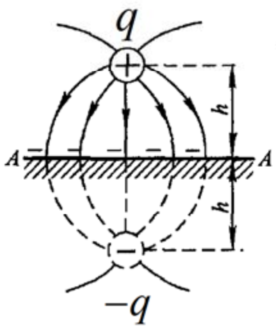
$\varphi_2\sim q_1,\ \varphi_3\sim q_1;\qquad \varphi_1\sim q_2,\ \varphi_3\sim q_2;$

$\varphi_i=\alpha_{i1}q_1,\qquad \varphi_i=\alpha_{i2}q_2,$

$$\varphi_i=\alpha_{i1}q_1+\alpha_{i2}q_2=\sum_j V_{ij}q_j$$

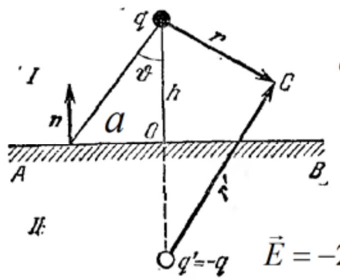
4.18

Метод изображений



$$\begin{cases}\Delta\varphi=0,\\ \varphi=const,\\ \varphi_{r\to h}\to\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{h}.\end{cases}$$

4.19



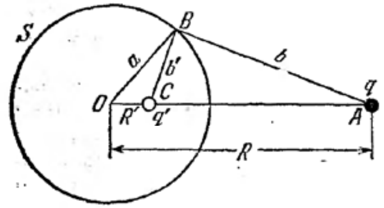
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right),$$

$$\cos\vartheta=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

$$\vec{E}=-2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{1}{a^2+h^2}\cos\vartheta\,\vec{n}$$

$$\sigma=E\varepsilon_0=-2\frac{1}{4\pi}q\frac{h}{\left(a^2+h^2\right)^{3/2}},\qquad q=\int_\infty\sigma dS.$$

4.20

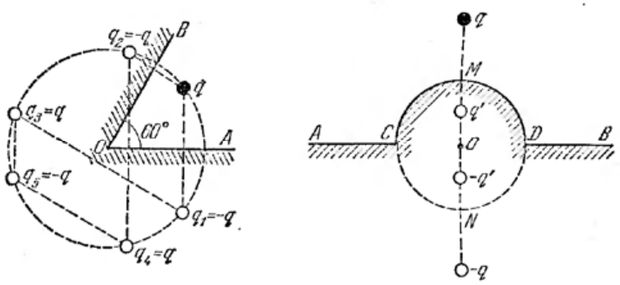


$\Delta OBC\sim\Delta OBA,\Rightarrow R\cdot R'=a^2.$

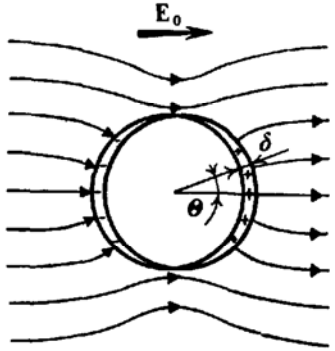
Если $q'=-\frac{b'}{b}q=-\frac{a}{R}q$, то $\varphi(a)=0.$

Вне сферы $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right).$

4.21



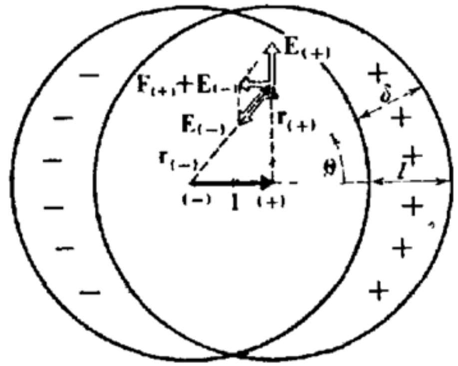
4.22



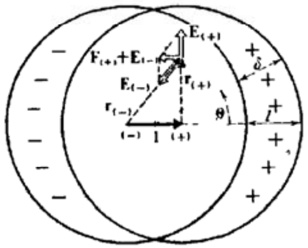
$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [(\rho/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r},$

4.23

Проводящий шар в однородном электрическом поле. [1, стр.125]



4.24



$$\mathbf{E}_{(+)} = [|\,\rho\,|/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r}_{(+)},$$
$$\mathbf{E}_{(-)} = -[|\,\rho\,|/(3\varepsilon_0)]\,\mathbf{r}_{(-)},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = [|\rho|/(3\varepsilon_0)]\,(\mathbf{r}_{(+)} - \mathbf{r}_{(-)}) = -[|\,\rho\,|/3\varepsilon_0)]\,\mathbf{l},$$

$$\rho\vec{l} = -3\varepsilon_0\vec{E} = 3\varepsilon_0\vec{E}_0, \qquad \sigma\Delta S = \rho\Delta S\delta,$$

$$\sigma = \rho\delta = \rho l\cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta,$$

где $\delta = l\cos\theta$.

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0 = 3E_0\cos\theta,$$

4.25

Поле вне шара - это поле диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 3\varepsilon_0\vec{E}_0,$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) + \vec{E}_0 =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right)\vec{E}_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{3(\vec{E}_0\vec{r})\vec{r}}{r^2}.$$

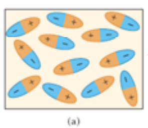
4.26

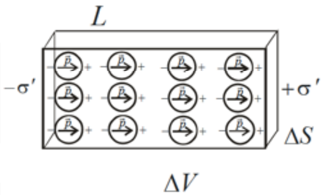
Лекция 5.

- Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации со связанными зарядами.
- Вектор электрической индукции в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость вещества. Материальное уравнение для векторов электрического поля.
- Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков. Её дифференциальная форма.
- Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.
- Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

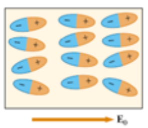
5.1

Для характеристики поляризации диэлектрика вводят вектор поляризации





$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V},$$



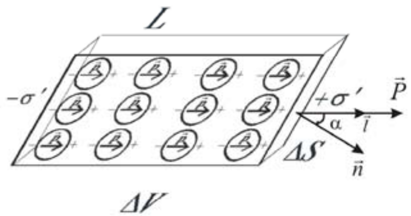
σ' - связанные заряды.

Из рисунка видно,что

$P_n\Delta V = \sigma'\Delta SL$, то есть $P_n = \sigma'$

5.2

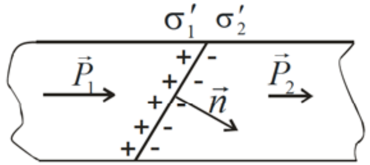
Связь вектора поляризации с поверхностными связанными зарядами.



$$\vec{p} = q'L\vec{l} = \sigma'\Delta SL\vec{l};$$
$$\vec{p} = \vec{P}\Delta V = \vec{P}\Delta SL\cos\alpha = \underbrace{(\vec{P}\vec{n})}_{P_n}\vec{l}\,\Delta SL; \quad \Rightarrow \sigma' = (\vec{P}\vec{n}) = P_n;$$

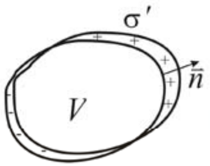
5.3

Для границы двух диэлектриков имеем $\sigma' = \sigma_1' - \sigma_2' = P_{1n} - P_{2n} = -\vec{n}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1).$



5.4

Связь вектора поляризации с объемными связанными зарядами.



$$\oint_{S_V} \sigma' dS = -Q'_V = -\int_V \rho' dV;$$

$$\oint_{S_V} \sigma' dS = \oint_{S_V} \vec{P}\vec{n} dS = \oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{P} dV;$$

$$\oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = -Q'_V, \qquad \operatorname{div}\vec{P} = -\rho'.$$

5.5

Для объемной плотности связанных зарядов справедливы соотношения

$$\oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = -\int_V \rho' dV,$$

$$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho'.$$

Вектор электрической индукци (смещения) в диэлектрике определяется равенством

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

5.6

Материальное уравнение для векторов электрического поля.

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \quad \text{или} \quad \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}).$$

Для многих сред эту связь можно представить в виде

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \sum_{\kappa=1}^{3} \alpha_{ijk} E_j E_k,$$

где α_{ij} – тезор линейной восприимчивости,

α_{ijk} – тезор нелинейной восприимчивости.

5.7

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость вещества.

Для изотропного диелектрика $\alpha_{ij} = \delta_{ij}\alpha$, тогда имеем

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

где по определению $\varepsilon = 1 + \alpha$, – отнисительная диэлектрическая проницаемость вещества.

5.8

Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков в дифференциальной и интегральной форме.

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{\frac{\rho+\rho'}{\varepsilon_0}} + \underbrace{\operatorname{div}\vec{P}}_{-\rho'} = \rho;$$

Дифференциальная форма - $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

Интегральная форма - $\int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$.

5.9

Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэлектрической среде.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

Для изотропной среды $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, тогда

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \dfrac{\int_V \rho dV,}{\varepsilon_0 \varepsilon} \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

5.10

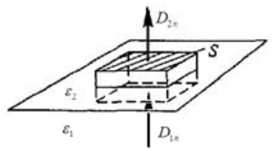
Из приведенных выше уравнений следует, что в изотропном бесконечном диэлектрике напряженность электрического поля, создаваемая свободными зарядами будет меньше в ε раз по сравнению с напряженностью поля соoздаваемими этими же зарядами в вакууме.ε_0

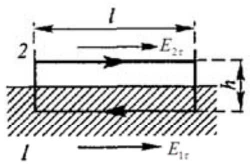
Граничныеусловия для векторов напряженности и электрической индукции

$$\begin{cases} D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma, \\ E_{\tau_2} - E_{\tau_1} = 0. \end{cases}$$

где σ – плотность свободных поверхностных зарядов на границе двух диэлектриков.

5.11

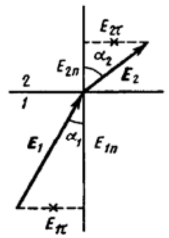




$$D_{2n} \cdot S - D_{1n} \cdot S = \sigma \cdot S, \qquad E_{2\tau} \cdot l - E_{1\tau} \cdot l = 0,$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \qquad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

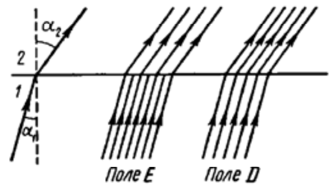
Преломление линий E и D.



$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \ \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}.$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то $\alpha_2 > \alpha_1$



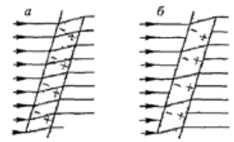


Рис 58 Линии смещения (а) и линии напряженности (б) в пластине диэлектрика

5.12

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.

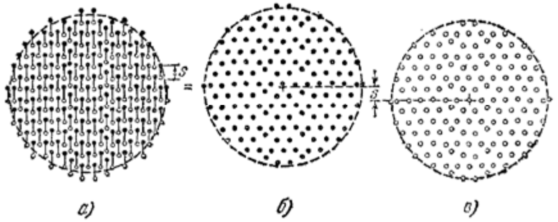
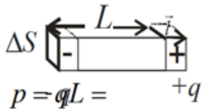
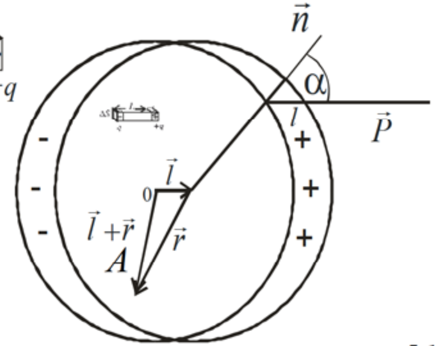


Рис. 9.25. Сфера с ориентированными молекулярными диполями (а) эквивалентна двум наложенным друг на друга несколько смещенным сферам, с положительными (б) и с отрицательными зарядами (в).

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.



$$p = qL = \rho\Delta S\left|\vec{l}\right|L = \rho\left|\vec{l}\right|\Delta SL = \left|\vec{P}\right|\Delta V. \Rightarrow \vec{P} = \rho\vec{l}.$$

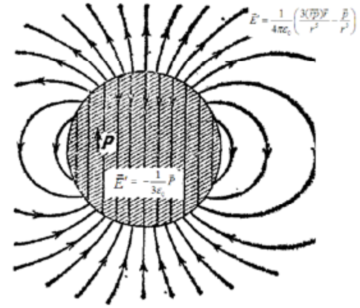


Поле внутри шара

$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{r} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(\vec{r}+\vec{l}) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{l} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P},$$

Поле вне шара совпадает с полем диполя

$$\vec{p} = V_{шара}\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3_{шара}\rho\vec{l}, \text{ то есть } \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right),$$



Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

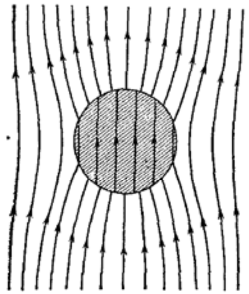
$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{r} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(\vec{r}+\vec{l}) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{l} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P},$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underset{\varepsilon-1}{\alpha}\underbrace{(\vec{E}_0+\vec{E}')}_{\vec{E}}, \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0\alpha(\vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}),$$

$$\vec{P} = 3\varepsilon_0\frac{\alpha}{3+\alpha}\vec{E}_0 = 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0.$$

$\sigma' = P_n = P\cos\alpha.$ Дипольный момент шара:

$\vec{p} = \vec{P}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\varepsilon_0 R^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0,$ где R – радиус шара. При $\varepsilon \to \infty$ - проводящий шар.



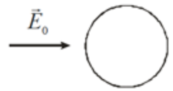
Полное поле **E** внутри и снаружи шара из диэлектрика.

Фактор формы

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0}\vec{P},$$

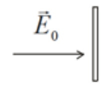
где N – Фактор формы.

Для шара $N = \frac{1}{3}.$



Для басконечной пластины:

если $\vec{E}_0 \perp$ плоскости пластины $N = 1,$

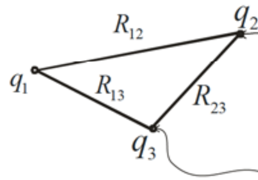


если $\vec{E}_0 \parallel$ плоскости пластины $N = 0.$

Лекция 6.

- Энергия системы электрических зарядов. Энергия взаимодействия и собственная энергия. Энергия электростатического поля и её объемная плотность. Энергия электрического диполя во внешнем поле.
- Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.

Энергия системы электрических зарядов.



$$W_2 = q_2\varphi_2 = k\frac{q_2q_1}{R_{12}},$$

$$W_3 = q_3\varphi_3 = k\frac{q_3q_1}{R_{13}} + k\frac{q_3q_2}{R_{23}},$$

$$W = W_2 + W_3 = k\left(\frac{q_1q_2}{R_{12}} + \frac{q_1q_3}{R_{13}} + \frac{q_2q_3}{R_{23}}\right),$$

$$W = k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{q_iq_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \text{ где } \varphi_i = k\sum_j\frac{q_j}{R_{ij}},$$

Энергия взаимодествия зарядов при наличии диэлектриков

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \text{ но } \varphi_i \neq k\sum_j\frac{q_j}{R_{ij}}.$$

Энергия взаимодествия зарядов при непрерывном распределении зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV.$$

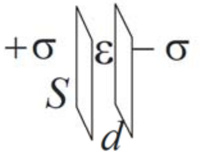
Пример. Энергия конденсатора.

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}q_1U = \frac{cU^2}{2}.$$

Энергия системы заряженных проводников

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varphi_j\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}q_iq_j.$$

Энергия электростатического поля и её объемная плотность.



$$W=\frac{1}{2}cU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}(Ed)^2=$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon E}_{D}\cdot E\cdot\underbrace{Sd}_{V}=\frac{DE}{2}V.$$

$$w=\frac{W}{V}=\frac{\vec D\vec E}{2}.$$

6.4

Строгий вывод формулы для плотности энергии электростатического поля

$$W=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi dV=\frac{1}{2}\int_\infty\rho\varphi dV=\frac{1}{2}\int_\infty(\operatorname{div}\vec D)\varphi dV=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\infty\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial D_i}{\partial x_i}\Big)\varphi dV=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(D_i\varphi)}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\varphi\vec D)}-\underbrace{\sum_{i=1}^{3}D_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}_{-\vec D\vec E}\right)dV=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\oint_{S_{R\to\infty}}\varphi\vec D d\vec S}_{\to 0}+\frac{1}{2}\int_\infty\vec D\vec E dV=\int_\infty w dV,\ \text{где } w=\frac{\vec D\vec E}{2}.$$

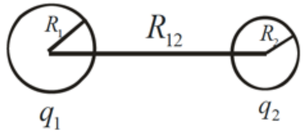
6.5

Энергия взаимодействия и собственная энергия.

- Собственная энергия заряженного тела- это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.
- Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

6.6

Рассмотрим для простоты два заряженных проводящих шара



Для уединенных шаров

$$W_1^{собст.}=\frac{q_1\varphi_1}{2},\quad W_2^{собст.}=\frac{q_2\varphi_2}{2}.$$

Для взаимодействующих шаров

$$\varphi_1=\varphi_1^{q_1}+\varphi_1^{q_2},\ \varphi_2=\varphi_2^{q_1}+\varphi_2^{q_2}.\ W=\frac{1}{2}q_1\varphi_1+\frac{1}{2}q_2\varphi_2=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_1}}_{W_1^{собст.}}+\underbrace{\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_2}}_{W_2^{собст.}}+\underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_2}+\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_1}}_{W_{взаимодействия}}.$$

6.7

В рамках полевого формализма

$$\vec E=\vec E_1+\vec E_2\,,$$

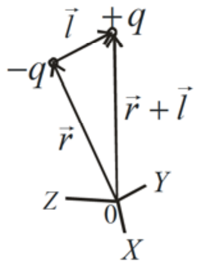
$$W=\int_\infty\frac{\varepsilon_0(\vec E_1+\vec E_2)^2}{2}dV=$$

$$=\underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec E_1^{\,2}}{2}dV}_{W_1^{собст.}}+\underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec E_2^{\,2}}{2}dV}_{W_2^{собст.}}+\underbrace{\int_\infty\varepsilon_0\vec E_1\vec E_2dV}_{U^{взаимод.}}.$$

При $R_{1,2}\to 0,\quad W_{1,2}^{собст.}\to\infty;\quad U^{взаимод.}\le$ или >0.

6.8

Энергия электрического диполя во внешнем поле.



$$W=q\varphi(\vec r+\vec l)-q\varphi(\vec r),$$

$$\varphi(\vec r+\vec l)=\varphi(x+l_x,y+l_y,z+l_z)=$$

$$=\varphi(\vec r)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z+\cdots,$$

$$W=q\underbrace{\vec l}_{\vec p}\cdot\underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec E}=-\vec p\vec E.$$

6.9

Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.

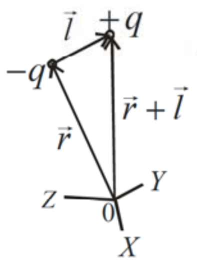
$$\vec F=-\nabla W;\qquad F_i=-\frac{\partial W}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\vec p\vec E=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}p_jE_j=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}p_j\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\left(p_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right);\Rightarrow\vec F=(\vec p\nabla)\cdot\vec E;$$

6.10

Момент силы, действующей на диполь



$$\vec M=\left[\vec r+\vec l,q\vec E(\vec r+\vec l)\right]-\left[\vec r,q\vec E(\vec r)\right],$$

В однородном поле $\vec E=const$, тогда

$$\vec M=\left[\vec l,q\vec E\right]=\left[q\vec l,\vec E\right]=\left[\vec p,\vec E\right].$$

6.11

Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик

Дипольный момент объема диэлектрика

$\vec p_{\Delta V}$ выражается через вектор поляризации $\vec P$

$\vec p_{\Delta V}=\vec P\Delta V$, тогда плотность силы

$$\vec f=\frac{\vec F_{\Delta V}}{\Delta V}=\frac{(\vec p_{\Delta V}\cdot\nabla)\vec E}{\Delta V}=(\underbrace{\vec P}_{\vec P=\varepsilon_0\alpha\vec E}\cdot\nabla)\vec E=\varepsilon_0\alpha(\vec E\cdot\nabla)\vec E;$$

$$f_i=\varepsilon_0\alpha\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varepsilon_0\alpha\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}_{-E_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}_{-E_j}=$$

6.12

$$= \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{E_j^{\,2}}{2} = \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{E_j^{\,2}}{2} =$$

$$= \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\vec{E}^2}{2}.$$ Окончательно имеем

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \alpha \cdot \nabla \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \cdot \nabla \frac{E^2}{2} .$$

6.13

Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов

Если в системе поддерживается $T = const$, деформация среды не меняется и $\varepsilon = const$, то

$$dW = dW_{\substack{\text{энергия, поступившая} \\ \text{от внешних источников}}} + dA'_{\text{внешних сил}}.$$

Для квазистатических перемещений

$$dA'_{\text{внешних сил}} = -dA_{\text{электрического поля}} = -\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i ,$$

где ξ_i - обобщенные координаты, F_i - обобщенные силы.

$$dW_{\substack{\text{энергия, поступившая} \\ \text{от внешних источников}}} = \sum_j \varphi_j dq_j .$$

6.14

$$dW = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i .$$

1) Если $q_j = const$, то

$$\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i = -dW(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\bigg|_{q_j = const} d\xi_i .$$

$$F_i = -\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\bigg|_{q_j = const} .$$

6.15

2) Если $\varphi_j = const$, то

$$dW = \frac{1}{2} \sum_j \varphi_j dq_j .$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i = dW(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\bigg|_{\varphi_j = const} d\xi_i .$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\bigg|_{\varphi_j = const} .$$

6.16

Пример. Вычислить силу притяжения пластин плоского конденсатора, помещенного в жидкий диэлектрик, если $q = const$.

$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} ,$$

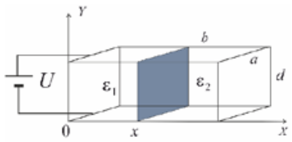
d - обобщенная коориная.

$$F_d = -\frac{\partial W}{\partial d}\bigg|_{q = const} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = -\frac{q}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{q}{2} E .$$

В диэлектрике сила взаимодествия пластин уменьшилась в ε раз, то есть $F_d = F_d^{\text{вак.}} / \varepsilon$.

6.17

Пондеромоторные силы, действующие на диэлектрик в конденсаторе. Давление и натяжение Фарадея-Максвелла.

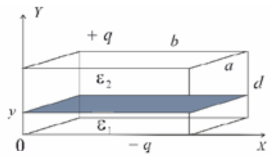


$$W = \frac{cU^2}{2}, \text{ где } c = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 x a}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 (b - x) a}{d}.$$

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 a}{d} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 a}{d} \right) \frac{U^2}{2},$$

$$U = Ed; \Rightarrow F_x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E^2 ad}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E^2 ad}{2} = \left(\frac{D_1 E}{2} - \frac{D_2 E}{2} \right) ad .$$

$$f_x = \frac{F_x}{ad} = w_1 - w_2, \text{ где } w = \frac{DE}{2}.$$



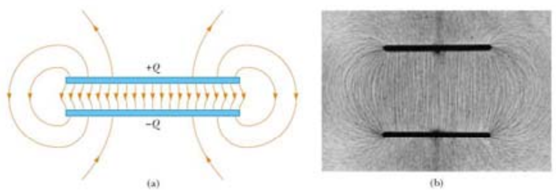
$$W = \frac{q^2}{2c}, \text{ где } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{y}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 ab} + \frac{d - y}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 ab}$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 ab} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 ab} \right) \frac{q^2}{2},$$

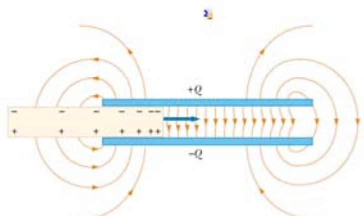
так как $q = \sigma \cdot ab$, $D = \sigma$, $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$, $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$.

$$f_y = \frac{F_y}{ab} = \frac{DE_2}{2} - \frac{DE_1}{2} = w_2 - w_1 .$$

Электрические пондеромоторные силы имеют такую же величину, как если бы линии напряженности имели продольное натяжение и боковое давление, каждое из которых равно объемной плотности энергии поля $w = DE/2$.



(a) (b)



6.18

Лекция 7.

- Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле. Неполярные диэлектрики. Формула Клаузиуса – Моссотти. Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена. Поляризация ионных кристаллов.
- Электрические свойства кристаллов. Пироэлектрики. Пьезоэлектрики. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект и его применение.
- Сегнетоэлектрики. Доменная структура сегнетоэлектриков. Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектрика. Применение сегнетоэлектриков.

7.1

Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле.

- Поляризационные свойства диэлектриков определяются поляризационными особенностями отдельных молекул вещества.
- Все молекулы можно разделить на полярные и неполярные молекулы.
- У неполярных молекул в отсутствии внешнего электрического поля дипольный момент равен нулю. Полярные молекулы обладают собственным дипольным моментом.

7.2

Поляризация неполярных молекул.

$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}_0$, где β - поляризуемость молекулы.

Для оценки можно рассматривать молекулу как проводящий шар с $R \sim 10^{-8}$ см, тогда

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0, \quad \beta = 4\pi R^3 \sim 4\pi 10^{-24}\,\text{см}^3.$$

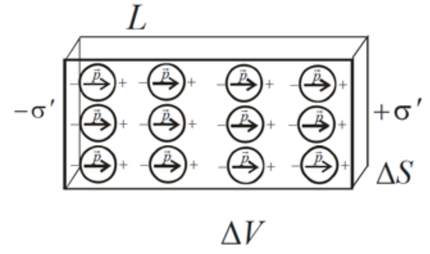
Элемент	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
$\beta \cdot \frac{1}{4\pi 10^{-24}\,см^3}$	0,66	0,21	12	9,3	1,5	0,4	27	1,6	34

7.3

Микроскопическое и макроскопическое поле в веществе.

$$\vec{E}_{макро.} = \left\langle \vec{E}(\vec{r},t)_{микро.} \right\rangle\Big|_{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r},t)_{микро.}\,dV.$$

Поле в диэлектрике это $\vec{E} = \vec{E}_{макро.}$



7.4

Локальное поле.

Локальное поле, действующее на молекулу отличается, от макроскопического поля в диэлектрике на поле самой молекулы

$$\vec{E}_{лок.} = \vec{E} - \vec{E}_{мол.} \approx \vec{E}.$$

Поляризуемость разреженных газов.

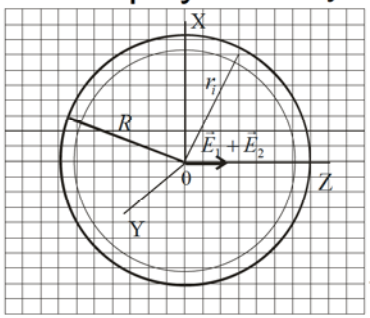
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{N_{\Delta V}}{\Delta V}\vec{p}_1 = n \cdot \vec{p}_1 = n \cdot \varepsilon_0 \beta \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E}.$$

Таким образом имеем

$$\alpha = \varepsilon - 1 = n\beta.$$

7.5

Формула Клаузиуса-Моссотти.



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1 = \sum_i \vec{E}_{r_i > R}$,

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_{r_i \le R},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r}_i)\vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{p}}{r_i^3} \right),$$

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{3(p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i)x_i - p_x r_i^2}{r_i^5} = 0.$$

7.6

Так как для кубической симметрии при суммировании по сферическому слою

$$\sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i r_i^2,$$

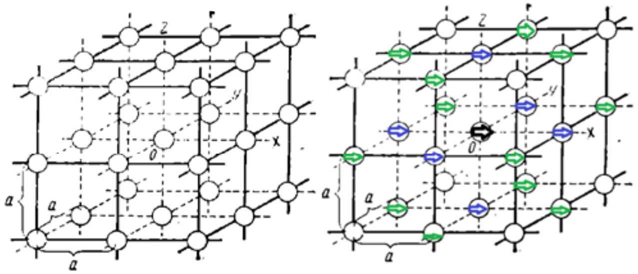
$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3}\sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i z_i x_i = 0.$$

Аналогично доказывется, что

$$E_{2y} = E_{2z} = 0.$$

7.7



$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \left(\frac{3(p_x x_i)x_i}{r_i^5} - \frac{p_x}{r_i^3} \right), \quad 1) E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-4\frac{p}{a^3} + 2 \cdot 2\frac{p}{a^3}\right) - 0,$$

$$2) E_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ -4\frac{p}{\left(\sqrt{2}a\right)^3} + 2\left[4\frac{3pa^2}{\left(\sqrt{2}a\right)^5} - 4\frac{p}{\left(\sqrt{2}a\right)^3} \right] \right\} = 0,$$

7.7_

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}.$$

Таким образом, вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n \cdot \varepsilon_0 \beta \vec{E}_1 = n\varepsilon_0\beta(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}). \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta} \right)}_{\alpha} \vec{E}; \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta}.$$

7.8

Из этой формулы имеем

$$n\beta = 3\frac{\alpha}{3+\alpha} = 3\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \text{ -}$$

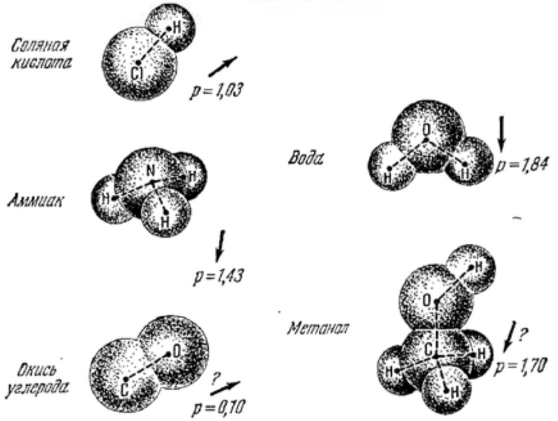
Формула Клаузиуса –Моссотти.

Так как $n = \frac{\rho_m}{\mu}N_A$, то $\quad \beta N_A = \frac{\mu}{\rho_m}3\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ -

в широких пределах для неполярных диэлектриков не зависит от физических параметров (например, для CO_2 вплоть до 100 МПа при 100^0С).

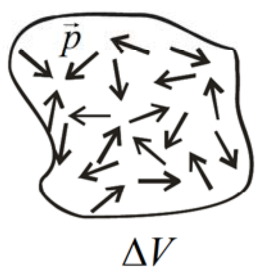
7.9

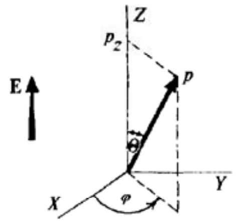
Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена.



7.10

Поляризация газообразного полярного диэлектрика





Ориентировка диполя в сферической системе координат

В соответствии с распределением Больцмана

$$dN = Ae^{-\frac{W}{K_Б T}} \cdot do, \text{ где } do = \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

$$W = -\vec{p}\vec{E} = -pE\cos\theta.$$

7.11

$$< p_z >= \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{\int_0^\pi p\cos\theta \cdot Ae^{\frac{pE}{K_Б T}\cos\theta} \cdot 2\pi \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{\int_0^\pi Ae^{\frac{pE}{K_Б T}\cos\theta} \cdot 2\pi \cdot \sin\theta \cdot d\theta}.$$

$$I = \int_0^\pi e^{\zeta\cos\theta} \cdot \sin\theta \cdot d\theta = -\int_1^{-1} e^{\zeta x} \cdot dx = \frac{2}{\zeta}\text{sh}\zeta,$$

$$\frac{dI}{d\zeta} = \int_0^\pi \cos\theta \cdot e^{\zeta\cos\theta} \cdot \sin\theta \cdot d\theta = \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{2}{\zeta}\text{sh}\zeta\right) = \frac{2}{\zeta}\left(\text{ch}\zeta - \frac{\text{sh}\zeta}{\zeta}\right);$$

7.12

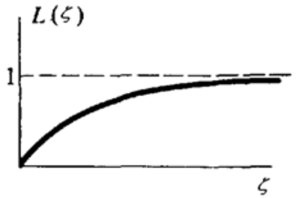
В результате имеем

$$< p_z >= p\frac{\text{ch}\zeta - \frac{\text{sh}\zeta}{\zeta}}{\text{sh}\zeta} = p \cdot L(\zeta),$$

где

$$L(\zeta) = \text{cth}\zeta - \frac{1}{\zeta}$$ - функция Ланжевена.

7.13



При $\zeta << 1$,

$$L(\zeta) = \frac{1}{3}\zeta + \cdots,$$

$$< p_z >= p\frac{\zeta}{3} = \varepsilon_0 \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{p^2}{K_Б T}E = \varepsilon_0 \beta E,$$

где β - эффективная поляризуемость молекулы.

Для разреженных газов вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n < \vec{p}_1 >= \varepsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E} \approx \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0.$$

7.14

Здесь $\alpha = \varepsilon - 1 = n\beta = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_Б T} = n\beta_0 + \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_Б T}$,

$n\beta_0$ - неполярная составляющая воспримчвости.

7.15

Поляризация ионных кристаллов.

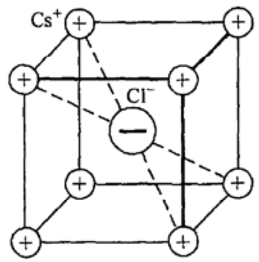


Рис. 65. Элементарная ячейка кристалла хлористого цезия CsCl

В кристалических веществах возможно смещение положителной и отрицательной ионных подрешоток относительно друг друга под действием внешнего электрического поля. Такая поляризация называется ионной поляризацией.

7.16

Электрические свойства кристаллов. Пироэлектрики

У некоторых кристаллов в состоянии термодинамического равновесия решетки положительных и отрицательных ионов смещены, то есть они имеют спонтанную поляризацию, например, кристалл турмалина. (см. [3, Пироэлектричество])

7.17

Пьезоэлектрики. Прямой и обратный пьезоэффект и его применение.

У ряд кристаллов при деформациях возникает электрическая поляризация (прямой пьезоэффект) и наоборот при наложении электрического поля происходит деформация (обратный пьезоэффект). К таким веществам относятся кристаллы кварца, турмалина, сегнетовой соли, титаната бария и многие другие (см.[3. пьезоэлектричество]).

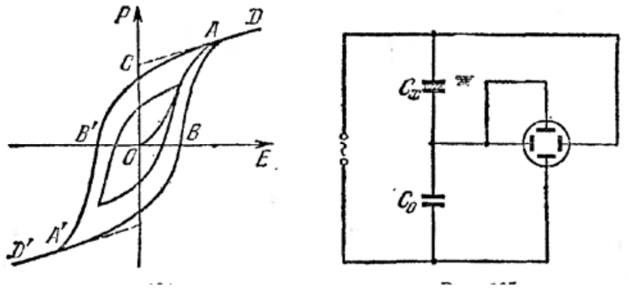
7.18

Сегнетоэлектрики. Их основные свойства. Доменная структура сегнетоэлектриков.

Некоторые кристаллические вещества (сегнетовая соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, титанат бария $BaTiO_3$ и др.) в определенном диапазоне температур находятся в состоянии спонтанной поляризации. В отличии от пироэлектриков вектор спонтанной поляризации может легко ориентирован отнисительно слабым электрическим полем. Эти вещества (сегнетоэлектрики) в данном диапазоне температур имеют гиганские значения диэл. проницаемости $\varepsilon \sim 10000$. Зависимость $\vec{P}(\vec{E})$ является нелинейной, то есть воспримчивость $\alpha(\vec{E})$. Процесс поляризаии имеет гистерезис.

7.19

Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектриков.



7.20

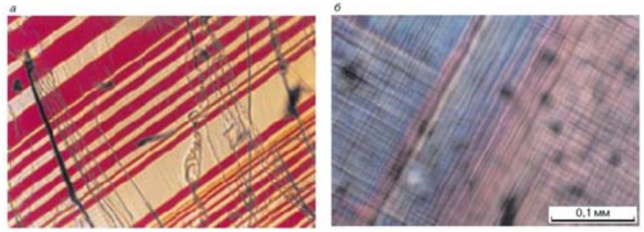


Рис. 3. Изображение доменной структуры монокристаллов титаната бария (*а*) и сегнетовой соли (*б*) в поляризованном свете

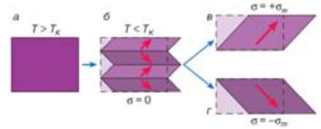
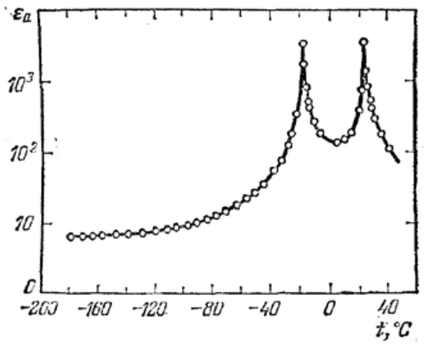


Рис. 2. Схематическое изображение возникновения (*а*, *б*) и перестройки (*б–в*; *б–г*) доменной структуры в сегнетоэластическом кристалле

7.21



Закон Кюри-Вейсса вблизи точек Кюри

$$\alpha = \frac{C'}{T'_K - T}, \qquad \alpha = \frac{C}{T - T_K}.$$

Для сегнетовой соли $T'_K = -18^0 C$, $T_K = 24^0 C$.

7.22

Применение сегнетоэлектриков.

- Сегнетоэлектрики находят широкое применение при изготовлении малогабаритных конденсаторов в качестве нелинейных элементов радиотехнических устройств, в технике ультразвука. Во внешнем электрическом поле изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления): это явление используется для управления световыми пучками (оптические затворы, модуляторы и умножители частоты лазерного излучения и т.д.).

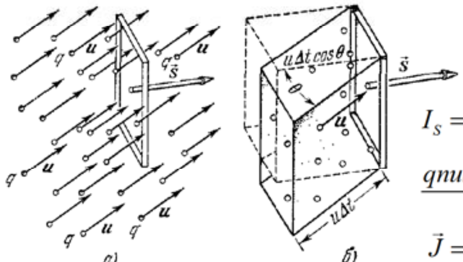
7.23

Лекция 8.

- Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока. Линии тока. Электрическое поле в проводнике с током и его источники. Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока. Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электросопротивление. Закон Ома в дифференциальной форме. Удельная электропроводность вещества.

Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока

- Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов.
- Сила электрического тока через заданную поверхность определяется величиной заряда, проходящего через эту поверхность за единицу времени.
- Плотность тока - это векторная величина, проекция которой на нормаль к элементарной поверхности равна величине электрического заряда, проходящего через единицу поверхности за единицу времени.



$$I_S = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qn\Delta V}{\Delta t} = \frac{qnuS\Delta t\cos\theta}{\Delta t} = qn(\vec{u}\vec{S}),$$

$$\vec{J} = qn\vec{u}.$$

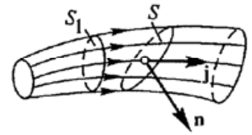
Если заряды движутся с разными скоростями

$$I_S = \sum_i qn_i(\vec{u}_i\vec{S}) = \vec{J}\vec{S}, \text{ где } \vec{J} = \sum_i qn_i\vec{u}_i - \text{плотность тока}$$

$$\vec{J} = q\frac{\sum_i n_i\vec{u}_i}{n}n = qn < \vec{u} >, \text{ где } n = \sum_i n_i; \quad < \vec{u} > = \frac{\sum_i n_i\vec{u}_i}{n}.$$

Линии тока.

- Линии тока – это линии, касательные к которым направлены по направлению средней (или дрейфовой) скорости. При стационарных токах вдоль этих линий движутся заряженные частицы.



Трубка тока

Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока.

Согласно закону сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_V = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_{S_V} \vec{J}d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div}\vec{J}dV.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0 -$$ уравнение непрерывности.

В стационарном случае $\partial\rho / \partial t = 0$, следовательно,

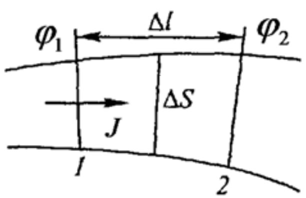
$$\operatorname{div}\vec{J} = 0.$$

Удельное электрическое сопротивление

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Вещество	Удельное сопротивление ρ, Ом м	Вещество	Удельное сопротивление ρ, Ом м
Серебро	$(1,66-1,63)\cdot 10^{-8}$	10 %-ный водный раствор NaCl	0,0825
Медь тянутая	$1,78\ 10^{-8}$	Химически чистая вода	$\sim 10^{6}$
Платина	$11,0\ 10^{-8}$	Стекло натровое	$\sim 10^{9}$
Константан (сплав 60 % Cu, 40 % Ni)	$49,0\ 10^{-8}$	Фарфор	$\sim 10^{13}$
Нихром (67,5 % Ni, 15 % Cr, 16 % Fe, 1,5 % Mn)	$110\ 10^{-8}$	Янтарь, плавленый кварц	$> 10^{18}$
Графит	$\sim 3\ 10^{-5}$		

Закон Ома в дифференциальной форме. Удельная электропроводность вещества.



$$I = J\Delta S = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho\frac{\Delta l}{\Delta S}} =$$

$$\frac{1}{\rho}\underbrace{\left(-\frac{d\varphi}{dl}\right)}_{E}\Delta S = \frac{1}{\rho}E\Delta S.$$

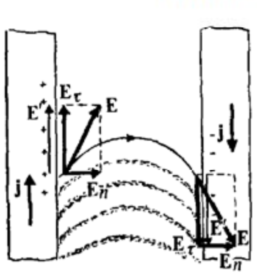
$$J = \frac{1}{\rho}E = \lambda E,$$ где $\lambda = \frac{1}{\rho}$ - удельная электропроводность.

В векторной форме

$$\vec{J} = \lambda\vec{E}$$ -

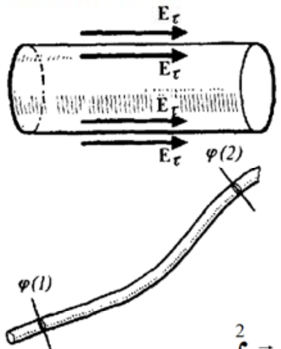
закон Ома в дифференциальной форме.

Электрическое поле в проводнике с током и его источники.



108

Демонстрация наличия нормальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника



$$\varphi(1) - \varphi(2) = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l},$$

Удельное сопротивление зависит от температуры

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha\cdot(t - t_0)],$$

где α - температурный коэффициент сопротивления.

Для чистых металлов $\alpha \approx 1/273K^{-1} = 0,00367K^{-1}$.

Вещество	Температура, °C	Температурный коэффициент сопротивления α, K^{-1}
Серебро	0–100	$40\cdot 10^{-4}$
Медь	18	$43\cdot 10^{-4}$
Платина	0–100	$38\cdot 10^{-4}$
Константан	18	(от $-0,4$ до $+0,1$)$\cdot 10^{-4}$ *)
10 %-ный водный раствор NaCl	18	$-0,021$
Графит	18	$-5\cdot 10^{-4}$
Стекло	100	от $-0,1$ до $-0,2$

*) В зависимости от образца.

Отсутствие в однородном проводнике объемных зарядов.

Для стационарных токов

$$\operatorname{div}\vec{J} = 0 = \operatorname{div}(\lambda\vec{E}) = \lambda\cdot\operatorname{div}\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla\lambda).$$

Если $\lambda = const$, то $\nabla\lambda = 0$.

Следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho_q / \varepsilon_0 = 0.$$

Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электросопротивление.

Опыт показывает, что между током и напряжением на участке проводника существует однознчная зависимость

$I = f(U)$.

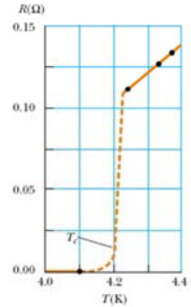
Для многих проводников эта зависимость линейная

$$I = \Lambda\cdot U = \frac{1}{R}\cdot U,$$

где Λ и R - электрическая проводимость и сопротивление.

Единица сопротивления 1Ом=1В/1А=1В/А.

Сверхпроводимость.



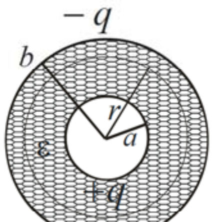
Электрическое сопротивление ртути при низких температурах.

Material	T_c(K)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134
Tl–Ba–Ca–Cu–O	125
Bi–Sr–Ca–Cu–O	105
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

Критическая температура некоторых сверхпроводников.

Стационарные **токи и *электрическое поле* в сплошных средах.**

a) сопротивление сферического конденсатора с утечкой



$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2},\quad \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{b}\right),$$

$$\underbrace{\varphi_a-\varphi_b}_{U}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{a}-\frac{q}{b}\right),\ \frac{J}{\lambda}=E,\Rightarrow$$

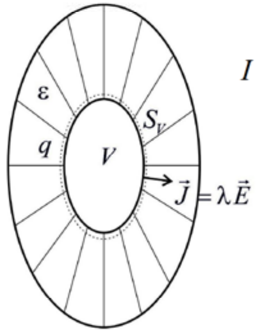
$$q=4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2\frac{J}{\lambda}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}I,\ \text{где } I=4\pi r^2 J.$$

$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}I=R\cdot I$, где сопротивление

$R=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. Заметим, что емкость сферичского конденсатора

$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon\bigg/\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ и $CR=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$ - универсальное соотношение.

Вывод соотношения $CR=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$ в общем случае.



$$I=\int_{S_V}\vec{J}d\vec{S}=\int_{S_V}\lambda\vec{E}d\vec{S}=$$

$$=\frac{\lambda}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_{S_V}\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}d\vec{S}=\frac{\lambda}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_{S_V}\vec{D}d\vec{S}=$$

$$=\frac{\lambda}{\varepsilon_0\varepsilon}q=\frac{\lambda}{\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon}_{1/R}}CU.$$

b) сопротивление цилиндрического конденсатора с утечкой

(см. [2, стр. 121]).

Лекция 9.

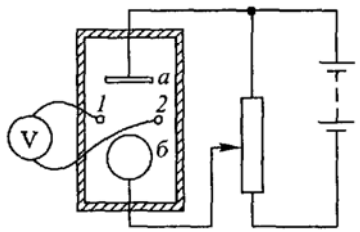
- Токи в сплошных средах. Заземление.
- Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца и его дифференциальная форма. Сторонние силы. ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи.
- Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.

9.1

Электролитическая ванна.

В слабопроводящей среде справедливо соотношение

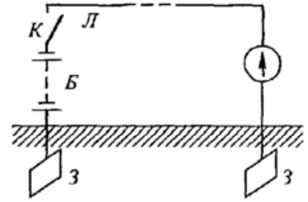
$CR=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$. Так как $CR=\frac{q}{U}\frac{U}{I}$, то $q=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}I$.

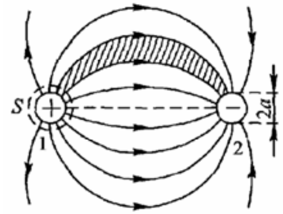


9.2

Заземление в линиях связи.

Электросопротивление сплошной среды.





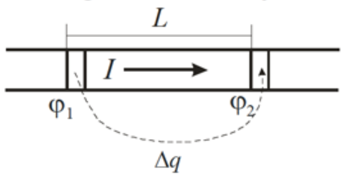
$$U_{12}=\varphi_{1\infty}-\varphi_{2\infty}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{a}-\left(-\frac{q}{a}\right)\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{a},$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{a^2}=\frac{U_{12}}{2a};\quad I=\underbrace{J}_{\lambda E}\underbrace{4\pi a^2}_{S}=\lambda\frac{U_{12}}{2a}4\pi a^2=\underbrace{2\pi a\lambda}_{\Lambda=1/R}U_{12};$$

9.3

Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Электрический ток в участке цепи совершает работу.

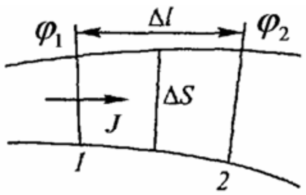


$$\Delta q=I\Delta t,\quad \Delta A=\Delta W=$$
$$=\Delta q(\varphi_1-\varphi_2)=\Delta qU;$$
$$\Delta W=I\cdot\Delta t\cdot U=\Delta Q;$$
$$Q=IUt=I^2Rt=\frac{U^2}{R}t;$$

Мощность тока

$$P=\frac{A}{t}=\frac{Q}{t}=IU=I^2R=\frac{U^2}{R}.$$

9.4



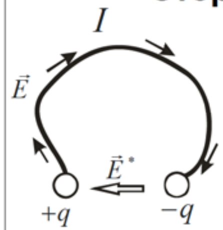
$$\frac{dQ}{dt}=I^2R=$$
$$=(J\Delta S)^2\rho\frac{\Delta l}{\Delta S}=$$
$$=J^2\rho\cdot\underbrace{\Delta S\Delta l}_{\Delta V}.$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{dQ}{dt}=J^2\rho=J\frac{E}{\rho}\rho=JE=\vec{J}\vec{E}.$$

9.5

Сторонние силы. ЭДС.

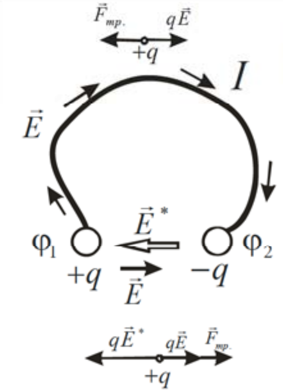


Для поддержания электрического тока в замкнутой цепи необходимо устройство (источник тока), совершающее посредством сторонних сил перемещение зарядов против действия электрических сил.

$\vec{E}^*$ – сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд (напряженность сторонних сил),

$\vec{E}$ - напряженность электрических сил

9.6



$$\int_1^2 q\vec{E}d\vec{l} = q(\varphi_1-\varphi_2) = qU,$$

$$\int_1^2 q\vec{E}d\vec{l} = -\int_1^2 \vec{F}_{тр.}d\vec{l} = Q_{\text{джоулево тепло}},$$

$$Q_{\text{джоулево тепло}} = I^2Rt = qIR,$$

где R – сопровление внешней цепи.

$$q\underbrace{\int_2^1 \vec{E}^*d\vec{l}}_{\mathcal{E}} = -q\underbrace{\int_2^1 \vec{E}d\vec{l}}_{-U} - \underbrace{\int_2^1 \vec{F}_{тр.}d\vec{l}}_{-Q'_{\text{джоулево тепло}}},$$

$Q'_{\text{джоулево тепло}} = qIr$, где r - внутреннее сопротивление цепи

Замечание. $Ir = I\rho\int_2^1 \frac{dl}{S} = \int_2^1 \rho\frac{I}{S}dl = \int_2^1 \rho\vec{J}d\vec{l}. \Rightarrow \rho\vec{J} = \vec{E}+\vec{E}^*$

9.7

Врезультате имеем

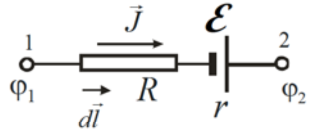
$\mathcal{E} = U + Ir = IR + Ir$

- закон Ома для замкнутой цепи.

Здесь $\mathcal{E} = \int_2^1 \vec{E}^*d\vec{l}$ - электродвижущая сила(ЭДС), равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

9.8

Закон Ома для участка цепи с ЭДС



$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}+\vec{E}^*)$$

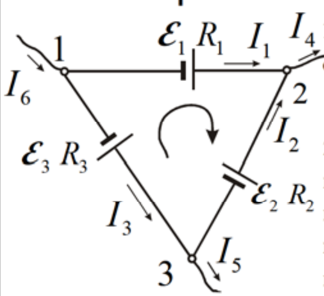
$$\int_1^2 \rho\vec{J}d\vec{l} = \underbrace{\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}}_{\varphi_1-\varphi_2} + \underbrace{\int_1^2 \vec{E}^*d\vec{l}}_{\mathcal{E}}$$

$$\int_1^2 \rho\vec{J}d\vec{l} = \int_1^2 \rho\frac{I}{S}dl = I\int_1^2 \frac{\rho}{S}dl = I(R+r);$$

$$I(R+r) = \underbrace{\varphi_1-\varphi_2}_{U} + \mathcal{E}.$$

9.9

Правила Кирхгофа.



1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$I_1 + I_2 - I_4 = 0, \ \Rightarrow \sum_k I_k = 0.$

2) Алгебраическая сумма произведний сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

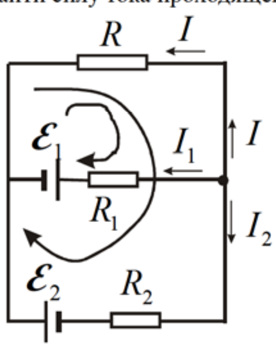
$$+\begin{cases} I_1R_1 = \varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_1, \\ -I_2R_2 = \varphi_2-\varphi_3-\mathcal{E}_2, \Rightarrow \\ -I_3R_3 = \varphi_3-\varphi_1-\mathcal{E}_3, \end{cases}$$

$$\sum_n I_nR_n = \sum_k \mathcal{E}_k$$

9.10

Пример применения правил Кирхгофа

Найти силу тока проходящего через сопротивление R (см. рис.)



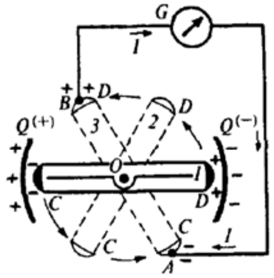
$$\left.\begin{cases} I + I_1 + I_2 = 0, \\ -I\,R + I_1R_1 = -\mathcal{E}_1, \times R_2 \\ -I\,R + I_2R_2 = \mathcal{E}_2, \times R_1 \end{cases}\right\} + \Rightarrow$$

$$-IR(R_1+R_2) + R_1R_2(-I) = $$
$$= -\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R(R_1+R_2)+R_1R_2};$$

9.11

Примеры источников тока (ЭДС)

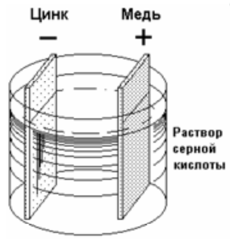


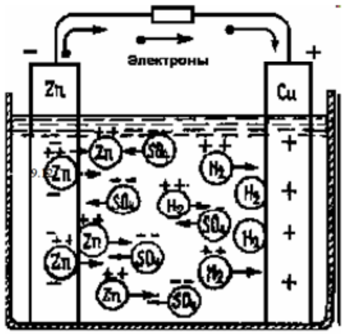
111

Схема электростатической машины

9.12

Гальванический элемент Вольта

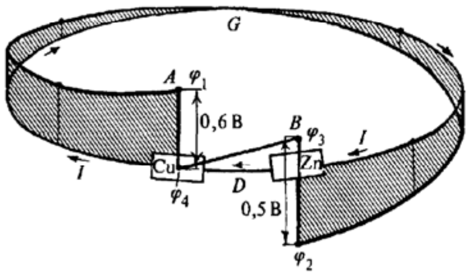




Л. Гальвани (1791) открыл электрический ток в мышцах лягушки. А. Вольт (1792) правильно объяснил происхождение этого тока и создал химический элемент тока.

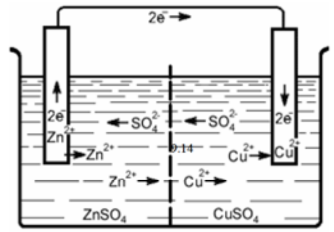
9.13

Изменение потенциала в цепи с гальваническим элементом.



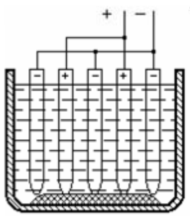
9.14

Элемент Даниэля-Якоби



9.15

Свинцово- кислотный аккумулятор



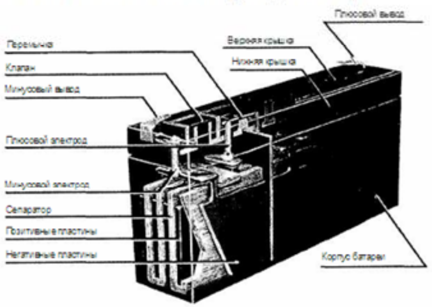


Рис. 3.2. Устройство VRLA батареи Panasonic

Решетчатые свинцовые пластины, заполненые пастой PbO, помещаются в 30% раствор H_2SO_4

9.16

Происходит реакция

$PbO + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O$.

При зарядке ионы H^+, двигаясь к катоду, приводят к реакции

$PbSO_4 + 2H = Pb + H_2SO_4$.

Ионы SO_4^{2-}, достигая анода, вступают в реакцию

$PbSO_4 + SO_4 = Pb(SO_4)_2$,

$Pb(SO_4)_2 + 2H_2O \rightleftarrows 2PbO_2 + 2H_2SO_4$.

При разрядке на свинцовом катоде ионы SO_4^{2-} из раствора

$Pb + SO_4 = PbSO_4$.

На аноде идет обратимая рекция

$PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightleftarrows Pb(SO_4)_2 + 2H_2O$.

Ионы H^+ из раствора нейтрализуются на аноде и вступают в реакцию

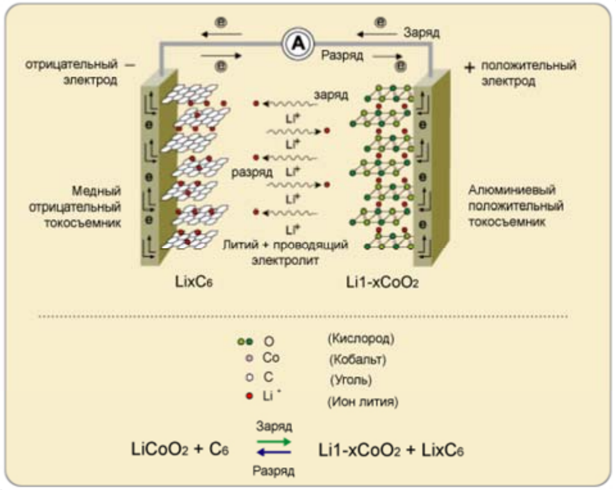
$Pb(SO_4)_2 + 2H = PbSO_4 + H_2SO_4$.

9.17

Li-Ion - литий-ионные аккумуляторы.

- **Литий - наиболее химически активный металл. На его основе работают современные источники питания для ноутбуков. Практически все высокоплотные источники питания используют литий в силу его химических свойств.**
- **Килограмм лития способен хранить 3860 ампер-часов. Для сравнения, показатель цинка - 820, свинца - 260.**
- **В литий-ионных элементах ионы лития связаны молекулами графита C6 и литийкобальтоксида (LiCoO2)**

9.18



9.19

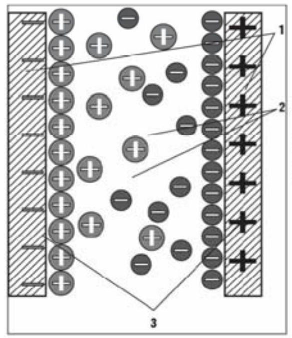
Сравнительные характеристики современных аккумуляторов

Сравнительные характеристики современных источников тока

Источники тока	Энергетическая мощность (Вт*час/кг)	Срок службы (число циклов заряд – разряд)
Свинцово-кислотные аккумуляторы	30	300
Никель-кадмиевые (Ni-Cd)	40-60	1500
Никель-металлгидридные (Ni-MH)	75	500
Ионно-литиевые аккумуляторы (Li-OH)	100	500
Полимерно-литиевые аккумуляторы	175	150

9.20

Суперконденсаторы(ионистеры).

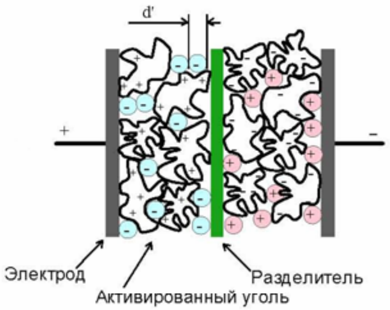


Двойной электрический слой в суперконденсаторе
1 – электроды, 2 – ионы электролита,
3 – область ДЭС

9.21

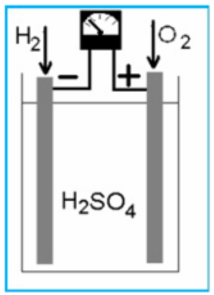
ионистер

С двойным электрическим слоем



9.22

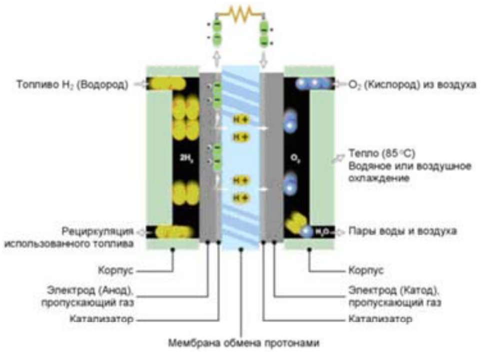
Топливный элемент.



Два пористых (например, платиновых) электрода погружены в электролит (раствор серной или фосфорной кислоты). Через один из них подается водород. При этом молекулы водорода диссоциируют на атомы, которые отдают свои электроны поверхности:
H2 = 2H; H – e- = H+.
Через поры второго электрода подается кислород. Молекула кислорода, принимая электроны, восстанавливается до воды:
O2 + 4e- + 4H+ = 2H2O.
Если электроды соединить проводником, то между ними потечет ток. Для водородных ТЭ электролитом также может служить раствор щелочи или даже твердый материал. Кроме того, вместо водорода могут использоваться много других видов топлива.

Принцип работы топливного элемента.

........Водородный топливный элемент ТЭ представляет собой электрохимическое устройство, преобразующее энергию реакции соединения водорода с кислородом напрямую в электричество, минуя малоэффективные, идущие с большими потерями, процессы горения. Поэтому у ТЭ энергетический КПД значительно выше, чем у традиционных энергоустановок и может составлять 90%.



.Химические реакции в ТЭ идут на пористых электродах (аноде и катоде), активированных катализатором (обычно на основе платины или других металлов платиновой группы), по следующей схеме. Водород поступает на анод топливного элемента, где его атомы разлагаются на электроны и протоны:

....**H2 = 2e- + 2H+**

.......Электроны поступают во внешнюю цепь, создавая электрический ток. Протоны, в свою очередь, проходят сквозь протонообменную мембрану на катодную сторону, где с ними соединяется кислород и электроны из внешней электрической цепи с образованием воды:

....**4H+ + 4e- + O2 = 2H2O**

........Побочными продуктами реакции, таким образом, являются тепло и водяной пар. Напряжение, возникающее при этом на единичном ТЭ, обычно не превышает 1,1 В. Для получения необходимой величины напряжения ТЭ соединяются последовательно в батареи, а для получения необходимого тока батареи ТЭ соединяются параллельно. Такие батареи ТЭ вместе с элементами газораспределения и терморегулирования монтируются в единый конструктивный блок, называемый электрохимическим генератором. Сердцем ТЭ является протонообменная мембрана. Обычно ***протонообменная мембрана*** представляет собой пленку из полимера, сочетающего гидрофобную основную цепь и боковые фрагменты, содержащие кислотные группы (гидрофильная часть). Если в мембране присутствует вода, она собирается вблизи кислотных групп и образует гидратную область с линейным размером порядка 1 нм. Именно в этой области и образуются различные гидратированные формы протона, способные свободно перемещаться. Гидрофобная же часть полимера содержит алифатические, ароматические, фторированные или нефторированные фрагменты и образует прочный каркас, обеспечивающий механическую прочность мембраны. Наибольшее распространение в настоящее время получили перфторированные полимерные мембраны типа ***Nafion***, разработанные компанией DuPont, которые считаются «классическими» мембранами для топливных элементов. Такие мембраны обладают высокой механической прочностью, великолепной химической стойкостью и высокой протонной проводимостью. Подробнее о мембранах Nafion Вы можете прочитать в разделе.

Типы топливных элементов

Тип топливного элемента	Реакция на аноде	Электролит	Реакция на катоде	Температура, °C
Щелочной ТЭ (англ. *Alkaline fuel cells — AFC*)	$2H_2 + 4OH^- \to 2H_2O + 4e^-$	Раствор KOH	$O_2 + 2H_2O + 4e^- \to 4OH^-$	200
ТЭ с протонно-обменной мембраной(англ. *Proton-exchange membrane fuel cell — PEMFC*)	$2H_2 \to 4H^+ + 4e^-$	Протонно-обменная мембрана	$O_2 + 4H^+ + 4e^- \to 2H_2O$	80
Метанольный ТЭ (англ. *Direct-methanol fuel cell — DMFC*)	$2CH_3OH + 2H_2O \to 2CO_2 + 12H^+ + 12e^-$	Протонно-обменная мембрана	$3O_2 + 12H^+ + 12e^- \to 6H_2O$	60
ТЭ на основе ортофосфорной кислоты(англ. *Phosphoric-acid fuel cells — PAFC*)	$2H_2 \to 4H^+ + 4e^-$	Раствор фосфорной кислоты	$O_2 + 4H^+ + 4e^- \to 2H_2O$	200
ТЭ на основе расплавленного карбоната(англ. *Molten-carbonate fuel cells — MCFC*)	$2H_2 + 2CO_3^{2-} \to 2H_2O + 2CO_2 + 4e^-$	Расплавленный карбонат	$O_2 + 2CO_2 + 4e^- \to 2CO_3^{2-}$	650
Твердотельный оксидный ТЭ (англ. *Solid-oxide fuel cells — SOFC*)	$2H_2 + 2O_2^- \to 2H_2O + 4e^-$	Смесь оксидов	$O_2 + 4e^- \to 2O_2^-$	1000

Метанольный топливный элемент в Mercedes Benz Necar 2
Основные типы топливных элементов[3]

Лекция 10.

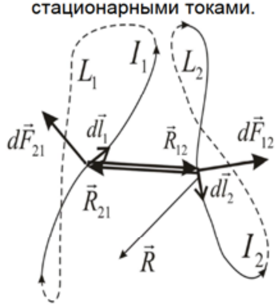
- Электромагнетизм. Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.
- Действие магнитного поля на ток. Закон Ампера.
- Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции. Вихревой характер магнитного поля. Уравнение div **B** = 0. Понятие о векторном потенциале.

Магнитное взаимодействие.

- Исторически под магнитным взаимодействием понималось взаимодействие между намагниченным телом (намагниченный кусок железа) с другими железными телами. В 1820 году Х.К.Эрстед обнаружил, что магнитное взаимодействие может оказывать электрический ток. Поэтому под магнитными взаимодействиями понимается взаимодействие межу токами, магнитными телами, токами и магнитными телами. В рамках представлений близкодействия это взаимодействие осуществляет магнитное поле. Почти одновременно с Эрстедом Закон взаимодействия стационарных токов был открыт благодаря исследованиям Ампера, Био, Савара и Лапласа.

Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока.

- Магнитостатика изучает законы взаимодействия между неподвижными магнитными телами и проводниками со стационарными токами.



$Id\vec{l}_1$ - элемент тока.

$$d\vec{F}_{21} = k\frac{[I_1 d\vec{l}_1,[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3};$$

$$d\vec{F}_{12} = k\frac{[I_2 d\vec{l}_2,[I_1 d\vec{l}_1,\vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

$$\vec{F}_{21} = k\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{[I_1 d\vec{l}_1,[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3};$$

$$\vec{F}_{12} = \oint_{L_2}\oint_{L_1} k\frac{[I_2 d\vec{l}_2,[I_1 d\vec{l}_1,\vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

Отметим, что $d\vec{F}_{21} \neq -d\vec{F}_{12}$, однако для замкнутых токов $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

В абсолютной магнитной (электромагнитной) системе единиц СГСМ единица силы тока или заряда вибирается из условия $k = 1$ и обозначается $1СГСМ_I$. Отношение $\frac{1СГСЭ_I}{1СГСМ_I} = c$ - электродинамическая постоянная, равная скорости света $c = 3\cdot 10^{10}$ см/с. В системе единиц СИ $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{Н}{А^2}$.

$$d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, \underbrace{k\frac{[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}}_{d\vec{B}_2}]; \quad d\vec{F}_{12} = [I_2 d\vec{l}_2, \underbrace{k\frac{[I_1 d\vec{l}_1,\vec{R}_{12}]}{R_{12}^3}}_{d\vec{B}_1}].$$

Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.

С точки зрения полевой трактовки взаимодействия токов величину

$$d\vec{B}_2 = k\frac{[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}$$

можно интерпретировать как силовую характеристику магнитного поля, создаваемого элементом тока $I_2 d\vec{l}_2$ в пространственной точке, определяемой $\vec{R}_{21}$. Эта величина называется вектором индукции магнитного поля элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$.

В произвольной точке пространства $\vec{R}$ элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$ создает магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, равной

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}]}{R^3}.$$

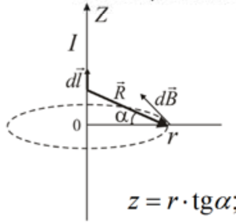
Эта формула получила название закона Био-Савара-Лапласа.

Величина индукции магнитного поля $\vec{B}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$, создаваемого током всего контура L_2, согласно принципу суперпозиции равна

$$\vec{B}_2 = \sum d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_2}\frac{[I_2 d\vec{l}_2,\vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}.$$

Тогда **сила действия магн. поля $\vec{B}_2$ на элемент тока** $I_1 d\vec{l}_1$ равна: $d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, \vec{B}_2]$ - **закон Ампера** (сила Ампера).

Пример расчета индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа.



$$|d\vec l| = dz,\quad d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[Id\vec l,\vec R]}{R^3};$$

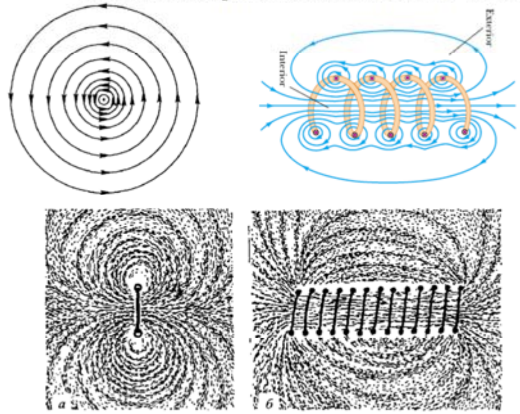
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz\cdot R\cdot \overbrace{\sin(\alpha+90^0)}^{\cos\alpha}}{R^3}.$$

$$z = r\cdot \mathrm{tg}\,\alpha;\quad dz = r\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha;\quad R\cos\alpha = r.$$

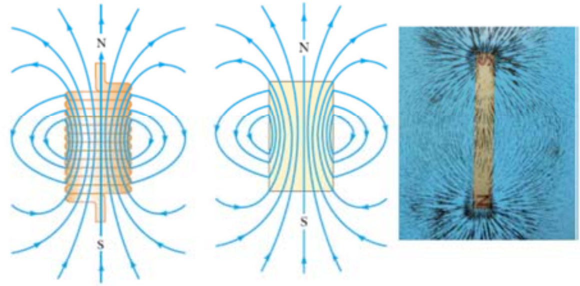
$$B=\int dB = 2\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^\infty \frac{R\cos\alpha}{R^3}dz = 2\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{R^2}r\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha =$$

$$= 2\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{r}d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r};$$

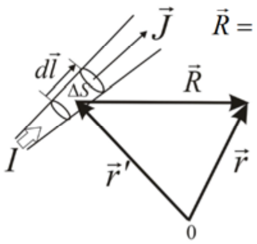
Линии индукции магнитного поля



Линии магнитной индукции соленоида и полосового магнита идентичны.



Закон Био-Савара-Лапласа для элемента объемного тока.



$$\vec R = \vec r - \vec r',\quad Id\vec l = \vec J\underbrace{\Delta S dl}_{\Delta V} = \vec J\Delta V.$$

$$d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec l,\vec R]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec J(\vec r'),\vec R]}{R^3}\Delta V;$$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec J(\vec r'),\vec r-\vec r']}{|\vec r-\vec r'|^3}dV'.$$

Векторный потенциал магнитного поля тока.

$$\nabla_{\vec r}\frac{1}{\underbrace{R}_{|\vec r-\vec r'|}} = -\frac{\vec R}{|R|^3};\quad \left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}} =\\ &= -\frac12\frac{2(x-x')}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\end{aligned}\right)$$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\vec J(\vec r'),\frac{\vec R}{|R|^3}\right]dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\nabla_{\vec r}\frac1R,\vec J(\vec r')\right]dV'$$

$$\left[\nabla_{\vec r}\frac1R,\vec J(\vec r')\right] = \begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac1R & \frac{\partial}{\partial y}\frac1R&\frac{\partial}{\partial z}\frac1R\\ J_x&J_y&J_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{J_x}{R}&\frac{J_y}{R}&\frac{J_z}{R}\end{vmatrix} = \left[\nabla,\frac{\vec J}{R}\right] = \mathrm{rot}_{\vec r}\frac{\vec J}{R};$$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}_{\vec r}\frac{\vec J}{R}dV' = \mathrm{rot}_{\vec r}\underbrace{\int_V\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J}{R}dV'}_{\vec A(r)} = \mathrm{rot}\,\vec A;$$

$$\vec A(r) = \int_V\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J}{R}dV' -$$ (векторный потенциал магнитного поля $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$.)

1) Представление $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$ неоднозначно,

$\vec A' = \vec A + \mathrm{grad}\,\varphi$, так как $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)\equiv 0$.

Вихревой характер магнитного поля.

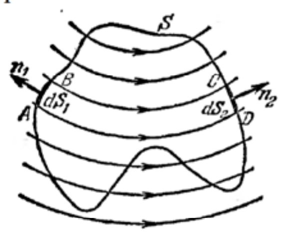
2) $\mathrm{div}\vec B = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec A)\equiv 0$, так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\equiv 0,$$

то есть магнитное поле вихревое поле.

По формуле Гаусса

$$\oint_{S_V}\vec B d\vec S = \int_V \mathrm{div}\vec B\cdot dV = 0.$$



3) $$\mathrm{div}_{\vec r}\vec A = \mathrm{div}_{\vec r}\int_V\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{div}_{\vec r}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(-\mathrm{div}_{\vec r'}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}+\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\underbrace{\mathrm{div}_{\vec r'}\vec J(\vec r')}_{0\ \text{для стационарного тока}}\right)dV' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S_V}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}d\vec S' = 0,\ \text{так как } J_n = 0.$$

Имеем div A=0.

Уравнение для векторного потенциала

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'.$$ Какому диффернциальному уравнению удовлетворяет эта функция?

Аналогия с электростатикой

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV';\ \Rightarrow\ \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

$$A(\vec r)_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J(\vec r')_x}{|\vec r-\vec r'|}dV';\Rightarrow\ \Delta A_x = -\mu_0 J_x;$$

$$\Delta\vec A = -\mu_0\vec J.$$

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме.

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{A}}_{0}-\underbrace{\Delta\vec{A}}_{-\mu_0\vec{J}}=\mu_0\vec{J};$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{J}.$$ Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

По формуле Стокса

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{S_L}\operatorname{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\mu_0\int_{S_L}\vec{J}\cdot d\vec{S}=\mu_0\sum_{S_L}I;$$

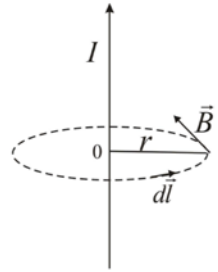
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_{S_L}\vec{J}\cdot d\vec{S};$$ Интегральная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

Система полевых уравнений магнитостатики в вакууме в дифференциальной и интегральной формах.

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{B}=0,\\ \operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{J}.\end{cases}\qquad \begin{cases}\int_{S_V}\vec{B}d\vec{S}=0,\\ \oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_{S_L}\vec{J}\cdot d\vec{S}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0},\\ \operatorname{rot}\vec{E}=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\int_{S_V}\vec{E}d\vec{S}=\dfrac{\int_V\rho dV}{\varepsilon_0},\\ \oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=0.\end{cases}$$ Система полевых уравнений электростатики в вакууме

Пример решения задач магнитостатики с помощью теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

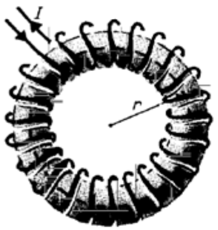


$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{S_L}I;$$

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 I;$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

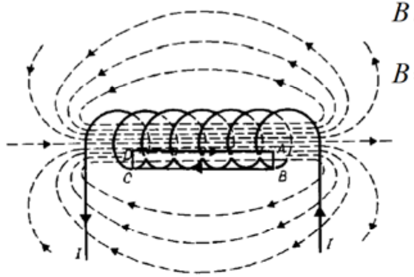
Магнитное поле тороида



$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 N I;$$

$$B=\mu_0\frac{N}{2\pi r}I=\mu_0 n I.$$

Магнитное поле соленоида



$$\oint_{ABCL}\vec{B}d\vec{l}=\mu_0 N I;$$

$$Bl=\mu_0 N I;$$

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I=\mu_0 n I.$$

Релятивистская природа магнитных взаимодействий на примере взаимодействия двух однородно заряженных тонких бесконечных стержней.

$$E=\frac{1}{2\pi R}\frac{\gamma_2}{\varepsilon_0};$$

$$f_K=\gamma_1\cdot E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R};$$

$$I_1=\gamma_1 V;\ I_2=\gamma_2 V;$$

$$B_1=\frac{1}{2\pi R}\mu_0 I_1;\ B_2=\frac{1}{2\pi R}\mu_0 I_2;$$

$$f_A=I_1B_2=I_1\frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}V^2;\quad f=f_K-f_A=$$

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}V^2=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}(1-\varepsilon_0\mu_0V^2)<f_K;$$

На самом деле из-за релятивистских эффектов $f_K'>f_K$,

так как $l=l_0\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, то $\gamma_1'=\dfrac{\gamma_1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}};\ \gamma_2'=\dfrac{\gamma_2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$

$$f=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}\frac{(1-\varepsilon_0\mu_0V^2)}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}.$$ Если $\varepsilon_0\mu_0=\dfrac{1}{c^2}$,

то $f=f_K'-f_A=f_K$.

$$f_A=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}V^2=\underbrace{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_1\gamma_2}{R}}_{f_K}\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{\frac{1}{c^2}}V^2=f_K\frac{V^2}{c^2}.$$

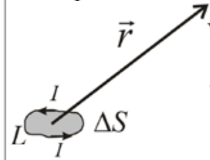
Сила Ампера является релятивистской поправкой $\sim V^2/c^2$ к статической силе Кулона.

Лекция 11.

- Элементарный ток и его магнитный момент. Поле элементарного тока. Магнитное поле движущегося заряда. Силы, действующие на токи в магнитном поле. Определение единицы силы тока — ампера. Элементарный ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла.

Элементарный ток и его магнитный момент. Векторный потенциал элементарного тока.

Элементарный ток - это линейный замкнутый ток, обтекающий поверхность с бесконечно малыми линейными размерами.



Учитывая, что для линейного тока $\vec{J}dV=Id\vec{l}$

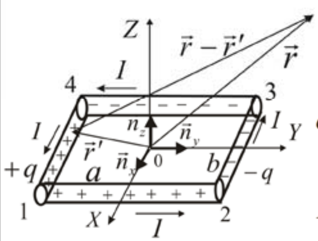
$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Id\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|};\quad A(\vec{r})_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Idl_x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\int_L\frac{Idl_x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\ \text{где}\ c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0};$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{\gamma(\vec{r}')dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|};$$

Функция $A(\vec{r})_x$ равна $\varphi(\vec{r})$ при $\gamma(\vec{r}')dl'=Idl_x'/c^2$.

Выберем контур элем. тока в виде прямоугольника со сторонами a и b.



$$q_{14}=\frac{I}{c^2}b;\quad q_{23}=-\frac{I}{c^2}b;$$

$$\vec p_q^{\,1}=-q_{14}a\,\vec n_y=-\frac{I}{c^2}\underbrace{ba}_{S}\,\vec n_y=$$

$=-\frac{p_m}{c^2}\vec n_y$, где $p_m=IS$ - магнитный момент элементарного тока.

$$A_x=\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p_q^{\,1}\vec r}{r^3}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_m y}{c^2r^3};$$

Аналогично находим:

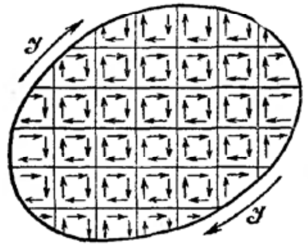
$$A_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_m x}{c^2r^3};\quad A_z=0.$$

Если ввести вектор $\vec p_m=p_m\vec n_z=IS\vec n_z$, то $\vec A=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec p_m,\vec r]}{r^3}$.

Здесь учтено равенство $c^2=1/\varepsilon_0\mu_0$.

Действительно, $\frac{[\vec p_m,\vec r]}{r^3}=\begin{vmatrix}\vec n_x & \vec n_y & \vec n_z\\ 0 & 0 & p_m\\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3}\end{vmatrix}.$

Элементарный ток произвольной формы можно свести к совокупности прямоугольных элем. токов



$$\vec p_m=\sum_n\vec p_n=\sum_n I\vec S_n=$$

$$=I\sum_n\vec S_n=I\vec S.$$

Поле элементарного тока.

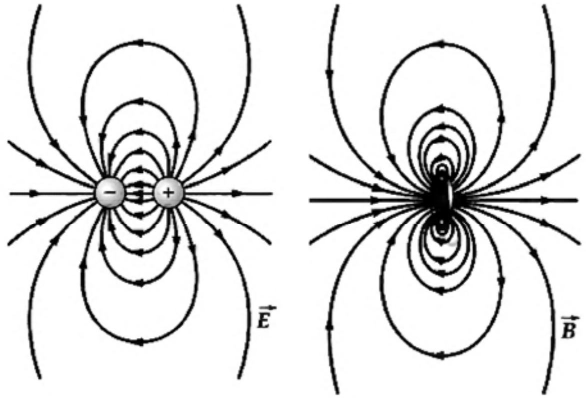
$$\vec B=\operatorname{rot}\vec A=[\nabla,\vec A]=[\underbrace{\nabla}_{\vec a},\frac{\mu_0}{4\pi}[\underbrace{\vec p_m}_{\vec b},\underbrace{\frac{\vec r}{r^3}}_{\vec c}]]=$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec p_m\underbrace{(\nabla\frac{\vec r}{r^3})}_{0}-(\vec p_m\nabla)\frac{\vec r}{r^3});$$

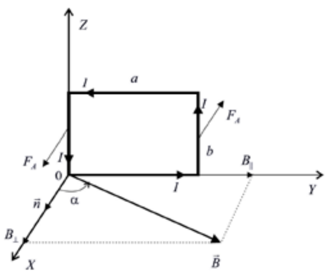
$$(\nabla\frac{\vec r}{r^3})=\frac{(\nabla\vec r)}{r^3}+(\vec r\nabla\frac{1}{r^3})=\frac{3}{r^3}-\frac{(\vec r\cdot 3\vec r)}{r^5}=0.$$

$$(\vec p_m\nabla)\frac{\vec r}{r^3}==\frac{(\vec p_m\nabla)\vec r}{r^3}+\vec r(\vec p_m\nabla)\frac{1}{r^3}=\frac{\vec p_m}{r^3}-\vec r(\vec p_m\frac{3\vec r}{r^5});$$

$$\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec p_m\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec p_m}{r^3}\right).$$



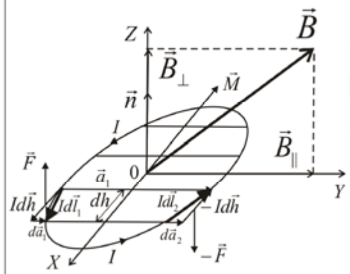
Элементарный ток в магнитном поле.



$$F_A=IbB_{\parallel}=IbB\,\mathrm{Cos}(90-\alpha),$$
$$F_A=IbB\,\mathrm{Sin}(\alpha).$$

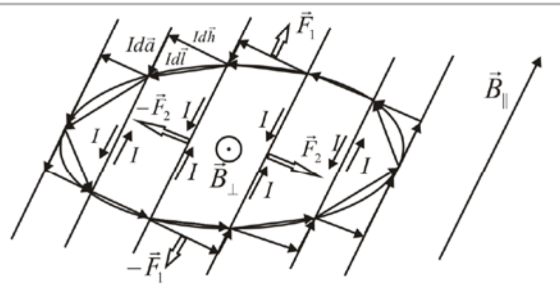
$$M_z=F_A\cdot a=\underbrace{Iab}_{p_m}B\,\mathrm{Sin}(\alpha),$$
$$\vec p_m=Iab\cdot\vec n,$$
$$\vec M=[\vec p_m,\vec B]$$

Элементарный ток в магнитном поле (общий случай).



$$\vec F=[Id\vec l_1,\vec B_{\parallel}]=$$
$$[(Id\vec h+Id\vec a_1),\vec B_{\parallel}]=[Id\vec h,\vec B_{\parallel}];$$
$$-\vec F=[Id\vec l_2,\vec B_{\parallel}]=[-Id\vec h,\vec B_{\parallel}];$$
$$d\vec M=[\vec a_1,\vec F]=[\vec a_1,[-Id\vec h,\vec B_{\parallel}]]=$$
$$=\frac{[\vec n,\vec B_{\parallel}]}{B_{\parallel}}I\underbrace{dha_1}_{\Delta S}B_{\parallel}=[\underbrace{I\Delta S\vec n}_{\Delta\vec p_m},\vec B_{\parallel}];$$

$$\vec M=\sum d\vec M=[I\underbrace{\sum\Delta S}_{S}\vec n,\vec B_{\parallel}]=[\vec p_m,\vec B_{\parallel}];$$

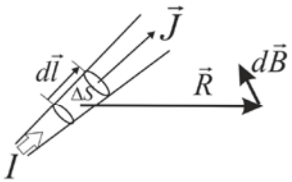


$$\vec M=\sum d\vec M=[I\underbrace{\sum\Delta S}_{S}\vec n,\vec B_{\parallel}]=[\vec p_m,\vec B_{\parallel}]=[\vec p_m,\vec B_{\parallel}+\vec B_{\perp}]=[\vec p_m,\vec B];$$

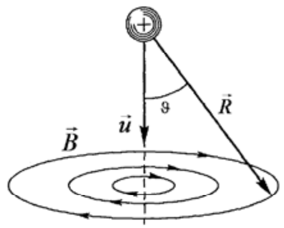
В однородном поле сила, действующая на контур с током, равна

$$\vec F=\sum[Id\vec l,\vec B]=I[\underbrace{\sum d\vec l}_{0},\vec B]=0.$$

Магнитное поле движущегося заряда



$$d\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec J,\vec R]}{R^3}dV;$$
$$\vec J=qn\vec u;$$



$$d\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec u,\vec R]}{R^3}q\underbrace{ndV}_{N};$$
$$\vec B=\frac{d\vec B}{N}=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{[\vec u,\vec R]}{R^3};$$
$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qu\sin\vartheta}{R^2};$$

Движущийся заряд создает элемент тока $q\vec u$.

$$\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{[\vec u,\vec R]}{R^3}=\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{1/c^2}[\vec u,\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec R}{R^3}}_{\vec E}]=\frac{1}{c^2}[\vec u,\vec E];$$

Силы, действующие на токи в магнитном поле. Сила Лоренца.

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l},\vec{B}] = [\vec{J},\vec{B}]dV; \quad \vec{F}_A = I\int_L [d\vec{l},\vec{B}] = \int_V [\vec{J},\vec{B}]dV.$$

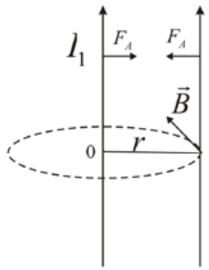
Так как элемент тока движущего заряда $Id\vec{l} = q\vec{u}$, то сила, действующая на движущий заряд в магнитном поле, равна

$$\vec{F} = q[\vec{u},\vec{B}].$$

Если имеется и электрическое поле, то

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u},\vec{B}] -$$ сила Лоренца.

Определение единицы силы тока — Ампера.

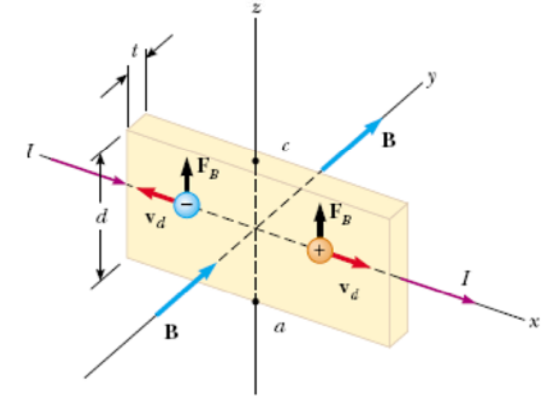


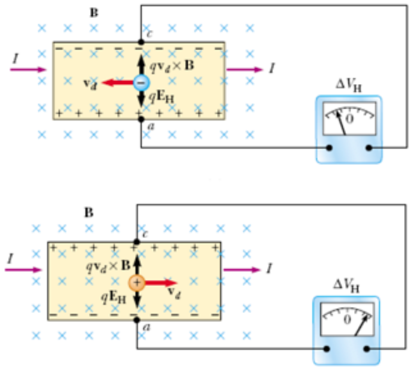
$$F_A = \mu_0 \frac{I_2 I_1}{2\pi r} L;$$

$$2\cdot 10^{-7} Н = \mu_0 \frac{1А\cdot 1А}{2\pi \cdot 1м}\cdot 1м; \Rightarrow$$

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Н}{А^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Гн}{м};$$

Эффект Холла.





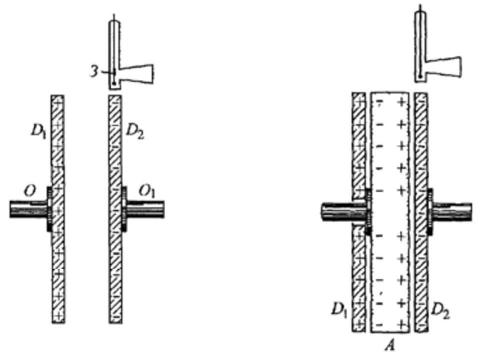
$$qE_H = q\frac{\Delta V_H}{d} = qv_d B;$$

$$\Delta V_H = \frac{\overbrace{qnv_d}^{J}}{qn}Bd =$$

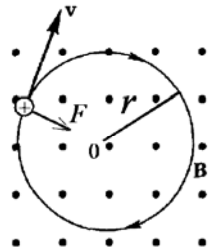
$$= \frac{1}{qn}JBd = RJBd,$$

где $R = \dfrac{1}{qn}$ - постоянная Холла.

Опыты Роуланда и Эйхенвальда. (А.А.Эйхенвальд, 1901 г.)



Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.

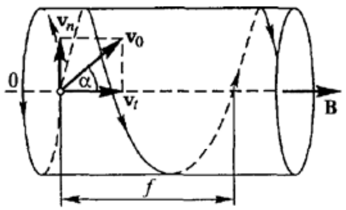


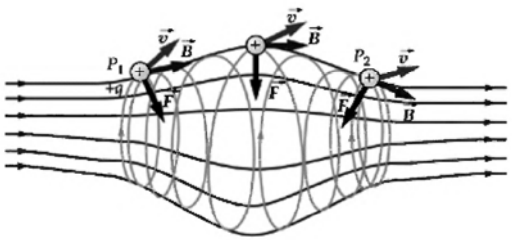
$$F = qvB;$$

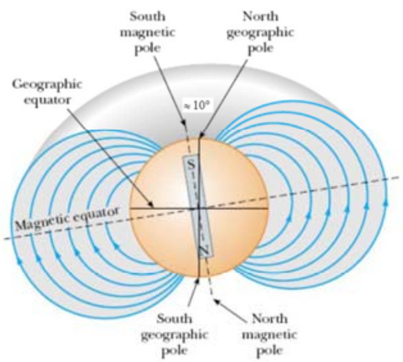
$$m\frac{v^2}{r} = qvB; \Rightarrow r = \frac{mv}{qB};$$

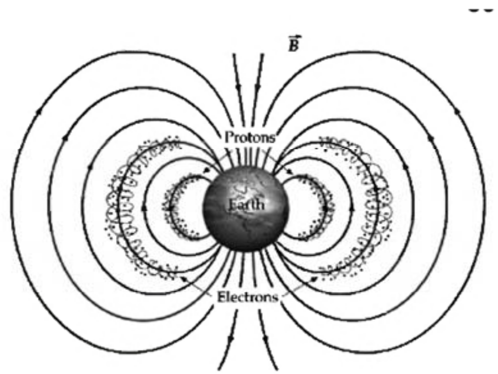
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB};$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m}B.$$

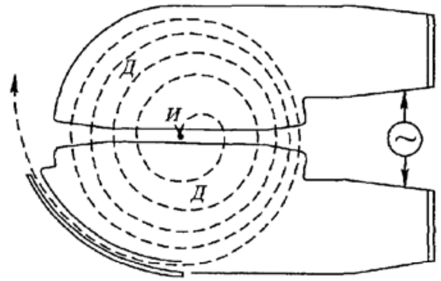








Принцип действия циклотрона



Движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q[v,\vec{B}] = qE_x\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec{i}v_yB - \vec{j}v_xB,$$

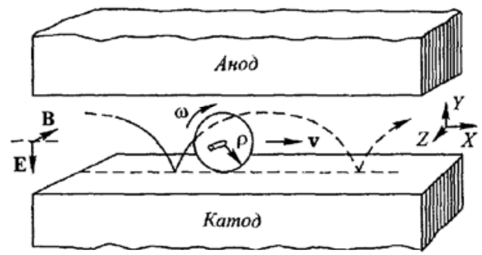
$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE + q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \end{cases} \Rightarrow m\dot{y} = -qx\,B + \underbrace{Const}_{=0},$$

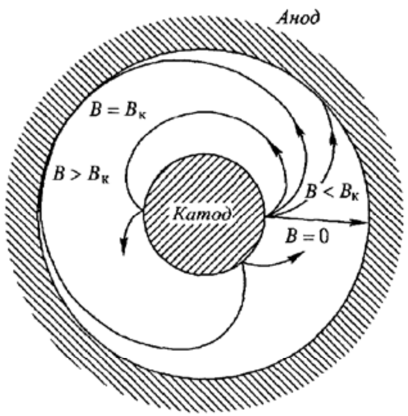
$$\ddot{x} = \frac{q}{m}E - \frac{qB}{m}\frac{qB}{m}x, \Rightarrow \ddot{x} = -\left(\underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega_c}\right)^2 \left(x - \frac{mE}{qB^2}\right),$$

$$x = \frac{mE}{qB^2} + A\text{Sin}\,\omega_c t + D\text{Cos}\,\omega_c t, \text{ при } t = 0, x = \dot{x} = 0.$$

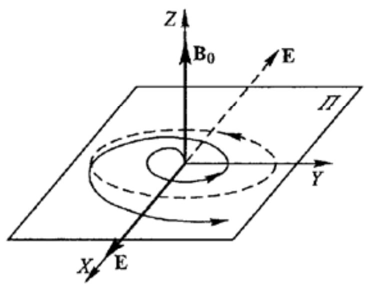
$$D = -\frac{mE}{qB^2}, A = 0; \quad x = \frac{mE}{qB^2}(1 - \text{Cos}\,\omega_c t), \dot{y} = -\frac{E}{B}(1 - \text{Cos}\,\omega_c t).$$

Магнетрон





Циклотронный резонанс.

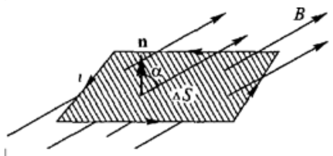


In an experiment designed to measure the magnitude of a uniform magnetic field, electrons are accelerated from rest through a potential difference of 350 V. The electrons travel along a curved path because of the magnetic force exerted on them, and the radius of the path is measured to be 7.5 cm.

Лекция 12.

- **Работа сил Ампера. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Потенциальная функция тока. Взаимодействие двух контуров с током. Коэффициент взаимной индукции двух контуров. Учет собственного поля уединенного контура с током. Коэффициент самоиндукции (индуктивность).**

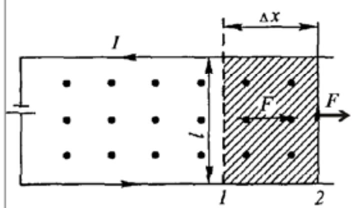
Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток).



$$\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha = \vec{B}\Delta\vec{S} = B_n\Delta S;$$

$$\Phi_S = \int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.



$$F = IlB,$$

$$\Delta A = F\Delta x =$$

$$= IBl\Delta x = I\underbrace{B\Delta S}_{BS_2 - BS_1} =$$

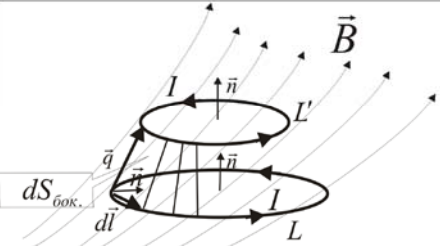
$$I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

Определим потенциальную функцию тока

$U = -I\Phi$, тогда

$\Delta A = F\Delta x = -\Delta U$, из этого соотношения имеем

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$



$$dA = (\vec{q}d\vec{F}) =$$
$$= (\vec{q}\cdot[Id\vec{l},\vec{B}]) =$$
$$= I(\vec{B}\cdot[\vec{q},d\vec{l}\,]) =$$
$$= I(\vec{B}d\vec{S}_{бок.});$$

$$\Delta A = I\oint_{S_{бок}}(\vec{B}d\vec{S}) = I\Delta\Phi_{бок}$$

$$\Phi_L = \int_{S_L}\vec{B}d\vec{S};\ \Phi_{L'} = \int_{S_{L'}}\vec{B}d\vec{S},$$

$$\Phi_L + \Delta\Phi_{бок} = \Phi_{L'};\Rightarrow \Phi_{L'} - \Phi_L = \Delta\Phi_L = \Delta\Phi_{бок}.$$

Имеем $dA = Id\Phi_L = -dU_{I=const}$, где $U = -I\Phi_L$

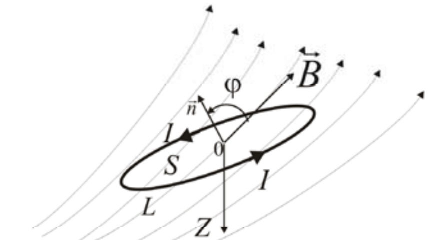
Используя потенциальную или силовую функцию, можно рассчитать обобщенные силы, действующие на контур с током.

$$dA = \sum_{i=1}^{N}F_i d\xi_i = -dU(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N) = -\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right|_{I=const} d\xi_i;$$

$$F_i = -\left.\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right|_{I=const}.$$

Пример

$$dA = M_z d\varphi =$$
$$= -\frac{\partial U}{\partial\varphi}d\varphi;$$
$$U = -I\Phi =$$
$$= -IBS\cos\varphi;$$



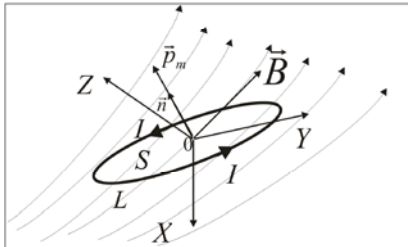
$$M_z = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -\underbrace{IS}_{p_m}B\sin\varphi;\Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m,\vec{B}];$$

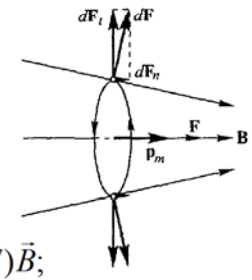
Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Для элементарного тока, когда $I = const$ и $S = const$, потенциальная функция будет равна энергии взаимодействия элементарного тока или магнитного момента с внешним полем

$$W = U = -I\Phi = -ISB\cos\varphi = -p_m B\cos\varphi = -(\vec{p}_m\vec{B});$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x};\\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y};\\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z};\end{aligned}\right\}\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{p}_m\vec{B});$$



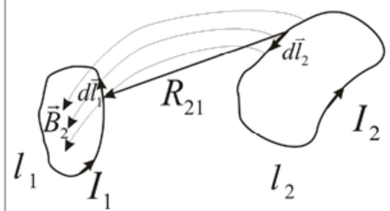


$$[\underbrace{\vec{p}_m}_{a},[\underbrace{\nabla}_{b},\underbrace{\vec{B}}_{c}]] = \nabla(\vec{p}_m\vec{B}) - (\vec{p}_m\nabla)\vec{B};$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m\vec{B}) = (\vec{p}_m\nabla)\vec{B} + [\vec{p}_m,\underbrace{[\nabla,\vec{B}]}_{\mathrm{rot}\vec{B}}];$$

Если $\mathrm{rot}\vec{B} = 0$, то $\vec{F} = (\vec{p}_m\nabla)\vec{B}$.

Коэффициент взаимной индукции двух контуров.

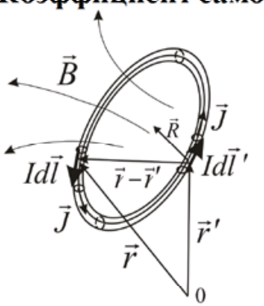


$$\Phi_{12} = \int_{S_{l_1}}\underbrace{\vec{B}_2}_{\mathrm{rot}\vec{A}_2}d\vec{S}_1 =$$
$$= \oint_{l_1}\vec{A}_2 d\vec{l} =$$
$$= \oint_{l_1}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{I_2 d\vec{l}_2}{R_{21}}\right)d\vec{l}_1 = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{R_{21}}\right)}_{L_{12}}I_2 = L_{12}I_2;$$

Аналогично получим

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1,\ \text{где}\ L_{21} = L_{12}.$$

Коэффициент самоиндукции (индуктивность).



$$\Phi = \int_{S_l}\vec{B}d\vec{S} = L\cdot I;\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\frac{I[d\vec{l}',\vec{R}]}{R^3};$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\frac{I[d\vec{l}',(\vec{r}-\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3};$$

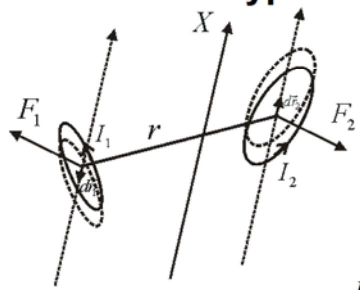
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_V\frac{dV'[\vec{J}(\vec{r}'),(\vec{r}-\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3};$$

Коэффициенты индуктивности контуров с токами.

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2;\quad \Phi_2 = L_{22}I_2 + L_{21}I_1;$$

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j;\quad L_{ij} = L_{ji};$$

Взаимодействие двух контуров с током.

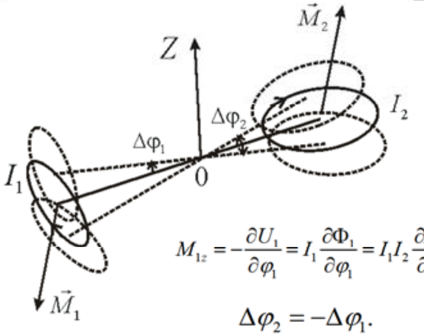


$$F_{2x} = -\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = I_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} = I_2I_1\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2};$$

$$F_{1x} = -\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = I_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} = I_1I_2\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}.$$

$$d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2,\quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}.$$

$$F_{1x} = -F_{2x}.\quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



$$M_{1z} = -\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1},$$

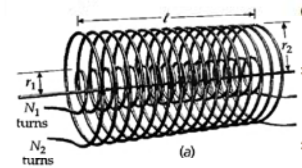
$$\Delta\varphi_2 = -\Delta\varphi_1.$$

$$M_{2z} = -\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial \varphi_2},$$

$$M_{1z} = -M_{2z}. \quad \vec{M}_1 = -\vec{M}_2$$

12.13

Пример задачи на вычисление коэффициентов индуктивности.

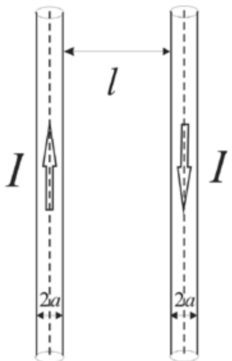


$$\Phi_2 = B_2 N_2 \pi r_2^2 + B_1 N_2 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_2^2 + \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_2 \pi r_1^2 = \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_2 \pi r_2^2}{l}}_{L_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{l}}_{L_{21}} I_1;$$

$$\Phi_1 = B_1 N_1 \pi r_1^2 + B_2 N_1 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_1 \pi r_1^2 + \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_1 \pi r_1^2 = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{12}} I_2; \quad L_{12} = L_{21};$$

12.14

Индуктивность двухпроводной линии из пустотелых проводников.



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I; \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \int_a^{l+a} B\,dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_a^{l+a} \frac{1}{r}\,dr = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right);$$

$$\Phi = 2\Phi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)}_{L} I$$

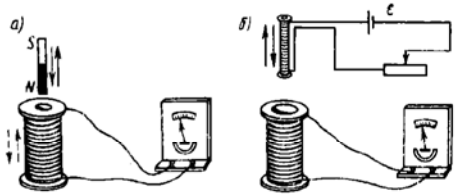
12.15

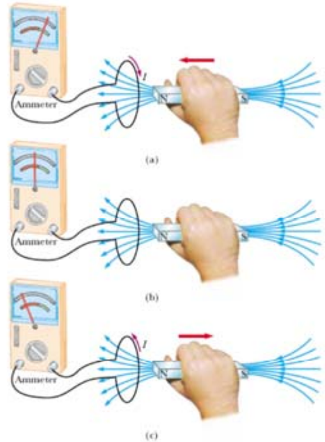
Лекция 13.

- Электромагнитная индукция. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме. Правило Ленца. Индукционные методы измерения магнитных полей. Токи Фуко.
- Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания.
- Магнитная энергия тока. Магнитная энергия системы контуров с током. Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.

Электромагнитная индукция.

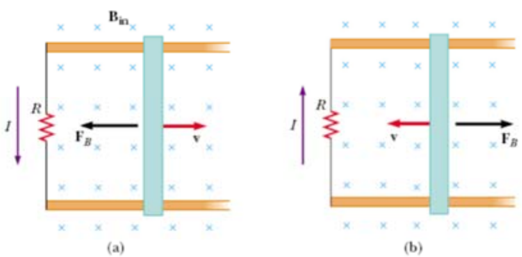
М. Фарадей в 1831 году экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром.

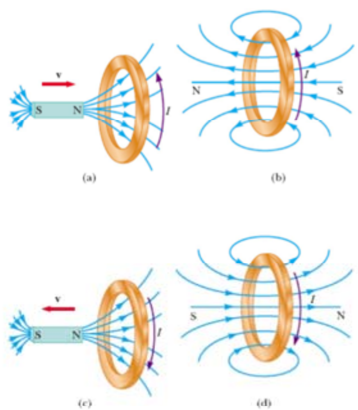




Правило Ленца.

Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. (Э.Х.Ленц (1804-1865) в 1833 году)





Индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в интегральной форме.

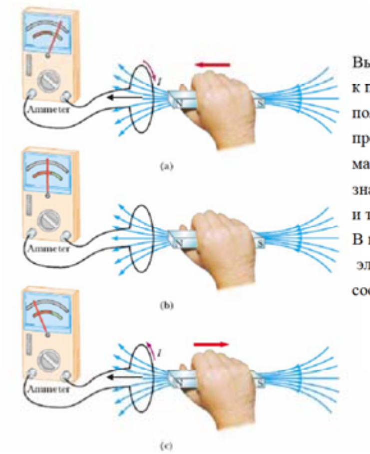
Современную математическую форму закона электромагнитной индукции Фарадея предложил в 1845 году Ф.Э.Нейман (1798-1895).

$$\mathscr{E} = f\frac{d\Phi}{dt},$$

где f - множитель пропорциональности, зависящий от выбора единиц. В системе единиц СИ $f = 1$.

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

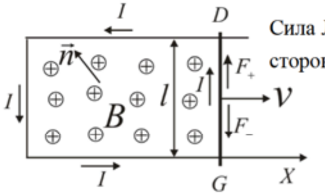
где знак минус согласует знаки ЭДС индукции и изменения потока магнитной индукции.



Выбор положительной нормали к поверхности контура определяет положительное направление проекции вектора индукции магнитного поля (положительное значение потока магнитного поля) и тока (или ЭДС) индукции. В приведенной записи закон электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца.

Вывод формулы для ЭДС индукции:

1) ЭДС индукции в движущихся проводниках.



Сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{v},\vec{B}]$ – сторонняя сила, создающая ЭДС.

$$\vec{E}_{cm.} = \frac{\vec{F}}{q} = [\vec{v},\vec{B}].$$

$$\mathscr{E}^{инд.} = \int_G^D \vec{E}_{cm.} d\vec{l} = \int_G^D ([\vec{v},\vec{B}]\cdot d\vec{l}) = vBl = \frac{d(xBl)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt};$$

Знак минус означает, что $\vec{n}$ и $\vec{B}$ противоположны по направлению, то есть $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos 180° = -BS$.

2)Вывод формулы для ЭДС индукции из закона сохранения энергии (Метод Гельмгольца).

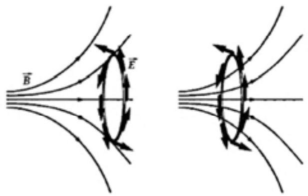
Пусть виток с током движется в стационарном магнитном поле. Тогда амперовы силы совершают работу: $\Delta A = I\Delta\Phi$, и в контуре выделится джоулево тепло: $\Delta Q = I^2R\Delta t$. Источником этой работы и тепловой энергии является ЭДС строниих сил в контуре

$$\mathscr{E}\cdot I\Delta t = \Delta Q + \Delta A = I^2R\Delta t + I\Delta\Phi;\ \Rightarrow\ I = \frac{1}{R}\left(\mathscr{E} - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right);$$

Следовательно, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}^{инд.} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме.



Максвелловская трактовка электромагнитной индукции.

$$\mathscr{E}^{инд.} = \oint_L \vec{E}d\vec{l};\quad \Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

По формуле Стокса $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S}.\Rightarrow$

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S};\ \Rightarrow \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Непотенциальность индукционного электрического поля.

Так как $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$, то $\mathrm{rot}\vec{E} \neq 0$.

Следовательно, $\vec{E} \neq -\mathrm{grad}\varphi$ и $\oint_L \vec{E}d\vec{l} \neq 0$.

Векторный и скалярный потенциал нестационарного электромагнитного поля.

В нестационарном случае магнитное поле остается вихревым, то есть $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Следовательно, $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Тогда, по закону электромагнитной индукции,

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = -\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A};\Rightarrow$$

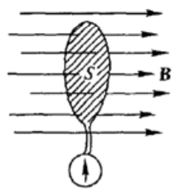
$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0;\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi,\ \text{то есть}\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Выбор потенциалов φ и $\vec{A}$ неоднозначен (калибровочные преобразования)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi,\quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t};\quad \vec{E} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} =$$

$$= -\nabla\varphi + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Индукционные методы измерения магнитных полей.



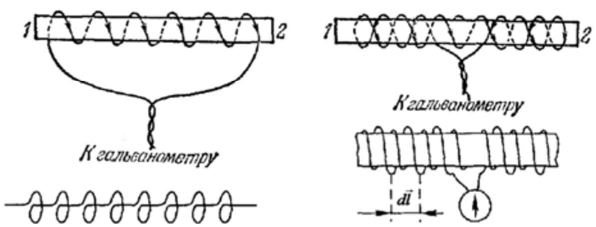
Принцип флюксметра

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt};\ q = \int I dt = -\frac{1}{R}\int_\Phi^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}.$$

На этом соотношении основано определение единицы магнитного потока в системе СИ: Вебер - магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.

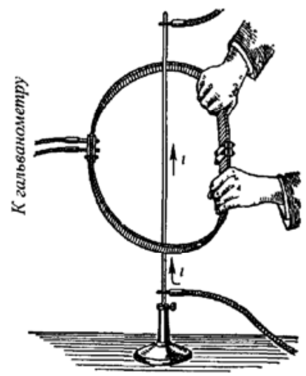
Отсюда следует определение единицы СИ для магнитной индукции: Тесла - магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Вб.

Пояс Роговского

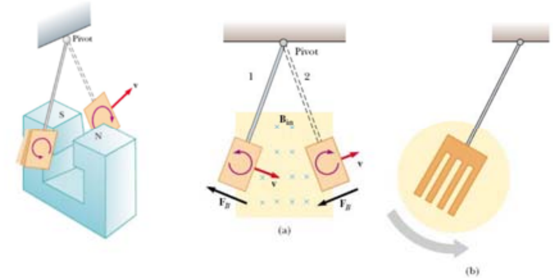


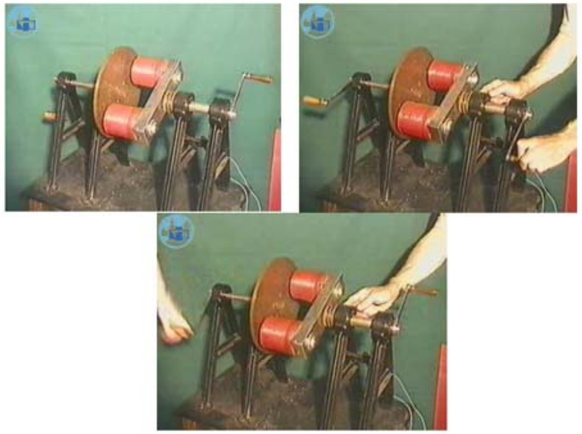
$$\Phi = \int_1^2 Sn\vec{B}d\vec{l} = Sn\int_1^2 \vec{B}d\vec{l};\Rightarrow \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{R}{Sn}q = aq,$$

где a - постоянная баллистического гальванометра.



Токи Фуко (вихревые токи).





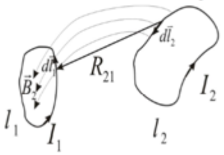
Магнитная энергия тока.

$$dA = -\mathscr{E}^{инд.} Idt = \frac{d\Phi}{dt} Idt = Id\Phi;$$

$$\Phi = LI; \Rightarrow dA = dW = I \cdot LdI = d\left(\frac{LI^2}{2}\right);$$

$$W = L\int_0^I IdI = \frac{LI^2}{2};$$

Магнитная энергия системы контуров с током.



$$dW_1 = I_1 d\Phi_1 = I_1 d(L_{11}I_1 + L_{12}I_2);$$

$$dW_2 = I_2 d\Phi_2 = I_2 d(L_{22}I_2 + L_{21}I_1);$$

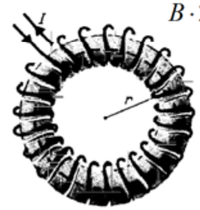
$$dW = dW_1 + dW_2 = L_{11}d(\frac{I_1^2}{2}) +$$

$$+ L_{12}I_1 dI_2 + L_{22}d(\frac{I_2^2}{2}) + L_{21}I_2 dI_1 = d(\frac{L_{11}I_1^2}{2}) +$$

$$+ \frac{d(L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1)}{2} + d(\frac{L_{22}I_2^2}{2}) = d(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}I_iI_j);$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} L_{ij}I_iI_j;$$

Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.



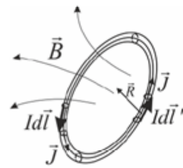
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I; \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n I.$$

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} SN = LI;$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} BSN \cdot I =$$

$$= \frac{1}{2} BSN \cdot \frac{B 2\pi r}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0} \underbrace{S 2\pi r}_{V}; \quad w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0};$$

Строгий вывод



$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} I \int_{S_l} \underbrace{\vec{B}}_{\mathrm{rot}\vec{A}} d\vec{S} =$$

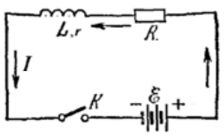
$$= \frac{1}{2} I \oint_l \vec{A} d\vec{l} = (Id\vec{l} = \vec{J}dV) = \frac{1}{2}\oint_V \vec{A}\vec{J}dV =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_\infty \vec{A}\vec{J}dV = \frac{1}{2}\oint_\infty \vec{A}\frac{\mathrm{rot}\vec{B}}{\mu_0}dV = \frac{1}{2\mu_0}\oint_\infty (\vec{B}\cdot \underbrace{\mathrm{rot}\vec{A}}_{\vec{B}} - \underbrace{\mathrm{div}[\vec{A},\vec{B}]}_{\oint\limits_{S_{R\to\infty}} [\vec{A},\vec{B}]d\vec{S} \to 0})dV;$$

$$(\underbrace{\nabla \cdot [\vec{A},\vec{B}]}_{\mathrm{div}[\vec{A},\vec{B}]}) = (\underbrace{\vec{B}\cdot[\nabla,\vec{A}]}_{\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}}) - (\underbrace{\vec{A}\cdot[\nabla,\vec{B}]}_{\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}});$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\oint_\infty \vec{B}\vec{B}\cdot dV = \oint_\infty w dV, \text{ где } w = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0};$$

Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания. [3,§68]



$$IR + Ir = \mathscr{E} - L\frac{dI}{dt};$$

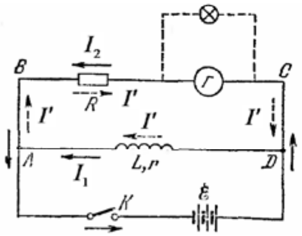
$$L\frac{dI}{dt} = \mathscr{E} - I(R+r); \Rightarrow L\frac{dI}{-\mathscr{E} + I(R+r)} = -dt;$$

$$\frac{(R+r)dI}{-\mathscr{E} + I(R+r)} = -\frac{(R+r)}{L}dt; \Rightarrow \ln(|I(R+r) - \mathscr{E}|) = -\frac{(R+r)}{L}t + C;$$

При $t = 0,\ I = 0,$ тогда $C = \ln\mathscr{E}.$ $\quad I(R+r) = \mathscr{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$

где $\tau = \frac{L}{R+r}$ - время установления тока.

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r} \underbrace{- \frac{\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{R+r}}_{\text{экстраток замыкания}}.$$



После установления тока

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

После размыкания ключа

$$I'r + I'R = -L\frac{dI'}{dt};$$

$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{r+R}{L}dt;$$

$\ln I' = -\frac{r+R}{L}t + C.$ При $t = 0$ $C = \ln I_0$, где $I_0 = I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r}.$

$I' = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathscr{E}}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}; \Rightarrow U = I'R = \frac{R}{r}\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ – экстраток

размыкания.

Лекция 14.

- Магнетики. Понятие о молекулярных токах. Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами. Вектор напряженности магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества. Материальное уравнение для векторов магнитного поля.
- Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля. Магнитная защита. Влияние формы магнетика на его намагниченность.
- Силы, действующие на магнетики в магнитном поле.

Магнетики. Понятие о молекулярных токах.

- Магнетиками называются вещества, которые при внесении их во внешнее магнитное поле сами становятся источниками магнитного поля. В этом случае говорят, что вещество намагничивается. Полная индукция магнитного поля равна векторной сумме внешнего магнитного поля и поля порожденного магнетиком.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

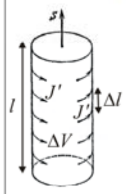
Согласно гипотезе Ампера, внешнее магнитное поле индуцирует в магнетике молекулярные токи, которые и порождают доплнительное магнитное поле $\vec{B}'$.

$$\Delta V \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}'), \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0. \end{cases}$$ – Уравнения магнитостатики с учетом молекулярных токов.

Для характеристики намагниченности магнетика вводят понятие вектора намагниченности $\vec{I}$.

$$\vec{p}_1 = I_1\vec{S}_1, \vec{p}_2 = I_2\vec{S}_2, \vec{p}_3 = I_3\vec{S}_3, \cdots \qquad \vec{I} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\vec{p}_i \;.$$

Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами.

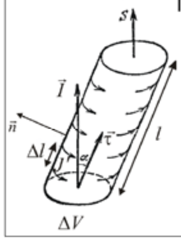


$$I' = J' \cdot l,$$

где J' – поверхностная плотность мол. тока.

Магнитный момент этого цилиндра равен

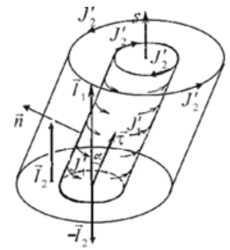
$$\left|\vec{I}\right| \cdot \Delta V = \sum_{\Delta l} \underbrace{J'\Delta l}_{\Delta I'} \cdot S = J' \cdot \underbrace{l \cdot S}_{\Delta V}; \Rightarrow J' = \left|\vec{I}\right|.$$



$$\sum_{\Delta l} J'\Delta l \cdot S = J' \cdot l \cdot S = \left|\vec{I}\right| \cdot \underbrace{\Delta V}_{l\cos\alpha \cdot S}; \Rightarrow$$

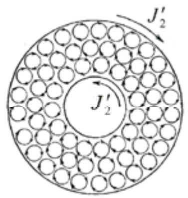
$$\Rightarrow J' = \left|\vec{I}\right|\cos\alpha = \vec{I} \cdot \vec{\tau} = I_\tau.$$

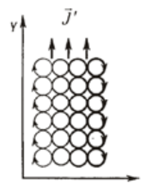
$$\vec{J}' = [\vec{I}, \vec{n}].$$

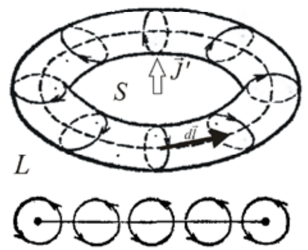


Плотность поверхностного молекулярного тока на границе двух магнетиков

$$\vec{J}' = [(\vec{I}_1 - \vec{I}_2), \vec{n}]$$







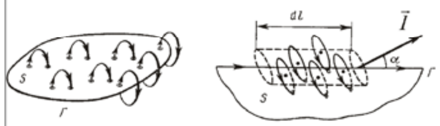
Если вещество намагниченно неоднородно, то возникают объемные молекулярные токи.

$$I' = \int_{S_L} \vec{J}' d\vec{S} = \oint_L \underbrace{J'_{пов.} dl}_{\vec{I}d\vec{l}} =$$

$$= \oint_L \vec{I} d\vec{l} = \int_{S_L} \mathrm{rot}\vec{I} \cdot d\vec{S};$$

$$dI' = J'_{пов.} dl = \vec{I}\vec{\tau} dl = \vec{I} d\vec{l};$$

$$\vec{J}' = \mathrm{rot}\,\vec{I}.$$



Вектор напряженности магнитного поля.

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}') = \mu_0(\vec{J} + \mathrm{rot}\vec{I}); \Rightarrow$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right) = \vec{J}; \Rightarrow \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J},$$ где

$$\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right)$$ – вектор напряженности магнитного поля.

Материальное уравнение для векторов магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества.

$\vec{I} = \vec{I}(\vec{B})$, но $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}); \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$. Имеем $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ или $\vec{I} = \vec{I}(\vec{H})$ - материальные уравнения.

Для изотропных сред $\vec{I} = \chi \cdot \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость.

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0\underbrace{(1+\chi)}_{\mu}\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$, где $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость (относительная магнитная проницаемость).

$$I_i = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} H_j,$$

где χ_{ij} - тензор магнитной восприимчивости.

Индукция магнитного поля в однородном, изотропном и бесконечном магнетике.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}, \\ \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rot}\dfrac{\vec{B}}{\mu} = \mu_0\vec{J}, \\ \mathrm{div}\dfrac{\vec{B}}{\mu} = 0. \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{B}_{вакуум}$$

Из первого уравнения следует, что $\vec{H}$ в однородном бесконечном магнетике такое же, что и в вакууме.

Система полевых уравнений магнитостатики в магнитных средах.

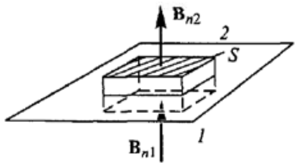
$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}, \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{S_L} \mathrm{rot}\vec{H}d\vec{S} = \int_{S_L} \vec{J}d\vec{S}, \\ \int_V \mathrm{div}\vec{B}dV = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J}d\vec{S}, \\ \oint_{S_V} \vec{B}d\vec{S} = 0. \end{cases}$$

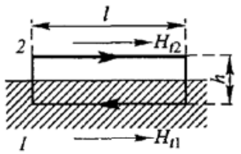
дифференциальная форма

интегральная форма

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$, $(\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H})$, – материальные уравнения.

Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.

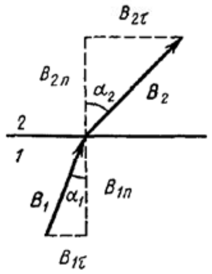




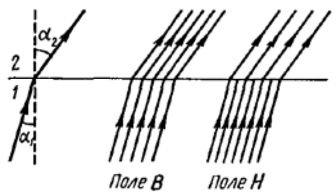
$$B_{n2}S - B_{n1}S = 0,$$
$$B_{n2} = B_{n1}.$$
$$\frac{B_{\tau 2}}{\mu_2} = \frac{B_{\tau 1}}{\mu_1}.$$

$H_{\tau 2}l - H_{\tau 1}l = J_n l$, где $\vec{n} \perp h \cdot l$.
$H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = J_n$, если $J_n = 0$, то
$H_{\tau 2} = H_{\tau 1}$.

Преломление линий магнитной индукции магнитного поля на границе двух магнетиков



$$\mu_2 > \mu_1,$$



$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_2}{\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Магнитная защита.

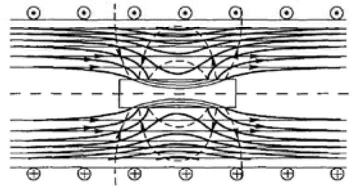
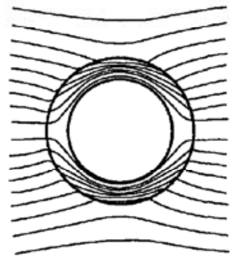


Рис. 165 Сгущение линий индукции внутри магнетика



Аналогия с электростатикой диэлектриков.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}),$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = 0, \\ \mathrm{div}\vec{D} = \rho = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} = 0, \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0, \end{cases}$$

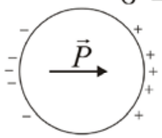
$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; D_{n1} = D_{n1}, \qquad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}; B_{n1} = B_{n1},$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = 0, \\ \mathrm{div}\vec{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\vec{P}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = 0, \\ \mathrm{div}\vec{H} = -\mathrm{div}\vec{I}, \end{cases}$$

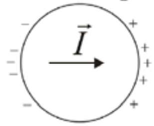
$$\vec{E} \to \vec{H}; \quad \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \to \vec{I}.$$

Поле однородно намагниченного шара.

$$\sigma' = P_n \qquad\qquad \sigma' = \varepsilon_0 I_n$$



$$\Rightarrow$$



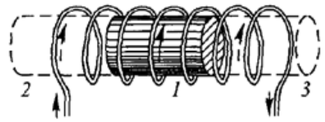
$$\vec{E}' = -\frac{1}{3}\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}; \qquad \vec{H}' = -\frac{1}{3}\vec{I};$$

Если есть внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$, то

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_\circ = \vec{H}_0 - \frac{1}{3}\vec{I};$$

$\vec{H}_\circ = \beta\vec{I}$ – размагничивающее поле,
где β – размагничивающий фактор формы.

Влияние формы магнетика на его намагниченность.

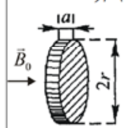


$\vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{H}_\circ$; $\vec{H}_\circ = \beta\vec{I}$ – строго справедливо только для тел эллипсоидальной формы.

$$0 < \beta < 1;$$

1)для бесконечного цилиндра $\vec{H} = \vec{H}_0$, $\beta = 0$.

2)Для тонкого магнитного слоя (бескончного)



Из граничных условий $B_{n0} = B_n; \Rightarrow H_{n0} = \mu H_n$.
При $r \to \infty$, $B_n = B$, $H_n = H$. Тогда $H = H_0 / \mu =$
$= H_0 - (H_0 / \mu)\mu + H_0 / \mu = H_0 - \underbrace{(\mu - 1)}_{\chi}H = H_0 - \underbrace{1}_{\beta}I.$
В этом случае β=1.

Силы, действующие на магнетики в магнитном поле.

$$\vec{F}_{\Delta V} = \nabla(\underbrace{\vec{p}_{\Delta V}}_{\vec{I}\Delta V}\overset{\downarrow}{\vec{B}}); \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \nabla(\vec{I}\,\overset{\downarrow}{\vec{B}}).$$

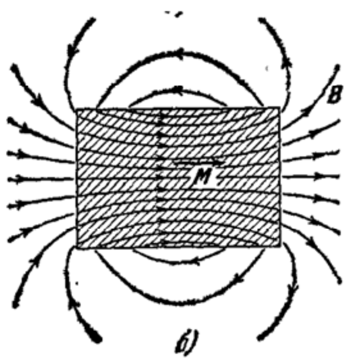
$$\vec{I} = (\mu - 1)\vec{H} = (\mu - 1)\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu};$$

$$\vec{f} = \nabla(\vec{I}\,\overset{\downarrow}{\vec{B}}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0\mu}\nabla(\vec{B}\,\overset{\downarrow}{\vec{B}}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0\mu}\frac{1}{2}\nabla(\overset{\downarrow}{\vec{B}}\,\overset{\downarrow}{\vec{B}});$$

$$\vec{f} = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0\mu}\frac{1}{2}\nabla\vec{B}^2.$$

Если $\mu > 1$, то магнетик втягивается в область сильного магнитного поля

Поле постоянного магнита.



Лекция 15.

- Классификация магнетиков:диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. Парамагнетизм. Теория Ланжевена.
- Микроскопические носители магнетизма. Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де-Гааза. Механомагнитный опыт Барнетта. Гиромагнитное отношение.

Классификация магнетиков:диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

$\mu < 1$ или $\chi < 0$ - диамагнетики,
$\mu > 1$ или $\chi > 0$ - парамагнетики, $\Big\}$ В отсутствии внешнего поля намагниченность $I = 0$.

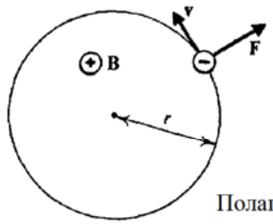
$\mu >> 1$ или $\chi >> 1$ - ферромагнетики$\}$ В отсутствии внешнего поля в домене $I \neq 0$.

В отделные классы магнетиков относят антиферромагнетики, ферриты и суперпарамагнетики.

Величина магнитной восприимчивости магнетиков

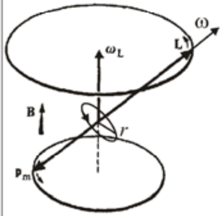
Тип магнетика	Магнитная восприимчивость, χ	
Диамагнетик	- (10^{-9} – 10^{-4}),	μ<1
Парамагнетик	10^{-6} – 10^{-3},	μ>1
Ферромагнетик	10^{3} – 10^{5} ,	μ(H)>>1
Ферримагнетик	10^{1} – 10^{3} ,	μ(H)>>1
Антиферромагнетик	10^{-4} – 10^{-6},	μ>1

Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. [1, § 40]



$$m\omega_0^2 r = F_ц, \qquad F = |e|\omega r B,$$
$$m\omega^2 r = F_ц \pm |e|\omega r B,$$
$$m\omega^2 r - m\omega_0^2 r = \pm |e|\omega r B.$$

Полагая $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| << \omega$ и преобразуя $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega\cdot\omega$, находим $\Delta\omega = \pm|e|B/2m; \Rightarrow \omega_L = |e|B/2m$. Направление $\vec{\omega}_L$ совпадает с $\vec{B}$, то есть $\vec{\omega}_L = -\dfrac{e\vec{B}}{2m}$, где учтено, что заряд электрона $e < 0$.



Для произвольной ориентации орбиты вращения электрона относительно индукци внешнего магнитного поля $\vec{B}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad где \ \vec{L} = mr^2\vec{\omega}, \quad \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

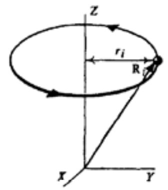
$$\vec{p}_m = I\vec{S} = e\frac{\vec{\omega}}{2\pi}\pi r^2 = \frac{e}{2m}\vec{L}. \quad Получим$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m}[\vec{L}, \vec{B}] = -\frac{e}{2m}[\vec{B}, \vec{L}].$$

Известно, что для произвольного вектора с $|\vec{A}|$=const, $d\vec{A}/dt = [\vec{\Omega}, \vec{A}]$.

$$-\frac{e}{2m}\vec{B} = \vec{\Omega} = \vec{\omega}_L.$$

Диамагнитная восприимчивость



$$\vec{p}_{m,i} = \vec{S}_i I_i = er_i^2\vec{\omega}_L/2,$$

$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\vec{p}_{m,i} = -\frac{e^2}{4m}\vec{B}\cdot Z\underbrace{\frac{N}{\Delta V}}_{n}\underbrace{\frac{\sum_i r_i^2}{Z\cdot N}}_{<r_i^2>},$$

где N- число атомов в ΔV, Z - число электронов в атоме.

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \Rightarrow < x_i^2 > = < y_i^2 > = < z_i^2 > = \frac{1}{3} < R_i^2 >,$$

$< r_i^2 > = < x_i^2 + y_i^2 > = 2 < R_i^2 > /3 = 2 < R^2 > /3$. Имеем

$$\vec{I} = -\frac{e^2}{6m}\underbrace{\vec{B}}_{\mu_0\mu\vec{H}} Zn < R^2 > = \underbrace{-\frac{e^2}{6m}Zn < R^2 > \mu_0 \overset{\sim 1}{\mu}}_{\chi}\vec{H}.$$

$$\chi = -\frac{e^2}{6m}Zn < R^2 > \mu_0.$$

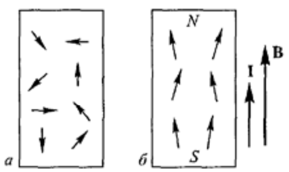
Вещество (диамагнетики)	$\chi = (\mu - 1),\ 10^{-6}$
вода	-9,0
Медь	-10,3
Стекло	-12,6
Висмут	-176

Ларморово вращение атомов не могут создать магнитные силы, оно создается при включении магнитногополя индукционным электрическим полем

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt}; \Rightarrow M = reE = -\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}; \ mr^2\frac{d\omega}{dt} = M = -\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$mr^2\int_{\omega_0}^{\omega+\Delta\omega} d\omega = -\frac{e}{2\pi}\int_0^{\Phi} d\Phi; \Rightarrow \Delta\omega = \omega_L = -\frac{e}{2m}\frac{\Phi}{\pi r^2} = -\frac{e}{2m}B.$$

Парамагнетизм. Теория Ланжевена.



$W = -\vec{p}_m\vec{B}; \Rightarrow dn = A\cdot e^{-\frac{W}{K_Б T}}do,$

где $do = \sin\theta d\theta d\varphi -$ элемент телесного угла.

$<p_{m,z}> = \int p_{m,z}dn / \int dn.$

Воспользуемся теорией полярных диэлектриков

$\vec{p} \to \vec{p}_m; \quad \vec{E} \to \vec{B}; \Rightarrow < p_{m,z} > = p_m L(\beta),$ где

$\beta = \dfrac{p_m B}{K_Б T}, \quad L(\beta) = \mathrm{cth}\beta - \dfrac{1}{\beta}.$ Если $\beta << 1$, $L(\beta) \approx \dfrac{\beta}{3}$,

$< p_{m,z} > = p_m\dfrac{p_m B}{3K_Б T} = \dfrac{p_m^2\mu_0\mu H}{3K_Б T}$. Если $\mu \approx 1$, то

$$I_z = n < p_{m,z} > = \underbrace{\frac{n\mu_0 p_m^2}{3K_Б T}}_{\chi}H, \qquad \vec{I} = \chi\vec{H}.$$

$$\chi = \mu - 1 = \frac{n\mu_0 p_m^2}{3K_Б T} = \frac{C}{T} - закон\ Кюри.$$

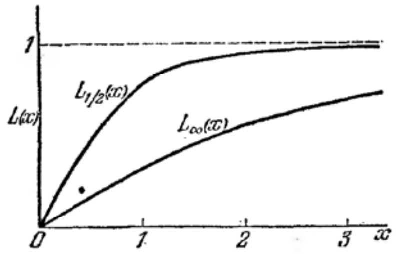
Температурная зависимость $\chi \sim 1/T$ экспериментально обнаружил П. Кюри в 1896 году, в 1905 году Ланжевен разработал теорию парамагнетизма и диамагнеизма.

Терия Ланжевена хорошо описивает лишь газы.

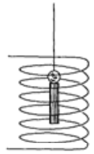
Характерные значения парамагнитной восприимчивости $\chi \sim 10^{-3}$, что приблизительно в 100 раз больше характерного значения $\sim 10^{-5}$ восприимчивости диамагнетиков..

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетик	$\mu - 1,\ 10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1,\ 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	−0,063
Воздух	0,38	Бензил	−7,5
Кислород	1,9	Вода	−9,0
Эбонит	14	Медь	−10,3
Алюминий	23	Стекло	−12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	−12,6
Платина	360	Кварц	−15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	−176



Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де-Гааза.

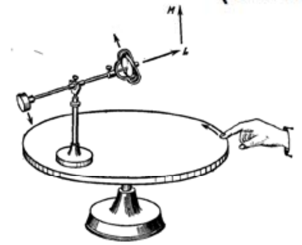


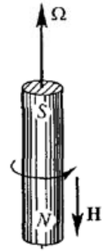
Магнитомеханическое явление - это возникновение вращения тел при их намгничивании. В 1915 году экспериментально обнаружено в опытах Эйнштена и Гааза.

$\sum\limits_V \vec{p}_{m,i} = \vec{I}\cdot V$, но $\vec{p}_{m,i} = \Gamma\vec{L}_i, \Rightarrow \vec{L} = \sum\limits_V \vec{L}_i = \frac{1}{\Gamma}\vec{I}\cdot V.$

$L_z = J_z\omega_z = \frac{1}{\Gamma}I_z\cdot V.$ Так для железного цилиндра с диаметром 1мм в магнитном поле $H = 10^4\ А/м$ $\omega_z = 10^{-3}$ рад/с.

Механомагнитный опыт Барнетта (1914год).





Механомагнитное явление-это намагничивание магнетика при его вращение.

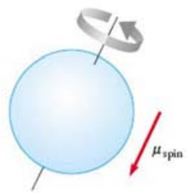
В опытах Барнетта при вращени железного цилинра 6000 об/мин наблюдалось намагничивание эквивалентное наличию внешнего поля $10^{-2}\ А/м$.

Микроскопические носители магнетизма. Гиромагнитное отношение.

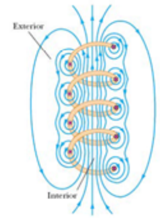
Исследование магнитомеханического и механомагнитного явлений показало $\Gamma < 0$, следовательно, магнетизм обусловлен движением электронов. Для магнетиков $-\frac{e}{m} < \Gamma < -\frac{e}{2m}$. Для ферромагнетиков (железо, никель, кобальт и др.) $\Gamma = -\frac{e}{m}$, что указывает на то, что магнеизм магнетиков нельзя объяснить только орбитальным движением электронов.

Совокупность имеющихся данных указывает на то, что электрон обладает собственным механическим (спином) и магнитным моментом $\vec{p}_{m,s} = -\frac{e}{m}\vec{S}$. Спин квантуется, его проекция $S_z = \pm\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, где $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с. Квантуется и проекция собственного магнитного момента $p_{m,s} = \pm\mu_B = \pm\frac{eh}{4\pi m}$ – магнетон Бора $\mu_B = 9{,}27\cdot 10^{-24}\ А\cdot м^2$.

Классическая модель спина электрона.



Энергия магнитного поля (тока) в бесконечной изотропной магнитной среде.



В магнитной среде $\vec{B} = \mu\vec{B}_0$. Следовательно,

$$\Phi = \mu\Phi_0 = \underbrace{\mu L_0}_{L} I = LI; \Rightarrow W = \frac{LI^2}{2} = \mu\frac{L_0 I^2}{2} =$$

$$= \mu\frac{1}{2}\int_\infty \frac{B_0^2}{\mu_0}dV = \frac{1}{2}\int_\infty \frac{\overbrace{\mu\vec{B}_0}^{\vec{B}}\,\overbrace{\mu\vec{B}_0}^{\vec{B}}}{\mu_0\mu}dV = \int_\infty \overbrace{\frac{\vec{H}\vec{B}}{2}}^{w}dV.$$

$$w = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{\vec{H}\mu_0(\vec{H}+\vec{I})}{2} =$$

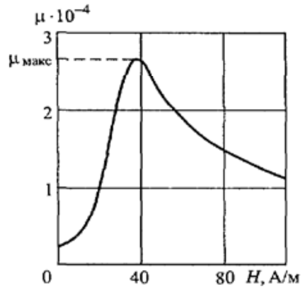
$$= \frac{\overbrace{\mu_0\vec{H}}^{\vec{B}_0}\,\overbrace{\mu_0\vec{H}}^{\vec{B}_0}}{2\mu_0} + \frac{\mu_0\vec{H}\vec{I}}{2},$$ где $\frac{\mu_0\vec{H}\vec{I}}{2}$ - $\Big\{$плотность энергии намагничивания магнетика.

Лекция 16.

- Ферромагнетики. Спонтанная намагниченность и температура Кюри. Доменная структура. Гистерезис намагничивания, кривая Столетова. Остаточная индукция и коэрцитивная сила. Температурная зависимость намагниченности.

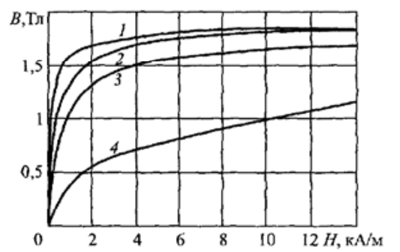
Ферромагнетики.

- Ферромагнетики – это сильномагнитные магнетики, относительная магнитная проницаемость которых может достигать десятков тысяч единиц. Кроме этого, ферромагнетики обладают рядом других отличительных особенностей по сравнению с диа- и парамагнетиками.

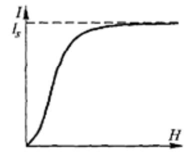


Магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля. На рисунке приведена такая зависимость для чистого железа (**кривая Столетова**).

Кривая намагничивания

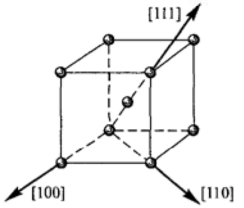


Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля: 1 — электролитическое железо, 2 — малоуглеродистое железо, 3 — литая сталь, 4 — чугун

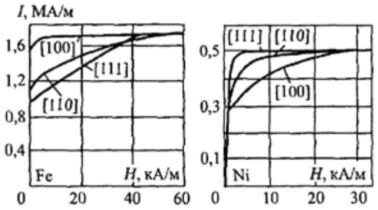


Кривая намагничивания ферромагнетиков

Анизотропия намагничивания.



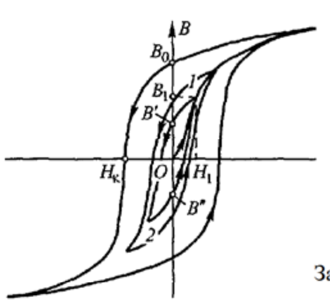
Элементарная кристаллическая ячейка железа и ее основные кристаллографические направления: [100] — легкого, [111] — трудного намагничивания

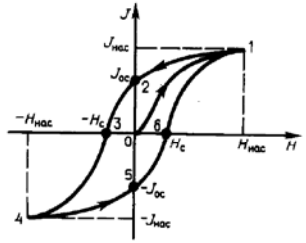


Кривые намагничивания Fe и Ni по различным напрвлениям монокристаллических образцов.

Гистерезис намагничивания.

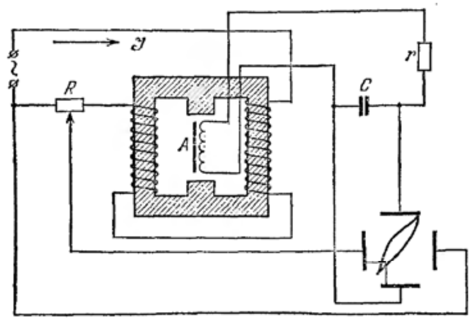
Остаточная индукция и коэрцитивная сила.

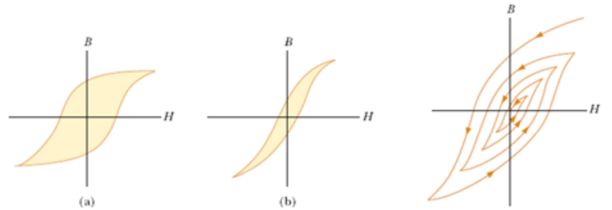




Зависимость $B(H)$ или $I(H)$ неоднозначна и определяется предисторией намагничивания.

Схема установки для наблюдения петли гистерезиса.



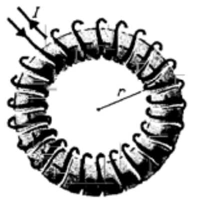


Если H_K>>1А/см, жесткий ферромагнетик

Если H_K<1А/см, мягкий ферромагнетик

Способ размагничивания

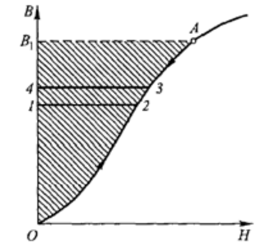
Работа при намагничивании ферромагнетика.



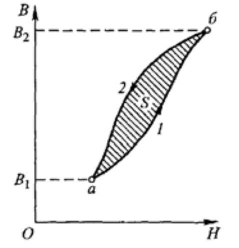
Пусть тороид заполнен ферромагнетиком. При увеличении тока в обмотке на dI возникает ЭДС самоиндукции, против которой ток совершает работу $dA=-Idt\mathscr{E}^{инд}=Id\Phi$, где $\Phi=BNS$, N - число витков. По теореме о циркуляции вектор $\vec{H}$ имеем $H2\pi r=NI$. Находим

$$dW=dA=\frac{H2\pi r}{N}NSdB=HdB\underbrace{2\pi rS}_{V}.$$

Таким образом, работа dw, неоходимая для увеличения индукции на $d\vec{B}$ в единице объема, равна $dw=\vec{H}d\vec{B}=\mu_0\vec{H}d(\vec{H}+\vec{I})=\mu_0\vec{H}d\vec{H}+\underbrace{\mu_0\vec{H}d\vec{I}}_{\text{плотность энергии намагничивания}}$.

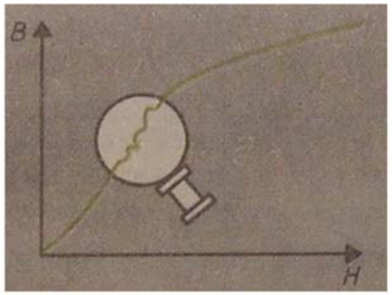


Работа намагничивания магнетика без гистерезиса



Работа при циклическом перемагничивании пропорциональна площади петли гистерезиса

Эффект Баркгаузена (1919).



Спонтанная намагниченность и температура Кюри.

Исследования показали, что даже в отсутствии внешнего магнитного поля ферромагнитик разбит на микроскопические области (домены), в которых ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения. Спонтанная намагниченность ферромагнетика обусловлена ориентацией собственных магнитных моментов электронов (Г=-e/m).

Ферромагнитное упорядочение существует только при температурах меньшей некоторого критического значения T_K. При $T>T_K$, ферромагнитное упорядочение проподает и ферромагнети превращается в парамагнетик. Зависимость магнитной проницаемости от температуры для таких парамагнетиков подчиняется закону Кюри-Вейса

$$\chi=\frac{C}{T-T_K}.$$

Температура Кюри некоторых ферромагнетиков

Вещество	T_K, °C	Вещество	T_K, °C
Кобальт	1150	Никель	360
Железо	770	30 %-ный пермаллой	70
78 %-ный пермаллой (сплав 22 % Fe, 78 % Ni)	550	Гадолиний	17

Механизм ориентации спинов ферромагнетика объясняет квантовая терия взаимодействия заряженных чатиц (электронов) со спином $\hbar/2$ находящихся на незаполненных d-оболочках атомов ферромагнетика

$$W = -A \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2,$$

где A - обменная костанта (интеграл). Если $A > 0$, то спинам энергетически выгодно ориентироватся параллельно (ферромагнитное упорядочение). Если $A < 0$, то выгодно антипараллельная ориентация (антиферромагнитное упорядочение).

Таким образом, ферромагнитное упорядочение обусловлено сильным обменным взаимодействием электронов атомов с нескомпенсированными спинами и имеет немагнитное происхождения. (Дорфман 1927)

Первая терия ферромагнетизма была разработана Вейсом в 1907 году по аналогии с теорией парамагнетизма Ланжевена, в которой дополнительно к микоскопическому полю добавлено гипотетическое "молекулярное поле"

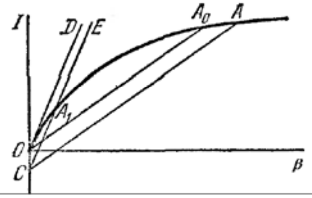
$$\vec{B}_{эфф} = \mu_0(\vec{H} + b\vec{I}),$$

где b - постоянная Вейса. Тогда для формулы Ланжевена получим

$$I = I_s L(\beta), \text{ где } I_s = np_m, \beta = \frac{p_m B_{эфф}}{K_Б T}; \Rightarrow I = \frac{K_Б T n}{I_s b \mu_0}\beta - \frac{H}{b}.$$

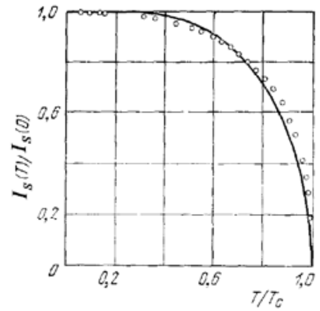
$$I = I_s L(\beta),$$

$$I = \frac{K_Б T n}{I_s b \mu_0}\beta - \frac{H}{b}.$$



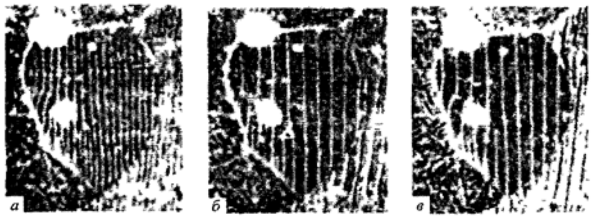
Наклон кривой OD определяет критическую температуру ферромагнитного упорядочения (фазовый переход 2-го рода).

Намагниченность насыщения ферромагнетика зависит от температуры

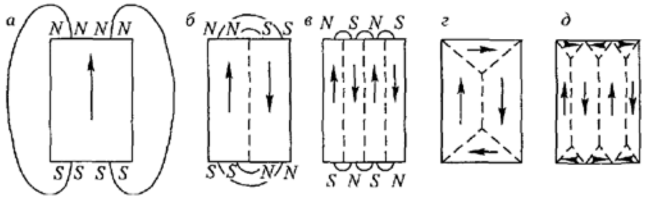


Намагниченность насыщения никеля как функция температуры. Сплошная кривая - теоретическая, построенная на $L_{1/2}(x)$.

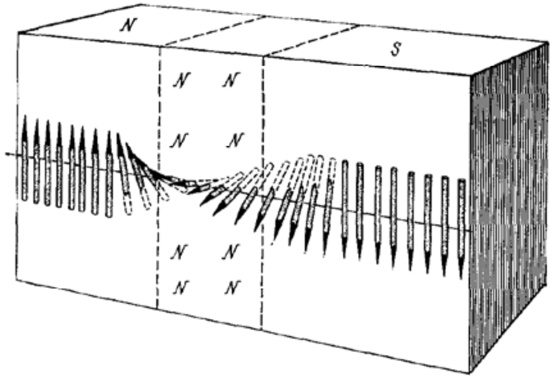
Ферромагнитные домены в кремнистой стали.



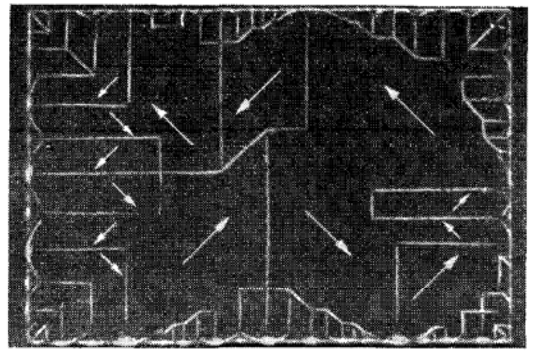
Механизм возникновения доменов

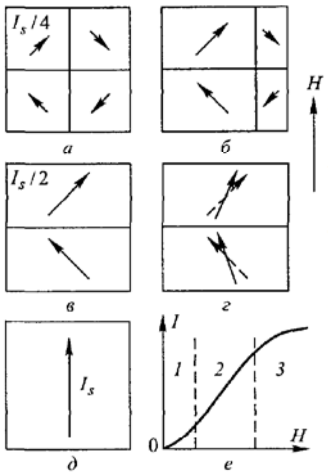


Доменная граница(стенка) Блоха



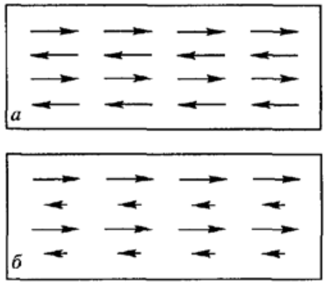
Доменная структура на поверхности монокристаллической никелевой пластины





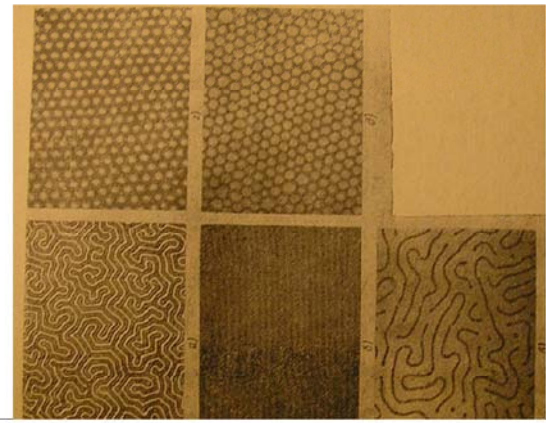
Различные типы процессов намагничивания ферромагнетика: $а-в$) смещение границ, г) намагничивание вращения, д) намагничивание насыщения; участок 1 - обратимое смещение ДГ, 2 - исчезновение невыгодных доменов, 3 - вращение намагниченности внутри домена.

Антиферромагнетики. Ферриты. Суперпарамагнетики.

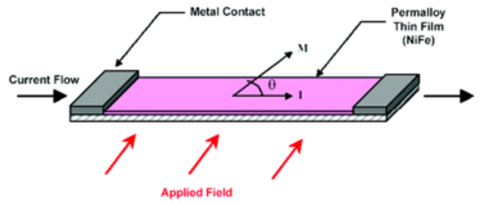


Ферриты - бладают большим удельным сопротивлен и являются магнитными полупроводниками или диэлектриками. Находят важное применение в радиотехнике СВЧ.

Доменная структура тонких магнитоодносных пластин ЖИГ с силной анизотропией

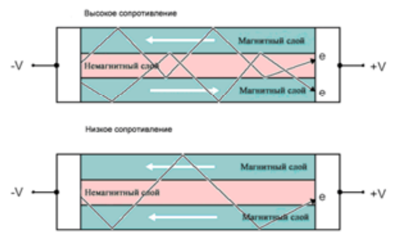


Анизотропный магниторезистивный эффект



$$\Delta R = \frac{\Delta\rho}{\rho} R\cos^2\theta$$

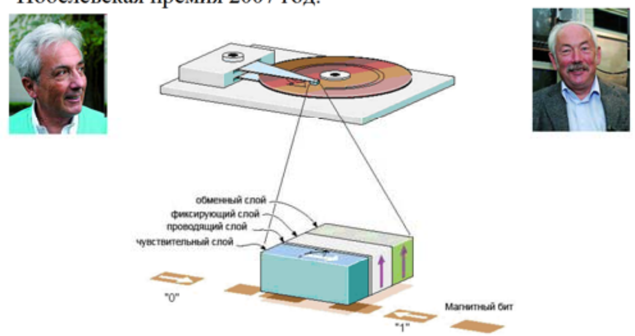
Гиганский магниторезистивный (ГМР) эффект. Спинтроника.



ГМР датчик.

Альберт Ферт (Albert Fert) и Петер Грюнберг (Peter Grunberg)

Нобелевская премия 2007 год.



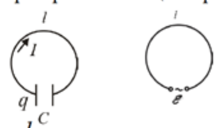
Лекция 17.

- Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности. Переходные процессы в RC- и RL-цепях.
- Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.
- Энергия гармонических колебаний. Затухающие колебания в контуре и их уравнение. Показатель затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.
- Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.

Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности.

- **В квазистационарном приближении** полагается, что в рассматриваемой электродинамической системе все распределенные в пространстве заряды, токи и поля изменяются синхронно и мгновенно. То есть в каждый момент времени нестационарные заряды и токи порождают электрическое и магнитное поле соответствующее эквивалентным стационарным зарядам и токам.

Критерий квазисационарности.



$$\tau \sim \frac{l}{c};\Rightarrow \tau << T \text{ или } l << \lambda,$$

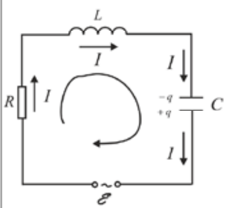
где $\lambda = Tc$ – длина волны.

Если $l = 1км = 10^3 м$, то $\tau = \frac{10^3 м}{3\cdot 10^8 м/с} = \frac{1}{3}10^{-5} с.$ $\nu = \frac{1}{T} << 10^5 Гц = 100кГц.$

Если $l = 100м$, то $\tau = \frac{10^2 м}{3\cdot 10^8 м/с} = \frac{1}{3}10^{-6} с.$ $\nu = \frac{1}{T} << 10^6 Гц = 1МГц.$

Микропроцессор $l = 1см. \Rightarrow \nu_0 = 1/\tau = c/l \sim 10ГГц.$ Близок к пределу квазистационарности

Уравнение колебательного контура в квазистационарном приближении.



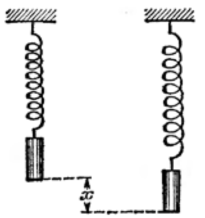
Пусть q – заряд первой пластины конденсатора, встречающейся при положительном обходе контура. Тогда напряжение $U_c = q/c$ и ток в контуре $I = dq/dt$ будут иметь правильный знак.

Согласно правилу Кирхгофа, имеем

$$IR + \underbrace{U_c}_{q/c} = \underbrace{\mathscr{E}^{\text{самоинд.}}}_{-LdI/dt} + \mathscr{E},$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathscr{E}.$$

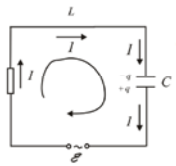
Механическая аналогия



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu v_x + F,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F.$$

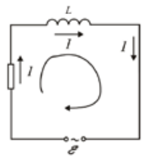
Переходные процессы в RC- и RL-цепях.



$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathscr{E}, \Rightarrow Rc\frac{dq}{dt} = c\mathscr{E} - q, \Rightarrow \frac{dq}{c\mathscr{E} - q} = \frac{dt}{Rc}.$$

$$\ln|c\mathscr{E} - q| = -\frac{t}{Rc} + const. \text{ При } t = 0 \ const = \ln|c\mathscr{E}|,$$

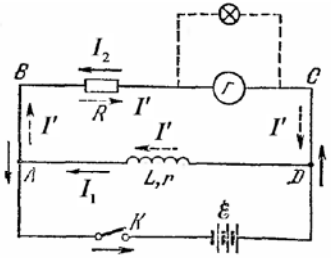
$$c\mathscr{E} - q = c\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{Rc}};\Rightarrow q = c\mathscr{E}(1 - e^{-\frac{t}{Rc}}).$$



$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = \mathscr{E};\Rightarrow L\frac{dI}{dt} + RI = \mathscr{E};$$

$$c \to \frac{1}{R};\ R \to L;\ q \to I.$$

$$I = \frac{1}{R}\mathscr{E}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$



После установления тока

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

После размыкания ключа

$$I'r + I'R = -L\frac{dI'}{dt};$$

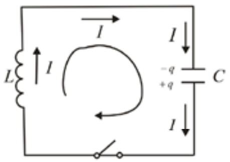
$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{r+R}{L}dt;$$

$$\ln I' = -\frac{r+R}{L}t + C. \text{ При } t = 0 \ C = \ln I_0, \text{ где } I_0 = I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r}.$$

$$I' = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathscr{E}}{r}e^{-\frac{t}{\tau}};\Rightarrow U = I'R = \frac{R}{r}\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \text{экстраток}$$

размыкания.

Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{c}=0;\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2}q=0.$$

$$\ddot q+\omega_0^2 q=0, \text{ где } \omega_0=\frac{1}{\sqrt{Lc}}.$$

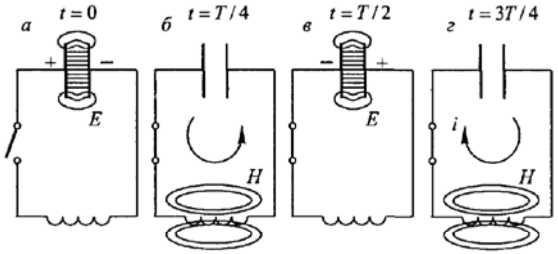
$$q=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t=a\cos(\omega_0 t+\varphi_0), I=\dot q=-a\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0),$$

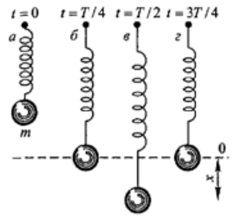
где $a=\sqrt{A^2+B^2}$, $\mathrm{tg}\varphi_0=-\frac{A}{B}$. Начальные условия: при $t=0$, q_0, I_0.

В частности, если при $t=0, q=q_0, I=I_0=0$, то $A=0, B=q_0;\Rightarrow$

$$q=q_0\cos\omega_0 t,\quad I=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t.\quad W_c=\frac{q^2}{2c},\quad W_I=W_L=\frac{LI^2}{2}.$$

17.6





$$q=q_0\cos\omega_0 t,$$
$$I=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t.$$

$$x=x_0\cos\omega_0 t,$$
$$v_x=\dot x=-\omega_0 x_0\sin\omega_0 t.$$

17.7

Энергия гармонических колебаний.

$$I\cdot\Big|\, L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{c}=0,\Rightarrow L\frac{d}{dt}\frac{I^2}{2}+\frac{dq}{dt}\frac{q}{c}=0,\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L}+\underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_c}\right)=0.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L}+\underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_c}=const.$$

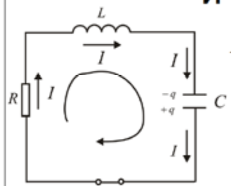
$$W_L=\frac{LI^2}{2}=\frac{L}{2}a^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0t+\varphi_0)=\frac{a^2}{2c}\frac{1}{2}(1-\cos[2(\omega_0t+\varphi_0)])$$

$$W_c=\frac{q^2}{2c}=\frac{a^2}{2c}\cos^2(\omega_0t+\varphi_0)=\frac{a^2}{2c}\frac{1}{2}(1+\cos[2(\omega_0t+\varphi_0)])$$

$$\langle W_{L,c}\rangle=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}W_{L,c}dt=\frac{a^2}{4c};\Rightarrow\langle W_L\rangle=\langle W_c\rangle.$$

17.8

Затухающие колебания в контуре и их уравнение.



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=0;\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma}\frac{dq}{dt}+\underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2}q=0.$$

$$\ddot q+2\gamma\dot q+\omega_0^2q=0,\quad q=\xi e^{-\gamma t}.$$

$$(q=uv,\dot q=\dot u v+u\dot v,\ddot q=\ddot u v+2\dot u\dot v+u\ddot v)$$

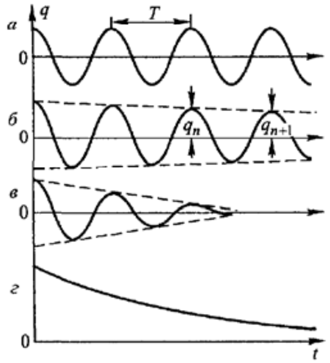
$$\ddot\xi e^{-\gamma t}-2\dot\xi\gamma e^{-\gamma t}+\gamma^2\xi e^{-\gamma t}+2\gamma\dot\xi e^{-\gamma t}-2\gamma^2\xi e^{-\gamma t}+\omega_0^2\xi e^{-\gamma t}=0,$$

$\ddot\xi+(\omega_0^2-\gamma^2)\xi=0$, если $\gamma<\omega_0$, то $\ddot\xi+\omega_1^2\xi=0$, где $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$.

$$\xi=a_0\cos(\omega_1t+\varphi_0);\Rightarrow q=a_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_1t+\varphi_0).$$

Если при $t=0, q=q_0, I=\dot q=0$, то $\varphi_0=0,\quad a_0=q_0$.

17.9



$$q=q_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t).$$

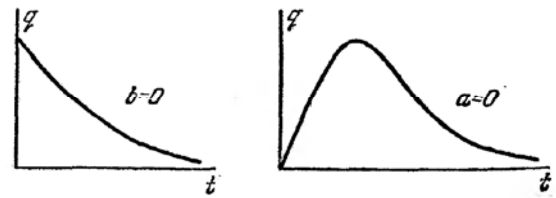
Если $\gamma>\omega_0$, то $\ddot\xi-(\gamma^2-\omega_0^2)\xi=0.$

$$\xi=Ae^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t}, q=Ae^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})\cdot t}+Be^{-(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})\cdot t}.$$

17.10

Если $\gamma=\omega_0$, то $\ddot\xi=0$, $\xi=(a+b\cdot t)$,

$$q=(a+b\cdot t)e^{-\gamma t}.$$



17.11

Показатель затухания (декремент затухания). Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.

$a=a(t)=a_0e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\gamma=\frac{R}{2L}$ – декремент (показатель) затухания;

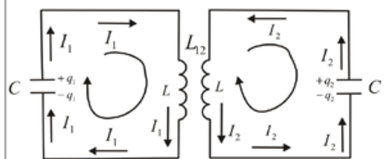
$\tau=\frac{1}{\gamma}$ – время релаксации, время за которое амплитуда колебаний уменьшиться в $e=2,7$ раз.

$\theta=\ln\frac{a(t)}{a(t+T)}=\gamma T$ – логарифмический декремент затухания.

$Q=\frac{\pi}{\theta}$ – добротность колебательного контура.

17.12

Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.



$$\begin{cases}\frac{q_1}{c}=-L\frac{dI_1}{dt}-L_{12}\frac{dI_2}{dt},\\ \frac{q_2}{c}=-L\frac{dI_2}{dt}-L_{12}\frac{dI_1}{dt},\end{cases}$$

$$\begin{cases}L\frac{d^2I_1}{dt^2}+L_{12}\frac{d^2I_2}{dt^2}+\frac{I_1}{c}=0,\\ L\frac{d^2I_2}{dt^2}+L_{12}\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{I_2}{c}=0,\end{cases}\Bigg|\pm\Rightarrow\begin{cases}(L+L_{12})\frac{d^2}{dt^2}(I_1+I_2)+\frac{1}{c}(I_1+I_2)=0,\\ (L-L_{12})\frac{d^2}{dt^2}(I_1-I_2)+\frac{1}{c}(I_1-I_2)=0,\end{cases}$$

17.13

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}(I_1+I_2)+\underbrace{\frac{1}{(L+L_{12})c}}_{\omega_1^2}(I_1+I_2)=0, & I_1+I_2=a_1\cos(\omega_1t+\varphi_1^0),\\ \frac{d^2}{dt^2}(I_1-I_2)+\underbrace{\frac{1}{(L-L_{12})c}}_{\omega_2^2}(I_1-I_2)=0, & I_1-I_2=a_2\cos(\omega_2t+\varphi_2^0).\end{cases}$$

$$I_1=\frac{a_1}{2}\cos(\omega_1t+\varphi_1^0)+\frac{a_2}{2}\cos(\omega_2t+\varphi_2^0),$$

$$I_2=\frac{a_1}{2}\cos(\omega_1t+\varphi_1^0)-\frac{a_2}{2}\cos(\omega_2t+\varphi_2^0),$$

$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{(L+L_{12})c}}$ и $\omega_2=\frac{1}{\sqrt{(L-L_{12})c}}$ – -нормальные частоты.

17.14

Парциальная частота - это частоты колебаний системы с N степенями свободы при фиксированных N-1 степенях.

В рассмотренном случае обе парциалные частоты совпадают и равны

$$\omega_{\Pi 1} = \omega_{\Pi 2} = \frac{1}{\sqrt{Lc}}.$$

Для нормальных и парциальных частот справедливо неравенство

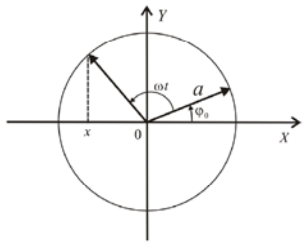
$$\omega_1 < \omega_{\Pi 1} \le \omega_{\Pi 2} < \omega_2.$$

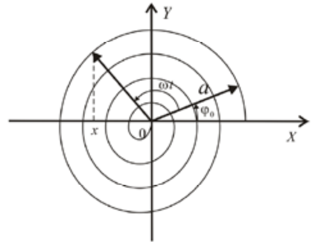
Лекция 18.

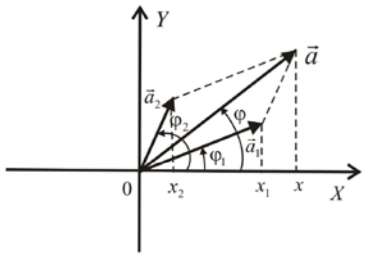
- Метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд.
- Вынужденные колебания в контуре. Процесс установления вынужденных колебаний.
- Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока

Метод векторных диаграмм.

$$x = a\cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\varphi}). \qquad x = \underbrace{a_0 e^{-\gamma t}}_{a}\cos(\omega t + \varphi_0).$$







$$x_1 = a_1\cos(\varphi_1), \quad \text{где} \quad \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0};$$

$$x_2 = a_2\cos(\varphi_2), \quad \text{где} \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0};$$

$$x = x_1 + x_2 = a\cos(\varphi).$$

метод комплексных амплитуд.

$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \Rightarrow z = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi.$$

Имеем

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[ae^{i(\omega t + \varphi_0)}].$$

$$z = ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = a\cos(\omega t + \varphi_0) + ia\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$z = ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = z = ae^{i\varphi_0}e^{i\omega t} = z_0 e^{i\omega t},$$

где $z_0 = ae^{i\varphi_0}$ - комлексная амплитуда.

Комплексная частота.

Пусть $\omega = \omega' + i\omega''$, тогда

$$z = z_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = z_0 e^{-\omega'' t}\cdot e^{i\omega' t},$$

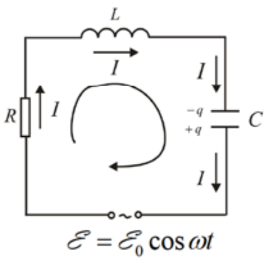
где $z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ – комплексная амлитуда.

Если $\operatorname{Im}\omega = \omega'' = \gamma$ - декремент затухания,

то $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}[a_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega' t + \varphi_0)}] =$

$a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi_0)$ – затухающие колебания.

Вынужденные колебания в контуре.



$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}_0\cos\omega t.$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2}q = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{L}}_{x_0}\cos\omega t,$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = x_0\cos\omega t.$$

$$q = q_{общ.\,одн.} + q_{частн.\,неодн.}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \Rightarrow q_{общ.\,одн.} = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1}\cdot t + \varphi_0).$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\ddot{q}_\kappa + 2\gamma\dot{q}_\kappa + \omega_0^2 q_\kappa = x_0 e^{i\omega t},$$

$$q_\kappa = z_0 e^{i\omega t}; \Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2)z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t};$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}; \Rightarrow q_\kappa = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}e^{i\omega t}.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \Rightarrow q_\kappa = \frac{x_0}{\rho}e^{i(\omega t - \varphi)}; q = \operatorname{Re} q_\kappa = \frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t - \varphi).$$

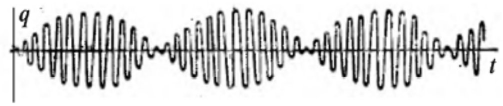
Общее решение равно

$$q = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t - \varphi).$$

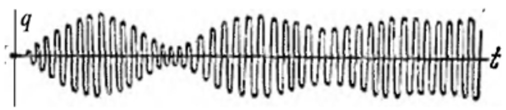
Структуру этого решения легко понять с помощью метода векторных диаграм.

В частности, если при $t = 0$ величины $q = 0$, $\dot{q} = 0$, то

Если $\gamma = 0$ и $\omega_1 \sim \omega$



Если $\gamma \neq 0$



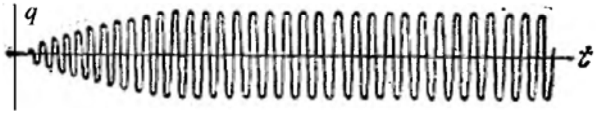
Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.

Пусть при $t=0,\ q=0,\ \dot q = I = 0$, тогда

$$\begin{cases} a_0\cos\varphi_0 + \frac{x_0}{\rho}\cos\varphi = 0,\\ -a_0\omega_1\sin\varphi_0 - \gamma a_0\cos\varphi_0 + \frac{x_0}{\rho}\omega\sin\varphi = 0.\end{cases}$$

Если $\gamma \ll \omega_0$ и $\omega=\omega_0$, то $\varphi_0=-\varphi,\ a_0=-x_0/\rho$.

$$q \cong \frac{x_0}{\rho}(1-e^{-\gamma t})\cos(\omega t-\varphi);\quad t\gg\tau=1/\gamma.$$



Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.

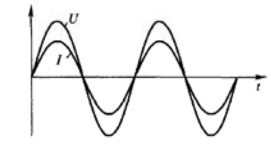
При $t\gg\tau,\ q=\frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t-\varphi),\Rightarrow$

$$I=\frac{dq}{dt}=\underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0}\sin(\omega t-\underbrace{(\varphi-\frac{\pi}{2})}_{\phi}+\frac{\pi}{2})=I_0\cos(\omega t-\phi);$$

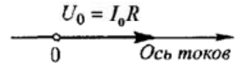
$$U_c=\frac{q}{c}=\frac{x_0}{c\rho}\cos(\omega t-\varphi)=\underbrace{\frac{1}{\omega c}I_0}_{U_{c,0}}\cos(\omega t-\phi-\frac{\pi}{2});$$

$$U_L=-\left(-L\frac{dI}{dt}\right)=-LI_0\omega\sin(\omega t-\phi)=\underbrace{\omega L I_0}_{U_{L,0}}\cos(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2});$$

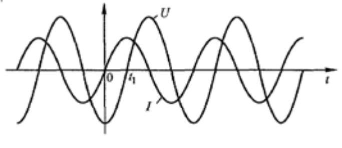
$$U_R=IR=\underbrace{I_0R}_{U_{R,0}}\cos(\omega t-\phi);$$



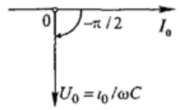
Колебания тока и напряжения на сопротивлении



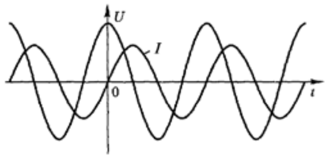
Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении



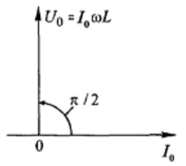
Колебания тока в цепи напряжения на конденсаторе



Векторная диаграмма напряжения на конденсаторе



Колебания тока и напряжения на индуктивности



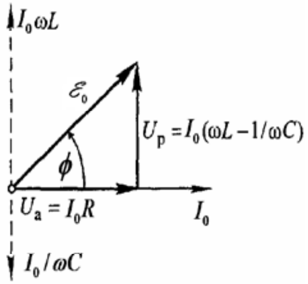
Векторная диаграмма напряжения на индуктивности

R – активное сопротивление,

$R_c=\frac{1}{\omega c}$ – емкостное сопротивление,

$R_L=\omega L$ – индуктивное сопротивление.

Векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения сопротивления, емкости и индуктивности.



R – активное сопр.,

$\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)$ – реактивное сопр.

$$\mathcal{E}_0=U_0=I_0\overbrace{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega c})^2}}^{R_{эфф}},$$

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}.$$

Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.

$$q_к=\frac{x_0}{\omega_0^2-\omega^2+i2\gamma\omega}e^{i\omega t};\Rightarrow I_к=\frac{dq_к}{dt}=\frac{i\omega\cdot x_0}{\omega_0^2-\omega^2+i2\gamma\omega}e^{i\omega t};$$

$$I_к=\frac{i\omega\cdot(\mathcal{E}_0/L)}{\frac{1}{Lc}-\omega^2+i2\frac{R}{2L}\omega}e^{i\omega t}=\frac{i\omega\cdot(\mathcal{E}_0/L)}{\frac{1}{Lc}-\omega^2+i2\frac{R}{2L}\omega}e^{i\omega t}=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0e^{i\omega t}}{\underbrace{\frac{1}{i\omega c}}_{Z_c}+\underbrace{i\omega L}_{Z_L}+R}=\frac{\mathcal{E}_к}{Z},$$ где $Z=\frac{1}{i\omega c}+i\omega L+R$ – комплексное сопротивление или импеданс.

$$I_к=\frac{\mathcal{E}_к}{Z}=\frac{\mathcal{E}_к}{|Z|e^{i\phi}},$$ где $Z=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)$, $\mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}$.

Так как $|I_к|=I_0,\ |\mathcal{E}_к|=\mathcal{E}_0,\ |Z|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)^2}$

$$|I_к|=\frac{|\mathcal{E}_к|}{|Z|};\Rightarrow \underbrace{I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)^2}}}_{\text{закон Ома для переменного тока}},\quad \mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}.$$

R – активное сопротивление,

$\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)$ – реактивное сопротивление.

Лекция 19.

- Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе. Ширина резонансной кривой.
- Резонанс токов. Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.
- Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.

Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе.

Исследуем зависимость амплитуды $U_{c,0}$ и фазы φ от частоты ω вынуждающей ЭДС (напряжения) в последовательном RLC контуре.

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega t,$$

$U_c=\frac{q}{c}=\frac{x_0}{c\rho}\cos(\omega t-\varphi)$, где $\rho=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$, $\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$;

$$U_{c,0}=\frac{x_0}{c\rho}=\frac{\mathcal{E}_0}{Lc\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}.$$

При $\omega\to0,\ U_{c,0}\to\mathcal{E}_0$ – статическое напряжение.

При $\omega\to\infty,\ U_{c,0}\to0$.

$$\frac{dU_{c,0}}{d\omega}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\rho^3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)2\omega+4\gamma^2 2\omega\right]=0;$$

$$\omega_{рез}^2=\omega_0^2-2\gamma^2;\quad \omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}.$$

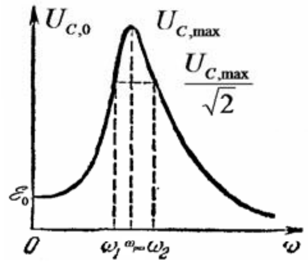
$$U_{c,\max}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\omega_0^2-8\gamma^4}}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}.$$

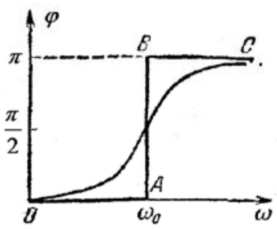
В частности, если $\gamma<<\omega_0$, то

$$U_{c,\max}=\mathcal{E}_0\frac{\omega_0}{2\gamma}=\mathcal{E}_0\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{c}},\quad \frac{U_{c,\max}}{\mathcal{E}_0}=\frac{\omega_0}{2\gamma}=\frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\gamma}=$$

$=\frac{\pi}{T\gamma}=\frac{\pi}{\theta}=Q$ – добротность контура.

19.3





$$U_{c,0}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\qquad \mathrm{tg}\varphi=\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

19.4

$$U_{L,0}=\omega L I_0=\omega^2\underbrace{Lc}_{1/\omega_0^2}\underbrace{\frac{1}{\omega c}I_0}_{U_{c,0}}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}U_{c,0}.$$

При резонансе $\omega=\omega_{рез}\approx\omega_0$, если $\gamma<<\omega_0$,

тогда $U_{L,0}=U_{c,0}=\mathcal{E}_0 Q$.

Фаза отличается на π.

19.5

Ширина резонансной кривой.

$$\frac{U_{c,\max}}{\sqrt{2}}=U_{c,0}(\omega);\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}};$$

$$8\gamma^2(\omega_0^2-\gamma^2)=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2;$$

$$4\gamma^2\omega_0^2-4\gamma^4=\underbrace{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}_{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}+\underbrace{4\gamma^2\omega^2-4\gamma^2\omega_0^2}_{4\gamma^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}+4\gamma^4=$$

$$=(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2)^2;$$

$$\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2=\pm2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};\Rightarrow$$

$$\omega_1^2=\underbrace{\omega_0^2-2\gamma^2}_{\omega_{рез}^2}-2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};\omega_2^2=\underbrace{\omega_0^2-2\gamma^2}_{\omega_{рез}^2}+2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};$$

19.6

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\underbrace{\omega_0^2-2\gamma^2}_{\omega_{рез}^2}\mp2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}};$$

Если $\gamma<<\omega_0$, то $\omega_1^2=\omega_0^2-2\gamma\omega_0;\quad \omega_2^2=\omega_0^2+2\gamma\omega_0;\Rightarrow$

$\omega_1=\omega_0-\gamma;\quad \omega_2=\omega_0+\gamma;\quad \Delta\omega=\omega_2-\omega_1=2\gamma.$

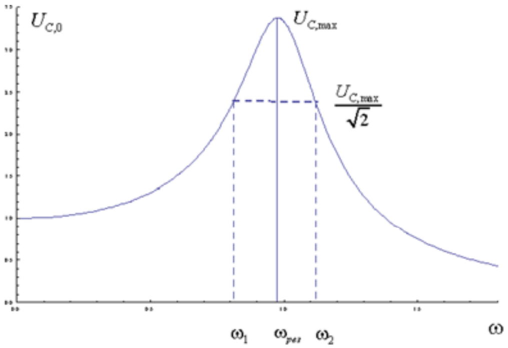
$\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{\omega_0}{2\gamma}=\frac{2\pi}{2\gamma T}=\frac{\pi}{\theta}=Q$ – добротность контура.

Точные оценки дают

$\omega_{рез}-\omega_1>\omega_2-\omega_{рез}$

(в отличие от рисунка 301 в [3])

19.7



$\omega_0=1,\gamma=0.15,\mathcal{E}_0=1,\omega_{рез}=0.977,\omega_1=0.811,\omega_2=1.119$

$\omega_{рез}-\omega_1=0.166,\quad \omega_2-\omega_{рез}=0.142.$

19.7_1

Токи при резонансе.

$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega t,$

$$I=\frac{dq}{dt}=-\frac{\omega x_0}{\rho}\sin(\omega t-\varphi)=\underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0}\cos\left(\omega t-\underbrace{\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}_{\phi}\right).$$

$$\mathrm{tg}\phi=\mathrm{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{ctg}\varphi=-\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}=-\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}=$$

$$=-\frac{\frac{1}{Lc}-\omega^2}{2\frac{R}{2L}\omega}=-\frac{\frac{1}{\omega c}-\omega L}{R}=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}.$$

19.8

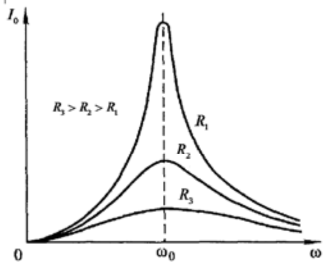
$$I=\frac{dq}{dt}=\underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0}\cos(\omega t-\phi);I_0=\frac{\omega x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}=$$

$$=\frac{\omega\mathcal{E}_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{Lc}-\omega^2\right)^2+4\left(\frac{R}{2L}\right)^2\omega^2}}=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega c}-L\omega\right)^2+R^2}}.$$

$$I=\underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)^2}}}_{I_0}\cos(\omega t-\phi);\quad \mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}.$$

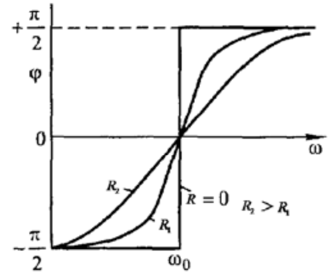
$$\omega_{рез}=\omega_0$$

19.9



Резонансные кривые

(АЧХ)

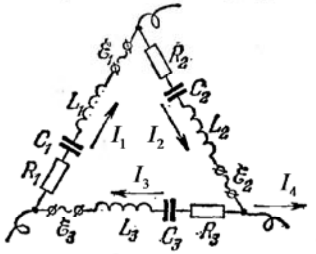


Изменение сдвига фазы колебаний тока при изменении частоты ЭДС

(ФЧХ)

19.11

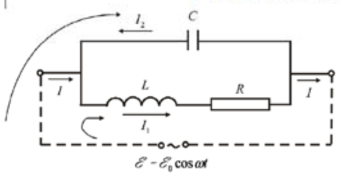
Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.



$$I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$
$$\sum_n I_n = 0.$$

$$I_{1K}Z_1 = \mathcal{E}_{1K},\ \text{где}\ Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega c_1} + i\omega L_1,$$
$$I_{2K}Z_2 = \mathcal{E}_{2K},\ \text{где}\ Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega c_2} + i\omega L_2,$$
$$I_{3K}Z_3 = \mathcal{E}_{3K},\ \text{где}\ Z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega c_3} + i\omega L_3,$$
$$\sum_n I_{nK}Z_n = \mathcal{E}_{nK}$$

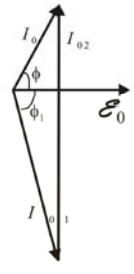
Резонанс токов.



$$\begin{cases} I_1(i\omega L + R) = \mathcal{E}, \\ -I_2\dfrac{1}{i\omega c} = \mathcal{E}, \\ I_1 = I + I_2, \end{cases}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} + \mathcal{E}\cdot i\omega c = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \mathcal{E}\cdot i\omega c =$$
$$= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)\right]\mathcal{E},$$

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2}\cdot\mathcal{E}_0;\quad \mathrm{tg}\phi = \frac{\omega c - \dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}};$$



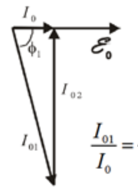
Векторная диграмма токов

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}};\quad \mathrm{tg}\phi_1 = -\frac{\omega L}{R};$$

Если $\omega L >> R$, то $\phi_1 \approx \pi/2$.

$$I_0 \approx \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot\mathcal{E}_0 = \frac{R}{\omega^2 L^2}\mathcal{E}_0;\Rightarrow$$

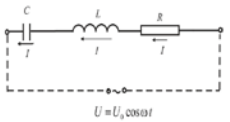
$I_0 = \min$, если $\omega = \omega_0^2 = \dfrac{1}{Lc}$.



$$\mathrm{tg}\phi \approx \frac{\omega^2 L^2}{R}\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right) = 0,\ \text{если}\ \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{Lc};$$

$$\frac{I_{01}}{I_0} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L}}{\dfrac{R}{\omega_0^2 L^2}\mathcal{E}_0} = \frac{\omega_0 L}{R}\frac{2}{2} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{T_0\gamma} = Q;\ I_{02} = \mathcal{E}_0\omega_0 c = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} = I_{01};$$

Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения



$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + i\omega L - i\dfrac{1}{\omega c}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z|e^{i\phi}} = \frac{U_0 e^{i\omega t - i\phi}}{|Z|},$$

$$\text{где}\ |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2};\ \mathrm{tg}\phi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$I = \frac{U_0}{|Z|}\cos(\omega t - \phi) = I_0\cos(\omega t - \phi);\Rightarrow P = UI = U_0\cos(\omega t) I_0\cos(\omega t - \phi) =$$

$$= [2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)] = \frac{I_0 U_0}{2}[\cos(2\omega t - \phi) + \cos(\phi)].$$

$$< P > = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P\,dt = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\phi = \underbrace{[U_0\cos\phi = I_0 R]}_{\text{см. векторную диаграму}} = \frac{I_0^2 R}{2} = I_e^2 R,$$

$I_e = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ – эффективное значение тока,

$U_e = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$ – называется эффективным значением напряжения.

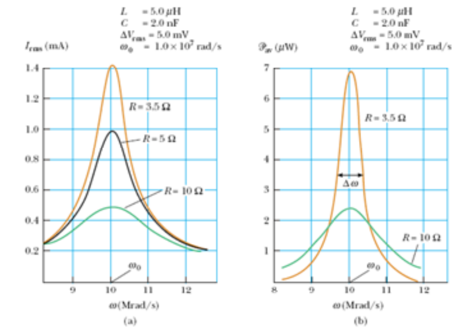
$\cos\phi$ – коэффициент мощности.

$$\phi = \arg(R + i(\omega L - \frac{1}{\omega c}));\Rightarrow \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega c})^2}}.$$

Если $(\omega L - \dfrac{1}{\omega c})^2 >> R^2$, то $\cos\phi << 1$.

Зависимость средней мощности переменного тока поглощаемой в контуре от частоты имеет резонансный вид.

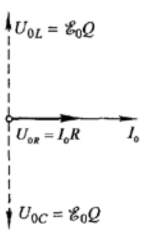
$$< P > = I_0^2 R/2$$



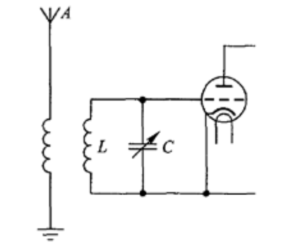
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Active Figure 33.19 (a) The rms current versus frequency for a series *RLC* circuit, for three values of *R*. The current reaches its maximum value at the resonance frequency ω_0. (b) Average power delivered to the circuit versus frequency for the series *RLC* circuit, for two values of *R*.

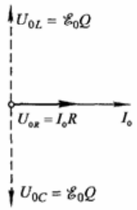
Применение резонанса напряжений в радиотехнике.



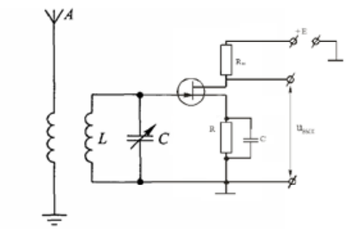
Векторная диаграмма напряжений при резонансе



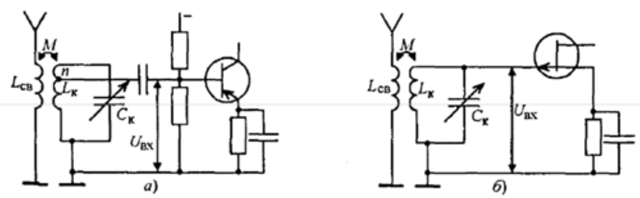
Входной контур радиоприемника (схематически)



Векторная диаграмма напряжений при резонансе

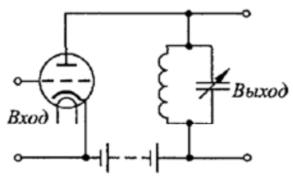


Входной контур радиоприемника (схематически)



Схемы с трансформаторной связью одноконтурной входной цепи с антенной: *а* – с биполярным транзистором; *б* – с полевым транзистором

Применение резонанса токов.



Резонансный усилитель

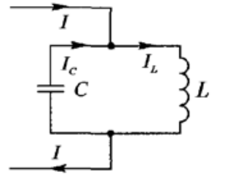
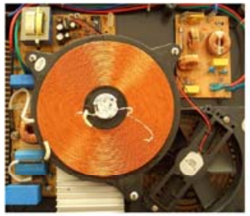
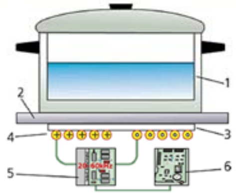


Схема нагревающего контура индукционной цепи

19.21

Индукционная плита

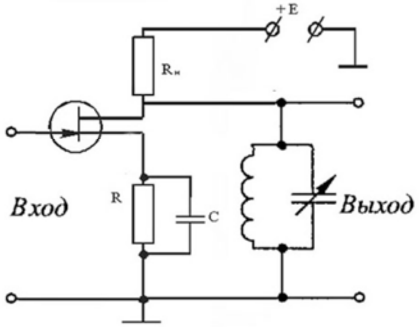




1 - посуда,
2 - стеклокерамическая поверхность, 3 - изоляция,
4 - индукционная катушка,
5 - преобразователь частоты,
6 - блок управления.

19.22

Резонансный усилитель



Резонансный усилитель

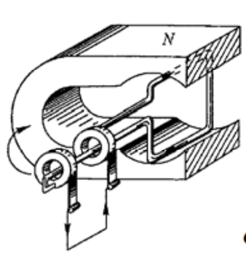
23

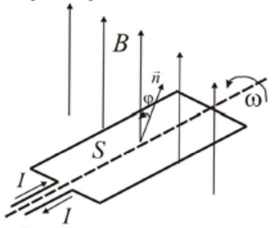
Лекция 20.

- Техническое использование переменных токов. Генераторы и электродвигатели. Трехфазный ток. Получение и использование вращающегося магнитного поля. Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.
- Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.

Генераторы и электродвигатели.

Принцип действия генератора переменного тока.



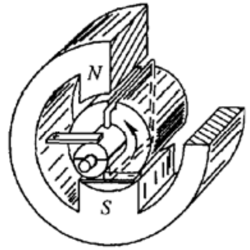


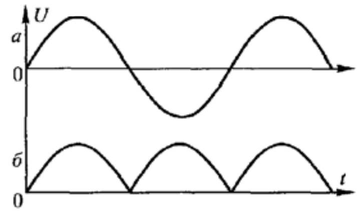
$$\Phi = BS\cos\varphi; \quad \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}BS\cos(\omega t+\varphi_0) = \underbrace{BS\omega}_{\mathscr{E}_0}\sin(\omega t+\varphi_0) = \mathscr{E}_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\sin(\omega t+\varphi_0) = I_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

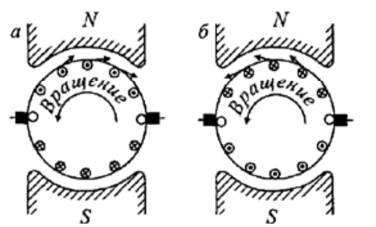
Принцип действия генератора постоянного (пульсирующего) тока.





Принцип действия генератора и электродвигателя постоянного тока

Электродвигатель постоянного тока.



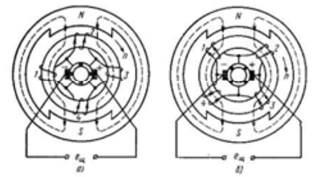
Электродинамические силы, действующие на якорь генератора (*а*) и двигателя (*б*) постоянного тока

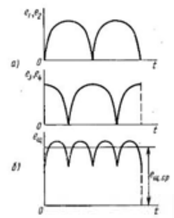
$$I_Я = \frac{(U - \mathscr{E}_{инд.})}{r_Я}.$$

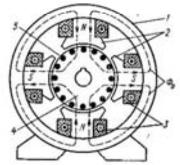
Для пуска мощных электродвигателей используется реостат, так как при неподвижном якоре ток $I_Я = U / r_Я$ большой.

Схема простейшего генератора постоянного тока с кольцевым якорем

$$e_ш = e_1 + e_2 = e_3 + e_4$$

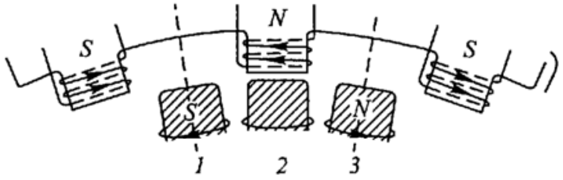




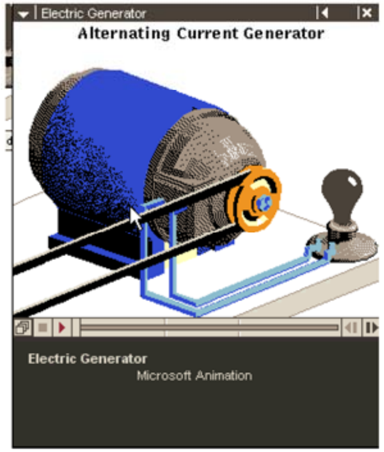


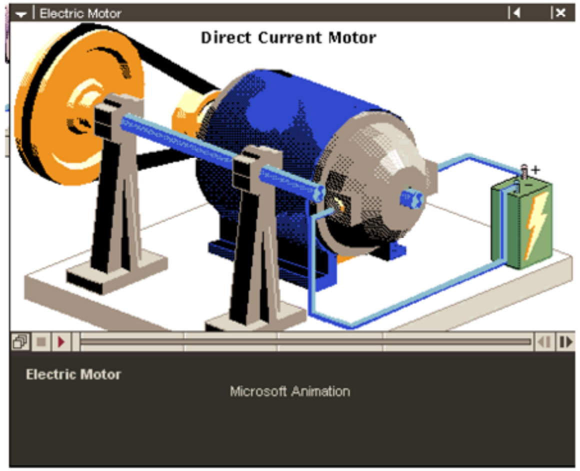
Генератор постоянного тока без щеток

Синхронные двигатели.



Принцип синхронного двигателя переменного тока





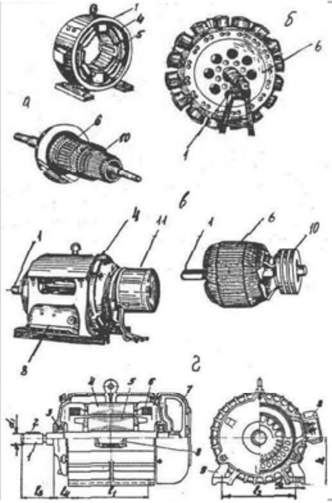
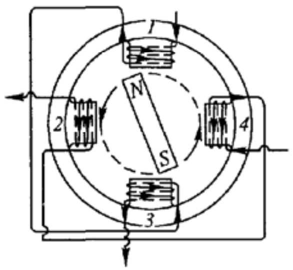


Рис. 2. Электрические двигатели: а - постоянного тока; б - синхронные; в ~ асинхронные с фазным ротором; г - асинхронные трехфазные с коротко замкнутым ротором серии 4А. 1 - вал, 2 ~ шпонка, 3 -подшипник, 4 - статор, 5 - обмотка статора, 6 - ротор (якорь); 7 - вентилятор; 8 - коробка выводов; 9 - лапа, 10 - коллектор; 11 - щетки; l1, l2 - продольное и поперечное расстояния в лапах; l3 - длина выступающего конца вала; l4. - размер выступающей крышки; h - высота оси вращения; d1, d2 - диаметры вала и отверстий в лапах.

Двухфазный ток.



Получение двухфазного тока

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t),$$
$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t - 90^0).$$

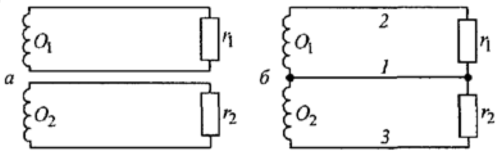


Схема двухфазной системы токов

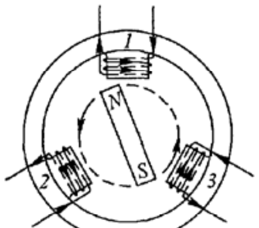
Напряжения между концами обмоток O_1 и O_2 называют *фазными напряжениями*, токи в O_1 и O_2 — фазными токами. Эти же названиями обозначают напряжения и токи в нагрузочных сопротивлениях r_1 и r_2. Напряжения же между проводами линии *1*, *2* и *3* называют *линейными напряжениями*, а токи в этих проводах — *линейными токами*.

Если принять потенциал общего провода 1 за нуль, то

$$U_{12} = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t), \quad U_{13} = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t - 90^0), \quad U_{23} = U_{12} - U_{13} =$$
$$= \mathscr{E}_0 \sin(\omega t) - \mathscr{E}_0 \sin(\omega t - 90^0) = 2\mathscr{E}_0 \sin 45^0 \cos(\omega t - 45^0) =$$
$$= \sqrt{2}\mathscr{E}_0 \sin(\omega t + 45^0).$$

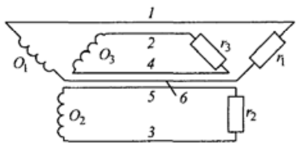
Трехфазный ток.

Михаи́л О́сипович Доли́во-Доброво́льский (1861-1919)



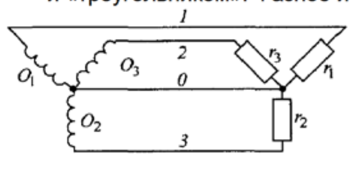
Получение трехфазного тока

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t),$$
$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t - 120^0),$$
$$\mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t - 240^0).$$

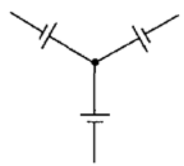


Трехфазная система токов

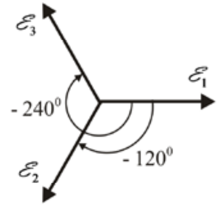
Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.

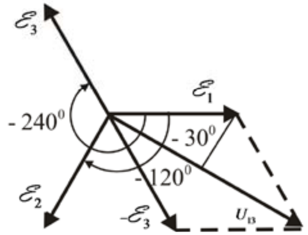


Соединение звездой



Соединение трех источников тока звездой



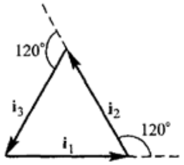


$$U_{13} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 240^0) =$$

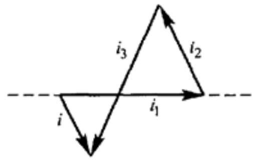
$$= 2\mathcal{E}_0 \underbrace{\cos(30^0)}_{\sqrt{3}/2} \sin(\omega t - 30^0) = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 30^0).$$

Аналогично получим

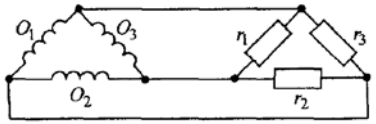
$$U_{12} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 120^0) = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + 30^0).$$



Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Симметричная нагрузка



Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Несимметричная нагрузка



Соединение треугольником

Получение и использование вращающегося магнитного поля.

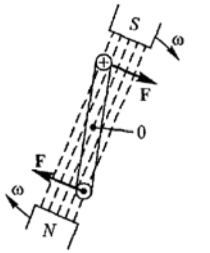


Рис 222. Действие вращающегося магнитного поля на замкнутый виток проволоки

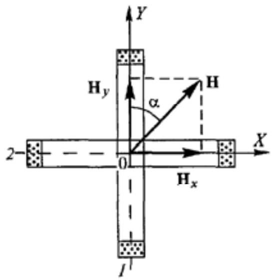
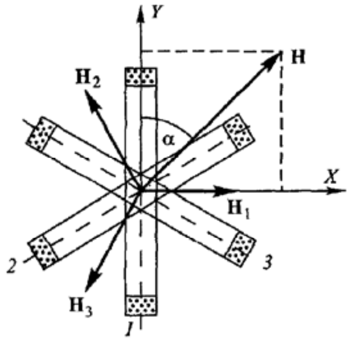


Рис. 223. Возникновение вращающегося магнитного поля двухфазного тока

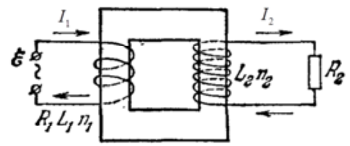
$$H_x = H_0 \sin\omega t; H_y = H_0 \sin(\omega t - 90^0) = -H_0 \cos\omega t.$$



$$H_1 = H_0 \sin\omega t,$$
$$H_2 = H_0 \sin(\omega t - 120°),$$
$$H_3 = H_0 \sin(\omega t - 240°).$$

Рис 224 Возникновение вращающегося магнитного поля трехфазного тока

Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.



$$R_1 I_1 = \underbrace{U_1}_{\mathcal{E}} - \underbrace{\dot{\Phi}_1}_{i\omega\Phi_1},$$

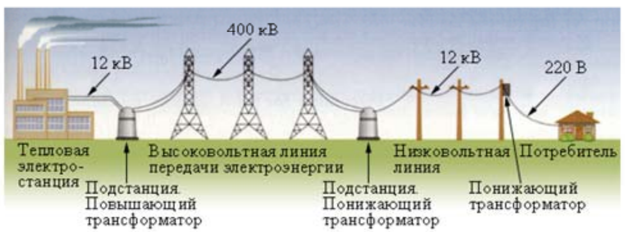
$$\underbrace{R_2 I_2}_{U_2} = -\underbrace{\dot{\Phi}_2}_{i\omega\Phi_2}.$$

Обычно $I_1 R_1 << \mathcal{E} \Rightarrow U_1 = i\omega\Phi_1, U_2 = -i\omega\Phi_2.$ $\Phi_1 = n_1\Phi_0, \Phi_2 = n_2\Phi_0,$

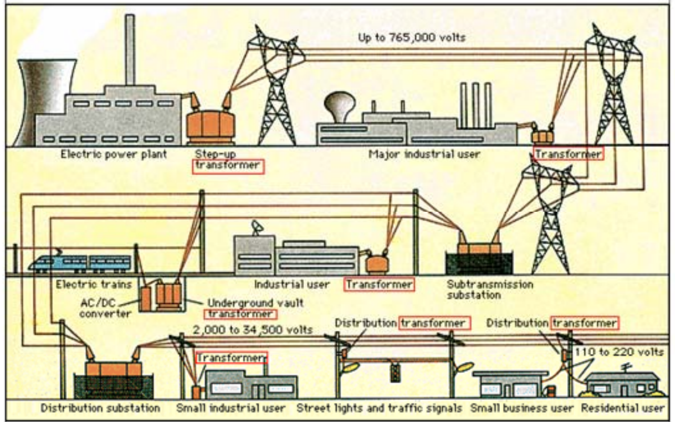
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{n_2}{n_1} = K - \text{коэффициент трансформации.}$$

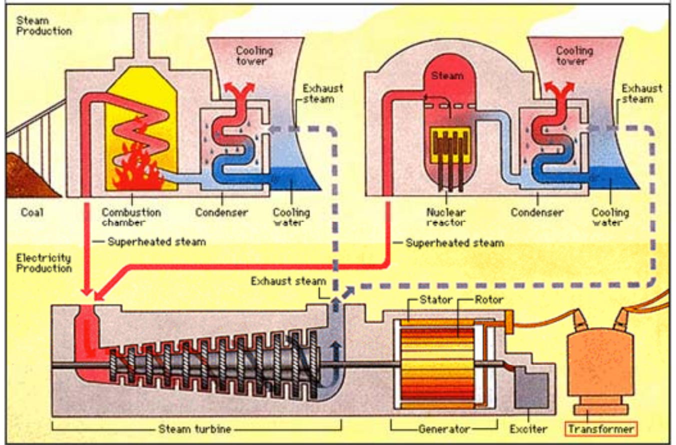
$$P_1 = P_2; \Rightarrow I_1 U_1 = I_2 U_2; \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Производство и передача электроэнергии



Как это сделано - Электрический трансформатор.





Лекция 21.

- Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.
- Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя.
- Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Вектор Умова-Пойтинга. Скорость распространения электромагнитных волн.

Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec D=\rho,\\ \mathrm{rot}\vec E=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int\limits_{S_V}\vec D d\vec S=\int\limits_V \rho dV,\\ \oint\limits_L \vec E\cdot d\vec l=0.\end{cases}$$

$$\vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P,$$

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec B=0,\\ \mathrm{rot}\vec H=\vec J,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int\limits_{S_V}\vec B d\vec S=0,\\ \oint\limits_L \vec H\cdot d\vec l=\int\limits_{S_L}\vec J\cdot d\vec S.\end{cases}$$

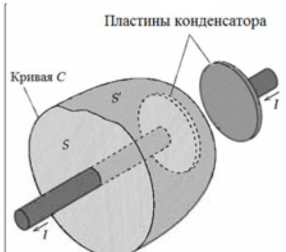
$$\vec B=\mu_0(\vec H+\vec I),$$

$$\mathrm{rot}\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t} \Leftrightarrow \oint\limits_L \vec E d\vec l=-\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec B d\vec S.$$

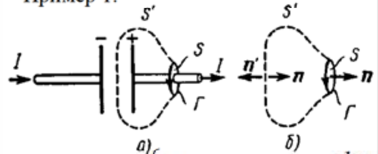
$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec D=\rho,\\ \mathrm{div}\vec B=0,\\ \mathrm{rot}\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t},\\ \mathrm{rot}\vec H=\vec J+\underbrace{\dfrac{\partial\vec D}{\partial t}}_{\vec J_{см}},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int\limits_{S_V}\vec D d\vec S=\int\limits_V \rho dV,\\ \int\limits_{S_V}\vec B d\vec S=0,\\ \oint\limits_L \vec E d\vec l=-\dfrac{d}{dt}\int\limits_S \vec B d\vec S,\\ \oint\limits_L \vec H\cdot d\vec l=\int\limits_{S_L}\vec J\cdot d\vec S+\underbrace{\dfrac{d}{dt}\int\limits_S \vec D d\vec S}_{I_{см}}.\end{cases}$$

$$\vec J_{см}=\frac{\partial\vec D}{\partial t}$$ – плотность тока смещения.

$$I_{см}=\int\limits_S \vec J_{см}d\vec S=\int\limits_S \frac{\partial\vec D}{\partial t}d\vec S$$ – ток смещения.



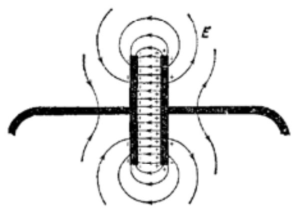
Пример 1.



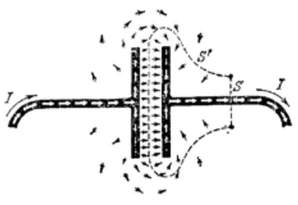
$$\oint\limits_\Gamma \vec H\cdot d\vec l=\begin{cases}\int\limits_S \vec J\cdot d\vec S=I=-\dfrac{dq}{dt},\\ \int\limits_{S'}\vec J\cdot d\vec S'=0,?\end{cases}$$

$$\oint\limits_{S+S'}\vec J d\vec S=-\frac{dq}{dt}=-\frac{d}{dt}\oint\limits_{S+S'}\vec D d\vec S=-\oint\limits_{S+S'}\frac{\partial\vec D}{\partial t}d\vec S;\Rightarrow \oint\limits_{S+S'}\underbrace{(\vec J+\frac{\partial\vec D}{\partial t})}_{\vec J_{пол}}d\vec S=0.$$

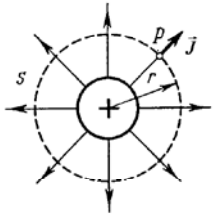
$$0=\oint\limits_{S+S'}\vec J_{пол}d\vec S=\int\limits_S \vec J_{пол}\vec n dS+\int\limits_{S'}\vec J_{пол}\underbrace{\vec n' dS}_{-\vec n dS};\Rightarrow \underbrace{\int\limits_S \vec J_{пол}\vec n dS}_{I_{пол}}=\underbrace{\int\limits_{S'}\vec J_{пол}\vec n dS}_{I'_{пол}}.$$



Электрическое поле в определенный момент времени. Величина поля E всюду уменьшается со временем.



Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).



Пример 2.

$$\mathrm{rot}\underbrace{\vec H}_{=0}=\vec J+\underbrace{\frac{\partial\vec D}{\partial t}}_{\vec J_{см}}=0;\quad D4\pi r^2=q;\Rightarrow$$

$$J=-\frac{\partial D}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{1}{4\pi r^2}=\frac{I}{4\pi r^2};$$

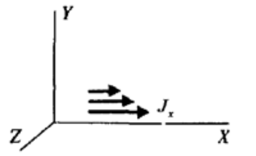
Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя

Второе условие квазистационарности: $|\vec J|>>\left|\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right|$.

Пусть $\vec E=\vec E_0\sin\omega t$. Тогда, учитывая $\vec D=\varepsilon\varepsilon_0\vec E, \vec J=\vec E/\rho$, имеем $E_0/\rho>>\omega\varepsilon\varepsilon_0E_0$. Или $\omega<<1/(\varepsilon\varepsilon_0\rho)$. Для меди $1/(\varepsilon_0\rho)=1/(8,85\cdot10^{-12}\,Ф/м\cdot1,72\cdot10^{-8}\,Ом\cdot м)=6,6\cdot10^{18}\,рад/с$

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t},\\ \mathrm{rot}\vec H=\vec J,\end{cases}\quad \underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec E)}_{\mathrm{grad\,div}\vec E-\Delta\vec E,\ =\rho=0}=-\mathrm{rot}\frac{\partial\vec B}{\partial t}=-\frac{\partial\,\mathrm{rot}(\mu\mu_0\vec H)}{\partial t}=-\mu\mu_0\frac{\partial\vec J}{\partial t};$$

$$\Delta\vec E=\frac{\mu\mu_0}{\rho}\frac{\partial\vec E}{\partial t}.$$



Скин-эффект в бесконечном проводнике с плоской границей

$$\frac{\partial^2E_x(y,t)}{\partial y^2}=\frac{\mu\mu_0}{\rho}\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Полагая $E_x(y,t)=E_0(y)e^{i\omega t}$, имеем

$$\frac{\partial^2E_0(y)}{\partial y^2}=\frac{\mu\mu_0}{\rho}i\omega E_0(y).$$

$$E_0(y)=Ae^{-ky}+Be^{ky},\quad k^2E_0(y)=i\frac{\mu\mu_0\omega}{\rho}E_0(y),\quad \frac{1}{\delta^2}=\frac{\mu\mu_0\omega}{2\rho}.$$

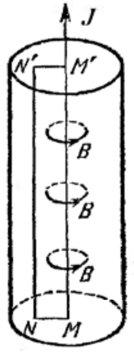
$$k=\frac{\sqrt2}{\delta}\sqrt i=\sqrt2\frac{1}{\delta}\frac{i+1}{\sqrt2}.$$

Из граничных условий: $|E_0(y)|<\infty$ при $y\to\infty$, $\Rightarrow B=0$.

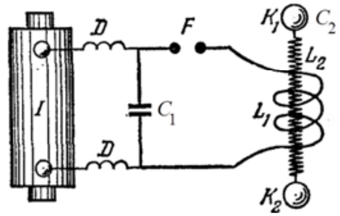
$$E_x(y,t)=Ae^{-\frac{y}{\delta}(1+i)}e^{i\omega t}=Ae^{-\frac{y}{\delta}}e^{i(\omega t-\frac{y}{\delta})}.\ \delta=\sqrt{\frac{2\rho}{\mu\mu_0\omega}}$$ –

-толщина скин-слоя.

Например, если $\omega=10^4$ рад/с$^{-1}$, $\rho=1{,}72\cdot10^{-8}\,Ом\cdot м$ (медь), $\mu=1$, $\mu_0=1{,}27\cdot10^{-6}$ Гн/м , $\delta=1{,}65\,мм$.



Высокочастотный резонансный трансформатор Тесла



$$\frac{C_1U_1^2}{2}=\frac{C_2U_2^2}{2}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

8

Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной и бесконечной среде или в вакууме при $\rho=0$ и $J=0$.

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec D=0, \quad \mathrm{div}\vec B=0,\\ \vec D=\varepsilon\varepsilon_0\vec E, \quad \vec B=\mu\mu_0\vec H,\\ \mathrm{rot}\;(\mathrm{rot}\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}),\\ \mathrm{rot}\;(\mathrm{rot}\vec H=\dfrac{\partial\vec D}{\partial t}),\end{cases}\quad \begin{cases}\mathrm{grad}\;\underbrace{\mathrm{div}\vec E}_{=0}-\Delta\vec E=-\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec B=-\mu\mu_0\dfrac{\partial^2\vec D}{\partial t^2},\\ \mathrm{grad}\;\underbrace{\mathrm{div}\vec H}_{=0}-\Delta\vec H=\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec D=-\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec B}{\partial t^2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\vec E-\underbrace{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}_{1/v^2}\dfrac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}=0, \quad \text{Где } v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\\ \Delta\vec H-\underbrace{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}_{1/v^2}\dfrac{\partial^2\vec H}{\partial t^2}=0, \quad c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\end{cases}$$

9

Пусть $\vec E=\vec E(z,t),\vec H=\vec H(z,t)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec E}{\partial z^2}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}=0,\Rightarrow\vec E(t-\dfrac{z}{v}),\\ \Delta\vec H-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec H}{\partial t^2}=0,\Rightarrow\vec H(t-\dfrac{z}{v}),\end{cases}$$

$$\vec E=\vec E_0\cos[\omega(t-\frac{z}{v})]=\vec E_0\cos[\omega t-\overbrace{\frac{\omega}{v}}^{k}z]=\vec E_0\cos[\omega t-kz],$$

$\left(\frac{\omega}{k}=v \text{ по определению } k\right)$

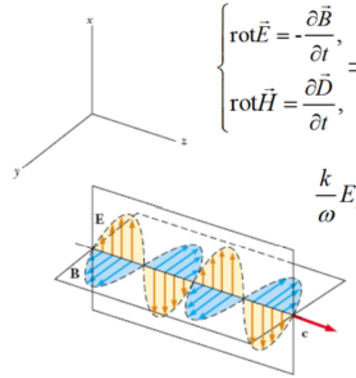
$$\vec E=\vec E_0\cos[\omega t-\vec k\vec r]=\vec E_0e^{i(\omega t-\vec k\vec r)}.$$

Аналогично $\vec H_0\cos[\omega t-\vec k\vec r]=\vec H_0e^{i(\omega t-\vec k\vec r)}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec E_0e^{i(\omega t-\vec k\vec r)}=i\omega\vec E_0e^{i(\omega t-\vec k\vec r)};\mathrm{rot}\vec E=[\nabla,\vec E]=-i[\vec k,\vec E],$$

$$\mathrm{div}\vec E=\nabla\cdot\vec E=-i\vec k\cdot\vec E.$$

10



$$\begin{cases}\mathrm{rot}\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t},\\ \mathrm{rot}\vec H=\dfrac{\partial\vec D}{\partial t},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[-i\vec k,\vec E]=-i\omega\vec B=-i\omega\mu\mu_0\vec H,\\ [-i\vec k,\vec H]=i\omega\vec D=i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec E,\end{cases}$$

$$\vec k\perp\vec E\perp\vec H$$

$$\frac{k}{\omega}E_x=\mu\mu_0H_y,\ \frac{k}{\omega}=\frac{1}{v}=\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_x=\sqrt{\mu\mu_0}H_y,$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu\mu_0}H_0,$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{\omega}=Tv$$

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon\mu}$$

11

Вектор Умова-Пойтинга.

$$w=\vec E\vec D/2+\vec H\vec B/2$$

Учитывая равенства $\vec D=-[\frac{\vec k}{\omega},\vec H]$, $\vec B=[\frac{\vec k}{\omega},\vec E]$, имеем

$$w=-\vec E[\frac{\vec k}{\omega},\vec H]/2+\vec H[\frac{\vec k}{\omega},\vec E]/2=\vec H[\frac{\vec k}{\omega},\vec E]=\frac{\vec k}{\omega}[\vec E,\vec H].$$

$\vec S=[\vec E,\vec H]-$ вектор Умова-Пойтинга, $\vec k\perp\vec E\perp\vec H$,

$\left|\vec S\right|=\dfrac{\omega}{k}w=vw=|$ для вакуума $|=cw.$

12

Вектор Умова-Пойтинга (строгий вывод).

$$P=\int_\infty\vec J\vec EdV=\int_\infty(\mathrm{rot}\vec H-\frac{\partial\vec D}{\partial t})\vec EdV=|\,\mathrm{div}[\vec E,\vec H]=\mathrm{rot}\vec E\cdot\vec H-\mathrm{rot}\vec H\cdot\vec E\,|=$$

$$=\int_\infty(\underbrace{\mathrm{rot}\vec E}_{=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}}\cdot\vec H-\mathrm{div}[\vec E,\vec H]-\frac{\partial\vec D}{\partial t}\vec E)dV=-\int_\infty\mathrm{div}[\vec E,\vec H]dV+$$

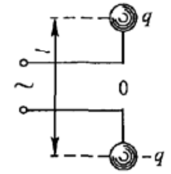
$$+\int_\infty(-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\vec H-\frac{\partial\vec D}{\partial t}\vec E)dV=|\,\vec B=\mu\mu_0\vec H;\quad\vec D=\varepsilon\varepsilon_0\vec E\,|=$$

$$-\int_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec E,\vec H]}_{\vec S}d\vec\sigma-\frac{\partial}{\partial t}\int_\infty\underbrace{(\frac{\vec H\vec B}{2}+\frac{\vec E\vec D}{2})}_{w}dV;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_\infty wdV}_{W_{\text{электр.поля}}}=-P-\int_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec E,\vec H]}_{\vec S}d\vec\sigma;\Rightarrow\vec S=[\vec E,\vec H]-$$ поток энергии электромагнитного поля.

13

Излучение электромагнитных волн элементарным диполем.

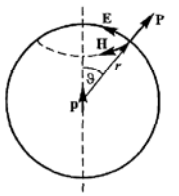


Элементарный диполь

$p=p_0\sin\omega t$, где $p_0=q_0l$;

$I=dq/dt=q_0\omega\cos\omega t=I_0\cos\omega t,\ p_0=I_0l/\omega.$

При $r\gg\lambda$ – волновая зона, поле равно



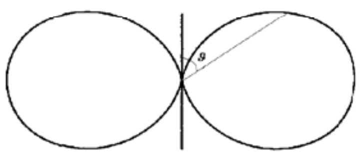
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ddot p(t-r/c)\sin\vartheta}{c^2r},$$

$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E.$$

14

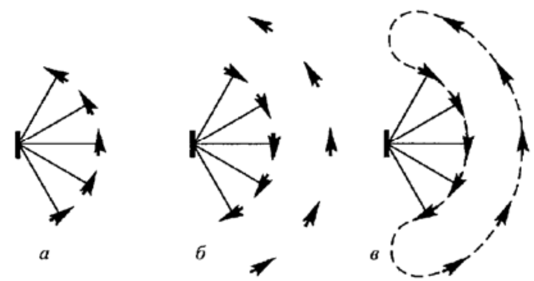
Для гармонических колебаний $\ddot p(t-r/c)=-p_0\omega^2\sin[\omega(t-r/c)]$.

$$S=EH=\frac{p_0{}^2\omega^4\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}\sin^2[\omega(t-r/c)];\Rightarrow\langle S\rangle=\frac{p_0{}^2\omega^4\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}\frac{1}{2}.$$



$$dW_{\text{изл.}}=\int_{S_r}Sd\sigma=\int_{S_r}S2\pi r^2\sin\vartheta d\vartheta=\frac{1}{12\pi}\frac{p_0^2\omega^4}{\varepsilon_0c^3}.$$

15



Форма линий напряженности поля излучающего диполя

16

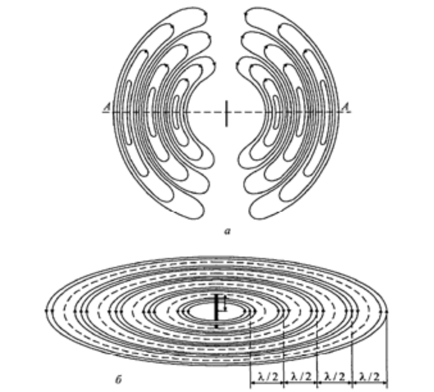
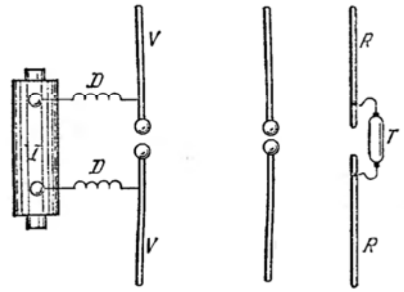


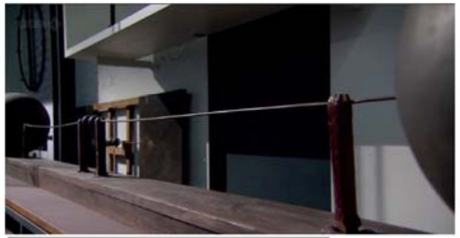
Рис 425 Линии напряженности (а) и индукции (б) в шаровой электромагнитной волне диполя

17

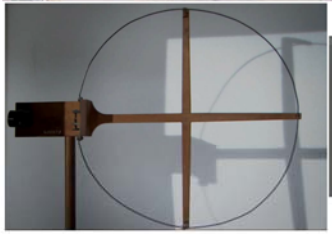
Электромагнитные волны обнаружены Генрихом Герцем в 1888 году с помощью вибратора Герца.



21

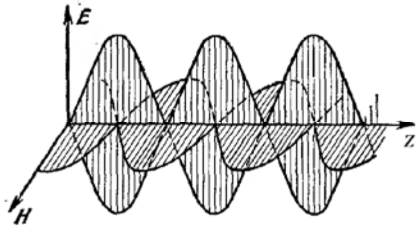


Оригинальная установка Герца

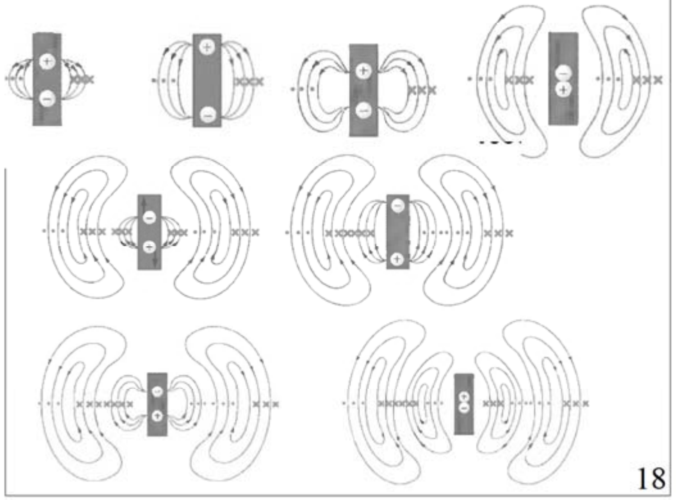


Поле стоячей электромагнитной волны.

$$E_x = E_0\cos(\omega t - kz),\quad H_y = H_0\cos(\omega t - kz),$$
$$E_x = E_0\cos(\omega t + kz),\quad H_y = -H_0\cos(\omega t + kz).$$
$+$
$$E_x = 2E_0\cos kz\cos\omega t, H_y = 2H_0\sin kz\sin\omega t.$$



22



18

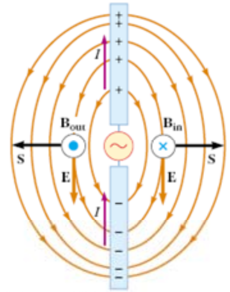
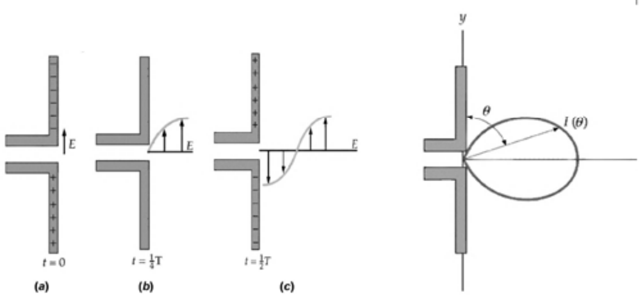


Figure 34.10 A half-wave antenna consists of two metal rods connected to an alternating voltage source. This diagram shows **E** and **B** at an arbitrary instant when the current is upward. Note that the electric field lines resemble those of a dipole (shown in Fig. 23.22).

19



20

Лекция 22.

- Основные положения классической электронной теории проводимости Друде – Лоренца. Опыты Толмена и Стюарта. Законы Ома, Джоуля – Ленца и Видемана – Франца в классической теории.
- Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон. Принцип Паули. Статистика Ферми-Дирака. Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.

Опыты Толмена и Стюарта (1916г.).

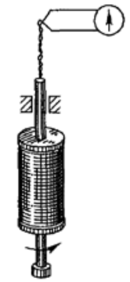


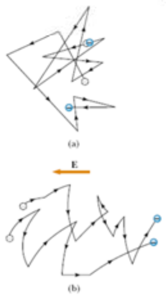
Схема опыта Толмена и Стюарта

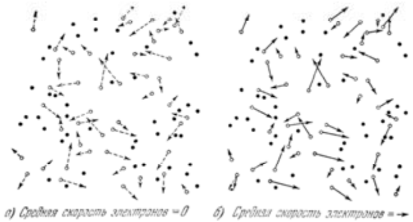
$$F_{и} = -m\frac{dv}{dt};\quad E_{стор.} = \frac{F_{и}}{e} = -\frac{m}{e}\frac{dv}{dt},$$

$$\mathcal{E} = \int_L E_{стор.}\,dl = -\frac{m}{e}\frac{dv}{dt}L,\quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{m}{e}\frac{dv}{dt}\frac{L}{R}.$$

$$q = \int_{I_0}^{0} I\,dt = \frac{m}{e}\frac{L}{R}v_0.$$

Основные положения классической электронной теории проводимости Друде – Лоренца.





$$\vec{J} = en < \vec{v} >, \text{ где } < \vec{v} > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\underbrace{(2\vec{v}_{i0} + \frac{e\vec{E}}{m}t_i)}_{\vec{v}_{i,ср.}=(\vec{v}_{i0}+\vec{v}_i)/2}.$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i0} + \vec{a}\cdot t,$$

$$a = e\frac{\vec{E}}{m}.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\vec{v}_{i0} = 0, \quad < \vec{v} > = \frac{e\vec{E}}{m}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i}_{\tau} = \frac{e\vec{E}}{2m}\tau.$$

Законы Ома и Джоуля – Ленца.

$$\tau = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}t_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}n_i t_i - \text{ среднее время между соударениями.}$$

Здесь n_j – число частиц из n, имеющих время межу столкновениями t_i.

$$\vec{J} = en < v > = en\frac{e\vec{E}}{2m}\tau = \underbrace{\frac{ne^2\tau}{2m}}_{\lambda}\vec{E} = \lambda\vec{E} - \text{закон Ома.}$$

Пусть n_i – число частиц в ед. обьема, имеющие время между столкновениями t_i.

Энергия приобретаемая этими частицами за время t_i равна

$$\sum_{i=1}^{n_i}\left(\frac{m(\vec{v}_{i0} + \Delta\vec{v}_i)^2}{2} - \frac{mv_{i0}^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n_i}\left(\frac{m}{2}(\vec{v}_{i0}^2 + \underbrace{2\vec{v}_{i0}}_{=0}\cdot\underbrace{\Delta\vec{v}_i}_{e\vec{E}t_i/m} + \Delta\vec{v}_i^2) - \frac{mv_{i0}^2}{2}\right) = n_i\frac{m}{2}\frac{e^2E^2t_i^2}{m^2}.$$

Эта энергия в результате столкновения с ионами переходит в тепло. За ед. времени число столкновений с ионами таких частиц равно $1/t_i$. Следовательно, энергия приобретенная n_i частицами за 1с равна

$$\frac{n_i}{t_i}\frac{m\Delta v_i^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{e^2E^2n_it_i}{m^2} = \frac{e^2E^2}{2m}n_it_i.$$

Энергия приобретаемая от электрического поля всеми электронами в единице объема за 1с и переходящая в тепло в результате столкновений с ионами будет равна

$$Q = \sum_i \frac{e^2E^2}{2m}n_it_i = \frac{ne^2E^2}{2m}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_i n_it_i}_{\tau} = \frac{ne^2E^2}{2m}\tau = \lambda E^2 -$$

закон Джоуля-Ленца.

Закон Видемана – Франца в классической теории.

В 1853 году Видеман и Франц установили, что для металлов $\chi/\lambda = aT$, где постоянная a не зависит от рода металла. То есть металлы, имеющие большую электропроводность, имеют и большую теплопроводность. Классическая электронная теория Друде-Лоренца объясняет этот феномелогический закон.

$$\vec{J}_Q = -\chi\nabla T,$$

где $\chi = nc_v v_T < l > /3$, где $< l > = v_T\tau, c_v = 3k_Б/2 -$ теплоемкость, приходящая на один электрон.

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{nc_V v_T^2\tau/3}{ne^2\tau/2m} = \frac{2}{3}\frac{mv_T^2}{e^2}c_V = \left|v_T^2 = \frac{3k_БT}{m}\right| = 3\underbrace{\frac{k_Б^{\,2}}{e^2}}_{a}T = aT.$$

Трудности классической электронной теории.

1) $\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2}\frac{1}{\tau} = \frac{2m}{ne^2}\frac{v_T}{< l >} = \frac{2m}{ne^2}\frac{\sqrt{3k_БT/m}}{\sqrt{2}n\sigma} \sim \sqrt{T},$

а не $\sim T \quad (\rho = \rho_0(1+\alpha T))$.

2) $U = i\frac{k_БT}{2}N, \; C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = i\frac{k_Б}{2}N,$ где $i = n_{пос} + n_{вр} + 2n_{кол}.$

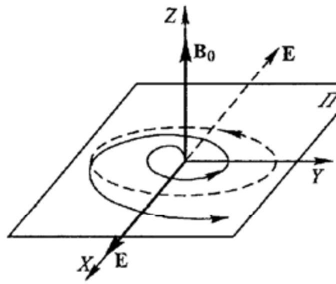
$$C_v = C_{v\,ионов} + C_{v\,электронов} = 2\cdot 3\frac{k_Б}{2}N + 3\frac{k_Б}{2}N = 4{,}5k_БN.$$

Эксперементальное значение: $C_v = 3k_БN.$

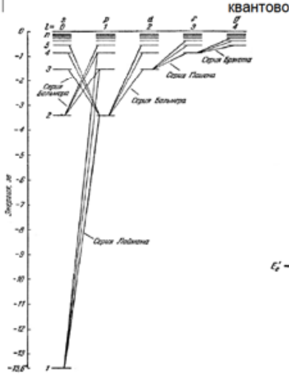
3)Экспериментальные значения для средняя длина свободного пробега $< l >$ составляет десятки перидов кристаллической решетки.

4) Значение эффективной массы электрона проводимости в металле, полученное на основании данных циклотронного резонанса оказалось меньше массы свободного электрона.

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m^*}B, \text{ где } m^* < m_e$$



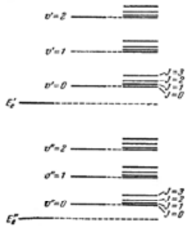
Поведение электронов в металлах подчиняются законам квантовой или волновой механики. Движение электронов подобно волновому движению материи и описывается волновой функцией, определяемой квантовомеханическим уравнением Шредингера. Рассмотрим основные особенности квантовомеханических систем.



Энергетический спектр атома водорода.

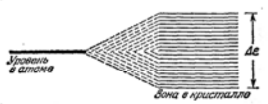
W_n, где $n = 1,2,3,\cdots$. $\quad P_n = \int\limits_{\infty}\Psi_n^{\,2}dV.$

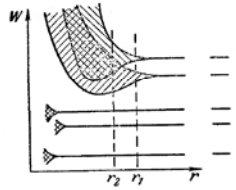
$$\Psi_n(x,y,z,t) = \Psi_{n,l,m,s}.$$

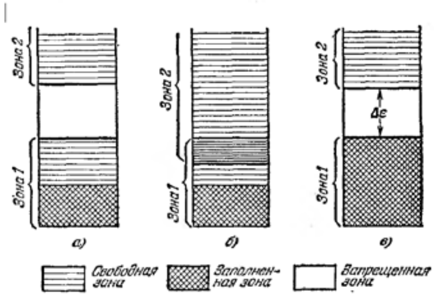


Энергетический спектр молекул.

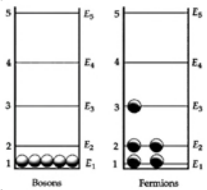
Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон.







Принцип Паули. Статистика Ферми-Дирака.



Число частиц в ед. объема, имеющих импульс в интервале

$p_x, p_x + dp_x; p_y, p_y + dp_y; p_z, p_z + dp_z,$

равно $dn = f(W)dp_xdp_ydp_z$, где

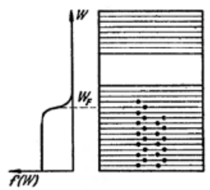
$f(W) = Ae^{-\frac{W}{k_БT}} -$ плотность распределения частиц по импульсам. В квантовой статистике число микросостояной конечно

$$dZ = 2\frac{dp_xdp_ydp_z}{h^3}; \Rightarrow dn = f(W)dZ,$$

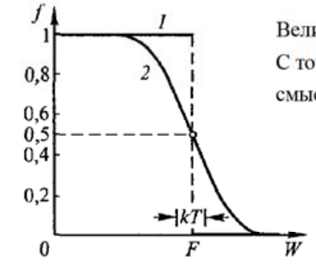
где для ферьми частиц

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp[(W-F)/k_БT]} -$$

–распределение Ферми-Дирака



Если $(W-F)/k_БT >> 1$, то $f(W) = \underbrace{e^{\frac{F}{k_БT}}}_{A}e^{-\frac{W}{k_БT}}$



Функция Ферми–Дирака 1 — $T = 0$, 2 -- $T \neq 0$

Величина F называется энергия Ферми. С точки зрения термодинамики имеет смысл химического потенциала

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$$

В металлах $F = (1-6)$ эВ.

При комнатной температуре $k_Б T = 0{,}03$ эВ.

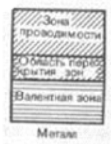
Для меди $\frac{k_Б T}{F} = 0{,}004.$

Число электронов участвующих в тепловом движении мало, поэтому $C_v = 3k_Б N$.

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2}\frac{v_T}{<l>}; v_T = v_F, \text{ где } F = mv_F^2/2,$$

$$\frac{1}{<l>} = \frac{1}{l_{фл}} + \frac{1}{l_{пр}};\ \frac{1}{l_{фл}} \sim T, l_{пр} = const; \Rightarrow \rho = \rho_0 + \alpha T.$$

Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.



Происхождение эффективной массы электронов.

$$W = U + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = W(\vec{p}).$$

В металле вблизи дна зоны проводимости (p отсчитывается от p_c)

$$W = W(\vec{p}) = W(\underbrace{0}_{\vec{p}=\vec{p}_c}) + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2}}_{1/m_x^*} p_x^2 + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2}}_{1/m_y^*} p_y^2 + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_z^2}}_{1/m_z^*} p_z^2 + \cdots$$

Объяснение закона Видемана-Франца в рамках квантовых представлений.

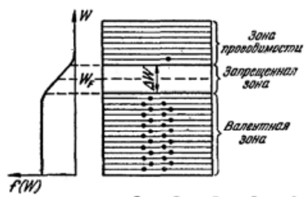
$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{2}{3}\frac{mv_T^2}{e^2}c_V, \quad \text{где } \frac{mv_T^2}{2} = F, \quad c_V = \frac{12}{5}k_Б\frac{k_Б T}{F}$$

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{4}{3}\frac{mv_T^2/2}{e^2}c_V = \frac{4}{3}\frac{F}{e^2}\frac{12}{5}k_Б\frac{k_Б T}{F} = \underbrace{\frac{16}{5}\frac{k_Б^2}{e^2}}_{a}T.$$

Лекция 23.

- Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Полупроводники p- и n-типа .p – n-переход. Применение полупроводников: полупроводниковые диоды, транзисторы, фотодиоды, фоторезисторы.
- Контактные явления. Контактная разность потенциалов. Термоэлектричество. Термодвижущая сила. Термопары. Эффект Пельтье. Явление Томсона.
- Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников. Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейснера. Критическое поле. Высокотемпературная сверхпроводимость. Применение сверхпроводников.

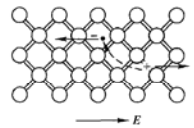
Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников.



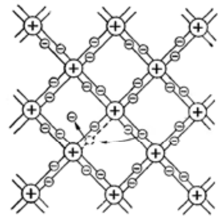
$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp[(W - F)/k_Б T]} \approx e^{\frac{\Delta W}{k_Б T}}.$$
$$W_F$$

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta W}{k_Б T}}.$$

Собственная проводимость полупроводников

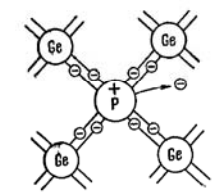


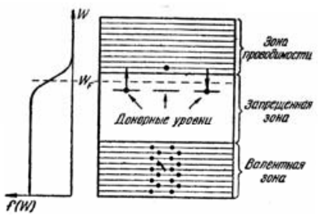
Возникновение электрона проводимости и дырки в решетке кремния

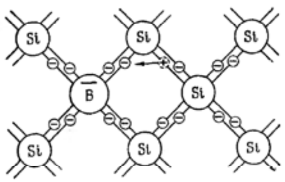


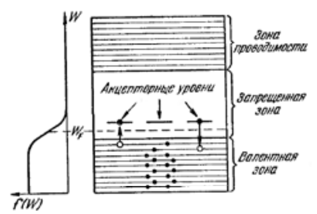
Примесеая проводимость полупроводников.

Полупроводники p- и n-типа.

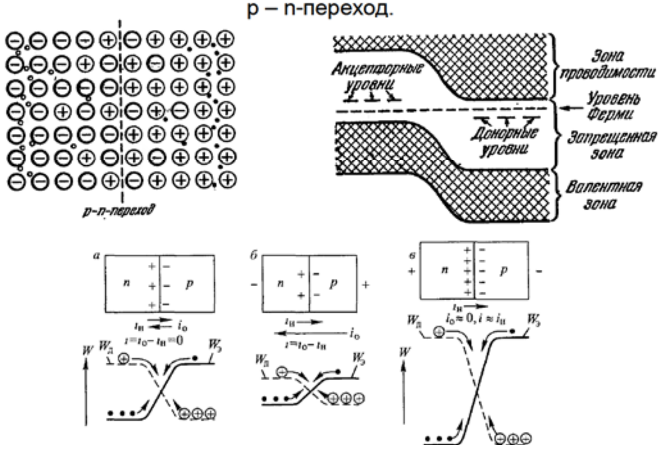








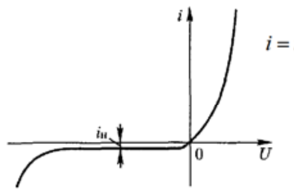
p – n-переход.



Электрический ток в $p - n$-переходе

Применение полупроводников. Полупроводниковый диод.

$$i = i_s(e^{\frac{eU}{k_Б T}} - 1)$$



Вольт-амперная характеристика $p - n$-перехода

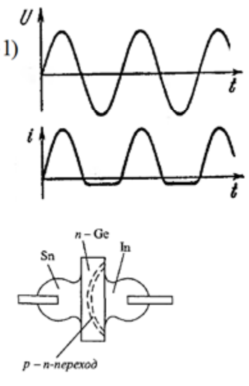
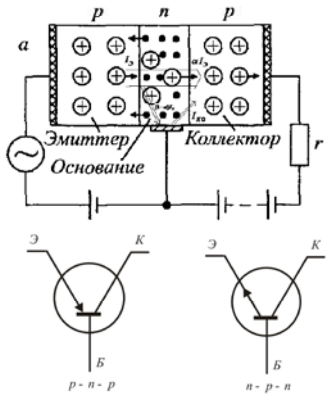


Схема германиевого выпрямителя

Применение полупроводников. Биполярные и полевые транзисторы.

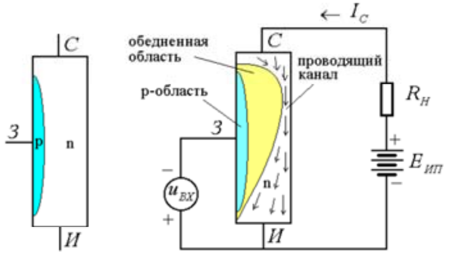


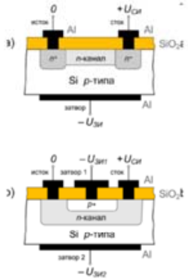
$$I_К = I_{К0} + \alpha I_Э \approx \alpha I_Э$$

$$\frac{I_К}{I_{ЭБ}} = \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} -$$

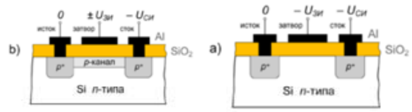
- коэффициент усиления по току

$$\alpha = 0{,}98 - 0{,}99.$$



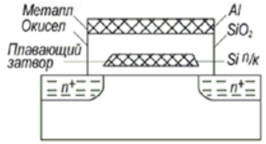


Устройство полевого транзистора с управляющим p-n переходом

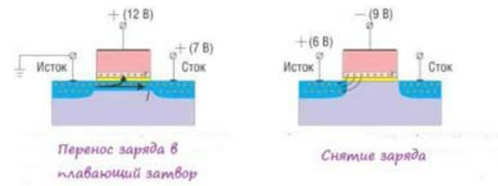


Устройство полевого транзистора с изолированным затвором.

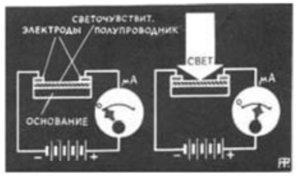
Топология полупроводниковых запоминающих устройств (МОП ПТ с плавающим затвором)

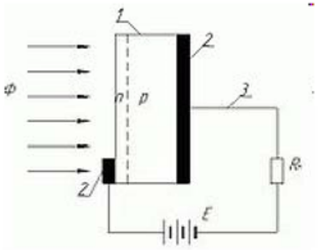


Зарядка плавающего затвора осуществляется за 0.1мкс, разрядка – более 100 лет при комнатной температуре



фоторезисторы, фотодиоды.





Структурная схема фотодиода. 1 — кристалл полупроводника; 2 — контакты; 3 — выводы; Ф — поток электромагнитного излучения; Е — источник постоянного тока; Rн — нагрузка.

Контактные явления. Контактная разность потенциалов. [2,§198]

$$U_{12} = U_1 - U_2, \quad eU_{12} = \Phi_1 - \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 - работы выхода.

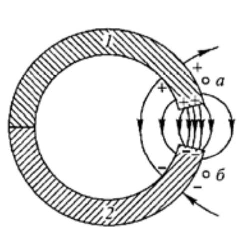


Рис 336 При соприкосновении двух различных металлов во внешнем пространстве появляется электрическое поле, а на поверхности металлов возникают заряды

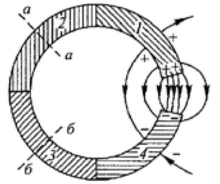


Рис 337. При соединении нескольких проводников (*1, 2, 3, 4*) электрическое поле между свободными концами цепи определяется только крайними проводниками (*1* и *4*)

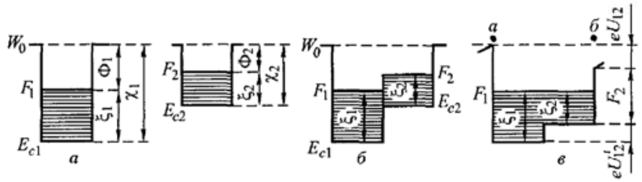


Рис. 339. Энергетическая диаграмма двух металлов: *а* — контакта нет; *б* — контакт есть, но нет равновесия; *в* — равновесие

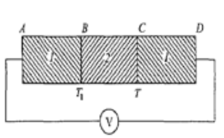
Здесь W_0 – энергия покоящегося электрона в вакууме, $\chi_1 = W_0 - E_{c1}$ и $\chi_2 = W_0 - E_{c2}$ – глубина потенциальных ям (электронное сродство данного вещества), $F - E_c = \xi$ - химический потенциал электронов.

$$\Phi_1 = W_0 - F_1 = \chi_1 - \xi_1, \quad \Phi_2 = W_0 - F_2 = \chi_2 - \xi_2,$$

$$-eU_1 - (-eU_2) = (\chi_1 - \xi_1) - (\chi_2 - \xi_2) = \Phi_1 - \Phi_2.$$

$$eU_{12}^i = e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2.$$

Термоэлектричество (явление Зеебека 1821г.). Термодвижущая сила. [2,§199].



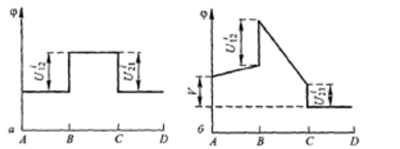
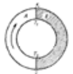


Рис. 341. Распределение потенциала в цепи, изображенной на рис. 340, при $T_1 = T$ (*а*) и при $T_1 > T$ (*б*)

$$\Delta\mathscr{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T.$$



$\Delta\mathscr{E}_i = \alpha_i \Delta T$ – термо-ЭДС каждого проводника.

$\alpha = d\mathscr{E}/dT$ – дифференциальная термо-ЭДС, (коэффициент термо-ЭДС).

$$\mathscr{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_1 - \alpha_2)dT; \quad \Rightarrow \mathscr{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_2 - T_1).$$

Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$, мкВ/К	Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$, мкВ/К
Висмут	−65,0	Серебро	+7,10
Константан	−34,4	Медь	+7,40
Никель	−16,4	Железо	+16,0
Палладий	−5,60	Сурьма	+47,0

Термопары. [2,§202].

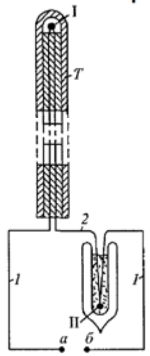


Рис. 346. Схема устройства и включения термопары

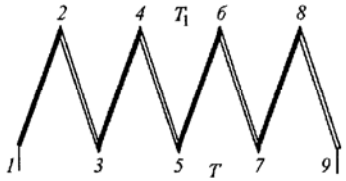


Рис. 347. Схема термобатареи

Эффект Пельтье. [2,§200]

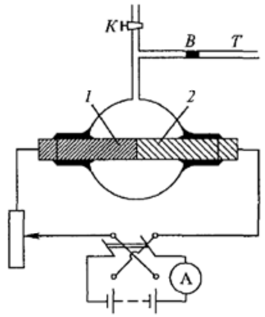


Рис 342 Наблюдение эффекта Пельтье

$$Q_П = \Pi q = \Pi i t.$$

$$P = -\frac{j}{e}(\overline{W}_к - e\varphi) \quad \text{, где } N = j/e$$

$$Q_П = (P_1 - P_2)St = \frac{1}{e}[(\overline{W}_{к2} - \overline{W}_{к1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]it,$$

$$\Pi_{12} = \frac{1}{e}[(\overline{W}_{к2} - \overline{W}_{к1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Для невырожденного электронного газа $\overline{W}_{K1} = \overline{W}_{K2}; \Rightarrow \Pi_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) = U_{12}^i.$

Явление Томсона.

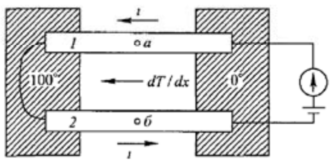


Рис. 344. Наблюдение эффекта Томсона

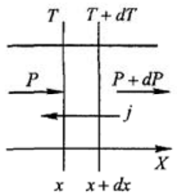
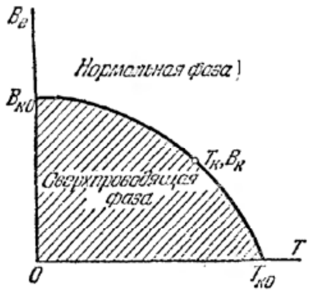


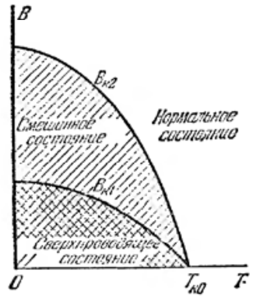
Рис. 345. К объяснению тепла Томсона

$\dfrac{Q_T}{\Delta Vt} = \sigma \dfrac{dT}{dx} J -$ дифф. форма закона, $Q_T = \sigma \Delta T i t -$ интегр. форма закона,

$$\frac{Q_T}{\Delta Vt} = \frac{P(x) - P(x+dx)}{dx} = -\frac{dP(x)}{dx} = \frac{J}{e}\frac{d\bar{W}_K}{dx} - J\frac{d\varphi}{dx}.$$

$$\frac{d\bar{W}_K}{dx} = \frac{d\bar{W}_K}{dT}\frac{dT}{dx}; \Rightarrow \frac{Q_T}{\Delta Vt} = \frac{J}{e}\frac{d\bar{W}_K}{dT}\frac{dT}{dx} + JE.$$





Если фактор формы $\beta \neq 0$, то образец сверхпроводника первого рода переходит в нормальное состояние частями (доменами). Сверхпроводники 1-го рода с положительной поверхностной энергией, 2-го рода - с отрицательной.

Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников. Высокотемпературная сверхпроводимость.

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Переход вещества в сверхпроводящее состояние в отсутствии внешнего магнитного поля является фазовым переходом 2-го рода, в присутствии поля – - 1-го рода. Наибольше значении критической температуры (до 1986 года) было у соединений ниобия и германия 23,2 К.

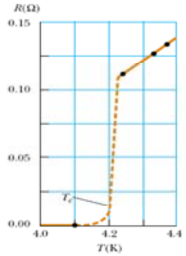


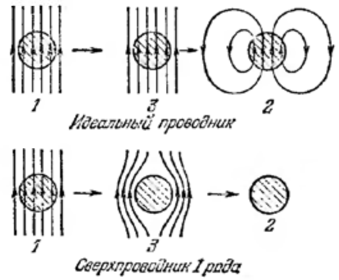
Figure 27.12 Resistance versus temperature for a sample of mercury (Hg). The graph follows that of a normal metal above the critical temperature T_c. The resistance drops to zero at T_c, which is 4.2 K for mercury.

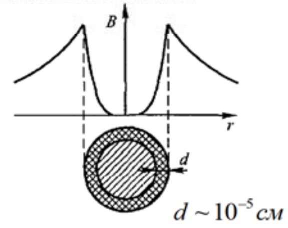
Table 27.3

Critical Temperatures for Various Superconductors

Material	T_c(K)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134
Tl–Ba–Ca–Cu–O	125
Bi–Sr–Ca–Cu–O	105
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейсснера. Критическое поле.





$d \sim 10^{-5}$ см

Рис 256 Магнитная индукция прямого провода в сверхпроводящем состоянии

Укажем для примера, что у олова при 1 К $H_{кр}$ составляет около $2 \cdot 10^4$ А/м. Поэтому для оловянной проволоки диаметром $2a = 3$ мм критическая сила тока при этой температуре равна

$$i_{кр} = 2\pi a H_{кр} = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 180 \text{ А}.$$