

Л.С. Кузьменков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

КЛАССИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

*Допущено УМО по классическому
университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
ВО 03.03.02 – Физика*



МОСКВА НАУКА 2015

УДК 531
ББК 22.31
К89

Рецензенты

доктор физико-математических наук
профессор,
академик Академии естественных наук
А.А. Рухадзе

доктор физико-математических наук
профессор,
заведующий кафедрой теоретической физики РУДН
Ю.П. Рыбаков

ISBN 978-5-02-039144-4

© Кузьменков Л.С., 2015
© Редакционно-издательское
оформление. Издательство
“Наука”, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Глава 1. Симметрия пространства и законы преобразования динамических функций	11
§ 1. Общие свойства пространства и времени	11
§ 2. Изотропия пространства и физические характеристики движения и взаимодействий	14
§ 3. Криволинейные координаты	20
§ 4. Точечные частицы. Динамические функции	23
Глава 2. Частицы во внешних силовых полях	27
§ 5. Уравнения движения точечной частицы	27
§ 6. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии частицы	30
1. Сохранение импульса	30
2. Сохранение момента импульса	31
3. Сохранение энергии частицы	33
§ 7. Движение в однородных силовых полях	34
1. Фокусировка электронов магнитным полем	34
2. Магнитная изоляция	35
3. Дрейф заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях	37
4. Релятивистские циклотронная частота и радиус траектории	39
§ 8. Гравитационное взаимодействие частиц и поля	40
1. Сила гравитационного притяжения двух частиц	40
2. Взаимодействие частицы и поля тяготения	43
Глава 3. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа частицы в силовом поле	49
§ 9. Лагранжева форма уравнений движения точечной частицы	49
§ 10. Обобщенно-потенциальные силы. Сила Лоренца. Функция Лагранжа частицы в электромагнитном поле	51

§ 11. Неоднозначность функции Лагранжа. Калибровочные преобразования	56
§ 12. Уравнения Лагранжа в криволинейных координатах и неинерциальных системах отсчета	58
§ 13. Циклические координаты и законы сохранения для точечной частицы	65
Глава 4. Движение в неоднородных силовых полях	69
§ 14. Динамические закономерности в неоднородных силовых полях	69
1. Общие свойства одномерного движения в консервативном поле	69
2. Собственные одномерные колебания	71
3. Вынужденные одномерные колебания	76
4. Циклотронный резонанс; движение частиц в ондуляторах	82
5. Индукционное ускорение частиц. Конфигурация полей и энергия частиц	86
6. Устойчивость движения	91
7. Расщепление частоты пространственного осциллятора в магнитном поле	93
§ 15. Движение в центральном поле	95
§ 16. Движение в поле $U = -\alpha/r$	99
1. Общий вид траекторий	99
2. Фinitное движение под действием силы притяжения	100
3. Инфинитное движение под действием силы притяжения	103
4. Инфинитное движение под действием силы отталкивания	105
Глава 5. Динамика системы двух взаимодействующих частиц; пучки частиц	107
§ 17. Движение двух частиц с энергией взаимодействия $U(r_1 - r_2)$ (задача двух тел)	107
§ 18. Рассеяние частиц	111
§ 19. Эффективное сечение рассеяния	117
§ 20. Рассеяние жестких сфер	120
§ 21. Рассеяние частиц с кулоновским взаимодействием. Формула Резерфорда	123
1. Начальные состояния пучков и энергия относительного движения частиц	123
2. Рассеяние пучка частиц на неподвижной мишени	125
3. Рассеяние встречных пучков частиц	128
Глава 6. Системы взаимодействующих частиц	132
§ 22. Динамика системы взаимодействующих частиц	132

1. Функция Лагранжа и уравнения движения системы взаимодействующих частиц	132
2. Изменение во времени импульса системы; движение тела с переменной массой	134
3. Изменение со временем энергии системы	136
4. Изменение во времени момента импульса (кинетического момента) системы	138
§ 23. Теорема о вириале	140
§ 24. Система частиц в неинерциальной системе отсчета	142
§ 25. Задача трех тел	144
§ 26. Движение относительно Земли	147
1. Общее решение уравнений движения вблизи поверхности Земли	147
2. Маятник Фуко (линейные колебания)	150
§ 27. Принцип относительности	152
Глава 7. Движение частиц, ограниченное связями	158
§ 28. Уравнения движения систем при наличии связей	158
1. Уравнения Лагранжа с реакциями связей (1-го рода). Метод неопределенных множителей Лагранжа	159
2. Эволюция энергии системы тел при наличии связей	161
3. Принципы механической генерации электрического тока	162
§ 29. Уравнения Лагранжа (2-го рода) в независимых координатах для систем со связями	168
Глава 8. Вариационные принципы механики	172
§ 30. Уравнения Лагранжа и принцип наименьшего действия	172
§ 31. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени	174
1. Теорема Нётер	174
2. Однородность времени и сохранение энергии	176
3. Однородность пространства и сохранение импульса	177
4. Изотропия пространства и сохранение момента импульса	178
Глава 9. Динамика твердых тел	179
§ 32. Формулировка динамической задачи для твердого тела	179
§ 33. Пространственная ориентация твердого тела. Углы Эйлера	181
§ 34. Угловая скорость твердого тела	183
§ 35. Функция Лагранжа твердого тела	185
§ 36. Жесткая двухатомная молекула (двухатомный ротатор) в электрическом поле	190
§ 37. Преобразование тензора инерции при параллельном переносе координатных осей	193

§ 38. Приведение тензора инерции к главным осям	194
§ 39. Вычислительные формулы	197
1. Многоатомная линейная молекула	198
2. Плоские многоатомные молекулы	199
3. Пирамидальные молекулы	200
4. Континуальная модель твердого тела	201
5. Примеры вычислений инерционных характеристик сплошных твердых тел	205
Глава 10. Практические задачи динамики твердых тел	211
§ 40. Симметричный волчок с одной неподвижной точкой в однородном гравитационном поле	211
§ 41. Уравнения для импульса и момента импульса твердого тела как уравнения движения	214
1. Уравнения Эйлера	214
2. Условия равновесия систем твердых тел	219
3. Неудерживающая связь (пример)	219
4. Неголономные системы	222
5. Шар на шероховатой плоскости	225
§ 42. Интегрирование уравнений Эйлера движения свободного твердого тела	227
Глава 11. Малые колебания систем взаимодействующих частиц	232
§ 43. Линейные колебания консервативных систем	232
§ 44. Нормальные (главные) координаты и нормальные колебания	236
§ 45. Нулевые частоты. Колебания молекул	239
§ 46. Вынужденные колебания консервативных систем	244
§ 47. Линейные колебания диссипативных систем	245
§ 48. Вынужденные колебания диссипативных систем	247
Глава 12. Нелинейные колебания	250
§ 49. Построение асимптотических решений для слабонелинейных систем методом Крылова–Боголюбова	250
1. Системы, близкие к линейным	250
2. Метод Крылова–Боголюбова	251
3. Консервативные системы, близкие к линейным	255
4. Системы с нелинейным трением	257
§ 50. Автоколебания	258
§ 51. Системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты	264
§ 52. Движение в быстро осциллирующем поле; динамическая стабилизация	268

§ 53. Параметрический резонанс. Метод усреднения	272
Глава 13. Канонические уравнения	276
§ 54. Уравнения Гамильтона	276
§ 55. Уравнения Гамильтона и вариационный принцип	278
§ 56. Функция Гамильтона и энергия системы	279
§ 57. Интегралы движения в фазовых пространствах. Сепарабельные гамильтонианы	281
§ 58. Скобки Пуассона. Алгебра Ли динамических функций	284
§ 59. Теорема Пуассона	287
§ 60. Формальное решение центральной задачи гамильтоновой динамики	288
Глава 14. Производящие функции канонических преобразований и метод Гамильтона–Якоби	293
§ 61. Канонические преобразования; производящие функции	293
§ 62. Теорема Лиувилля; уравнение Лиувилля	297
§ 63. Метод Гамильтона–Якоби	300
1. Уравнение Гамильтона–Якоби	301
2. Теорема Якоби	303
3. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных систем	304
4. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби	305
5. Движение в центральном поле и поле диполя (канонические переменные)	307
§ 64. Переменные «действие–угол»	308
Глава 15. Континуальные методы динамики систем взаимодействующих частиц	313
§ 65. Полевые динамические функции	313
1. Общая характеристика метода	313
2. Физически бесконечно малый объем и полевые динамические функции	314
§ 66. Уравнение непрерывности	319
§ 67. Уравнения баланса импульса систем взаимодействующих частиц	322
§ 68. Уравнения баланса импульса систем частиц с конечным радиусом взаимодействия. Тензор напряжений	327
§ 69. Уравнение баланса импульса систем частиц с кулоновским взаимодействием	330
1. Уравнения баланса импульса электронной и ионных компонент системы	330
2. Экранирование поля электрического заряда в плазме	336
3. Продольные плазменные волны	338

§ 70. Уравнение баланса энергии	340
§ 71. Уравнения баланса энергии систем частиц с конечным радиусом взаимодействия	345
§ 72. Уравнения баланса энергии систем частиц с кулоновским взаимодействием	349
§ 73. Проблемы формулировки замкнутого аппарата	352
§ 74. Идеальная жидкость и идеальный газ	354
1. Уравнения баланса импульса и энергии идеальной жидкости; адиабатические процессы	354
2. Интегралы Бернулли и Лагранжа–Коши движения идеальной жидкости	356
3. Звуковые волны	359
§ 75. Уравнение Навье–Стокса	360
§ 76. Замкнутая система уравнений гидродинамики	362
Литература	363

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая механика — фундаментальная наука о движении систем материальных объектов в собственных и внешних силовых полях. В ее основе лежит фундаментальный физический закон, устанавливающий взаимодействие частицы с полем в качестве единственного объективного физического механизма изменения импульса частицы со временем (второй закон Ньютона). Полное представление о динамике систем взаимодействующих частиц дает система уравнений движения частиц и уравнений силового поля, — классическая механика является органической фундаментальной составляющей теоретической физики. Взаимодействие частиц и полей устанавливается, если предварительно найдены напряженности полей путем решения уравнений в частных производных или на основании экспериментальных данных.

Динамические нерелятивистские и релятивистские эффекты во внешних полях, лежащие в основе современных технологий, такие как циклотронный резонанс, индукционное ускорение частиц, голономные связи в механизме механической генерации электрического тока, фокусировка заряженных частиц магнитным полем, магнитная изоляция и др., представлены в виде отдельных задач и включены в основной текст книги.

Для динамики в заданных полях продуктивными являются методы Лагранжа, Гамильтона, Гамильтона–Якоби. Эти методы дают также детальное представление о характере движения системы двух взаимодействующих частиц в конфигурационном и фазовом пространствах. Для трех тел мы можем определить только конфигурацию системы (задачи Лагранжа). Представления об алгебре Ли и группах Ли включены, поскольку эта алгебра реализована на множестве динамических функций классической механики и множестве эрмитовых операторов квантовой механики.

Энергия связи системы частиц может значительно превышать их энергию во внешних полях. В таких условиях систему можно заменить модельной, твердым телом. Уравнения движения твердого тела могут быть получены в виде уравнений Лагранжа или

найлены как следствие законов изменения во времени полного импульса и полного момента импульса системы частиц.

При изучении и расчетах колебаний молекул, кристаллов, других многочастичных систем представления о твердом теле распространяются лишь на множество положений равновесия структурных единиц тела. Тогда при малых отклонениях от положений равновесия динамика системы частиц может быть сведена к линейным или нелинейным колебаниям.

Для систем с большим числом частиц развит континуальный метод преобразования (проектирования) аддитивных динамических функций классической механики в гладкие полевые динамические функции различной тензорной размерности, определяющие макросостояние системы. Приводятся уравнения баланса импульса и энергии для систем частиц с конечным радиусом взаимодействия и для частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Демонстрируется продуктивность метода для динамических задач гидродинамики, газодинамики, физики плазмы.

Изложение основано на принципах физической ясности, краткости и математической строгости, которыми автор руководствовался при подготовке и чтении курса лекций на физическом факультете МГУ.

Как и любая фундаментальная наука, механика развивается. Совершенствуются методы, появляются новые важные задачи, уточняются и модифицируются исходные понятия о частицах и силовых полях. С основными достижениями эволюции классической механики можно ознакомиться по книгам, включенным в список рекомендуемой литературы.

Глава 1

СИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА И ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие свойства пространства и времени

1. Физическое пространство вплоть до расстояний порядка видимого радиуса Вселенной (10^{28} см, или 10^{10} световых лет) является трехмерным евклидовым пространством.

2. Основанием для нумерации точек физического пространства, его арифметизации, служит понятие расстояния или длины. Если единица длины выбрана, то расстояние определено количественно, поскольку любая его часть может быть определена при помощи арифметических операций. Выбором единицы длины устанавливается физическая размерность чисел, нумерующих точки пространства.

3. Физическое пространство однородно и изотропно. Линейные размеры изолированного кубического кристалла не зависят от его положения и ориентации в пространстве. Поэтому всегда возможна арифметизация пространства при помощи введения декартовой системы координат с началом в произвольной точке пространства и произвольной ориентацией координатных осей. Выбор направления каждой координатной оси также произволен, так что координатами x , y , z точки могут служить как положительные, так и отрицательные вещественные числа. Ниже ради определенности используются только правые координатные системы.

4. Если в какой-либо области пространства регистрируется выделенное направление или неоднородность по отношению к распределению частиц и полей, то всегда может быть указана физическая причина нарушения пространственной симметрии — взаимодействие между частицами и силовыми полями. Нарушения симметрии, не связанные со взаимодействием частиц и полей, свидетельствовали бы о наличии собственной неоднородности и анизотропии пространства. Благодаря симметрии физического пространства по отношению к трансляциям и поворотам координатных осей имеют место законы сохранения импульса и момента импульса (теорема Э. Нётер; см. ниже).

5. Время t является количественной характеристикой движения, параметром, нумерующим последовательность состояний движения. При фиксированном t движение отсутствует, мир «заморожен». Начальный момент времени может быть выбран произвольно. Ему соответствует определенное «начальное» состояние движения. Представление о направлении времени связано с необратимостью, возможностью вести счет, при котором каждое предыдущее показание «счетчика» запоминается. Любой интервал между показаниями «счетчика» может служить единицей времени, однако во всех случаях этот интервал может быть выбран не зависящим от состояний движения и одним и тем же для всех точек пространства. Однородность времени связана с наличием закона сохранения энергии (теорема Э. Нётер).

6. Декартовы координаты одной и той же точки в системах координат S и S' , которые отличаются только ориентацией координатных осей, связаны ортогональным преобразованием. Действительно, радиус-вектор \mathbf{r} точки в системе S можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{n}_1 + x_2\mathbf{n}_2 + x_3\mathbf{n}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha}\mathbf{n}_{\alpha},$$

или кратко: $\mathbf{r} = x_{\gamma}\mathbf{n}_{\gamma}$ (здесь и далее по дважды повторяющимся греческим индексам $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ производится суммирование от единицы до трех и опускается знак суммы). Умножим это разложение на направляющий вектор \mathbf{n}'_{σ} координатной оси с номером σ системы S' . Получим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma} = x_{\beta} \mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma} \quad (\beta, \sigma = 1, 2, 3).$$

Так как $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma}$ есть координата x'_{σ} точки в системе S' , а $\mathbf{n}_{\beta}\mathbf{n}'_{\sigma}$ есть матрица 3×3 , элементами $a_{\beta\sigma}$ которой являются направляющие косинусы углов осей x'_{σ} по отношению к осям x_{β} , мы приходим к формулам

$$x'_{\sigma} = a_{\beta\sigma}x_{\beta}, \quad (1.1)$$

при помощи которых могут быть найдены координаты фиксированной точки в системе S или S' , если они известны в одной из них и известна взаимная ориентация координатных систем.

Длины и углы между радиусами-векторами в физическом пространстве не должны зависеть от ориентации координатной системы. Если в S $\mathbf{r}_1 = x_{\alpha}\mathbf{n}_{\alpha}$, $\mathbf{r}_2 = y_{\beta}\mathbf{n}_{\beta}$ и векторы \mathbf{n}_{α} ортонормированы, так что $\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера,

или единичная матрица, то

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_{\alpha}y_{\beta}\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta} = x_{\alpha}y_{\beta}\delta_{\alpha\beta} = x_{\alpha}y_{\alpha}.$$

Это произведение в системе S' должно быть равно $x'_{\sigma}y'_{\sigma}$, и мы получаем равенство

$$x_{\alpha}y_{\alpha} = x'_{\sigma}y'_{\sigma} = a_{\beta\sigma}a_{\gamma\sigma}x_{\beta}y_{\gamma}$$

для любых x_{α}, y_{β} . Следовательно,

$$a_{\beta\sigma}a_{\gamma\sigma} = \delta_{\beta\gamma}. \quad (1.2)$$

Слева в (1.2) стоит произведение матрицы на транспонированную (операция произведения матриц предполагает суммирование по соседним индексам), справа — единичная матрица $\delta_{\beta\gamma}$. Мы видим, что обратная матрица совпадает с транспонированной, т.е. $a_{\beta\sigma}$ — ортогональная матрица. Из (1.2) следует, что квадрат определителя такой матрицы равен единице и поэтому $\det(a_{\alpha\beta}) = \pm 1$.

Теперь для того чтобы получить обратные по отношению к (1.1) преобразования координат, достаточно умножить обе части равенства (1.1) на $a_{\alpha\sigma}$, просуммировать по σ и учесть условие ортогональности (1.2). Найдем

$$x_{\alpha} = a_{\alpha\beta}x'_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Систему координат S можно перевести в S' при помощи операции поворота. Каждому такому повороту соответствует ортогональная матрица с определителем, равным единице (отрицательный знак определителя соответствует операции зеркального отражения около неподвижного начала координат, при которой правая координатная система становится левой). Двум последовательным поворотам соответствует произведение матриц (если $x_{\alpha} = a_{\alpha\beta}x'_{\beta}$ и $x'_{\beta} = a_{\beta\sigma}x''_{\sigma}$, то $x_{\alpha} = a_{\alpha\beta}a_{\beta\sigma}x''_{\sigma}$). Существует обратный поворот, которому соответствует обратная матрица, единичный поворот на нулевой угол (единичная матрица $\delta_{\beta\gamma}$). Множество поворотов образует группу вращений (время t фиксировано) SO_3 трехмерного пространства.

Девять матричных элементов $a_{\alpha\beta}$ подчинены шести независимым уравнениям (1.2). Поэтому пространственная ориентация одной координатной системы относительно другой задается только тремя независимыми параметрами, группа SO_3 трехпараметрическая. Система координат S' может быть жестко связана с твердым телом. Поэтому пространственная ориентация твердого тела также будет определяться тремя независимыми параметрами.

§ 2. Изотропия пространства и физические характеристики движения и взаимодействий

Представление физических характеристик движения и взаимодействия при помощи функций координат и времени неизбежно содержит произвол, связанный со случайным выбором системы координат. Допустимыми являются лишь такие наборы функций, которые воспроизводятся с сохранением объективного физического содержания во всех декартовых системах координат, отличающихся ориентацией координатных осей. Закон преобразования каждого такого набора функций определяется инвариантным содержанием соответствующего физического объекта и матричными элементами $a_{\alpha\beta}$. Например, электрическое поле заряженного конденсатора сохраняет свои свойства независимо от того, как выбрана система координат (и выбрана ли вообще). Вместе с тем три функции, необходимые для количественного отображения его силовых свойств, будут различными в системах S и S' (как комбинации разных координат). Мы должны ограничить этот набор функций требованием, чтобы при поворотах S абсолютное значение напряженности поля оставалось одним и тем же, а числа, определяющие направление поля, подчинялись уже установленным правилам преобразования направляющих векторов декартовой системы координат.

В общем случае физические объекты, которые сами задают определенные направления в пространстве и могут изменяться по абсолютной величине независимо от их пространственной ориентации, представимы в виде An , где n , например, — один из направляющих векторов системы S . Умножим обе части разложения

$$\mathbf{n}'_{\sigma} = a_{\beta\sigma} \mathbf{n}_{\beta} \quad (2.1)$$

на An и положим $A'_{\alpha} = An \cdot \mathbf{n}'_{\alpha}$, $A_{\beta} = An \cdot \mathbf{n}_{\beta}$. Тогда получим

$$A'_{\alpha} = a_{\beta\alpha} A_{\beta}, \quad (2.2)$$

что эквивалентно

$$A_{\alpha} = a_{\alpha\beta} A'_{\beta}. \quad (2.3)$$

Равенствами (2.2), или (2.3), представлено общее определение вектора как набора трех чисел, отображающих основные свойства физических объектов определенного класса и связанных законом преобразования (2.3) для всех координатных систем S , S' . В общем случае компоненты вектора являются функциями координат и времени, $A_{\alpha} = A_{\alpha}(x, y, z, t)$, и формулы (2.3)

служат определением *векторного поля*. Из условий ортогональности (1.2) в этом случае следует, что

$$A_{\alpha} A_{\alpha} \equiv \mathbf{A}^2(x, y, z, t) = A'_{\alpha} A'_{\alpha} = \mathbf{A}'^2(x', y', z', t),$$

т.е. закон преобразования квадрата векторного поля при поворотах системы координат сводится к замене переменных по формулам (1.3). Такой закон преобразования служит определением скалярных (инвариантных) функций и является наиболее простым. Нетрудно проверить, что *скалярное поле* — это произведение (скалярное) $A_{\alpha} B_{\alpha} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ любых двух векторных полей.

Простой закон преобразования скалярных функций стимулирует их использование при количественном описании физических процессов даже тогда, когда эти функции не являются однозначными отображениями физических объектов (потенциалы силовых полей, функции Лагранжа и Гамильтона и т.п.).

Векторные поля $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ могут быть связаны линейной зависимостью $A_{\alpha} = T_{\alpha\beta} B_{\beta}$. Такая зависимость между физическими характеристиками должна сохраняться и при переходе к системе координат S' , т.е. иметь вид $A'_{\alpha} = T'_{\alpha\beta} A'_{\beta}$. Но компоненты A_{α} , так же как и B_{α} , преобразуются по формулам (2.2), (2.3). Используя эти формулы, находим

$$T_{\alpha\sigma} = a_{\alpha\beta} a_{\sigma\gamma} T'_{\beta\gamma}. \quad (2.4)$$

Если в произвольной декартовой системе координат физический объект задан девятью числами $T_{\alpha\beta}$, занумерованными двумя индексами α, β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) и связанными формулами преобразования (2.4) при поворотах координатных осей, то мы будем считать, что задан тензор второго ранга, а при $T_{\alpha\sigma} = T_{\alpha\sigma}(x, y, z, t)$ — *тензорное поле*. Сумма диагональных компонент, или *след* $T_{\alpha\alpha}$ тензорного поля, как видно из (2.4), не изменяется при операциях поворота, т.е. является скалярным полем.

Соотношения вида

$$A_{\alpha} = P_{\alpha\beta\gamma} T_{\beta\gamma}, \quad A_{\alpha} = P_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta} C_{\gamma}$$

между физическими характеристиками объектов будут сохранять свое физическое содержание во всех координатных системах S (*форминвариантными* или *ковариантными*), если $P_{\alpha\beta\gamma}$ будут компонентами тензора третьего ранга:

$$P_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} a_{\gamma\sigma} P'_{\mu\nu\sigma}. \quad (2.5)$$

Симметричный тензор второго ранга, $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, имеет в общем случае шесть различных компонент (тензор $C_{\alpha} D_{\beta} + C_{\beta} D_{\alpha}$,

составленный из компонент векторов, тензор инерции твердого тела, тензор кинетического давления, символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ и т. п.).

Антисимметричный тензор второго ранга, $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$, (тензор $C_\alpha D_\beta - C_\beta D_\alpha$, момент импульса, момент сил, напряженность магнитного поля и т. п.) имеет только три существенно различных составляющих. В этом отношении он подобен вектору. Поэтому можно переобозначить компоненты антисимметричного тензора $T_{\alpha\beta}$ так, что

$$T_1 = T_{23}, \quad T_2 = T_{31}, \quad T_3 = T_{12}, \quad (2.6)$$

и считать их составляющими псевдовектора («псевдо» от греч. «pséudos» — ложь). В частности, для тензора $K_{\alpha\beta} = C_\alpha D_\beta - C_\beta D_\alpha$ будем иметь

$$K_1 = C_2 D_3 - C_3 D_2, \quad K_2 = C_3 D_1 - C_1 D_3, \quad K_3 = C_1 D_2 - C_2 D_1.$$

Линейная зависимость $A_\alpha = T_{\alpha\beta} B_\beta$ между двумя векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} , в которой $T_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор, в новых обозначениях принимает вид

$$A_1 = B_2 T_3 - B_3 T_2, \quad A_2 = B_3 T_1 - B_1 T_3, \quad A_3 = B_1 T_2 - B_2 T_1.$$

(В каждой из этих строк две последние формулы получаются из первой циклической перестановкой индексов.) Эти формулы могут рассматриваться в качестве определений операции векторного произведения и допускают символическое представление

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}.$$

Мы видим, что векторное произведение двух векторов есть псевдовектор, а векторное произведение вектора и псевдовектора есть вектор. Примером псевдовектора может служить момент импульса частицы $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Псевдовекторы, дуальные антисимметрическим тензорам, могут рассматриваться в качестве самостоятельных дифференциально-геометрических объектов. Однако некоторые операции с ними (например, сложение вектора и псевдовектора) будут физически бессодержательными. Это связано с существенным отличием в законах преобразования компонент вектора и псевдовектора. В частности, для компоненты T_1 псевдовектора (2.6) в соответствии с формулами преобразования (2.4) имеем

$$T_1 = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})T'_1 + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})T'_2 + (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})T'_3. \quad (2.7)$$

Здесь $a_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}'_\beta$, так что строки определителя

$$\det(a_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

составлены из проекций ортов $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ на оси системы S' , а столбцы — из проекций ортов $\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3$ на S . Сумма квадратов элементов строки или столбца равна единице. Например,

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1.$$

С другой стороны, разложение этого определителя по элементам первой строки имеет вид

$$\det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

что должно совпадать с предыдущей формулой вследствие единственности разложения вектора \mathbf{n}_1 . Следовательно, все три выражения в круглых скобках совпадают с множителями при них, т. е. каждый элемент определителя равен своему алгебраическому дополнению, если $\det(a_{\alpha\beta}) = +1$, и отличаются знаками от этих множителей, если $\det(a_{\alpha\beta}) = -1$. Остается учесть эти результаты в (2.7). Для компонент T_2, T_3 результаты будут аналогичными, и мы приходим к заключению, что при простых поворотах координатных осей ($\det(a_{\alpha\beta}) = +1$) компоненты псевдовектора преобразуются по формулам

$$T_\alpha = a_{\alpha\beta} T'_\beta. \quad (2.8)$$

При поворотах, сопровождающихся отражением, т. е. изменением знака одной или всех трех координат ($\det(a_{\alpha\beta}) = -1$), те же компоненты преобразуются по формулам

$$T_\alpha = -a_{\alpha\beta} T'_\beta. \quad (2.9)$$

Истинный (полярный) вектор в обоих этих случаях преобразуется только по формулам (2.2), (2.3). Из (2.8), (2.9) видно также, что при несобственном ортогональном преобразовании (поворот с отражением) будет изменять свой знак на противоположный скалярное произведение вектора и псевдовектора, т. е. псевдоскаляр.

Инвариантное содержание могут иметь лишь такие соотношения между наборами функций, соответствующих физическим величинам, в которых все слагаемые имеют одну и ту же тензорную размерность. Такие соотношения не должны зависеть от

того, отдаем ли мы предпочтение правым координатным системам или левым. А поскольку при этом законы преобразования векторов и псевдовекторов различны, указанные соотношения или уравнения не могут содержать в качестве слагаемых одновременно скаляры и псевдоскаляры, векторы и псевдовекторы. Все слагаемые также должны иметь одну и ту же физическую размерность.

Физические характеристики, которые совпадали бы по своим свойствам с антисимметричными по всем индексам тензорами четвертого и более высоких рангов, в трехмерном пространстве должны отсутствовать. Все такие тензоры равны нулю. Антисимметричный по всем индексам тензор третьего ранга $T_{\alpha\beta\gamma}$ имеет только одну отличную от нуля существенную составляющую T_{123} . Компоненты T_{231} , T_{312} совпадают с ней, а T_{321} , T_{213} , T_{132} отличаются только знаком. Свертка тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ с векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} имеет вид

$$\begin{aligned} I &= I_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} = \\ &= T_{123} (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3) = \\ &= T_{123} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= T_{123} \{a_1(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_1 + a_2(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_2 + a_3(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_3\} = T_{123} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Здесь I — скаляр, а смешанное произведение $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ — псевдоскаляр. Следовательно, единственная существенная составляющая T_{123} антисимметричного тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ является псевдоскаляром. Если, например, $T_{123} = 1$ в правых координатных системах, то $T_{123} = -1$ в левых системах координат. Мы получим псевдотензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ (символ Леви-Чивиты), если положим

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{T_{\alpha\beta\gamma}}{T_{123}} = \begin{cases} +1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{321}, \\ -1 = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132}, \\ 0, \text{ если среди значений } \alpha, \beta, \gamma \\ \text{ есть совпадающие.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда компоненты векторного произведения векторов \mathbf{b} и \mathbf{c} можно представить в виде

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_{\beta} c_{\gamma}. \quad (2.11)$$

Следовательно, смешанное произведение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} (определитель, составленный из компонент этих векторов, или,

что то же, объем параллелепипеда, построенного на этих векторах) может быть явно выражено через компоненты векторов:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma}. \quad (2.12)$$

Для двойного векторного произведения имеем

$$\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} a_{\beta} b_{\mu} c_{\nu}. \quad (2.13)$$

С другой стороны,

$$\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_{\alpha} = \{\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\}_{\alpha} = (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) a_{\beta} b_{\mu} c_{\nu}.$$

Сравнивая с (2.13), приходим к тождеству

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}. \quad (2.14)$$

Определение псевдовектора T_{σ} , дуального антисимметричному тензору $T_{\alpha\beta}$, теперь может быть представлено в виде

$$T_{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T_{\beta\gamma}. \quad (2.15)$$

Умножая обе части этого равенства на $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$, суммируя по α и учитывая (2.14), можно выразить обратно компоненты антисимметричного тензора $T_{\alpha\beta}$ в терминах составляющих дуального псевдовектора:

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} T_{\alpha}. \quad (2.16)$$

Таким образом, тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ наряду с символом Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ дает возможность представлять основные алгебраические операции с векторами непосредственно в терминах их компонент. Очевидными при этом становятся доказательства таких тождеств с дифференциальными операциями второго порядка, как $\text{rot grad } \phi(x, y, z, t) = 0$, $\text{div rot } \mathbf{a}(x, y, z, t) = 0$.

Пусть ϕ — скалярная функция координат и времени. Тогда $\phi(x, y, z, t) = \phi(x', y', z', t)$, где $x_{\alpha} = a_{\alpha\beta} x'_{\beta}$. Дифференцируя ϕ , находим

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'_{\alpha}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} = a_{\beta\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}}.$$

Следовательно, набор частных производных $\partial \phi / \partial x_{\alpha}$ образует векторное поле $\text{grad } \phi$ или $\nabla \phi$. Совокупность вторых производных $\partial^2 \phi / \partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) образует в каждой точке пространства симметричный тензор. Его свертка с символом Кронекера представляет собой оператор Лапласа $\Delta \phi$:

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}} \equiv \Delta \phi, \quad (2.17)$$

и является, очевидно, скаляром.

Частные производные $\partial a_\alpha / \partial x_\beta$ векторного поля a_α образуют тензор второго ранга. Этот тензор можно представить в виде суммы антисимметричного тензора

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (2.18)$$

и симметричного

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (2.19)$$

Псевдовектором, дуальным тензору (2.18), является *ротор вектора* \mathbf{a} :

$$(\text{rot } \mathbf{a})_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\gamma} \right) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}. \quad (2.20)$$

Свертка тензоров (2.19) и $\delta_{\alpha\beta}$, или след тензора (2.19), является скалярным полем *дивергенции* \mathbf{a} :

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (2.21)$$

Свертка симметричного и антисимметричного тензоров всегда равна нулю. Поэтому

$$(\text{rot grad } \phi)_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \phi = 0,$$

$$\text{div rot } \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta} = 0.$$

Для операции $\text{rot rot } \mathbf{a}$ имеем

$$(\text{rot rot } \mathbf{a})_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_\nu.$$

Эта формула может быть переписана полностью в символической форме векторного анализа, если в нее подставить тождество (2.14). Получим

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (2.22)$$

§ 3. Криволинейные координаты

К криволинейным координатам приходится прибегать, когда необходимо учесть пространственную симметрию силовых полей, в которых происходит движение частиц. Для задач с цилиндрической и сферической симметрией естественными являются цилиндрические и сферические координаты.

Выберем декартову систему координат с началом в некоторой точке пространства и определенной ориентацией координатных осей. Положение произвольной точки пространства с координатами x, y, z может быть одновременно задано цилиндрическими координатами ρ, φ, z , такими, что

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

а также сферическими r, θ, φ ,

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

(рис. 1). Эти формулы позволяют представить радиус-вектор \mathbf{r} фиксированной точки в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \\ &= \rho(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + z\mathbf{k} \equiv \rho \mathbf{n}_\rho + z \mathbf{n}_z = \\ &= r(\sin \theta \mathbf{n}_\rho + \cos \theta \mathbf{n}_z) \equiv r \mathbf{n}_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Радиус-вектор в цилиндрической системе координат имеет две составляющие: на орты \mathbf{n}_ρ и \mathbf{n}_z , а в сферической — только одну, на орт \mathbf{n}_r . При движении точки все координаты, а также векторы $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_r$ будут функциями времени. Для вектора скорости точки будем иметь

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \dot{\rho}\mathbf{n}_\rho + \rho\dot{\mathbf{n}}_\rho + \dot{z}\mathbf{n}_z = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\mathbf{n}}_r.$$

В соответствии с определениями (3.1)

$$\dot{\mathbf{n}}_\rho = (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{n}_\rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \equiv \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi,$$

$$\dot{\mathbf{n}}_r = (\cos \theta \mathbf{n}_\rho - \sin \theta \mathbf{n}_z)\dot{\theta} + \sin \theta \dot{\mathbf{n}}_\rho \equiv \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi.$$

Поэтому составляющие вектора скорости \mathbf{v} в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат связаны формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \dot{\rho}\mathbf{n}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi + \dot{z}\mathbf{n}_z = \\ &= \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

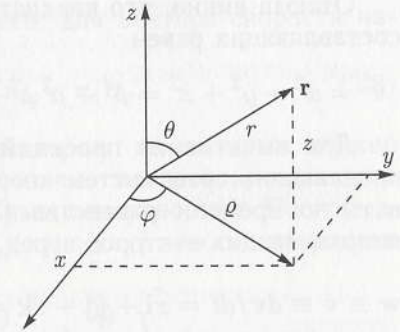


Рис. 1. Соотношения между декартовыми, цилиндрическими и сферическими координатами одной и той же точки

Отсюда видно, что квадрат вектора скорости в терминах его составляющих равен

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2. \quad (3.3)$$

Для вычисления проекций вектора ускорения точки на направляющие орты систем координат следует продифференцировать по времени равенства (3.2) и выразить производные от направляющих векторов через сами эти векторы. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv d\mathbf{v}/dt &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi})\mathbf{n}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{n}_z = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)\mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right] \mathbf{n}_\theta + \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) \right] \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Динамические задачи в поле двух кулоновских центров, а также в кулоновском и однородном электрическом поле целесообразно рассматривать в эллиптических и параболических координатах. Во всех случаях декартовы координаты будут выражаться через криволинейные координаты по формулам

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3), \quad (3.5)$$

допускающим обращение

$$q_\alpha = q_\alpha(x_1, x_2, x_3) \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.6)$$

Единичные направляющие векторы могут быть введены как векторы, касательные к координатным линиям, вдоль которых изменяется только одна координата q_σ , и направленные в сторону возрастания q_σ . Направление касательной к координатной линии q_σ имеет частная производная $\partial \mathbf{r} / \partial q_\sigma$ (остальные координаты фиксированы). Разделив каждый такой вектор, $\alpha = 1, 2, 3$, на его модуль, получим три единичных вектора

$$\mathbf{n}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial q_\sigma}{|\partial \mathbf{r} / \partial q_\sigma|} \equiv \frac{1}{H_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma}. \quad (3.7)$$

Здесь по σ нет суммирования, и модули производных (коэффициенты Ламе) обозначены через H_σ . Если все \mathbf{n}_σ взаимно-перпендикулярны в каждой точке, то система координат является ортогональной. Любой вектор \mathbf{A} может быть представлен в виде

разложения $\mathbf{A} = A_\alpha \mathbf{n}_\alpha$. В частности, для вектора скорости частицы имеем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = H_\sigma \dot{q}_\sigma \mathbf{n}_\sigma = v_\sigma \mathbf{n}_\sigma. \quad (3.8)$$

Другую тройку единичных векторов, по которым можно разложить произвольный вектор, можно построить, используя векторы, нормальные к координатным поверхностям. По нормали к координатной поверхности $q_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ направлен вектор

$$\text{grad } q_\alpha \equiv \nabla q_\alpha = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) q_\alpha(x_1, x_2, x_3),$$

так что нормированные на единицу векторы \mathbf{n}^σ равны

$$\mathbf{n}^\sigma = \nabla q^\sigma / |\nabla q^\sigma| = \nabla q^\sigma / h_\sigma, \quad (3.9)$$

где h_σ — дифференциальные параметры первого порядка. Для ортогональных координат $\mathbf{n}^\sigma = \mathbf{n}_\sigma$, $h_\sigma = 1/H_\sigma$.

Можно обобщить приведенные выше определения векторов и тензоров путем замены в этих определениях матриц $a_{\alpha\beta}$ линейных ортогональных преобразований матрицами $\partial q^\alpha / \partial q^{\beta'}$, возникающими в результате дифференцирования общих нелинейных преобразований криволинейных координат $q^\alpha = q^\alpha(q^{1'}, q^{2'}, q^{3'})$. В этом случае мы получим контравариантные тензоры (q^α могут совпадать с декартовыми координатами). Тензоры, закон преобразования которых задается обратными матрицами, $\partial q^{\alpha'} / \partial q^\beta$, определяются как ковариантные. Возможно также определение m -раз контравариантных n -раз ковариантных тензоров. Однако все определенные таким образом наборы функций не могут непосредственно служить отображениями физических объектов. Действительно, контравариантный вектор образуют \dot{q}^α , а ковариантный — набор производных $\partial \phi / \partial q^\alpha$. Компоненты каждого из этих векторов имеют разную физическую размерность.

§ 4. Точечные частицы. Динамические функции

Универсальный характер методов классической механики по отношению к динамике различных физических объектов обеспечивается универсальной моделью частицы. Поскольку материальные объекты являются динамическими системами взаимодействующих частиц: электронов, протонов, нейтронов, достаточно ввести математический образ частицы на микроскопическом уровне организации материи.

Поставим в соответствие реальной физической частице ее точечный образ — *точечную частицу*, так что инерционные и силовые характеристики частицы будут сосредоточены в одной точке трехмерного пространства. Это допустимо в условиях, когда изменениями внутренней структуры реальной частицы и функциональной формы создаваемого ей силового поля в процессе движения и взаимодействия можно пренебречь. Универсальная модель точечной частицы классической физики полностью игнорирует волновые свойства частиц (волн де Бройля), которые проявляются в строении атомов и в квантовых процессах в микромире.

Возможны два представления точечной частицы: геометрическое и физическое. Геометрически частицы изображаются отдельными точками трехмерного евклидова пространства (*материальными точками*), а их движение — временными последовательностями точек $\mathbf{r}_i(t)$. Состояние системы частиц в момент времени t представляется набором положений и скоростей (или импульсов) в этот момент. Все *динамические функции* (энергия, импульс, момент импульса, силы и т. п.) являются в этом представлении функциями состояния и имеют вид

$$f = f(t, \mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t)).$$

Параметрические уравнения траекторий $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ или, что одно и то же, *законы движения* точечных частиц, являются также динамическими функциями. Первые производные $d\mathbf{r}_i/dt \equiv \dot{\mathbf{r}}_i(t)$ и производные более высокого порядка определяются вдоль траекторий. Динамические функции должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям, весь аппарат которых в классической механике базируется на представлениях о материальных точках.

Другой математический образ точечной частицы формируется на базе физических характеристик частиц как объектов с определенными пространственными распределениями масс, электрических зарядов. Непосредственно наблюдать может только распределение электрического заряда, рассеивающее электромагнитные волны. Если в процессе движения и взаимодействия реальных частиц изменением их внутреннего состояния можно пренебречь, то конечные области локализации частиц становятся несущественными и распределение массы и электрического заряда частицы можно заменить предельными бесструктурными пространственными распределениями $m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$, $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$, или δ -распределениями. Здесь дельта-функция (Дирака), $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$, является полевой обоб-

щенной функцией, зависящей от четырех независимых переменных \mathbf{r} и t . Интегралы по всему пространству от таких распределений должны быть равны полной массе и полному заряду реальной частицы. Поэтому интеграл

$$\int_{V_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) dV = 1,$$

если частица находится в области V_0 интегрирования, и равен нулю, если частица находится вне области V_0 . Существует широкий класс последовательностей непрерывных функций, имеющих своим пределом δ -функцию. В частности,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin kx/\pi x) \rightarrow \delta(x). \quad (4.1)$$

Так как

$$(\sin kx/\pi x) = (1/2\pi) \int_{-k}^k e^{ikx} dk,$$

формула (4.1) дает представление δ -функции интегралом Фурье. Поэтому для δ -распределения в трехмерном пространстве имеем удобное представление

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = (1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))} dk_x dk_y dk_z. \quad (4.2)$$

Множество точек физического пространства, на которых δ -распределение отлично от нуля, и есть закон движения материальной точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Динамика частиц как δ -распределений представляется уравнениями в частных производных. В этом представлении движение частицы есть процесс распространения в пространстве δ -образного «волнового пакета»; в частности, равномерное движение частицы вдоль оси Ox описывается, как нетрудно проверить, волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.3)$$

Представление о точечных частицах как о пространственных распределениях их физических свойств особенно продуктивно при вычислении сил, действующих на тело в полях, создаваемых распределениями частиц, а также для большого класса задач, в которых уравнения динамики частиц и уравнения силовых

полей должны рассматриваться как единая система уравнений в частных производных.

Взаимодействия между физическими объектами может быть представлено как взаимодействия между их точечными образами. При этом двум представлениям точечных частиц будут соответствовать два представления взаимодействий. Для частиц как геометрических (материальных) точек взаимодействие вводится при помощи сил, которые являются определенными динамическими функциями. Закон Кулона взаимодействия двух электрических зарядов

$$\mathbf{F}_{(e)}(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)) = e_i e_k (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_k(t)) / |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_k(t)|^3, \quad (4.4)$$

закон всемирного тяготения Ньютона

$$\mathbf{F}_{(G)}(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)) = -G m_i m_k (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_k(t)) / |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_k(t)|^3 \quad (4.5)$$

являются векторными динамическими функциями координат двух точек (здесь $G \approx 6,67 \cdot 10^{-8}$ дин · см²/г² — гравитационная постоянная).

Сила взаимодействия между двумя точечными частицами в виде пространственных δ -распределений есть результат взаимодействия одной частицы с силовым полем (электромагнитным, гравитационным), создаваемым другой частицей. Силовое поле в этом случае выступает как самостоятельный физический объект, распределенный в пространстве «носитель» взаимодействия, обладающий собственными энергией и импульсом.

Макроскопические объекты в системе понятий классической механики могут быть представлены как динамические системы взаимодействующих точечных частиц.

Указанные представления о силовых полях и частицах являются исходными при переходе к количественной формулировке уравнений движения частиц в терминах динамических и полевых функций.

Глава 2

ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНИХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

§ 5. Уравнения движения точечной частицы

Многообразие динамических процессов в системах взаимодействующих частиц базируется на физическом законе, устанавливающем взаимодействие в качестве единственного объективного (в инерциальных системах отсчета) физического механизма изменения импульса частицы со временем (второй закон Ньютона), а также на законах, определяющих характер и явный вид взаимодействий. Эти законы установлены в результате многочисленных наблюдений и экспериментов, в которых исследовалось движение и взаимодействие частиц, и отражают первичные фундаментальные свойства нашего мира.

При переходе к количественной формулировке основного закона механики следует считать, что система координат связана с системой отсчета, взаимодействием которой со всем окружающим миром можно пренебречь. В такой *инерциальной системе отсчета* взаимодействие частиц будет иметь объективное содержание, и распределенным в пространстве силовым полям можно поставить в соответствие их математические образы, наборы функций, определенные выше тензорными законами преобразования при поворотах системы координат. Обозначим через $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ векторные поля напряженностей гравитационного и электрического полей соответственно и через $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — псевдовекторное поле напряженности магнитного поля. Рассматривая поля в качестве фундаментальных физических понятий, следует на их основе определить силы, действующие на частицу в полях. Как и приращение импульса, сила должна быть вектором.

Пусть m и e (масса и электрический заряд) — универсальные постоянные взаимодействия частицы с полями. Взаимодействие происходит в области локализации частицы, которая в модели точечных частиц сводится к одной точке $\mathbf{r}(t)$. Распределения массы и электрического заряда в этом случае равны $m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ и $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$, так что сила \mathbf{F}_G , определяющая изменение

импульса частицы со временем в гравитационном поле, может быть представлена вектором

$$\mathbf{F}_G = \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) \cdot m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))dV = m\mathbf{G}(\mathbf{r}(t), t). \quad (5.1)$$

В электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на частицу действует сила

$$\mathbf{F}_E = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))dV = e\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t). \quad (5.2)$$

Сила \mathbf{F}_B , действующая на частицу в стационарном магнитном поле, также должна быть вектором. Но напряженность магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ есть псевдовектор. Поэтому сила \mathbf{F}_B не может быть представлена, подобно \mathbf{F}_E , как результат взаимодействия распределения заряда с магнитным полем. Поскольку вектором является векторное произведение вектора и псевдовектора, частица может взаимодействовать с магнитным полем посредством связанного с ней векторного поля $e\dot{\mathbf{r}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ плотности электрического тока, и мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{(B)} &= -(1/c) \int [\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times e\dot{\mathbf{r}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))]dV = \\ &= (e/c)(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь постоянная c , равная скорости света в вакууме, введена, чтобы обеспечить одинаковую физическую размерность двух последних формул.

Мы видим, что силы, действующие на частицы в полях, являются динамическими функциями. Напряженности полей содержатся в выражениях для сил только своими значениями на траекториях. В соответствии с основным законом динамики сила является единственной объективной причиной изменения импульса \mathbf{p} частицы со временем, т. е. в определенной инерциальной системе отсчета

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)). \quad (5.4)$$

В нерелятивистской механике

$$\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{v}(t). \quad (5.5)$$

Если скорости частиц не малы по сравнению со скоростью света c , параметры траекторий частиц, например, радиус круговой траектории частицы в магнитном поле, найденные на основании нерелятивистских уравнений движения (5.4), (5.5),

отклоняются от истинных (см. § 7). Согласно с результатами экспериментов можно добиться, если вместо (5.5) положить

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}. \quad (5.6)$$

Импульс (5.6) частицы в релятивистской механике содержит дополнительную постоянную c в отношении $\mathbf{v}^2(t)/c^2$, характеризующую степень близости скорости частицы к предельной скорости движения c . Уравнения движения (5.6), (5.4) более не являются инвариантными относительно преобразований Галилея. Сохраняя (5.6), мы должны заменить преобразования Галилея. Связь определения (5.6) с другими постулатами специальной теории относительности Эйнштейна и преобразования Лоренца представлена ниже.

Подставляя (5.5) или (5.6) в (5.4), видим, что в нерелятивистской и релятивистской механике уравнения движения частицы представляют собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m\ddot{x}_\alpha = F_\alpha(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \quad (\text{нерелятивистская механика}), \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_\alpha}{\sqrt{1 - (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)/c^2}} \right) = F_\alpha(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \quad (5.8)$$

(релятивистская механика) ($\alpha = 1, 2, 3$).

В обоих случаях общее решение уравнений движения существует для всех действительных движений и имеет вид

$$x_\alpha = x_\alpha(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}),$$

где $x_{\alpha 0} = x_\alpha(t_0)$, $\dot{x}_{\alpha 0} = \dot{x}_\alpha(t_0)$. При заданном состоянии частицы $x_{\alpha 0}$, $\dot{x}_{\alpha 0}$, в момент времени t_0 , принятый в качестве начального, и силе $F_\alpha(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, известной при всех t , движение точечной частицы оказывается детерминированным и в нерелятивистской, и в релятивистской механике.

Уравнения движения частиц в частных производных продуктивны при формулировке континуальных методов систем многих частиц и представлены ниже. Здесь мы ограничимся уравнениями в частных производных, эквивалентными (5.8). Так как фигурирующая в (5.8) материальная точка является точечной частицей с δ -распределением массы, импульса и т. п., ее движение в пространстве представляет собой процесс распространения плотности импульса $\pi_\alpha(\mathbf{r}, t) = p_\alpha(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$. Дифференцируя

это выражение по времени и принимая во внимание (5.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \Pi_{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = F_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (5.9)$$

где $\Pi_{\alpha\sigma} = p_\alpha \dot{x}_\sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ — тензор плотности потока импульса. Уравнение (5.9) можно проинтегрировать по всему пространству. В результате мы снова получим уравнение (5.4).

Замечание. Уравнения движения точечной частицы мы получили исходя из дифференциального принципа, связывающего ускорение частицы и силу. Принимая в качестве исходных постулаты вариационного исчисления, можно прийти к уравнениям движения без диссипативных сил на основании интегрального вариационного принципа. Функционал, который при этом постулируется, содержит функцию Лагранжа в координатах, обращающих в тождества уравнения связей. Поэтому представляется целесообразным обратиться к интегральному принципу после введения функции Лагранжа.

§ 6. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии частицы

Общее решение уравнений движения частицы полностью определяет ее динамику во внешних силовых полях. Важную, и для многих динамических задач достаточную, физическую информацию можно получить уже на основе *первых интегралов движения*, — динамических функций, устанавливающих определенные соотношения между координатами и компонентами скорости частицы вдоль траектории. Интегралы движения, которые сводятся к сохранению энергии, компонент импульса и момента импульса вдоль траектории, можно рассматривать в качестве частных реализаций в механике соответствующих общих физических законов сохранения.

1. Сохранение импульса. Пусть n_α — неподвижный единичный вектор определенного направления в пространстве. Умножим уравнения движения (5.4), $\dot{p}_\alpha = F_\alpha$, на n_α и просуммируем по α . Тогда, независимо от того, является ли зависимость импульса от скорости релятивистской или нерелятивистской, получим

$$\frac{d}{dt} (p_\alpha n_\alpha) = F_\alpha n_\alpha. \quad (6.1)$$

Если существует хотя бы одно направление n_α , такое, что проекция $F_\alpha n_\alpha$ суммы сил F_α на это направление равна нулю,

то проекция $p_\alpha n_\alpha$ импульса на это направление в соответствии с (6.1) будет оставаться неизменной с течением времени.

Только одна проекция импульса будет сохраняться, если в области движения частицы все значения направлений вектора F_α лежат в одной плоскости. Для вектора F_α , направления которого лежат на одной прямой, будут сохраняться во времени две проекции импульса частицы. Такое состояние реализуется, например, при движении тел в малой области вблизи поверхности Земли. При $F_\alpha = 0$ сохраняются все три компоненты импульса.

2. Сохранение момента импульса. Умножим обе части уравнения движения $\dot{p}_\beta = F_\beta$ на координату $x_\alpha(t)$ частицы ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Получим

$$x_\alpha \dot{p}_\beta = \frac{d}{dt} (x_\alpha p_\beta) - \dot{x}_\alpha p_\beta = x_\alpha F_\beta. \quad (6.2)$$

Для релятивистской и нерелятивистской зависимостей импульса от скорости произведение $\dot{x}_\alpha p_\beta$ симметрично относительно перестановки индексов α, β . Следовательно, симметричным является тензор, представленный остальными слагаемыми (6.2), т. е.

$$\frac{d}{dt} (x_\alpha p_\beta) - x_\alpha F_\beta = \frac{d}{dt} (x_\beta p_\alpha) - x_\beta F_\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = x_\alpha F_\beta - x_\beta F_\alpha. \quad (6.3)$$

Мы получили в тензорной форме закон изменения во времени момента импульса частицы. Антисимметричным тензорам в левой и правой частях (6.3) можно поставить в соответствие псевдовекторы момента импульса

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} x_\alpha p_\beta \equiv (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma \equiv L_\gamma \quad (6.4)$$

и момента силы

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (x_\alpha F_\beta - x_\beta F_\alpha) = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} x_\alpha F_\beta = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_\gamma \equiv M_\gamma, \quad (6.5)$$

где $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — антисимметричный по всем индексам единичный псевдотензор (см. § 2). Тогда для псевдовектора момента импульса вместо (6.3) будем иметь уравнение

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_{\gamma\alpha\beta} x_\alpha p_\beta) = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} x_\alpha F_\beta, \quad (6.6)$$

которое в силу (6.4), (6.5) можно записать также в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (6.7)$$

или кратко: $\dot{L}_\alpha = M_\alpha$. Для проекций $L_\alpha n_\alpha$ и $M_\alpha n_\alpha$ на фиксированное направление \mathbf{n} в пространстве отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}(L_\alpha n_\alpha) = M_\alpha n_\alpha. \quad (6.8)$$

Следовательно, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = \text{const}$, если $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$. При $\mathbf{M} = 0$ сохраняются все три компоненты момента импульса частицы. Кроме очевидного случая, когда $\mathbf{F} = 0$, такое состояние движения реализуется в центральном поле.

Потенциал стационарного центрального гравитационного или электростатического поля $\varphi = \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ является скалярной функцией расстояния до неподвижного силового центра. Напряженность поля есть взятый с обратным знаком градиент φ , так что для гравитационного поля

$$G_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = -\varphi' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = -\varphi' \frac{x_\alpha - x_{0\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (6.9)$$

где штрихом обозначена производная по полному аргументу; тот факт, что градиент модуля $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ есть единичный вектор $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, легко устанавливается дифференцированием по x_α равенства $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2$. Сила, действующая на частицу в поле, является динамической функцией, которая после подстановки (6.9) в (5.1) получается в виде

$$F_\alpha(\mathbf{r}(t)) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha(t)} U(\mathbf{r}(t)) = -U' \frac{x_\alpha(t) - x_{0\alpha}}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|}. \quad (6.10)$$

Здесь $U(\mathbf{r}(t)) = m\varphi(|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|)$ — потенциальная энергия частицы с массой m в центральном гравитационном поле. Если $\varphi = \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ — потенциал центрального электростатического поля, то потенциальная энергия частицы с электрическим зарядом e в таком поле будет равна $U(\mathbf{r}(t)) = e\varphi(|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|)$ и также является динамической функцией. В обоих случаях момент этой силы равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F} = U' \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|}$$

и отличен от нуля. Но если начало координат совместить с силовым центром, то \mathbf{r}_0 будет равно нулю и, следовательно, $\mathbf{M} = 0$. Момент центральной силы относительно ее центра равен нулю.

Из уравнения (6.7) видно, что в этом случае все три компоненты момента импульса \mathbf{L} сохраняются ($\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$) и траектория частицы лежит в неподвижной плоскости $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}_0 = 0$, проходящей через центр поля.

Замечание. В дальнейшем, как это общепринято, в выражении для оператора градиента вдоль траектории $\partial/\partial x_\alpha(t)$ аргумент t функции $x_\alpha(t)$ будет опускаться и использоваться также символ $\partial/\partial \mathbf{r}$. В формулах для динамических функций $f = f(t, \mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t))$ будут опускаться аргументы функций $x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)$. Однако это не должно приводить к смешению понятий силы и поля, потенциальной энергии частицы и потенциала поля.

3. Сохранение энергии частицы. Умножим обе части уравнений движения (5.4) на вектор скорости \mathbf{v} частицы скалярно. Получим

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.11)$$

Левую часть этого уравнения можно представить в виде $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{p}} = \dot{E}_{(k)}$. Действительно, в нерелятивистской механике $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Поэтому $m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = d(mv^2/2)/dt$ и, с точностью до постоянной, $E_{(k)}$ есть кинетическая энергия частицы, $E_{(k)} = mv^2/2$.

Для релятивистской зависимости импульса от скорости будем иметь

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2/c^2)}} \right) = \frac{m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{(1 - (\mathbf{v}^2/c^2))^{3/2}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2/c^2)}} \right) \quad (6.12)$$

и, следовательно,

$$E_{(k)} = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2/c^2)}} \right). \quad (6.13)$$

Полагая, что частица может одновременно находиться под действием *потенциальных сил*, таких, что

$$F_\alpha(\mathbf{r}(t)) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha(t)} U(\mathbf{r}(t), t),$$

гироскопических сил, перпендикулярных скорости частицы, а также *диссипативных сил* вида $\mathbf{F}^{(d)} = -d(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ ($d > 0$), определяющих потери импульса частицы в единицу времени

за счет ее взаимодействия с частицами среды, вместо (6.11) получим

$$\dot{E}_{(k)} = -v_\alpha (\partial U / \partial x_\alpha) + \mathbf{F}^{(d)} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.14)$$

Производная по времени от потенциальной энергии равна

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}. \quad (6.15)$$

Складывая (6.14) и (6.15), получаем уравнение, которым определяется изменение со временем полной энергии частицы:

$$\frac{d}{dt}(E_{(k)} + U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}^{(d)} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.16)$$

Гироскопические силы не дают вклада в изменение полной энергии.

Если потенциальные силы являются консервативными ($\partial U / \partial t = 0$) и диссипативные силы отсутствуют, то полная энергия $E_{(k)} + U$ частицы сохраняется.

Релятивистские формулы для энергии и импульса (6.13), (5.6) качественно отличаются от нерелятивистских зависимостью от скорости света c . На интервалах времени t , таких, что $\mathbf{v}^2(t)/c^2 \ll 1$, может быть достигнуто количественное согласие с соответствующими нерелятивистскими выражениями, если (5.6), (6.13) разложить в ряд Тейлора и опустить в разложении слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с \mathbf{v}^2/c^2 .

§ 7. Движение в однородных силовых полях

Динамические эффекты, возникающие при движении частиц в однородных полях, являются наиболее простыми с точки зрения решений уравнений движения и интерпретации результатов, доступными для практического использования. Взаимодействием между частицами разреженных пучков во время движения часто можно пренебречь и свести задачу к расчетам параметров траекторий отдельных, взаимодействующих только с внешними полями частиц.

1. Фокусировка электронов магнитным полем. В этой задаче разреженный нерелятивистский пучок электронов влетает в однородное магнитное поле с равными начальными продольными скоростями. Перпендикулярные направлению поля составляющие скоростей частиц при этом не равны нулю. Требуется

определить физические условия, при которых возможна фокусировка электронов, и расстояния до точек фокусировки.

Из уравнений движения электрона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (7.1)$$

видно, что сила Лоренца имеет равную нулю составляющую в направлении поля. Поэтому продольная скорость частицы остается неизменной. Выберем ось z декартовой системы координат вдоль направления магнитного поля, а начало координат совместим с положением электрона в начальный момент времени. Тогда $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = (v_\perp \cos \alpha, v_\perp \sin \alpha, v_\parallel)$, и уравнения движения (7.1) принимают вид

$$\ddot{x} + \omega_c \dot{y} = 0, \quad (7.2)$$

$$\ddot{y} - \omega_c \dot{x} = 0, \quad (7.3)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (7.4)$$

где $\omega_c = |e|B/mc$ — циклотронная частота. Умножим уравнение (7.3) на мнимую единицу i и сложим с уравнением (7.2). Получим уравнение первого порядка относительно $\dot{x} + iy$:

$$\dot{x} + iy = -i\omega_c(\dot{x} + iy).$$

Отсюда с учетом начальных условий находим

$$\dot{x} + iy = v_\perp \cdot \exp\{-i(\omega_c t - \alpha)\}.$$

Повторное интегрирование дает

$$x + iy = i(v_\perp/\omega)(e^{-i\omega_c z/v_\parallel} - 1)e^{i\alpha}, \quad (7.5)$$

где учтено, что $z = v_\parallel t$. В точках фокусировки электронов координаты x , y должны одновременно обращаться в нуль. Из (7.5) следует, что это происходит при значениях z , равных $2\pi n v_\parallel / \omega_c$, где n — целое число. Первая точка на оси z , в которой фокусируются электроны с различными v_\perp , расположена на расстоянии $2\pi v_\parallel mc / |e|B$ от начала координат.

2. Магнитная изоляция. Этот эффект обусловлен изменением направления электрического тока в магнитном поле так, что в заданном направлении ток отсутствует. Для плоского или цилиндрического диода с магнитным полем, перпендикулярным потоку электронов, эффект сводится к отсечке анодного тока при значениях напряженности магнитного поля, превышающих определенное критическое значение (или разности потенциалов между обкладками, меньшей критического значения). В плоском

диоде электрическое поле можно считать однородным. Мы сосредоточим внимание на цилиндрическом диоде. Электрическое поле в нем не является однородным и может рассматриваться как поле цилиндрического конденсатора, если не учитывать поле пространственного заряда электронов и краевые эффекты. Коаксиальный цилиндрический диод с внутренним цилиндром в качестве катода и однородным стационарным магнитным полем, направленным вдоль оси диода, составляет основу конструкции магнетрона (генератора СВЧ-колебаний).

Симметрию системы удобно учесть путем введения цилиндрической системы координат ρ, θ, z с осью z вдоль оси диода. Тогда постоянное электрическое поле будет иметь только радиальную составляющую $E = -\partial\varphi(\rho)/\partial\rho$ и уравнения движения электрона будут иметь вид

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -e\partial\varphi/\partial\rho + e\rho\dot{\theta}B/c, \quad (7.6)$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = -e\rho\dot{\theta}B/c, \quad (7.7)$$

$$m\ddot{z} = 0. \quad (7.8)$$

Мы полагаем, кроме того, что электрон покидает катод (цилиндр радиуса a) с начальной скоростью $(\dot{\rho}(a), 0, 0)$ и что движение происходит в плоскости $z = 0$. Уравнение (7.7) этой системы легко интегрируется, так что

$$\dot{\theta} = -\frac{eB}{2mc} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right). \quad (7.9)$$

Из уравнений (7.6), (7.7) находим еще один первый интеграл

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + e\varphi = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2(a), \quad (7.10)$$

выражающий закон сохранения энергии электрона.

Критическое значение магнитного поля B_0 находим из условия, что при $B = B_0$ траектория электрона должна касаться наружного цилиндра $\rho = b$. Исключая $\dot{\theta}$ из (7.9), (7.10) и полагая $\dot{\rho}(b) = 0$, находим

$$B_0 = \frac{2mcb}{|e|(b^2 - a^2)} \sqrt{\dot{\rho}^2(a) + \frac{2|e|}{m}\varphi(b)}. \quad (7.11)$$

При заданном магнитном поле это равенство определяет критическое анодное напряжение $\varphi(b)$.

3. Дрейф заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Будем считать, что движение частицы (положительного иона с зарядом e) происходит в области, где созданы стационарные однородные электрическое \mathbf{E} и перпендикулярное ему магнитное \mathbf{B} поля. Диссипативные потери энергии иона в среде в области движения можно учесть при помощи диссипативной силы, пропорциональной скорости иона, $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{v}$. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} определяют преимущественные направления двух координатных осей x и z , так что уравнения движения частицы приобретают вид

$$m\ddot{x} = eE + \frac{eB}{c}\dot{y} - \kappa\dot{x}, \quad (7.12)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{eB}{c}\dot{x} - \kappa\dot{y}, \quad (7.13)$$

$$m\ddot{z} + \kappa\dot{z} = 0. \quad (7.14)$$

Уравнением (7.14) представлено движение вдоль магнитного поля. Общее решение этого уравнения,

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + z_0 \quad (\gamma \equiv \kappa/m), \quad (7.15)$$

не зависит от напряженностей E и B и соответствует экспоненциально замедленному движению частицы с начальной скоростью \dot{z}_0 и начальной координатой z_0 в среде. Уравнения (7.12), (7.13) удобно считать вещественной и мнимой частями неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i(\omega_c - i\gamma)(\dot{x} + i\dot{y}) = eE/m, \quad (7.16)$$

где $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота. Если найдено какое-либо частное решение (например, такое, что $(d/dt)(\dot{x} + i\dot{y}) = 0$), обращающее (7.16) в тождество, то это тождество не нарушится и после прибавления к частному решению общего решения однородного уравнения (7.16) с равной нулю правой частью. Поэтому общее решение неоднородного уравнения (7.16) относительно $\dot{x} + i\dot{y}$ есть

$$(\dot{x} + i\dot{y}) = \left[\dot{x}_0 + i\dot{y}_0 + \frac{eE(i\omega_c - \gamma)}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} \right] e^{(-i\omega_c - \gamma)t} - \frac{eE(i\omega_c - \gamma)}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)}. \quad (7.17)$$

Проинтегрируем обе части (7.17) по времени от нуля до t и отделим вещественную и мнимую части. Результат можно

представить в виде

$$x = e^{-\gamma t} (a \sin \omega_c t - b \cos \omega_c t) + \frac{eE\gamma t}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} + b + x_0, \quad (7.18)$$

$$y = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_c t + b \sin \omega_c t) - \frac{eE\omega_c}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} t - a + y_0. \quad (7.19)$$

Здесь введены обозначения:

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 + \gamma^2} \left[\omega_c \dot{x}_0 - \gamma \dot{y}_0 - \frac{2eE\omega_c\gamma}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} \right], \quad (7.20)$$

$$b = \frac{1}{\omega_c^2 + \gamma^2} \left[\omega_c \dot{y}_0 + \gamma \dot{x}_0 + \frac{eE(\omega_c^2 - \gamma^2)}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} \right]. \quad (7.21)$$

Формулы (7.15), (7.18), (7.19) полностью определяют закон движения положительного иона в среде с сопротивлением, линейным по скорости частицы. Из этих формул видно, что в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, движение иона является суперпозицией осцилляционного движения с циклотронной частотой и дрейфа со скоростью, равной по величине $eE/m\sqrt{\omega_c^2 + \gamma^2}$. Представление о траектории частицы можно составить, положив

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

Тогда вместо (7.18), (7.19) получим

$$x = e^{-\gamma t} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a \sin(\omega_c t - \varphi) + \frac{eE\gamma}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} \cdot t + b + x_0, \quad (7.22)$$

$$y = e^{-\gamma t} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a \cos(\omega_c t - \varphi) - \frac{eE\omega_c}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} \cdot t - a + y_0. \quad (7.23)$$

Периодические осцилляции легко исключаются, и мы находим

$$\left(x - x_0 - b - \frac{eE\gamma}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} t \right)^2 + \left(y - y_0 + a + \frac{eE\omega_c}{m(\omega_c^2 + \gamma^2)} t \right)^2 = e^{-2\gamma t} (a^2 + b^2). \quad (7.24)$$

Отсюда видно, что координаты x, y частицы лежат на окружности радиуса $e^{-\gamma t} \sqrt{a^2 + b^2}$, экспоненциально убывающего со временем. Центр этой окружности перемещается с постоянной скоростью, имеющей составляющие $eE\gamma/m\sqrt{\omega_c^2 + \gamma^2}$ вдоль напряженности электрического поля и $eE\omega_c/m\sqrt{\omega_c^2 + \gamma^2}$ в направ-

лении, перпендикулярном полям \mathbf{E} и \mathbf{B} . Отношение составляющих скорости дрейфа равно γ/ω_c и может быть использовано для измерения γ .

4. Релятивистские циклотронная частота и радиус траектории. В режиме без ускорения заряженные частицы движутся в циклотроне в постоянном магнитном поле. Найдем закон движения частицы на основании релятивистских уравнений движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.25)$$

Умножая обе части уравнения (7.24) скалярно сначала на \mathbf{v} , а затем на постоянный единичный вектор \mathbf{B}/B , находим, что при движении частицы сохраняется ее энергия,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \text{const},$$

и продольная компонента скорости,

$$v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}/B = \text{const}.$$

Следовательно, и $v_{\perp} = \text{const}$. Поэтому (7.24) можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{ce}{E} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (7.26)$$

В системе координат с осью z вдоль \mathbf{B} из (7.25) имеем

$$\dot{x} = v_{\perp} \cos(\omega_{cr} t + \varphi), \quad (7.27)$$

$$\dot{y} = -v_{\perp} \sin(\omega_{cr} t + \varphi) \quad (7.28)$$

(начальная фаза φ определена равенством $\text{tg} \varphi = -\dot{y}(0)/\dot{x}(0)$; $e > 0$). Из (7.26), (7.27) видно, что вектор \mathbf{v}_{\perp} вращается с релятивистской циклотронной частотой

$$\omega_{cr} = \frac{eBc}{E} = \omega_c \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.29)$$

Интегрируя (7.26), (7.27) и уравнение $\dot{z} = v_{\parallel}$, находим закон движения релятивистской частицы:

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_{cr}} \sin(\omega_{cr} t + \varphi) + C_x, \quad (7.30)$$

$$y = \frac{v_{\perp}}{\omega_{cr}} \cos(\omega_{cr} t + \varphi) + C_y, \quad (7.31)$$

$$z = v_{\parallel} t + z(0). \quad (7.32)$$

Из этих формул видно, что траекторией частицы является винтовая линия с осью симметрии, параллельной направлению магнитного поля и пересекающей плоскость xy в точке (C_x, C_y) :

$$C_x = x(0) - \frac{v_{\perp}}{\omega_{cr}} \sin \varphi, \quad C_y = y(0) + \frac{v_{\perp}}{\omega_{cr}} \cos \varphi.$$

Проекцией траектории на эту плоскость является окружность

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = v_{\perp}^2 / \omega_{cr}^2. \quad (7.33)$$

Таким образом, релятивистская механика дает для радиуса окружности значение

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega_{cr}} = \frac{mc}{eB} \frac{v_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.34)$$

При $v_{\parallel} = 0$ радиус окружности пропорционален величине импульса. Это обстоятельство может быть использовано для измерения релятивистского импульса частицы по ее известному радиусу траектории в циклотроне. Качественное отличие (7.33) от аналогичного результата нерелятивистской механики состоит в появлении зависимости R от величины v_{\parallel} . Формулы (7.28), (7.33) для релятивистской циклотронной частоты и релятивистского радиуса круговой траектории заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле лежат в основе представлений о функционировании релятивистских электронных устройств, ускорителей высоких энергий.

§ 8. Гравитационное взаимодействие частиц и поля

По крайней мере на масштабах, превышающих ядерные, самоорганизация вещества является динамической и обеспечивается двумя видами взаимодействий: электромагнитным и гравитационным. Эти взаимодействия относятся к фундаментальным свойствам природы, и их количественные выражения могут быть установлены на основе экстраполяции экспериментальных данных.

1. Сила гравитационного притяжения двух частиц. В результате обработки данных наблюдений за движением планет Солнечной системы Иоганн Кеплер в 1609 г. пришел к заключению, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, в одном из фокусов которых находится Солнце. Секторная скорость каждой планеты относительно фокуса остается постоянной. Воспользуемся результатами Кеплера и найдем выражение для силы тяготения.

Выберем декартову систему координат (рис. 2) с началом в центре Солнца; координатную плоскость $z = 0$ совместим с плоскостью орбиты; в качестве направления оси x выберем направление на ближайшую к фокусу точку траектории (перигелий). В плоскости орбиты можно ввести полярные координаты r, φ по формулам $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Тогда уравнение эллиптической траектории будет иметь вид

$$r = p / (1 + \varepsilon \cos \varphi). \quad (8.1)$$

Здесь r — расстояние от центра планеты до центра Солнца, p, ε — параметр и эксцентриситет эллипса, связанные с большой a и малой b полуосями эллипса соотношениями

$$p = b^2/a, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}.$$

Дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{n}_r$ планеты по времени, находим $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{n}_{\varphi}$ ($\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_{\varphi}$ — орты полярной системы координат; см. § 3). Результат повторного дифференцирования можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbf{n}_{\varphi}. \quad (8.2)$$

Секторная скорость σ связана с моментом импульса \mathbf{L} формулой

$$\sigma = \frac{1}{2m} \mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (8.3)$$

По данным наблюдений

$$|\sigma| = \sigma_z = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \equiv \sigma_0. \quad (8.4)$$

Поэтому азимутальная составляющая ускорения равна нулю. Кроме того,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{2\sigma_0}{r^2} = -2\sigma_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = - \left(\frac{2\sigma_0}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

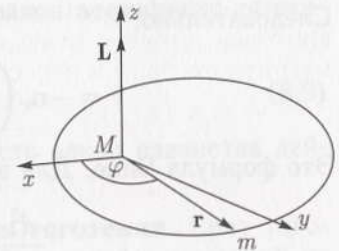


Рис. 2. Координаты при выводе формулы для силы притяжения на основании данных Кеплера

Следовательно,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{n}_r \left(\frac{2\sigma_0}{r} \right)^2 \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]. \quad (8.5)$$

Это формула Бине. Для эллиптических траекторий (8.1)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi,$$

и формула для ускорения планеты принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4\sigma_0^2/p}{r^2} \mathbf{n}_r. \quad (8.6)$$

Правая часть этого выражение, умноженная на массу m планеты, и есть сила \mathbf{F} , действующая на планету в точке $\mathbf{r}(t)$. Эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между планетой и Солнцем и направлена в сторону притягивающего центра. Так что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{n}_r, \quad (8.7)$$

где α — постоянная.

Заметим теперь, что точечные образы планеты и Солнца, с которыми мы в действительности имеем дело, равноправны по отношению к взаимодействию, хотя и сильно различаются значениями масс (масса Солнца $M \approx 1,99 \cdot 10^{33}$ г, а масса Земли m в 333 000 раз меньше, $m \approx 5,976 \cdot 10^{27}$ г). Поэтому постоянная α должна быть пропорциональна массе Солнца M : $\alpha = GM$. Коэффициент пропорциональности G есть гравитационная постоянная, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/г · с².

Из равноправности точечных частиц с массами m и M следует также, что Солнце не может оставаться неподвижным, и, следовательно, связанная с ним система отсчета не является инерциальной. Мы не учли также взаимодействий этих двух тел с другими небесными телами. Однако возникающая за счет этого неточность, как показали последующие измерения, относится не к закону всемирного тяготения (8.7), (8.8), а к неточности законов Кеплера (см. задачу двух тел). Для любых двух точечных частиц с массами m_i и m_k сила их гравитационного взаимодействия \mathbf{F}_{ik} имеет вид

$$\mathbf{F}_{ik} = -Gm_i m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3}, \quad (8.8)$$

где $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k$ — радиусы-векторы частиц (закон всемирного тяготения Ньютона). Как видно из (8.8),

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}, \quad (8.9)$$

т.е. для гравитационных сил имеет место закон равенства действия и противодействия.

2. Взаимодействие частицы и поля тяготения. Силу тяготения \mathbf{F}_{ik} можно считать результатом взаимодействия одной из частиц с гравитационным полем, созданным другой частицей:

$$\mathbf{F}_{ik} = \int \mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t) \cdot m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) dV. \quad (8.10)$$

Векторное поле

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t) = -Gm_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)|^3} \quad (8.11)$$

представляет собой напряженность гравитационного поля частицы с массой m_k . Зависимость этого поля от времени полностью определяется законом движения частицы $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$; гравитационное поле сопровождает движущуюся частицу, распространяется со скоростью частицы. Векторное поле $\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t)$ может быть представлено в виде градиента скалярного поля $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$. Действительно, для компонент $G_{k\alpha}(\mathbf{r}, t)$ имеем

$$\begin{aligned} G_{k\alpha}(\mathbf{r}, t) &= -Gm_k \frac{x_\alpha - x_{k\alpha}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)|^3} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[-\frac{Gm_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)|} \right] \equiv -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \varphi_k(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (8.12)$$

или

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_\alpha G_{k\alpha} = -\nabla \varphi_k(\mathbf{r}, t),$$

где

$$\varphi_k(\mathbf{r}, t) = -\frac{Gm_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)|} \quad (8.13)$$

— потенциал гравитационного поля частицы.

Функция $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$ определена формулой (8.12) неоднозначно. Прибавление к φ_k произвольной функции времени не изменит значения $\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t)$.

Найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$. При $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_k(t)$ можно непосред-

ственно продифференцировать выражения (8.12) и просуммировать результат по α . Тогда получим

$$\frac{\partial G_{k\alpha}}{\partial x_\alpha} \equiv \operatorname{div} \mathbf{G}_k = -\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \equiv -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_k \equiv -\Delta \varphi_k = 0, \quad (8.14)$$

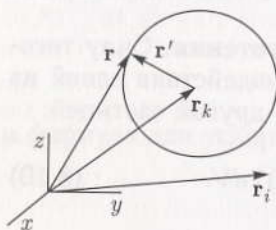


Рис. 3. Область интегрирования при вычислении $\operatorname{div} \mathbf{G}_k$

где Δ — оператор Лапласа. Чтобы найти значение $\operatorname{div} \mathbf{G}_k$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k(t)$, вычислим интеграл от $\operatorname{div} \mathbf{G}_k$ по сферической области с центром в $\mathbf{r}_k(t)$. Пусть $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k$ (рис. 3). Тогда элемент ds площади поверхности сферы с радиусом r' , ограничивающей область интегрирования, может быть представлен в виде

$$ds = \frac{r'}{r'} \cdot (r')^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где θ, φ — угловые переменные сферической системы координат. В соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \mathbf{G}_k dV &= \int_S \mathbf{G}_k dS = \\ &= -Gm_k \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r'}{|r'|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{|r'|} \cdot (r')^2 \sin \theta d\varphi = -4\pi Gm_k. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Мы видим, что функция

$$\frac{\operatorname{div} \mathbf{G}_k(\mathbf{r}')}{(-4\pi Gm_k)} = \frac{\Delta \varphi_k}{4\pi Gm_k} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r'}$$

равна нулю везде, кроме точки $\mathbf{r}' = 0$, но интеграл от этой функции равен единице. В соответствии с данным выше определением это δ -функция. Следовательно, уравнение гравитационного поля частицы с номером k во всей области изменения переменных определяются формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t) = -4\pi Gm_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \quad (8.16)$$

для напряженности $\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t)$ или формулой

$$\Delta \varphi_k(\mathbf{r}, t) = 4\pi Gm_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \quad (8.17)$$

для потенциала $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$ гравитационного поля точечной частицы. Соответствующая интегральная форма уравнения

для потенциала $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$ получается непосредственно из (8.13) и свойств δ -функции:

$$\varphi_k(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot m_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t)) dV'. \quad (8.18)$$

Гравитационное поле макроскопического тела, состоящего из N частиц, может быть найдено на основании (8.16), (8.17), (8.18) и принципа суперпозиции: напряженность $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ гравитационного поля системы N частиц в некоторой точке пространства равна векторной сумме напряженностей $\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, t)$ полей отдельных частиц в той же точке; потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ системы частиц равен сумме потенциалов $\varphi_k(\mathbf{r}, t)$ отдельных частиц. Суммируя (8.16), (8.17), (8.18), приходим к уравнениям гравитационного поля в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = -4\pi G \sum_{k=1}^N m_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)), \quad (8.19)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \sum_{k=1}^N m_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)), \quad (8.20)$$

а также в интегральной форме

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_{k=1}^N m_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t)) dV'. \quad (8.21)$$

Так как сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t)$, действующая на частицу с массой m в точке $\mathbf{r}(t)$, связана с напряженностью поля формулой (8.10), для сил также оказывается справедливым принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) &= \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) \cdot m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) dV = \\ &= -m \sum_{k=1}^N Gm_k \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_k(t))}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_k(t)|^3}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Здесь суммирование распространяется на все частицы, кроме той, для которой вычисляется полная сила.

Уравнения гравитационного поля позволяют найти силу, действующую на частицу в поле системы N частиц также в тех случаях, когда взаимодействие между частицами не сводится к чисто гравитационному. Найдем, в частности, силу, действующую на частицу в поле сферически-симметричного распределе-

ния масс. В этом случае существует единственная выделенная внутренняя точка — центр симметрии распределения \mathbf{r}_0 ; гравитационное поле является центральным; напряженность поля имеет только радиальную составляющую и может зависеть только от расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, так что

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (8.23)$$

Полагая $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > R$, где R — радиус внешней граничной сферы, проинтегрируем уравнения поля (8.19) по объему шара с радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ и поверхностью S . Получим

$$\int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > R} \operatorname{div} \mathbf{G} dV = \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = -4\pi G \sum_{i=1}^N m_i$$

или с учетом (8.23)

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \int_S |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi G \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8.24)$$

Отсюда

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > R), \quad (8.25)$$

где $M = \sum_{i=1}^N m_i$ — полная масса распределения.

Как видно из (8.25), поле тяготения сферически-симметричного распределения вещества вне распределения имеет тот же вид, что и поле точечной частицы с массой, равной полной массе системы частиц и расположенной в центре симметрии системы. Формула остается справедливой и для $R = R(t)$, т. е. для расширяющихся, сжимающихся или пульсирующих сферически-симметричных распределений, так как интеграл от каждой функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t))$ в (8.19) остается равным единице, пока частица находится внутри шаровой области интегрирования с радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

Сферическая симметрия системы может обеспечиваться также электромагнитными взаимодействиями между частицами.

Напряженность гравитационного поля в точке наблюдения \mathbf{r} вне такого нестационарного распределения вещества не зависит от времени и определяется формулой (8.25), пока справедливо неравенство $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > R(t)$. Этот факт может быть использован

для непосредственной экспериментальной проверки «закона обратных квадратов».

Пусть теперь \mathbf{r} — внутренняя точка сферически-симметричного распределения. Результат интегрирования по сферической области с радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < R$ можно снова представить формулой, аналогичной (8.24), в которой вместо полной массы системы будет стоять масса $M(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ шара с радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Таким образом, зависимость напряженности поля от координат внутри системы частиц определяется также характером радиального распределения массы:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\frac{GM(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (8.26)$$

В частности, если область интегрирования представляет собой полый шар, то $M(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = 0$ и силовое гравитационное поле в полости отсутствует, $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0$. Для сферически-симметричных систем с однородным распределением вещества отношение массы шара к его объему не зависит от радиуса шара и равно плотности массы ρ . Следовательно,

$$M(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3,$$

и напряженность гравитационного поля внутри однородного сферически симметричного распределения в соответствии с (8.26) определяется формулой

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{4}{3}\pi \rho \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (8.27)$$

Общее выражение для силы, действующей на частицу с массой m в гравитационном поле системы N частиц, определяется через напряженность поля формулой (8.22). Результаты для сферически-симметричных распределений могут быть использованы для вычисления силы, если влиянием гравитационного поля частицы с массой m на распределение N частиц системы можно пренебречь. Тогда сила равна $\mathbf{F} = m\mathbf{G}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}$. Это ограничение не выполняется, в частности, для системы Земля–Луна. Движение Луны дает заметный вклад в виде приливных возмущений в отклонение распределения вещества и поля от сферически-симметричного распределения. Формулу (8.25) можно использовать для вычисления силы притяжения частицы с массой m к Земле при условии $m \ll M$, где M — масса Земли. Введем высоту h

над поверхностью земного шара и направление \mathbf{n} вертикали формулами

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R + h, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \mathbf{n}.$$

Для движения вблизи поверхности Земли $h(t) \ll R$ (средний радиус Земли $R \approx 6,37 \cdot 10^8$ см). Тогда в соответствии с (8.25)

$$\mathbf{F} = m \left[-G \frac{M}{(R+h)^2} \mathbf{n} \right] \approx m \left[-G \frac{M}{R^2} \mathbf{n} \right] \equiv m\mathbf{g}. \quad (8.28)$$

Здесь \mathbf{g} — напряженность поля тяготения вблизи поверхности Земли. Для малых областей у поверхности Земли можно также пренебречь зависимостью \mathbf{n} от углов и считать \mathbf{g} пространственно-однородным полем ($g \approx 980$ см/с²).

Глава 3

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА И УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ЧАСТИЦЫ В СИЛОВОМ ПОЛЕ

§ 9. Лагранжева форма уравнений движения точечной частицы

Динамическая задача для точечной частицы в терминах векторных динамических функций поставлена, если заданы компоненты вектора сил и начальные условия. Однако наиболее простой закон преобразования имеют скалярные функции; чтобы перейти к системе координат с другой ориентацией координатных осей, достаточно сделать известную замену переменных в таких функциях. Кроме того, формулировка динамических задач в терминах скалярных функций в криволинейных координатах позволяет формализовать процедуру вычисления ускорений и сил в криволинейных координатах, совместить ее с процедурой составления уравнений движения. Можно также установить соответствие между характером зависимости скалярных динамических функций от координат и времени с одной стороны и первыми интегралами движения с другой, и получать эти интегралы на основании одного только вида функции на стадии постановки динамической задачи. Переформулируем поэтому уравнения движения так, чтобы они в качестве компонент векторов ускорений и сил содержали производные от скалярных функций. Рассмотрим эту задачу сначала в декартовых координатах.

Можно указать четыре возможных типа скалярных динамических функций:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad S(\mathbf{r}, t), \quad S(\mathbf{p}, t).$$

Обратимся к функции $L = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Остальные будут использованы далее. По определению трехмерного скаляра

$$L = L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = L(x'_1, x'_2, x'_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3, t) \quad (9.1)$$

при условии, что

$$x'_\sigma = a_{\beta\sigma} x_\beta, \quad \dot{x}'_\sigma = a_{\beta\sigma} \dot{x}_\beta. \quad (9.2)$$

Дифференцируя (9.1) по x_σ , находим

$$\frac{\partial L}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\sigma} = a_{\sigma\mu} \frac{\partial L}{\partial x'_\mu}.$$

Мы видим, что компоненты $\partial L/\partial x_\sigma$ образуют вектор $\partial L/\partial \mathbf{r}$. Производные $\partial L/\partial \dot{x}_\sigma$ также образуют вектор $\partial L/\partial \mathbf{v}$. Эти векторы можно поставить в соответствие векторам \mathbf{p} и \mathbf{F} в уравнениях движения. Положим

$$\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}. \quad (9.3)$$

Тогда в нерелятивистской механике

$$\partial L/\partial v_\alpha = mv_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (9.4)$$

Интегрируя эту систему уравнений первого порядка при фиксированных \mathbf{r} и t , получим

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \quad (9.5)$$

где $U(\mathbf{r}, t)$ — произвольная скалярная функция координат и времени.

В релятивистской механике имеем в соответствии с (9.3)

$$\partial L/\partial v_\alpha = mv_\alpha / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (9.6)$$

и в результате интегрирования при тех же физических условиях найдем

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - U(\mathbf{r}, t). \quad (9.7)$$

В обоих случаях $\partial L/\partial x_\sigma = -\partial U/\partial x_\sigma$. Таким образом, при условии (9.3) в виде $\partial L/\partial x_\sigma$ могут быть представлены только потенциальные силы $F_\sigma^{(p)}$, для которых, следовательно,

$$F_\sigma^{(p)} = -\frac{\partial U}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial x_\sigma}. \quad (9.8)$$

Подставляя (9.3), (9.8) в уравнение движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}^{(p)} + \tilde{\mathbf{F}},$$

где $\tilde{\mathbf{F}}$ — сумма сил, не представимая в виде (9.8), получаем представление уравнений движения точечной частицы в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \tilde{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (9.9)$$

Формулами (9.5), (9.7) представлены функции Лагранжа частицы в нерелятивистской и релятивистской механике. Для окончательной формулировки динамической задачи в потенциальном поле в терминах функций Лагранжа остается задать явный вид потенциальной энергии $U(\mathbf{r}, t)$ частицы и ее начальное состояние. Так, для частицы с массой m в поле тяготения сферически-симметричного распределения массы m_0 с центром в точке \mathbf{r}_0 , вне этого распределения

$$L = \frac{mv^2}{2} + G \frac{mm_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Вблизи поверхности Земли, когда поле можно считать однородным, $U = -mg \cdot \mathbf{r}$. Потенциальная энергия точечного электрического заряда e в электростатическом поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ равна $U = e\varphi(\mathbf{r})$. В частности, $U = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ в однородном поле; $U = ee_0/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ в поле неподвижного точечного заряда e_0 .

Силы $\tilde{\mathbf{F}}$ должны задаваться независимо. Вместе с тем форма уравнений Лагранжа позволяет включить в функцию Лагранжа более широкий класс сил, зависящих от координат и скорости частицы. Поскольку эти силы относятся к фундаментальным, установим их общий вид.

§ 10. Обобщенно-потенциальные силы. Сила Лоренца. Функция Лагранжа частицы в электромагнитном поле

Найдем общий вид силового поля, в котором уравнения движения частицы допускают представление в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (10.1)$$

а также общий вид функции Лагранжа $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в таком поле. Для этого заметим, что уравнения движения

$$\dot{p}_\alpha = F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

всегда можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial v_\alpha} = F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (10.2)$$

где

$$L_0 = mv^2/2$$

для нерелятивистской зависимости импульса от скорости или

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

для релятивистской зависимости. Вычтем (10.1) из (10.2) и введем обозначение

$$L_0 - L = U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (10.3)$$

Это дает возможность представить силу F_α в виде

$$F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}. \quad (10.4)$$

Функция $U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ называется *обобщенным потенциалом*, а сила (10.4) — *обобщенно-потенциальной силой*. Введенным выше *потенциальным* силам соответствует $\partial U / \partial v_\alpha = 0$.

Выполним дифференцирование в правой части (10.4). Получим

$$F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial v_\alpha} + v_\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta \partial v_\alpha} + \dot{v}_\beta \frac{\partial^2 U}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \quad (10.5)$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3$, и по β суммирование). Левая часть равенства (10.5) не зависит от $\dot{\mathbf{v}}$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} = 0.$$

Эту систему уравнений легко проинтегрировать. Имеем

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_\alpha} = -\frac{1}{c} a_\alpha(\mathbf{r}, t).$$

Повторное интегрирование дает

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = U(\mathbf{r}, t) - a_\alpha(\mathbf{r}, t) v_\alpha / c, \quad (10.6)$$

так что в соответствии с (10.3) функция Лагранжа равна

$$L = L_0 - U(\mathbf{r}, t) + \frac{v_\alpha}{c} a_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad (10.7)$$

где $U(\mathbf{r}, t)$, $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$ — произвольные динамические функции координат и времени. Постоянная c , равная скорости света, введена, чтобы обеспечить одинаковую физическую размерность функций $U(\mathbf{r}, t)$, $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$.

Подставим теперь обобщенный потенциал (10.6) в выражение (10.5) для вектора силы. Получим

$$F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} \right) v_\beta. \quad (10.8)$$

Видно, что F_α определяется комбинациями производных функций $U(\mathbf{r}, t)$, $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$, а не самими этими функциями.

Рассматривая силу F_α как результат взаимодействия частицы с полем, мы можем представить (10.8) в виде

$$F_\alpha = \int dV \left[\left(-\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{v_\beta}{c} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)). \quad (10.9)$$

Выражения в круглых скобках в этой формуле являются функциями пространственных координат и времени как независимых переменных, т. е. векторным и тензорным полями. С позиций динамики оба поля представляют один и тот же физический объект, если частица взаимодействует с ними посредством одной и той же постоянной взаимодействия. В этом случае функции $U(\mathbf{r}, t)$, $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$ содержат эту постоянную взаимодействия e в качестве множителя и можно положить

$$U(\mathbf{r}, t) = e\varphi(\mathbf{r}, t), \quad a_\alpha(\mathbf{r}, t) = eA_\alpha(\mathbf{r}, t). \quad (10.10)$$

Антисимметричному тензорному полю, которое появится в (10.9) после новых обозначений (10.10), можно поставить в соответствие поле псевдовектора $B_\alpha(\mathbf{r}, t)$ по формулам

$$B_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} \right), \quad (10.11)$$

или

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Комбинация производных полей $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$ в первой круглой скобке (10.9) определяет поле истинного (полярного) вектора

$$E_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}, \quad (10.12)$$

или

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Поэтому формула (10.9) принимает вид

$$F_\alpha = \int d^3x \left(E_\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta(t) B_\gamma(\mathbf{r}, t) \right) e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)). \quad (10.13)$$

В результате интегрирования с δ -функцией в (10.13) остаются лишь значения полей на траектории, так что

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{e}{c} (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)). \quad (10.14)$$

Это выражение для силы справедливо при выполнении условий (10.11), (10.12). Но силу (10.14) определяют только поля \mathbf{E} , \mathbf{B} , а сами потенциалы φ и A_α остаются неоднозначными

ненаблюдаемыми функциями. Целесообразно поэтому и в дополнительных условиях (10.11), (10.12), которыми определяются поля \mathbf{E} , \mathbf{V} через скалярный и векторный потенциалы φ и \mathbf{A} , исключить потенциалы.

Дифференцируя (10.11) по x_α и суммируя результаты, находим

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad (10.15)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Свертка частных производных вектора $E_\alpha(\mathbf{r}, t)$ с псевдотензором $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ дает

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} - \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial t \partial x_\beta} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\alpha}{\partial t}, \quad (10.16)$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Таким образом, общее выражение для силы, действующей на частицу в полях \mathbf{E} , \mathbf{V} может быть представлено в виде (10.14) при условии, что поля \mathbf{E} и \mathbf{V} удовлетворяют уравнениям (10.15), (10.16). Эти уравнения совпадают с *первой парой уравнений Максвелла* для электромагнитного поля; на точечную частицу с электрическим зарядом e в *электрическом поле \mathbf{E} и магнитном поле \mathbf{V}* действует *сила Лоренца* (10.14).

Вывод о том, что в рамках механики могут быть установлены уравнения электромагнитного поля, не содержащие источников поля, не является неожиданным, так как уравнения движения частицы в поле содержат информацию не только об изменении со временем координат частицы, но и об ее взаимодействии с силовым полем. Это взаимодействие определяется тремя равенствами (10.14), (10.15), (10.16) одновременно, если сила должна зависеть от координат и скорости частицы, а форма уравнений движения ограничена лагранжевой формой. Только все три равенства (10.14), (10.15), (10.16) представляют силу, действующую на частицу в переменном магнитном поле (см. ниже индукционное ускорение частиц). Однако этих общих сведений недостаточно для определения явной зависимости напряженностей полей \mathbf{E} и \mathbf{V} от координат и времени.

Определение явного вида функций $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является задачей и механики, и электродинамики. Если известны законы движения N частиц в полях $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, которые создаются

самими частицами, то явный вид этих функций может быть найден на основе второй пары уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (10.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \quad (10.18)$$

В свою очередь законы движения частиц могут быть установлены, если известен явный вид $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

Выражениями (10.11), (10.12) представлено решение первой пары уравнений Максвелла. Подстановка их во вторую пару (10.17), (10.18) приводит к интегральным формулам для потенциалов электромагнитного поля:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t')) dt' dV', \quad (10.19)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_{i=1}^N e_i \frac{\mathbf{v}_i(t')}{c} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t')) dt' dV', \quad (10.20)$$

где φ_0 , \mathbf{A}_0 — потенциалы внешнего поля.

Значения потенциалов φ и \mathbf{A} определяются этими формулами, если известны координаты $\mathbf{r}_i(t)$ и скорости частиц $\mathbf{v}_i(t)$ как функции времени, т.е. если известны решения уравнений движения N частиц. Вместе с тем поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ часто приходится задавать аналитически на основе экспериментальных сведений о распределении частиц и полей. Динамическая задача в таких случаях будет непротиворечивой, если $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ будут удовлетворять первой паре уравнений Максвелла.

Функция Лагранжа частицы в электромагнитном поле согласно формулам (10.7), (10.10) равна

$$L = L_0(\mathbf{v}) - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} v_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t). \quad (10.21)$$

Здесь $L_0(\mathbf{v})$ совпадает по форме с функцией Лагранжа невзаимодействующей частицы.

Потенциалы стационарных однородных полей \mathbf{E} и \mathbf{V} могут быть найдены непосредственно из определений

$$\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (10.22)$$

Разрешая (10.22) относительно φ и \mathbf{A} , находим

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}). \quad (10.23)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} может быть выбран также в виде $\mathbf{A} = \{-By, 0, 0\}$, в системе координат с осью Oz вдоль \mathbf{B} , $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$. Следовательно, функция Лагранжа частицы в стационарном однородном электромагнитном поле равна

$$L = L_0(\mathbf{v}) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{e}{2c}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}). \quad (10.24)$$

Если известны $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$, то уравнения движения частицы под действием силы Лоренца могут быть получены путем подстановки функции Лагранжа (10.21) в уравнения Лагранжа (10.1) и последующего вычисления содержащихся в этих уравнениях производных.

Заметим также, что общее выражение для силы Лоренца, уравнения поля (10.19), (10.20) имеют место независимо от вида $L_0(\mathbf{v})$, т.е. в нерелятивистской и релятивистской механике. Принципиальное различие между двумя динамическими теориями в фиксированной системе отсчета определяется формой функции Лагранжа невзаимодействующей частицы $L_0(\mathbf{v})$ и лежит в области кинематики и преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой.

§ 11. Неоднозначность функции Лагранжа. Калибровочные преобразования

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^{(d)}$$

содержат только производные функции Лагранжа, а не саму эту функцию ($F_\alpha^{(d)}$ — диссипативные силы). Поэтому одни и те же уравнения движения могут быть получены при помощи разных функций $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Выясним, с какой степенью произвола может быть задана функция Лагранжа. Для этого найдем разность $\Delta L = L - \tilde{L}$ двух функций, которые приводят к одним и тем же уравнениям движения.

Здесь удобно считать $\alpha = 1, \dots, s$, причем s не обязательно равным трем, а x_α — не обязательно декартовыми координатами, рассматривая в качестве L функцию Лагранжа системы частиц.

Так как уравнения движения остаются неизменными при замене L на \tilde{L} , для разности ΔL имеем уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\Delta L)}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial(\Delta L)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (11.1)$$

которые не устанавливают каких-либо дополнительных ограничений на \dot{x}_α , \ddot{x}_α , связанных уравнениями движения. Поэтому все коэффициенты при \ddot{x}_β и \dot{x}_β , появляющиеся после выполнения дифференцирования в (11.1):

$$\frac{\partial^2(\Delta L)}{\partial t \partial \dot{x}_\alpha} + \dot{x}_\beta \frac{\partial^2(\Delta L)}{\partial x_\beta \partial \dot{x}_\alpha} + \ddot{x}_\beta \frac{\partial^2(\Delta L)}{\partial \dot{x}_\beta \partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial(\Delta L)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (11.2)$$

должны быть равными нулю. Из

$$\frac{\partial^2(\Delta L)}{\partial \dot{x}_\beta \partial \dot{x}_\alpha} = 0 \quad (11.3)$$

находим $\Delta L = \lambda + \dot{x}_\alpha \chi_\alpha$, где λ , χ_α — произвольные функции координат и времени. Подставляя этот результат в исходные уравнения (11.2), получим

$$\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \chi_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \dot{x}_\beta = 0. \quad (11.4)$$

В этом уравнении коэффициенты при \dot{x}_β равны нулю. Следовательно, $\chi_\alpha = \partial f / \partial x_\alpha$, где f — произвольная функция координат и времени. Тогда

$$\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \right) = 0. \quad (11.5)$$

Отсюда $\lambda = \partial f / \partial t + \gamma(t)$. Появившуюся в результате интегрирования функцию $\gamma(t)$ не имеет смысла сохранять, так как f — произвольная функция координат и времени. Окончательно находим

$$\Delta L = \partial f / \partial t + \dot{x}_\alpha \partial f / \partial x_\alpha = df / dt. \quad (11.6)$$

Таким образом, все функции Лагранжа, отличающиеся на полные производные по времени от произвольных функций координат и времени, приводят к одним и тем же уравнениям движения. Если в выражении для функции Лагранжа можно выделить в качестве отдельных слагаемых полную производную по времени от некоторой функции координат и времени и, в частности, функцию времени, то такие слагаемые могут быть опущены без ущерба для уравнений движения.

Для электрически заряженной частицы в электромагнитном поле функция Лагранжа найдена выше в виде (10.7):

$$L = L_0 - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}v_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t).$$

Добавим к этой функции полную производную по времени от произвольной функции $(e/c)f(\mathbf{r}, t)$. Получим

$$L = L_0 - e\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}v_\alpha \tilde{A}_\alpha(\mathbf{r}, t),$$

где

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}. \quad (11.7)$$

Уравнения Лагранжа при этом можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{p}} = e\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{e}{c}(\mathbf{v}(t) \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}(t), t)). \quad (11.8)$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\varphi} - \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}. \quad (11.9)$$

Но уравнения движения и напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{B} должны оставаться неизменными при таком преобразовании функции Лагранжа. Подставляя в (11.9) $\tilde{\varphi}$ и \tilde{A}_μ из (11.7), убеждаемся, что это действительно так, $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$. Мы видим, что преобразование функции Лагранжа путем прибавления к ней полной производной по времени от произвольной функции координат и времени эквивалентно преобразованиям (11.7) потенциалов электромагнитного поля. Напряженности полей при этом остаются неизменными. Такие преобразования потенциалов носят название калибровочных преобразований. Калибровочные преобразования дают возможность переходить к более простым выражениям для потенциалов поля.

§ 12. Уравнения Лагранжа в криволинейных координатах и неинерциальных системах отсчета

Преобразуем уравнения движения точечной частицы в форме уравнений Лагранжа в декартовых координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^{(d)} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (12.1)$$

к координатам q_1, q_2, q_3 по формулам

$$x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, q_3, t), \quad (12.2)$$

допускающим обращение

$$q_\alpha = q_\alpha(x_1, x_2, x_3, t). \quad (12.3)$$

Криволинейные координаты обычно вводятся формулами, не содержащими явной зависимости от времени. Семейство (12.2), (12.3) содержит такие преобразования при $\partial x_\alpha / \partial t = \partial q_\alpha / \partial t = 0$.

Формулы преобразования компонент \dot{x}_α скорости частицы легко устанавливаются путем дифференцирования (12.2) по времени:

$$\dot{x}_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial x_\alpha}{\partial t}, \quad (12.4)$$

и позволяют сделать замену переменных в выражении для функции Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = \tilde{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t). \quad (12.5)$$

Дифференцируя (12.5), получим

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} \frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial x_\alpha}, \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{x}_\alpha}. \quad (12.7)$$

Диссипативные силы также следует отнести к новым переменным:

$$F_\alpha^{(d)} = \tilde{F}_\alpha^{(d)}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t). \quad (12.8)$$

Подставляя (12.6), (12.7), (12.8) в уравнения Лагранжа, находим

$$\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{x}_\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial x_\alpha} \right) = \tilde{F}_\alpha^{(d)}. \quad (12.9)$$

Заметим теперь, что на основании (12.3)

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha + \frac{\partial q_\sigma}{\partial t}. \quad (12.10)$$

Поэтому

$$\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial x_\alpha}, \quad (12.11)$$

следовательно, последнее слагаемое в левой части (12.9) обращается в нуль, и мы имеем

$$\frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} \right] = \tilde{F}_\alpha^{(d)}. \quad (12.12)$$

Умножим обе части (12.12) на $\partial x_\alpha / \partial q_\mu$ и просуммируем по α . Так как

$$\frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\mu} = \frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\mu} = \delta_{\sigma\mu}, \quad (12.13)$$

окончательно находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\mu} = Q_\mu^{(d)}. \quad (12.14)$$

Обобщенная сила определяется равенствами

$$Q_\mu(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t) = \tilde{F}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\mu}, \quad (12.15)$$

$Q_\mu^{(d)}$ в (12.14) — обобщенная диссипативная сила.

Мы видим, что уравнения Лагранжа сохраняют свою форму (являются ковариантными) относительно преобразований (12.2), включая преобразования к произвольным криволинейным координатам. При доказательстве этого факта нигде не использовался явный вид координат. Это дает возможность использовать один и тот же универсальный алгоритм получения уравнений движения независимо от того, к каким криволинейным координатам отнесена функция Лагранжа и обобщенная сила.

Еще одно преимущество лагранжевой формулировки динамики состоит в отсутствии необходимости вычислять отдельно, вне указанного алгоритма, составляющие ускорения частицы и обобщенной силы вдоль направляющих векторов криволинейной системы координат. Эти составляющие появляются в явном виде в уравнениях Лагранжа в результате дифференцирования функции Лагранжа и при необходимости могут быть найдены таким способом. Целесообразно поэтому представить уравнения (12.14) в форме, содержащей явно указанные проекции силы и ускорения.

Обобщенную силу (12.15) можно представить в виде

$$Q_\mu = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \right| \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_\mu = H_\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_\mu, \quad (12.16)$$

где H_μ — коэффициенты Ламе. Следовательно, проекция силы на вектор \mathbf{n}_μ , касательный к координатной линии q_μ , равна Q_μ / H_μ .

Для обобщенно-потенциальной силы получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_\mu} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\mu} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial q_\mu} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right], \end{aligned}$$

определяющие проекции вектора обобщенно-потенциальной силы на векторы \mathbf{n}_μ :

$$\mathbf{n}_{(\mu)} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right] = \frac{1}{H_{(\mu)}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_{(\mu)}} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_{(\mu)}} \right]. \quad (12.17)$$

Здесь приняты во внимание соотношения (12.11) и по (μ) нет суммирования. Положим далее в уравнениях Лагранжа (12.14) $L = L_0 - U$ и умножим каждое из них на соответствующий коэффициент $(H_\mu)^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{(\mu)}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_{(\mu)}} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_{(\mu)}} \right] &= \frac{1}{H_{(\mu)}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_{(\mu)}} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_{(\mu)}} \right] + \frac{Q_{(\mu)}}{H_{(\mu)}} \\ &(\mu = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Каждое из этих уравнений содержит в правой части проекцию обобщенно-потенциальной силы (12.17) и силы \mathbf{F} (12.16), (возможно, не представимой через обобщенный потенциал U), на направление единичного вектора \mathbf{n}_μ , касательного к координатной линии q_μ и направленного в сторону возрастания q_μ . В левой части (12.18) содержится умноженную на массу частицы проекцию ускорения w_μ на вектор \mathbf{n}_μ . Мы получаем универсальную формулу для вычисления составляющих ускорения вдоль направляющих векторов криволинейной системы координат:

$$w_\mu = \frac{1}{mH_\mu} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_\mu} \right]. \quad (12.19)$$

В частности, для сферической системы координат

$$\begin{aligned} v^2 &= H_r^2 \dot{r}^2 + H_\theta^2 \dot{\theta}^2 + H_\varphi^2 \dot{\varphi}^2, \\ H_r &= 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta, \end{aligned}$$

и функция Лагранжа L_0 имеет вид

$$L_0 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_r &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2], \\ w_\theta &= \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \right], \\ w_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta} \left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) \right]. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Уравнения движения частицы в терминах компонент ускорения w_μ в криволинейных координатах получаются путем умножения уравнений Лагранжа на обратные значения коэффициентов Ламе: $(H_\mu)^{-1}$.

Заметим теперь, что форма уравнений Лагранжа остается неизменной относительно преобразований (12.2), зависящих от времени явно. В качестве координат q_μ в (12.2) могут быть декартовы координаты частицы в другой системе отсчета S' . Если S и S' — инерциальная система отсчета, то координаты x_α и x'_α частицы в нерелятивистской механике связаны преобразованиями Галилея: $x_\alpha = x'_\alpha + V_\alpha t$, которые также принадлежат к преобразованиям (12.2).

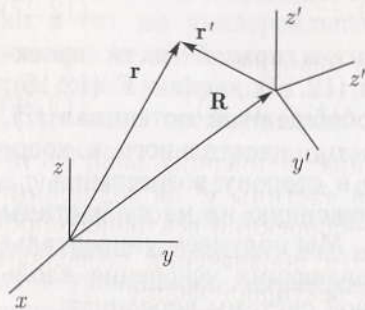


Рис. 4. Координаты \mathbf{r} и \mathbf{r}' одной и той же точки в разных системах отсчета

Если S' — неинерциальная система отсчета, то связь x_α и x'_α может быть установлена при условии, что задан закон движения $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ начала координат S' и ориентация координатных осей S' относительно S в каждый момент времени. Тогда (рис. 4)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}', \quad (12.21)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиусы-векторы частицы в S и S' соответственно. Умножая это равенство на орты \mathbf{n}_α системы S , получим

$$x_\alpha = X_\alpha(t) + \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}'.$$

Но

$$\mathbf{r}' = x'_\sigma \mathbf{n}'_\sigma(t), \quad (12.22)$$

где $\mathbf{n}'_\sigma(t)$ — орты системы S' . Следовательно,

$$x_\alpha = X_\alpha(t) + \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}'_\sigma(t) \cdot x'_\sigma = X_\alpha(t) + a_{\alpha\sigma}(t) \cdot x'_\sigma. \quad (12.23)$$

Здесь $a_{\alpha\sigma}(t)$ — направляющие косинусы осей x'_σ относительно x_α , которые должны быть известными функциями времени. Преобразования (12.23) также принадлежат к классу преобразований (12.2). Поэтому форма уравнений Лагранжа не изменится при переходе к координатам x'_α неинерциальной системы отсчета.

Для составления уравнений движения частицы в неинерциальной системе отсчета достаточно найти явный вид функции Лагранжа в этой системе. Найдем с этой целью соотношение между скоростями частицы в S и S' .

Из (12.21) с учетом (12.22) имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{x}'_\alpha \mathbf{n}'_\alpha(t) + x'_\alpha \dot{\mathbf{n}}'_\alpha(t). \quad (12.24)$$

Ориентация векторов \mathbf{n}'_α относительно неподвижных ортов \mathbf{n}_α задается равенствами $\mathbf{n}'_\alpha(t) = a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{n}_\beta$. Поэтому

$$\dot{\mathbf{n}}'_\alpha = \dot{a}_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta = \dot{a}_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta} \mathbf{n}'_\sigma. \quad (12.25)$$

Тензор $\dot{a}_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta}$ — антисимметричный, что следует непосредственно из условия ортогональности $\dot{a}_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\sigma}$. Ему может быть поставлен в соответствие псевдовектор *угловой скорости* системы S' :

$$\omega_\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \dot{a}_{\mu\beta} a_{\nu\beta}. \quad (12.26)$$

Тогда

$$\dot{a}_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta} = \varepsilon_{\alpha\sigma\gamma} \omega_\gamma. \quad (12.27)$$

Подставляя (12.25), (12.27) в (12.24), находим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}(t) + (\dot{x}'_\alpha + \varepsilon_{\alpha\sigma\gamma} \omega_\sigma(t) x'_\gamma) \mathbf{n}'_\alpha(t). \quad (12.28)$$

Здесь $\dot{\mathbf{R}}(t)$ — скорость начала координат неинерциальной системы отсчета, \dot{x}'_α — проекции скорости частицы \mathbf{v}' на подвижные орты $\mathbf{n}'_\alpha(t)$ системы S' , $\varepsilon_{\alpha\sigma\gamma} \omega_\sigma(t) x'_\gamma$ — проекции векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ на те же орты. Эти обозначения позволяют представить (12.28) в символической векторной форме:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'). \quad (12.29)$$

Равенство (12.21) можно продифференцировать по времени и при неподвижных \mathbf{n}_α инерциальной системы S , так что $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\mathbf{r}}'$. Сравнивая это выражение с (12.29), приходим к формуле преобразования от системы S' к системе S оператора дифференцирования по времени векторов:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \dots), \quad (12.30)$$

где штрихом отмечена производная в S' при фиксированных \mathbf{n}'_α .

Теперь, чтобы получить функцию Лагранжа в системе S' , достаточно подставить \mathbf{r} и \mathbf{v} из (12.23), (12.29) в выражения для кинетической и потенциальной энергии частицы. Получим

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{R}}(t)^2 + \mathbf{v}'^2 + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')^2 + 2\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot (\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}') + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')) - U(\mathbf{r}', t). \quad (12.31)$$

Но

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot (\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')) = (d/dt)(\mathbf{r}'\dot{\mathbf{R}}(t)) - \mathbf{r}'\ddot{\mathbf{R}}(t), \quad (12.32)$$

причем полную производную по времени от $(\mathbf{r}'\dot{\mathbf{R}}(t))$, а также $\dot{\mathbf{R}}(t)^2$ в выражении для функции Лагранжа можно опустить вследствие ее неоднозначности. Окончательно для функции Лагранжа частицы в неинерциальной системе отсчета имеем

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}') + \frac{m}{2} (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')^2 - m\mathbf{r}' \cdot \ddot{\mathbf{R}}(t) - U(\mathbf{r}', t). \quad (12.33)$$

Здесь $\mathbf{R}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ — заданные функции времени.

Так как форма уравнения Лагранжа при переходе к переменным системы S' остается неизменной, уравнения движения частицы в системе S' можно получить путем подстановки функции Лагранжа в уравнения Лагранжа (12.1). Вектор $\partial L / \partial \mathbf{v}'$ является по определению *обобщенным импульсом* частицы и равен

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}' + m(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}') \equiv \mathbf{p}'. \quad (12.34)$$

Для производных по координатам функции L имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'} = -m\ddot{\mathbf{R}}(t) - m(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}') - m(\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}. \quad (12.35)$$

Поэтому уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -m\ddot{\mathbf{R}}(t) - 2m(\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')) - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}') - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}. \quad (12.36)$$

Здесь $\ddot{\mathbf{R}}(t)$ — ускорение начала, $\boldsymbol{\omega}(t)$ — угловая скорость вращения координатных осей декартовой системы координат неинер-

циальной системы отсчета S' относительно какой-либо инерциальной системы S . Второе и третье слагаемые в этом уравнении называются *силой Кориолиса* и *центробежной силой* соответственно.

Уравнение движения (12.35) можно получить и непосредственно из уравнений Ньютона, используя при вычислении ускорения формулы (12.29), (12.30).

§ 13. Циклические координаты и законы сохранения для точечной частицы

Произволом в выборе криволинейных координат можно воспользоваться для упрощения процедуры интегрирования уравнений движения. Если силовое поле имеет определенную пространственную симметрию, например, азимутальную, криволинейные координаты могут быть введены так, что функция Лагранжа не будет зависеть от соответствующей координаты (азимутального угла φ). Тогда уравнение Лагранжа в отсутствие сил трения сведется просто к равенству нулю полной производной по времени от *обобщенного импульса* $p_\varphi \equiv \partial L / \partial \dot{\varphi}$, сопряженного координате φ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0,$$

т. е. p_φ остается неизменным в течение всего времени движения частицы. Функция Лагранжа в координатах ρ, φ, z цилиндрической системы координат в этом случае равна

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, z, t). \quad (13.1)$$

Поэтому обобщенный импульс равен $p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}$ и представляет собой проекцию момента импульса частицы на ось z .

Вообще *обобщенные импульсы* $p_\sigma \equiv \partial L / \partial \dot{q}_\sigma$, сопряженные *обобщенным циклическим координатам* q_σ (таким, что $\partial L / \partial q_\sigma = 0$), в отсутствие диссипативных сил являются первыми интегралами движения.

Если диссипативная сила пропорциональна скорости частицы, $\mathbf{F}^{(d)} = -\chi \mathbf{v}$, соответствующая обобщенная сила равна

$$Q_\mu^{(d)} = \mathbf{F}^{(d)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} = -\chi \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right). \quad (13.2)$$

В потенциальном поле

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right). \quad (13.3)$$

Поэтому уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} p_\mu = -\frac{\chi}{m} p_\mu - \frac{\partial L}{\partial q_\mu}. \quad (13.4)$$

Для циклической координаты q_μ в (13.4) $\partial L / \partial q_\mu = 0$ и, следовательно, существует первый интеграл

$$p_\mu \cdot \exp\left(\frac{\chi}{m} t\right) = \text{const}, \quad (13.5)$$

свидетельствующий об экспоненциальном убывании p_μ со временем.

Умножим далее уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = Q_\mu^{(d)} \quad (13.6)$$

на \dot{q}_μ и просуммируем по μ . Получим

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \dot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \ddot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q_\mu^{(d)} \dot{q}_\mu. \quad (13.7)$$

Три последних слагаемых в левой части (13.7) представляют собой полную производную по времени от функции Лагранжа. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q_\mu^{(d)} \dot{q}_\mu. \quad (13.8)$$

Если диссипативные силы отсутствуют (или ими можно пренебречь на некотором интервале времени движения) и функция Лагранжа не зависит явно от времени, то, как видно из (13.8), функция (обобщенная энергия)

$$H(q, \dot{q}, t) \equiv \dot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - L \quad (13.9)$$

представляет собой комбинацию динамических переменных, которая остается постоянной вдоль траектории движения на таком интервале времени. В декартовых координатах, а также в координатах q_α , связанных с декартовыми координатами формулами $x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, q_3)$, не содержащими явной зависимости от времени, обобщенная энергия совпадает с полной энергией

частицы. Так, в цилиндрических координатах после подстановки (13.1) в (13.9) получаем

$$H = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, z, t).$$

Функция Лагранжа релятивистской заряженной частицы

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

в стационарном электромагнитном поле $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ не зависит от времени. Следовательно, имеет место закон сохранения обобщенной энергии

$$H = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} + e\varphi = \text{const}, \quad (13.10)$$

совпадающей в этом случае с полной энергией частицы в электромагнитном поле.

Функция Лагранжа частицы в неинерциальной системе отсчета представлена выражением (12.32). Используя это выражение, находим в соответствии с определением обобщенной энергии

$$H'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}'^2 + m\mathbf{r}' \cdot \ddot{\mathbf{R}}(t) - \frac{m}{2} (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')^2 + U(\mathbf{r}', t). \quad (13.11)$$

Первое слагаемое в (13.11) есть кинетическая энергия частицы в неинерциальной системе отсчета; второе эквивалентно потенциальной энергии в однородном силовом поле $-\ddot{\mathbf{R}}$; третье слагаемое представляет собой потенциал центробежной силы:

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(-\frac{m}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(-\frac{m}{2} (\mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2) \right) = m(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega})).$$

В неинерциальных системах отсчета обобщенная энергия (13.11) может сохраняться, если угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$ и ускорения трансляционного движения $\ddot{\mathbf{R}}$ таких систем не зависят от времени. Кроме того, должны отсутствовать диссипативные силы, и потенциальная энергия U не должна зависеть от времени явно.

Обобщенный импульс $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}' + m(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}')$ связан с импульсом частицы \mathbf{p} в инерциальной системе отсчета S соотношением

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\dot{\mathbf{R}}(t). \quad (13.12)$$

Для вращающейся ($\mathbf{R} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$) системы: $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. В этом случае совпадают также моменты импульсов $\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}'$ и $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ частицы в S' и S , а обобщенная энергия, как видно из (13.11), отличается от полной энергии $H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ частицы в поле $U(\mathbf{r}, t)$ в инерциальной системе отсчета S слагаемым $-\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$:

$$H'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t). \quad (13.13)$$

Мы видим, что первые интегралы движения для частицы могут быть получены на основании одного только вида функции Лагранжа. При этом наиболее предпочтительным является такой выбор динамических переменных, при котором число циклических координат максимально. Не прибегая всякий раз к интегрированию уравнений движения, можно утверждать, что циклической координате q_μ соответствует сопряженный обобщенный импульс p_μ , сохраняющийся в процессе движения (при наличии силы трения, пропорциональной скорости, $p_\mu \exp(\chi t/m) = \text{const}$); «циклическому» времени, когда $\partial L/\partial t = 0$, соответствует сохранение обобщенной энергии в условиях, когда можно пренебречь диссипативными потерями. В неинерциальных системах отсчета законы сохранения обобщенного импульса и энергии могут иметь место, если ускорение и угловая скорость вращения системы отсчета не зависят от времени.

Глава 4

ДВИЖЕНИЕ В НЕОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

§ 14. Динамические закономерности в неоднородных силовых полях

1. Общие свойства одномерного движения в консервативном поле. Одномерному движению частицы в поле $U(x)$ соответствует функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x). \quad (14.1)$$

Так как энергия частицы сохраняется,

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = \frac{m}{2} [\dot{x}(0)^2 + U(x(0))], \quad (14.2)$$

общие свойства одномерного движения в поле $U(x)$ можно исследовать на основе закона сохранения энергии.

Из (14.2) находим два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (14.3)$$

Разделяя в этих уравнениях переменные и интегрируя, получаем закон движения частицы

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} + \text{const}, \quad (14.4)$$

содержащий две произвольные постоянные.

Из (14.3) следует, что *допустимая область движения* определяется неравенством $E \geq U(x)$. Граничными точками этой области служат корни уравнения $E = U(x)$. В граничных точках скорость частицы обращается в нуль, но в общем случае dU/dx и \ddot{x} отличны от нуля (рис. 5). Это значит, что в граничных точках скорость частицы меняет знак на противоположный; они служат точками поворота. В решении (14.4) это соответствует переходу с одной ветви корня на другую.

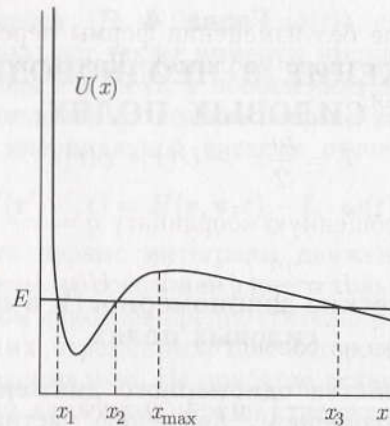


Рис. 5. Допустимая область движения: $x_1 \leq x \leq x_2$ и $x_3 \leq x \leq \infty$

Если допустимая область движения ограничена двумя точками поворота, то движение называется *финитным*. Если имеется только одна точка поворота, то частица в поле $U(x)$ уходит на бесконечность и движение является неограниченным или *инфинитным*.

Энергия E частицы может совпадать с одним из максимумов потенциальной энергии, $E = U(x_{\max})$. Чтобы продемонстрировать характерную динамическую закономерность движения с такой энергией, вычислим время τ движения частицы до точки x_{\max} от близкой к ней точки $x(0)$, в которой частица находилась в момент $t = 0$ и имела скорость $\dot{x}(0)$. В этих условиях функцию $U(x)$ можно заменить ее разложением

$$U(x) \cong E + \frac{1}{2}U''(x_{\max})(x - x_{\max})^2,$$

где $U''(x_{\max}) < 0$. Время движения τ определяется интегралом

$$\tau = \int_{x(0)}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m}|U''(x_{\max})|(x - x_{\max})^2}}. \quad (14.5)$$

Этот интеграл расходится логарифмически на верхнем пределе интегрирования. Частице с энергией $E = U(x_{\max})$ требуется бесконечно большое время для достижения точки x_{\max} , которая, таким образом, является точкой остановки частицы.

К эквивалентной динамической задаче приводит задача о движении частицы в нестационарном поле $U(x, t) = U(x - \phi(t))$.

При $\phi(t) = ut$ поле без изменения формы переносится с постоянной скоростью u (поле «волны»). Для этой задачи функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x - \phi(t)). \quad (14.6)$$

Введем новую обобщенную координату $q = x - \phi(t)$. Тогда

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q} + \dot{\phi})^2 - U(q). \quad (14.7)$$

Подставим сюда $\dot{q}\dot{\phi}$ из равенства

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}q) = \ddot{\phi}q + \dot{q}\dot{\phi}$$

и опустим полную производную по времени от $\dot{\phi}q$, а также функцию $\dot{\phi}^2$, зависящую только от времени. Получим

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 - U(q) - m\ddot{\phi}q. \quad (14.8)$$

При $\ddot{\phi} = 0$ это выражение с точностью до обозначений совпадает с (14.1).

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$m\ddot{q} + \partial U/\partial q = -m\ddot{\phi}(t). \quad (14.9)$$

Задача свелась к интегрированию однородного уравнения движения в консервативном поле $U(q)$ и отысканию частного решения неоднородного уравнения, а при $\phi = ut$ — только к интегрированию однородного уравнения. В этом последнем случае обобщенная энергия

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + U(q)$$

сохраняется, и, возвращаясь к прежней переменной, мы получаем первый интеграл движения:

$$(m/2)(\dot{x} - u)^2 + U(x - ut) = \text{const}. \quad (14.10)$$

При использовании переменной x , как видно из (14.6), $\partial L/\partial t \neq 0$, и обобщенная энергия не сохраняется.

К эквивалентным одномерным задачам приводят многие трехмерные задачи, задача двух тел, задача о линейных колебаниях системы N взаимодействующих частиц.

2. Собственные одномерные колебания. Одномерное финитное движение является периодическим. Период осцилля-

ций T , равный времени движения от одной точки поворота x_1 до другой x_2 и обратно, на основании (14.4) следующий:

$$T(E) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(+1 / \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \right) + \\ + \int_{x_2}^{x_1} dx \left(-1 / \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \right) = \\ = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx / \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (14.11)$$

При замене переменных в этом интеграле нет необходимости преобразовывать точки поворота. Они всегда определяются равенством нулю подкоренного выражения.

Для одномерных периодических движений с периодом T справедливо уравнение вида

$$x(t) = x(t + T). \quad (14.12)$$

Уравнению (14.12) удовлетворяют функции $x_0(t) = a_0 = \text{const}$, $x_{1n} = a_n \cos n\omega t$, $x_{2n} = b_n \sin n\omega t$ при $\omega = 2\pi/T$, $n = \pm 1, \dots$, а также их произвольная линейная комбинация или тригонометрический ряд

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (14.13)$$

Этот ряд можно представить в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega t} \quad (14.14)$$

при условии $c_{-n} = c_n^*$, $c_0 = a_0/2$, вытекающим из вещественности $x(t)$. Коэффициенты c_n можно подобрать так, что ряд (14.14) будет представлять закон движения $x(t)$, заданный формулой (14.4), или сходиться к $x(t)$. Необходимые условия на c_n можно получить, умножив (14.14) на $\exp(im\omega t)$ и проинтегрировав результат по периоду движения. Учитывая, что

$$\int_0^T e^{i(m-n)\omega t} dt = T\delta_{mn},$$

найдем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{in\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (14.15)$$

т. е. тригонометрический ряд должен быть рядом Фурье. Начальные условия налагают определенные ограничения на совокупность коэффициентов Фурье:

$$x(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n, \quad \dot{x}(0) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega n c_n.$$

Однако коэффициенты c_n , a_n , b_n ряда Фурье не могут быть вычислены по формулам (14.15), пока $x(t)$ не найдено явно. Иногда коэффициенты c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) можно найти точно или приближенно, если ряд (14.14) подставить непосредственно в уравнение движения

$$m\ddot{x} = -dU(x)/dx \quad (14.16)$$

и учесть, что для $x(t)$, непрерывных вместе со своими производными до m -го порядка, порядок убывания $|c_n|$ не ниже чем n^{-m-2} .

В общем случае уравнение (14.16) является нелинейным дифференциальным уравнением. Поэтому формулами (14.4), (14.11) представлены закон движения $x(t)$ и период T одномерных нелинейных колебаний в поле $U(x)$. Такие колебания содержат, в терминах рядов Фурье (14.14), кратные гармоники основной частоты $\omega = 2\pi/T$. Сама частота, как видно из (14.11), зависит от полной амплитуды осцилляций $|x_2 - x_1|$. Исключение составляет движение в поле $U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$. Значение интеграла (14.11) в такой одномерной параболической «яме» равно

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx / \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{2}(x - x_0)^2 \right)} = \\ = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{x - x_0}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \Bigg|_{x=x_0-\sqrt{2E/k}}^{x=x_0+\sqrt{2E/k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (14.17)$$

и не зависит от пределов интегрирования. При всех конечных значениях энергии в таком поле частота не зависит от амплитуды осцилляций.

При значении полной энергии $E = U(x_0) = U_{\min}$ допустимая область движения вырождается в точку x_0 локального минимума потенциальной энергии. Эта точка является *положением устойчивого равновесия*. Значение $U(x_0)$ является наименьшим в некоторой окрестности точки x_0 . Скорость частицы в точке x_0 равна нулю. Если энергия E близка к U_{\min} , то расстояние между точками поворота $|x_2 - x_1|$ будет малым (рис. 5). Потенциальную энергию $U(x)$ в этом случае можно заменить ее разложением в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия x_0 ,

$$U(x) \cong U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0) \cdot (x - x_0)^2, \quad (14.18)$$

$U''(x_0) > 0$. Функция Лагранжа в этом приближении принимает вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}U''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \quad (14.19)$$

или после введения *отклонений от положения равновесия* $\xi = x - x_0$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}U''(x_0) \cdot \xi^2.$$

Уравнение Лагранжа при этом сводится к уравнению колебаний *гармонического осциллятора*:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (14.20)$$

$$\omega_0^2 = U''(x_0)/m. \quad (14.21)$$

Общее решение этого уравнения

$$\xi = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (14.22)$$

или

$$\xi = \operatorname{Re}\{A e^{-i\omega_0 t}\}, \quad (14.23)$$

определяет закон движения частицы в приближении линейных колебаний (амплитуда a , начальная фаза α , или комплексная амплитуда A , могут быть найдены, если задано начальное состояние $\xi(0)$, $\dot{\xi}(0)$).

Энергия гармонических колебаний

$$E = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 a^2 = U''(x_0)a^2/2 \quad (14.24)$$

пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Частота (14.21) совпадает с частотой, которая при $k \equiv U''(x_0)$ следует из (14.17); закон движения (14.22) также может быть

получен из (14.4) аналогично (14.17), где неопределенный интеграл уже вычислен. Однако в общем случае результаты (14.20), (14.21), (14.23) для линейных колебаний справедливы лишь в малой окрестности положения равновесия, при достаточно малых амплитудах a .

Вместе с тем не любые финитные движения с энергиями E , близкими к U_{\min} , т.е. не любые малые колебания могут быть представлены в виде гармонических колебаний. Приближение линейных колебаний будет отсутствовать, если $U''(x_0) = 0$. Первый не исчезающий член взаимодействия в разложении функции Лагранжа по степеням отклонений от положения равновесия будет выше второй степени, и малые колебания будут принципиально нелинейными. Так, для частицы, которая может свободно перемещаться вдоль оси x под действием идеальной упругой пружины, закрепленной вне этой оси и имеющей жесткость k , функция Лагранжа может быть представлена в виде

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(l - \sqrt{l^2 + x^2}\right)^2, \quad (14.25)$$

где l — длина недеформированной пружины. Положением равновесия частицы служит точка $x = 0$, в которой потенциальная энергия минимальна. Однако $U''(0) = 0$ и, следовательно, равна нулю частота линейных колебаний ω_0 , определенная формулой (14.21). Малые колебания оказываются существенно нелинейными. Первый член разложения потенциальной энергии по степеням малых отклонений от положения равновесия оказывается пропорциональным x^4 . В этом приближении

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{8l^2}x^4 \quad (14.26)$$

и приводит к уравнению движения с кубической нелинейностью

$$m\ddot{x} + \frac{k}{2l^2}x^3 = 0. \quad (14.27)$$

Решение этого уравнения дается общей формулой (14.4):

$$\begin{aligned} t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k}{8l^2}x^4\right)}} + \text{const} = \\ = \pm \sqrt[4]{\frac{2m^2 l^2}{kE}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \text{const} = \\ = \pm \sqrt[4]{\frac{m^2 l^2}{2kE}} F(\alpha, \sqrt{2}/2) + \text{const}, \quad (14.28) \end{aligned}$$

где $F(\alpha, \sqrt{2}/2)$ — эллиптический интеграл первого рода,

$$\alpha = \arcsin(\sqrt{2}u/\sqrt{1+u^2}), \quad u = \sqrt[4]{k/8El^2x}.$$

Период малых колебаний определяется формулой (14.11) и равен

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{8l^2} x^4 \right)}} = 4 \sqrt[4]{\frac{2m^2l^2}{kE}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{m^2l^2}{2k\pi^2E}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Здесь $\Gamma(n)$ — гамма-функция, $\Gamma(1/4) \cong 3,6 \dots$. Частота $\omega = 2\pi/T$ малых нелинейных колебаний, как видно из (14.29), оказывается зависящей от энергии частицы и ведет себя как $\sqrt[4]{E}$.

Потенциальная энергия в окрестности положения равновесия может оказаться неаналитической функцией. В этом случае она не может быть представлена степенным рядом и уравнение малых колебаний в окрестности положения равновесия не будут уравнениями с какой бы то ни было степенной нелинейностью. Например, все производные функции $U = U_0 \exp(-a^2/x^2)$, где U_0 и a^2 постоянные, в положении равновесия $x = 0$ равны нулю. Поэтому правая часть уравнения движения

$$m\ddot{x} = 2U_0a^2x^{-3} \exp(-a^2/x^2)$$

не допускает представления в виде ряда по степеням x или в виде частичной суммы степенного ряда, если колебания являются малыми. Однако и в таких случаях закон движения частицы и период осцилляций могут быть найдены по формулам (14.4), (14.11).

3. Вынужденные одномерные колебания. Функция Лагранжа частицы при ее одномерном движении в поле $U(x)$ и нестационарном внешнем поле $U^e(x, t)$ может быть представлена в виде

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) - U^e(x, t). \quad (14.30)$$

Взаимодействие с частицами среды можно учесть при помощи диссипативной силы $F^d = -\alpha \dot{x}$, $\alpha = \text{const}$. Будем считать также, что движение частицы происходит в окрестности положения устойчивого равновесия x_0 , $U(x_0) = U_{\min}$, а внешняя сила

$-\partial U^e/\partial x$ является достаточно малой, чтобы не вызвать больших отклонений $\xi = x - x_0$ от положения равновесия. Тогда функцию Лагранжа (14.30) можно заменить ее разложением

$$L = \frac{m}{2} \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} U''(x_0) \cdot \xi^2 - \xi \partial U^e(x, t)/\partial x \Big|_{x=x_0}. \quad (14.31)$$

Уравнение Лагранжа при наличии диссипативной силы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = -\alpha \dot{\xi} \quad (14.32)$$

приводит в этом приближении к уравнению движения (в терминах отклонений ξ):

$$\ddot{\xi} + 2\gamma \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = Q(t), \quad (14.33)$$

где

$$Q(t) = -(1/m) \partial U^e(x, t)/\partial x \Big|_{x=x_0},$$

$$\gamma = \alpha/2m, \quad \omega_0^2 = U''(x_0)/m.$$

Предположим, что функция $\xi(t)$, обращающая в тождество уравнение (14.33), найдена. Тождество не изменится, если к $\xi(t)$ добавить функцию, обращающую в тождество уравнение (14.33) без правой части. Общее решение неоднородного уравнения (14.33) является, таким образом, суперпозицией частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения.

Ищем решение однородного уравнения в виде вещественной части комплексного $\tilde{\xi} = A \exp(-i\omega t)$. Подстановка в однородное уравнение приводит к характеристическому уравнению

$$\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0. \quad (14.34)$$

Решением этого уравнения являются две комплексные частоты:

$$\omega_{1,2} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -i\gamma \pm \Omega. \quad (14.35)$$

При $\gamma > \omega_0$ обе частоты чисто мнимые и имеют отрицательные мнимые части. Движение частицы в таких условиях характеризуется как *апериодическое затухание*. Будем рассматривать далее одномерные системы, для которых $\omega_0 > \gamma$.

Двум различным корням характеристического уравнения соответствуют два линейно независимых решения:

$$\eta_1 = \text{Re } A_1 \exp(-i\omega_1 t), \quad \eta_2 = \text{Re } A_2 \exp(-i\omega_2 t).$$

Поэтому общее решение однородного уравнения (14.33) есть $\tilde{\xi} = \eta_1 + \eta_2$. Так как корни характеристического уравнения явля-

ются комплексно-сопряженными, $i\omega_2 = (i\omega_1)^*$, и $\tilde{\xi}$ вещественно, то $A_2 = A_1^*$. Следовательно, $\eta_2 = \eta_1^*$ и оба комплексных решения имеют одинаковые вещественные части. Поэтому достаточно выбрать вещественную часть одного из них, например, η_1 . Полагая $A_1 = a_1 + ia_2$, найдем

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \operatorname{Re} A_1 \exp(-i\omega_1 t) = \operatorname{Re} \{(a_1 + ia_2) \cdot \exp(-\gamma - i\Omega)t\} = \\ &= a_1 e^{-\gamma t} \cos \Omega t + a_2 e^{-\gamma t} \sin \Omega t \equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Это решение является общим, так как каждое решение однородного уравнения, соответствующего (14.33), может быть получено из (14.36) при подходящем выборе двух постоянных. Найдем далее частное решение неоднородного уравнения (14.33). Для этого введем вместо ξ новую неизвестную функцию, положив

$$\xi = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2, \quad (14.37)$$

где u_1, u_2 — две неизвестные функции времени, на которые наложено ограничение $\dot{u}_1 \xi_1 + \dot{u}_2 \xi_2 = 0$. Тогда уравнение (14.33) принимает вид

$$\dot{u}_1 \dot{\xi}_1 + \dot{u}_2 \dot{\xi}_2 + u_1 \{\ddot{\xi}_1 + 2\gamma \dot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1\} + u_2 \{\ddot{\xi}_2 + 2\gamma \dot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2\} = Q(t).$$

Коэффициенты при u_1, u_2 в этом уравнении равны нулю, и мы имеем систему алгебраических уравнений относительно \dot{u}_1, \dot{u}_2 :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 \dot{\xi}_1 + \dot{u}_2 \dot{\xi}_2 = Q(t), \\ \dot{u}_1 \xi_1 + \dot{u}_2 \xi_2 = 0. \end{cases} \quad (14.38)$$

Определитель этой системы равен

$$\dot{\xi}_1 \xi_2 - \xi_1 \dot{\xi}_2 = -\Omega e^{-2\gamma t}.$$

Поэтому

$$\dot{u}_1 = -\frac{Q(t)}{\Omega} e^{2\gamma t} \xi_2 = -e^{\gamma t} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} Q(t), \quad (14.39)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{Q(t)}{\Omega} e^{2\gamma t} \xi_1 = e^{\gamma t} \frac{\cos \Omega t}{\Omega} Q(t). \quad (14.40)$$

Уравнения (14.39), (14.40) интегрируются непосредственно, и мы получаем частное решение в виде

$$\xi = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 = \int_0^t Q(\tau) \frac{e^{-\gamma(t-\tau)}}{\Omega} \sin \Omega(t-\tau) d\tau. \quad (14.41)$$

Положим здесь и в уравнении (14.33) $Q(t) = \delta(t-t')$. Соответствующее частное решение обозначим посредством $G(t-t')$. Тогда, как следует из (14.41),

$$\begin{aligned} G(t-t') &= e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin \Omega(t-t')}{\Omega} \quad \text{при } t > t', \\ G(t-t') &= 0 \quad \text{при } t < t'. \end{aligned} \quad (14.42)$$

Функция $G(t-t')$ является функцией Грина для уравнения (14.33). Она удовлетворяет уравнению

$$\ddot{G} + 2\gamma \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t-t'). \quad (14.43)$$

Следовательно, мы могли также получить частное решение (14.41) уравнения (14.33) в виде

$$\xi = \int_0^t G(t-\tau) Q(\tau) d\tau,$$

предварительно решив уравнение для функции Грина.

Суперпозиция решений (14.36) и (14.41)

$$\xi = a_1 e^{-\gamma t} \cos \Omega t + a_2 e^{-\gamma t} \sin \Omega t + \int_0^t Q(\tau) \frac{e^{-\gamma(t-\tau)}}{\Omega} \sin \Omega(t-\tau) d\tau \quad (14.44)$$

представляет собой общее решение задачи о вынужденных колебаниях частицы в среде с сопротивлением, линейным по скорости.

Периодическая внешняя сила $Q(t)$ представима в виде ряда

$$Q(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{-in\Omega_0 t} \quad (Q_n^* = Q_{-n}), \quad (14.45)$$

$\Omega_0 = 2\pi/T_0$, T_0 — период функции $Q(t)$. Постоянная составляющая Q_0 силы (14.45) приводит к сдвигу ξ на $Q_0/2\omega_0^2$. Считая эту операцию выполненной, мы можем опустить Q_0 в (14.45). Из (14.44) видно, что частное решение для периодических $Q(t)$ также является рядом.

При $\gamma = 0$ формулой (14.44) представлено общее решение для вынужденных колебаний гармонического осциллятора. Ряд, представляющий частное решение в этой формуле, нельзя получить при помощи процедуры приравнивания гармоник. «Нерезонансные» члены ряда могут быть найдены путем приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках силы и координаты

в уравнении (14.33). Однако как только частота $n\Omega_0$ n -й гармоники вынуждающей силы станет равной частоте собственных колебаний ω_0 , соответствующая составляющая частного решения не будет гармонической функцией; она должна расти со временем, так как на этой частоте идет интенсивная подкачка энергии в систему. Следовательно, чтобы получить решение, справедливое и в условиях резонанса, необходимо использовать общий метод построения решений по формуле (14.44).

Подставим в формулу (14.41) для частного решения только один член ряда (14.45):

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} Q_n \exp(-in\Omega_0 t) + \text{к. с.},$$

где к. с. обозначает слагаемое, комплексно-сопряженное предыдущему. Этой функцией может быть представлена также самостоятельная гармоническая вынуждающая сила.

При $Q_n = A_n \exp(-i\alpha_n)$ имеем $Q_n(t) = A_n \cos(n\Omega_0 t + \alpha_n)$. Функцию $\sin \Omega(t - \tau)$ при вычислении интеграла в (14.41) удобно представить в виде $(e^{i\Omega(t-\tau)} - e^{-i\Omega(t-\tau)})/2i$. Учитывая также, что в условиях резонанса n -го порядка $n\Omega_0 = \omega_0$, находим

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{1}{4i\omega_0} \int_0^t d\tau (Q_n e^{-in\Omega_0 \tau} + Q_n^* e^{+in\Omega_0 \tau}) e^{i\omega_0(t-\tau)} + \text{к. с.} = \\ &= \frac{Q_n^*}{4in\Omega_0} t e^{in\Omega_0 t} + \frac{Q_n}{8n^2\Omega_0^2} (e^{-in\Omega_0 t} - e^{in\Omega_0 t}) + \text{к. с.} = \\ &= \frac{t}{4in\Omega_0} (Q_n^* e^{+in\Omega_0 t} - Q_n e^{-in\Omega_0 t}) + \frac{Q_n - Q_n^*}{4in^2\Omega_0^2} \sin(n\Omega_0 t). \end{aligned}$$

Переходя к вещественным переменным, получим

$$\xi_n = \frac{A_n}{2n\Omega_0} \left[t \cdot \sin(n\Omega_0 t + \alpha_n) - \frac{\sin(n\Omega_0 t)}{n\Omega_0} \sin \alpha_n \right]. \quad (14.46)$$

Таким образом, в условиях резонанса амплитуда колебаний увеличивается линейно со временем. Наибольшее значение эта амплитуда достигает при равенстве основной частоты ($n = 1$) вынуждающей силы и собственной частоты гармонического осциллятора. Однако мы не можем делать вывод о неограниченном возрастании амплитуды колебаний со временем, поскольку решения (14.44), (14.46) справедливы при достаточно малых ξ , пока справедливо приближение линейных колебаний, т. е. замена функции Лагранжа ее разложением по степеням ξ с точностью

до ξ^2 . Уже при конечных t формула (14.46) оказывается вне пределов ее применимости.

Диссипация (рассеяние) энергии осциллятора в среде ($\gamma \neq 0$), совершающего вынужденные колебания под действием периодической силы в соответствии с законом движения (14.44), не сопровождается изменением резонансных условий. Однако при $\gamma \neq 0$ множители при амплитудах сил, линейные по времени, уже появиться не могут. Амплитуды a_1, a_2 , через которые в общее решение (14.44) входят начальные условия задачи, содержат экспоненциально убывающий множитель $e^{-\gamma t}$, так что вклад собственных колебаний в общую динамику осцилляций с течением времени становится малым. Такой же множитель фактически стоит перед знаком интеграла, определяющего вклад внешнего возмущения. Поэтому, казалось бы, амплитуды гармоник вынуждающей силы также должны содержаться в решении с множителями $e^{-\gamma t}$. Такой качественный вывод является ошибочным; он означал бы, что стационарный режим колебаний невозможен. Чтобы получить полное представление об эволюции во времени динамики осциллятора с диссипацией энергии под действием вынуждающей периодической силы, следует вычислить интеграл в (14.44). Общее решение однородного уравнения в (14.44) остается неизменным. В формуле (14.45) для силы мы можем, как и выше, опустить постоянную составляющую Q_0 , так что под знаком интеграла в (14.44)

$$Q(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \exp(-in\Omega_0 t) + \text{к. с.}$$

Частное решение принимает вид

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-\gamma t} \int_0^t d\tau \sum_{n=1}^{\infty} Q_n e^{-(in\Omega_0 - \gamma)\tau} \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{2\Omega} + \text{к. с.} = \\ &= e^{-\gamma t} \int_0^t d\tau \sum_{n=1}^{\infty} Q_n e^{-(in\Omega_0 - \gamma)\tau} \frac{e^{i\Omega(t-\tau)} - e^{-i\Omega(t-\tau)}}{4i\Omega} + \text{к. с.} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{2} \left[\frac{e^{-in\Omega_0 t}}{\Omega^2 - (n\Omega_0 + i\gamma)^2} - \frac{e^{-\gamma t}}{2\Omega} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\Omega + n\Omega_0 + i\gamma} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^{-i\Omega t}}{\Omega - n\Omega_0 - i\gamma} \right) \right] + \text{к. с.} \quad (14.47) \end{aligned}$$

Первая сумма в этой формуле не содержит экспоненциально убывающего множителя и, следовательно, определяет стационарный режим колебаний, который устанавливается асимптотически при больших t .

Выражение (14.47) нетрудно переписать в терминах вещественных функций. После простых преобразований получим

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{(\omega_0^2 - n^2 \Omega_0^2) \cos(n\Omega_0 t + \alpha_n) + 2\gamma n \Omega_0 \sin(n\Omega_0 t + \alpha_n)}{(\omega_0^2 - n^2 \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \Omega_0^2} - \frac{e^{-\gamma t} \left[\frac{(\Omega + n\Omega_0) \cos(n\Omega_0 t - \alpha_n) + \gamma \sin(n\Omega_0 t - \alpha_n)}{(\Omega + n\Omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{(\Omega - n\Omega_0) \cos(n\Omega_0 t + \alpha_n) + \gamma \sin(n\Omega_0 t + \alpha_n)}{(\Omega - n\Omega_0)^2 + \gamma^2} \right]}{2\Omega} \right\}. \quad (14.48)$$

Здесь $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Мы видим, что и при наличии диссипации энергии осциллятора условие резонанса n -го порядка сводится к равенству частоты $n\Omega_0$ n -й гармоники вынуждающей силы и собственной частоты осциллятора ω_0 . Наиболее эффективно резонансная раскачка колебаний происходит на основной частоте ($n = 1$).

4. Циклотронный резонанс; движение частиц в ондуляторах. Физические условия возникновения циклотронного резонанса могут быть реализованы при движении электрически заряженных частиц в полях, представляющих собой суперпозицию однородного магнитного поля и периодического электромагнитного поля. Заряженные частицы могут принадлежать специально подготовленным пучкам, инжектируемым в циклотрон для ускорения периодическим электрическим полем или в ондулятор с пространственно-периодическим электрическим или магнитным полем для генерации электромагнитного излучения. Циклотронный резонанс как динамическое явление может появиться при движении свободных носителей заряда в металлах, полупроводниках, плазме. В резонансном режиме происходит нарастание возмущений одной или нескольких степеней свободы, как только оказываются равными циклотронная частота и частота дополнительного периодического возмущения.

Электрический ондулятор представляет собой канал, вдоль которого могут свободно распространяться пучки заряженных частиц в поперечном пространственно-периодическом электростатическом поле $\mathbf{E} = (0, E(z), 0)$ и продольном стационарном

однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Взаимодействием частиц в разреженных пучках в течение времени пролета можно пренебречь, так что задача сводится к отысканию закона движения одной частицы (ради определенности — электрона). Можно считать, что в момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела скорость $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y}; \quad (14.49)$$

$$\ddot{y} = \frac{e}{m} E(z) + \omega_c \dot{x}; \quad (14.50)$$

$$\ddot{z} = 0. \quad (14.51)$$

Здесь $\omega_c = |e|B/mc$ — циклотронная частота. Функция $E(z)$ предполагается известной, l — ее пространственный период: $E(z) = E(z + l)$; постоянная составляющая электростатического поля отсутствует. Такую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье:

$$E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n^{(1)} \cos nkz + E_n^{(2)} \sin nkz], \quad (14.52)$$

где $k = 2\pi/l$,

$$E_n^{(1)} = \frac{2}{l} \int_0^l E(z) \cos nkz \, dz, \quad E_n^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l E(z) \sin nkz \, dz.$$

Из уравнений (14.49), (14.50) с учетом начальных условий находим

$$\dot{x} = -\omega_c y + v_{0x}, \quad z = v_{0z} t. \quad (14.53)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (14.50) и формулу (14.52), видим, что задача сводится к исследованию одномерных вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_c^2 y - \omega_c v_{0x} &= \frac{e}{m} E(v_{0z} t) = \\ &= \frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\infty} [E_n^{(1)} \cos nk v_{0z} t + E_n^{(2)} \sin nk v_{0z} t]. \end{aligned} \quad (14.54)$$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа закон движения электрона вдоль оси y может быть получен по формуле (14.44) в виде

$$y - \frac{v_{0x}}{\omega_c} = a_1 \cos \omega_c t + a_2 \sin \omega_c t + \int_0^t E(v_{0z}\tau) \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c(t - \tau) d\tau. \quad (14.55)$$

Постоянные a_1, a_2 находим из начальных условий. Тогда

$$y = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{v_{0y}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{e}{m} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} [E_n^{(1)} \cos n\Omega_0 t + E_n^{(2)} \sin n\Omega_0 t] \frac{\sin \omega_c(t - \tau)}{\omega_c} d\tau, \quad (14.56)$$

где $\Omega_0 = kv_{0z}$.

Напряженность магнитного поля B , скорость электрона в продольном направлении v_{0z} , значение пространственного периода l электростатического поля могут быть такими, что для определенного n , равного s , в правой части (14.56) будут выполняться условия резонанса s -го порядка:

$$\omega_c = \frac{|e|B}{mc} = s\Omega_0 = \frac{2\pi s}{l} v_{0z}. \quad (14.57)$$

Представив сумму по n в виде отдельного резонансного слагаемого с номером s и суммы остальных слагаемых, а подынтегральное выражение в комплексной форме ($(E_n^{(1)} - iE_n^{(2)}) = 2Q_n$, $(E_n^{(1)} + iE_n^{(2)}) = 2Q_{-n} = 2Q_n^*$), мы можем свести результаты почленного интегрирования в (14.56) к результатам предыдущего параграфа. Однако интегралы в (14.56), содержащие произведения тригонометрических функций, легко вычислить и непосредственно. Для этого представим интегральный член (частное решение) в виде

$$\begin{aligned} \frac{e}{2m\omega_c} \int_0^t d\tau \left\{ E_s^{(1)} [\sin(s\Omega_0(t - 2\tau)) + \sin(s\Omega_0 t)] + \right. \\ \left. + E_s^{(2)} [\cos(s\Omega_0(t - 2\tau)) - \cos(s\Omega_0 t)] \right\} + \\ + \frac{e}{2m\omega_c} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq s)}}^{\infty} \int_0^t d\tau \left\{ E_n^{(1)} [\sin(\omega_c t - (\omega_c + n\Omega_0)\tau) + \right. \\ \left. + \sin(\omega_c t - (\omega_c - n\Omega_0)\tau)] + \right. \\ \left. + E_n^{(2)} [\cos(\omega_c t - (\omega_c + n\Omega_0)\tau) - \cos(\omega_c t - (\omega_c - n\Omega_0)\tau)] \right\}, \end{aligned}$$

где резонансные слагаемые выделены явно. После вычисления интегралов получаем закон движения электрона в направлении Oy :

$$\begin{aligned} y = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{v_{0y}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \\ + \frac{e}{2ms\Omega_0} \left[tE_s^{(1)} \sin(s\Omega_0 t) - E_s^{(2)} \left(t \cos(s\Omega_0 t) - \frac{\sin(s\Omega_0 t)}{s\Omega_0} \right) \right] + \\ + \frac{e}{m\omega_c} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \left[E_n^{(1)} \frac{\cos \omega_c t - \cos n\Omega_0 t}{(n\Omega_0)^2 - \omega_c^2} + \right. \\ \left. + E_n^{(2)} \frac{n\Omega_0 \sin \omega_c t - \omega_c \sin n\Omega_0 t}{(n\Omega_0)^2 - \omega_c^2} \right]. \quad (14.58) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что частицы пучка электронов, для которых выполняются условия резонанса s -го порядка, стремятся покинуть канал ондулятора в направлении поляризации периодического электрического поля. Частицы, для которых разность $|e|B/mc - 2\pi n v_{0z}/l$ мала (n — целое число), но конечна, будут осциллировать в канале с большими конечными амплитудами.

Движение заряженных частиц в магнитном ондуляторе, в котором вместо электрического поля создано и поддерживается неизменным периодическое вдоль канала магнитное поле, также может сопровождаться явлением циклотронного резонанса. Магнитное поле теперь может быть представлено в виде $\mathbf{B} = (0, B(z), B_0)$, и уравнения движения электрона сводятся к уравнениям

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} (\dot{y}B_0 - \dot{z}B(z)), \quad (14.59)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{e}{c} \dot{x}B_0, \quad (14.60)$$

$$\dot{p}_z = \frac{e}{c} \dot{x}B(z). \quad (14.61)$$

Здесь $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ — релятивистский импульс электрона,

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{(1)} \cos nkz + B_n^{(2)} \sin nkz], \quad (14.62)$$

$k = 2\pi/l$, l — пространственный период магнитного поля $B(z)$. Невозмущенное состояние электрона является динамическим —

$(0, 0, v_{0z}t)$. В режиме линейных колебаний $B(z)$ в уравнениях (14.59), (14.61) следует заменить разложением по степеням малых отклонений z от невозмущенных значений $z = v_{0z}t$ и ограничиться только первым членом разложения $B(v_{0z}t)$. Это приближение будет выполняться тем точнее, чем ближе скорость электрона к скорости света. Механическая энергия электрона $E = mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ в стационарном магнитном поле сохраняется. Поэтому

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{E}{c^2} \ddot{\mathbf{r}} \quad (14.63)$$

и уравнение (14.60) легко интегрируется:

$$\dot{y} = -\frac{eB_0c}{E}x. \quad (14.64)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (14.59), находим

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB_0c}{E}\right)^2 x = -\frac{ecv_{0z}}{E}B(v_{0z}t). \quad (14.65)$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением движения частицы в электрическом ондуляторе (14.54), и его общее решение может быть получено путем простых переобозначений решения (14.58):

$$\begin{aligned} x = & \frac{v_{0y}}{\omega_{cr}}(1 - \cos \omega_{cr}t) + \frac{v_{0x}}{\omega_{cr}} \sin \omega_{cr}t + \\ & + \frac{e}{2m_s\Omega_0} \left[tB_s^{(1)} \sin(s\Omega_0t) - B_s^{(2)} \left(t \cos(s\Omega_0t) - \frac{\sin(s\Omega_0t)}{s\Omega_0} \right) \right] + \\ & + \frac{e}{m\omega_{cr}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \left[B_n^{(1)} \frac{\cos \omega_{cr}t - \cos n\Omega_0t}{(n\Omega_0)^2 - \omega_{cr}^2} + \right. \\ & \left. + B_n^{(2)} \frac{n\Omega_0 \sin \omega_{cr}t - \omega_{cr} \sin n\Omega_0t}{(n\Omega_0)^2 - \omega_{cr}^2} \right]. \quad (14.66) \end{aligned}$$

Здесь $\Omega_0 = 2\pi v_{0z}/l$, l — пространственный период магнитного поля $B(z)$, $\omega_{cr} = |e|B_0c/E$ — релятивистская циклотронная частота.

Формулой (14.66) представлен закон движения электрона в ондуляторе в направлении, перпендикулярном магнитным полям $\mathbf{B}(z)$, \mathbf{B}_0 , в условиях релятивистского циклотронного резонанса s -го порядка, когда выполняется равенство $s\Omega_0 = \omega_{cr}$. Потери энергии на излучение электрона при этом не учитывались.

5. Индукционное ускорение частиц. Конфигурация полей и энергия частиц. Ускорение заряженных частиц в циклических резонансных ускорителях, в частности в циклотронах, происходит за счет взаимодействия частицы с электрическим полем, приложенным к промежуткам, расположенным на ее орбите в магнитном поле. Резонансные условия равенства циклотронных частот и частот ускоряющего поля поддерживаются при возрастании энергии частицы либо за счет изменения частоты ускоряющего поля (фазотрон), либо за счет изменения магнитного поля (синхротрон), либо за счет этих обоих факторов (синхрофазотрон). Циклотронный радиус $r_c = v/\omega_c$ траектории при этом растет с увеличением энергии частицы.

В основе физического механизма индукционного ускорения лежит взаимодействие частицы с нестационарным магнитным полем и индуцируемым им вихревым электрическим полем. Сила, действующая на частицу в таком поле, определяется системой уравнений

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{e}{c}(\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)), \quad (14.67)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (14.68)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (14.69)$$

Предполагается, что $\mathbf{E} = 0$ при $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ и что траекторией ускоряемой частицы должна служить круговая орбита фиксированного радиуса. Таким образом, мы имеем задачу построения уравнений движения, имеющих решения с наперед заданными свойствами.

Решениями первой пары уравнений Максвелла (14.68), (14.69)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (14.70)$$

определяются поля через потенциалы. Следовательно, уравнения движения частицы в переменном магнитном поле и необходимые свойства самого поля можно установить на основании уравнений Лагранжа. Дополнительное условие обращения в нуль электрического поля вместе с $\partial \mathbf{B}/\partial t$ можно учесть, воспользовавшись неоднозначностью функции Лагранжа частицы в электромагнитном поле

$$L = -mc^2\sqrt{1 - (v/c)^2} - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}v_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t). \quad (14.71)$$

Добавим с этой целью к выражению (14.71) полную производную по времени функции $(e/c)f(\mathbf{r}, t)$, такой, что $\partial f/\partial t = c\varphi$. Уравнения Лагранжа при этом не изменятся, а новый скалярный потенциал будет равен нулю. К новому векторному потенциалу можно еще добавить градиент не зависящей от времени функции. Как видно из (14.70), это не изменит полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , но позволит принимать во внимание только потенциалы, удовлетворяющие условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Таким образом, мы можем считать, что

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + \frac{e}{c} v_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad (14.72)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (14.73)$$

По условию траекторией частицы является окружность. Поэтому требуемую конфигурацию магнитного поля будем искать среди аксиально-симметричных полей. В цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси симметрии поля все функции не будут зависеть от азимутального угла φ . Поэтому общие выражения для магнитного поля (14.73) в цилиндрических координатах

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \quad (14.74)$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}$$

сводятся к выражениям

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi), \quad A_\varphi = A_\varphi(\rho, z, t). \quad (14.75)$$

Далее, окружность — плоская кривая. Плоскость, в которой она лежит, является выделенной плоскостью $z = z_0$ симметрии конфигурации магнитного поля. Точка z_0 определяется равенством $(\partial B_z/\partial z)_{z_0} = 0$. Из (14.75) видно, что при этом $B_\rho(\rho, z_0, t) = 0$. Совместим с этой точкой начало координат.

Вихревое электрическое поле (14.73) не должно приводить к ускорению частицы в радиальном направлении и в направлении оси симметрии магнитного поля. На этом основании $A_\rho = A_z = 0$, так что $E_\rho = E_z = 0$, и, следовательно, $B_\varphi(\rho, z, t) = 0$.

При сделанных допущениях отличной от нуля оказывается только компонента A_φ векторного потенциала электрического и магнитного полей, а функция Лагранжа имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} A_\varphi(\rho, z, t), \quad (14.76)$$

где в соответствии с (14.75)

$$A_\varphi = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho B_z(\rho, z, t) d\rho. \quad (14.77)$$

Координата φ является циклической. Сопряженный ей обобщенный импульс сохраняется:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m\rho^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} \rho A_\varphi(\rho, z, t) = \text{const.} \quad (14.78)$$

Два других уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\rho}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \frac{m\rho \dot{\varphi}^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} B_z(\rho, z, t), \quad (14.79)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} B_\rho(\rho, z, t). \quad (14.80)$$

Положим в уравнениях (14.78), (14.79) $\rho = r_0$, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, сохранив прежнее обозначение для угловой переменной φ . Тогда

$$\frac{mr_0^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (r_0 \dot{\varphi}/c)^2 - (\dot{z}/c)^2}} + \frac{e}{c} \int_0^{r_0} \rho B_z(\rho, z, t) d\rho = p_\varphi = \text{const.}, \quad (14.81)$$

$$\frac{mr_0^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (r_0 \dot{\varphi}/c)^2 - (\dot{z}/c)^2}} + \frac{e}{c} r_0^2 B_z(r_0, z, t) = 0. \quad (14.82)$$

Из (14.81) и (14.82) находим соотношения

$$B_z(r_0, z, t) + \frac{cp_\varphi}{er_0^2} = \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} \rho B_z(\rho, z, t) d\rho = \frac{1}{r_0} A_\varphi(r_0, z, t), \quad (14.83)$$

$$E_\varphi(r_0, z, t) = -\frac{r_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z(r_0, z, t) = -\frac{1}{cr_0} \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial t} B_z(\rho, z, t) d\rho, \quad (14.84)$$

которые определяют конфигурацию магнитного $B_z(r_0, z, t)$ и вихревого электрического $E_\varphi(r_0, z, t)$ полей на цилиндрической

поверхности $\rho = r_0$. На круговой орбите ($z = 0$) соотношением (14.83) устанавливается связь

$$\phi - 2\pi r_0^2 B_z(r_0, 0, t) = \text{const} \quad (14.85)$$

между потоком магнитного поля через поверхность, ограниченную траекторией частицы,

$$\phi = 2\pi \int_0^{r_0} \rho B(\rho, 0, t) d\rho$$

и значениями магнитного поля на траектории (индекс z в (14.85) можно опустить, так как $\mathbf{B}(\rho, 0, t) = 0, 0, B_z(\rho, 0, t)$).

Среднее значение магнитного поля на плоскости круга с площадью πr_0^2 равно $\bar{B} = \phi/\pi r_0^2$. Поэтому условие (14.85), при котором возможно движение частицы по круговой орбите в переменном магнитном поле (условие Р. Видероз, или *бетатронное условие* 2:1) можно также представить в виде

$$\bar{B} - 2B(r_0, 0, t) = \text{const}.$$

При синфазном изменении потока ϕ и магнитного поля на траектории постоянную в этом условии следует положить равной нулю.

В нестационарном магнитном поле энергия частицы изменяется со временем в соответствии с общей формулой

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

На круговой орбите

$$\begin{aligned} E &= mc^2 / \sqrt{1 - (r_0 \dot{\phi}/c)^2}, \\ \dot{E} &= - \frac{e}{c} r_0 \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial t} A_\varphi(r_0, 0, t). \end{aligned} \quad (14.86)$$

Подставляя в правую часть (14.86) $\dot{\phi}$ из формулы (14.82), а $A_\varphi(r_0, 0, t)$ из (14.77), получим

$$\dot{E} = \frac{e^2}{2\pi E} B(r_0, 0, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi. \quad (14.87)$$

Используя далее бетатронное условие (14.85), находим

$$\frac{d}{dt} E^2 = e^2 r_0^2 \frac{\partial}{\partial t} B^2(r_0, 0, t). \quad (14.88)$$

Эта формула позволяет оценить скорость нарастания энергии частицы на круговой орбите в заданном переменном магнитном поле.

6. Устойчивость движения. Остается выяснить, при каких условиях круговая орбита частицы в магнитном поле, удовлетворяющем бетатронному условию, будет устойчивой. Найдем с этой целью уравнение эволюции малых отклонений траектории частицы от круговой. Если такие отклонения будут нарастать, то частица выйдет из режима ускорения.

Малые радиальные отклонения ξ можно оценить на основании общих уравнений движения (14.78), (14.79), если положить в них $\rho = r_0 + \xi$ и пренебречь квадратичными по ξ , $\dot{\xi}$ слагаемыми. В этом (линейном) приближении уравнение (14.81) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_0(t) + \frac{\xi}{r_0} \left[\frac{m^2 c^6}{E^3} \left(\frac{e A_\varphi(r_0, z, t)}{c r_0} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\varphi(r_0, z, t)}{\partial r_0} - \frac{2 p_\varphi}{r_0^2} \right) - \frac{r_0^2 \dot{\varphi}_0^3}{c^2} \right], \end{aligned} \quad (14.89)$$

где в соответствии с формулой (14.82)

$$\dot{\varphi}_0(t) = - \frac{e c B_z(r_0, z, t)}{E} = \omega_{cr}(z, t) \quad (14.90)$$

— угловая скорость частицы вдоль невозмущенной траектории, совпадающая с мгновенным значением релятивистской циклотронной частоты.

Для дальнейших преобразований выражения (14.89) можно воспользоваться условием (14.83) и определением (14.75) магнитного поля $B_z(r_0, z, t)$ в терминах векторного потенциала. В результате получим

$$\dot{\varphi} = - \left(1 - \frac{\xi}{r_0} \right) \frac{e c B_z(r_0, z, t)}{E}. \quad (14.91)$$

Уравнение движения (14.79) в радиальном направлении удобно представить в виде

$$\frac{m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{e}{c^3} \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} B_z(\rho, z, t). \quad (14.92)$$

В этом уравнении следует положить $\rho = r_0 + \xi$ и $\dot{\varphi}$ из формулы (14.91). В линейном по ξ приближении

$$\sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{mc^2}{E}, \quad B_z(\rho, z, t) = B_z(r_0, z, t) + \xi \frac{\partial}{\partial r_0} B_z(r_0, z, t),$$

и уравнение (14.92) для малых ξ , $\dot{\xi}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами, зависящими от времени:

$$\ddot{\xi} + \frac{\dot{E}}{E} \dot{\xi} + \omega_{cr}^2(t) \left(1 + \frac{r_0}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r_0} \right) \xi = 0. \quad (14.93)$$

Координата z содержится в уравнении (14.93) в виде параметра, равного нулю в плоскости орбиты. Зависящая от времени релятивистская циклотронная частота определена формулой (14.90). В нерелятивистском пределе слагаемое, содержащее ξ , в (14.93) будет отсутствовать.

Траектория частицы будет устойчивой, если уравнение эволюции малых возмущений будет уравнением колебаний. Последнее слагаемое в (14.93) имеет характер «возвращающей силы» для магнитных полей на орбите, таких, что

$$1 + \frac{r_0}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r_0} > 0. \quad (14.94)$$

Релятивистский множитель \dot{E}/E при $\dot{\xi}$ имеет смысл декремента затухания колебаний. В режиме ускорения энергия увеличивается ($\dot{E} > 0$) и амплитуда колебаний должна убывать вследствие возрастания релятивистской массы частицы.

Таким образом, при выполнении бетатронного условия (14.85) и условия (14.94) уравнение (14.93) является уравнением *радиальных бетатронных колебаний*; орбита частицы устойчива относительно малых радиальных возмущений.

Выясним далее, при каких условиях траектория будет устойчивой по отношению к малым отклонениям η частицы в направлении, ортогональном плоскости $z = 0$. Представим с этой целью уравнение движения частицы в направлении оси z в виде

$$m\ddot{z} = \sqrt{1 - (v/c)^2} \left[-\frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} B_\rho(\rho, z, t) - \frac{e}{c^2} \rho \dot{\varphi} \dot{z} E_\varphi(\rho, z, t) \right]. \quad (14.95)$$

Положим в уравнении (14.95) $\rho = r_0$, $z = 0 + \eta$ и будем считать η , $\dot{\eta}$ малыми, такими, что квадратами этих величин

можно пренебречь по сравнению с самими величинами. В этом приближении

$$B_\rho(r_0, z, t) = \eta \frac{\partial B_\rho(r_0, 0, t)}{\partial z}.$$

Значение $\dot{\varphi}$ в линейном по η приближении можно найти из уравнения для радиального движения (14.92). Находим

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{ecB_z(r_0, 0, t)}{E} \left(1 + \frac{1}{B_z} \frac{\partial B_z(r_0, 0, t)}{\partial z} \eta \right). \quad (14.96)$$

Учитывая также, что

$$\dot{z} \rho \dot{\varphi} E_\varphi(\rho, z, t) \cong \dot{\eta} r_0 \dot{\varphi}_0 E_\varphi(r_0, 0, t) = \dot{E} \dot{\eta},$$

получаем на основании уравнения (14.95) линейное дифференциальное уравнение эволюции малых поперечных возмущений η :

$$\ddot{\eta} + \frac{\dot{E}}{E} \dot{\eta} + \omega_{cr}^2(t) \left(\frac{r_0}{B_z(r_0, 0, t)} \frac{\partial B_\rho(r_0, 0, t)}{\partial z} \right) \eta = 0. \quad (14.97)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение эволюции радиальных возмущений. Однако поперечные возмущения будут носить колебательный характер при условии

$$B_z(r_0, 0, t) \frac{\partial B_\rho(r_0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} > 0. \quad (14.98)$$

Таким образом, конфигурация нестационарного магнитного поля, в котором возможно ускорение электрически заряженных частиц на траекториях, близких к круговым, определяется бетатронным условием (14.85), а также условиями (14.94), (14.98). Частицы в таких полях будут двигаться вдоль траекторий, осциллирующих относительно средних круговых орбит.

Более детальный анализ движения сводится к исследованию дифференциальных уравнений (14.93), (14.97) в заданном магнитном поле или более общих уравнений (для одновременных радиальных и поперечных возмущений), которые могут быть получены из уравнения (14.93) путем разложения по η . При более строгих расчетах динамики частиц следует принимать во внимание их взаимодействие с собственным электромагнитным полем, включая поле излучения.

7. Расщепление частоты пространственного осциллятора в магнитном поле. Потенциальная энергия электрически заряженной частицы, совершающей колебания под действием центрально-симметричной упругой силы, равна $m\omega_0^2 r^2/2$, где ω_0 — частота осциллятора без магнитного поля. Векторный потенциал

однородного магнитного поля может быть представлен в виде $\mathbf{A} = (e/2c)(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$. Выбирая ось z вдоль направления магнитного поля, находим функцию Лагранжа пространственного осциллятора в однородном магнитном поле:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{m\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Подставляя эту функцию в уравнения Лагранжа, приходим к уравнениям движения

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \omega_L \dot{y} + \omega_0^2 x &= 0; \\ \ddot{y} + \omega_L \dot{x} + \omega_0^2 y &= 0; \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0,\end{aligned}$$

где $\omega_L = eB/2mc$ — частота Лармора.

Мы видим, что координата z частицы изменяется по закону гармонических колебаний с частотой ω_0 , равной частоте осциллятора без магнитного поля.

Уравнения движения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, представим в комплексной форме, положив $x + iy = \xi$. Будем иметь

$$\ddot{\xi} + i\omega_L \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0.$$

Ищем решение в виде $\xi = C e^{-i\omega t}$. Тогда задача сводится к отысканию частот осциллятора путем решения квадратного уравнения

$$\omega^2 - \omega\omega_L - \omega_0^2 = 0.$$

Двум корням этого уравнения:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_L}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_L^2}{4}},$$

соответствуют два линейно независимых решения. Поэтому общее решение уравнений движения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, дается вещественной и мнимой частями формулы

$$\xi = e^{-i\frac{\omega_L}{2}t} \left[C_1 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_L^2}{4}}t} + C_2 e^{i\sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_L^2}{4}}t} \right].$$

Выражение в квадратных скобках описывает в плоскости (x, y) движение по эллиптической траектории с частотой $\sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_L^2}{4}}$. Экспоненциальный множитель при квадратной скобке описывает вращение этого эллипса с угловой частотой $\omega_L/2$.

§ 15. Движение в центральном поле

Поле тяготения сферически-симметричного распределения вещества, электростатическое поле неподвижного электрического заряда являются центральными. В любой точке пространства направление поля определяется направлением на силовой центр, а абсолютная величина напряженности поля зависит только от расстояния до силового центра. Поле нейтрального атома является результатом суперпозиции полей положительно заряженного ядра и электронной оболочки. Вследствие неполной компенсации этих полей возможно взаимодействие электрически нейтральных атомов, нейтральных атомов и электронов. В условиях, когда атомы и молекулы в процессе движения и взаимодействия могут рассматриваться как неполярные, их поля можно также считать центральными; взаимодействие между такими системами частиц в связанных состояниях имеет характер отталкивания на малых расстояниях между ними и притяжения на расстояниях порядка характерного размера молекулы, быстро спадая с расстоянием.

Будем считать, что одна из частиц, силовой центр, является неподвижной в некоторой инерциальной системе отсчета. Такое приближение допустимо, если взаимодействием обеих частиц с окружающими телами можно пренебречь и если масса силового центра значительно превышает массу движущейся частицы. Движение планет, других небесных тел в поле Солнца, движение Луны, искусственных спутников в поле Земли — примеры практических задач, для которых задача о движении в центральном поле служит хорошим приближением. При произвольном конечном отношении масс частиц каждая частица движется в поле другой частицы и служит для нее силовым центром. Однако если взаимодействие между частицами зависит только от расстояния между ними, то задача двух тел распадается, как показано ниже, на две задачи, причем одна из них сводится к динамике квазичастицы с приведенной массой в центральном поле.

Совместим начало координат с силовым центром. Тогда функцию Лагранжа частицы с массой m в центральном поле можно представить в виде

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U(|\mathbf{r}|), \quad (15.1)$$

где $U(|\mathbf{r}|)$ — потенциальная энергия частицы в центральном поле. Уравнения движения частицы могут быть получены как уравнения Лагранжа или непосредственно в ньютоновской форме,

в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(|\mathbf{r}|). \quad (15.2)$$

Из (15.1) и (15.2) следует, что сохраняется полная энергия частицы:

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(|\mathbf{r}|), \quad (15.3)$$

и все три компоненты вектора момента импульса:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{const.} \quad (15.4)$$

Всегда

$$\mathbf{L}\mathbf{r} = 0, \quad (15.5)$$

но при постоянном \mathbf{L} — это уравнение неподвижной плоскости, проходящей через силовой центр. Траектория частицы лежит в этой плоскости.

Выберем ось z цилиндрической системы координат вдоль \mathbf{L} . Тогда в цилиндрических координатах

$$L = L_z = mr^2\dot{\varphi}, \quad (15.6)$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r). \quad (15.7)$$

Из (15.6), (15.7) находим

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad (15.8)$$

где введено обозначение для эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + L^2/2mr^2, \quad (15.9)$$

представляющей собой сумму потенциальной энергии частицы в центральном поле и потенциала центробежной силы.

Мы видим, что задача об определении радиального движения в центральном поле сводится к одномерной, с той лишь разницей, что теперь $r \geq 0$. Закон движения частицы в радиальном направлении определяется интегралом

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} + \text{const.} \quad (15.10)$$

Если $r = r(t)$ из (15.10) найдено, то зависимость от времени азимутальной координаты $\varphi(t)$ можно найти из уравнения (15.6) в виде

$$\varphi(t) = \frac{L}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \text{const.} \quad (15.11)$$

Перейдем в уравнении (15.6) к дифференцированию по r , так что

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\dot{r}}.$$

Подставляя сюда \dot{r} из (15.8) и интегрируя, находим уравнение траектории в виде

$$\varphi(r) = \pm \int \frac{(L/mr^2)dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} + \text{const.} \quad (15.12)$$

Уравнение плоскости движения (15.5), закон радиального движения (15.10), а также уравнение траектории (15.12) или закон азимутального движения (15.11), дают общее решение задачи о движении частицы в центральном поле. Это решение содержит шесть произвольных постоянных, включая E и \mathbf{L} , при помощи которых задается начальное динамическое состояние частицы.

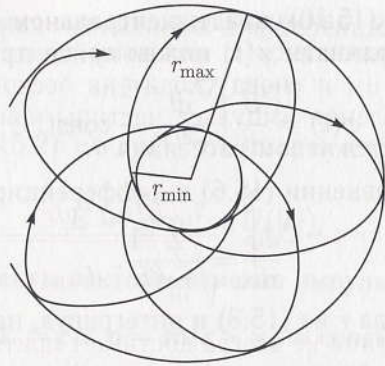
Допустимая область движения частицы в радиальном направлении определяется неравенством

$$E - U(r) - L^2/2mr^2 \geq 0. \quad (15.13)$$

Знак равенства в (15.13) соответствует уравнению для «точек» поворота в радиальном направлении. В точках поворота $\dot{\varphi} \neq 0$. Каждая пара r_{\min} , r_{\max} значений r в точках поворота определяет в плоскости движения две окружности, между которыми лежит траектория *финитного движения* (рис. 6). В точках касания к окружностям \dot{r} меняет знак, что соответствует переходу с одной ветви корня на другую в законе радиального движения (15.10) и в уравнении траектории (15.12). Обе кривые оказываются симметричными относительно точек поворота.

Интегрируя в (15.10) по r от r_{\min} до r_{\max} и обратно, найдем период радиального движения

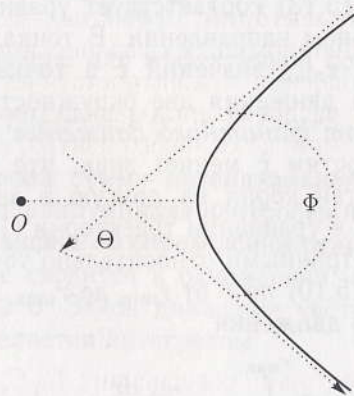
$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (15.14)$$

Рис. 6. Траектория финитного движения в плоскости $Lr = 0$

Полное изменение ϕ угловой координаты за это время равно

$$\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L/mr^2)dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (15.15)$$

В общем случае $\phi \neq 2\pi m/n$, где m, n — целые числа, траектория незамкнута и с течением времени полностью заполнит область между r_{\min} и r_{\max} . В гравитационном поле, $U = -\alpha/r$, $\alpha > 0$, а также в центральном поле $U = \alpha r^2$ (пространственный осциллятор) траектория оказывается замкнутой.

Рис. 7. Траектория и угол рассеяния для случая отталкивания от силового центра O

При $r_{\max} \rightarrow \infty$ движение в центральном поле инфинитно. Частица, приближающаяся к силовому центру из бесконечности, отклоняется им и снова уходит на бесконечность. Полное изменение направления импульса частицы при таком движении (рис. 7) определяется углом рассеяния θ :

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(L/mr^2)dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (15.16)$$

При $L \neq 0$ частица не всегда достигает притягивающего силового центра. Если $U(r) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$ медленнее, чем растет центробежный потенциал, то падение на силовой центр невозможно. Условием падения частицы на силовой центр ($r \rightarrow 0$) является условие принадлежности этой точки допустимой области движения (15.13). Умножая (15.13) на r^2 и переходя к пределу $r \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^2 U(r)] + L^2/2m \leq 0. \quad (15.17)$$

Для потенциала вида $U = -\alpha/r$ и $L \neq 0$ условие падения на силовой центр не выполняется, но при $L = 0$ такой силовой центр достижим. Для потенциалов $U = -\alpha/r^n$ условие (15.13) выполняется при $n = 2$ и $\alpha \geq L^2/2m$, а также при $n > 2$ и $\alpha > 0$.

§ 16. Движение в поле $U = -\alpha/r$

1. Общий вид траекторий. Потенциальная энергия точечной частицы в гравитационном поле сферически-симметричного распределения вещества, или в электростатическом поле сферически-симметричного распределения заряда, имеет вид $U = -\alpha/r$, где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние до силового центра, $\alpha = Gm_0m$ для гравитационного взаимодействия, $\alpha = -e_0e$ для кулоновского взаимодействия зарядов; $\alpha > 0$ соответствует притяжению, $\alpha < 0$ — отталкиванию. Эффективная потенциальная энергия в таком поле имеет вид

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (16.1)$$

Множество траекторий, содержащих L, E, α в качестве параметров, определяется интегралом (15.12), который легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \pm (\varphi - \varphi_0) &= \int \frac{(L/mr^2)dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} = \\ &= - \int d\left(\frac{1}{r}\right) / \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} - \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2} = \\ &= \arccos \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}\right) / \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4} \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)} \right]. \quad (16.2) \end{aligned}$$

Отсюда, вследствие четности косинуса,

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{m|\alpha|}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

или

$$r = \frac{L^2/m|\alpha|}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (16.3)$$

Отношение $\alpha/|\alpha|$ равно +1 или -1 в зависимости от знака α . И в том, и в другом случае формула (16.3) определяет двухпараметрическое (E , L) семейство плоских кривых второго порядка. По форме уравнения (16.3) совпадают с уравнениями конических сечений. Один из фокусов такой кривой совпадает геометрически с силовым центром. Параметром p и эксцентриситетом ε служат следующие комбинации момента импульса и энергии:

$$p = \frac{L^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \quad (16.4)$$

так что в терминах геометрических параметров уравнение (16.4) приобретает вид

$$r = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (16.5)$$

В уравнении (16.5) можно положить $\varphi_0 = 0$, если условиться отсчитывать угловую переменную φ от направления на r_{\min} .

2. Финитное движение под действием силы притяжения. Характерный график эффективной потенциальной энергии $U_{\text{eff}}(r)$ при $\alpha > 0$ изображен на рис. 8.

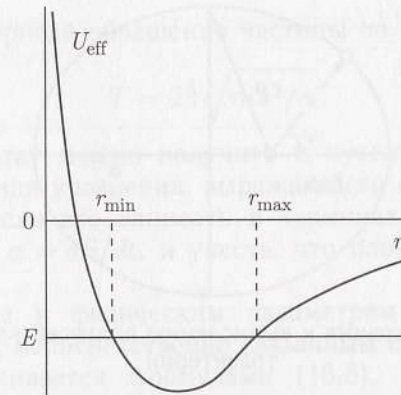


Рис. 8. Графики эффективной потенциальной энергии U_{eff} и полной энергии E , соответствующие финитному движению

Значениям полной энергии, таким, что $-m\alpha^2/2L^2 \leq E < 0$ или $0 \leq \varepsilon < 1$, соответствует финитное движение по эллиптической траектории

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (16.6)$$

При $E = -m\alpha^2/2L^2$ или $\varepsilon = 0$ эллиптическая траектория вырождается в окружность с радиусом $r = p$. Максимальное удаление частицы от силового центра r_{\max} (*апогей*) и минимальное удаление r_{\min} (*перигей*) при движении по эллиптической орбите равны:

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}, \quad r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}. \quad (16.7)$$

Поэтому большая полуось a этой орбиты равна

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{L^2/m\alpha}{1 - (1 + 2EL^2/m\alpha^2)} = \alpha/2|E|, \quad (16.8)$$

определяется только энергией частицы и не зависит от значений момента импульса.

Малая полуось b эллиптической траектории может быть найдена из прямоугольного треугольника со сторонами a , b , $a - r_{\min}$, (рис. 9). Находим

$$b = \sqrt{a^2 - \left(a - \frac{p}{1 + \varepsilon}\right)^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (16.9)$$

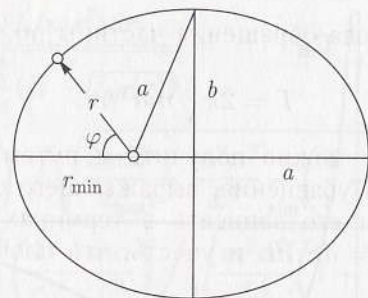


Рис. 9. Иллюстрация к вычислению полуосей эллиптической траектории

Закон движения $r = r(t)$ по эллиптической орбите в радиальном направлении определяется формулой (15.10):

$$\begin{aligned} \pm(t - C) &= \int dr / \sqrt{\frac{2|E|}{m} \left(-1 + \frac{\alpha}{|E|} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{2m|E|} \frac{1}{r^2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int r dr / \sqrt{-r^2 + 2ar - b^2} \quad (16.10) \end{aligned}$$

(C — постоянная интегрирования, a и b определяются формулами (16.8), (16.9)). При помощи подстановки

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi) \quad (16.11)$$

из (16.10) находим

$$\pm(t - C) = \sqrt{\frac{ma^3}{2|E|}} a \int (1 - \varepsilon \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi).$$

Параметр ξ можно выбрать так, что $t = 0$ при $\xi = 0$ и $t \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \pi$. Эти условия будут выполнены, если положить $C = 0$ и оставить только знак «+». Тогда формула

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi) \quad (16.12)$$

вместе с формулой (16.11) будет определять закон движения в радиальном направлении в параметрической форме. Азимутальная составляющая закона движения теперь может быть установлена при помощи этих формул и уравнения траектории.

При движении частицы от $r_{\min} = a(1 - \varepsilon)$ до $r_{\max} = a(1 + \varepsilon)$ параметр ξ изменяется от 0 до π , а время движения равно половине периода. Выражение (16.12) при этих условиях дает

формулу для периода обращения частицы по эллиптической орбите

$$T = 2\pi \sqrt{ma^3/\alpha}. \quad (16.13)$$

Этот результат можно получить и путем непосредственного интегрирования уравнения, выражающего сохранение момента импульса, если его записать в терминах секторной скорости σ , $L/2m = \sigma = dS/dt$, и учесть, что площадь эллипса равна $S = \pi ab$.

Возвращение к физическим параметрам E , L в (16.11), (16.12), (16.13), непосредственно связанным с начальными условиями, обеспечивается формулами (16.8), (16.9). В частности, для частоты обращения частицы по эллиптической орбите $\omega = 2\pi/T$ из (16.13) находим

$$\omega^2 = \frac{8}{m\alpha^2} |E|^3. \quad (16.14)$$

Энергия E частицы в «связанном» состоянии оказывается пропорциональной частоте в степени $2/3$.

Уравнение эллиптической траектории (16.6), закон сохранения момента импульса $\mathbf{L} = \text{const}$ и формула для периода (16.13) составляют количественную формулировку трех законов Кеплера. Здесь эти законы получены на основе известной зависимости энергии взаимодействия $U = -Gmm_0/r$ от расстояния до неподвижного силового центра. Чтобы получить согласие с результатами более поздних наблюдений за движением планет Солнечной системы, следует учесть, что силовой центр не является неподвижным.

3. Инфинитное движение под действием силы притяжения. При любых неотрицательных значениях полной энергии E частицы в поле $U = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$), ее движение является инфинитным. Допустимая область движения в этом случае ограничена только одной окружностью $r = r_{\min}$. Это видно из рис. 8, 10, а также из уравнения траектории, которая по-прежнему имеет вид (16.6):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (16.15)$$

но теперь $\varepsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/m\alpha^2} \geq 1$ и знаменатель в (16.15) может обращаться в нуль.

Конечным значениям скорости частицы при $r \rightarrow \infty$ соответствуют $E > 0$, $\varepsilon > 1$. Траекторией в этом случае является ближняя к фокусу, совпадающему с силовым центром, ветвь гиперболы.

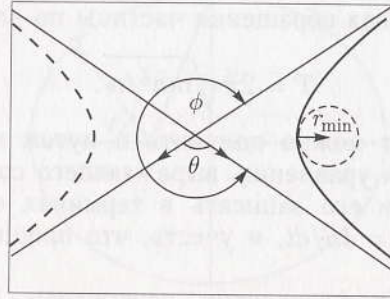


Рис. 10. Траектория и угол рассеяния при инфинитном движении в поле притягивающего центра $U = -\alpha/r$

Равной нулю на бесконечности скорости частицы соответствует $\varepsilon = 1$ и (16.15) совпадает с уравнением параболы.

Угол рассеяния θ на притягивающем центре можно вычислить по формуле (15.16). Неопределенный интеграл, содержащийся в ней, уже вычислен и представлен формулой (16.2). Остается подставить пределы интегрирования. Тот же результат можно получить непосредственно из (16.15), где

$$1 + \varepsilon \cos \varphi \geq 0 \quad (16.16)$$

(φ отсчитывается от направления на r_{\min}) и, следовательно, угловая координата изменяется в пределах

$$-\arccos(-1/\varepsilon) \leq \varphi \leq \arccos(-1/\varepsilon).$$

Угол рассеяния θ лишь на π отличается от полного угла φ изменения координаты φ (рис. 10) и равен

$$\theta = 2 \arccos(-1/\varepsilon) - \pi = 2 \arccos\left(-\frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{m}{2E}} / \sqrt{1 + \frac{m\alpha^2}{2EL^2}}\right) - \pi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{m}{2E}}. \quad (16.17)$$

Закон движения частицы в радиальном направлении при движении по гиперболической траектории определяется интегралом (15.10):

$$\begin{aligned} \pm(t - C) &= \int dr / \sqrt{\frac{2E}{m} \left(1 + \frac{\alpha}{Er} - \frac{L^2}{2mEr^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int r dr / \sqrt{r^2 + 2ar - b^2}, \quad (16.18) \end{aligned}$$

где теперь $a = \alpha/2E$, $b = L/\sqrt{2mE}$.

Положим в (16.18)

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi - 1). \quad (16.19)$$

Учитывая, что $a^2 + b^2 = \varepsilon^2 a^2$, находим

$$\pm(t - C) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi - 1) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\varepsilon \operatorname{sh} \xi - \xi). \quad (16.20)$$

Выберем параметр ξ так, что при $\xi \geq 0$ будет $t \geq 0$. Тогда вместо (16.20) следует принять

$$t = \sqrt{ma^3/\alpha} (\varepsilon \operatorname{sh} \xi - \xi). \quad (16.21)$$

Уравнения (16.19), (16.21) представляют закон радиального движения по гиперболической траектории в параметрическом виде.

Параметрическую форму закона радиального движения вдоль параболической траектории ($E = 0$) можно получить аналогично, если в интеграле

$$\pm(t - C) = \int r dr / \sqrt{\frac{2}{m}(\alpha r - L^2/2m)} \quad (16.22)$$

сделать подстановку

$$r = r_{\min}(1 + \xi^2), \quad (16.23)$$

где $r_{\min} = L^2/2m\alpha = p/2$. При тех же, что и выше, дополнительных условиях на ξ из (16.22) имеем

$$t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{\xi^3}{3} \right). \quad (16.24)$$

Само уравнение параболической траектории в плоскости движения представляется формулой (16.15) при $E = 0$:

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (16.25)$$

4. Инфинитное движение под действием силы отталкивания. Эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

при $\alpha < 0$ всюду положительна и монотонно убывает с расстоянием. Уравнение $E = U_{\text{eff}}(r)$ имеет только один корень r_{\min} , определяющий радиус окружности, ограничивающей допустимую область движения.

Уравнение траектории такого инфинитного движения имеет вид

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (16.26)$$

где параметр p и эксцентриситет ε определяются формулами (16.4). Геометрически это дальняя от фокуса, совпадающего с силовым центром, ветвь гиперболы (рис. 11).

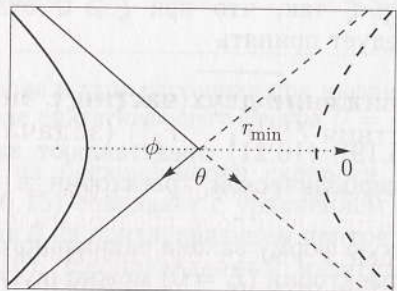


Рис. 11. Траектория и угол рассеяния на отталкивающем силовом центре $U = -\alpha/r$

Найдем угол рассеяния θ как функцию энергии и момента импульса на силовом центре $U = -\alpha/r$, $\alpha < 0$.

Из (16.26) следует, что угловая координата φ изменяется в пределах

$$-\arccos(1/\varepsilon) \leq \varphi \leq \arccos(1/\varepsilon).$$

Угол между асимптотами, в котором лежит траектория, равен

$$2 \arccos(1/\varepsilon) = 2 \arccos \left(-\frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{m}{2E}} / \sqrt{1 + \frac{m\alpha^2}{2EL^2}} \right).$$

Поэтому угол рассеяния θ определяется формулой

$$\theta = \pi - 2 \arccos(1/\varepsilon) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{m}{2E}}, \quad (16.27)$$

совпадающей по виду с формулой (16.17) для угла рассеяния на притягивающем силовом центре ($\alpha > 0$).

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ; ПУЧКИ ЧАСТИЦ

§ 17. Движение двух частиц с энергией взаимодействия $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ (задача двух тел)

Состояние движения силового центра в задаче о движении частицы в центральном поле предполагалось заданным при всех t . Силовым центром просто был неподвижным в некоторой инерциальной системе отсчета. Предположим теперь, что закон движения силового центра $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ известен при всех t , причем $\dot{\mathbf{r}}_2 \neq \text{const}$. Тогда частица m_1 будет двигаться в силовом поле частицы m_2 , движущейся неравномерно. Будем считать, что это поле остается потенциальным, имеет ту же функциональную форму, что и поле неподвижного центра, а явная зависимость потенциальной энергии частицы m_1 от времени появляется посредством зависимости $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$. При этих условиях функция Лагранжа частицы «1» будет иметь вид

$$L_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2(t)|). \quad (17.1)$$

Вследствие неоднозначности L_1 мы можем добавить к ней известную функцию времени $m_2 v_2^2(t)/2$.

Если, наоборот, задан закон движения $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, то функцию Лагранжа частицы «2» в поле частицы «1» можно представить в виде

$$L_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - U(|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2|) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t). \quad (17.2)$$

Обозначим через $L(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ функцию Лагранжа системы двух взаимодействующих частиц в некоторой инерциальной системе отсчета. Состояние движения не зависит от способа нумерации частиц (как и от того, нумеруем ли мы их вообще). Поэтому функция $L(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ симметрична относительно перестановки индексов «1» и «2». Кроме того, два предельных

значения этой функции даются формулами (17.1), (17.2). Следовательно,

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (17.3)$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_1} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_2} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_2} \quad (17.4)$$

приводят к уравнениям движения системы двух взаимодействующих частиц в виде шести дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_2}, \quad (17.5)$$

где $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$.

Заметим, что функцию (17.3) можно построить подобно тому, как была получена выше одночастичная функция Лагранжа, если уравнения (17.5) рассматривать в качестве исходных.

Введем вместо \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 новые переменные \mathbf{r} и $\mathbf{r}_{(m)}$, положив

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad m\mathbf{r}_{(m)} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2, \quad (17.6)$$

где $m = m_1 + m_2$. Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{(m)} + \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{(m)} - \frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \quad (17.7)$$

Дифференцируя (17.7) по времени и подставляя результат в (17.3), находим функцию Лагранжа системы двух частиц в новых динамических переменных:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}_{(m)}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(|\mathbf{r}|). \quad (17.8)$$

Здесь введено обозначение

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

для приведенной массы μ .

Мы видим, что три новые переменные $\mathbf{r}_{(m)}$ — координаты центра масс — являются циклическими. Поэтому сохраняются соответствующие им компоненты обобщенного импульса

$$\mathbf{P}_{(m)} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_{(m)} = m\dot{\mathbf{r}}_{(m)} \equiv m\mathbf{v}_{(m)}, \quad (17.9)$$

или импульса центра масс. В переменных \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 — это, очевидно, полный импульс системы

$$\mathbf{P}_{(m)} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2.$$

Уравнения Лагранжа для переменных \mathbf{r} относительного движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

принимают вид

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}|)}{\partial \mathbf{r}} \quad (17.10)$$

и представляют собой уравнения движения квазичастицы с массой μ в центральном поле. Общее решение этого уравнения получено выше.

Интегрируя уравнение (17.9) и используя результаты для движения в центральном поле, мы можем представить общее решение уравнений движения двух частиц в виде закона равномерного прямолинейного движения центра масс

$$\mathbf{r}_{(m)} = \mathbf{v}_{(m)}t + \mathbf{r}_{(m)}(0), \quad (17.11)$$

а также формул, определяющих закон движения и траекторию квазичастицы:

$$\mathbf{L}\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \equiv \mu(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{const}, \quad (17.12)$$

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} + \text{const}, \quad (17.13)$$

$$\varphi(r) = \pm \int \frac{(L/\mu r^2) dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} + \text{const}, \quad (17.14)$$

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + L^2/2\mu r^2. \quad (17.15)$$

В этих формулах E , \mathbf{L} — энергия и момент импульса относительного движения. Они связаны простыми соотношениями с полной энергией и моментом импульса системы двух частиц. Полная энергия системы равна

$$\begin{aligned} E_0 = \mathbf{v}_{(m)} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(m)}} + \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L &= \frac{m\mathbf{v}_{(m)}^2}{2} + \frac{\mu\mathbf{v}^2}{2} + U(r) = \\ &= \frac{m\mathbf{v}_{(m)}^2}{2} + E \end{aligned} \quad (17.16)$$

и сохраняется ($\partial L/\partial t = 0$). Сохраняется также кинетическая энергия $m\mathbf{v}_{(m)}^2/2$ центра масс. Следовательно, остается постоянной в процессе движения двух частиц полная энергия относительного движения

$$E = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} + U(r).$$

Момент импульса относительного движения (17.12), а также момент импульса центра масс $\mathbf{L}_{(m)} = \mathbf{r}_{(m)} \times \mathbf{p}_{(m)}$ сохраняются по отдельности. Поэтому сохраняется их сумма

$$\mathbf{L} + \mathbf{L}_{(m)} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2),$$

равная моменту импульса системы двух частиц.

Формулы (17.12)–(17.14) следует дополнить формулами обратного преобразования от переменных \mathbf{r} , $\mathbf{r}_{(m)}$ системы центра масс (17.7) к переменным \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 лабораторной системы.

На рис. 12 изображены элементы траекторий частиц. Траектории частиц лежат в одной плоскости и подобны соотношению подобия, равным отношению масс.

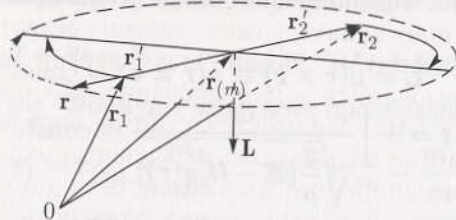


Рис. 12. Элементы траекторий двух частиц и квазичастицы; \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы частиц в лабораторной системе, $\mathbf{r}'_1 = \mu r/m_1$, $\mathbf{r}'_2 = -\mu r/m_2$ — в системе центра масс, \mathbf{r} — радиус-вектор квазичастицы

Проведенная выше классификация траекторий и законов движения частиц в центральном поле $U = -\alpha/r$ остается справедливой с точностью до обозначений постоянных для каждой из взаимодействующих частиц. В частности, для периода финитного движения квазичастицы будем иметь

$$T = 2\pi \sqrt{\mu a^3/\alpha}.$$

Пусть m_2 — масса Солнца, m_1 — масса планеты и $\alpha = Gm_2m_1$. Большие полуоси a_1 , a_2 эллиптических орбит планеты

и Солнца связаны с полуосью a квазичастицы соотношениями

$$a_1 = \frac{\mu}{m_1} a, \quad a_2 = \frac{\mu}{m_2} a,$$

которые вытекают из преобразований (17.7). Поэтому для планеты

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)^2}{G m_2^3}.$$

Так как $(m_1/m_2) \ll 1$, приближенно имеем

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} \cong \frac{4\pi^2}{Gm_2}.$$

В этом приближении отношения T_i^2/a_i^3 не зависят от масс планет m_i и в соответствии с третьим законом Кеплера являются одними и теми же для всех планет Солнечной системы.

§ 18. Рассеяние частиц

Общее решение уравнений движения системы двух взаимодействующих частиц получено выше в квадратурах. Для решения конкретной динамической задачи остается подставить в полученные формулы явный вид энергии взаимодействия $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ и выполнить интегрирование. Но пока $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ точно не установлена, динамика частиц не определена.

Одна из таких фундаментальных физических задач — определение вида гравитационного взаимодействия двух частиц — уже рассмотрена выше. Для ее решения оказалось достаточно тех сведений о финитном движении планет, которые содержались в законах Кеплера. К сожалению, мы не можем непосредственно распространить тот же метод на молекулы, атомы, атомные ядра, электроны из-за невозможности измерить элементы траекторий финитного движения таких частиц. Вместе с тем существует принципиальная возможность использовать с этой целью сведения об инфинитном движении частиц.

Задача о рассеянии является частным случаем задачи об инфинитном движении двух частиц, в которой начальные состояния частиц задаются «до рассеяния» ($t \rightarrow -\infty$), когда их взаимодействием можно пренебречь, а импульсы равны $\mathbf{p}_1(-\infty) \equiv \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2(-\infty) \equiv \mathbf{p}_2$. После сближения и взаимодействия, т.е. «после рассеяния» ($t \rightarrow +\infty$), импульсы частиц $\mathbf{p}_1(+\infty) \equiv \mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}_2(+\infty) \equiv \mathbf{p}'_2$ будут содержать информацию об энергии взаимодействия. Эту информацию можно извлечь при сравнении \mathbf{p}'_1 ,

\mathbf{p}'_2 с результатами эксперимента. В теоретической части задачи требуется вычислить импульсы \mathbf{p}'_1 и \mathbf{p}'_2 частиц после рассеяния.

Расстояние между частицами после рассеяния $|\mathbf{r}_1(+\infty) - \mathbf{r}_2(+\infty)|$ может стремиться к нулю или оставаться ограниченным. Такие состояния движения соответствуют *захвату частиц*. Если это расстояние стремится к бесконечности и внутренняя энергия частиц остается неизменной, то имеет место *упругое рассеяние*. В процессе *неупругого рассеяния* и *распада частиц* их внутренняя энергия не сохраняется.

Асимптотические значения импульсов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ отнесены к лабораторной системе координат (*л-системе*), а закон движения и траектория относительного движения частиц найдены в квадратурах в системе центра масс (*ц-системе*). Преобразования координат от ц-системы к л-системе определяются формулами (17.7):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{(m)} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{(m)} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}. \quad (18.1)$$

Умножая первую из них на m_1 , а вторую — на m_2 и дифференцируя по времени, получим

$$\mathbf{p}_1(t) = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)}(t) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}_2(t) = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)}(t) - \mathbf{p}(t) \quad (18.2)$$

(μ — приведенная масса, $m \equiv m_1 + m_2$). Полагая здесь $t \rightarrow -\infty$, находим в принятых выше обозначениях

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)} - \mathbf{p}, \quad (18.3)$$

или

$$\mathbf{p} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{p}_1 - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_{(m)} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (18.4)$$

Эти формулы определяют импульсы центра масс $\mathbf{p}_{(m)}$ и квазичастицы \mathbf{p} как функции заданных начальных импульсов частиц $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

Чтобы получить импульсы $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ частиц после рассеяния, следует положить в (18.2) $t \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}'_{(m)} + \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}'_{(m)} - \mathbf{p}'. \quad (18.5)$$

Полный импульс системы двух частиц сохраняется, так что $\mathbf{p}'_{(m)} = \mathbf{p}_{(m)}$, где $\mathbf{p}_{(m)}$ определяется формулой (18.4). Кроме того, сохраняется энергия относительного движения частиц

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + U(-\infty) = \frac{p'^2}{2\mu} + U(+\infty). \quad (18.6)$$

По условию задачи $U(-\infty) = U(+\infty) = 0$. Следовательно,

$$|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = p. \quad (18.7)$$

Абсолютная величина импульса p квазичастицы с массой μ не является интегралом движения, но после рассеяния имеет то же значение, что и до рассеяния. Эта величина известна, она определяется формулами (18.4). Поэтому

$$\mathbf{p}' = p' \mathbf{n} = p \mathbf{n}, \quad (18.8)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор. Формулы (5) принимают вид

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)} + p \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)} - p \mathbf{n}, \quad (18.9)$$

и задача сводится к определению вектора \mathbf{n} , т. е. двух углов.

Вектор \mathbf{n} определяет направление импульса \mathbf{p}' квазичастицы после рассеяния и для центральных взаимодействий лежит в неподвижной плоскости орбиты $\mathbf{L} \mathbf{r} = 0$. Поэтому для центральных взаимодействий достаточно вычислить только один угол

$$\chi = \widehat{\mathbf{p}' \mathbf{p}} = \widehat{\mathbf{n} \mathbf{p}} \quad (18.10)$$

— угол рассеяния квазичастицы в этой плоскости. В соответствии с общим решением задачи двух тел угол рассеяния χ в ц-системе равен

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(L/\mu r^2) dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (18.11)$$

Энергию E и момент импульса L относительного движения удобно представить в виде

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\mu v^2}{2}, \quad L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|_{-\infty} = \rho p = \rho \mu v, \quad (18.12)$$

где ρ — расстояние между асимптотами траекторий до рассеяния, или *прицельный параметр* (рис. 13). Тогда угол рассеяния χ будет функционалом от потенциала взаимодействия, относительной скорости частиц и прицельного параметра:

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2) dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v^2}}}. \quad (18.13)$$

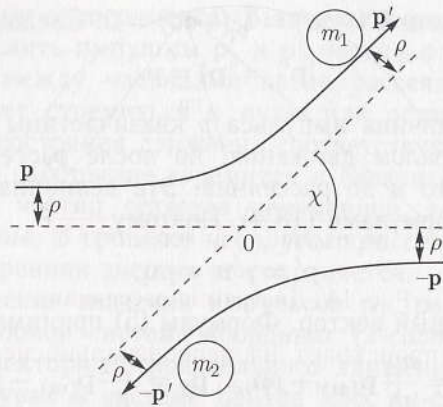


Рис. 13. Рассеяние в системе центра масс

Здесь r_{\min} — корень уравнения

$$1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v^2} = 0.$$

Угол рассеяния при инфинитном движении в центральном поле $U = -\alpha/r$, как показано выше, равен

$$\chi = 2 \arctg \frac{\alpha}{L} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} = 2 \arctg \frac{\alpha}{\mu \rho v^2}. \quad (18.14)$$

Формулами (18.9), (18.10), (18.13) или (18.14) завершаются аналитические вычисления импульсов $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ частиц после рассеяния. Углы рассеяния θ_1, θ_2 каждой из частиц в л-системе могут быть теперь найдены как углы между известными векторами.

Расчеты и интерпретация результатов задачи о рассеянии частиц делаются более простыми, если использовать диаграммы рассеяния.

Представим на диаграмме вектор $\mathbf{p}_{(m)}$ в виде суммы векторов $(m_1/m)\mathbf{p}_{(m)}$ и $(m_2/m)\mathbf{p}_{(m)}$, а вектор $\rho\mathbf{n}$ отложим от конца первого слагаемого (рис. 14). Тогда в соответствии с формулами (18.9) векторы \mathbf{p}'_1 и \mathbf{p}'_2 будут соответственно суммой и разностью построенных векторов.

Для заданных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и $U(r)$ направление \mathbf{n} изменяется при изменении прицельного параметра ρ , так что конец вектора $\rho\mathbf{n}$ описывает окружность в плоскости орбиты.

Построим диаграммы рассеяния и найдем углы θ_1, θ_2 , а также абсолютные значения импульсов \mathbf{p}'_1 и \mathbf{p}'_2 в л-системе как функции угла рассеяния χ и импульса \mathbf{p}_1 частицы «1» до рассеяния,

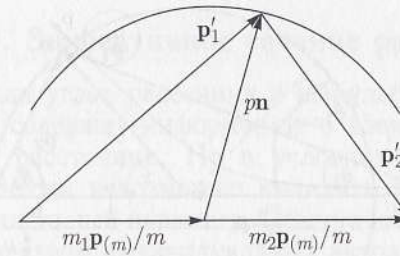


Рис. 14. Диаграмма рассеяния

если рассеяние происходит на первоначально неподвижной частице-мишени m_2 . В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)} &= \frac{m_2}{m} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_1 = \mu \mathbf{v} = \mathbf{p}, \\ \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)} &= \frac{m_1}{m_2} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Поэтому

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{m_1}{m_2} \mathbf{p} + \rho \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p} - \rho \mathbf{n} \quad (18.16)$$

и треугольник, образованный векторами $m_2 \mathbf{p}_{(m)}/m, \rho \mathbf{n}, \mathbf{p}'_2$, является равнобедренным.

Для $m_1 < m_2$ соответствующая диаграмма представлена на рис. 15, для $m_1 > m_2$ — на рис. 16. В обоих случаях угол рассеяния частицы-мишени равен

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} \quad (18.17)$$

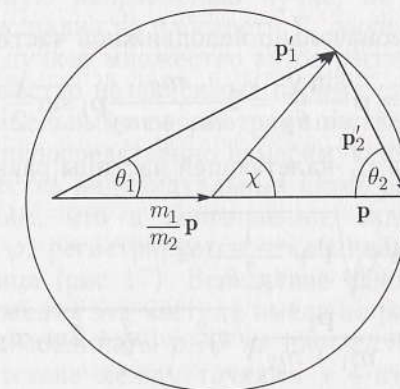


Рис. 15. Диаграмма рассеяния на первоначально неподвижной мишени m_2 ($m_1 < m_2$)

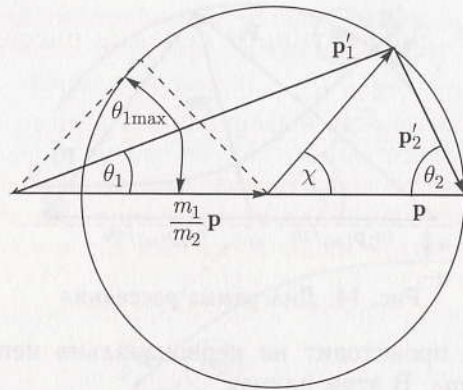


Рис. 16. Диаграмма рассеяния на первоначально неподвижной мишени m_2 ($m_1 > m_2$)

и изменяется от $\pi/2$ до нуля с изменением прицельного параметра (отсутствию рассеяния и рассеянию назад соответствуют $\chi = 0$ и $\chi = \pi$). Угол рассеяния налетающей частицы θ_1 изменяется в интервале $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}$, где

$$\theta_{1\max} = \begin{cases} \pi & \text{при } m_1 < m_2, \\ \arcsin \frac{m_2}{m_1} & \text{при } m_1 > m_2. \end{cases}$$

Обе диаграммы дают для этого угла

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi}. \quad (18.18)$$

Для импульса первоначально неподвижной частицы имеем

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p} \frac{\sin \chi}{\sin \theta_2} = 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \sin \frac{\chi}{2}. \quad (18.19)$$

Величина импульса \mathbf{p}'_1 налетающей частицы равна

$$\begin{aligned} p'_1 &= p \frac{\sin \chi}{\sin \theta_1} = p \sin \chi \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_1}} = \\ &= \frac{p_1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Из диаграмм непосредственно видно, что при $m_1 = m_2$ всегда $\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 = 0$, т. е. частицы с одинаковой массой рассеиваются под прямым углом.

§ 19. Эффективное сечение рассеяния

Формулы для углов рассеяния и импульсов двух частиц после рассеяния содержат информацию о взаимодействии частиц и прицельном расстоянии. Но в условиях реальных экспериментов практически невозможно выделить только две частицы и задать их прицельный параметр. Обычно имеют дело с пучками частиц и множеством индивидуальных актов рассеяния.

Результаты задачи о рассеянии двух частиц будут все еще оставаться в силе, если экспериментальная часть задачи о рассеянии частиц будет выполняться при специальных дополнительных ограничениях на физические характеристики пучков частиц. Сформированные пучки должны удовлетворять следующим требованиям.

1. Каждый пучок является разреженным, чтобы можно было пренебречь взаимодействием между частицами одного и того же пучка и чтобы каждая частица одного пучка испытывала лишь однократное рассеяние на частице другого пучка.

2. Каждый пучок является монохроматическим, т. е. массы и скорости всех частиц одного и того же пучка до рассеяния одинаковы. Тогда центры масс всех пар взаимодействующих частиц будут покоиться друг относительно друга, и частицы, имеющие одинаковые прицельные расстояния, будут рассеиваться на одинаковые углы.

3. Каждый пучок является однородным по сечению, так что интенсивность I падающего пучка, равная по определению числу частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную направлению пучка, не будет зависеть от выбора этой площадки на плоскости Σ , перпендикулярной пучку.

Для таких пучков множество актов рассеяния частиц разбивается на множество независимых парных столкновений с определенными прицельными параметрами и углами рассеяния, и мы можем ввести непосредственно измеримую физическую характеристику множества индивидуальных актов рассеяния.

Предположим, что в направлении, заданном сферическими углами χ, φ , регистрируется отклонившаяся после взаимодействия частица (рис. 17). Вследствие однозначности решений уравнений движения эта частица имела до рассеяния определенные полярные координаты ρ, ψ на плоскости Σ , ортогональной пучку. Соответствие между точками $\chi + d\chi, \varphi + d\varphi$ на сфере единичного радиуса и $\rho + d\rho, \psi + d\psi$ на плоскости Σ устанавливается при помощи траектории другой частицы. Вообще для каждого выбранного элемента телесного угла $d\Omega(\varphi, \chi) = \sin \chi d\chi d\varphi$

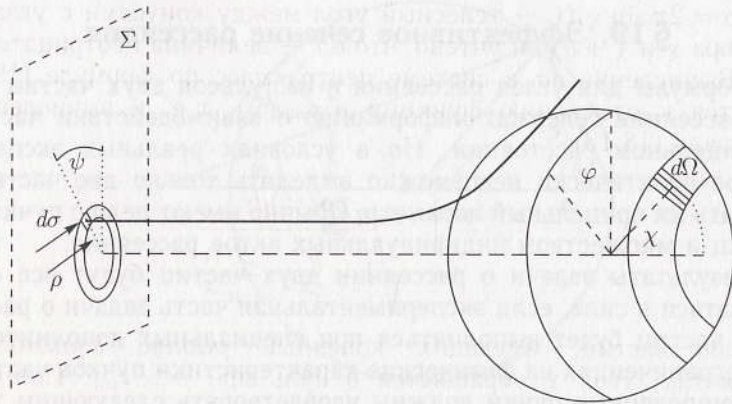


Рис. 17. Координаты при определении дифференциального сечения рассеяния

можно указать на Σ такую площадку $\rho d\rho d\psi \equiv d\sigma(\chi, \varphi)$, зависящую от выбора χ, φ , что в $d\Omega(\varphi, \chi)$ окажутся после рассеяния все частицы, которые прошли через $d\sigma(\chi, \varphi)$ до рассеяния. Множество актов рассеяния является реальным физическим механизмом отображения плоскости на сферу единичного радиуса. Положительная величина

$$d\sigma(\chi, \varphi) = \rho d\rho d\psi \quad (19.1)$$

называется *дифференциальным сечением рассеяния*.

Умножим и разделим правую часть (19.1) на интенсивность пучка I . Тогда получим эквивалентное определение дифференциального сечения рассеяния:

$$d\sigma(\chi, \varphi) = \frac{I \rho d\rho d\psi}{I} = \frac{dN(\chi, \varphi)}{I}, \quad (19.2)$$

как отношения числа частиц $dN(\chi, \varphi)$, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega(\varphi, \chi)$ около точки $\Omega(\varphi, \chi)$, к интенсивности падающего пучка.

Траектории двух частиц с центральным взаимодействием лежат в одной плоскости, и $\psi = \varphi$. Поэтому для центральных взаимодействий удобно пользоваться дифференциальным сечением рассеяния в кольцо между χ и $\chi + d\chi$:

$$d\sigma(\chi) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\sigma(\chi, \varphi) = 2\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi, \quad (19.3)$$

где $d\omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ — телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$, и учтено, что $d\sigma$ — величина неотрицательная. Вычисление $d\sigma$ в системе центра масс по формуле (19.3) сводится к отысканию функции $\rho = \rho(\chi)$, т. е. к вычислению интеграла (18.13)

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2) dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v^2}}}.$$

Для частиц, имеющих конечный радиус взаимодействия r_{int} , угол χ обращается в нуль при $\rho > r_{\text{int}}$. Поэтому функция $\rho = \rho(\chi)$ определена только при $\rho < r_{\text{int}}$.

Выражение $I d\sigma$ представляет собой число частиц, рассеянных за единицу времени в $d\Omega$. Это число не зависит от того, в каких координатах представлено $d\sigma$, в системе центра масс или в лабораторной системе. Если при помощи диаграмм или путем непосредственного решения уравнений для импульсов после рассеяния (18.9)

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)} + p \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)} - p \mathbf{n}$$

будут найдены функции $\chi = \chi(\theta_1)$, $\chi = \chi(\theta_2)$ углов θ_1, θ_2 рассеяния частиц в л-системе, то дифференциальные сечения рассеяния частиц первого пучка $d\sigma_1$ и второго $d\sigma_2$ в л-системе можно найти путем подстановки этих функций в формулу для $d\sigma(\chi)$:

$$d\sigma_1(\theta_1) = d\sigma(\chi) \Big|_{\chi=\chi(\theta_1)}, \quad d\sigma_2(\theta_2) = d\sigma(\chi) \Big|_{\chi=\chi(\theta_2)}.$$

Может оказаться, что функции $\chi = \chi(\theta_1)$, $\chi = \chi(\theta_2)$ являются многозначными. Так, при рассеянии пучка более тяжелых частиц m_1 на неподвижных до рассеяния более легких частицах m_2 ($m_1 > m_2$) под углом θ_1 в л-системе рассеиваются частицы, которые в ц-системе рассеиваются под углами χ^* , χ^{**} (рис. 18). В соответствии с определением (19.2) в этом случае

$$d\sigma_1(\theta_1) = d\sigma(\chi) \Big|_{\chi=\chi^*(\theta_1)} + d\sigma(\chi) \Big|_{\chi=\chi^{**}(\theta_1)}.$$

Вообще при многозначной зависимости $\chi = \chi(\theta_{1,2})$ дифференциальное сечение рассеяния в л-системе следует просуммировать по всем ветвям $\chi = \chi(\theta_{1,2})$.

Полная площадь σ плоскости Σ , которая в процессе рассеяния отображается на сферу единичного радиуса, называется *полным сечением рассеяния*. Для частиц с конечным радиусом

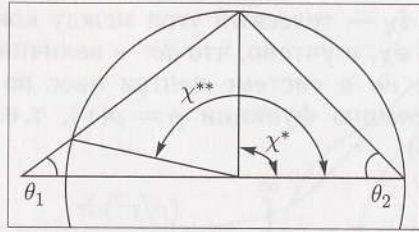


Рис. 18. Диаграмма, иллюстрирующая двузначную зависимость χ от θ_1 взаимодействия r_{int} : $\sigma = \pi r_{\text{int}}^2$; при $\rho > r_{\text{int}}$ рассеяние отсутствует.

Полное сечение захвата определяется как площадь плоскости Σ , соответствующая захвату частиц.

§ 20. Рассеяние жестких сфер

Энергия взаимодействия $U(r) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ двух неполярных молекул имеет вид, представленный на рис. 19, а. В задаче о рассеянии движение частиц является инфинитным с энергией относительного движения $E > 0$. На расстояниях r_{min} , таких, что $U(r_{\text{min}}) = E$, происходит интенсивное отталкивание частиц. В столкновениях при комнатных температурах энергии относительного движения молекул обычно недостаточно для изменения их внутренних состояний, и хорошим приближением для таких взаимодействий служит модель жестких столкновений (рис. 19, б) с энергией взаимодействия

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > 2a, \\ \rightarrow \infty, & r \rightarrow 2a + 0. \end{cases} \quad (20.1)$$

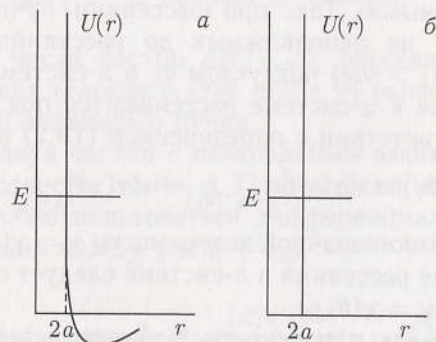


Рис. 19. Энергия взаимодействия двух неполярных молекул (а), жестких сфер (б)

Такую энергию взаимодействия имеют две гладкие жесткие сферы, сумма радиусов которых равна $2a$. Поэтому задача о рассеянии молекул с массами m_1 и m_2 сводится в этом пределе к задаче о рассеянии жестких сфер с массами m_1 и m_2 .

Для потенциальной энергии (20.1) угол рассеяния χ в ρ -системе легко вычисляется и равен

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \frac{\rho dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v^2}}} = \pi + 2 \int_{2a}^{\infty} \frac{d(\rho/r)}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = 2 \arccos \frac{\rho}{2a}. \quad (20.2)$$

Отсюда находим зависимость прицельного расстояния от угла рассеяния в ρ -системе:

$$\rho = 2a \cos(\chi/2). \quad (20.3)$$

Эта функция определена лишь при $\rho < 2a$. Подставляя ее в определение дифференциального сечения рассеяния в ρ -системе, находим

$$d\sigma(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\omega = 4\pi a^2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi = a^2 d\omega. \quad (20.4)$$

Как видно из (20.4), рассеяние молекул в приближении жестких сфер в ρ -системе является изотропным. По всем направлениям в ρ -системе частицы разлетаются сферически-симметрично.

Полное сечение рассеяния равно

$$\sigma = \int a^2 d\omega = 4\pi a^2, \quad (20.5)$$

т. е. площади диска с радиусом $2a$.

Эти результаты справедливы при любом способе рассеяния частиц в ρ -системе: рассеянии пучка частиц на первоначально неподвижной мишени, рассеянии встречных пучков частиц и т. п. Во всех случаях для вычисления дифференциальных сечений рассеяния $d\sigma_1(\theta_1)$, $d\sigma_2(\theta_2)$ частиц первого и второго сорта следует определить функции $\chi = \chi(\theta_1)$, $\chi = \chi(\theta_2)$, зависящие также от способа рассеяния и отношения масс частиц. Так, при рассеянии пучка частиц с массами m_1 на первоначально неподвижных

(имеющих малые переносные и тепловые скорости) частицах m_2 мишени результаты будут разными при разных отношениях масс.

Из диаграмм рассеяния на неподвижной мишени (рис. 15, 16) видно, что зависимость $\theta_2(\chi)$ определяется одной и той же формулой $\theta_2 = (\pi - \chi)/2$ при любом соотношении масс. Поэтому дифференциальные сечения рассеяния первоначально покоившихся частиц при $m_1 \neq m_2$ определяются одной и той же формулой

$$d\sigma_2(\theta_2) = d\sigma(\chi)|_{\chi=\chi(\theta_2)} = 4\pi a^2 \sin(\pi - 2\theta_2) = 4a^2 \cos \theta_2 do_2, \quad (20.6)$$

где $do_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2$.

Для произвольных m_1, m_2 имеем также

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi}. \quad (20.7)$$

Это соотношение можно разрешить относительно $\cos \chi$. В результате получим

$$\cos \chi^{*,**} = -\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}. \quad (20.8)$$

Знак «+» в этой формуле относится к случаю $m_1 \leq m_2$. При $m_1 = m_2$ угол $\theta_1 = \chi/2$. Если налетающие частицы имеют большую массу, $m_1 > m_2$, то в полученном решении следует сохранить оба знака; функция $\chi = \chi(\theta_1)$ двужначная; в л-системе под углом θ_1 рассеиваются частицы, которые в ц-системе рассеиваются и под углом χ^* , и под углом χ^{**} .

Для вычисления $d\sigma_1(\theta_1)$ следует найти $do(\theta_1)$, но так как $do = 2\pi \sin \chi d\chi = -2\pi d(\cos \chi)$, достаточно вычислить дифференциал от обеих частей равенств (20.8). Получим

$$do^{*,**} = \left(2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} \right) do_1. \quad (20.9)$$

Здесь $do_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$, и знак «+» относится к do^* .

Теперь, используя формулы (20.9), можно найти дифференциальные сечения рассеяния налетающих частиц в л-системе при

различных отношениях масс. При $m_1 = m_2$

$$d\sigma_1(\theta_1) = d\sigma(\chi)|_{\chi=\chi(\theta_1)} = 4a^2 \cos \theta_1 do_1. \quad (20.10)$$

Но если частицы неразличимы, то в элемент телесного угла $do(\theta) = 2\pi \sin \theta d\theta$ после рассеяния попадут и налетающие частицы, и частицы мишени. Вместо формул (20.6) и (20.10) для тождественных частиц будем иметь

$$d\sigma(\theta) = d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta) = 8a^2 \cos \theta do(\theta). \quad (20.11)$$

При $m_1 < m_2$

$$d\sigma_1(\theta_1) = a^2 do^* = a^2 \left[2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} \right] do_1. \quad (20.12)$$

При $m_1 > m_2$

$$d\sigma_1(\theta_1) = a^2 (|do^*| + |do^{**}|), \quad (20.13)$$

где do^*, do^{**} определены формулой (20.9).

§ 21. Рассеяние частиц с кулоновским взаимодействием. Формула Резерфорда

1. Начальные состояния пучков и энергия относительного движения частиц. Рассеяние разреженных монохроматических пучков электрически заряженных частиц в л-системе представляет собой множество независимых парных столкновений частиц. Полная энергия E_0 каждой пары таких взаимодействующих частиц определяется механизмом предварительного ускорения частиц в процессе формирования пучков. Эта энергия сохраняется и представляет собой сумму кинетической энергии центра масс $E_{(m)}$ и энергии относительного движения E :

$$E_0 = E_{(m)} + E = \frac{m_1 + m_2}{2} v_{(m)}^2 + E. \quad (21.1)$$

Сохраняется также распределение энергии между центром масс и относительным движением, поскольку $E_{(m)}$ и E являются интегралами движения.

Физическим параметром, определяющим динамические состояния двух тел, служит энергия E , а не $E_{(m)}$. Энергия относительного движения E может достигать значений, при кото-

рых рассеяние становится неупругим, возможны ядерные реакции, обладающие порогом. Поэтому с энергетических позиций предпочтительным представляется метод встречных пучков, при котором центр масс пары одинаковых частиц остается неподвижным.

Более традиционный метод предполагает наличие до рассеяния только одного пучка, который может быть сформирован в результате распада радиоактивных элементов или в ускорителях. Роль другого пучка выполняют частицы макроскопического образца вещества (мишени) в конденсированном или в газообразном состоянии. Если скорости частиц пучка значительно превосходят скорости теплового движения частиц образца, то скоростями частиц мишени до рассеяния можно пренебречь и считать, что рассеяние происходит на первоначально неподвижных частицах мишени.

В условиях рассеяния на неподвижной мишени $v_2 = 0$, $E_0 = m_1 v_1^2 / 2$, и мы находим, что начальная энергия E_0 распределяется в соответствии с формулами

$$E_{(m)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_0, \quad E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0. \quad (21.2)$$

При $m_1 = m_2$ половина энергии падающего пучка приходится на центр масс, а при $m_1 > m_2$ — большая половина.

Рассеяние на неподвижной мишени сопровождается значительными потерями энергии на «ускорение центра масс». Для достижения энергий E каждой частице налетающего пучка необходимо сообщить энергию $E_0 = (1 + m_1/m_2)E$, а самому пучку — плотность энергии $n(1 + m_1/m_2)E$, где n — плотность числа частиц.

В методе рассеяния тех же частиц на встречных пучках $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$, $E_0 = (m_1 + m_2)v_1^2/2$, и мы находим на основании закона сохранения энергии (21.1)

$$\frac{E_{(m)}}{E_0} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2, \quad \frac{E}{E_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (21.3)$$

При $m_1 = m_2$ в этом методе $E_{(m)} = 0$. В общем случае энергия относительного движения превышает энергию центра масс или равна ей, если

$$\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \geq \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2. \quad (21.4)$$

Пучки частиц всегда могут быть занумерованы так, что $m_1 \leq m_2$. Тогда оба последних неравенства будут выполняться для следующих значений отношений масс частиц:

$$1 \geq \frac{m_1}{m_2} \geq (3 - \sqrt{8}) \approx 0,17. \quad (21.5)$$

Для того чтобы достичь определенных энергий E относительного движения на встречных пучках частиц, каждой паре взаимодействующих частиц должна быть сообщена энергия в л-системе, равная

$$E_0 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right)^2 E. \quad (21.6)$$

Отсюда видно, что энергия E_0 должна принимать значения из интервала $(E, 2E)$, если отношения масс m_1/m_2 изменяются в интервале (21.5).

Методы рассеяния на неподвижной мишени и на встречных пучках представляют собой по существу разные методы задания начальных состояний пучков. Динамика рассеяния в системе центра масс не зависит от начальных состояний частиц. Дифференциальное сечение рассеяния в ц-системе будет одним и тем же для рассеяния на неподвижной мишени и для рассеяния на встречных пучках.

2. Рассеяние пучка частиц на неподвижной мишени. Для вычисления дифференциального сечения рассеяния в системе центра масс воспользуемся уже найденной зависимостью (18.14) угла рассеяния χ в этой системе от прицельного расстояния:

$$\chi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu v^2}. \quad (21.7)$$

Здесь $\alpha \stackrel{\pm}{=} -e_1 e_2$ и все частицы одного и того же пучка имеют не только одинаковые массы m_i ($i = 1, 2$), но и одинаковые заряды e_i . Из (21.7) находим

$$\rho^2(\chi) = \left(\frac{\alpha}{\mu v^2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \quad (21.8)$$

Подставляя это выражение в определение дифференциального сечения рассеяния в ц-системе, получаем

$$d\sigma = \pi \left| \frac{d\rho^2}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (21.9)$$

Этот результат справедлив независимо от того, покоились до рассеяния частицы m_2 или нет.

Соотношения между углами $\chi = \chi(\theta_1)$, $\chi = \chi(\theta_2)$ определяются начальными состояниями частиц и их массами. Поэтому в задаче о рассеянии частиц с кулоновским взаимодействием на неподвижной мишени остаются справедливыми все соотношения между углами рассеяния в системе центра масс и лабораторной системе, установленные в предыдущем параграфе для жестких сфер.

Углы θ_2 рассеяния первоначально неподвижных в л-системе частиц связаны с углами χ соотношением $\chi = \pi - 2\theta_2$. Подставляя это соотношение в (21.9), находим дифференциальное сечение рассеяния в л-системе первоначально неподвижных частиц при любых $m_1 \neq m_2$:

$$d\sigma_2 = d\sigma(\chi)|_{\chi=\chi(\theta_2)} = \left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2 \frac{d\theta_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (21.10)$$

Для налетающих частиц

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi}. \quad (21.11)$$

Если массы налетающих частиц $m_1 = m_2$ и частицы не являются тождественными, то $\chi = 2\theta_1$ и

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2 \frac{\cos \theta_1 d\theta_1}{\sin^4 \theta_1}. \quad (21.12)$$

При $m_1 < m_2$ зависимость $\chi = \chi(\theta_1) = \chi^*(\theta_1)$ однозначная, соответствующая знаку «+» в формулах

$$\cos \chi^{*,**} = -\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (21.13)$$

$$d\theta^{*,**} = \left(2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} \right) d\theta_1, \quad (21.14)$$

вытекающих из (21.11) и определения элемента телесного угла $d\theta$.

Дифференциальное сечение рассеяния в л-системе частиц с массами m_1 ($m_1 < m_2$) может быть представлено в виде

$$d\sigma_1 = d\sigma(\chi)|_{\chi^*(\theta_1)} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2m_2} \sin^2 \theta_1 - \frac{1}{2} \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} \right]^{-2} d\theta^* \right|. \quad (21.15)$$

Если частицы падающего пучка имеют большие массы, $m_1 > m_2$ (тяжелые ионы), то зависимость $\chi = \chi(\theta_1)$ является двузначной; оба знака в формулах (21.13), (21.14) имеют смысл, так как под углом θ_1 в л-системе рассеиваются частицы, которые в ц-системе рассеиваются под углами χ^* , χ^{**} . Дифференциальное сечение рассеяния налетающих частиц в этом случае представляет собой сумму

$$d\sigma_1 = d\sigma(\chi)|_{\chi^*(\theta_1)} + d\sigma(\chi)|_{\chi^{**}(\theta_1)} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \left\{ \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2m_2} \sin^2 \theta_1 - \frac{1}{2} \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} \right]^{-2} d\theta^* \right| + \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2m_2} \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} \right]^{-2} d\theta^{**} \right| \right\}. \quad (21.16)$$

Формула (21.15) для дифференциального сечения рассеяния легкой компоненты, справедливая при $m_1 < m_2$, становится более простой в приближении $m_1 \ll m_2$. В этом приближении $\chi \approx \theta_1$, приведенная масса приближенно совпадает с массой m_1 легкой частицы, и мы имеем

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2m_1 v^2}\right)^2 \frac{d\theta_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}. \quad (21.17)$$

Формула (21.17) получена в 1911 г. Э. Резерфордом. Сравнение этой формулы с результатами экспериментов по рассеянию быстрых альфа-частиц (ядер He^4) на ядрах тяжелых элементов явилось одним из основных источников информации о строении атома.

Дифференциальное сечение рассеяния можно также выразить через энергию ϵ , приобретаемую первоначально покоивши-

мися частицами, или равную ей энергию, теряемую налетающими частицами. Действительно, как видно из приведенных выше диаграмм рассеяния,

$$\epsilon = \frac{(p'_2)^2}{2m_2} = \frac{1}{2m_2} (2\mu v \sin \frac{\chi}{2})^2. \quad (21.18)$$

Следовательно,

$$\sin^2 \frac{\chi}{2} = \frac{m_2}{2\mu^2 v^2} \epsilon. \quad (21.19)$$

Дифференциальное сечение рассеяния в ц-системе (21.9) можно представить в виде, удобном для подстановки в него выражения (21.19):

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{4\pi d \left(\sin^2 \frac{\chi}{2} \right)}{\left(\sin^2 \frac{\chi}{2} \right)^2}. \quad (21.20)$$

В результате находим дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_\epsilon$ в интервале энергий $d\epsilon$ около ϵ :

$$d\sigma_\epsilon = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 d\epsilon}{m_2 v^2 \epsilon^2}. \quad (21.21)$$

Полное сечение рассеяния σ частиц с кулоновским взаимодействием представляет собой интеграл от дифференциального сечения (21.20) по всем углам рассеяния, или интеграл от дифференциального сечения (21.21) по всем энергиям ϵ . Оба эти интеграла расходятся, $\sigma = \infty$. Полное сечение рассеяния электрически заряженных частиц расходится вследствие бесконечного радиуса действия кулоновских сил.

3. Рассеяние встречных пучков частиц. Найдем дифференциальные сечения рассеяния пучков частиц с кулоновским взаимодействием в лабораторной системе, в условиях, когда два разреженных монохроматических пучка частиц с массами m_1 и m_2 , $m_1 \leq m_2$, движутся до рассеяния навстречу друг другу со скоростями $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$. Формула для дифференциального сечения рассеяния заряженных частиц в ц-системе остается справедливой и в этом случае. Остается найти зависимости между углами рассеяния θ_1, θ_2 частиц в л-системе и углом χ рассеяния в ц-системе.

Импульсы частиц после рассеяния определяются общим решением задачи о рассеянии двух частиц (18.9):

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{m_1}{m} \mathbf{p}_{(m)} + p\mathbf{n}, \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{m_2}{m} \mathbf{p}_{(m)} - p\mathbf{n}. \quad (21.22)$$

Для встречных столкновений $\mathbf{p}_{(m)} = (m_1 - m_2)\mathbf{v}_1$, $p = 2\mu v_1$. Следовательно,

$$\mathbf{p}'_1 = -\frac{m_2 - m_1}{2m_2} \mathbf{p} + p\mathbf{n}, \quad \mathbf{p}'_2 = -\frac{m_2 - m_1}{2m_1} \mathbf{p} - p\mathbf{n}. \quad (21.23)$$

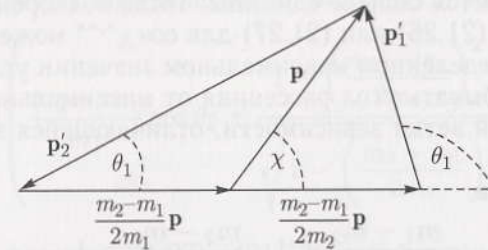


Рис. 20. Углы рассеяния при встречных столкновениях частиц

Векторные равенства (21.23) удобно изобразить графически (рис. 20). Из диаграммы находим соотношения между углами рассеяния, симметричные относительно перестановки номеров частиц,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_1 - m_2}{2m_2} + \cos \chi}, \quad (21.24)$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_2 - m_1}{2m_1} + \cos \chi}. \quad (21.25)$$

Разрешив (21.24), (21.25) относительно $\cos \chi$, получим

$$\cos \chi^{*,**} = -\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (21.26)$$

$$\cos \chi^{*,**} = -\frac{m_2 - m_1}{2m_1} \sin^2 \theta_2 \pm \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{2m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2}. \quad (21.27)$$

При $m_1 = m_2$ центры масс всех пар взаимодействующих частиц остаются неподвижными и $\chi = \chi^* = \theta_1 = \theta_2$. Поэтому дифференциальное сечение рассеяния нетождественных частиц с одинаковой массой в л-системе совпадает по форме с дифференциальным сечением в ц-системе:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{e_1 e_2}{2m_1 v_1^2} \right)^2 \frac{d\theta_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}. \quad (21.28)$$

При $m_1 \neq m_2$ зависимости $\chi = \chi(\theta_1)$, $\chi = \chi(\theta_2)$ могут оказаться двужначными. Как видно из рис. 18, неоднозначная связь между углами рассеяния χ и $\theta_{1,2}$ возникает, когда отношение $\left| \frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right|$ или $\left| \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \right|$ (основания треугольников на рис. 20) становится больше единицы. Тогда подкоренное выражение в формуле (21.26) или (21.27) для $\cos \chi^{*,**}$ может обратиться в нуль при определенном максимальном значении угла рассеяния в л-системе. Убывать угол рассеяния от максимального значения будет по другой ветви зависимости, отличающейся знаком перед корнем.

Неравенства

$$\frac{m_1 - m_2}{2m_2} < 1 \quad \frac{m_2 - m_1}{2m_1} > 1 \quad (21.29)$$

одновременно выполняются при $m_2 > 3m_1$. Угол θ_1 в этом случае изменяется от нуля до π . Угол θ_2 имеет максимальное значение $\theta_{2\max} = \arcsin\left(\frac{2m_1}{m_2 - m_1}\right)$. Зависимость $\chi^* = \chi^*(\theta_1)$ является однозначной (знак «+» в соотношении (21.26)); зависимость $\chi = \chi(\theta_2)$ является двужначной (оба знака в формуле (21.27)).

Элемент телесного угла между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ равен $do = 2\pi \sin \chi d\chi = -2\pi d(\cos \chi)$. Подставляя сюда $\cos \chi^*$ из (21.26) и дифференцируя, находим

$$do^* = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} \right) do_1. \quad (21.30)$$

Функцию $\sin^4 \frac{\chi}{2}$ в дифференциальном сечении в ц-системе также нетрудно выразить через θ_1 при помощи соотношения (21.26), и мы получаем дифференциальное сечение рассеяния частиц с массами m_1 в л-системе:

$$d\sigma_1 = d\sigma(\chi)|_{\chi^*(\theta_1)} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2} \right)^2 \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_1}{2m_2} \sin^2 \theta_1 - \frac{1}{2} \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} \right]^{-2} do^* \right|. \quad (21.31)$$

Частицы с массами m_2 ($m_2 > 3m_1$), образующие встречный пучок, рассеиваются в л-системе под углами θ_2 . При этом каждому θ_2 соответствуют два угла рассеяния χ^* и χ^{**} в ц-системе. В соответствии с этим имеются два элемента телесных углов do^* , do^{**} , связанных с элементом $do_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2$ в л-системе. Подставляя (21.27) в определение do , получим для обеих ветвей

$$do^{*,**} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1} \cos \theta_2 \pm \frac{1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{2m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{2m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} \right) do_2. \quad (21.32)$$

С учетом формул (21.27), (21.32) дифференциальное сечение рассеяния частиц с массами m_2 ($m_2 > 3m_1$) в л-системе на встречных пучках можно представить в виде

$$d\sigma_2 = d\sigma(\chi)|_{\chi^*(\theta_2)} + d\sigma(\chi)|_{\chi^{**}(\theta_2)} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2} \right)^2 \left\{ \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{4m_1} \sin^2 \theta_2 - \frac{1}{2} \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{2m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2} \right]^{-2} do^* \right| + \left| \left[\frac{1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{4m_1} \sin^2 \theta_2 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{2m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2} \right]^{-2} do^{**} \right| \right\}. \quad (21.33)$$

Мы получили дифференциальные сечения рассеяния на встречных пучках частиц с одинаковыми массами $m_1 = m_2$, а также с массами, удовлетворяющими неравенству $m_2 > 3m_1$, вытекающему из (21.29). Формулы для углов рассеяния (21.26), (21.27) остаются справедливыми и при других отношениях масс, удовлетворяющих всевозможным знакам неравенств (21.29). Остается в силе и схема вычисления дифференциальных сечений рассеяния для таких отношений масс после определения необходимого набора ветвей (знаков «+», «-») в (21.26), (21.27).

Глава 6

СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

§ 22. Динамика системы взаимодействующих частиц

1. Функция Лагранжа и уравнения движения системы взаимодействующих частиц. Функция Лагранжа системы N частиц

$$L = L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$$

с энергиями взаимодействия $U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ может быть установлена, если предварительно сформулированы уравнения движения системы. При условии, что функция Лагранжа является трехмерным скаляром, ее производные $\partial L / \partial \mathbf{r}_i$, $\partial L / \partial \mathbf{v}_i$ образуют $2N$ векторов. Представляя импульсы \mathbf{p}_i частиц в виде $\partial L / \partial \mathbf{v}_i$, уравнения движения можно записать в терминах производных функции Лагранжа и одновременно установить ее явный вид. Эта программа лишь числом переменных отличается от использованной выше для одной частицы. Обратная последовательность действий состоит в отыскании функции Лагранжа системы частиц и установлении уравнений движения как уравнений Лагранжа.

Явный вид функции Лагранжа системы N частиц можно установить при помощи рассуждений, на основе которых выше получена функция Лагранжа для $N = 2$. Действительно, для двух частиц во внешнем поле с потенциалом, пропорциональным $U(\mathbf{r}, t)$,

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) - U_1(\mathbf{r}_1, t) - U_2(\mathbf{r}_2, t). \quad (22.1)$$

Источником внешнего поля (по отношению к выделенной системе двух частиц) может служить третья частица. Тогда ее потенциальная энергия будет зависеть от времени посредством известной зависимости от времени координат третьей частицы, так что

$$U_1(\mathbf{r}_1, t) + U_2(\mathbf{r}_2, t) = U_{13}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3(t)|) + U_{23}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3(t)|).$$

К функции (22.1) можно добавить известную функцию времени $m_3(\dot{\mathbf{r}}_3(t))^2/2$. Учитывая далее, что функция Лагранжа системы трех частиц не должна зависеть от порядка нумерации

частиц и что зависимость $\mathbf{r}_3(t)$ должна определяться уравнениями движения, приходим к функции

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} - U_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) - \\ &\quad - U_{13}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|) - U_{23}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (22.2) \end{aligned}$$

симметричной относительно перестановки индексов любой пары частиц. Штрих при знаке двойной суммы означает $i \neq j$ и исключает самодействие частиц.

Рассматривая далее трехчастичную систему как подсистему системы, состоящей из четырех частиц, можно установить вид функции Лагранжа для $N = 4$ и т. д. Заметим, однако, что вся информация о числе частиц содержится лишь в верхнем пределе сумм (22.2). Поэтому функция Лагранжа системы N взаимодействующих частиц во внешнем поле равна

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t). \quad (22.3) \end{aligned}$$

Здесь функции $U_{ij} = U_{ji}$ различны для разных сортов частиц, $U_i(\mathbf{r}_i, t)$ — потенциальная энергия частицы с номером i во внешнем поле.

Уравнения движения системы N частиц могут быть получены из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, \dots, N), \quad (22.4)$$

где \mathbf{F}_k — силы, не представленные в функции Лагранжа.

Подставляя (22.3) в (22.4), найдем

$$\begin{aligned} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \sum_{i=1}^{N'} U_{ki}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|) - \frac{\partial U_k(\mathbf{r}_k, t)}{\partial \mathbf{r}_k} + \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, t) \\ &\quad (k = 1, \dots, N). \quad (22.5) \end{aligned}$$

Уравнения движения (22.5) однозначно определяют состояние системы $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_N(t)$ в момент времени t , если известно ее начальное состояние $\mathbf{r}_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_N(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0)$ в момент t_0 .

При больших N практически невозможно одновременно измерить пространственные положения и скорости частиц системы (звезд в Галактике, атомов твердого тела и т.п.). Для таких систем не имеет практической ценности и общее решение уравнений движения

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(t, \mathbf{r}_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_N(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0)).$$

В связи с этим для системы N взаимодействующих частиц особую ценность приобретают законы сохранения.

2. Изменение во времени импульса системы; движение тела с переменной массой. Сложим векторно уравнения движения системы N частиц (22.5). Получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k = - \sum_{i,k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}}{\partial \mathbf{r}_k} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{r}_k} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k, \quad (22.6)$$

но

$$\sum_{i,k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}}{\partial \mathbf{r}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} \left(\frac{\partial U_{ik}}{\partial \mathbf{r}_k} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} \left(\frac{\partial U_{ik}}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial U_{ik}}{\partial \mathbf{r}_k} \right) = 0. \quad (22.7)$$

Следовательно, импульс системы $\mathbf{p} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k$ изменяется со временем под действием суммы внешних сил:

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k - \sum_{k=1}^N \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{r}_k}. \quad (22.8)$$

Если проекция суммы внешних сил на некоторое направление \mathbf{n} в пространстве равна нулю, то, как видно из (22.8), проекция импульса системы частиц на это направление сохраняется, $\mathbf{pn} = \text{const}$.

Определим радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}_{(m)}$ системы N частиц равенством (теорема о среднем для сумм)

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i. \quad (22.9)$$

Тогда о сохранении полного импульса системы можно говорить так же, как о сохранении скорости центра масс $\mathbf{v}_{(m)}$:

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i \equiv \mathbf{v}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (22.10)$$

Координаты центра масс системы не могут быть найдены на основе их определения (22.9), пока неизвестны законы движения частиц $\mathbf{r}_i(t)$. Однако в однородном поле уравнение (22.8) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i = \mathbf{g} \sum_{i=1}^N m_i$$

и легко интегрируется. Координаты центра масс $\mathbf{r}_{(m)}(t)$ в этом случае полностью определяются его начальным состоянием $\mathbf{r}_{(m)}(t_0), \dot{\mathbf{r}}_{(m)}(t_0)$. Если система состоит из частиц с кулоновским взаимодействием и находится во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{B} , то вместо уравнения (22.8) будем иметь

$$\ddot{\mathbf{r}}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}.$$

Это уравнение является автономным по отношению к $\mathbf{r}_{(m)}(t)$ лишь для частиц с одинаковым отношением электрического заряда к массе e_i/m_i . При этом условии центр масс перемещается в пространстве как частица с отношением заряда к массе e_i/m_i . Однако это условие не выполняется для атомно-молекулярных систем. Если система находится в неоднородном поле, то правая часть (22.8) будет содержать зависимость от координат и, возможно, скоростей частиц в комбинациях, не сводящихся к комбинациям (22.9), (22.10). В таких случаях каждая частица по отдельности будет давать вклад во взаимодействие с внешним полем в правой части (22.8). Изменение положений отдельных частиц или конфигурации системы во внешнем поле за счет «внутренних» сил может приводить к дополнительному ускорению центра масс. Уравнение (22.8) эволюции импульса системы во внешнем неоднородном поле, таким образом, не запрещает изменений движения центра масс системы за счет действия «внутренних» сил. В отсутствие внешнего поля такое изменение импульса системы невозможно.

Закон сохранения импульса лежит в основе анализа явлений самопроизвольного распада частиц, обеспечивая в системе отсчета первичной частицы равенство нулю суммы импульсов

всех распадных частиц, в основе представлений о реактивном движении и т. п.

Рассмотрим макроскопическую систему, которую под действием внутренних сил покидает поток частиц в определенном направлении. Если массы частиц малы по сравнению с массой системы, а поток достаточно плотный, то поток массы можно считать непрерывным. Пусть $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i \equiv m\mathbf{v}_{(m)}$ — импульс макроскопической системы в момент t . К моменту $t + dt$ масса системы уменьшается на бесконечно малую величину $|dm|$, а система получает приращение скорости $d\mathbf{v}_{(m)}$. Полный импульс системы и отделившейся от нее части в этот момент равен

$$\mathbf{p}(t + dt) = (m - |dm|)(\mathbf{v}_{(m)} + d\mathbf{v}_{(m)}) + |dm|\mathbf{v}_s,$$

$dm/dt < 0$, с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = m d\mathbf{v}_{(m)} + |dm|(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{(m)}).$$

Это приращение импульса следует подставить в уравнение эволюции (22.8), которое будет иметь вид

$$m\dot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{F}^{\text{ext}} + \dot{m}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{(m)}). \quad (22.11)$$

Здесь \mathbf{F}^{ext} — внешняя сила, $\dot{m}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{(m)})$ — реактивная сила. Уравнение (22.11) известно как уравнение движения тела с переменной массой, или уравнение Мещерского. В частности, при равномерном движении вдоль оси x , такой, что $\mathbf{F}_x^{\text{ext}} = 0$,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} (v_{sx} - v_x).$$

Интегрируя это уравнение от t_0 до t при условии, что относительная скорость $v_{sx} - v_x$ потока массы постоянна и равна $-u$, получим

$$v_x(t) = v_x(t_0) + u \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Это формула Циолковского. Она определяет приращение скорости макроскопической системы за счет действия реактивной силы вида $-\dot{m}u$.

3. Изменение со временем энергии системы. Уравнения движения системы взаимодействующих частиц (22.5) получены путем подстановки функции Лагранжа (22.3) в уравнения Лагранжа (22.4). К уравнению эволюции энергии системы можно прийти, умножив каждое из уравнений движения частицы на ее скорость \mathbf{v}_i и просуммировав результат по всем частицам

системы. Однако целесообразно получить сначала более общий результат (для функции Лагранжа общего вида) и затем использовать функцию (22.4). Умножим поэтому на \mathbf{v}_i уравнение (22.4):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i^{(g)} + \mathbf{F}_i^{(d)} \quad (i = 1, \dots, N),$$

в котором выделены явно гироскопические и диссипативные силы, и просуммируем по всем i . Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} &= \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(d)} \cdot \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(d)} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (22.12)$$

Формула (22.12) выражает изменение со временем динамической функции

$$E = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} - L,$$

известной под названием обобщенной энергии системы частиц. При $\partial L / \partial t = 0$ и в отсутствие диссипативных сил обобщенная энергия системы сохраняется, $E = \text{const}$.

Для системы частиц, представленной функцией Лагранжа (22.3):

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t),$$

из (22.12) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij} + \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t) \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(d)} \cdot \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Мы видим, что обобщенная энергия такой системы частиц представляет собой полную механическую энергию как сумму кинетической энергии системы частиц $E_{(k)} = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2/2$, энергии взаимодействия частиц $U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}$ и потенциальной энергии системы частиц во внешнем поле $\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t)$. Полная энергия системы частиц сохраняется:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij} + \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t) = \text{const}, \quad (22.14)$$

если внешнее поле является стационарным, $\partial U_i/\partial t = 0$, и диссипативные силы отсутствуют. В этом случае постоянная E в (22.14) полностью определяется начальным динамическим состоянием системы.

4. Изменение во времени момента импульса (кинетического момента) системы. Представим уравнения движения системы N частиц (22.5) в компонентах

$$\dot{p}_{i\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + F_{i\alpha}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}_i, t), \quad (22.15)$$

$$p_{i\alpha} = m_i \dot{x}_{i\alpha} \quad (i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3).$$

Умножим каждое из уравнений (22.15) на $x_{i\beta}$ и просуммируем результаты по всем частицам. Получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\beta} p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N \dot{x}_{i\beta} p_{i\alpha} = - \sum_{i,k=1}^{N'} x_{i\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + \sum_{i=1}^N x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})}. \quad (22.16)$$

Преобразуем двойную сумму в (22.16) так, что

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{N'} x_{i\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} \left(x_{i\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} + x_{k\beta} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{k\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} (x_{i\beta} - x_{k\beta}) \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} U'_{ik} \frac{(x_{i\beta} - x_{k\beta})(x_{i\alpha} - x_{k\alpha})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}, \end{aligned} \quad (22.17)$$

где U'_{ik} — производная $U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$ по полному аргументу:

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{i\alpha}} = U'_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \frac{x_{i\alpha} - x_{k\alpha}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}.$$

Формула (22.17) позволяет представить уравнение (22.16) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\beta} p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N \dot{x}_{i\beta} p_{i\alpha} &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} U'_{ik} \frac{(x_{i\beta} - x_{k\beta})(x_{i\alpha} - x_{k\alpha})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} + \sum_{i=1}^N x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})}. \end{aligned} \quad (22.18)$$

Вторая сумма слева в (22.18) и первая сумма справа являются симметричными тензорами. Следовательно, остальные две суммы в (22.18) также образуют симметричный тензор. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\beta} p_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\alpha} p_{i\beta} - \sum_{i=1}^N x_{i\alpha} F_{i\beta}^{(\text{ext})},$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (x_{i\alpha} p_{i\beta} - x_{i\beta} p_{i\alpha}) = \sum_{i=1}^N (x_{i\alpha} F_{i\beta}^{(\text{ext})} - x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})}). \quad (22.19)$$

Слева под знаком производной по времени в уравнении (22.19) стоит тензор момента импульса системы частиц

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N (x_{i\alpha} p_{i\beta} - x_{i\beta} p_{i\alpha}) = -L_{\beta\alpha}. \quad (22.20)$$

Эволюция тензора $L_{\alpha\beta}$ происходит под действием тензора момента внешних сил $M_{\alpha\beta}$, действующих на систему частиц:

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N (x_{i\alpha} F_{i\beta}^{(\text{ext})} - x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})}) = -M_{\beta\alpha}. \quad (22.21)$$

Антисимметричным тензорам (22.20), (22.21) можно поставить в соответствие псевдовектор момента импульса системы частиц \mathbf{L} и псевдовектор момента внешних сил \mathbf{M} по формулам

$$L_\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} L_{\alpha\beta}, \quad M_\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} M_{\alpha\beta}, \quad (22.22)$$

где $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — символ Леви-Чивиты. В новых обозначениях уравнение (22.19) приобретает смысл уравнения эволюции псевдовектора момента импульса системы частиц

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}. \quad (22.23)$$

Момент сил \mathbf{M} может быть равен нулю, как это имеет место в центральном поле относительно центра поля. В таких случаях момент импульса системы сохраняется во времени. В других задачах может обращаться в нуль проекция \mathbf{M} на некоторое направление \mathbf{n} в пространстве. Тогда очевидно $\mathbf{L}\mathbf{n} = \text{const}$.

§ 23. Теорема о вириале

Для системы частиц, координаты и скорости которых изменяются в конечных пределах, имеет место теорема о вириале. Она устанавливает определенное соотношение между средними по времени значениями кинетической энергии и энергии взаимодействия между частицами системы.

Среднее по времени \bar{f} функции $f(t)$ равно по определению

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (23.1)$$

Применим эту операцию к уравнению (22.18). Будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\alpha} p_{i\beta}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_{i\alpha} p_{i\beta} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[\sum_{i=1}^N (x_{i\alpha}(\tau) p_{i\beta}(\tau) - x_{i\alpha}(0) p_{i\beta}(0)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (23.2)$$

так как все $x_{i\alpha}(t)$, $p_{i\beta}(t)$ — ограниченные функции. Поэтому для средних по времени динамических функций справедливы соотношения

$$\overline{\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_{i\alpha} \dot{x}_{i\beta}} = \frac{1}{2} \overline{\sum_{i,k=1}^N U'_{ik} \frac{(x_{i\beta} - x_{k\beta})(x_{i\alpha} - x_{k\alpha})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}} - \overline{\sum_{i=1}^N x_{i\alpha} F_{i\beta}^{(\text{ext})}}. \quad (23.3)$$

Переставляя здесь тензорные индексы α , β и вычитая полученное таким образом уравнение из (23.3), находим

$$\overline{\sum_{i=1}^N x_{i\alpha} F_{i\beta}^{(\text{ext})}} - \overline{\sum_{i=1}^N x_{i\beta} F_{i\alpha}^{(\text{ext})}} = 0,$$

т.е. среднее по времени момента сил системы должно быть равным нулю. Этот результат можно получить и непосредственно усредняя по времени уравнение эволюции момента импульса для систем, состояния которых ограничены при всех t .

Найдем сумму диагональных компонент (шпур) тензоров (23.3). Умножая (23.3) на символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ и суммируя результаты, получим

$$\overline{E_{(k)}} = \frac{1}{4} \overline{\sum_{i,k=1}^{N'} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| U'_{ik}} - \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}}. \quad (23.4)$$

Это соотношение между средним по времени кинетической энергии системы и вириалом Клаузиуса (правая часть (23.4)) выражает теорему о вириале.

Для функций $U_{ik}(l)$, однородных n -й степени, т.е. таких, что $U_{ik}(\lambda l) = \lambda^n U_{ik}(l)$, имеет место уравнение Эйлера $l \frac{\partial U_{ik}}{\partial l} = n U_{ik}$ (как результат дифференцирования по l и λ функций $U_{ik}(\lambda l)$ и исключения производной по (λl)). Поэтому для энергий взаимодействия U_{ik} , однородных n -й степени,

$$\frac{1}{4} \sum_{i,k=1}^{N'} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| U'_{ik} = \frac{n}{4} \sum_{i,k=1}^{N'} U_{ik} = \frac{n}{2} U,$$

и теорема о вириале (23.4) принимает вид

$$\overline{E_{(k)}} = \frac{n}{2} \overline{U} - \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}}. \quad (23.5)$$

Взаимодействию по закону обратных квадратов соответствует $n = -1$, и из (23.5) следует в отсутствие внешних сил, что

$$\overline{E_{(k)}} = -\frac{1}{2} \overline{U}, \quad (23.6)$$

т.е. в любой пространственно ограниченной системе частиц с ньютоновским гравитационным или кулоновским электростатическим взаимодействием между частицами в отсутствие внеш-

них сил устанавливается состояние, в котором средняя по времени кинетическая энергия системы равна с обратным знаком половине средней энергии взаимодействия частиц.

§ 24. Система частиц в неинерциальной системе отсчета

Динамика системы N частиц с энергией взаимодействия $U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$ в инерциальной системе отсчета S представлена системой уравнений (22.5) и заданным начальным состоянием. Движение той же самой системы может быть определено и относительно неинерциальной системы отсчета S' , если известны закон движения $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ начала координат S' в S и угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ системы координат S' относительно S . Определение $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от числа частиц N и дано выше при выводе уравнений движения в S' одной частицы. Соотношения между координатами $\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k$ и скоростями $\mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_k$ частицы с номером k в S и S' не зависят от присутствия других частиц и имеют тот же вид, что и для одной частицы (без индекса k):

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'_k, \quad (24.1)$$

$$\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{v}'_k + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k). \quad (24.2)$$

Эти формулы позволяют преобразовать к переменным системы S' функцию Лагранжа системы N частиц (22.3):

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \\ = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t). \end{aligned}$$

Очевидно $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| = |\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k|$. Поэтому $U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = U_{ik}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k|)$ и энергия взаимодействия частиц в S' та же, что и в S . Для преобразования кинетической энергии системы и энергии взаимодействия с внешним полем можно использовать результаты преобразований одночастичной функции Лагранжа. Мы находим, что в неинерциальной системе отсчета с заданными $\mathbf{R}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$ система N взаимодействующих частиц представляется функцией Лагранжа:

$$L = -\dot{\mathbf{R}}(t) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i{}^2 +$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_i) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|) - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'_i, t). \quad (24.3) \end{aligned}$$

Подставляя функцию (24.3) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'_k} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'_k} = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, \dots, N),$$

получим уравнения движения системы N частиц в переменных неинерциальной системы S' :

$$\begin{aligned} m_k \ddot{\mathbf{r}}'_k = -m_k \ddot{\mathbf{R}}(t) - 2m_k (\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}'_k) - \\ - m_k (\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k)) - m_k (\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}'_k) - \\ - \sum_{i,k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k|)}{\partial \mathbf{r}'_k} - \frac{\partial U_k(\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'_k; t)}{\partial \mathbf{r}'_k} + \mathbf{F}_k. \quad (24.4) \end{aligned}$$

Здесь через \mathbf{F}_k обозначены силы, не представимые в виде градиентов потенциальных энергий; индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, N$.

Поскольку динамика той же системы частиц в инерциальной системе отсчета представлена уравнениями движения (22.5):

$$\begin{aligned} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \sum_{i=1}^{N'} U_{ki}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|) - \frac{\partial U_k(\mathbf{r}_k, t)}{\partial \mathbf{r}_k} + \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, t) \\ (k = 1, \dots, N), \end{aligned}$$

то уравнение (24.4) можно получить и непосредственно из (22.5) путем подстановки в них формул преобразования координат и скоростей (24.1), (24.2). Преобразование ускорений легко устанавливается путем дифференцирования по времени формул для скоростей (24.2) с учетом правила дифференцирования векторов, заданных своими компонентами в системе S' (12.30):

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \dots).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_k = \ddot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\mathbf{v}}'_k + 2(\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}'_k) + \\ + (\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k)) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}'_k) \quad (24.5) \end{aligned}$$

и уравнения движения (22.5) принимают форму (24.4).

Функция Лагранжа (24.3) может не содержать явной зависимости от времени. Если, кроме того, $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \mathbf{v}'_k = 0$, то в инерциальной системе отсчета сохраняется обобщенная энергия системы N частиц:

$$E = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'_k} \mathbf{v}'_k - L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{v}'_k)^2 + \mathbf{R} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} U_{ij} (|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k|) - \sum_{k=1}^N U_k(\mathbf{r}'_k) = \text{const.} \quad (24.6)$$

При этом ускорение начала координат \mathbf{R} системы S' и угловая скорость вращения координатных осей $\boldsymbol{\omega}$ не должны зависеть от времени, а U_k не должны зависеть от времени явно.

§ 25. Задача трех тел

Функция Лагранжа системы трех частиц (22.2), или (22.3) при $N = 3$, $U_i = 0$, содержит энергию их взаимодействия $U_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|)$, явный вид которой определяется характером взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий следует положить

$$U_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

и мы приходим к задаче трех тел. Каждое «тело» в этой задаче должно иметь сферически-симметричное распределение вещества. На малых расстояниях между телами это условие может не выполняться.

Уравнения движения системы трех тел с ньютоновским потенциалом взаимодействия представляют собой систему девяти нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (25.1)$$

В момент времени, принятый в качестве начального, должны быть заданы также координаты и скорости всех частиц.

Интегралами движения являются: импульс системы

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_{(m)} \sum_{i=1}^3 m_i \equiv m \dot{\mathbf{r}}_{(m)} = \text{const}, \quad (25.2)$$

полная энергия системы

$$E = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{G}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \text{const}, \quad (25.3)$$

момент импульса системы трех тел

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \text{const}. \quad (25.4)$$

Семь постоянных \mathbf{p} , E , \mathbf{L} определяются начальными условиями. Общее решение задачи трех тел должно содержать восемнадцать постоянных, и в настоящее время не получено.

Начало координат инерциальной системы отсчета можно совместить с центром масс системы, поскольку $\dot{\mathbf{r}}_{(m)} = \text{const}$. Тогда

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i, \\ m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = -G \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|^3} (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (25.5)$$

$$\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i).$$

Векторы $(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{r}'_k)$ перпендикулярны плоскости, образованной радиусами-векторами \mathbf{r}'_i , \mathbf{r}'_k . Если скорости частиц также лежат в этих плоскостях, то $(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{r}'_k) \mathbf{v}'_k = 0$ и все частицы движутся в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{L} , так что $\mathbf{L} \mathbf{r}'_i = 0$. Взаимное расположение частиц в плоскости движения изменяется с течением времени. Предположим, что существует конфигурация трех тел, при которой они все время будут находиться на одинаковых расстояниях друг от друга, и покажем, что такая конфигурация является решением задачи трех тел. Если такое движение допустимо, то $|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k|$ не зависит от номеров частиц и можно положить

$$|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k| \equiv a(t). \quad (25.6)$$

Расстояние между частицами a можно выразить через расстояние от любой из них до центра масс. Действительно, добавляя

и вычитая к сумме $\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}'_i$, равной нулю по определению центра масс, слагаемое $(m_2 + m_3) \mathbf{r}'_1$, будем иметь

$$m \mathbf{r}'_1 = m_2 (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) + m_3 (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3). \quad (25.7)$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства и учитывая, что угол между векторами $(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$ и $(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3)$ равен $\pi/3$, получим

$$m^2 (\mathbf{r}'_1)^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) a^2. \quad (25.8)$$

Еще две формулы получаются отсюда заменами индексов $1 \rightleftharpoons 2$, $1 \rightleftharpoons 3$, так что

$$\left(\frac{a}{m}\right)^2 = \frac{(\mathbf{r}'_1)^2}{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)} = \frac{(\mathbf{r}'_2)^2}{(m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)} = \frac{(\mathbf{r}'_3)^2}{(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)}. \quad (25.9)$$

В рамках этих ограничений на конфигурацию частиц уравнения движения системы сводятся к более простым уравнениям:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = -G \sum_{j=1}^{3'} \frac{m_i m_j}{a^3} (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = -G \frac{m_i}{a^3} \left(\mathbf{r}'_i \sum_{j=1}^{3'} m_j - \sum_{j=1}^{3'} m_j \mathbf{r}'_j \right) = -G \frac{m m_i}{a^3} \mathbf{r}'_i, \quad (25.10)$$

или

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = -G \frac{m_1 (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{m^2} \frac{\mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r}'_1|^3}, \quad (25.11)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = -G \frac{m_2 (m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)^{3/2}}{m^2} \frac{\mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r}'_2|^3}, \quad (25.12)$$

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}}'_3 = -G \frac{m_3 (m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{3/2}}{m^2} \frac{\mathbf{r}'_3}{|\mathbf{r}'_3|^3}. \quad (25.13)$$

Каждое из этих уравнений представляет собой уравнение движения частицы в центральном поле. Задача интегрирования уравнений движения трех тел, движущихся так, что расстояния между ними остаются одинаковыми (задача Лагранжа), сводится, таким образом, к задаче интегрирования уравнений движения частицы в гравитационном поле с известной эффективной

массой. Общее решение этой задачи известно и представлено выше. В частности, траекторией каждой частицы может быть окружность. Тогда $a = \text{const}$. Для определения угловой скорости вращения конфигурации в этом случае удобно перейти в неинерциальную систему отсчета S' с началом координат в центре масс. Уравнения движения системы частиц с энергией взаимодействия U_{ij} , представленные в общем виде формулами (24.4), для трех частиц с гравитационным взаимодействием сводятся к уравнениям

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}'_k = -2m_k (\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}'_k) - m_k (\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k)) - m_k (\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}'_k) - G \frac{m m_k}{a^3} \mathbf{r}'_k. \quad (25.14)$$

Угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ системы S' можно выбрать постоянной и такой, что в S' все частицы будут неподвижными. В этом случае уравнения движения приводят к равенствам центробежных сил и сил притяжения

$$m_k (\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}'_k - \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_k)) = G \frac{m m_k}{a^3} \mathbf{r}'_k. \quad (25.15)$$

Следовательно, $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_k) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}^2 = Gm/a^3$; с такой угловой скоростью вращается система трех тел, находящихся на неизменных одинаковых расстояниях друг от друга.

§ 26. Движение относительно Земли

1. Общее решение уравнений движения вблизи поверхности Земли. Наиболее удобной для решения практических динамических задач вблизи поверхности Земли является система координат с началом на некоторой точке поверхности Земли, на широте λ , и вертикальным направлением (по отвесу) одной из координатных осей, например, оси z . В таких координатах, как правило, формируются и задаются начальные состояния движения и проводится анализ результатов вычислений.

Гравитационное поле Земли \mathbf{G} в малой области околоземного пространства можно считать однородным и направленным к центру Земли. Неинерциальная система отсчета в этом случае задается угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вращения Земли, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, и центробежным ускорением начала координат $R\boldsymbol{\omega}^2 \cos \lambda \mathbf{n}_c$, перпендикулярным $\boldsymbol{\omega}$ ($\mathbf{n}_c \boldsymbol{\omega} = 0$, $|\mathbf{n}_c| = 1$). На интервалах времени движения, малых по сравнению с земными сутками $2\pi/\omega$, можно пренебречь силой притяжения к Солнцу движущихся у поверхности Земли тел вместе с центробежной силой при орбитальном дви-

жении, а также центробежной силой $m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))$. Вблизи поверхности Земли уравнения движения (24.4) принимают вид (штрихи у переменных опущены)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + m\mathbf{G} + mR\omega^2 \cos \lambda \mathbf{n}_c - 2m(\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (26.1)$$

Сила $m\mathbf{G} + mR\omega^2 \cos \lambda \mathbf{n}_c \equiv mg$ равна по абсолютной величине весу тела $mg = m(G^2 \sin^2 \lambda + (G - R\omega^2)^2 \cos^2 \lambda)^{1/2}$ и направлена под углом φ к плоскости экватора (рис. 21):

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \lambda / (1 - R\omega^2/G).$$

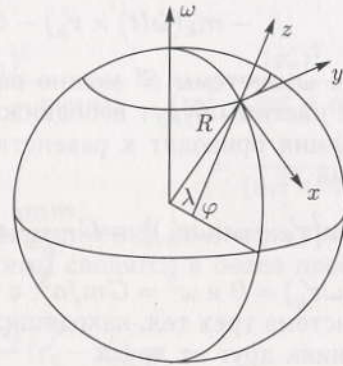


Рис. 21. Система координат, связанная с Землей; λ — широта местности, φ — угол наклона вертикали к плоскости экватора

Выберем в качестве направлений осей x и y направления на юг и на восток соответственно. Тогда угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения Земли и уравнения движения (26.1) в отсутствие других сил ($\mathbf{F} = 0$) можно представить в компонентах

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi):$$

$$\ddot{x} = \dot{y} \omega \sin \varphi, \quad (26.2)$$

$$\dot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad (26.3)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \varphi. \quad (26.4)$$

Введем новые переменные при помощи операции поворота в плоскости xz на угол φ :

$$x' = x \sin \varphi + z \cos \varphi,$$

$$z' = -x \cos \varphi + z \sin \varphi,$$

$$y' = y.$$

В новых переменных уравнения движения принимают вид

$$\ddot{x}' = -g \cos \varphi + 2\omega \dot{y}', \quad (26.5)$$

$$\dot{y}' = -2\omega x', \quad (26.6)$$

$$\ddot{z}' = -g \sin \varphi \quad (26.7)$$

и легко интегрируются (например, путем перехода к комплексной переменной $x' + iy'$). В результате получим

$$x' = \dot{x}'(0) \cos 2\omega t + \left(\dot{y}'(0) - \frac{g}{2\omega} \cos \varphi \right) \sin 2\omega t, \quad (26.8)$$

$$\dot{y}' = \frac{g}{2\omega} \cos \varphi - \dot{x}'(0) \sin 2\omega t + \left(\dot{y}'(0) - \frac{g}{2\omega} \cos \varphi \right) \cos 2\omega t, \quad (26.9)$$

$$z' = -g \sin \varphi t + z'(0). \quad (26.10)$$

Компоненты начальной скорости тела связаны с новыми переменными соотношениями

$$\dot{x}(0) = \dot{x}'(0) \sin \varphi - \dot{z}'(0) \cos \varphi,$$

$$\dot{z}(0) = \dot{x}'(0) \cos \varphi + \dot{z}'(0) \sin \varphi.$$

Возвращаясь в (26.8), (26.9), (26.10) к прежним переменным без штриха и повторно интегрируя эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} x = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{gt^2}{4} \sin 2\varphi + \\ + \left(\dot{x}(0) \sin^2 \varphi + \frac{\dot{z}(0)}{2} \sin 2\varphi \right) \left(\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - t \right) + \\ + \left(\dot{y}(0) - \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \right) \sin \varphi \frac{\sin^2 \omega t}{\omega}, \quad (26.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = y(0) + \frac{gt \cos \varphi}{2\omega} + \left(\dot{y}(0) - \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \right) \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - \\ - (\dot{x}(0) \sin \varphi + \dot{z}(0) \cos \varphi) \frac{\sin^2 \omega t}{\omega}, \quad (26.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{gt^2}{2} \sin^2 \varphi + \\ + \left(\dot{z}(0) \cos^2 \varphi + \frac{\dot{x}(0)}{2} \sin 2\varphi \right) \left(\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - t \right) + \\ + \left(\dot{y}(0) - \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \right) \cos \varphi \frac{\sin^2 \omega t}{\omega}. \quad (26.13) \end{aligned}$$

Аргументы ωt тригонометрических функций здесь должны быть малыми по сравнению с единицей. Поэтому каждую из таких функций приближенно можно заменить конечным числом членов ряда по степеням ωt . Тогда

$$x = x(0) + \dot{x}(0)t + \dot{y}(0)\omega \sin \varphi t^2, \quad (26.14)$$

$$y = y(0) + \dot{y}(0)t - (\dot{x}(0) \sin \varphi + \dot{z}(0) \cos \varphi)\omega t^2 + \frac{1}{3}g \cos \varphi \omega t^3, \quad (26.15)$$

$$z = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{gt^2}{2} + \dot{y}(0) \cos \varphi \omega t^2. \quad (26.16)$$

Формулами (26.14), (26.15), (26.16) определяется закон движения тела с начальным состоянием $(x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ вблизи поверхности Земли. В частности, для тела, падающего с высоты h без начальной скорости, $z(0) = h$, $x(0) = y(0) = 0$, время падения определяется формулой (26.16) и равно $\sqrt{2h/g}$. Из уравнения (26.15) видно, что такое тело при свободном падении отклоняется от вертикали на восток и это отклонение оказывается равным $h\omega\sqrt{8h/9g} \cos \varphi$.

2. Маятник Фуко (линейные колебания). Функция Лагранжа для свободного движения тела вблизи поверхности Земли имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - m\mathbf{g}\mathbf{r} + m\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r})^2. \quad (26.17)$$

Подстановка (26.17) в уравнение Лагранжа дает уравнения движения (26.2), (26.3), (26.4), общее решение которых получено выше. Однако для тела, подвешенного на легкой нити длиной l в точке $(0, 0, l)$ на широте λ так, что тело может совершить колебания в любом направлении (маятник Фуко), одна из координат, например $z(t)$, является известной функцией двух других координат, поскольку траектория тела лежит на сферической поверхности:

$$x^2(t) + y^2(t) + (z(t) - l)^2 = l^2. \quad (26.18)$$

Поэтому в выражении для функции Лагранжа (26.17)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \omega_x(y\dot{z} - z\dot{y}) + \omega_z(x\dot{y} - y\dot{x}) - mgz \quad (26.19)$$

z и \dot{z} равны

$$z = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right) \quad (z \leq l), \quad (26.20)$$

$$\dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{l\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}}}. \quad (26.21)$$

Подставляя функцию (26.17) с учетом (26.20), (26.21) в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

и распространяя дифференцирование по x , \dot{x} , y , \dot{y} также и на z , \dot{z} , приходим к двум нелинейным уравнениям движения маятника Фуко в нижней полусфере. Движению в верхней половине сферы соответствуют противоположные знаки перед знаками корня в (26.20), (26.21).

В приближении линейных колебаний отклонения маятника x , y от положения равновесия малы по сравнению с длиной l . Малыми являются также компоненты скорости \dot{x} , \dot{y} , так что функцию Лагранжа можно заменить ее разложением в ряд по степеням x , \dot{x} , y , \dot{y} с точностью до квадратов. В этом приближении

$$z \cong \frac{x^2 + y^2}{2l}, \quad \dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{l} \quad (26.22)$$

и, следовательно, слагаемое $\omega_x(y\dot{z} - z\dot{y})$ имеет третий порядок, а $m\dot{z}^2/2$ — четвертый порядок малости. Эти слагаемые могут быть опущены в (26.19). Таким образом, функция Лагранжа маятника Фуко в приближении линейных колебаний может быть представлена в виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega_z(xy\dot{y} - y\dot{x}) - m(g/l)\frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (26.23)$$

В этом приближении уравнения Лагранжа приводят к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2j\omega \sin \varphi, \quad (26.24)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\dot{x}\omega \sin \varphi, \quad (26.25)$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Умножая уравнение (26.25) на мнимую единицу и складывая с уравнением (26.24), получим для комплексной переменной $\xi = x + iy$ уравнение

$$\ddot{\xi} + 2i\omega \sin \varphi \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (26.26)$$

Два линейно независимых решения вида $\xi = A \exp(-i\gamma t)$ этого уравнения существуют для двух значений γ :

$$\gamma_{1,2} = -\omega \sin \varphi \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + \omega_0^2}. \quad (26.27)$$

Квадрат угловой скорости суточного вращения Земли ω^2 значительно меньше квадрата частоты ω_0^2 колебаний маятника Фуко, так что

$$\gamma_{1,2} \cong -\omega \sin \varphi \pm \omega_0. \quad (26.28)$$

Общее решение уравнения (26.26), содержащее две произвольные постоянные, является суперпозицией линейно независимых решений:

$$\xi = e^{-i\omega \sin \varphi t} (A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}). \quad (26.29)$$

Общее решение системы уравнений (26.24), (26.25) дается вещественной и мнимой частями ξ ,

$$x(t) = \operatorname{Re} \xi, \quad y(t) = \operatorname{Im} \xi. \quad (26.30)$$

На экваторе $\varphi = 0$, и формулами (26.29), (26.30) представлено движение вдоль эллиптической траектории в горизонтальной плоскости. В Северном полушарии вращение Земли приводит к вращению эллиптической траектории с угловой скоростью $-\omega \sin \varphi$ по часовой стрелке. В Южном полушарии Земли вращение происходит против часовой стрелки.

§ 27. Принцип относительности

В фиксированной инерциальной системе отсчета S уравнения движения системы частиц

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \sum_{i=1}^{N'} U_{ki}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|) \quad (i, k = 1, \dots, N, \quad i \neq k) \quad (27.1)$$

содержат взаимодействия в качестве единственного физического механизма изменения импульсов частиц. Перейдем в другую инерциальную систему отсчета S' . Для точечных частиц такой переход сводится к преобразованиям Галилея

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_k + \mathbf{v}_0 t. \quad (27.2)$$

Ускорения всех частиц при такой замене переменных останутся неизменными численно. Следовательно, и правые части уравнений (27.1), т.е. силы взаимодействия между частицами, должны быть численно одними и теми же во всех инерциаль-

ных системах отсчета. Если в качестве компонент векторов сил выбраны динамические функции, удовлетворяющие этому требованию (в (27.1) — функции разностей координат частиц), то уравнения движения частиц в нерелятивистской механике будут инвариантными относительно преобразований Галилея.

Выше мы показали, что уравнения Лагранжа ковариантны, т.е. сохраняют свою форму относительно преобразований криволинейных координат. Этот факт сам по себе не налагает дополнительных ограничений на вид динамических функций. Однако если функция Лагранжа инвариантна относительно преобразований Галилея (с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени), то ускорения и силы будут численно одними и теми же во всех инерциальных системах отсчета. Действительно, в этом случае

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = L'(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_N, t)$$

и вследствие линейности преобразований Галилея выполняются равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'_i},$$

обеспечивающие инвариантность уравнений Лагранжа. В частности, инвариантной (с указанной точностью) является функция Лагранжа, приводящая к уравнениям (27.1). В этом случае

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N'} U_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_0 \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_0^2}{2} = \\ &= L(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_N, t) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_0 \mathbf{r}'_i + v_0^2 t / 2), \end{aligned}$$

причем последнее слагаемое можно опустить вследствие неоднозначности функции Лагранжа.

Преобразования Галилея относятся ко всему физическому пространству. Поэтому инвариантными могут быть только уравнения в физически полной форме, в них должны быть явно отражены физические условия, определяющие состояния движения частиц. Например, уравнение движения гармонического осциллятора в виде $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, уравнения движения частицы в центральном поле в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = -\partial U(r)/\partial \mathbf{r}$ не являются гали-

лей-инвариантными в отличие от физически полных уравнений $\ddot{x} + \omega^2(x - x_0) = 0$, $m\ddot{\mathbf{r}} = -\partial U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)/\partial \mathbf{r}$.

Уравнения движения точечной частицы $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ в релятивистской механике введены выше на основании тех же физических законов, что и уравнения нерелятивистской механики, с той лишь разницей, что мы дополнительно постулировали факт релятивистской зависимости импульса частицы от скорости в виде

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}. \quad (27.3)$$

Однако такие уравнения не являются галилей-инвариантными, так что, сохраняя далее формулу (27.3), следует отказаться от преобразований Галилея.

Так как $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ и в отсутствие взаимодействий

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad (27.4)$$

вместо (27.3) можно постулировать (27.4) или бесконечно малый элемент действия $L dt$ в виде

$$L dt = -mc\sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2}. \quad (27.5)$$

Потребуем, чтобы элемент действия $L dt$ был одним и тем же во всех инерциальных системах отсчета, связанных линейным преобразованием координат и времени. Тогда

$$c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2 = \dots \equiv ds^2, \quad (27.6)$$

или

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'} = \dots, \quad (27.7)$$

где введены обозначения $i, k = 0, 1, 2, 3$, $dx^i = (dx^0, d\mathbf{r}) = (cdt, d\mathbf{r})$,

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g_{i'k'}) = \dots \quad (27.8)$$

Если преобразование

$$x^{i'} = f^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

существует, то для бесконечно близких точек оно должно иметь вид

$$dx^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} dx^i \equiv a_i^{i'} dx^i, \quad (27.9)$$

причем в однородном пространстве-времени $a_i^{i'}$ не зависят от координат и времени.

Подставим (27.9) в (27.7). Получим

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} a_i^{i'} a_k^{k'} dx^i dx^k.$$

Отсюда

$$g_{ik} = g_{i'k'} a_i^{i'} a_k^{k'}. \quad (27.10)$$

Формально эти выражения напоминают приведенные выше определения динамических функций, образующих тензоры второго ранга относительно группы вращений трехмерного пространства. Поэтому g_{ik} можно назвать также тензором (ковариантным 4-тензором), но относительно преобразований с матрицей $a_i^{i'}$. Компоненты этого метрического тензора одинаковы во всех инерциальных системах отсчета и определены в (27.8). Поэтому формулами (27.10) представлена система 10 алгебраических уравнений для матричных элементов $a_i^{i'}$.

Решение системы уравнений (27.10) можно упростить, если ограничиться преобразованиями, соответствующими относительному движению S и S' вдоль параллельных координатных осей x и x' при $dx^{2'} = dx^2$, $dx^{3'} = dx^3$.

Так как

$$dx^{2'} = a_i^{2'} dx^i, \quad dx^{3'} = a_i^{3'} dx^i,$$

в этом случае $a_i^{2'} = \delta_i^2$, $a_i^{3'} = \delta_i^3$ (δ_i^j — символ Кронекера), и уравнения (27.10) сводятся к уравнениям

$$g_{00} = 1 = g_{i'k'} a_0^{i'} a_0^{k'} = (a_0^{0'})^2 - (a_0^{1'})^2, \quad (27.11)$$

$$g_{01} = g_{10} = 0 = g_{i'k'} a_0^{i'} a_1^{k'} = a_0^{0'} a_1^{0'} - a_0^{1'} a_1^{1'}, \quad (27.12)$$

$$g_{11} = -1 = g_{i'k'} a_1^{i'} a_1^{k'} = (a_1^{0'})^2 - (a_1^{1'})^2. \quad (27.13)$$

Недостающее четвертое уравнение можно получить, рассматривая закон преобразования любой фиксированной точки на оси x' системы S' . Эта точка движется относительно S с постоянной скоростью V системы S' , так что $dx^1 = V dt = (V/c) dx^0$. В системе S' фиксированная точка неподвижна, $dx^{1'} = 0$. Но

$$dx^{1'} = a_i^{1'} dx^i = a_0^{1'} dx^0 + a_1^{1'} dx^1.$$

Следовательно,

$$a_0^{1'} + a_1^{1'} \frac{V}{c} = 0. \quad (27.14)$$

Решение системы уравнений (27.11)–(27.14) удобно представить в виде матрицы

$$(a_i^{i'}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-V^2/c^2} & -V/c\sqrt{1-V^2/c^2} & 0 & 0 \\ -V/c\sqrt{1-V^2/c^2} & 1/\sqrt{1-V^2/c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27.15)$$

Преобразования (27.9) $dx^{i'} = a_i^{i'} dx^i$ с матрицей (27.15) есть преобразования Лоренца. Их можно проинтегрировать. При условии, что в начальный момент времени начала координат систем S и S' совпадают, получим

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (27.16)$$

Формулы обратного преобразования получаются из (27.16) заменой $V \rightarrow -V$.

Таким образом, преобразования Лоренца есть преобразования, относительно которых инвариантным является интервал ds между бесконечно близкими событиями в четырехмерном пространстве-времени. Формулы (27.16) представляют собой количественное выражение принципа относительности в релятивистской механике (вместо преобразований Галилея (27.2) в нерелятивистской теории). Чтобы выяснить трансформационные свойства уравнений движения релятивистской механики относительно преобразований Лоренца, представим импульс и энергию частицы в виде

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc \frac{dx^0}{ds}, \quad (27.17)$$

или в четырехмерных обозначениях

$$p^i = mc \frac{dx^i}{ds}, \quad p^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (27.18)$$

Преобразования Лоренца для дифференциалов координат и времени $dx^{i'} = a_i^{i'} dx^i$ по форме подобны формулам $dx^\alpha = b_\beta^\alpha dx^\beta$, которые в §2 приняты в качестве определений векторов относительно преобразований поворота трехмерного пространства. Поэтому dx^i могут быть определены как компоненты

вектора (контравариантного 4-вектора) относительно преобразований Лоренца. «Квадрат» 4-вектора импульса p^i равен

$$g_{ik} p^i p^k = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \quad (27.19)$$

и является инвариантом.

Уравнение движения частицы

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{F} \quad (27.20)$$

и его следствие

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{F}\mathbf{v} \quad (27.21)$$

можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\mathbf{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dE}{ds} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (27.22)$$

или

$$\frac{dp^i}{ds} = mc \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \left(\frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{1}{mc^2} (\mathbf{F}\mathbf{p}, p^0 F). \quad (27.23)$$

Левая часть (27.23) при переходе от S к S' преобразуется как 4-вектор. Поэтому и сила \mathbf{F} должна быть такой, чтобы $\mathbf{F}\mathbf{p}$ и $\mathbf{F}\mathbf{p}^0$ преобразовывались как единый физический объект — контравариантный 4-вектор. При этом условии уравнения движения (27.23) будут сохранять свою форму во всех инерциальных системах отсчета, если они связаны преобразованиями Лоренца. Численные значения и левой, и правой частей уравнений (27.23) в разных системах отсчета различны; уравнения движения релятивистской механики ковариантны относительно преобразований Лоренца.

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле могут быть получены на основании функции Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Следовательно,

$$L dt = -mc ds - \frac{e}{c} \varphi dx^0 + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r}.$$

Этот элемент действия, содержащий, в отличие от (27.5), информацию о взаимодействии частицы с полем, будет инвариантным, если потребовать дополнительно, чтобы потенциалы электромагнитного поля φ и \mathbf{A} были компонентами 4-вектора. Уравнения движения при этом будут ковариантными относительно преобразований Лоренца.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ, ОГРАНИЧЕННОЕ СВЯЗЯМИ

§ 28. Уравнения движения систем при наличии связей

Взаимодействие между макросистемами, состоящими из большого числа частиц в связанных состояниях, или между отдельными частицами и макросистемами сводится к взаимодействию отдельных частиц. Общий метод вычисления такого рода сил на основе полной картины взаимодействий между различными атомами и молекулами как динамическими системами в настоящее время отсутствует по причине неполноты сведений о взаимодействии и динамике систем. Кроме того, вычисление сил на основе первых принципов потребовало бы значительно больших усилий, чем те, которые требуются для решения динамических задач с участием макроскопических систем на основе модельных представлений о взаимодействиях. Для таких систем можно определить макроскопические проявления сил, действующих на микромасштабах, общий результат их действия и заменить эти силы макроскопически эквивалентными.

Общий результат взаимодействия частиц с макросистемами состоит в появлении ограничений на движение частиц. Так, движение молекул газа в сосуде ограничено стенками сосуда. Молекулы, адсорбированные на поверхности жидкости, можно рассматривать как двумерный газ. Движение электронов проводимости в металлах при нормальных условиях ограничено поверхностью проводника. В сферическом маятнике движение материальной точки в однородном гравитационном поле ограничено нерастяжимой нитью или внутренней поверхностью жесткой сферы. Макросистемы, ограничивающие движение частиц, обычно могут быть представлены уравнениями линий, поверхностей или неравенствами. Во всех подобных задачах движение системы материальных точек можно рассматривать идеализированно как движение системы при наличии *связей* или ограничений на возможные положения и скорости материальных точек, а реальные взаимодействия с частицами, реализующими связи, заменить идеализированными предельными взаимодействиями —

реакциями связей, препятствующими проникновению частиц сквозь связь, и силами трения.

1. Уравнения Лагранжа с реакциями связей (1-го рода). Метод неопределенных множителей Лагранжа. При наличии связей координаты и скорости системы N материальных точек ограничены соотношениями

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (28.1)$$

Знак равенства в (28.1) соответствует *удерживающим* связям. В тех случаях, когда уравнения удерживающих связей можно проинтегрировать и свести их к ограничениям только на координаты материальных точек,

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (28.2)$$

связи называются *голономными*. Неголономные связи в виде условий отсутствия проскальзывания характерны для динамики твердых тел и рассмотрены ниже.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{R}}_i$ силу, действующую на частицу с номером i со стороны структурных элементов макросистем, а через \mathbf{F}_i — все другие силы, действующие на эту частицу. Тогда уравнения движения системы будут иметь вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \tilde{\mathbf{R}}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (28.3)$$

и должны рассматриваться совместно с уравнениями связей. Но $\tilde{\mathbf{R}}_i$ неизвестны, и при $k \leq 3N$ динамическая задача для системы N частиц недоопределена. Будем считать поэтому, что физические поверхности, ограничивающие движения тел, можно представить гладкими поверхностями, а сопротивление при движении вдоль реальных поверхностей считать результатом действия *сил трения*, определить эти силы экспериментально и отнести их в (28.3) к заданным силам \mathbf{F}_i . Остальную часть сил $\tilde{\mathbf{R}}_i$ составляют силы \mathbf{R}_i , препятствующие проникновению частиц через связи, или *реакции связей*. Центральная идея метода состоит в том, что теперь все \mathbf{R}_i можно считать перпендикулярными поверхностям, реализующим связи, и потому пропорциональными градиентам функций f_α . Неизвестными остаются только коэффициенты пропорциональности, т. е. k скалярных функций. Если сформулированы правила вычисления этих функций, система $3N$ уравнений движения и k уравнений связи будет замкнутой.

При перемещениях $\delta \mathbf{r}_i$ материальных точек по гладким поверхностям неизменной формы работа реакций связей \mathbf{R}_i должна быть равна нулю:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (28.4)$$

Формы поверхностей будут неизменными, если время t считать фиксированным. Тогда

$$\delta \mathbf{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) \equiv (\delta x_{i1}, \delta x_{i2}, \delta x_{i3})$$

представляют собой *виртуальные перемещения* или *вариации координат*. Связи, удовлетворяющие соотношению (28.4), называются *идеальными*.

Варьируя уравнения связей (28.2), получим

$$\delta f_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i \equiv \sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (28.5)$$

Умножим каждое из уравнений (28.5) на произвольную скалярную функцию λ_α (*неопределенный множитель Лагранжа*) и просуммируем результаты по α . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^N \delta \mathbf{r}_i \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha = 0. \quad (28.6)$$

Вычитая (28.6) из (28.4), находим

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{R}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \right) \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (28.7)$$

В этом уравнении содержится $3N$ вариаций координат $\delta x_{i\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3$), но независимых только $3N - k$, так как имеется k уравнений (28.5). Выберем k неопределенных множителей λ_α так, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях в (28.7) обратились в нуль (\mathbf{R}_i при этом следует считать известными). Тогда в сумме по всем частицам останутся только $3N - k$ слагаемых, каждое из которых будет содержать в качестве множителя одну из независимых вариаций $\delta x_{i\mu}$. Но теперь все коэффициенты при независимых вариациях также должны быть равны нулю, поскольку равна нулю их линейная комбинация. Следо-

вательно, реакции \mathbf{R}_i являются линейными формами градиентов функций f_α :

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha. \quad (28.8)$$

Уравнения движения системы N взаимодействующих материальных точек при наличии удерживающих голономных связей принимают вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha, \quad (28.9)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k)$$

и представляют собой систему $3N + k$ уравнений для $3N$ координат $\mathbf{r}_i(t)$ и k множителей λ_α при условии, что силы трения определены и заданы в составе сил \mathbf{F}_i независимо.

Уравнения (28.9) носят название *уравнений Лагранжа с реакциями связей*, или *уравнений Лагранжа первого рода*. Формула (28.8) для реакций связей получена выше при помощи *метода неопределенных множителей Лагранжа*. Единственность выбора множителей λ_α обеспечивается ненулевым значением определителя из коэффициентов при зависимых вариациях в (28.5), т. е. условием независимости уравнений связей (28.2).

2. Эволюция энергии системы тел при наличии связей.

Уравнения эволюции импульса, момента импульса и энергии системы частиц при наличии связей могут быть получены на основании определения этих динамических функций и уравнений Лагранжа с реакциями связей (28.9) путем простого повторения выкладок, необходимых для получения законов сохранения на основании уравнений Ньютона. Вместе с тем уравнения (28.9) содержат силы трения как необходимую часть взаимодействия системы с макросистемами, ограничивающими движение. Поэтому уравнения эволюции динамических величин будут зависеть также от определения сил трения. Чтобы продемонстрировать особенности эволюции энергии системы при наличии связей, будем считать, что, как и для свободной системы, сила \mathbf{F}_i равна

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_i^{(d)}$$

и представляет собой сумму сил взаимодействия с внешним полем, сил межчастичного взаимодействия и сил трения. Умножив уравнения (28.9) на скорость \mathbf{v}_i скалярно и просуммировав результат по i от 1 до N , получим уравнение эволюции полной энергии системы в виде

$$\dot{E} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{F}_i^{(d)} + \sum_{\alpha=1}^k \sum_{i=1}^N \lambda_{\alpha} \mathbf{v}_i \nabla_i f_{\alpha}, \quad (28.10)$$

где E — полная энергия системы,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 + \sum_{i=1}^N U_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (28.11)$$

Дифференцируя уравнения связей (28.2) по времени, найдем

$$\mathbf{v}_i \nabla_i f_{\alpha} = -\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\dot{E} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{F}_i^{(d)} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}. \quad (28.12)$$

Отсюда видно, что вклад в изменение со временем полной энергии дают нестационарные связи наряду с силами трения и нестационарным внешним полем.

Предположим, что в некоторой инерциальной системе отсчета система материальных точек находится во внешнем однородном гравитационном поле \mathbf{g} , связи являются стационарными (например, наклонная плоскость) и силами трения можно пренебречь. В такой системе отсчета энергия системы сохраняется, $E = \text{const}$. При тех же условиях в другой инерциальной системе, движущейся с постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном \mathbf{g} , уравнения поверхностей, вообще говоря, будут зависеть от времени, и $\dot{E} \neq 0$.

3. Принципы механической генерации электрического тока. Валентные электроны атомов, составляющих металл, могут перемещаться в объеме кристаллической решетки с небольшими потерями энергии и импульса. В приближении свободных электронов можно пренебречь их взаимодействием с ионными остовами кристаллической решетки, а также процессами рассеяния на других электронах проводимости вследствие низкой

частоты таких процессов. Вместе с тем движение электронов проводимости в проводнике ограничено поверхностью проводника. В рамках макроскопических представлений это означает, что движение электрона подчинено связям, возможно, нестационарным. Зависящие от времени связи могут служить составляющей механизма увеличения кинетической энергии электрона. Необходимое изменение направления импульса электрона при сохраняющейся кинетической энергии может быть результатом действия силы Лоренца в магнитном поле. Для демонстрации механической генерации электрического тока будем считать, что тонкий линейный проводник может перемещаться под действием внешних сил в однородном магнитном поле \mathbf{B} . Неизвестное взаимодействие электрона с поверхностью и структурными элементами проводника представим в виде суммы реакции связи \mathbf{R} , препятствующей выходу электрона из проводника через поверхность и, следовательно, направленной вдоль градиента уравнения поверхности внутрь проводника, а также эффективной диссипативной силы $\mathbf{F}^{(d)}$, отражающей остальную часть взаимодействия. Эффекты, обусловленные накоплением заряда, характерные для проводника конечных размеров, мы здесь не рассматриваем.

Уравнение движения электрона с электрическим зарядом $-e$ имеет вид

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{(d)}. \quad (28.13)$$

Общий вид уравнений голономных связей представлен равенствами

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (28.14)$$

Тогда $\mathbf{R} = \lambda_{\alpha} \text{grad } f_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$. Множители Лагранжа λ_{α} , определяющие величину неизвестной силы взаимодействия электрона с поверхностью, должны быть найдены из представленной системы уравнений вместе с законом движения частицы. Систему декартовых координат удобно выбрать так, что ось z будет совмещена с направлением магнитного поля, ось y — параллельно проводнику. Под действием внешних сил проводник может перемещаться в плоскости xy , так что движение электрона проводимости подчинено уравнениям связи:

$$f_1 = x - f(t) = 0, \quad (28.15)$$

$$f_2 = z = 0. \quad (28.16)$$

При таком выборе системы координат $\mathbf{B} = (0, 0, B)$,

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \text{grad } f_1(\mathbf{r}, t) + \lambda_2 \text{grad } f_2(\mathbf{r}, t) = \lambda_1 \cdot (1, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 0, 1).$$

В проводящей среде электрон испытывает сопротивление, которое на макроскопических масштабах можно приписать действию диссипативной силы, пропорциональной скорости: $\mathbf{F}^{(d)} = -\gamma(0, \dot{y}, 0)$. При этом малым потерям импульса в среде будут соответствовать малые значения коэффициента трения $\gamma \geq 0$. (Более реалистичные представления об электропроводности металлов содержатся, например, в книге Ч. Киттеля «Введение в физику твердого тела». М.: Наука, 1978. С. 269.)

Теперь уравнения движения (28.13) сводятся к уравнениям

$$\ddot{x} = -\frac{eB}{mc}\dot{y} + \frac{\lambda_1}{m}, \quad \ddot{y} = \frac{eB}{mc}\dot{x} - \frac{\gamma}{m}\dot{y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\lambda_2}{m}. \quad (28.17)$$

Макроскопические связи налагают следующие ограничения на движение частицы: $\ddot{z} = 0$, и, следовательно, $\lambda_2 = 0$, $\dot{x} = \dot{f}(t)$, $\ddot{x} = \ddot{f}(t)$, где $f(t)$ — заданный в (28.15) закон движения проводника. Для двух неизвестных функций $y(t)$, $\lambda_1(t)$ имеем два уравнения

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = \frac{eB}{mc}\dot{f}(t), \quad (28.18)$$

$$\frac{\lambda_1}{m} = \frac{eB}{mc}\dot{y} + \ddot{f}(t). \quad (28.19)$$

Уравнение (28.18) интегрируется непосредственно и дает значение скорости электрона в проводнике как функцию расстояния от начала координат $x = 0$, $y = 0$, где электрон находился в момент $t = 0$ и имел скорость \dot{y}_0 . Таким образом,

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + \omega_c f(t) - \frac{\gamma}{m}y. \quad (28.20)$$

Здесь $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота. Уравнение (28.19) определяет величину реакции поверхности проводника как функцию скорости \dot{y} электрона и времени.

Умножим уравнения движения на скорость частицы. Тогда в левой части уравнения получим производную по времени кинетической энергии $E_{(k)}$, а справа — работу в единицу времени силы взаимодействия со средой (реакции связи плюс диссипативной силы). Сила Лоренца непосредственно не дает вклада в изменение энергии. Поэтому

$$\frac{dE_{(k)}}{dt} = \lambda_1 \frac{\partial f(t)}{\partial t} - \gamma \dot{y}^2. \quad (28.21)$$

Однако зависимость от магнитного поля содержат выражения для λ_1 и \dot{y} . Подставляя λ_1 из (28.19) в (28.21), получим

$$\frac{dE_{(k)}}{dt} = \frac{m}{2} \frac{\partial \dot{f}^2}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{m\omega_c \dot{f}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{m\omega_c \dot{f}}{2} - \gamma \dot{y} \right)^2. \quad (28.22)$$

Закон движения электрона вдоль проводника можно найти из уравнения (28.20), если известен явный вид функции $f(t)$. Равномерному движению проводника в магнитном поле соответствует $f(t) = ut$. В этом случае уравнение (28.20) легко интегрируется, и мы находим

$$y = \frac{m}{\gamma} \left(\dot{y}_0 - \frac{euB}{\gamma c} \right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) + \frac{euB}{\gamma c} t. \quad (28.23)$$

Скорость электрона как функция времени получается дифференцированием (28.23), и мы можем представить уравнение для кинетической энергии в виде

$$\frac{dE_{(k)}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{m\omega_c u}{2} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{m\omega_c u}{2} - \gamma \dot{y} \right)^2, \quad (28.24)$$

где

$$\dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m\omega_c u}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right). \quad (28.25)$$

При всех $t > 0$ скорость $\dot{y} > 0$. Кинетическая энергия электрона будет возрастать со временем, $\dot{T} > 0$, если $m\omega_c u > \gamma \dot{y}$. При малых потерях энергии эти формулы упрощаются и в линейном по γ приближении приобретают вид

$$y = \dot{y}_0 t + \frac{1}{2} \left(\omega_c u - \frac{\gamma}{m} \dot{y}_0 \right) t^2, \quad (28.26)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + \left(\omega_c u - \frac{\gamma}{m} \dot{y}_0 \right) t - \gamma \frac{\omega_c u}{2m} t^2. \quad (28.27)$$

Пусть теперь тонкий проводник совершает гармонические колебания в однородном магнитном поле. В этом случае $f(t) = a \cos \Omega t$, и закон движения электрона определяется уравнением

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = -a\omega_c \Omega \sin \Omega t. \quad (28.28)$$

Решение этого неоднородного уравнения может быть получено, например, методом вариации постоянных. При тех же начальных условиях, что и выше, находим

$$y = \left(\dot{y}_0 - \frac{a\omega_c}{1 + \left(\frac{\gamma}{m\Omega}\right)^2} \right) \frac{m}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) - \frac{a\omega_c}{1 + \left(\frac{\gamma}{m\Omega}\right)^2} \left[\frac{\gamma}{m\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) - \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right]. \quad (28.29)$$

Обычно потери энергии в проводнике невелики, и можно использовать выражения для координаты и скорости электрона в линейном по γ приближении:

$$y = (\dot{y}_0 - a\omega_c) \left(1 - \frac{\gamma t}{2m} \right) + \frac{a\omega_c}{\Omega} \left[\sin \Omega t - \frac{\gamma}{m\Omega} (1 - \cos \Omega t) \right].$$

Этой формулой определяется закон движения электрона проводимости в слабо поглощающей среде. Движущаяся поверхность проводника действует на электрон с силой

$$\lambda_1 = m\omega_c \dot{y} - ma\Omega^2 \cos \Omega t. \quad (28.30)$$

С такой же силой действует каждый электрон на поверхность проводника. Нетрудно установить явную зависимость этой силы от времени. Для этого следует вычислить производную по времени от координаты $y(t)$ и подставить результат в выражение для λ_1 . В слабо поглощающей среде можно использовать менее громоздкое выражение для \dot{y} :

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - a\omega_c (1 - \cos \Omega t) - (\dot{y}_0 - a\omega_c) \frac{\gamma}{m} t - \gamma \frac{a\omega_c}{m\Omega} \sin \Omega t. \quad (28.31)$$

В среде без диссипации на каждый электрон проводимости действуют только сила Лоренца и реакция связи. Их действие приводит к гармоническим колебаниям ускорения электрона:

$$\ddot{y} = -a\Omega\omega_c \sin \Omega t. \quad (28.32)$$

Приведенные выше уравнения движения непригодны для демонстрации механизма генерации тока в переменном магнитном поле $\mathbf{B}(t)$, поскольку они не содержат индуцированного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Это поле должно вычисляться до решения динамической задачи, если известно $\mathbf{B}(t)$. Поэтому будем теперь считать проводник неподвижным, имеющим форму окружности, а магнитное поле однородным нестационарным и перпендикулярным плоскости окружности. Сопротивление проводника не учитываем.

Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ электромагнитного поля, связанный с заданным полем $\mathbf{B}(t)$ соотношением $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, можно

выбрать в виде $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$. Следовательно, индуцированное электрическое поле равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2c} (\dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{r}).$$

Уравнение движения электрона в переменном магнитном поле $\mathbf{B}(t)$ при наличии реакции связи \mathbf{R} и диссипативных сил $\mathbf{F}^{(d)}$ имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2c} (\dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{r}) - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{(d)}. \quad (28.33)$$

Это уравнение следует рассматривать совместно с уравнениями связей: $f_1 = z = 0$, $f_2 = \rho - \rho_0$, где ρ_0 — радиус окружности. Если пренебречь сопротивлением проводника, то постановку задачи можно свести к формулировке функции Лагранжа L . Выбрав в качестве обобщенной координаты угловую переменную φ полярной системы координат, будем иметь

$$L = \frac{m}{2} \rho_0^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{e}{2c} \rho_0^2 \dot{\varphi} B(t). \quad (28.34)$$

Координата φ является циклической. Поэтому сохраняется обобщенный импульс

$$m\rho_0^2 \dot{\varphi} + \frac{eB(t)}{2c} \rho_0^2 = \text{const}. \quad (28.35)$$

Полагая, что при $t = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(0)$, $B = B(0)$, отсюда находим угловую скорость электрона

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(0) - \frac{e}{2mc} (B(t) - B(0)). \quad (28.36)$$

В отсутствие других сил реакция связи имеет только радиальную составляющую, равную

$$R_\rho = -m\rho_0 \dot{\varphi} \left(\dot{\varphi} + \frac{eB(t)}{2mc} \right). \quad (28.37)$$

Подставляя сюда найденное выражение для $\dot{\varphi}$, находим реакцию связи как функцию времени:

$$R_\rho = -m\rho_0 \left[\left(\dot{\varphi}(0) + \frac{eB(0)}{2mc} \right)^2 - \left(\frac{eB(t)}{2mc} \right)^2 \right]. \quad (28.38)$$

С такой же по абсолютной величине силой движущийся заряд оказывает давление на окружность.

§ 29. Уравнения Лагранжа (2-го рода) в независимых координатах для систем со связями

Умножим уравнения движения с реакциями связей (28.9):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha},$$

на $\delta \mathbf{r}_i$ и просуммируем по i . Так как

$$\sum_{i=1}^N \delta \mathbf{r}_i \nabla_i f_{\alpha} = \delta f_{\alpha} = 0,$$

получаем уравнение Даламбера

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (29.1)$$

Информация о связях содержится в этом уравнении в виде силы трения и уравнений связей (28.2). Из k независимых уравнений связей $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ можно найти k координат в виде функций остальных независимых координат и времени:

$$x_{\sigma} = x_{\sigma}(x_{k+1}, \dots, x_{3N}, t) \quad (\sigma = 1, \dots, k), \quad (29.2)$$

так что конфигурационное пространство системы со связями имеет размерность, равную числу степеней свободы системы $s = 3N - k$. Вместо x_{k+1}, \dots, x_{3N} можно ввести бесчисленным числом способов новые переменные, обобщенные координаты q_1, \dots, q_s . Тогда и остальные k декартовых координат (29.2) будут выражены через q_1, \dots, q_s . Каждый новый набор обобщенных координат ограничим условием

$$\det(\partial x_{\sigma} / \partial q_{\alpha}) \neq 0 \quad (\alpha, \sigma = 1, \dots, s), \quad (29.3)$$

которое позволяет выразить обратно все q_{α} через x_{k+1}, \dots, x_{3N} . В результате будем иметь равенства

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t), \quad (29.4)$$

обращающие уравнения связей в тождества и представляющие собой параметрические уравнения s -мерного конфигурационного пространства системы со связями.

Преобразуем к новым переменным q_{α} уравнение Даламбера (29.1). В результате дифференцирования по времени и варьирования соотношений (29.4) будем иметь

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha}. \quad (29.5)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}}, \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{r}_i = 0. \quad (29.6)$$

Подставим $\delta \mathbf{r}_i$ из (29.5) в уравнение Даламбера. Учитывая, что все δq_{α} независимы, получаем s уравнений

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (29.7)$$

Левая часть (29.7) преобразуется при помощи формул (29.5), (29.6) так, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \mathbf{r}_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_{\alpha}}. \end{aligned} \quad (29.8)$$

Здесь $E_{(k)}$ — кинетическая энергия системы как функция обобщенных координат q_{α} , обобщенных скоростей \dot{q}_{α} и времени:

$$\begin{aligned} E_{(k)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (29.9)$$

Для стационарных связей, когда $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$, кинетическая энергия (29.9) является квадратичной формой обобщенных скоростей

$$\begin{aligned} E_{(k)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}, \\ a_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}} = a_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (29.10)$$

Правая часть (29.7) представляет собой обобщенную силу

$$Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (29.11)$$

Для потенциальных сил ($\mathbf{F}_i = -\partial U / \partial \mathbf{r}_i$)

$$Q_\alpha = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (29.12)$$

Обобщенно-потенциальные силы при наличии связей определяются формулой

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (29.13)$$

Формулы (29.7), (29.8), (29.12), (29.13) позволяют представить уравнения движения системы N материальных точек с k голономными связями ($s = 3N - k$ степенями свободы) в виде уравнений Лагранжа в независимых координатах

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{(d)} \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (29.14)$$

где $L = E_{(k)} - U$ — функция Лагранжа,

$$Q_\alpha^{(d)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(d)} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}.$$

— обобщенная диссипативная сила, учитывающая взаимодействие системы точечных объектов с макросистемами в виде трения.

При выводе уравнений Лагранжа (26) не использовался явный вид переменных q_α . Поэтому уравнения (26) будут иметь один и тот же вид для всех наборов обобщенных координат q_1, \dots, q_s ; уравнения Лагранжа ковариантны относительно преобразований обобщенных координат.

В системах со связями всегда имеют место диссипативные силы. На интервалах времени, значительно меньших времени полного торможения системы, силами трения можно пренебречь. В этом приближении компонента обобщенного импульса $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ является интегралом движения, если координата q_α циклическая ($\partial L / \partial q_\alpha = 0$).

Умножим (29.14) на \dot{q}_α и просуммируем результат по α ; получим уравнение эволюции обобщенной энергии системы с голономными связями

$$\dot{E} = -\partial L / \partial t + Q_\alpha^{(d)} \dot{q}_\alpha. \quad (29.15)$$

Следовательно, обобщенная энергия

$$E(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \dot{q}_\alpha p_\alpha - L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

сохраняется, если функция Лагранжа не зависит явно от времени и можно пренебречь диссипативными силами.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 30. Уравнения Лагранжа
и принцип наименьшего действия

Уравнения движения Ньютона представляют собой количественную формулировку основного дифференциального принципа, в соответствии с которым единственным физическим механизмом изменения импульса частицы во времени является ее взаимодействие с другими частицами и силовыми полями. Предположим, что функция Лагранжа системы с s степенями свободы и алгоритм ее построения могут быть приняты в качестве исходных динамических понятий, и покажем, что в основу механики может быть положен интегральный принцип.

Пусть

$$\delta q_\alpha = q'_\alpha(t) - q_\alpha(t) \quad (30.1)$$

— вариации формы функций $q_\alpha(t)$, или вариации обобщенных координат, равные их разности на некоторой воображаемой и действительной траектории. При варьировании аргументов функция Лагранжа изменяется на величину

$$\begin{aligned} \delta L &= L(q'(t), \dot{q}'(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) = \\ &= L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t), \end{aligned} \quad (30.2)$$

где через q, \dot{q} обозначены совокупности всех s обобщенных координат и скоростей. Для бесконечно малых $\delta q, \delta \dot{q}$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha. \quad (30.3)$$

Из (30.1) находим

$$\frac{d}{dt} \delta q_\alpha(t) = \dot{q}'_\alpha(t) - \dot{q}_\alpha(t) = \delta \dot{q}_\alpha(t) = \delta \frac{d}{dt} q_\alpha(t) \quad (30.4)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_\alpha = \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right). \end{aligned} \quad (30.5)$$

Комбинации производных функции Лагранжа, необходимые для уравнений Лагранжа, содержатся в первой скобке формулы (30.5). Остается избавиться от последнего слагаемого в (30.5), причем без каких-либо ограничений на функцию Лагранжа и, следовательно, на систему взаимодействующих частиц. Выберем с этой целью произвольно интервал времени (t_1, t_2) и проинтегрируем (30.5) по времени. Получим

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (30.6)$$

Из (30.6) видно, что вариации обобщенных координат следует подчинить дополнительному условию

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0. \quad (30.7)$$

Потребуем также равенства нулю вариации функционала действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (30.8)$$

на действительных траекториях. Тогда, поскольку все δq_α независимы и интервал интегрирования по времени произволен, из равенства $\delta S = 0$ следует равенство нулю каждого из s подинтегральных слагаемых, и мы получаем уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0. \quad (30.9)$$

(Левая часть (30.9) часто обозначается через $\delta L / \delta q_\alpha$ или $\delta S / \delta q_\alpha$ и называется *вариационной* или *функциональной производной*.)

Таким образом, в основу динамики систем могут быть положены правила построения функции Лагранжа в виде разности кинетической энергии и энергии взаимодействия в независимых обобщенных координатах, а также интегральный вариационный принцип, согласно которому система без диссипации движется на любом интервале (t_1, t_2) так, что ее функционал действия экстремален. Диссипативные силы, а следовательно, и взаимодействия макросистем ($s < 3N$) при их непосредственном контакте не могут быть учтены при помощи функции Лагранжа и должны быть заданы в уравнениях движения независимо.

§ 31. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени

1. Теорема Нётер. Общее утверждение о связи свойств симметрии физических систем и законов сохранения сформулировано и доказано Эмми Нётер в 1918 г. Теорема Нётер служит одним из основных инструментов получения сохраняющихся во времени динамических величин.

В приложении к механике теорема Нётер утверждает, что любой однопараметрической непрерывной группе преобразований координат и времени, при которых функционал действия остается неизменным, соответствует первый интеграл уравнений движения; n -параметрической группе соответствует n таких интегралов.

Для доказательства рассмотрим однопараметрическое семейство преобразований координат и времени вида

$$\begin{aligned} t' &= f(t, \sigma), \\ q'_\alpha(t') &= f_\alpha(q_1(t), \dots, q_s(t), \sigma) \\ (\alpha &= 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (31.1)$$

Здесь σ — параметр преобразования (сдвиг по времени, смещение начала координат, угол поворота координатных осей и т. п.), s — число степеней свободы. Преобразования (31.1) образуют непрерывную однопараметрическую группу, причем тождественному преобразованию

$$t' = t, \quad q'_\alpha(t') = q_\alpha(t)$$

соответствует $\sigma = 0$. Соответствующие бесконечно малые преобразования имеют вид

$$t' = t + \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \sigma \equiv t + \Delta t, \quad (31.2)$$

$$q'_\alpha(t') = q_\alpha(t) + \left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \sigma \equiv q_\alpha(t) + \Delta q_\alpha. \quad (31.3)$$

Величины Δt , Δq_α представляют собой *полные вариации*. По определению полная вариация функции есть разность между преобразованной функцией от преобразованных аргументов

и исходной функцией. В соответствии с этим определением полная вариация функционала действия равна

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{(t')} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') dt' - \\ &\quad - \int_{(t)} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \equiv \int_{(t')} L' dt' - \int_{(t)} L dt \end{aligned} \quad (31.4)$$

и может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{(t')} (L' - L) dt' + \int_{(t')} L dt' - \int_{(t)} L dt = \\ &= \int_{(t')} \Delta L dt' + \int_{(t')} L dt' - \int_{(t)} L dt. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Разность двух последних интегралов в (31.5) есть вариация действия за счет вариации интервала интегрирования.

Выразим ΔL через вариацию формы δL функции Лагранжа. По определению полных вариаций имеем с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(q(t) + \Delta q, \dot{q}(t) + \Delta \dot{q}, t + \Delta t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \Delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t. \end{aligned} \quad (31.6)$$

С той же точностью

$$\begin{aligned} \Delta q_\alpha &= q'_\alpha(t + \Delta t) - q_\alpha(t) = q'_\alpha(t) + \left. \frac{dq'_\alpha}{dt} \right|_{\Delta t=0} \Delta t - q_\alpha(t) = \\ &= \delta q_\alpha + \dot{q}_\alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Для полных вариаций и вариаций формы функций $\dot{q}_\alpha(t)$ имеем аналогичные соотношения

$$\Delta \dot{q}_\alpha = \delta + \ddot{q}_\alpha \Delta t. \quad (31.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \Delta t = \\ &= \delta L + \dot{L} \Delta t. \end{aligned} \quad (31.9)$$

Следовательно,

$$\Delta S = \int_{(t')} (\delta L + \dot{L}\Delta t) dt' + \int_{(t')} L dt' - \int_{(t)} L dt. \quad (31.10)$$

Перейдем в (31.10) к интегрированию по t . В соответствии с формулами бесконечно малых преобразований (31.2)

$$dt' = \left(1 + \frac{d}{dt}\Delta t\right) dt \quad (31.11)$$

и с точностью до бесконечно малых первого порядка находим

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{(t)} (\delta L + \dot{L}\Delta t) dt + \int_{(t)} \left[\left(1 + \frac{d}{dt}\Delta t\right) L - L \right] dt = \\ &= \int_{(t)} \left(\delta L + \frac{d}{dt}(L\Delta t) \right) dt. \end{aligned} \quad (31.12)$$

Вариация формы (30.5) функции Лагранжа равна

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right),$$

причем для действительных траекторий отлично от нуля только второе слагаемое. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{(t)} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} (\Delta q_\alpha - \dot{q}_\alpha \Delta t) + L \Delta t \right] dt = \\ &= \int_{(t)} \frac{d}{dt} \left[\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Delta q_\alpha \right] dt. \end{aligned} \quad (31.13)$$

По условию теоремы действие инвариантно относительно преобразований группы (31.1), $\Delta S = 0$. Следовательно, сохраняется динамическая функция

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \text{const.} \quad (31.14)$$

Теорема Нётер доказана.

2. Однородность времени и сохранение энергии. Эволюция физических явлений не может зависеть от выбора начала отсчета времени, если время однородно. Функционал действия

механической системы также должен быть инвариантным относительно сдвигов начала отсчета времени. Преобразования (31.1) в этом случае имеют вид

$$t' = t + \sigma, \quad q'_\alpha(t') = q_\alpha(t).$$

Полагая в (31.14)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} = 0,$$

видим, что в соответствии с теоремой Нётер следствием однородности времени является закон сохранения обобщенной энергии

$$E(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \dot{q}_\alpha p_\alpha - L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \text{const.}$$

Так как для действительных движений

$$\dot{E} = \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

из инвариантности действия системы относительно сдвигов по времени следует также, что функция Лагранжа системы не может зависеть от времени явно.

3. Однородность пространства и сохранение импульса.

Физические процессы в некоторой области однородного пространства не могут зависеть от выбора такой области. Действие механической системы N взаимодействующих частиц в однородном пространстве не должно изменяться при сдвигах начала координат.

Пусть σ есть пространственный сдвиг в направлении координаты x . Тогда преобразования (31.1) будут иметь вид

$$t = t', \quad x'_i = x_i + \sigma, \quad y'_i = y_i, \quad z'_i = z_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

Следовательно, в (31.14) $\partial f / \partial \sigma = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial f_{xi}}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial f_{yi}}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial f_{zi}}{\partial \sigma} \right),$$

но

$$\frac{\partial f_{xi}}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial f_{yi}}{\partial \sigma} = \frac{\partial f_{zi}}{\partial \sigma} = 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^N p_{xi} = \text{const.}$$

Если пространство однородно не только в направлении оси x , но также и в направлениях y и z , то будут сохраняться все три компоненты полного импульса системы.

4. Изотропия пространства и сохранение момента импульса. В изотропном пространстве все направления физически эквивалентны, и функционал действия системы N взаимодействующих частиц не должен зависеть от ориентации координатных осей.

Бесконечно малому повороту на угол $\delta\varphi$ относительно оси z соответствует преобразование координат

$$\begin{aligned}x'_i &= x_i - \delta\varphi \cdot y_i, \\y'_i &= x_i \cdot \delta\varphi + y_i, \\z'_i &= z_i.\end{aligned}$$

В этом случае в (31.14) $\sigma = \delta\varphi$, $\partial f / \partial \sigma = 0$,

$$\frac{\partial f_{xi}}{\partial \sigma} = -y_i, \quad \frac{\partial f_{yi}}{\partial \sigma} = x_i, \quad \frac{\partial f_{zi}}{\partial \sigma} = 0,$$

и теорема Нётер приводит к закону сохранения проекции момента импульса системы L_z на ось z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} x_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} y_i \right) = \\&= \sum_{i=1}^N (p_{yi} x_i - p_{xi} y_i) = \sum_{i=1}^N L_{zi} = L_z = \text{const.}\end{aligned}$$

Для изотропного пространства выбор оси z произволен. Поэтому сохраняется вектор момента импульса системы

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \text{const.}$$

§ 32. Формулировка динамической задачи для твердого тела

Задача о движении системы N взаимодействующих частиц во внешних силовых полях сводится в классической постановке к решению системы $3N$ дифференциальных уравнений второго порядка, если взаимодействия частиц известны. Кроме того, в некоторый фиксированный момент времени, выбранный в качестве начального, должно быть задано состояние системы путем одновременного измерения координат и скоростей частиц. В такой формулировке динамическая задача практически неразрешима при больших N , если, например, в качестве системы рассматривается образец вещества в конденсированном состоянии, а в качестве частиц — отдельные атомы.

Упрощение динамической задачи может быть достигнуто в условиях, когда взаимодействия между частицами значительно превышают взаимодействия частиц с внешними полями, так что в течение всего времени движения частицы остаются в связанных состояниях. (Существование стабильных связей между частицами предполагает, что их полная энергия меньше полной энергии тех же частиц, удаленных друг от друга на бесконечные расстояния.) Движение системы в таких случаях не будет сопровождаться заметным изменением средних относительных расстояний между частицами, и число частиц в каждом макроскопическом элементе объема системы не будет зависеть от времени. Форма поверхности, ограничивающей систему, также должна оставаться неизменной. В таких условиях динамика системы частиц будет определяться только их относительным расположением и внешними силами. Конкретный вид потенциальных энергий взаимодействия частиц в связанных состояниях становится несущественным, и может быть неизвестным. Ради определенности можно считать, что энергия взаимодействия зависит только от расстояний между частицами,

$$U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, \dots, |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|, \dots, |\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N|,$$

и пренебречь изменением расстояний $|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)|$ с течением времени. Систему взаимодействующих частиц в таких условиях можно считать *твердым телом*.

Атомы и молекулы в кристаллах совершают колебания около положений равновесия или узлов кристаллической решетки, в которых энергия взаимодействия имеет минимум. При движении кристалла во внешнем поле взаимодействие между атомами, как правило, значительно превышает взаимодействие атома с внешними полями; амплитуды колебаний атомов значительно меньше расстояний между атомами ($1,54 \cdot 10^{-8}$ см для атомов углерода в алмазе), и можно не учитывать влияния колебательного движения на характер пространственных перемещений решетки. Колебания атомов в окрестности положений равновесия можно выделить в отдельную задачу. Кристаллическая решетка с неподвижными атомами в узлах представляет собой твердотельную модель кристалла.

Динамику отдельных молекул, до тех пор, пока расстояния между атомами можно считать неизменными, динамику звездных систем на временах, пока расстояния между звездами остаются неизменными, можно рассматривать как динамику твердых тел. Широкий класс задач динамики твердых тел возникает при конструировании, изучении и эксплуатации различных сооружений, машин, механизмов.

Так как пространственное распределение структурных элементов при модельном твердотельном представлении остается тем же, что и в начальный момент времени, оно должно быть задано на основании (или вместо) сведений о начальных положениях частиц. При этом число степеней свободы системы из N частиц, независимо от N , становится равным шести (три координаты начала системы S' , жестко связанной с твердым телом, и три параметра, определяющих ориентацию системы S' относительно инерциальной или неинерциальной системы S). Динамическая задача для системы из N частиц в представлении системы твердым телом получает более простую формулировку: найти состояние твердого тела (шесть обобщенных координат и их производных по времени) в момент времени t , если известно пространственное распределение частиц твердого тела и его состояние движения в момент $t_0 < t$, а также уравнения движения твердого тела.

Уравнения движения твердого тела могут быть получены как уравнения Лагранжа для системы частиц при наличии связей, фиксирующих расстояния между частицами. Для шести обобщенных координат свободного твердого тела мы будем иметь

шесть дифференциальных уравнений второго порядка. Другая возможность предоставляется уравнениями эволюции полного импульса и полного момента импульса системы частиц. После перехода в этих шести дифференциальных уравнениях к предельному твердотельному представлению, они также могут служить уравнениями движения твердого тела. Число степеней свободы твердого тела и число независимых уравнений движения будет меньше шести, если его движение ограничено макроскопическими связями.

§ 33. Пространственная ориентация твердого тела. Углы Эйлера

Шесть независимых обобщенных координат, определяющих вместе с их производными по времени состояние твердого тела, могут быть выбраны произвольно. Форма уравнений Лагранжа при замене обобщенных координат останется неизменной. Если с твердым телом жестко связана система координат S' , то обобщенными координатами могут служить три координаты начала S' , а параметрами, определяющими ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы S , — углы Эйлера. Углы Эйлера могут быть введены как углы трех последовательных поворотов твердого тела, при помощи которых достигается любая наперед заданная ориентация S' относительно S . Углы Эйлера обычно вводятся как углы трех поворотов, при помощи которых совмещаются координатные оси систем S и S' .

Пусть \mathbf{n}'_α — направляющие векторы координатных осей системы S' , определяющие ее ориентацию после произвольного поворота твердого тела. Чтобы получить эту ориентацию из начального положения, когда системы S и S' совпадали, повернем сначала систему S' вокруг оси z' , совпадающей с z , по правилу правого винта на угол φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, так, чтобы новое направление $0x_1$ (линия узлов) оси x' оказалось перпендикулярным заданному направлению \mathbf{n}'_3 оси z' системы S' (рис. 22). После

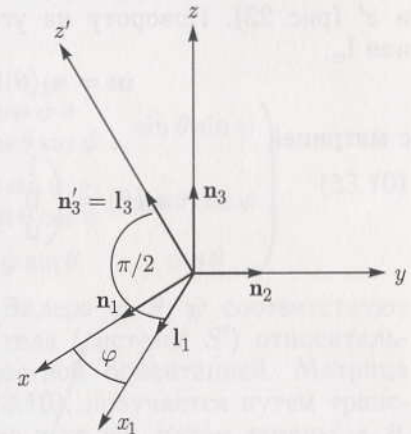


Рис. 22. Углы Эйлера: угол φ

такого поворота направляющие векторы \mathbf{n}'_α , жестко связанные с твердым телом, будут иметь новые направления \mathbf{l}_α относительно неподвижной системы, причем $\mathbf{l}_3 = \mathbf{n}_3$. Единичные векторы \mathbf{l}_α можно разложить по \mathbf{n}_α , и мы получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} \quad (33.1)$$

или

$$\mathbf{l}_\alpha = (a_1)_{\alpha\beta}(\varphi) \mathbf{n}_\beta. \quad (33.2)$$

В матричных обозначениях эта система равенств имеет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}_1(\varphi) \mathbf{n}. \quad (33.3)$$

Следующим параметром служит угол поворота твердого тела θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, вокруг \mathbf{l}_1 (линии узлов) до совмещения осей z и z' (рис. 23). Повороту на угол θ соответствует преобразование \mathbf{l}_α :

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_2(\theta) \mathbf{l} \quad (\mathbf{m}_1 = \mathbf{l}_1) \quad (33.4)$$

с матрицей

$$\mathbf{a}_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (33.5)$$

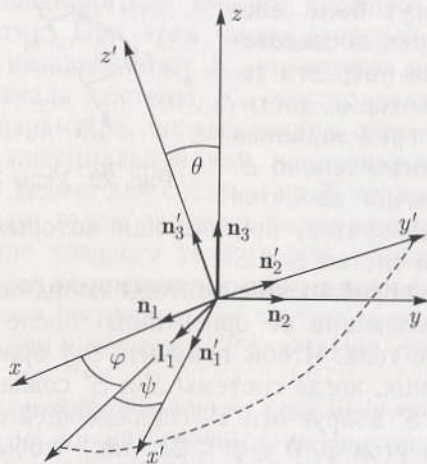


Рис. 23. Углы Эйлера φ , θ , ψ

Третий параметр, угол ψ , $0 \leq \psi \leq 2\pi$, вводится как угол поворота вокруг оси z' с направляющим вектором \mathbf{n}'_3 до совмещения остальных осей:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{a}_3(\psi) \mathbf{m} \quad (\mathbf{n}'_3 = \mathbf{m}_3), \quad (33.6)$$

$$\mathbf{a}_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33.7)$$

Из (33.6), (33.4), (33.3) находим

$$\mathbf{n}' = \mathbf{a}_3(\psi) \mathbf{a}_2(\theta) \mathbf{a}_1(\varphi) \mathbf{n}. \quad (33.8)$$

Следовательно, матрица \mathbf{a} произвольного поворота $\mathbf{n}' = \mathbf{a}(\psi, \theta, \varphi) \mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{a}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{a}_3(\psi) \mathbf{a}_2(\theta) \mathbf{a}_1(\varphi), \quad (33.9)$$

и для ее окончательного вычисления остается выполнить умножение матриц. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varphi, \theta, \psi) = & \\ = & \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (33.10) \end{aligned}$$

Различным значениям углов Эйлера φ , θ , ψ соответствуют различные ориентации твердого тела (системы S') относительно некоторой системы S с известной ориентацией. Матрица $\mathbf{a}^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$, обратная матрице (33.10), получается путем транспонирования (33.10) или, что одно и то же, путем замены φ , θ , ψ в (33.10) на углы $\pi - \varphi$, θ , $\pi - \psi$, соответствующие обратному повороту.

§ 34. Угловая скорость твердого тела

Единичные векторы \mathbf{n}'_α , жестко связанные с твердым телом, являются функциями времени и в любой момент времени могут быть представлены в виде разложений по неподвижным осям: $\mathbf{n}'_\alpha(t) = a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{n}_\beta$. Следовательно, $dn'_\alpha/dt = \dot{a}_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta = \dot{a}_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta} \mathbf{n}'_\sigma$. На этом основании угловая скорость произвольной неинерциальной системы отсчета S' определена выше форму-

лой $\omega_\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\dot{a}_{\mu\beta}a_{\nu\beta}$ в терминах девяти направляющих косинусов. Для вычисления компонент угловой скорости твердого тела как функций трех независимых обобщенных координат (углов Эйлера) и их производных по времени этот результат следует считать промежуточным — направляющие косинусы необходимо выразить через углы Эйлера. Однако каждый матричный элемент $a_{\alpha\beta}$ в (33.10) как раз и представляет собой направляющий косинус вектора \mathbf{n}'_α относительно \mathbf{n}_β , выраженный через углы Эйлера. Таким образом, остается формально вычислить производную по времени матрицы (33.10), результат свернуть с транспонированной матрицей и подставить в определение псевдовектора ω_γ , дуального антисимметричному тензору $\dot{a}_{\alpha\beta}a_{\sigma\beta}$. К такому же результату приводят более простые и поучительные вычисления, основанные на представлении об угловой скорости как о бесконечно малом повороте твердого тела за бесконечно малое время.

Бесконечно малым поворотам соответствуют бесконечно малые углы Эйлера. Поэтому с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$\mathbf{a}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{1} + \varepsilon, \quad (34.1)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица, ε — бесконечно малая матрица. Так как двум последовательным поворотам соответствует произведение матриц, имеем с той же точностью

$$(\mathbf{1} + \varepsilon)(\mathbf{1} + \varepsilon_1) = \mathbf{1} + \varepsilon + \varepsilon_1. \quad (34.2)$$

Следовательно, бесконечно малые повороты коммутативны. Полагая в (34.2) $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, получим справа единичную матрицу. Поэтому матрица \mathbf{a}^{-1} , обратная матрице (34.1), равна

$$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{1} - \varepsilon. \quad (34.3)$$

Для ортогональных матриц обратная матрица совпадает с транспонированной $\tilde{\mathbf{a}}$. Поэтому

$$\mathbf{1} - \varepsilon = \mathbf{1} + \tilde{\varepsilon}$$

и, следовательно, ε — антисимметричная матрица. Ее матричные элементы $\varepsilon_{\alpha\beta}$ связаны соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (34.4)$$

Для бесконечно малых поворотов все матрицы в (33.9) имеют вид (34.1) и, следовательно, произведение матриц в (33.9) сво-

дится к сумме соответствующих бесконечно малых матриц

$$\varepsilon = \varepsilon_1(\varphi) + \varepsilon_2(\theta) + \varepsilon_3(\psi) \quad (34.5)$$

(здесь φ, θ, ψ бесконечно малые). Каждая матрица в (34.5) является антисимметричной и ей можно поставить в соответствие вектор (псевдо) бесконечно малого поворота $d\Omega_\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\mu\beta}\varepsilon_{\mu\beta}$. В результате из (34.5) имеем соответственно

$$d\Omega = d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3. \quad (34.6)$$

Матрица $\varepsilon_1(\varphi)$ и псевдовектор $d\Omega_1$, как и исходная матрица $\mathbf{a}_1(\varphi)$, соответствует повороту твердого тела по часовой стрелке вокруг оси z . Поэтому направление вектора $d\Omega_1$ задано направлением \mathbf{n}_3 . Модуль этого вектора равен $d\varphi$. Направления векторов $d\Omega_2, d\Omega_3$ определяются векторами \mathbf{l}_1 и \mathbf{n}'_3 соответственно, а их модули равны $d\theta$ и $d\psi$. Учитывая это и разделив обе части (34.6) на бесконечно малый промежуток времени dt , в течение которого осуществляется поворот, получим для угловой скорости твердого тела выражение

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\varphi}\mathbf{n}_3 + \dot{\theta}\mathbf{l}_1 + \dot{\psi}\mathbf{n}'_3. \quad (34.7)$$

Задача свелась к разложению векторов $\mathbf{n}_3, \mathbf{l}_1, \mathbf{n}'_3$ по осям \mathbf{n}'_α системы координат S' , жестко связанной с твердым телом, или по осям \mathbf{n}_α выбранной системы координат S . Составляющие псевдовектора угловой скорости по осям системы S' равны (рис. 23):

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (34.8)$$

Составляющие угловой скорости твердого тела по осям выбранной системы координат S имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (34.9)$$

§ 35. Функция Лагранжа твердого тела

Функция Лагранжа системы N частиц в связанных состояниях, с энергией взаимодействия, зависящей только от расстояний

между частицами, имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, \dots, |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|, \dots, |\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N|) - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t). \quad (35.1)$$

В условиях, когда движение такой системы допустимо рассматривать как движение твердого тела, в (35.1) можно положить $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = (\text{const})_{ij}$. Но тогда энергия взаимодействия $U = \text{const}$, и ее можно опустить в выражении для функции Лагранжа. Относительные скорости частиц при наличии таких жестких связей равны нулю. Поэтому кинетическая энергия системы частиц будет зависеть только от скорости начала системы координат S' , которая может быть жестко связана с системой частиц, от угловой скорости твердого тела и от конфигурации системы.

Радиусы-векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}'_i одной и той же частицы с массой m_i в инерциальной системе отсчета S и в системе S' связаны соотношением

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'_i(t), \quad (35.2)$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор начала S' в S .

Дифференцируя это соотношение по времени в соответствии с правилом (12.30) дифференцирования векторов, заданных своими компонентами в S' :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \dots), \quad (35.3)$$

получим для любой частицы твердого тела

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0(t) + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_k). \quad (35.4)$$

На основании формул (35.1), (35.2), (35.4) для твердого тела получим

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_i]^2 - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i, t). \quad (35.5)$$

Радиус-вектор центра масс системы частиц по-прежнему определяется формулой

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i \equiv \mathbf{r}'_{(m)} m. \quad (35.6)$$

Однако теперь для вычисления $\mathbf{r}'_{(m)}$ не требуется знать законы движения всех частиц. В любой системе S' координаты центра масс могут быть вычислены по известному стационарному распределению частиц или определены экспериментально. При известном $\mathbf{r}'_{(m)}$ функцию Лагранжа (35.5) можно представить в виде

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + m \mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_{(m)}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (\mathbf{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \} \omega_\alpha \omega_\beta - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i, t). \quad (35.7)$$

Шесть числовых коэффициентов при компонентах угловой скорости

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \{ (\mathbf{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \} = I_{\beta\alpha} \quad (35.8)$$

образуют симметричный тензор 2-го ранга. Действительно, при поворотах системы координат S' произведения $x'_{i\alpha} x'_{i\beta}$ преобразуются как тензор, для символов Кронекера также справедлив тензорный закон преобразования $\delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\gamma} \delta_{\mu\gamma}$, совпадающий с условием ортогональности матриц $a_{\alpha\beta}$. Тензор $I_{\alpha\beta}$ носит название *тензора инерции твердого тела*.

Тензор инерции $I_{\alpha\beta}$ аддитивен, т. е. представляет собой в системе S' сумму по всем частицам выражений $m_i \{ (\mathbf{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \}$. Поэтому он может быть представлен в виде суммы тензоров отдельных подсистем частиц твердого тела в S' . Значения компонент $I_{\alpha\beta}$ тензора инерции определяются значениями масс частиц твердого тела, их относительным пространственным распределением, зависят от выбора начала системы координат S' , связанной с твердым телом, и ориентации координатных осей системы S' относительно твердого тела.

Образуем свертку тензора инерции и направляющего вектора l_α некоторой оси. Получим

$$I_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = \sum_{i=1}^N m_i \{(\mathbf{r}'_i)^2 - (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{l})^2\}.$$

Величина в фигурных скобках равна квадрату расстояния частицы с массой m_i до оси l . Следовательно, под знаком суммы стоит *момент инерции частицы* с массой m_i , а суммой произведений масс частиц на квадраты их расстояний до оси представлен *полный момент инерции твердого тела* относительно оси l . В частности, диагональные элементы тензора инерции I_{11} , I_{22} , I_{33} представляют собой моменты инерции твердого тела относительно осей Ox , Oy , Oz системы S' соответственно.

Существуют преимущественные системы S' , в которых функция Лагранжа твердого тела (35.7) имеет более простой вид. В частности, начало системы S' можно совместить с центром масс твердого тела. Тогда $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{(m)}$ и

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{(m)}^2 + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}^{(m)} \omega_\alpha \omega_\beta - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i, t). \quad (35.9)$$

Для постановки динамической задачи остается найти потенциальную энергию частиц твердого тела во внешнем поле $\sum_{i=1}^N U_i$ как функцию координат начала S' и углов Эйлера.

В гравитационном поле сферически-симметричного распределения вещества с центром в неподвижной точке \mathbf{R}_0 с координатами $X_{0\alpha}$ и массой M

$$\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) = -GM \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)} - \mathbf{r}'_i|}. \quad (35.10)$$

Обычно линейные размеры твердого тела малы по сравнению с расстоянием $|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|$ между центром поля и центром масс твердого тела. В таких случаях выражение под знаком суммы в правой части (35.10) можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться квадратичными по $x'_{i\alpha}$ слагаемыми. Тогда

$$\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) = -G \frac{Mm}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|} + \frac{1}{2} \frac{GM}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|^3} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i)^2 -$$

$$- \frac{3}{2} \frac{GM}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|^5} (X_{0\alpha} - x_{(m)\alpha})(X_{0\beta} - x_{(m)\beta}) \sum_{i=1}^N m_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta}. \quad (35.11)$$

Суммы по всем частицам твердого тела в (35.11) нетрудно выразить через компоненты тензора инерции. Суммой

$$2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i)^2 = I_{\alpha\alpha}^{(m)} \quad (35.12)$$

представлен след тензора инерции $I_{\alpha\alpha}^{(m)}$. Из определения тензора инерции также следует равенство

$$\sum_{i=1}^N m_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} = \frac{1}{2} I_{\mu\mu}^{(m)} \delta_{\alpha\beta} - I_{\alpha\beta}^{(m)}. \quad (35.13)$$

Поэтому потенциальная энергия твердого тела в центральном гравитационном поле может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) = -G \frac{Mm}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|} - \frac{1}{2} \frac{GM I_{\mu\mu}^{(m)}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|^3} + \frac{3}{2} \frac{GM I_{\alpha\beta}^{(m)}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{(m)}|^5} (X_{0\alpha} - x_{(m)\alpha})(X_{0\beta} - x_{(m)\beta}). \quad (35.14)$$

Это выражение не зависит от ориентации твердого тела только при $I_{\alpha\beta}^{(m)} = I \delta_{\alpha\beta}$; в (35.14) при этом остается лишь первое слагаемое.

Только от переменных центра масс зависит потенциальная энергия твердого тела в однородном гравитационном поле:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) &= - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i = \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) = -m \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{(m)}. \end{aligned} \quad (35.15)$$

Если твердое тело состоит из электрически заряженных частиц (молекула) и его линейные размеры значительно меньше неоднородностей внешнего электростатического поля $E_\sigma = -\partial\varphi/\partial x_\sigma$, то потенциальная энергия тела имеет вид

$$U = - \sum_{i=1}^N e_i \varphi(\mathbf{r}_{(m)} + \mathbf{r}'_i) = -\varphi(\mathbf{r}_{(m)}) \sum_{i=1}^N e_i + E_{\sigma}(\mathbf{r}_{(m)}) \sum_{i=1}^N e_i x'_{i\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{\sigma}(\mathbf{r}_{(m)})}{\partial x_{(m)\gamma}} \sum_{i=1}^N e_i x'_{i\sigma} x'_{i\gamma}. \quad (35.16)$$

Суммы в правой части (35.16) есть соответственно полный заряд тела, его дипольный и квадрупольный моменты. В общем случае это выражение зависит от всех шести обобщенных координат твердого тела. Только от угловых переменных зависит потенциальная энергия атома как твердого тела с собственным магнитным моментом μ во внешнем магнитном поле, равная $\mu \mathbf{B}$ (парамагнетизм Ланжевена).

Если функция Лагранжа системы частиц в представлении твердым телом будет содержать в качестве переменных только координаты центра масс и углы Эйлера, то уравнения движения свободного твердого тела могут быть получены как уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\mu}} = 0 \quad (q_{\alpha} = \{\mathbf{r}_{(m)}, \varphi, \theta, \psi\}). \quad (35.17)$$

Система шести дифференциальных уравнений второго порядка (35.17) сводится к двум независимым системам, по три уравнения в каждой, для твердых тел с потенциальной энергией вида $U_1(\mathbf{r}_{(m)}) + U_2(\varphi, \theta, \psi)$. При наличии макроскопических связей число степеней свободы твердого тела меньше шести. В частности, твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Вместо функции Лагранжа (35.9) в этом случае целесообразно использовать функцию (35.7), положив в ней $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$ и вычислив тензор инерции относительно системы S' с началом в неподвижной точке.

§ 36. Жесткая двухатомная молекула (двухатомный ротатор) в электрическом поле

Для возбуждения колебаний атомов в молекуле обычно требуются более высокие энергии, чем энергии, необходимые для возбуждения вращений. Если колебания отсутствуют, то межатомное расстояние a в молекуле можно считать постоянным, и мы приходим к простейшей модели твердого тела — жесткому двухатомному ротатору.

Обозначим через m_1, m_2 массы атомов несимметричной молекулы из класса ионных соединений типа HCl, через d — ее постоянный дипольный момент, и будем считать, что молекула находится во внешнем электрическом поле $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ (рис. 24). Выберем начало системы координат, жестко связанной с молекулой, в ее центре масс, ось z' этой системы совместим с осью молекулы и направлением диполя. В этой системе координат не равны нулю только компоненты I'_{11}, I'_{22} тензора инерции, причем

$$I'_{11} = I'_{22} = m_1 (z'_1)^2 + m_2 (z'_2)^2 = \mu a^2 \equiv I, \quad (36.1)$$

μ — приведенная масса. Потенциальную энергию диполя в электрическом поле можно представить в виде

$$U(\theta) = -eEa \cos \theta, \quad (36.2)$$

где e — эффективный заряд атома в молекуле. Следовательно, функция Лагранжа ротатора равна

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{(m)}^2 + \frac{I'_{11}}{2} \omega_1^2 + \frac{I'_{22}}{2} \omega_2^2 + eEa \cos \theta. \quad (36.3)$$

В качестве обобщенных координат можно выбрать координаты центра масс и два угла Эйлера θ и φ , совпадающие с обычными углами сферической системы координат. Тогда, используя определение угловой скорости твердого тела, найдем

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{(m)}^2 + \frac{I}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + eEa \cos \theta. \quad (36.4)$$

Эта функция не содержит явной зависимости от времени. Поэтому сохраняется полная энергия системы и, так как кинетическая энергия центра масс также сохраняется, интегралом движения является энергия ротатора в системе центра масс

$$\epsilon = \frac{I}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - eEa \cos \theta. \quad (36.5)$$

Азимутальный угол φ является циклической координатой. Следовательно, остается неизменным во времени обобщенный импульс

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{const}. \quad (36.6)$$

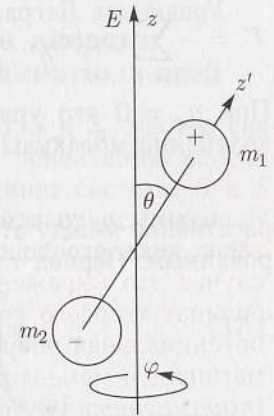


Рис. 24. Жесткий ротатор в электрическом поле

Уравнение Лагранжа для полярного угла θ имеет вид

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + eEa \sin \theta = 0. \quad (36.7)$$

При $p_\varphi = 0$ это уравнение сводится к уравнению нелинейных колебаний молекулы как твердого тела:

$$\ddot{\theta} + eEa \sin \theta = 0, \quad (36.8)$$

расстояние между атомами в молекуле при этом остается фиксированным. Период τ таких нелинейных колебаний равен

$$\tau = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta / \sqrt{\dot{\theta}_0^2 - \frac{2eaE}{I}(1 - \cos \theta)}, \quad (36.9)$$

где θ_1, θ_2 — точки поворота, $\dot{\theta}_0$ — начальная скорость изменения переменной θ . В общем случае, $p_\varphi \neq 0$, производную $\dot{\varphi}$ можно исключить из уравнений (36.5), (36.6). Найдем

$$\frac{2\epsilon}{I} = \dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi^2}{I^2 \sin^2 \theta} - \frac{2eaE}{I} \cos \theta. \quad (36.10)$$

Так как

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \left(\frac{d}{dt} \cos \theta \right)^2,$$

удобно положить $\cos \theta = u$. Тогда уравнение (36.10) примет вид

$$\dot{u}^2 = \frac{2}{I}(\epsilon + eauE)(1 - u^2) - \frac{p_\varphi^2}{I^2}. \quad (36.11)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, и его решение находится непосредственным интегрированием:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{I}(\epsilon + eauE)(1 - u^2) - \frac{p_\varphi^2}{I^2}}} + \text{const.} \quad (36.12)$$

Видно, что t выражается через $\cos \theta$ при помощи эллиптического интеграла. Азимутальный угол при этом изменяется со временем в соответствии с формулой

$$\varphi = \frac{p_\varphi}{I} \int \frac{dt}{1 - \cos^2 \theta(t)} + \text{const.} \quad (36.13)$$

Вращение жесткой молекулы вокруг оси z сопровождается ее колебаниями в вертикальной плоскости. Границами области изменения полярного угла θ при такой прецессии выступают точки поворота, т. е. корни знаменателя в интеграле (36.12).

§ 37. Преобразование тензора инерции при параллельном переносе координатных осей

Пусть две декартовы системы координат S и S' жестко связаны с твердым телом, имеют одинаковую ориентацию координатных осей и радиус-вектор начала координат системы S в S' есть \mathbf{a} . Найдем тензор инерции твердого тела относительно S' , считая, что относительно S он известен. По определению в S'

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}] \quad (37.1)$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3$; N — число частиц твердого тела).

Координаты одной и той же частицы в S и S' связаны соотношениями $x'_{i\alpha} = x_{i\alpha} + a_\alpha$. Используя их, найдем

$$\begin{aligned} I'_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}] + (\mathbf{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) \sum_{i=1}^N m_i + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i (2\mathbf{a} \mathbf{r}_i \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha x_{i\beta} - a_\beta x_{i\alpha}) = I_{\alpha\beta} + m(\mathbf{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) + \\ &+ m(2\mathbf{a} \mathbf{r}_{(m)} \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha x_{(m)\beta} - a_\beta x_{(m)\alpha}). \end{aligned} \quad (37.2)$$

Здесь через $m, x_{(m)\alpha}$ обозначены полная масса твердого тела и координаты центра масс соответственно. Если начало координат системы S совмещено с центром масс, то $\mathbf{r}_{(m)} = 0, \mathbf{r}'_{(m)} = \mathbf{a}$, и

$$I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}^{(m)} + m[(\mathbf{r}'_{(m)})^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{(m)\alpha} x'_{(m)\beta}]. \quad (37.3)$$

Общая формула (37.2) позволяет вычислить тензор $I'_{\alpha\beta}$ или $I_{\alpha\beta}$, если известен один из них. Формула (37.3) удобна для вычисления тензора инерции $I_{\alpha\beta}^{(m)}$ относительно системы координат S с началом в центре масс, если вычисления относительно системы S' оказываются более простыми за счет явного использования свойств симметрии твердого тела. Тензор инерции $I_{\alpha\beta}^{(m)}$ и координаты центра масс $\mathbf{r}'_{(m)}$ приходится вычислять при составлении функции Лагранжа в системе центра масс, где она имеет более простой вид.

Образум свертку обеих частей (37.3) с направляющими векторами l_α некоторой оси. Получим

$$I'_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = I_{\alpha\beta}^{(m)} l_\alpha l_\beta + m[(\mathbf{r}'_{(m)})^2 - (\mathbf{r}'_{(m)} \mathbf{l})^2]. \quad (37.4)$$

Так как свертка тензора инерции с направляющими векторами определенной оси есть момент инерции относительно этой оси, равенство (37.4) выражает *теорему Штейнера*: момент инерции относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы твердого тела на квадрат расстояния от центра масс до оси.

§ 38. Приведение тензора инерции к главным осям

Тензор инерции $I_{\alpha\beta}$ имеет в общем случае шесть различных компонент. Эти компоненты изменятся в соответствии с законом преобразования тензоров, если изменить направления осей системы координат S , жестко связанной с твердым телом (здесь штрих опущен). Воспользуемся имеющимся произволом в выборе направлений координатных осей и покажем, что эти направления всегда можно выбрать так, что все недиагональные компоненты тензора $I_{\alpha\beta}$ будут равны нулю. Подобное приведение к главным осям возможно для любого симметричного тензора второго ранга с вещественными компонентами.

Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор некоторой частицы твердого тела в S . Тогда $I_{\alpha\beta}x_\beta$ также вектор. Каждому вектору \mathbf{r} оператор \hat{I} , представленный матрицей $I_{\alpha\beta}$, ставит в соответствие новый вектор $\hat{I}\mathbf{r}$. Если \mathbf{r} такой, что

$$\hat{I}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}, \quad \text{или} \quad I_{\alpha\beta}x_\beta = \lambda x_\alpha, \quad (38.1)$$

то он называется собственным. Коэффициент λ называется собственным значением.

Уравнением (38.1) вектор \mathbf{r} определен с точностью до инвариантного множителя, так что в действительности эти уравнения определяют лишь собственное направление. Мы можем ввести нормированный на единицу вектор \mathbf{n} , разделив обе части (38.1) на модуль $|\mathbf{r}|$. Тогда для отыскания собственного направления \mathbf{n} будем иметь однородную систему трех уравнений

$$(I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta})n_\beta = 0. \quad (38.2)$$

Эта система имеет нетривиальные решения лишь в случае равенства нулю ее определителя

$$\det |I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0, \quad (38.3)$$

и задача сводится к отысканию корней λ характеристического уравнения (38.3).

Вследствие симметрии тензора инерции и вещественности его компонент все корни характеристического уравнения вещественны. Действительно, предполагая, что λ и n_α могут быть комплексными, получим на основании (38.2)

$$I_{\alpha\beta}n_\alpha^*n_\beta = \lambda n_\alpha n_\alpha^*.$$

Заменяя здесь индексы суммирования: $\alpha \rightleftharpoons \beta$, и учитывая свойства $I_{\alpha\beta}$, приходим к равенству

$$I_{\alpha\beta}(n_\alpha^*n_\beta + n_\alpha n_\beta^*) = 2\lambda n_\alpha n_\alpha^*. \quad (38.4)$$

В скобках представлена сумма двух комплексно-сопряженных чисел, которая всегда вещественна. Сумма в правой части вещественна и неотрицательна. Поэтому все собственные значения λ — действительные числа.

Обозначим через I_3 какой-либо не равный нулю корень характеристического уравнения (38.3). Подставляя его вместо λ в уравнение (38.2), можем найти собственный вектор $n_\alpha^{(3)}$ как решение системы трех уравнений

$$(I_{\alpha\beta} - I_3\delta_{\alpha\beta})n_\beta^{(3)} = 0. \quad (38.5)$$

Числа $n_\beta^{(3)}$ можно принять в качестве направляющих косинусов координатной оси z' , новой координатной системы, также жестко связанной с твердым телом. Две другие оси x' и y' новой декартовой системы координат будут лежать в плоскости, ортогональной z' . В новой системе вектор $\mathbf{n}^{(3)}$ будет иметь компоненты $(0, 0, 1)$ и, как это видно из уравнения для $n_\alpha^{(3)}$, $I'_{3\alpha} = I'_{\alpha 3} = 0$ при $\alpha = 1, 2$. Характеристическое уравнение в новых координатах принимает вид

$$\begin{vmatrix} I'_{11} - \lambda & I'_{12} & 0 \\ I'_{21} & I'_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (38.6)$$

Для $\lambda \neq I_3$ отсюда находим

$$\lambda^2 - (I'_{11} + I'_{22})\lambda + I'_{11}I'_{22} - (I'_{12})^2 = 0.$$

Обозначив через I_1, I_2 корни этого квадратного уравнения, будем иметь

$$I'_{1,2} = \frac{1}{2}(I'_{11} + I'_{22}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(I'_{11} - I'_{22})^2 + 4(I'_{12})^2}. \quad (38.7)$$

Корни I_1, I_2 различны, $I_1 \neq I_2$, если $(I'_{11} - I'_{22})^2 + 4(I'_{12})^2 \neq 0$. Тогда, полагая последовательно $\lambda = I_1$ и $\lambda = I_2$ в уравнении

ях (38.2), мы получим в качестве решений два различных набора направляющих косинусов $n_\alpha^{(1)}$, $n_\alpha^{(2)}$, определяющих направления двух взаимно перпендикулярных осей координат x' , y' .

Направления $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ называются *главными осями инерции*, а величины I_1 , I_2 , I_3 — *главными моментами инерции*. Тензор инерции, отнесенный к главным осям, имеет диагональный вид

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (38.8)$$

Составляющие тензора инерции допускают геометрическую интерпретацию в виде коэффициентов поверхности второго порядка, имеющей центр:

$$I_{\alpha\beta} \tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\beta = 1. \quad (38.9)$$

Действительно, по определению (37.4) момент инерции I относительно оси l есть свертка тензора инерции с направляющими косинусами l_σ этой оси. Результат свертки будет равен единице, если l_α перенормировать, положив $l_\sigma/\sqrt{I} = \tilde{x}_\alpha$.

Эта поверхность (*эллипсоид инерции*) не зависит от выбора системы координат. Если оси координат выбраны вдоль главных осей инерции x'_α , то уравнение (38.9) приводится к виду

$$I_1(x'_1)^2 + I_2(x'_2)^2 + I_3(x'_3)^2 = 1. \quad (38.10)$$

Может оказаться, что $I'_1 = I'_2$ и $I'_3 = 0$. В этом случае $I_1 = I_2$, и вместо (38.10) имеем

$$I_3(x'_3)^2 + I_1[(x'_1)^2 + (x'_2)^2] = 1.$$

Эллипсоид инерции в этом случае представляет собой поверхность вращения. Любая прямая в плоскости, перпендикулярной уже найденному вектору $n_\alpha^{(3)}$, является главной осью. Добавляя к $n_\alpha^{(3)}$ любую пару взаимно ортогональных векторов, принадлежащих этой плоскости, мы получим три главных оси инерции, относительно которых тензор инерции диагонален.

Если все три главных момента инерции равны, $I_1 = I_2 = I_3$, то уравнение (38.10) определяет сферу и любое направление является собственным. Такое твердое тело называется *шаровым волчком*.

Таким образом, наиболее простые выражения для функции Лагранжа твердого тела и уравнений движения можно получить в переменных центра масс и углов Эйлера, если совместить нача-

ло координат системы, жестко связанной с твердым телом, с центром масс, а координатные оси — с главными осями инерции. При этом для твердого тела с главными моментами инерции I_1 , I_2 , I_3 функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{(m)}^2 + \frac{1}{2} [I_1^{(m)} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + I_2^{(m)} (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + I_3^{(m)} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2] - U(\mathbf{r}_{(m)}, \theta, \varphi, \psi), \quad (38.11)$$

для аксиально-симметричных тел

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{(m)}^2 + \frac{1}{2} [I_1^{(m)} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3^{(m)} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2] - U(\mathbf{r}_{(m)}, \theta, \varphi, \psi), \quad (38.12)$$

для шарового волчка

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{(m)}^2 + \frac{1}{2} I^{(m)} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta) - U(\mathbf{r}_{(m)}, \theta, \varphi, \psi). \quad (38.13)$$

Уравнения движения твердого тела теперь могут быть получены путем подстановки функции Лагранжа в уравнения Лагранжа.

§ 39. Вычислительные формулы

Координаты центра масс $\mathbf{r}_{(m)}$ и компоненты тензора инерции $I_{\alpha\beta}$ твердого тела при не слишком большом числе N структурных элементов с определенными массами могут быть вычислены по общим формулам

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{(m)} \sum_{i=1}^N m_i \equiv \mathbf{r}_{(m)} m, \quad (39.1)$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \{(\mathbf{r}_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}\}. \quad (39.2)$$

Полезными при этом могут оказаться формулы преобразования тензора инерции при параллельном переносе и при повороте координатных осей. В частности, непосредственное использование определений (39.1), (39.2) продуктивно при проведении

расчетов инерционных характеристик молекул, состоящих из сравнительно небольшого числа атомов N .

1. Многоатомная линейная молекула. Начало координат совместим с центром масс молекулы. Координаты атомов в этой системе $(x_i, 0, 0)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда главные моменты инерции равны

$$I_1 = 0, \quad I_2 = I_3 \equiv I = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2. \quad (39.3)$$

Предположим, что расстояния между атомами $|x_i - x_j|$ известны, и найдем момент инерции в терминах межатомных расстояний. С этой целью умножим и разделим $I_2(I_3)$ на полную массу молекулы $m = \sum_{k=1}^N m_k$ и раскроем произведение сумм в числителе:

$$I = \left(\sum_{k=1}^N m_k \right) \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \right) / m = \\ = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^N m_i^2 x_i^2 + m_1 m_2 (x_1^2 + x_2^2) + \right. \\ \left. + m_1 m_3 (x_1^2 + x_3^2) + \dots + m_2 m_3 (x_2^2 + x_3^2) + \dots \right].$$

В системе центра масс $\sum_{i=1}^N m_i x_i = 0$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, найдем

$$\sum_{i=1}^N m_i^2 x_i^2 = -2m_1 m_2 x_1 x_2 - 2m_1 m_3 x_1 x_3 - \dots - 2m_2 m_3 x_2 x_3 - \dots$$

Подставляя это выражение для суммы в предыдущую формулу, получим

$$I_2(I_3) = \frac{1}{m} [m_1 m_2 (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) + \\ + m_1 m_3 (x_1^2 - 2x_1 x_3 + x_3^2) + \dots + m_2 m_3 (x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2) + \dots],$$

или окончательно

$$I = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (x_i - x_j)^2. \quad (39.4)$$

В частности, момент инерции линейной трехатомной молекулы равен

$$I = \frac{1}{m} (m_1 m_2 a_1^2 + m_2 m_3 a_2^2 + m_1 m_3 (a_1 + a_2)^2), \quad (39.5)$$

где a_1, a_2 — расстояния крайних атомов с массами m_1, m_3 от среднего m_2 . Для симметричной линейной молекулы $a_1 = a_2 = a/2$, $m_1 = m_3$. Поэтому

$$I = \frac{1}{2} m_1 a^2. \quad (39.6)$$

2. Плоские многоатомные молекулы. Тензор инерции многоатомной молекулы с произвольной пространственной конфигурацией атомов вычисляется по общим формулам (39.2). Из (39.2) видно, что для молекул, расположенных в плоскости $x_3 = 0$, ось Ox_3 является главной осью инерции; момент инерции I_3 связан с главными моментами инерции I_1, I_2 относительно главных осей, перпендикулярных Ox_3 , соотношением $I_1 + I_2 = I_3$; результат вычислений I_3 не зависит от выбора начала координат, если центр инерции находится на оси Ox_3 . Дальнейшее упрощение вычислений может быть достигнуто за счет использования свойств симметрии молекул.

Найдем в качестве примера главные моменты инерции молекулы этилена C_2H_4 . Обозначим массы атомов углерода и водорода в молекуле через m_C и m_H соответственно, расстояние между атомами углерода a (5–2 на рис. 25). Расстояния между атомами водорода и ближайшими атомами углерода одинаковы и равны b

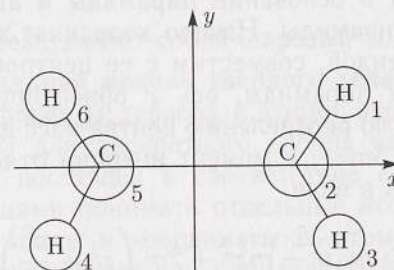


Рис. 25. Модель молекулы этилена C_2H_4

(1-2; 3-2; 4-5; 5-6). Одинаковыми и равными $2\pi/3$ являются также углы $\widehat{123}$, $\widehat{125}$, $\widehat{325}$, $\widehat{652}$. Начало координат системы, жестко связанной с молекулой, целесообразно выбрать в центре масс, совпадающем с центром симметрии, а направления координатных осей совместить с направлениями осей симметрии. Все атомы лежат в одной плоскости, например, xOy и имеют следующие координаты:

$$(H)_1: \left(\frac{a}{2} + b \cos \frac{\pi}{3}, b \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$(H)_3: \left(\frac{a}{2} + b \cos \frac{\pi}{3}, -b \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$(H)_4: \left(-\frac{a}{2} - b \cos \frac{\pi}{3}, -b \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$(H)_6: \left(-\frac{a}{2} - b \cos \frac{\pi}{3}, b \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$(C)_2: \left(\frac{a}{2}, 0 \right), \quad (C)_5: \left(-\frac{a}{2}, 0 \right).$$

Поэтому главные моменты инерции равны:

$$I_1 = \sum_{i=1}^6 m_i y_i^2 = 4m_H b^2 \sin^2 \frac{\pi}{3}, \quad (39.7)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^6 m_i x_i^2 = 4m_H \left(\frac{a}{2} + b \cos \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_C a^2, \quad (39.8)$$

$$I_3 = \sum_{i=1}^6 m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_1 + I_2. \quad (39.9)$$

3. Пирамидальные молекулы. Пирамидальная молекула представляет собой симметричную структуру, содержащую три одинаковых атома с массами m в качестве вершин равностороннего треугольника в основании пирамиды и атом m_0 — в качестве вершины пирамиды. Начало координат системы, жестко связанной с пирамидой, совместим с ее центром масс, ось z — с осью симметрии пирамиды, ось x ориентируем параллельно медиане Cm . Тогда по определению центра масс для координаты z имеем $0 = m_0 z_0 - 3m z_C$, и момент инерции относительно оси x можно представить в виде

$$I_1 = m_0 z_0^2 + m z_C^2 + 2m \left(z_C^2 + \frac{a^2}{4} \right),$$

где a — длина стороны равностороннего треугольника.

Эту формулу можно выразить через длину ребра пирамиды l и «валентный» угол при вершине пирамиды θ . Из рис. 26 видно, что $a = 2l \sin \frac{\theta}{2}$, $m_C = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $l^2 = (z_0 + z_C)^2 + \frac{a^2}{3}$.

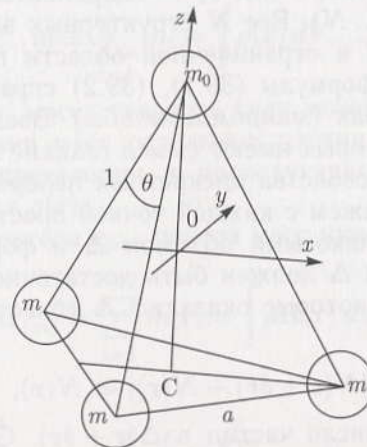


Рис. 26. Пирамидальная модель молекулы

Используя эти соотношения, получим

$$I_1 = I_2 = l^2 \left\{ 2m \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{3mm_0}{m_0 + 3m} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \quad (39.10)$$

$$I_3 = 3m(Cm)^2 = 4ml^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (39.11)$$

Конфигурация молекул фосфора P_4 и мышьяка As_4 может быть представлена правильным тетраэдром с незанятым центром. Чтобы найти моменты инерции этих молекул, достаточно положить в полученных формулах $\theta = \pi/3$, $a = l$, $m_0 = m$. Тогда получим

$$I_1 = I_2 = I_3 = ml^2,$$

т. е. молекула представляет собой шаровый волчок.

4. Континуальная модель твердого тела. Координаты центра масс и компоненты тензора инерции определены формулами (39.1), (39.2) для дискретного набора частиц. Каждой реальной частице поставлен в соответствие ее точечный образ. Если под частицами понимать отдельные атомы, то каждая из сумм содержит массы и координаты N атомов. В одном кубическом сантиметре железа при нормальных условиях содержится $8,50 \cdot 10^{22}$ атомов, а алюминия — $6,02 \cdot 10^{22}$ атомов. При

таких больших N формулы (39.1), (39.2) практически бесполезны. Введем поэтому представление о твердом теле как о гладком «материальном» поле в трехмерном физическом пространстве. Будем понимать под \mathbf{r} радиус-вектор точки трехмерного физического пространства, а под \mathbf{r}_i — координаты частицы с номером i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Все N структурных элементов твердого тела расположены в ограниченной области пространства. Эти представления и формулы (39.1), (39.2) справедливы на определенных масштабах (*микромасштабы*). Введем также *макротмасштабы*, на которых имеют смысл гладкие полевые функции, характеризующие свойства дискретных наборов частиц твердых тел. Для этого свяжем с каждой точкой пространства \mathbf{r} окрестность $\Delta(\mathbf{r})$ с одинаковым объемом Δ и формой поверхности для всех \mathbf{r} . Объем Δ должен быть достаточно большим, чтобы для $N(\mathbf{r})$ частиц, которые оказались в области $\Delta(\mathbf{r})$, выполнялось неравенство

$$|N(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - N(\mathbf{r})| \ll N(\mathbf{r}), \quad (39.12)$$

где $N(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ — число частиц в $\Delta(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$. С другой стороны, объем Δ должен быть много меньше характерных коллективных пространственных неоднородностей в распределении частиц. (Подобные ограничения на масштабы возникают при сканировании поверхностей образцов излучением с длиной волны, превышающей средние расстояния между частицами.)

Элементарный объем Δ , выбранный исходя из указанных ограничений, называется *физически бесконечно малым*. Плотность массы твердого тела теперь определяется как отнесенная к единице объема масса всех частиц, оказавшихся в Δ -окрестности точки \mathbf{r} трехмерного евклидова пространства:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r})} m_i. \quad (39.13)$$

Этой формулой $\rho(\mathbf{r})$ определяется через $N(\mathbf{r})$. Более продуктивное представление локального среднего можно получить, переходя в (39.13) к интегрированию по $\Delta(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} \int d\xi \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}_i). \quad (39.14)$$

Здесь N — полное число частиц образца, ξ — радиус-вектор с началом в точке \mathbf{r} . В соответствии с этой формулой $\rho(\mathbf{r})$ представляет собой локальное среднее по области $\Delta(\mathbf{r})$ микро-

скопической массовой плотности $\sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Интегрируя обе части равенства (39.14) по всему пространству, получим

$$m \equiv \sum_{i=1}^N m_i = \int \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (39.15)$$

Таким образом, масса твердого тела может быть вычислена путем суммирования масс отдельных частиц, либо, при больших N , путем определения и последующего интегрирования скалярной функции $\rho(\mathbf{r})$.

Для радиуса-вектора $\mathbf{r}_{(m)}$ центра масс имеем

$$m\mathbf{r}_{(m)} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \int \rho \mathbf{R}(\mathbf{r}) dV, \quad (39.16)$$

где

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r})} m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{\rho\Delta} \int d\xi \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}_i) \quad (39.17)$$

— радиус-вектор центра масс частиц области $\Delta(\mathbf{r})$. Для твердых тел, образованных большим числом частиц, пространственное распределение частиц в области $\Delta(\mathbf{r})$ близко к однородному и $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ мало отличается от радиуса-вектора \mathbf{r} точки трехмерного пространства, в окрестности которой определена $\rho(\mathbf{r})$. Для таких твердых тел в формуле (39.16) можно заменить $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ на \mathbf{r} и для вычисления координат центра масс твердого тела использовать формулы

$$\mathbf{r}_{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \frac{\int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV}. \quad (39.18)$$

Вычисление тензора инерции твердого тела (39.2) с большой локальной плотностью числа частиц $N(\mathbf{r})/\Delta$ также можно свести к интегрированию по области пространства, занятой частицами среды, соответствующей тензорной плотности:

$$i_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r})} m_i \{(\mathbf{r}_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}\}. \quad (39.19)$$

Положим в выражении (39.19)

$$x_{i\alpha} = X_\alpha + \zeta_{i\alpha}, \quad (39.20)$$

где $X_\alpha = X_\alpha(\mathbf{r})$ — координаты центра масс частиц Δ -окрестности. Тогда

$$i_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(r)} m_i \{ (\mathbf{R})^2 \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta \} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(r)} m_i \{ (\zeta_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - \zeta_{i\alpha} \zeta_{i\beta} \} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(r)} m_i (2\mathbf{R}\zeta_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha \zeta_{i\beta} - X_\beta \zeta_{i\alpha})$$

или согласно (39.14)

$$i_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \{ (\mathbf{R})^2 \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta \} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(r)} m_i \{ (\zeta_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - \zeta_{i\alpha} \zeta_{i\beta} \} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(r)} m_i (2\mathbf{R}\zeta_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha \zeta_{i\beta} - X_\beta \zeta_{i\alpha}). \quad (39.21)$$

Из формул (39.17) после подстановки в них выражений (39.20) получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{N(r)} m_i \zeta_i = 0. \quad (39.22)$$

Поэтому последняя сумма в (39.21) равна нулю. Второй суммой представлен локальный собственный тензор инерции частиц $\Delta(\mathbf{r})$ -окрестности относительно их центра масс. Такие тензоры зависят от произведений координат, малых второго порядка по линейным размерам физического бесконечно малой области усреднения Δ , и для недеформируемых тел могут быть опущены. Кроме того, в формуле (39.21), как и в (39.16), для локально однородных твердых тел можно положить $\mathbf{R}(\mathbf{r}) \cong \mathbf{r}$.

Таким образом, тензор инерции $I_{\alpha\beta}$ макроскопического твердого тела можно вычислить путем интегрирования по области пространства, занятой частицами только первого слагаемого формулы (39.21):

$$I_{\alpha\beta} = \int_V i_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) dV \cong \int_V \rho(\mathbf{r}) \{ (\mathbf{r})^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \}. \quad (39.23)$$

Формулы (39.18), (39.23) применимы также для распределений масс твердых тел по поверхностям и кривым. В таких случаях под ρ следует понимать поверхностную или линейную плотность, а под dV — элемент площади поверхности или длины.

5. Примеры вычислений инерционных характеристик сплошных твердых тел.

— *Однородный прямоугольный параллелепипед, прямоугольник, тонкий стержень.* Начало координат совместим с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда. Координатные оси направим перпендикулярно его граням; эти оси являются главными осями инерции. Массу параллелепипеда обозначим через m , а длины ребер, параллельных координатным осям x_α , — через a_α соответственно (рис. 27).

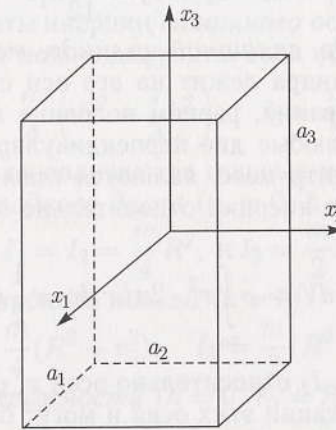


Рис. 27. Главные оси инерции параллелепипеда

Тогда главный момент инерции относительно оси x_1 будет равен

$$I_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) \rho dV = \rho \int_{-\frac{1}{2}a_2}^{+\frac{1}{2}a_2} \int_{-\frac{1}{2}a_3}^{+\frac{1}{2}a_3} x_2^2 a_1 a_3 dx_2 + \rho \int_{-\frac{1}{2}a_2}^{+\frac{1}{2}a_2} \int_{-\frac{1}{2}a_3}^{+\frac{1}{2}a_3} x_3^2 a_1 a_2 dx_3 = \\ = \frac{\rho}{12} a_1 a_2 a_3 (a_2^2 + a_3^2) = \frac{m}{12} (a_2^2 + a_3^2). \quad (39.24)$$

Главные моменты инерции I_2, I_3 относительно осей x_2, x_3 получаются отсюда циклической перестановкой индексов 1, 2, 3:

$$I_2 = \frac{m}{12}(a_3^2 + a_1^2), \quad I_3 = \frac{m}{12}(a_1^2 + a_2^2). \quad (39.25)$$

Главные моменты инерции тонкой прямоугольной пластины со сторонами a_1, a_2 можно получить, положив в формулах для I_1, I_2, I_3 длину $a_3 = 0$ и считая m массой пластины. Таким образом, для *прямоугольной пластины*

$$I_1 = \frac{m}{12}a_2^2, \quad I_2 = \frac{m}{12}a_1^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

Эти формулы в свою очередь позволяют найти главные моменты инерции тонкого стержня длиной a_1 , если в них положить $a_2 = 0$ и считать m массой стержня. Для *тонкого стержня*

$$I_1 = 0, \quad I_2 = I_3 = \frac{m}{12}a_1^2.$$

— *Полый цилиндр, сплошной цилиндр, тонкий диск, кольцо.* Центр масс цилиндра лежит на его оси симметрии на расстоянии $h/2$ от основания, равном половине высоты цилиндра. Ось симметрии z и любые две перпендикулярные ей оси, x, y , проходящие через центр масс, являются главными осями инерции (рис. 28). Момент инерции относительно оси z равен

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \rho \int_{r_0}^R r^2 \cdot 2\pi h r dr = \frac{1}{2} \rho \pi h (R^4 - r_0^4).$$

Моменты инерции I_1, I_2 относительно осей x, y равны между собой при любой ориентации этих осей и могут быть представлены

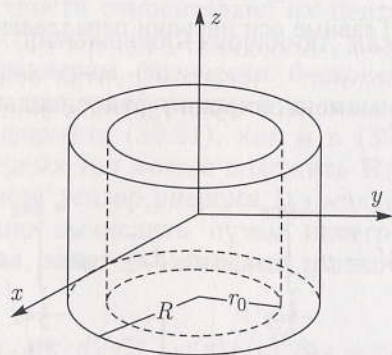


Рис. 28. Главные оси инерции полого цилиндра

в виде

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \int (y^2 + z^2) \rho dV = \int (x^2 + z^2) \rho dV = \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2 + 2z^2) \rho dV = \frac{1}{2} I_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \pi \rho (R^2 - r_0^2) dz = \\ &= \frac{1}{4} \rho \pi h (R^4 - r_0^4) + \frac{1}{12} \pi \rho (R^2 - r_0^2) h^3. \end{aligned}$$

Плотность массы ρ однородного полого цилиндра связана с его массой m соотношением $\rho = m/\pi h (R^2 - r_0^2)$. Поэтому главные моменты инерции *полого цилиндра* равны

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{4} \left(R^2 + r_0^2 + \frac{1}{3} h^2 \right), \quad I_3 = \frac{m}{2} (R^2 + r_0^2). \quad (39.26)$$

Главные моменты инерции *сплошного однородного цилиндра* с массой m отсюда можно получить, если положить $r_0 = 0$. Тогда

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{1}{3} h^2 \right), \quad I_3 = \frac{m}{2} R^2. \quad (39.27)$$

Аналогично устанавливаются главные моменты инерции *тонкого однородного диска* ($r_0 = 0, h = 0$):

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{4} R^2, \quad I_3 = \frac{m}{2} R^2. \quad (39.28)$$

тонкого однородного кольца ($h = 0$):

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{4} (R^2 + r_0^2), \quad I_3 = \frac{m}{2} (R^2 + r_0^2). \quad (39.29)$$

однородной окружности ($h = 0, r_0 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{2} R^2, \quad I_3 = m R^2. \quad (39.30)$$

— *Круговой конус.* Координаты центра масс конуса в декартовой системе координат с началом центра основания и осью z вдоль оси симметрии можно представить в виде $(0, 0, z^{(m)})$, где

$$\begin{aligned} z^{(m)} &= \frac{1}{m} \int z \rho dV = \frac{\rho}{m} \int_0^h z \pi r^2(z) dz = \\ &= \frac{\rho}{m} \int_0^h z \pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = \frac{\rho}{12m} \pi R^2 h^2. \end{aligned}$$

Здесь R — радиус основания, h — высота конуса. Масса однородного конуса

$$m = \frac{1}{3}\pi R^2 h \rho.$$

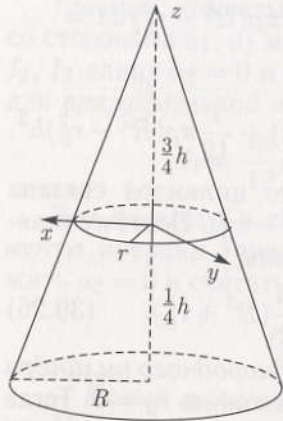


Рис. 29. Главные оси инерции x, y, z кругового конуса

Следовательно, $z^{(m)} = h/4$. Ось z (рис. 29) является главной осью инерции. Для вычисления главных центральных моментов инерции следует считать, что две другие оси x и y пересекают ось z в точке $(0, 0, z^{(m)})$. В этой системе координат для конуса имеем

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{r} \left(\frac{3}{4}h - z \right), \quad dz = -\frac{h}{R} dr.$$

Элемент объема конуса в виде диска с радиусом r и бесконечно малой толщиной dz есть $dV = \pi r^2 dz$; масса этого диска есть $\rho \pi r^2 dz$, а момент инерции относительно оси z есть, (39.28),

$$\frac{1}{2} r^2 \rho \pi r^2 dz = -\frac{\rho \pi h}{2R} r^4 dr.$$

Поэтому главный момент инерции конуса относительно оси z равен

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) \rho dV = -\frac{\rho \pi h}{2R} \int_0^R r^4 dr = \frac{\rho \pi h}{10} R^4 = \frac{3}{10} m R^2. \quad (39.31)$$

Элементарный момент инерции относительно оси, параллельной Ox и проходящей через центр масс выделенного слоя, в соответствии с (87) равен

$$\frac{1}{4} (\rho \pi r^2 dz) r^2 = -\frac{\rho \pi h}{4R} r^4 dr.$$

Прибавляя к этому выражению произведение массы слоя $\rho \pi r^2 dz$ на квадрат расстояния между осями z^2 , мы получим, согласно правилам преобразования тензора инерции при параллельном переносе координатных осей, элементарный момент инерции относительно оси Ox :

$$-\frac{\rho \pi h}{4R} r^4 dr - \frac{\rho \pi h}{R} r^2 h \left(\frac{3}{4} - \frac{r}{R} \right)^2 dr.$$

Интегрируя это выражение, находим главные моменты инерции конуса относительно осей x, y

$$I_1 = I_2 = -\frac{\rho \pi h}{R} \int_0^R \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{h^2}{R^2} \right) r^4 - \frac{3h^2}{2R} r^3 + \frac{9}{16} \frac{h^2}{R^2} \right\} dr = \\ = \frac{\rho \pi h}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right),$$

или

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{20} m \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right). \quad (39.32)$$

— *Эллипсоид, шар*. Начало координат выберем в центре симметрии эллипсоида. Координатные плоскости совместим с плоскостями симметрии эллипсоида. Тогда уравнению эллипсоида можно придать канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, и координатные оси x, y, z будут главными центральными осями инерции.

Преобразованием координат $x = ax', y = by', z = cz'$ уравнение эллипса приводится к уравнению шара единичного радиуса $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$. Момент инерции относительно оси z будет иметь вид

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \rho abc \int \{ a^2 (x')^2 + b^2 (y')^2 \} dV',$$

но вследствие симметрии шара

$$\int (x')^2 dV' = \int (y')^2 dV' = \int (z')^2 dV' = \\ = \frac{1}{3} \int \{ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \} dV' = \\ = \frac{1}{3} \int_0^1 (r')^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{15} \pi,$$

поэтому

$$I_3 = \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + b^2).$$

Моменты инерции I_1, I_2 относительно осей x, y получаются отсюда циклической перестановкой символов abc :

$$I_1 = \frac{4}{15} \pi abc(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{4}{15} \pi abc(c^2 + a^2).$$

Масса однородного эллипсоида равна

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi abc.$$

Поэтому главные центральные моменты инерции однородного эллипсоида могут быть представлены через его массу по формулам

$$I_1 = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{1}{5} m(c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2). \quad (39.33)$$

При $a = b = c = R$ эти формулы определяют главные моменты инерции шара:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} mR^2.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 40. Симметричный волчок с одной неподвижной точкой в однородном гравитационном поле

Движение симметричных твердых тел с одной неподвижной точкой сопровождается прецессией и нутацией. Закономерности движения таких тел лежат в основе теории гироскопических навигационных приборов. Если твердое тело имеет неподвижную точку, вокруг которой оно может свободно вращаться, то начала обеих систем координат (инерциальной и жестко связанной с твердым телом) удобно совместить с неподвижной точкой, ось z выбрать по нормали к плоскости соприкосновения, ось z' — вдоль оси симметрии волчка. Ось симметрии и любые две оси, перпендикулярные ей, являются главными осями инерции. Главные моменты инерции $I_1 = I_2, I_3$. Центр масс $z'_{(m)}$ симметричного волчка находится на оси z' (Лагранж–Пуассон), так что потенциальная энергия волчка в однородном поле тяготения равна

$$U(\theta) = -m g r'_{(m)} = m g z'_{(m)} \cos \theta,$$

θ — угол между осями z и z' . Положим в общем выражении функции Лагранжа твердого тела

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + m \mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_{(m)}] + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta - \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i, t),$$

$$\mathbf{r}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0 = 0, \quad I_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$I_{11} = I_{22} \equiv I_1, \quad I_{33} \equiv I_3, \quad \sum_{i=1}^N U_i = U(\theta),$$

а также угловую скорость ω_α в проекциях на оси подвижной системы координат, выраженных через углы Эйлера:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

В результате получаем функцию Лагранжа волчка в виде

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgz'_{(m)} \cos \theta. \quad (40.1)$$

Угловые координаты φ и ψ являются циклическими. Поэтому сохраняются во времени обобщенные импульсы p_φ , p_ψ , представляющие собой проекции момента импульса твердого тела \mathbf{L} на осях z и z' :

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = L_z = \text{const}, \quad (40.2)$$

$$p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = L_{z'} = \text{const}. \quad (40.3)$$

Значения этих постоянных определяются начальным состоянием волчка.

Из равенства (40.3) видно, что проекция ω_3 угловой скорости на ось z' остается неизменной в течение всего времени движения, $\omega_3 = \text{const}$. Далее, функция Лагранжа не содержит явной зависимости от времени, и диссипативными силами мы пренебрегаем. В таких условиях сохраняется полная энергия твердого тела:

$$E \equiv \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgz'_{(m)} \cos \theta = \text{const}. \quad (40.4)$$

В этом выражении

$$\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \text{const}. \quad (40.5)$$

Поэтому

$$\tilde{E} \equiv E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgz'_{(m)} \cos \theta = \text{const}. \quad (40.6)$$

Из (40.2) и (40.3) легко исключается $\dot{\psi}$. Получим

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta, \quad (40.7)$$

или

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (40.8)$$

Подставляя это значение $\dot{\varphi}$ в (40.6), приходим к уравнению для θ :

$$\frac{2\tilde{E}}{I_1} = \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^2 \theta} + \frac{2mgz'_{(m)}}{I_1} \cos \theta, \quad (40.9)$$

которое удобно преобразовать в уравнение для $\xi \equiv \cos \theta$. Очевидно

$$\frac{2\tilde{E}}{I_1} \sin^2 \theta = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{I_1^2} + \frac{2mgz'_{(m)}}{I_1} \cos \theta \sin^2 \theta$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi}^2 = (1 - \xi^2) \left(\frac{2\tilde{E}}{I_1} - \frac{2mgz'_{(m)}}{I_1} \xi \right) - \left(\frac{p_\varphi}{I_1} - \frac{p_\psi}{I_1} \xi \right)^2 \equiv \chi(\xi). \quad (40.10)$$

Решение этого уравнения определяется квадратурой

$$t = \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\chi(\xi)}}. \quad (40.11)$$

Интеграл в (40.11) сводится к эллиптическим функциям. Угловые переменные φ и ψ могут быть найдены из уравнений (40.8) и (40.5), если известна функция $\theta(t)$. Поэтому φ и ψ также выражаются через специальные функции. Формулой (40.11) определена функция $t = t(\xi)$. Для того чтобы найти обратную ей функцию, заметим, что $\chi(\xi)$ — многочлен третьей степени относительно $\xi = \cos \theta$, причем $\chi(\xi) > 0$, $\chi(\pm 1) < 0$ ($\xi \neq 0$). Этот многочлен имеет три действительных корня. Один из них, $\xi_3 > 1$, не соответствует вещественным углам, два других, ξ_1, ξ_2 , соответствуют «точкам поворота» по углу θ ($-1 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < 1$), между которыми θ совершает колебания. Решение уравнения (40.11) можно представить в виде

$$\xi(t) = \cos \theta(t) = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) \text{sn}^2 \nu(t - t_0). \quad (40.12)$$

Здесь $\text{sn} \nu(t - t_0)$ — эллиптическая функция Якоби,

$$\nu = \sqrt{\frac{mgz'_{(m)}(\xi_3 - \xi_1)}{2I_1}}.$$

Подставляя в уравнение (40.8) выражение (40.12) вместо $\cos \theta$, получаем уравнение для угловой переменной φ ,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta(t)}{I_1(1 - \cos^2 \theta(t))}, \quad (40.13)$$

которое формально легко интегрируется. Эти результаты позволяют также проинтегрировать уравнение (40.5) для переменной ψ и свести задачу о движении волчка к квадратурам.

Качественные представления о движении волчка можно составить на основе анализа траектории конца единичного вектора k' оси z' на сфере с центром в неподвижной точке. Конец вектора k' , или *апекс*, при этом будет описывать сферическую кривую с точками поворота на параллелях $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$. Для начальных состояний волчка, таких, что $(L_z/L_{z'}) > \cos \theta_2$ (больше наибольшего значения $\cos \theta$), производная $\dot{\varphi}$ будет иметь один и тот же знак при $\theta = \theta_1$ и при $\theta = \theta_2$. Траектория апекса для этого случая изображена на рис. 30, а; ось симметрии волчка прецессирует вокруг вертикальной оси и совершает колебания (*нутацию*) между θ_1 и θ_2 .

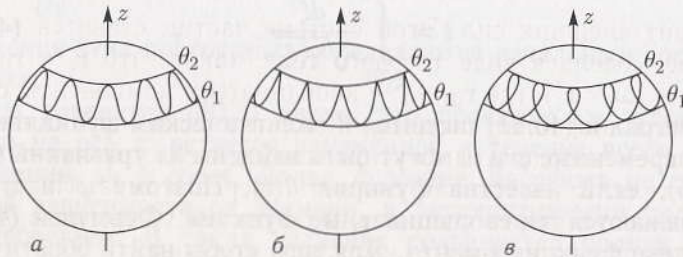


Рис. 30. Кривые апекса симметричного волчка в однородном гравитационном поле

Для начальных состояний волчка, для которых справедливо неравенство

$$\cos \theta_1 < (L_z/L_{z'}) < \cos \theta_2,$$

скорость $\dot{\varphi}$ будет иметь разные знаки на граничных окружностях θ_1 и θ_2 . Это соответствует прецессии и нутации волчка, апекс которого описывает кривую, изображенную на рис. 30, б.

На рис. 30, в показана траектория апекса, соответствующая начальным условиям $(L_z/L_{z'}) = \cos \theta_2$, которые могут быть реализованы для волчка, ось симметрии которого в начальный момент времени составляла угол θ_2 с вертикалью. Волчок при этом имел угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \dot{\theta}(0)$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$.

§ 41. Уравнения для импульса и момента импульса твердого тела как уравнения движения

1. Уравнения Эйлера. Обратимся снова к исходной системе взаимодействующих частиц, для которой возможно представление в виде твердого тела. В инерциальной системе отсчета

полный импульс $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$ и полный момент импульса системы $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$ изменяется со временем в соответствии с уравнениями

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad (41.1)$$

где \mathbf{F} — сумма внешних сил,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)})$$

— момент внешних сил. Этой системе частиц ставится в соответствие модель в виде твердого тела, такая, что $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)$, где \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — координаты и компоненты скорости начала координат системы S' , жестко связанного с твердым телом, \mathbf{r}'_i — координаты фиксированных в S' структурных элементов тела, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела. Подставляя эти выражения для координат \mathbf{r}_i и скоростей \mathbf{v}_i частиц в формулы для импульса и момента импульса, получим

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \{ \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \} = m \mathbf{v}_0 + m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{(m)}), \quad (41.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \{ (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) + (\mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)) + \\ &\quad + (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_0) + (\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)) \} = \\ &= m (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) + m (\mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{(m)})) + m (\mathbf{r}'_{(m)} \times \mathbf{v}_0) + \mathbf{L}', \end{aligned} \quad (41.3)$$

где m — масса твердого тела, $\mathbf{r}'_{(m)}$ — радиус-вектор центра масс в S' ,

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)) \quad (41.4)$$

— кинетический момент твердого тела относительно начала S' . Совместим начало системы S' с центром масс. Тогда $\mathbf{r}'_{(m)} = 0$; векторы \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — координаты и скорость центра масс в S ; полный импульс \mathbf{P} является одновременно импульсом центра масс $m \mathbf{v}_0$, а полный момент импульса \mathbf{L} представляет собой сумму «орбитального» момента импульса $m (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)$ и «собствен-

ного» кинетического момента твердого тела \mathbf{L}' . Уравнение для «орбитального» момента

$$\frac{d}{dt} m(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} \quad (41.5)$$

является очевидным следствием уравнения

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}, \quad (41.6)$$

и его целесообразно исключить из уравнения для полного момента импульса. Найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{(e)} = \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) \equiv \mathbf{M}', \end{aligned} \quad (41.7)$$

где \mathbf{M}' — момент сил относительно центра масс. В такой форме уравнения эволюции полного импульса и момента импульса относительно центра масс служат основой для вывода уравнений движения твердого тела, не прибегая при этом к лагранжевой формулировке механики. Остается принять во внимание характерные для твердого тела линейные связи между компонентами момента импульса и угловой скорости $L'_\alpha = I_{\alpha\beta}\omega_\beta$. Для этого не только начало, но и направления координатных осей системы S' должны быть жестко связаны с твердым телом.

Производная по времени от вектора, заданного своими компонентами в системе S' , складывается из производной по времени при фиксированных осях системы S' плюс приращение за счет поворота осей S' с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому уравнение для импульса имеет вид (индекс «0» у скорости опущен)

$$m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{F}. \quad (41.8)$$

Момент импульса \mathbf{L}' также задан своими компонентами в S' , и мы будем иметь

$$\left(\frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}' \right) = \mathbf{M} \quad (41.9)$$

(штрихи у \mathbf{L}' , \mathbf{M}' опущены). Уравнения (41.8), (41.9) образуют систему шести дифференциальных уравнений для шести компонент векторов \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$. Найденные \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ как функции време-

ни можно затем выразить через шесть обобщенных координат и свести задачу об установлении закона движения твердого тела к интегрированию уравнений первого порядка для обобщенных координат.

Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет только три степени свободы; \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 обращаются в нуль путем выбора начала координат в неподвижной точке. Неподвижной точкой может служить также центр масс твердого тела, если сумма сил, действующих на него, равна нулю. Начало координат инерциальной системы отсчета S в этом случае всегда можно совместить с началом системы S' , движущейся с постоянной скоростью центра масс. В соответствии с (41.3) в обоих случаях $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$, но в первом случае \mathbf{L}' , \mathbf{M}' вычисляются относительно неподвижной точки, во втором — относительно центра масс.

Фиксируем направления координатных осей системы S' относительно твердого тела и выделим в производной по времени приращение за счет вращения осей S' . Тогда и при наличии неподвижной точки

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}') = \mathbf{M}'. \quad (41.10)$$

Три уравнения (41.10) для компонент L'_α могут быть приняты в качестве уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой. Из (41.4) находим в соответствии с формулой для двойного векторного произведения

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i \{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}'_i)^2 - \mathbf{r}'_i(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_i) \}, \quad (41.11)$$

или в компонентах

$$L'_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \{ (\mathbf{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{\alpha i} x'_{\beta i} \} \omega_\beta = I_{\alpha\beta} \omega_\beta. \quad (41.12)$$

Здесь $I_{\alpha\beta}$ — тензор инерции твердого тела относительно неподвижной точки. Следовательно, уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой (уравнения Эйлера) принимают вид

$$I_{\alpha\beta} \frac{d\omega_\beta}{dt} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_{\gamma\sigma} \omega_\beta \omega_\sigma = M_\alpha \quad (41.13)$$

($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; штрихи опущены).

Если координатные оси системы S' выбраны вдоль главных осей инерции, то компоненты кинетического момента L'_α будут

пропорциональны соответствующим компонентам угловой скорости ω_α :

$$L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3, \quad (41.14)$$

а уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (41.15)$$

Здесь M_α — составляющие момента внешних сил вдоль главных осей инерции. Все три уравнения получаются друг из друга циклической перестановкой индексов.

Компоненты угловой скорости ω_α в (41.15) могут быть выражены через углы Эйлера φ, θ, ψ и их производные по времени по формулам, приведенным выше. Одновременно углы φ, θ, ψ можно считать обобщенными координатами в выражении для функции Лагранжа твердого тела с одной неподвижной точкой. Однако только одно из трех уравнений Эйлера будет совпадать по форме с уравнением Лагранжа. Это будет уравнение Лагранжа для ψ ; оно содержит проекцию момента внешних сил на ось вращения z' . Две другие обобщенные силы также имеют смысл составляющих момента силы, но они направлены вдоль линии узлов и неподвижной оси z . Уравнение Лагранжа для переменной ψ можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \psi} = M_3, \quad (41.16)$$

где $E_{(k)} = \frac{1}{2} I_\alpha \omega_\alpha^2$ — кинетическая энергия твердого тела. В соответствии с формулами (34.8) для компонент угловой скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) = \omega_2, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) = -\omega_1, \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = 1. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в уравнение Лагранжа (41.16) получаем уравнение

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = M_3.$$

Два других уравнения Эйлера получаются отсюда циклической перестановкой индексов.

2. Условия равновесия систем твердых тел. Необходимыми и достаточными условиями равновесия системы твердых тел являются равенства нулю для каждого из них суммы сил, $\sum \mathbf{F}_i = 0$, включая реакции связей, и суммы моментов сил, $\sum \mathbf{M}_i = 0$. При наличии идеальных связей это условие может быть представлено в виде равенства нулю работы на виртуальных перемещениях (аналитическая статика, $\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$ в уравнении Даламбера), либо в виде равенства нулю обобщенных сил. Обычно сила трения скольжения в условиях равновесия не превышает предельного значения F_0 . Условия равновесия в таких случаях определяют множество положений равновесия.

3. Неудерживающая связь (пример). К вертикальной стенке приставлено под углом α протяженное однородное твердое тело (стержень, балка и т.п.). Предоставленное самому себе твердое тело падает, совершая плоскопараллельное движение в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенке (рис. 31). Найдем закон движения тела, пренебрегая трением.

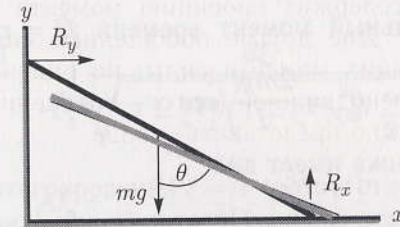


Рис. 31. Реакции связей и обобщенная координата твердого тела длиной $2l$

Из условия задачи следует, что центр масс твердого тела приобретает наряду с вертикальной и горизонтальную составляющую скорости. Реакция вертикальной стенки R_y при этом может обращаться в нуль. До момента времени τ , такого, что $R_y(\tau) = 0$, тело имеет одну степень свободы; при $t \geq \tau$ число степеней свободы увеличивается на единицу. В качестве обобщенной координаты одномерного движения выберем угол θ наклона твердого тела к вертикали. Тогда координаты и компоненты скорости центра масс тела длиной $2l$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x_{(m)} &= l \sin \theta, & y_{(m)} &= l \cos \theta, \\ \dot{x}_{(m)} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y}_{(m)} &= -l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Вычислив производные по времени от этих равенств, мы можем найти реакции связей R_x , R_y как функции θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ непосредственно из уравнений движения центра масс:

$$R_x = mg + m\ddot{y}_{(m)} = mg - ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta),$$

$$R_y = m\ddot{x}_{(m)} = ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta).$$

Эти формулы будут продуктивными, если выразить $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ в виде функций переменной θ . С этой целью обратимся к выражению для функции Лагранжа твердого тела:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{I^{(m)}}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta,$$

где $I = I^{(m)} + ml^2$, $I^{(m)}$ — момент инерции тела относительно центра масс. Эта функция не зависит от времени явно. Следовательно, при всех $t \leq \tau$ сохраняется энергия E :

$$E = \frac{1}{2} (ml^2 + I) \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

Так как в начальный момент времени $E = mgl \cos \alpha$, отсюда находим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl}{I} (\cos \alpha - \cos \theta).$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta.$$

Подставляя сюда функции $\dot{\theta}(\theta)$, $\ddot{\theta}(\theta)$, найдем реакции связей как функции угла θ :

$$R_x = mg \left(1 - \frac{ml^2}{I} \right) + 3mg \frac{ml^2}{I} \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \alpha \right),$$

$$R_y = 3mg \frac{ml^2}{I} \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \alpha \right).$$

Отсюда видно, что при достижении угловой переменной θ значения $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\tau)$, такого, что $\cos \dot{\theta} = \frac{2}{3} \cos \alpha$, реакция R_y вертикальной стенки обращается в нуль. Реакция горизонтальной поверхности в этот момент равна $R_x = mg(1 - ml^2/I)$. Одномерное движение твердого тела ограничено. Закон движения $\theta(t)$

на этапе одномерного движения, $t \leq \tau$, можно установить на основании уравнения для энергии

$$\dot{\theta} = 2 \sqrt{\frac{mgl}{I} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Удобно сделать замену переменной θ , положив $\cos \frac{\theta}{2} = \xi \cos \frac{\alpha}{2}$. Дифференцируя это соотношение, имеем

$$\dot{\theta} = -\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \dot{\xi}.$$

Для ξ имеем уравнение

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{mgl}{I} (1 - \xi^2) \left(1 - \xi^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\sqrt{\frac{mgl}{I}} t = \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2) \left(1 - \xi^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}}.$$

Верхний предел интегрирования $\xi = 1$ соответствует $t = 0$. Таким образом, закон движения твердого тела на этапе одномерного движения выражается эллиптическим интегралом.

Ограничение движения твердого тела вертикальной стенкой (связь) при $t \geq \tau$ исчезает, и появляется дополнительная степень свободы. В качестве обобщенных координат теперь можно выбрать угол θ и координату $x_{(m)}$ центра масс. Так как связи являются стационарными и диссипативные силы отсутствуют, энергия твердого тела сохраняется:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} [(\dot{x}_{(m)})^2 + (\dot{y}_{(m)})^2] + \frac{I^{(m)}}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}_{(m)})^2 + \frac{1}{2} (I^{(m)} + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

В уравнении движения центра масс $m\ddot{x}_{(m)} = R_y$ реакция R_y исчезает. Следовательно, $\dot{x}_{(m)} = \text{const}$. Скорость, достигнутая

твердым телом к моменту τ , сохраняется и при $t \geq \tau$. Она определяется начальным состоянием тела по формуле

$$\dot{x}_{(m)} = l\dot{\theta}(\tau) \cos \theta(\tau) = \frac{2}{3}l \cos \alpha \sqrt{\frac{2mgl}{3I} \cos \alpha}.$$

Полная энергия твердого тела по-прежнему равна $E = mgl \cos \alpha$. Поэтому разность $\tilde{E} \equiv E - \frac{m}{2}(\dot{x}_{(m)})^2$ — известная функция, и мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{1}{2}(I^{(m)} + ml^2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2}(I - ml^2 \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(\tilde{E} - mgl \cos \theta)}{I - ml^2 \cos^2 \theta}}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. При помощи замены $\eta = \cos \theta$ решение этого уравнения можно представить в виде

$$t - \tau = \int_{\cos \theta}^{\frac{2}{3} \cos \alpha} \sqrt{\frac{I - ml^2 \eta^2}{2(1 - \eta^2)(\tilde{E} - mgl \eta)}} d\eta.$$

Таким образом, после потери контакта с вертикальной стенкой закон движения твердого тела представляется в виде равномерного и прямолинейного движения центра масс в горизонтальной плоскости и функцией $\theta(t)$, не сводящейся к элементарным.

4. Неголономные системы. Взаимодействие многочастичных атомно-молекулярных систем при их непосредственном контакте непредставимо в виде взаимодействия абсолютно твердых тел. В области контакта происходит интенсивное разрушение и образование новых связей между частицами. Однако при незначительных деформациях поверхностей результат взаимодействия все еще представим в виде макроскопических ограничений движения за счет сил реакций связей и сопротивления движению за счет сил трения в области контакта.

Твердое тело конечных размеров может скользить по поверхности другого тела. Результатом макроскопического взаимодействия тел при этом будет удержание тела на поверхности во внешнем силовом поле, а также потери относительной скорости. Взаимодействие тел в этом случае можно представить

в виде суммы реакции связи \mathbf{R} , пропорциональной градиенту поверхности, и силы трения скольжения $F = f_s R$ в касательной плоскости. Сила трения скольжения (или коэффициент трения скольжения f_s) имеет предельное значение F_0 . Скольжение не происходит, если составляющая внешней силы вдоль направления движения не превышает F_0 . Только в этом случае возможно качение без проскальзывания. Коэффициент f_s безразмерен и имеет порядок 0,3 для фрикционных и 0,13 для антифрикционных материалов. Твердое тело, соприкасающееся с плоскостью, имеет пять степеней свободы.

Качение одного твердого тела по поверхности другого происходит при условии равенства нулю относительной скорости соприкасающихся точек. Точки контакта могут принадлежать линиям контакта и служить мгновенными центрами или осями вращения. Следовательно, в этом случае представления о взаимодействии в терминах реакций связей должны быть дополнены тангенциальной составляющей \mathbf{R}_{\parallel} реакции, препятствующей проскальзыванию точек соприкосновения, или допущением о том, что при качении реакции \mathbf{R} не ортогональны поверхностям. Полная сила межатомного взаимодействия в области контакта в макроскопическом представлении содержит также составляющую в виде трения качения. Момент сопротивления качению при этом пропорционален нормальной силе R , прижимающей тела друг к другу, $M = f_r R$, где f_r — коэффициент трения качения; f_r имеет размерность длины, $f_r \cong 1,5 \cdot 10^{-3}$ см для стальных изделий на стальных поверхностях, $f_r \cong 2 \cdot 10^{-2}$ см для автомобильных колес на асфальте при скорости 80 км/ч, и быстро возрастает с ростом скорости. Силы трения зависят от физико-химических свойств соприкасающихся макроскопических поверхностей, от физических процессов, которые развиваются при различных давлениях и скоростях частиц в областях соприкосновения, и должны определяться экспериментально.

Равенство нулю скорости $\mathbf{v} = \mathbf{V} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)$ точки касания \mathbf{r}_0 шара с плоскостью служит примером уравнений неголономной (неинтегрируемой) связи при качении.

Обобщенными координатами линейки (конька), движущегося по плоскости в направлении своей длины, могут служить декартовы координаты x , y некоторой точки линейки и угол наклона φ линейки к оси x . Уравнение связи в этом случае имеет вид $\operatorname{tg} \varphi = dy/dx$ и также является неинтегрируемым.

Во всех таких задачах число обобщенных координат не может быть уменьшено при помощи уравнений связей, но координаты не являются независимыми. Предположим, что на систему

с s степенями свободы наложены голономные и неголономные связи. Голономные связи позволяют исключить зависимые переменные и выбрать s независимых переменных q_α , удовлетворяющих уравнениям голономных связей. Координаты частиц можно выразить через q_α :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t). \quad (41.17)$$

Линейные уравнения неголономных связей имеют вид

$$\int_{n=1}^s A_{n\alpha} dq_\alpha + A_n dt = 0 \quad (n = 1, \dots, \kappa), \quad (41.18)$$

где $A_{n\alpha}$, A_n — независимые функции координат q_σ и времени, так что число независимых координат равно в действительности $s - \kappa$, но зависимые переменные нельзя исключить, — уравнения (41.18) неинтегрируемые. Вместе с тем имеется возможность исключить κ зависимых вариаций δq_α , поскольку для вариаций координат должны быть справедливы уравнения

$$\int_{n=1}^s A_{n\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (41.19)$$

Вернемся к выводу уравнений Лагранжа из принципа Даламбера:

$$\int_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \int_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i. \quad (41.20)$$

В результате варьирования и дифференцирования (41.17) по времени и переменным q_σ получим соотношения

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, \dots, s),$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \mathbf{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i,$$

при помощи которых уравнение Даламбера преобразуется к виду (см. § 29):

$$\int_{\alpha=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0, \quad (41.21)$$

где Q_α — обобщенная сила. При наличии только голономных связей все δq_α были бы независимыми. Однако теперь s вариаций δq_α подчинены κ уравнениям неголономных связей (41.19).

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа умножим каждое из κ уравнений (41.19) на неопределенный множитель λ_l и прибавим результат к уравнению (41.21). Получим

$$\int_{\alpha=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha - \int_{l=1}^{\kappa} \lambda_l A_{l\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0. \quad (41.22)$$

Подберем множители λ_l так, чтобы в этом уравнении коэффициенты при зависимых вариациях δq_α обратились в нуль. Тогда коэффициенты при остальных независимых вариациях будут равны нулю, поскольку равна нулю их линейная комбинация. Следовательно, уравнения движения неголономной системы имеют вид системы s уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = \int_{l=1}^{\kappa} \lambda_l A_{l\alpha} \quad (41.23)$$

($\alpha = 1, \dots, s$). Вместе с уравнениями неголономных связей (41.18) в виде

$$\int_{n=1}^s A_{n\alpha} \dot{q}_\alpha + A_n = 0 \quad (n = 1, \dots, \kappa) \quad (41.24)$$

уравнения (41.23) образуют систему $s + \kappa$ уравнений для s обобщенных координат и κ множителей Лагранжа.

5. Шар на шероховатой плоскости. Для иллюстрации метода рассмотрим качение без проскальзывания однородного шара радиуса a по горизонтальной плоскости xOy ; ось z неподвижной системы координат S направлена вверх по вертикали; $z - a = 0$ — уравнение голономной связи. Ориентация системы координат S' , жестко связанной с шаром, относительно направлений координатных осей системы S определяется углами Эйлера φ , θ , ψ . Начало координат системы S' находится в центре шара. Отсутствие проскальзывания точки контакта x_0 , y_0 с плоскостью выражается равенствами

$$\dot{x}_0 - a\omega_y = 0, \quad \dot{y}_0 + a\omega_x = 0,$$

где ω — угловая скорость шара. Составляющие угловой скорости по направлениям осей системы S равны

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Поэтому условие качения выражается двумя неинтегрируемыми уравнениями связей:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 - a(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta) &= 0, \\ \dot{y}_0 + a(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Шар имеет три степени свободы. Выберем $x_0, y_0, \varphi, \theta, \psi$ в качестве обобщенных координат q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 соответственно. В новых обозначениях уравнения связей можно представить в виде

$$A_{l\alpha} \dot{q}_\alpha + A_l = 0 \quad (l = 1, 2),$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} A_l &= 0, \quad A_{11} = 1, \quad A_{12} = A_{13} = 0, \quad A_{14} = -a \sin \varphi, \quad A_{15} = a \cos \varphi \sin \theta \\ A_{21} &= A_{23} = 0, \quad A_{22} = 1, \quad A_{24} = a \cos \varphi, \quad A_{25} = a \sin \varphi \sin \theta \end{aligned} \right\}.$$

Эти коэффициенты определяют правые части уравнений движения неголономной системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = \int_{l=1}^{\kappa} \lambda_l A_{l\alpha}.$$

Левые части в отсутствие обобщенных сил Q_α полностью определяются производными от кинетической энергии как функции обобщенных координат и скоростей. Для кинетической энергии имеем

$$\begin{aligned}E_{(k)} &= \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{I}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{I}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta),\end{aligned}$$

где m, I — масса и момент инерции шара. Подставляя найденные выражения для коэффициентов $A_l, A_{l\alpha}$ и кинетической энергии в уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_{(k)}}{\partial q_\alpha} = \lambda_l A_{l\alpha} \quad (l = 1, 2),$$

получим

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_0 &= \lambda_1, \\ m\ddot{y}_0 &= \lambda_2, \\ I \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) &= 0, \\ I(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta) &= a(\lambda_2 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi), \\ I(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta) &= a \sin \theta (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi).\end{aligned}$$

Пять уравнений вместе с двумя уравнениями неголономных связей и начальными условиями полностью определяют состояние шара на шероховатой плоскости. Из уравнений непосредственно видно, что составляющая угловой скорости шара ω_z вдоль вертикальной оси остается постоянной. Остается неизменной кинетическая энергия шара, а также кинетическая энергия поступательного движения и вращения по отдельности.

§ 42. Интегрирование уравнений Эйлера движения свободного твердого тела

В отсутствие внешних сил центр масс твердого тела может служить началом координат инерциальной системы отсчета. Динамика твердого тела с неподвижным центром масс и равным нулю моментом внешних сил относительно центра масс определяется уравнениями Эйлера

$$I_{\alpha\beta} \frac{d\omega_\beta}{dt} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_{\gamma\sigma} \omega_\beta \omega_\sigma = 0, \quad (42.1)$$

или в главных осях

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= 0.\end{aligned} \quad (42.2)$$

Кинетическая энергия твердого тела при этом остается постоянной. Действительно, умножая уравнения (42.1) на ω_α и суммируя по α , получим

$$I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \frac{d\omega_\beta}{dt} = 0.$$

Переставляя здесь индексы суммирования, складывая результат с исходным уравнением и интегрируя, находим

$$E_{(k)} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \text{const}. \quad (42.3)$$

В главных осях тензор инерции диагонален. Поэтому

$$E_{(k)} = \frac{1}{2} I_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 = \text{const.} \quad (42.4)$$

Так как кинетическая энергия $E_{(k)}$ постоянна, проекция угловой скорости на вектор момента импульса $I_{\alpha\beta} \omega_{\beta}$ также постоянна.

Умножим далее уравнения (42.1) на $I_{\alpha\mu} \omega_{\mu}$ и просуммируем по α . Интегрируя результат по времени, получим

$$\mathbf{L}^2 = I_{\alpha\beta} \omega_{\beta} I_{\alpha\mu} \omega_{\mu} = \text{const.} \quad (42.5)$$

В системе координат S' с осями, совпадающими по направлению с главными осями инерции, соотношение (42.5) имеет вид

$$\mathbf{L}^2 = I_{\alpha}^2 \omega_{\alpha}^2 = \text{const.} \quad (42.6)$$

Равенства (42.5) (42.6) выражают сохранение во времени абсолютной величины момента импульса твердого тела.

Найденные интегралы движения позволяют исключить компоненты ω_1, ω_2 из дифференциального уравнения для ω_3 (42.2). Действительно, из интегралов (42.4) и (42.6) находим

$$\begin{aligned} I_1(I_2 - I_1)\omega_1^2 &= I_3(I_3 - I_2)\omega_3^2 + 2I_2 E_{(k)} - \mathbf{L}^2, \\ I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2 &= I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 - 2I_1 E_{(k)} + \mathbf{L}^2. \end{aligned}$$

Перемножая левые и правые части этих соотношений и извлекая из результата квадратный корень, получим для $(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$:

$$(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \sqrt{\frac{\chi(\omega_3)}{I_1 I_2}}, \quad (42.7)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(\omega_3) &= \left\{ \frac{1}{I_1 I_2} [I_3(I_3 - I_2)\omega_3^2 + 2TI_2 - \mathbf{L}^2] \times \right. \\ &\quad \left. \times [I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 - 2TI_1 + \mathbf{L}^2] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя (42.7) в (42.2), приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{1}{I_3} \sqrt{\frac{\chi(\omega_3)}{I_1 I_2}}. \quad (42.8)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$t = -I_3 \sqrt{I_1 I_2} \int \frac{d\omega_3}{\sqrt{\chi(\omega_3)}} + \text{const.} \quad (42.9)$$

Здесь $\chi(\omega_3)$ — полином четвертой степени. Следовательно, $\omega_3(t)$ — эллиптическая функция.

Уравнения для $\omega_1(t), \omega_2(t)$ получаются аналогично (42.8) и приводят к эллиптическим интегралам $t = t_1(\omega_1), t = t_2(\omega_2)$. В предположении, что $I_1 > I_2 > I_3$, решения уравнений для компонент угловой скорости в терминах эллиптических функций Якоби модуля k можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \operatorname{dn} p(t - t_0), \\ \omega_2 &= \beta \operatorname{sn} p(t - t_0), \\ \omega_3 &= \gamma \operatorname{cn} p(t - t_0) \end{aligned} \quad (42.10)$$

при $\mathbf{L}^2 > 2TI_2$. Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\mathbf{L}^2 - 2TI_3}{I_1(I_1 - I_3)}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2TI_1 - \mathbf{L}^2}{I_2(I_1 - I_2)}}, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{2TI_1 - \mathbf{L}^2}{I_3(I_1 - I_3)}}; \\ p &= \sqrt{\frac{(\mathbf{L}^2 - 2TI_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad k = \sqrt{\frac{2TI_1 - \mathbf{L}^2}{\mathbf{L}^2 - 2TI_3} \frac{(I_2 - I_3)}{(I_1 - I_2)}}. \end{aligned}$$

При $\mathbf{L}^2 < 2TI_2$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \operatorname{cn} p(t - t_0), \\ \omega_2 &= \beta \operatorname{sn} p(t - t_0), \\ \omega_3 &= \gamma \operatorname{dn} p(t - t_0). \end{aligned} \quad (42.11)$$

Выражения для α и γ остаются в силе и в этом случае. Кроме того,

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{\mathbf{L}^2 - 2TI_3}{I_2(I_2 - I_3)}}, \quad p = \sqrt{\frac{(2TI_1 - \mathbf{L}^2)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2 I_3}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\mathbf{L}^2 - 2TI_3}{2TI_1 - \mathbf{L}^2} \frac{(I_1 - I_2)}{(I_2 - I_3)}}. \end{aligned}$$

Геометрическое представление свободного движения твердого тела с одной неподвижной точкой дано Пуансо.

В системе координат S' построим эллипсоид инерции

$$f(x'_1, x'_1, x'_1) = I_1(x'_1)^2 + I_2(x'_2)^2 + I_3(x'_3)^2 - 1 = 0. \quad (42.12)$$

Вектор ω пересекает эту поверхность в некоторой точке с координатами ξ_α на расстоянии $R = \sqrt{\xi_\alpha \xi_\alpha}$ от начала координат. Числа ξ_α удовлетворяют уравнению эллипсоида (42.12), поскольку принадлежат его поверхности. Направляющие косинусы векторов ξ и ω совпадают, так что $\xi_\alpha/R = \omega_\alpha/\omega$.

Подставляя это значение ξ_α в уравнение (42.12), получим

$$\frac{R^2}{\omega^2} I_\alpha \omega_\alpha^2 = \frac{R^2}{\omega^2} 2E_{(k)} = 1, \quad (42.13)$$

т. е. отношение ω/R постоянно и компоненты угловой скорости пропорциональны координатам ξ_α :

$$\omega_\alpha = \frac{\omega}{R} \xi_\alpha = \sqrt{2E_{(k)}} \xi_\alpha. \quad (42.14)$$

Построим далее плоскость, касательную к эллипсоиду в точке с координатами ξ_α . Вектор нормали к поверхности эллипсоида (42.12) в точке касания пропорционален градиенту функции $f(x'_1, x'_1, x'_1)$, так что, принимая во внимание (42.14), будем иметь

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'_\alpha} \right|_{\xi_\alpha} = 2I_{(\alpha)} \xi_\alpha = 2I_{(\alpha)} \omega_\alpha \frac{R}{\omega} = 2 \frac{R}{\omega} L_\alpha. \quad (42.15)$$

Отсюда видно, что момент импульса твердого тела L_α перпендикулярен касательной плоскости. При этом проекция угловой скорости ω на направление момента импульса \mathbf{L} является постоянной:

$$\omega \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{L_\alpha \omega_\alpha}{|\mathbf{L}|} = \frac{2E_{(k)}}{|\mathbf{L}|} = \frac{\sqrt{2E_{(k)}}}{|\mathbf{L}|} = \text{const}. \quad (42.16)$$

Расстояние от закрепленной точки O до касательной плоскости равно проекции вектора ξ на направление нормали $\mathbf{L}/|\mathbf{L}|$. Это расстояние также остается неизменным:

$$\xi \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{R L_\alpha \omega_\alpha}{\omega |\mathbf{L}|} = \frac{1}{\sqrt{2E_{(k)}}} \frac{2E_{(k)}}{|\mathbf{L}|} = \frac{\sqrt{2E_{(k)}}}{|\mathbf{L}|} = \text{const}. \quad (42.17)$$

Таким образом, движение твердого тела с одной закрепленной точкой можно представить как качение жестко связанного с твердым телом эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости, перпендикулярной неподвижному вектору момента импульса \mathbf{L} и отстоящей от закрепленной точки на расстоянии $\frac{\sqrt{2E_{(k)}}}{|\mathbf{L}|}$. Угловая скорость ω тела направлена из точки O

в точку касания. На эллипсоиде и на касательной плоскости точка касания вычерчивает кривые, которые носят названия *поллюдия* и *герполодия* соответственно.

Решение динамической задачи для свободного движения твердого тела значительно упрощается, если твердое тело обладает симметрией. Ось z' системы координат S' с началом в центре масс можно выбрать в направлении оси симметрии так, что все три оси будут главными осями инерции и центральные моменты инерции I_1 и I_2 будут совпадать. Тогда из уравнений Эйлера следует, что $\omega_3 = \omega_{30} \equiv \text{const}$ и

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1, \quad (42.18)$$

где $\Omega = \omega_{30}(I_1 - I_3)/I_1$. Из (42.18) имеем

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 + i\omega_2) = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2). \quad (42.19)$$

Отсюда

$$\omega_1 + i\omega_2 = a e^{i(\Omega t + \beta)}, \quad (42.20)$$

$\omega_1^2 + \omega_2^2 = a^2$; a, β — постоянные интегрирования. Мы видим, что вектор с компонентами ω_1 и ω_2 вращается с угловой скоростью Ω , оставаясь постоянным по величине; при этом угловая скорость твердого тела

$$\omega = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_{30} \mathbf{k}'$$

прецессирует с частотой Ω вокруг оси симметрии тела z' .

Для планеты Земля ω_{30} — суточная скорость вращения, $I_1/(I_1 - I_3) \cong 300$, и угловая скорость вращения Земли должна описывать окружность вокруг Северного полюса за 300 дней. Наблюдаемый период около 427 дней. Расхождение обусловлено несовершенством твердотельной модели планеты.

Глава 11

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

§ 43. Линейные колебания консервативных систем

Динамика системы частиц в связанных состояниях сводится к более простой задаче динамики твердого тела в условиях, когда в процессе движения можно считать неизменным относительное расположение частиц. Все атомы и молекулы систем в таком невозмущенном состоянии должны находиться в положениях равновесия.

В реальных физических условиях нельзя пренебречь движением атомов и молекул, не оставив без внимания физические явления, обусловленные таким движением. Мы снова возвращаемся к проблеме N тел, но теперь выделим класс задач с неизменным относительным расположением или конфигурацией положений равновесия (кристаллической решеткой для кристаллов) и сосредоточим внимание на эволюции малых отклонений частиц от положений равновесия.

Для динамики малых возмущений не требуется полная информация об энергии взаимодействия частиц. Достаточно, чтобы энергия взаимодействия в малой окрестности положения равновесия допускала аппроксимацию квадратичной формой; уравнения движения будут линейными, и многих математических трудностей, характерных для систем многих частиц, удастся избежать. Приближение энергии взаимодействия более высокими степенями координат приводит к системам нелинейных уравнений, и каждая отдельная задача требует самостоятельного исследования.

Динамика консервативной системы с s степенями свободы полностью определяется функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} (q_1, \dots, q_s) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, \dots, q_s) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, s) \quad (43.1)$$

и начальными условиями. Диссипативные потери энергии в такой системе отсутствуют, а связи являются стационарными.

Сосредоточим внимание на консервативной системе, имеющей хотя бы одно положение равновесия $q_\alpha^{(eq)}$, определяемое из условий

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{eq} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{eq} \neq 0. \quad (43.2)$$

Найдем закон движения системы в окрестности $q_\alpha^{(eq)}$ при малых начальных отклонениях от положения равновесия и малых начальных скоростях \dot{q}_α .

По крайней мере при малых t отклонения от равновесия $\xi_\alpha(t) = q_\alpha(t) - q_\alpha^{(eq)}$ и все $\dot{\xi}_\alpha(t) = \dot{q}_\alpha(t)$ малы. На таких временах функцию Лагранжа (43.1) можно приближенно заменить ее разложением в ряд по степеням $\xi_\alpha, \dot{\xi}_\alpha$, сохраняя порядок малости первого не исчезающего члена взаимодействия. В разложении энергии взаимодействия

$$U(q_1, \dots, q_s) = U(q_1^{(eq)}, \dots, q_s^{(eq)}) + \left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{eq} (q_\alpha - q_\alpha^{(eq)}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{eq} (q_\alpha - q_\alpha^{(eq)}) (q_\beta - q_\beta^{(eq)}) + \dots \quad (43.3)$$

слагаемое $U(q_1^{(eq)}, \dots, q_s^{(eq)})$ можно опустить вследствие неоднозначности функции Лагранжа. Линейные члены разложения равны нулю. Отличными от нуля по условию (43.2) будут квадратичные слагаемые, содержащие информацию о взаимодействии в виде вторых производных функции U . При

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{eq} = 0$$

первый не исчезающий член разложения потенциальной энергии будет иметь порядок выше второго. Уравнения эволюции малых возмущений таких систем будут нелинейными дифференциальными уравнениями. С точностью до квадратичных слагаемых

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta. \quad (43.4)$$

Здесь

$$a_{\alpha\beta} \equiv a_{\alpha\beta}|_{eq} = a_{\beta\alpha}, \quad u_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{eq} = u_{\beta\alpha}. \quad (43.5)$$

Уравнения Лагранжа в переменных ξ_α :

$$a_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta + u_{\alpha\beta}\xi_\beta = 0, \quad (43.6)$$

представляют собой систему s уравнений движения консервативной системы в линейном приближении. Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений ищем в виде комплексных $\xi_\alpha = A_\alpha \exp(-i\omega t)$, вещественные части которых соответствуют действительному движению. Уравнения движения (43.6) в этом случае сводятся к системе алгебраических уравнений для комплексных амплитуд A_α :

$$(u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta})A_\beta = 0. \quad (43.7)$$

Эта система имеет нетривиальные решения лишь при условии равенства нулю ее определителя

$$\Delta \equiv \det |u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}| = 0. \quad (43.8)$$

Характеристическое уравнение (43.8) имеет в общем случае s различных корней ω_μ^2 . Вследствие вещественности и симметрии коэффициентов $u_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ все корни ω_μ^2 вещественны. Действительно, из (43.7) имеем после умножения на комплексно-сопряженные амплитуды A_α^*

$$u_{\alpha\beta}A_\alpha^*A_\beta = \omega^2 a_{\alpha\beta}A_\alpha^*A_\beta. \quad (43.9)$$

Отсюда

$$u_{\alpha\beta}(A_\alpha^*A_\beta + A_\beta^*A_\alpha) = \omega^2 a_{\alpha\beta}(A_\alpha^*A_\beta + A_\beta^*A_\alpha). \quad (43.10)$$

В круглых скобках равенства (43.10) стоят суммы комплексно-сопряженных чисел, которые всегда вещественны, и, следовательно, ω^2 также вещественно.

Найдем общее решение уравнений движения системы, имеющих различные корни ω_μ^2 . Для каждого корня ω_μ^2 определитель системы (43.8) обращается в нуль, так что не все уравнения для амплитуд $A_\alpha(\omega_\mu^2) \equiv A_\alpha^\mu$ независимы. Пусть, например, следствием остальных уравнений является уравнение с номером s . Тогда при $\alpha, \beta = 1, \dots, s-1$ определитель $\Delta_s^\mu \equiv \det |u_{\alpha\beta} - \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}| \neq 0$.

Иначе корень ω_μ^2 был бы кратным. Остальные $s-1$ независимые уравнения можно представить в виде

$$(u_{\alpha\beta} - \omega_\mu^2 a_{\alpha\beta}) \frac{A_\alpha^\mu}{A_s^\mu} = -(u_{\alpha s} - \omega_\mu^2 a_{\alpha s}) \quad (43.11)$$

($\alpha, \beta = 1, \dots, s-1$; по (μ) нет суммирования). Отсюда по формулам Крамера находим, в частности,

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = -\frac{1}{\Delta_s^{(\mu)}} \det \times \begin{bmatrix} u_{1s} - \omega_\mu^2 a_{1s} & \cdots & u_{12} - \omega_\mu^2 a_{12} & \cdots & u_{1,s-1} - \omega_\mu^2 a_{1,s-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1,s} - \omega_\mu^2 a_{s-1,s} & u_{s-1,2} - \omega_\mu^2 a_{s-1,2} & \cdots & u_{s-1,s-1} - \omega_\mu^2 a_{s-1,s-1} \end{bmatrix}.$$

В определителе, стоящем в числителе этого выражения, можно переставить первый столбец так, чтобы он стал последним. Определитель при этом изменит знак и будет равен минору Δ_1^μ характеристического определителя $\Delta(\omega_\mu^2)$, полученному вычеркиванием первого столбца и последней строки, т. е.

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{A_s^{(\mu)}} = \frac{\Delta_1^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}}.$$

Аналогичные соотношения имеют место для всех амплитуд:

$$\frac{A_1^{(\mu)}}{\Delta_1^{(\mu)}} = \frac{A_2^{(\mu)}}{\Delta_2^{(\mu)}} = \cdots = \frac{A_s^{(\mu)}}{\Delta_s^{(\mu)}}. \quad (43.12)$$

Для каждого фиксированного корня ω_μ^2 это отношение является произвольной постоянной. Обозначив ее через C_μ , видим, что комплексные амплитуды A_α^μ пропорциональны вещественным минорам характеристического определителя:

$$A_\alpha^\mu = C_{(\mu)} \Delta_\alpha^{(\mu)}. \quad (43.13)$$

Найденные решения для комплексных амплитуд (43.13) позволяют представить частное решение ξ_α^μ уравнений движения, соответствующее корню ω_μ^2 , в виде

$$\xi_\alpha^\mu = \text{Re} \{ C_{(\mu)} \Delta_\alpha^{(\mu)} \exp(-i\omega_\mu t) \} = \Delta_\alpha^{(\mu)} \text{Re} \{ C_{(\mu)} \exp(-i\omega_\mu t) \}. \quad (43.14)$$

Общее решение является вещественной частью суперпозиции частных решений:

$$\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^s \xi_\alpha^\mu = \sum_{\mu=1}^s \Delta_\alpha^{(\mu)} \text{Re} \{ C_{(\mu)} \exp(-i\omega_\mu t) \}. \quad (43.15)$$

Из (43.15) непосредственно видно, что движение системы будет происходить в окрестности положения равновесия при всех, а не только малых t в том и только в том случае, когда все $\omega_\mu^2 > 0$. Любое возмущение многочастичной системы в окрестности положения равновесия в этом случае может быть представлено в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Если хотя бы один корень ω_μ^2 отрицателен, то отклонения ξ_α от положения равновесия будут содержать экспоненциально нарастающие с течением времени слагаемые. Положение равновесия в этом случае является *неустойчивым*. При не слишком малых t эволюция отклонений от положений неустойчивого равновесия не описывается формулами (43.15). Квадратичное приближение функции Лагранжа в таких случаях оказывается недостаточным, и необходим анализ нелинейных уравнений движения.

Все ω_μ^2 положительны, и система совершает колебания, если квадратичная форма, представляющая энергию взаимодействия, положительна: $u_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta > 0$. Действительно, из уравнений для амплитуд (43.7) имеем

$$u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)} = \omega_{(\mu)}^2 a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)} \quad (43.16)$$

и, следовательно,

$$u_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_{(\mu)}^2 a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}. \quad (43.17)$$

Квадратичная форма $a_{\alpha\beta}\Delta_\alpha^{(\mu)}\Delta_\beta^{(\mu)}$ положительно определена (как удвоенное значение кинетической энергии). Если при этом положительно определена и квадратичная форма в левой части равенства (43.17), то все $\omega_\mu^2 > 0$, и положение равновесия является *устойчивым*. Для этого все главные миноры матрицы (43.5) $u_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{eq}$ должны быть положительными (критерий Дж. Сильвестра). Потенциальная энергия системы в положении устойчивого равновесия будет иметь изолированный минимум.

§ 44. Нормальные (главные) координаты и нормальные колебания

Воспользуемся произволом в выборе обобщенных координат и введем вместо отклонений ξ_α от положения устойчивого равновесия новые обобщенные координаты θ_μ по формулам

$$\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^s \Delta_\alpha^\mu \theta_\mu. \quad (44.1)$$

Из общего решения (43.15) видно, что новые координаты θ_μ в качестве решений уравнений Лагранжа должны быть пропорциональными $C_{(\mu)} \exp(-i\omega_\mu t)$.

Кинетическая энергия в приближении линейных колебаний в новых переменных примет вид

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \sum_{\mu=1}^s \sum_{\nu=1}^s \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu \dot{\theta}_\mu \dot{\theta}_\nu \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \sum_{\nu=1}^s \Delta_{\mu\nu} \dot{\theta}_\mu \dot{\theta}_\nu. \quad (44.2)$$

Покажем, что матрица

$$\epsilon_{\mu\nu} = a_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu = \epsilon_{\nu\mu} \quad (44.3)$$

диагональна. Действительно, из (43.16) следует равенство

$$u_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu = \omega_{(\mu)}^2 a_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^{(\mu)} \Delta_\beta^{(\nu)} = \omega_{(\mu)}^2 \epsilon_{\mu\nu}. \quad (44.4)$$

Учитывая симметрию матриц $u_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\mu\nu}$, получим также

$$u_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu = \omega_{(\nu)}^2 \Delta_{\mu\nu}. \quad (44.5)$$

Из (44.4) и (44.5) имеем

$$(\omega_{(\mu)}^2 - \omega_{(\nu)}^2) \epsilon_{\mu\nu} = 0. \quad (44.6)$$

Поэтому $\epsilon_{\mu\nu}$ — диагональная матрица:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{(\mu)} \delta_{\mu\nu}, \quad (44.7)$$

где через ϵ_μ обозначены диагональные матричные элементы и по (μ) нет суммирования. Таким образом, кинетическая энергия (44.2) в переменных θ_μ приводится к нормальному виду:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \sum_{\nu=1}^s \epsilon_{\mu\nu} \dot{\theta}_\mu \dot{\theta}_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \epsilon_\mu \dot{\theta}_\mu^2. \quad (44.8)$$

Потенциальная энергия $U = \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ в новых переменных равна

$$U = \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \sum_{\mu=1}^s \sum_{\nu=1}^s \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu \theta_\mu \theta_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \sum_{\nu=1}^s \omega_\mu^2 \epsilon_{\mu\nu} \theta_\mu \theta_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \epsilon_\mu \omega_\mu^2 \theta_\mu^2 \quad (44.9)$$

и также приводится к нормальному виду.

Функция Лагранжа консервативной системы в переменных θ_μ имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^s \epsilon_\mu (\dot{\theta}_\mu^2 - \omega_\mu^2 \theta_\mu^2), \quad (44.10)$$

уравнения Лагранжа представляют собой систему s независимых уравнений:

$$\ddot{\theta}_\mu + \omega_\mu^2 \theta_\mu = 0. \quad (44.11)$$

Решения уравнений (44.11) можно представить в виде

$$\theta_\mu = a_\mu \cos(\omega_\mu t - \varphi_\mu), \quad (44.12)$$

так что каждая новая обобщенная координата θ_μ будет гармонической функцией с частотой, равной одной из собственных частот системы. Такие координаты называются *нормальными (главными)*, а соответствующие движения системы *нормальными (главными) колебаниями*.

Для консервативной системы нормальные координаты θ_μ всегда могут быть введены при помощи линейного преобразования обобщенных координат. Если такое преобразование координат найдено, то проблема вычисления собственных частот ω_μ линейных колебаний становится тривиальной проблемой вычисления коэффициентов при θ_μ в уравнениях (44.11). Каждое собственное (нормальное) колебание системы, представленное формулой (44.12), может быть возбуждено путем подходящего выбора начальных условий. Любые возмущения линейных систем представимы в виде суперпозиции нормальных колебаний.

Замечание о кратных корнях (вырожденных частотах). Если характеристическое уравнение системы имеет кратные корни, то комплексные амплитуды A_α^μ не будут выражаться через миноры характеристического определителя, подобно (43.13), так как сами миноры равны нулю. Однако решения уравнений движения и в этом случае можно искать в виде $\xi_\alpha = A_\alpha \exp(-i\omega t)$. При наличии кратных корней решения уравнений движения также можно получить, если искусственно изменить коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $u_{\alpha\beta}$ на малые величины так, чтобы кратные корни исчезли, а затем сделать предельный переход.

Одинаковым корням соответствуют нормальные колебания с одной и той же собственной частотой системы, но с разными амплитудами и фазами.

§ 45. Нулевые частоты. Колебания молекул

Квадратичная форма $\frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$, появившаяся в результате разложения по степеням отклонений ξ_α от положения равновесия энергии взаимодействия системы, может не быть положительно определенной. Левая часть уравнения (43.17):

$$u_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^{(\mu)} \Delta_\beta^{(\mu)} = \omega_{(\mu)}^2 a_{\alpha\beta} \Delta_\alpha^{(\mu)} \Delta_\beta^{(\mu)},$$

в таких случаях может обращаться в нуль при не равных нулю $\Delta_\alpha^{(\mu)}$, и среди собственных частот системы могут появиться нулевые.

Физическая причина появления нулевых частот лежит в определении основного невозмущенного состояния системы как жесткой пространственной «решетки» положений равновесия. Такая невозбужденная совокупность положений равновесия может быть представлена в виде твердого тела с шестью степенями свободы: тремя поступательными и тремя вращательными. Из уравнений движения в нормальных координатах (44.11):

$$\ddot{\theta}_\mu + \omega_\mu^2 \theta_\mu = 0,$$

следует, что нулевым частотам соответствуют законы движения вида $\theta_\mu = \dot{\theta}_{0\mu} t + \theta_{0\mu}$.

Поступательные и вращательные степени свободы можно исключить заранее из уравнений движения при помощи дополнительных равенств («связей»), которым должны подчиняться координаты системы.

Будем считать, что центр масс системы частиц в равновесном состоянии должен быть неподвижным и полный импульс системы частиц равен нулю. Тогда

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{0i} = \text{const}, \quad \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = 0. \quad (45.1)$$

Здесь $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{0i} + \xi_i$, где \mathbf{r}_{0i} — равновесные положения частиц, а ξ_i — малые отклонения от положений равновесия. Из (45.1) следует, что

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \xi_i = 0.$$

Это равенство будет выполнено за счет выбора координат, если потребовать, чтобы координаты ξ_i удовлетворяли уравнениям

$$\sum_{i=1}^N m_i \xi_i = 0. \quad (45.2)$$

При помощи равенств (45.2) в выражении для функции Лагранжа можно исключить три обобщенных координаты.

Потребуем, кроме того, чтобы полный момент импульса системы также был равен нулю. Тогда будем иметь в линейном приближении

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \cong \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_{0i} \times \dot{\xi}_i) = 0. \quad (45.3)$$

Отсюда видно, что дополнительным условием на координаты, обеспечивающим равенство нулю момента импульса, является условие

$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_{0i} \times \xi_i) = 0. \quad (45.4)$$

Три равенства (45.4) позволяют исключить дополнительно три степени свободы.

С подобными задачами приходится иметь дело при изучении колебаний молекул. В невозбужденном состоянии многоатомные молекулы допускают представление в виде твердых тел. Вычисления инерционных характеристик таких молекулярных конфигураций проведены выше. Здесь в качестве приложения к общей теории линейных колебаний консервативных систем рассмотрим колебания линейной симметричной трехатомной молекулы с массами m , M , m в следующей постановке: взаимодействия между атомами зависят только от расстояний между ними и имеет характер притяжения для «ближайших соседей» и отталкивания для крайних атомов. Такой характер межатомных взаимодействий может обеспечить линейную конфигурацию молекулы. Вдоль линии расположения и движения атомов можно выбрать координатную ось x . В равновесном состоянии координаты атомов связаны условием

$$x_{02} - x_{01} = x_{03} - x_{02} = a, \quad (45.5)$$

и, следовательно, невозбужденная молекула моделируется твердым телом. Функция Лагранжа молекулы имеет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2 - U_1(x_2 - x_1) - U_1(x_3 - x_2) - U_2(x_3 - x_1). \quad (45.6)$$

При малых отклонениях атомов от положений равновесия функции U_1 , U_2 можно заменить их разложениями в ряды Тейлора в окрестности положений равновесия. При этом постоянные слагаемые в выражении для функции Лагранжа можно опустить, а слагаемые с первыми производными от энергии взаимодействия в равновесном состоянии равны нулю.

С точностью до квадратичных слагаемых будем иметь

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} U_1''(a) [(x_2 - x_1) - a]^2 - \frac{1}{2} U_1''(a) [(x_3 - x_2) - a]^2 - \frac{1}{2} U_2''(2a) [(x_3 - x_1) - 2a]^2. \quad (45.7)$$

Полагая в (45.7)

$$\xi_1 = x_1 - x_{01}, \quad \xi_2 = x_2 - x_{02}, \quad k_1 = U_1''(a), \quad k_2 = U_2''(2a), \quad (45.8)$$

получим

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2} [(k_1 + k_2) \xi_1^2 + 2k_1 \xi_2^2 + (k_1 + k_2) \xi_3^2 - 2k_1 \xi_1 \xi_2 - 2k_2 \xi_1 \xi_3 - 2k_1 \xi_3 \xi_2] \equiv \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \quad (45.9)$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Матрицы $a_{\alpha\beta}$ и $u_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad u_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 2k_1 & -k_1 \\ -k_2 & -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}. \quad (45.10)$$

Характеристический определитель Δ есть определитель матрицы $u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2) - m\omega^2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 2k_1 - M\omega^2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_1 & (k_1 + k_2) - m\omega^2 \end{vmatrix} = -\omega^2 \{ (k_1 + k_2 - m\omega^2) [(k_1 + k_2)M + 2mk_1 - mM\omega^2] + (2mk_1 - Mk_2)k_2 \}. \quad (45.11)$$

Характеристическое уравнение $\Delta = 0$ имеет три корня:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m}, \quad \omega_3^2 = k_1 \frac{2m + M}{mM}. \quad (45.12)$$

Нулевая частота $\omega_1 = 0$ здесь появляется независимо от индивидуальных физических свойств молекулы. Если равновесные конфигурации линейных трехатомных молекул определяются энергиями межатомных взаимодействий, такими, что $U_1''(a) + 2U_2''(2a) = 0$, то частота ω_2 также будет равна нулю; в режиме линейных колебаний молекула совершает колебания на одной частоте, не зависящей от амплитуды колебаний.

Для вычисления амплитуд колебаний на собственных частотах корни (45.12) следует подставить в уравнения для комплексных амплитуд $(u_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta})A_\beta = 0$. При $\omega^2 = \omega_\mu^2$ эти уравнения становятся зависимыми, но два из них независимы. Полагая, что это уравнения с номерами $\alpha = 1, 2$, будем иметь для любого корня ω_μ^2 :

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 - m\omega_\mu^2) \frac{A_1^{(\mu)}}{A_3^{(\mu)}} - k_1 \frac{A_2^{(\mu)}}{A_3^{(\mu)}} = k_2, \\ -k_1 \frac{A_1^{(\mu)}}{A_3^{(\mu)}} + (2k_1 - M\omega_\mu^2) \frac{A_2^{(\mu)}}{A_3^{(\mu)}} = k_1. \end{cases} \quad (45.13)$$

Определитель неоднородной системы уравнений (45.13) равен

$$\Delta_3^\mu = (k_1 + k_2 - m\omega_\mu^2)(2k_1 - M\omega_\mu^2) - k_1^2 \quad (45.14)$$

и является минором характеристического определителя. Два других минора равны

$$\Delta_1^\mu = k_1^2 + k_2(2k_1 - M\omega_\mu^2), \quad (45.15)$$

$$\Delta_2^\mu = k_1(k_1 + 2k_2 - m\omega_\mu^2). \quad (45.16)$$

Комплексные амплитуды как решения системы уравнений (45.13) пропорциональны минорам (45.14), (45.15), (45.16):

$$A_\alpha^\mu = C_{(\mu)} \Delta_\alpha^{(\mu)}, \quad (45.17)$$

где $C_{(\mu)}$ — произвольные комплексные постоянные. Остается подставить в эти формулы найденные выражения для собственных частот. Значению $\mu = 1$ соответствует $\omega_1^2 = 0$, и мы находим

$$A_1^1 = A_2^1 = A_3^1 = C_1. \quad (45.18)$$

Такое соотношение между амплитудами соответствует смещению молекулы как целого без изменения энергии взаимодействия атомов.

Значению $\mu = 2$ соответствует частота ω_2 . На этой частоте амплитуды равны

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= C_2(k_1 + 2k_2) \left(k_1 - \frac{M}{m} k_2 \right), \\ A_2^{(2)} &= 0, \quad A_3^{(2)} = -A_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (45.19)$$

крайние атомы совершают колебания с одинаковыми амплитудами и противоположными фазами при неподвижном центральном атоме.

Наконец, на частоте ω_3 (45.12)

$$\begin{aligned} A_1^{(3)} &= C_3 k_1 \left(k_1 - \frac{M}{m} k_2 \right), \quad A_3^{(3)} = A_1^{(3)}, \\ A_2^{(3)} &= C_3 \frac{2mk_1}{M} \left(\frac{M}{m} k_2 - k_1 \right), \end{aligned} \quad (45.20)$$

что свидетельствует об антисимметричном возбуждении молекулы на частоте ω_3 .

Закон движения молекулы можно представить в виде суперпозиции равномерного и прямолинейного движения и линейных колебаний на частотах ω_2, ω_3 :

$$\xi_\alpha = \vartheta t + c + \operatorname{Re} (A_\alpha^{(2)} e^{-i\omega_2 t} + A_\alpha^{(3)} e^{-i\omega_3 t}). \quad (45.21)$$

Подставим сюда найденные соотношения для комплексных амплитуд. Получим

$$\xi_1 = \vartheta t + c + \theta_2 + \theta_3, \quad (45.22)$$

$$\xi_2 = \vartheta t + c - \frac{2m}{M} \theta_3, \quad (45.23)$$

$$\xi_3 = \vartheta t + c - \theta_2 + \theta_3, \quad (45.24)$$

где

$$\theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\theta_3 = a_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

— нормальные колебания.

Из (45.22), (45.23), (45.24) видно, что

$$m\xi_1 + M\xi_2 + m\xi_3 = (2m + M)(\vartheta t + c).$$

Если обобщенные координаты выбраны так, что выполнены равенства (45.2):

$$m(\xi_1 + \xi_3) + M\xi_2 = 0,$$

то ϑ и c будут равны нулю, и трансляционная степень свободы молекулы, соответствующая $\omega_1 = 0$, будет исключена из выражения для функции Лагранжа.

§ 46. Вынужденные колебания консервативных систем

Функция Лагранжа консервативной системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем скалярном поле, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, \dots, q_s) - U^{(e)}(q_1, \dots, q_s, t) \quad (46.1)$$

$$(\alpha, \beta = 1, \dots, s).$$

Здесь $U^{(e)}(q_1, \dots, q_s, t)$ — потенциальная энергия системы во внешнем поле. Предполагается, что система имеет по крайней мере одно положение устойчивого равновесия $q_\alpha^{(eq)}$.

Найдем закон движения системы в окрестности положения равновесия при малых отклонениях от положения равновесия $\xi_\alpha(t) = q_\alpha(t) - q_\alpha^{(eq)}$ и малых скоростях $\dot{\xi}_\alpha(t) = \dot{q}_\alpha(t)$. При конечных t такие условия могут быть реализованы в слабом внешнем поле, что и предполагается ниже.

С точностью до первых, исчезающих вследствие неоднозначности функции Лагранжа, членов разложения потенциальной энергии находим из (46.1)

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + Q_\alpha(t) \xi_\alpha, \quad (46.2)$$

где $Q_\alpha(t) = -\partial U^{(e)} / \partial q_\alpha |^{(eq)}$ — значение внешней обобщенной силы в положении равновесия.

Преобразованием обобщенных координат (44.1), $\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^s \Delta_\alpha^\mu \theta_\mu$, квадратичные формы $a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta$ и $u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ одновременно приводятся к нормальному виду. Для энергии взаимодействия с внешним полем при таком преобразовании будем иметь

$$Q_\alpha(t) \xi_\alpha = Q_\alpha(t) \sum_{\mu=1}^s \Delta_\alpha^\mu \theta_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^s f_\mu \theta_\mu,$$

где $f_\mu(t) = \Delta_\alpha^\mu Q_\alpha(t)$ — обобщенная внешняя сила, соответствующая координате θ_μ . Поэтому в нормальных координатах функция Лагранжа принимает вид

$$L = \sum_{\mu=1}^s \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_\mu (\dot{\theta}_\mu^2 - \omega_\mu^2 \theta_\mu^2) + f_\mu(t) \theta_\mu \right\}, \quad (46.3)$$

а уравнения движения сводятся к s независимым уравнениям:

$$\ddot{\theta}_\mu + \omega_\mu^2 \theta_\mu = f_{(\mu)} / \epsilon_\mu. \quad (46.4)$$

Каждое из уравнений (46.4) описывает вынужденные колебания гармонического осциллятора, имеющего собственную частоту ω_μ . Общее решение (46.4) является суперпозицией общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения (14.44):

$$\theta_\mu = a_{(\mu)} \cos \omega_\mu t + b_{(\mu)} \sin \omega_\mu t + \int_0^t \frac{f_{(\mu)}(\tau) \sin \omega_\mu(t - \tau)}{\epsilon_\mu \omega_\mu} d\tau. \quad (46.5)$$

Для системы с s степенями свободы остаются также справедливыми результаты анализа одномерных вынужденных колебаний. В частности, при совпадении частоты вынуждающей силы с одной из собственных частот системы ω_μ будет иметь место явление резонанса.

§ 47. Линейные колебания диссипативных систем

Динамика системы взаимодействующих частиц, в которой движение частиц сопровождается рассеянием энергии (*диссипативная система*), определена, если заданы функция Лагранжа системы и диссипативные силы. Выделим систему из этого класса, которая имеет по меньшей мере одно положение устойчивого равновесия $q_\alpha^{(eq)}$, и ее функция Лагранжа в малой окрестности положения равновесия может быть представлена тем же приближенным выражением (43.4), что и функция Лагранжа консервативной системы:

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta. \quad (47.1)$$

Диссипативные силы, пропорциональные скоростям частиц, могут быть заданы при помощи *диссипативной функции*:

$$D(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \geq 0, \quad (47.2)$$

$$d_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) = d_{\beta\alpha}(q_1, \dots, q_s) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, s). \quad (47.3)$$

Уравнения движения системы при наличии диссипативных сил, пропорциональных скоростям \dot{q}_α , могут быть получены путем подстановки функции Лагранжа и диссипативной функции в уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (47.4)$$

Из (47.3) видно, что система уравнений движения будет линейной, если не только функция Лагранжа, но и диссипативная функция D в окрестности положения равновесия будет представлена квадратичной формой обобщенных скоростей, т. е. разложение этой функции в окрестности положения равновесия сводится к удержанию только первого члена разложения:

$$d_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s) \cong d_{\alpha\beta}(q_1^{(eq)}, \dots, q_s^{(eq)}) \equiv d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}. \quad (47.5)$$

Тогда в переменных $\xi_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^{(eq)}$ уравнения движения диссипативной системы будут иметь вид

$$a_{\alpha\beta} \ddot{\xi}_\beta + d_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha + u_{\alpha\beta} \xi_\beta = 0. \quad (47.6)$$

Эта система s линейных дифференциальных уравнений не сводится к системе независимых уравнений при помощи введения нормальных координат. Решение системы (47.6) будем искать в виде действительных частей комплексных

$$\xi_\alpha = A_\alpha \exp(-i\omega t). \quad (47.7)$$

Подстановка (47.6) сводит уравнения (47.5) к системе алгебраических уравнений для комплексных амплитуд:

$$(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}) A_\beta = 0. \quad (47.8)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta \equiv \det | -\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta} | = 0. \quad (47.9)$$

Здесь все коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$, $u_{\alpha\beta}$ вещественны. Поэтому корни ($\lambda = -i\omega$) уравнения (47.9) либо вещественные (частоты ω мнимые), либо попарно комплексно-сопряженные. Мнимые части комплексных ω отрицательны. Действительно, после умножения (47.8) на A_α^* и суммирования по α получим

$$(-\omega^2 a_{\alpha\beta} - i\omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}) (A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*) = 0. \quad (47.10)$$

Это квадратное уравнение. Сумма его корней равна

$$-i\omega + i\omega^* = -d_{\alpha\beta} (A_\alpha^* A_\beta + A_\alpha A_\beta^*) / a_{\rho\sigma} (A_\rho^* A_\sigma + A_\rho A_\sigma^*) \quad (47.11)$$

и отрицательна, поскольку диссипативная функция неотрицательна, а кинетическая энергия положительно определена. Полагая в формуле (47.10) $\omega = \nu - i\gamma$, находим

$$-i\omega + i\omega^* = -2\gamma, \quad \gamma > 0. \quad (47.12)$$

Предположим, что корни $-i\omega_\mu$ и $i\omega_\mu^*$ ($\mu = 1, \dots, s$) характеристического уравнения (47.8) найдены. Соответствующие этим корням комплексные амплитуды $A_\alpha^-(\omega_\mu)$ и $A_\alpha^+(\omega_\mu^*)$ могут быть найдены в результате решения уравнений (47.7), которые после подстановки корней становятся линейно зависимыми. Повторяя рассуждения, использованные для определения амплитуд колебаний консервативных систем, приходим к заключению, что комплексные амплитуды пропорциональны минорам $\Delta_\alpha(\omega_\mu)$ и $\Delta_\alpha(\omega_\mu^*)$ характеристического определителя

$$A_\alpha^-(\omega_\mu) = C_\alpha^-(\mu) \Delta_\alpha(\omega_\mu), \quad A_\alpha^+(\omega_\mu^*) = C_\alpha^+(\mu) \Delta_\alpha(\omega_\mu^*). \quad (47.13)$$

Общее решение уравнений движения диссипативной системы (47.3) является вещественной частью суперпозиции частных решений с амплитудами (47.12):

$$\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^s \{ C_\alpha^-(\mu) \Delta_\alpha(\omega_\mu) \exp(-i\omega_\mu t) + C_\alpha^+(\mu) \Delta_\alpha(\omega_\mu^*) \exp(i\omega_\mu^* t) \}. \quad (47.14)$$

Из общего решения (47.13) непосредственно видно, что колебаниям соответствуют лишь комплексно-сопряженные корни $\omega_\mu = \nu_\mu - i\gamma_\mu$, $\omega_\mu^* = \nu_\mu + i\gamma_\mu$ характеристического уравнения. Амплитуды таких колебаний экспоненциально убывают со временем с декрементами затухания γ_μ , появление которых вызвано действием диссипативных сил. Мнимым ω_μ соответствует аperiодическое затухание малых возмущений системы.

§ 48. Вынужденные колебания диссипативных систем

Вынужденные колебания систем частиц при наличии диссипативных сил не сводятся к вынужденным колебаниям набора независимых осцилляторов. В приближении линейных колебаний функция Лагранжа системы взаимодействующих частиц во внешнем потенциальном поле определена выше и совпадает по форме с аналогичным выражением (46.2) для консервативной системы:

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2} u_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + Q_\alpha(t) \xi_\alpha.$$

Диссипативная функция в том же приближении определена равенствами (47.2), (47.4) и равна

$$D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta \quad (d_{\alpha\beta} \geq 0).$$

Поэтому уравнения движения диссипативной системы во внешнем поле в линейном приближении имеют вид

$$a_{\alpha\beta} \ddot{\xi}_\beta + d_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha + u_{\alpha\beta} \xi_\beta = Q_\alpha(t) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, s). \quad (48.1)$$

Общее решение этой системы уравнений представляет собой суперпозицию общего решения (47.13) соответствующей однородной системы и частного решения.

Найдем частное решение уравнений (48.1) для системы частиц во внешнем периодическом поле. Функции $Q_\alpha(t)$ в этом случае будут периодическими функциями времени и могут быть представлены в виде рядов Фурье:

$$Q_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha n} e^{-in\Omega t}, \quad (48.2)$$

$$Q_{\alpha n} = \frac{2}{T} \int_0^T Q_\alpha(t) e^{in\Omega t} dt \quad (Q_{\alpha n}^* = Q_{\alpha, -n}).$$

Здесь $\Omega = 2\pi/T$, T — период функций $Q_\alpha(t)$. Постоянная составляющая $Q_{\alpha n}$ может быть исключена путем сдвига ξ_β . Поэтому достаточно ограничиться суммированием от $n = 1$.

Будем искать частное решение системы (48.1) в виде вещественных частей комплексных

$$\xi_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n} e^{-in\Omega t} \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (48.3)$$

Подставляя (48.2), (48.3) в уравнения движения, получаем систему алгебраических уравнений для комплексных $A_{\alpha n}$:

$$(-n^2 \Omega^2 a_{\alpha\beta} - in\Omega d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}) A_{\beta n} = Q_{\alpha n}. \quad (48.4)$$

Отсюда

$$A_{\sigma n} = \Delta_\sigma(n\Omega) / \Delta(n\Omega), \quad (48.5)$$

где $\Delta(n\Omega)$ — определитель однородной системы уравнений (48.4), $\Delta_\sigma(n\Omega)$ — определитель, полученный из $\Delta(n\Omega)$ заменой столбца с номером σ на столбец $Q_{\alpha n}$ правой части (48.4).

Следовательно, частное решение является вещественной частью комплексных

$$\xi_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\sigma(n\Omega)}{\Delta(n\Omega)} e^{-in\Omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\sigma(n\Omega) \Delta^*(n\Omega)}{\Delta(n\Omega) \Delta^*(n\Omega)} e^{-in\Omega t}. \quad (48.6)$$

Характеристический определитель однородной системы (48.4) является многочленом степени $2s$ с действительными коэффициентами:

$$\Delta(\lambda) = \det |\lambda^2 a_{\alpha\beta} + \lambda d_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}| \quad (\lambda = -i\omega).$$

Поэтому он может быть представлен в виде

$$\Delta(\lambda) = \text{const} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_s),$$

или при $\lambda = -i\omega$:

$$\Delta(\omega) = \text{const} (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \cdots (\omega - \omega_{2s}),$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{2s}$ — собственные комплексные частоты системы. Следовательно,

$$\Delta(n\Omega) = \text{const} \prod_{\mu=1}^{2s} (n\Omega - \omega_\mu). \quad (48.7)$$

Это выражение и комплексно-сопряженное ему определяют зависимость знаменателей в (48.6) от частот. Для каждой пары комплексно-сопряженных частот $\omega_\mu = \nu_\mu - i\gamma_\mu$, $\omega_\mu^* = \nu_\mu + i\gamma_\mu$ в формуле (48.7)

$$(n\Omega - \omega_\mu)(n\Omega - \omega_\mu^*) = (n\Omega - \nu_\mu)^2 + \gamma_\mu^2.$$

Поэтому

$$\Delta(n\Omega) \Delta^*(n\Omega) = (\text{const})(\text{const})^* \prod_{\mu=1}^s [(n\Omega - \nu_\mu)^2 + \gamma_\mu^2]^2.$$

Подставляя это выражение в (48.6), находим частное решение уравнений (48.1) в виде вещественной части ряда, все члены которого имеют вещественные знаменатели:

$$\xi_\alpha(t) = \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_\sigma(n\Omega) \Delta^*(n\Omega)}{(\text{const})(\text{const})^* \prod_{\mu=1}^s [(n\Omega - \nu_\mu)^2 + \gamma_\mu^2]^2} e^{-in\Omega t}. \quad (48.8)$$

Наибольшую амплитуду колебаний в условиях резонанса n -го порядка имеет гармоника, для которой $n\Omega = \nu_\mu$.

Глава 12

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 49. Построение асимптотических решений
для слабонелинейных систем
методом Крылова–Боголюбова

1. Системы, близкие к линейным. Движение системы частиц в окрестности положения устойчивого равновесия может быть представлено в виде линейных колебаний, если начальные возмущения системы малы, а внешние силы являются достаточно слабыми. С ростом начальных возмущений решения линейных уравнений движения будут все меньше соответствовать действительности. Появляется необходимость учета более высоких степеней разложения функции Лагранжа, внешних обобщенных сил и решения нелинейных уравнений движения с заданной точностью. Линейные колебания для таких систем можно рассматривать в качестве основного динамического состояния, которое возмущается «нелинейными силами». Так, например, функцию Лагранжа математического маятника с массой m и длиной l :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi, \quad (49.1)$$

при не слишком больших углах отклонения φ от положения равновесия $\varphi = 0$ можно заменить разложением

$$L \cong \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + \frac{1}{4!}mgl\varphi^4, \quad (49.2)$$

что эквивалентно учету «нелинейной силы» $\sim \varphi^3$ или «кубической нелинейности» в уравнении движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi^3 \quad (\omega_0^2 = g/l). \quad (49.3)$$

Разложение (49.2) имеет смысл, если последнее слагаемое в (49.2) много меньше предыдущего или «нелинейная сила» в правой части (49.3) значительно меньше $\omega_0^2\varphi$.

Это общее свойство систем, близких к линейным, или слабонелинейных систем. Уравнение движения системы, близкой

к линейной, в которой могут возбуждаться одномерные колебания, может быть представлено в виде

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}), \quad (49.4)$$

где ε — параметр, введенный для учета малости «нелинейной силы» $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ по сравнению с «возвращающей силой» $\omega_0^2\xi$.

2. Метод Крылова–Боголюбова. Уравнение движения (49.4) при $\varepsilon = 0$ сводится к уравнению гармонического осциллятора. Поэтому при $\varepsilon = 0$ колебания будут гармоническими:

$$\xi = a \cos \psi, \quad (49.5)$$

с постоянной амплитудой

$$\dot{a} = 0 \quad (49.6)$$

и равномерно вращающейся фазой

$$\dot{\psi} = \omega_0. \quad (49.7)$$

Наличие нелинейного возмущения ($\varepsilon \neq 0$) приводит к появлению кратных гармоник, зависимости частоты от амплитуды и может вызвать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от увеличения или рассеяния энергии за счет действия возмущающих сил. Учитывая это, будем искать решение уравнения (49.4) в виде

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a, \psi) + \dots, \quad (49.8)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots, \quad (49.9)$$

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots. \quad (49.10)$$

Здесь $a \cos \psi$ — основная гармоника нелинейных колебаний (функции $\xi(a, \psi)$), a — полная амплитуда основной гармоники колебания; $\xi_n(a, \psi)$ — периодические по ψ функции, содержащие высшие гармоники, так что коэффициенты Фурье этих функций при $\sin \psi$ и $\cos \psi$ равны:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_n(a, \psi) \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\psi = 0. \quad (49.11)$$

Правая часть уравнения (49.10) для амплитуды a не зависит от фазы ψ . Зависимость f_n от $\psi \sim \omega_0 t$ для консервативных систем означала бы зависимость амплитуды от времени, что противоречит общей теории одномерного финитного движения, согласно которой $a = \text{const}$. В общем случае амплитуда a некон-

сервативной системы изменяется со временем медленно под действием малой нелинейной силы $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$. Так как $\xi(a, \psi)$ — периодическая функция ψ , мгновенное значение мощности $\varepsilon \dot{\xi} Q(\xi, \dot{\xi})$ этих сил будет также периодической функцией ψ или быстроосциллирующей функцией времени. За время τ , в течение которого амплитуда получит конечное приращение, вклад в среднее значение мощности от ее быстроосциллирующих гармоник вида $\Phi(a) \cos n\psi$, $\Phi(a) \sin n\psi$:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Phi(a) \begin{pmatrix} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{pmatrix} d\psi \cong \frac{\overline{\Phi(a)}}{n\omega_0\tau} \begin{pmatrix} \sin n\psi \\ -\cos n\psi \end{pmatrix}_0^\tau,$$

будет малым вследствие малости множителя $1/\omega_0\tau$ ($\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$). Можно считать, таким образом, что правая часть уравнения (49.10) является функцией только амплитуды a .

Найдем функции $\xi_n(a, \psi)$, $\omega_n(a)$, $f_n(a)$, такие, что уравнения движения (49.4) будут удовлетворяться в заданном порядке по ε . Дифференцируя (49.8) по времени и сохраняя только первый порядок по ε , получим

$$\dot{\xi} = \dot{a} \cos \psi - a\dot{\psi} \sin \psi + \varepsilon \left(\dot{a} \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \dot{\psi} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right) + \dots \quad (49.12)$$

Подставляя сюда \dot{a} , $\dot{\psi}$ из (49.9), (49.10), находим с той же точностью

$$\dot{\xi} = -a\omega_0 \sin \psi - a\varepsilon\omega_1 \sin \psi + \varepsilon f_1 \cos \psi + \omega_0 \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \dots \quad (49.13)$$

Аналогично получаем

$$\ddot{\xi} = -a\omega_0^2 \cos \psi - 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi - 2a\omega_0 \varepsilon \omega_1 \cos \psi + \omega_0^2 \varepsilon \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \dots \quad (49.14)$$

Следовательно, левая часть уравнения (49.4) равна

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \omega_0^2 \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \xi_1 \right) - 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi - 2a\omega_0 \varepsilon \omega_1 \cos \psi + \dots \quad (49.15)$$

Правую часть уравнения (49.4) также необходимо представить в виде ряда по степеням ε . Получим

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + \varepsilon^2 \left[Q'_\xi(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \xi_1 + Q'_{\dot{\xi}}(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \times \right.$$

$$\times \left(-a\omega_1 \sin \psi + f_1 \cos \psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right) \Big] + \dots \quad (49.16)$$

Каждый коэффициент этого ряда по степеням ε оказывается периодической функцией ψ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в (49.15), (49.16), приходим к уравнениям для $\xi_n(a, \psi)$. Эта процедура получения уравнений не содержит принципиальных трудностей, но сопровождается быстрым усложнением формул. В первом порядке по ε мы приходим к уравнению для $\xi_1(a, \psi)$:

$$\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \xi_1 \right) = 2\omega_0 f_1 \sin \psi + 2a\omega_0 \omega_1 \cos \psi + Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi). \quad (49.17)$$

«Нелинейная сила» $Q(\xi, \dot{\xi})$ — заданная в (49.4) функция. Следовательно, $Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi)$ — известная периодическая функция фазы ψ и ее можно представить в виде ряда Фурье

$$Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n(a) \sin n\psi + \beta_n(a) \cos n\psi] \quad (49.18)$$

с известными коэффициентами Фурье $\alpha_n(a)$, $\beta_n(a)$. Таким образом, уравнение (49.17) является уравнением с периодической правой частью и его решение можно искать в виде ряда

$$\xi_1(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_n(a) \sin n\psi + \nu_n(a) \cos n\psi]. \quad (49.19)$$

По условию (49.11) коэффициенты γ_1 и ν_1 этого ряда равны нулю. Учитывая это и подставляя (49.18), (49.19) в (49.17), получим

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left[\nu_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} (1 - n^2) [\gamma_n(a) \sin n\psi + \nu_n(a) \cos n\psi] \right] = \\ = 2\omega_0 f_1 \sin \psi + 2a\omega_0 \omega_1 \cos \psi + \beta_0(a) + \alpha_1(a) \sin \psi + \\ + \beta_1(a) \cos \psi + \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha_n(a) \sin n\psi + \beta_n(a) \cos n\psi]. \quad (49.20) \end{aligned}$$

Приравнявая в (49.20) коэффициенты при одинаковых гармониках, находим

$$\begin{aligned}\nu_0(a) &= \frac{1}{\omega_0^2} \beta_0(a), \\ \gamma_n(a) &= \frac{1}{(1-n^2)\omega_0^2} \alpha_n(a) \quad (n > 1), \\ \nu_n(a) &= \frac{1}{(1-n^2)\omega_0^2} \beta_n(a) \quad (n > 1).\end{aligned}$$

Эти результаты дают возможность представить решение уравнения (49.4) в виде функции амплитуды a и фазы ψ :

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos \psi + \frac{1}{\omega_0^2} \varepsilon \beta_0(a) + \\ &+ \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(1-n^2)} [\alpha_n(a) \sin n\psi + \beta_n(a) \cos n\psi].\end{aligned}\quad (49.21)$$

Оставшиеся в (49.20) слагаемые, содержащие $\sin \psi$ и $\cos \psi$, позволяют найти неизвестные функции $f_1(a)$ и $\omega_1(a)$:

$$\omega_1(a) = \frac{1}{2a\omega_0} \beta_1(a), \quad (49.22)$$

$$f_1(a) = -\frac{1}{2\omega_0} \alpha_1(a). \quad (49.23)$$

Теперь задача сводится к определению функций времени $a(t)$ и $\psi(t)$, т. е. к решению двух уравнений первого порядка с известными правыми частями и разделяющимися переменными:

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega_0} \varepsilon \alpha_1(a), \quad (49.24)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a). \quad (49.25)$$

Если решения этих уравнений найдены, то поведение системы, близкой к линейной, определено во времени. Заметим, однако, что на интервале $(0, t)$ справедлива оценка

$$\Delta a = a(t) - a(0) \sim -t \frac{1}{2\omega_0} \overline{\varepsilon \alpha_1(a)}, \quad (49.26)$$

$$\Delta(\psi - \omega_0 t) \sim -t \frac{1}{2\omega_0} \frac{\overline{\varepsilon \beta_1(a)}}{a}, \quad (49.27)$$

где чертой обозначено среднее значение функции от амплитуды.

Из (49.26), (49.27) видно, что время, в течение которого амплитуда и фаза $(\psi - \omega_0 t)$ получают конечные приращения под действием «нелинейной силы», имеет порядок ε^{-1} и является большим по сравнению с периодом линейных колебаний. С другой стороны, в уравнениях первого приближения (49.9), (49.10) $\dot{a} = \varepsilon f_1(a)$, $\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a)$, мы опустили слагаемые ε^2 , что приводит к погрешности порядка $\varepsilon^2 t$ в значениях самих функций a и ψ . При $t \sim \varepsilon^{-1}$ это дает погрешность порядка ε в значениях амплитуды и фазы. Поэтому на таком интервале времени не имеет смысла сохранять слагаемые порядка ε в решении (49.21).

Окончательно нелинейные колебания одномерной системы, близкой к линейной, определяются в первом приближении методом Крылова–Боголюбова формулой

$$\xi = a \cos \psi, \quad (49.28)$$

где

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega_0} \varepsilon \alpha_1(a),$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a),$$

$$\varepsilon \alpha_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (49.29)$$

$$\varepsilon \beta_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \quad (49.30)$$

3. Консервативные системы, близкие к линейным. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы может быть представлена в окрестности положения устойчивого равновесия q_{eq} формулой

$$L = \frac{1}{2} a_{eq} \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} U''_{eq} \xi^2 - \varepsilon \chi(\xi), \quad (49.31)$$

где $\varepsilon \chi(\xi)$ введено для обозначения малых (по сравнению с квадратичными) членов разложения потенциальной энергии $U(q)$ в ряд по степеням отклонений от положения равновесия $\xi = q - q_{eq}$. Уравнение движения такой системы в окрестности q_{eq} имеет вид

$$a_{eq} \ddot{\xi} + U''_{eq} \xi = -\varepsilon \frac{d\chi}{d\xi} \quad (49.32)$$

и сводится к уравнению (49.4), в котором

$$\omega_0^2 = \frac{U''_{eq}}{a_{eq}}, \quad \varepsilon Q(\xi) = -\varepsilon \frac{1}{a_{eq}} \frac{d\chi}{d\xi}.$$

Решение этого уравнения в первом приближении метода Крылова–Боголюбова определяется формулами

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \psi, \\ \varepsilon \alpha_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a \cos \psi) \sin \psi \, d\psi = 0, \\ \varepsilon \beta_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a \cos \psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned}$$

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega_0} \varepsilon \alpha_1(a) = 0, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a).$$

Мы видим, что амплитуда a нелинейных колебаний остается постоянной во времени, причем не только в первом, но и в более высоких порядках по ε , так как все $\varepsilon \alpha_n(a) = 0$. Этот факт находится в согласии с выводами общей теории одномерного движения. Влияние нелинейности $\varepsilon \chi(\xi)$ сводится лишь к зависящему от амплитуды сдвигу частоты колебаний. Так как $a = \text{const}$, уравнение для фазы ψ легко интегрируется, и мы находим

$$\xi = a \cos \left[\left(\omega_0 - \frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a) \right) t + \psi_0 \right]. \quad (49.33)$$

Для математического маятника в кубическом приближении

$$\varepsilon Q = \omega_0^2 \xi^3 / 6, \quad \omega_0^2 = g/l.$$

Поэтому

$$\varepsilon Q(a \cos \psi) = \frac{1}{6} \omega_0^2 a^3 \cos^3 \psi = \frac{1}{6} \omega_0^2 a^3 \left(\frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right).$$

Коэффициент при $\cos \psi$

$$\varepsilon \beta_1(a) = \frac{1}{8} \omega_0^2 a^3.$$

Следовательно, нелинейный сдвиг частоты маятника равен

$$\frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a) = \frac{1}{16} a^2 \omega_0. \quad (49.34)$$

Решение (49.33) для математического маятника обладает высокой точностью вплоть до отклонений $\xi \sim 35^\circ$.

4. Системы с нелинейным трением. Уравнение движения механической системы, совершающей одномерные колебания под действием линейной возвращающей силы и слабого нелинейного трения, зависящего от скорости, могут быть представлены в виде

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\dot{\xi}). \quad (49.35)$$

Для построения решения этого уравнения методом Крылова–Боголюбова необходимо найти коэффициенты Фурье функции $\varepsilon Q(-a\omega_0 \sin \psi)$. Вместо этого удобнее использовать коэффициенты Фурье четной функции

$$\varepsilon Q(a\omega_0 \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon Q_n(a\omega_0) \cos n\psi.$$

Заменяя здесь ψ на $\psi + \pi/2$, находим

$$\varepsilon Q(-a\omega_0 \sin \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon Q_n(a\omega_0) \left[\cos n\psi \cos \frac{n\pi}{2} - \sin n\psi \sin \frac{n\pi}{2} \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon \beta_n(a) &= \varepsilon Q_n(a\omega_0) \cos \frac{n\pi}{2}, \\ \varepsilon \alpha_n(a) &= -\varepsilon Q_n(a\omega_0) \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Формулы первого приближения принимают вид

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \psi, \\ \dot{a} &= -\frac{1}{2\omega_0} \varepsilon \alpha_1(a) = \frac{1}{2\omega_0} \varepsilon Q_1(a\omega_0), \\ \dot{\psi} &= \omega_0 - \frac{1}{2a\omega_0} \varepsilon \beta_1(a) = \omega_0, \\ \varepsilon Q_1(a\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a\omega_0 \cos \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned}$$

Таким образом, нелинейное трение в первом приближении не изменяет частоту линейных колебаний, но приводит к изменению со временем амплитуды колебаний.

Представим силу сопротивления среды, в которой движется система, в виде суммы линейного и квадратичного по скорости слагаемых. Тогда

$$\varepsilon Q(\dot{\xi}) = -\gamma \dot{\xi} - \sigma |\dot{\xi}| \dot{\xi},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1(a\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\gamma a \omega_0 \cos^2 \psi + \sigma a^2 \omega_0^2 |\cos \psi| \cos^2 \psi) d\psi = \\ &= -\gamma a \omega_0 - \sigma a^2 \omega_0^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (|\cos \psi| \cos^2 \psi) d\psi = \\ &= -\gamma a \omega_0 - 2\sigma a^2 \omega_0^2 \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos^3 \psi d\psi - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \psi d\psi \right] = \\ &= -\gamma a \omega_0 - \frac{8}{3\pi} \sigma a^2 \omega_0^2 \end{aligned}$$

и уравнение для амплитуды будет иметь вид

$$\dot{a} = \frac{1}{2\omega_0} \varepsilon Q_1(a\omega_0) = -\frac{1}{2} \gamma a - \frac{4}{3\pi} \sigma \omega_0 a^2. \quad (49.36)$$

При $\sigma = 0$ амплитуда убывает со временем экспоненциально, как это и предсказывает линейная теория колебаний. Амплитуда нелинейных колебаний в среде с квадратичным по скорости сопротивлением, $\gamma = 0$, убывает с течением времени и с увеличением частоты колебаний в соответствии с формулой

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a(0)} + \frac{4}{3\pi} \sigma \omega_0 t. \quad (49.37)$$

Уравнение для амплитуды (49.36) допускает разделение переменных и в общем случае конечных γ и σ и приводит к результату

$$\ln \left| \frac{1}{a} + \frac{8\sigma}{3\pi\gamma} \omega_0 \right| = \frac{\gamma}{2} t + \text{const.}$$

Здесь постоянная интегрирования определяется значением амплитуды $a(0)$ в начальный момент времени.

§ 50. Автоколебания

Для поддержания незатухающих колебаний в автоколебательных системах не требуются периодические внешние силы. Чтобы обеспечить возрастание энергии в системе, когда амплитуда колебаний убывает, а также диссипацию энергии, когда амплитуда нарастает, внешние силы должны быть нелинейными. Стационарному режиму автоколебаний соответствует точный

баланс между диссипацией энергии и притоком энергии в систему за один период колебаний. Маятник в часах, скрипичная струна-смычок, радиотехнический генератор и т.п. — физические системы, в которых реализуется явление автоколебаний.

Автоколебательную систему удобно изображать в фазовом пространстве. Для одномерных колебаний это фазовая плоскость $(\xi, \dot{\xi})$ (рис. 32). Пусть в момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии $\xi(0), \dot{\xi}(0)$. Так как в режиме колебаний $\dot{\xi}$ убывает с ростом ξ , изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться по часовой стрелке и, совершив полный оборот за время τ , окажется в точке $\xi(\tau) = 0, \dot{\xi}(\tau)$. Если начальное состояние соответствует области, в которой преобладает диссипация энергии, то $\dot{\xi}(\tau) < \dot{\xi}(0)$. Если начальное состояние соответствует области, где приток энергии превышает диссипативные потери, то $\dot{\xi}(\tau)$ будет больше $\dot{\xi}(0)$. Границей между двумя такими областями фазовой плоскости служит *предельный цикл* — замкнутая кривая автоколебаний (для многомерных систем *аттрактор*). Время τ движения изображающей точки вдоль предельного цикла равно периоду автоколебаний. Особая точка, или *фокус*, с которого фазовая точка уходит на предельный цикл, соответствует неустойчивому положению равновесия. Форма этой замкнутой кривой и закон движения точки определяются амплитудой колебаний и физическим механизмом автоколебаний. Значения физических параметров, при которых в системе может быть реализован режим автоколебаний (самовозбуждения), могут быть установлены на основе анализа конкретной нелинейной системы,

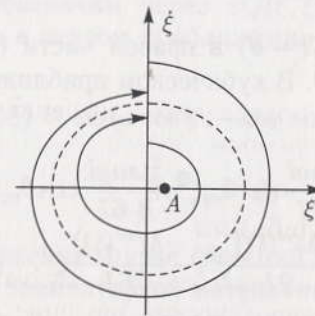


Рис. 32. Фазовые кривые колебаний; пунктирная кривая — предельный цикл, точка A — фокус

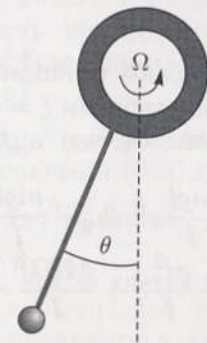


Рис. 33. Маятник Фруда

например, физического маятника (твердого тела), подвесом которого служит муфта, насаженная на вращающийся с угловой скоростью Ω вал (маятник Фруда, рис. 33). Уравнение движения такого маятника можно записать в виде уравнения Эйлера движения твердого тела с моментом инерции I и центром масс на расстоянии l от оси вращения:

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - \sigma l^2 \dot{\theta} + M(\Omega - \dot{\theta}), \quad (50.1)$$

где $\sigma l^2 \dot{\theta}$ — момент диссипативных сил, пропорциональных скорости, $M(\Omega - \dot{\theta})$ — момент силы сухого трения между муфтой и вращающимся валом. Зависимость момента M от относительной скорости $u = \Omega - \dot{\theta}$ вращения вала и муфты является нелинейной, имеет точку перегиба, в окрестности которой момент M убывает с ростом скорости u . Из уравнения (50.1) видно, что маятник имеет состояние равновесия θ_{eq} : $\dot{\theta}_{eq} = 0$, $\ddot{\theta}_{eq} = 0$; положение равновесия θ_{eq} определяется формулой

$$\sin \theta_{eq} = \frac{M(\Omega)}{mgl}. \quad (50.2)$$

Из формулы (50.2) непосредственно видно, что моменты сил тяжести и сухого трения должны быть связаны неравенством

$$M(\Omega) \leq mgl. \quad (50.3)$$

Будем считать, что угловая скорость Ω выбрана такой, что $M(\Omega)$ есть значение момента силы трения в точке перегиба. Тогда

$$M''(\Omega) = 0. \quad (50.4)$$

Разложим функции $\sin \theta$ и $M(\Omega - \dot{\theta})$ в правой части (50.1) в ряд по степеням $\xi = \theta - \theta_{eq}$, $\dot{\xi} = \dot{\theta}$. В кубическом приближении получим

$$\ddot{\xi} = -\frac{mgl}{I} \sin \theta_{eq} - \frac{mgl}{I} \cos \theta_{eq} \xi + \frac{mgl}{2I} \sin \theta_{eq} \xi^2 + \frac{mgl}{6I} \cos \theta_{eq} \xi^3 - \frac{\sigma l^2}{I} \dot{\xi} + \frac{M(\Omega)}{I} - \frac{M'(\Omega)}{I} \dot{\xi} + \frac{M''(\Omega)}{2I} \dot{\xi}^2 - \frac{M'''(\Omega)}{6I} \dot{\xi}^3. \quad (50.5)$$

Принимая во внимание формулы (50.2), (50.4) и вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \cos \theta_{eq}, \quad \chi_1 = -\frac{\sigma l^2}{I} - \frac{M'(\Omega)}{I}, \quad \chi_2 = \frac{M'''(\Omega)}{6I}, \quad (50.6)$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{\omega_0^2}{2} \operatorname{tg} \theta_{eq} \xi^2 + \frac{\omega_0^2}{6} \xi^3 + \chi_1 \dot{\xi} - \chi_2 \dot{\xi}^3. \quad (50.7)$$

Умножая обе части уравнения движения (50.7) на $\dot{\xi}$, получаем уравнение эволюции энергии системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} \xi^2 - \frac{\omega_0^2}{6} \operatorname{tg} \theta_{eq} \xi^3 - \frac{\omega_0^2}{24} \xi^4 \right) = \chi_1 \dot{\xi}^2 - \chi_2 \dot{\xi}^4. \quad (50.8)$$

В области малых ξ , $\dot{\xi}$ характер колебаний качественно определяется первым слагаемым в правой части (50.8). Для того чтобы энергия колебаний в этой области фазовой плоскости нарастала, коэффициент χ_1 должен быть положительным, т. е. должно выполняться условие

$$M'(\Omega) < -\sigma l^2. \quad (50.9)$$

При больших $\dot{\xi}$ энергия нелинейных колебаний должна убывать. Доминирующим в правой части (50.8) при этом будет второе, отрицательное при $\chi_2 > 0$ слагаемое. Следовательно, должно выполняться также неравенство

$$M'''(\Omega) > 0. \quad (50.10)$$

Требования (50.3), (50.4), (50.9) (50.10) к физическим параметрам системы должны быть выполнены в условиях реального эксперимента. Для построения асимптотического решения уравнения нелинейных колебаний (50.7) можно использовать метод Крылова–Боголюбова.

Обозначим через $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ правую часть уравнения (50.7). Тогда в первом приближении этого метода будем иметь

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) \cong \varepsilon Q(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) = \frac{\omega_0^2}{2} \operatorname{tg} \theta_{eq} a^2 \cos^2 \psi + \frac{\omega_0^2}{6} a^3 \cos^3 \psi - \chi_1 a \omega_0 \sin \psi + \chi_2 a^3 \omega_0^3 \sin^3 \psi. \quad (50.11)$$

Разложение Фурье функций $\cos^2 \psi$, $\cos^3 \psi$, $\sin^3 \psi$ дается формулами элементарной математики:

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi, \\ \cos^3 \psi &= \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi, \end{aligned}$$

$$\sin^3 \psi = \frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi.$$

Поэтому коэффициенты $\varepsilon\alpha_1(a)$, $\varepsilon\beta_1(a)$ разложения в ряд Фурье функции (50.11) равны

$$\varepsilon\alpha_1(a) = \frac{3}{4}\chi_2 a^3 \omega_0^3 - \chi_1 a \omega_0,$$

$$\varepsilon\beta_1(a) = \frac{1}{8} a^3 \omega_0^2.$$

Следовательно, амплитуда и фаза как функции времени определяются уравнениями

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega_0} \varepsilon\alpha_1(a) = \frac{a\chi_1}{2} \left(1 - \frac{3\chi_2}{4\chi_1} a^2 \omega_0^2\right), \quad (50.12)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0} = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16}\right). \quad (50.13)$$

Из уравнения (50.12) непосредственно видно, что существует такой режим колебаний, *автоколебания*, при котором амплитуда стационарна, $\dot{a} = 0$, и не зависит от начальных условий. Квадрат амплитуды автоколебаний равен

$$a_0^2 = \frac{4}{3\omega_0^2} \frac{\chi_1}{\chi_2}. \quad (50.14)$$

Пусть теперь δ — отклонение амплитуды a от амплитуды автоколебаний a_0 , $|\delta| \ll a_0$. Положим в уравнении (50.12) $a = a_0 + \delta$. Получим

$$\dot{\delta} = \frac{a_0 + \delta}{2} \chi_1 \left[1 - \frac{3\chi_2}{4\chi_1} \omega_0^2 (a_0^2 + 2\delta a_0 + \delta^2)\right].$$

Для достаточно малых δ , $|\delta| \ll a_0$, в правой части этого уравнения можно пренебречь слагаемыми, содержащими δ^2 и δ^3 . Используя также выражение (50.14), получим

$$\dot{\delta} = -\chi_1 \delta. \quad (50.15)$$

Таким образом, если условие (50.9) выполнено, $\chi_1 > 0$, то малые отклонения δ амплитуды от a_0 экспоненциально убывают со временем и автоколебания устойчивы.

Закон движения маятника при конечных $|a - a_0|$ дается формулой (49.28): $\xi(t) = a(t) \cos \psi(t)$, и его определение сводится

к решению уравнений (50.12), (50.13). Уравнение (50.12) можно представить в виде

$$\dot{a} = \frac{a\chi_1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right). \quad (50.16)$$

Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим

$$\frac{\chi_1}{2} t = \int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{1-x^2} \right| + \frac{1}{2} \ln C, \quad (50.17)$$

где x — отношение амплитуды $a(t)$ к амплитуде автоколебаний a_0 , C — постоянная интегрирования. В области $a(t) < a_0$, или $x^2 < 1$, формула (50.17) приводится к виду

$$x^2 = \frac{1}{1 + C e^{-\chi_1 t}}. \quad (50.18)$$

Выберем начало отсчета времени в момент, когда амплитуда равна $a(0)$. Тогда постоянная C будет связана с $a(0)$ формулой (50.18), в которой следует положить $t = 0$. Такому начальному условию соответствует решение

$$a^2 = \frac{a_0^2}{1 + \left(\frac{a_0^2}{a^2(0)} - 1\right) e^{-\chi_1 t}}. \quad (50.19)$$

Из (50.19) видно, что амплитуда a стремится к a_0 при $t \rightarrow \infty$; это соответствует выходу фазовой кривой колебаний на предельный цикл из области малых амплитуд.

В области $a(t) > a_0$, или $x^2 > 1$, формула (50.17) приводится к виду

$$x^2 = \frac{1}{1 - \tilde{C} e^{-\chi_1 t}}. \quad (50.20)$$

Постоянная интегрирования \tilde{C} связана с начальной амплитудой $\tilde{a}(0)$ в этой области соотношением $\tilde{C} = 1 - (a_0^2/\tilde{a}^2(0))$. Следовательно, если начальное состояние соответствует области амплитуд, превышающих амплитуду автоколебаний (50.14), то $a(t)$ убывает с течением времени по закону

$$a^2 = \frac{a_0^2}{1 - \left(1 - \frac{a_0^2}{\tilde{a}^2(0)}\right) e^{-\chi_1 t}}, \quad (50.21)$$

фазовая траектория колебаний при $t \rightarrow \infty$ выходит на предельный цикл, $a(t) \rightarrow a_0$, со стороны больших амплитуд.

Фазу колебаний можно вычислить после подстановки выражений (50.19), (50.21) в уравнение (50.13) и интегрирования полученного уравнения. В частности, в области $a(t) < a_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= C_0 + \omega_0 t - \frac{\omega_0}{16} \int a^2(t) dt = \\ &= C_0 + \omega_0 t - \frac{\omega_0 a_0^2}{16} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{a_0^2}{a^2(0)} - 1\right) e^{-\chi_1 t}} = \\ &= C_0 + \omega_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{16}\right) t - \frac{\omega_0 a_0^2}{16\chi_1} \ln \left| 1 + \left(\frac{a_0^2}{a^2(0)} - 1\right) e^{-\chi_1 t} \right|. \end{aligned} \quad (50.22)$$

Здесь постоянную интегрирования C_0 следует выразить через начальную фазу $\psi(0)$. Окончательно

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(0) + \omega_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{16}\right) t - \\ &\quad - \frac{\omega_0 a_0^2}{16\chi_1} \ln \left| \frac{a^2(0)}{a_0^2} + \left(1 - \frac{a^2(0)}{a_0^2}\right) e^{-\chi_1 t} \right|. \end{aligned} \quad (50.23)$$

В области $a(t) > a_0$ зависимость фазы от времени будет определяться той же формулой (50.23), если под $\psi(0)$, $a(0)$ подразумевается начальное состояние в этой области.

§ 51. Системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты

Механическая система, совершающая колебания, может находиться под воздействием силовых полей или нестационарных связей, в результате которого физические параметры системы (масса, потенциальная энергия и т. п.) медленно меняются на интервале времени порядка периода собственных колебаний T . Для любой медленно меняющейся функции времени $f(t)$ справедливо неравенство

$$\frac{|\dot{f}T|}{|f|} \ll 1, \quad (51.1)$$

так что всегда существует малый параметр ε . Характерным примером системы с медленно меняющимся параметром может служить маятник с переменной длиной подвеса.

Для количественной характеристики медленности изменения параметров системы удобно ввести «медленное время» $\tau = \varepsilon t$. Тогда функцию Лагранжа системы с одной степенью свободы можно представить в окрестности положения равновесия формулой

$$L = \frac{1}{2} \mu(\tau) \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} k(\tau) \xi^2 - \varepsilon \chi(\xi, \tau). \quad (51.2)$$

Следовательно, уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} [\mu(\tau) \dot{\xi}] + k(\tau) \xi = \varepsilon \tilde{Q}(\tau, \xi, \dot{\xi}). \quad (51.3)$$

Зависимость от $\dot{\xi}$ правой части (51.3) введена дополнительно для учета возможной слабой диссипации в системе. Введем обозначения

$$\omega_0^2(\tau) = k(\tau)/\mu(\tau), \quad \varepsilon Q(\tau, \xi, \dot{\xi}) = \varepsilon \tilde{Q}(\tau, \xi, \dot{\xi})/\mu(\tau),$$

которые позволяют представить уравнение (51.3) в виде

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2(\tau) \xi = \varepsilon Q(\tau, \xi, \dot{\xi}) - \varepsilon \dot{\xi} \frac{1}{\mu(\tau)} \frac{d}{d\tau} \mu(\tau), \quad (51.4)$$

характерном для уравнения колебаний, близких к линейным. Ищем решение этого уравнения в виде

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(\tau, a, \psi) + \dots, \quad (51.5)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0(\tau) + \varepsilon \omega_1(\tau, a) + \varepsilon^2 \omega_2(\tau, a) + \dots, \quad (51.6)$$

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(\tau, a) + \varepsilon^2 f_2(\tau, a) + \dots. \quad (51.7)$$

Тогда задача построения асимптотических решений уравнения (51.4) сводится к определению вида функций $\varepsilon^n \xi_n(\tau, a, \psi)$, $\varepsilon^n \omega_n(\tau, a)$, $\varepsilon^n f_n(\tau, a)$ и последующему интегрированию уравнений (51.6), (51.7) для фазы и амплитуды. Для систем с неизменными параметрами выше сформулировано требование (49.11), в соответствии с которым $a \cos \psi$ можно считать первой гармоникой функции $\xi(a, \psi)$. Это требование мы сохраним и для функций $\xi(\tau, a, \psi)$, но теперь оно может быть выполнено лишь приближенно, на некотором конечном интервале времени ($0 \leq \tau \leq \tau_0$). На этом интервале

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(\tau, a, \psi) \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\psi \cong 0. \quad (51.8)$$

Найдем функции $\varepsilon\xi_1(\tau, a, \psi)$, $\varepsilon f_1(\tau, a)$, $\varepsilon\omega_1(\tau, a)$. Подставляя выражения (51.5), (51.6), (51.7) в уравнение (51.4) и сохраняя только первый порядок по ε , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \xi_1 \right) &= 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi + 2a\omega_0 \varepsilon \omega_1 \cos \psi + \\ &+ \varepsilon Q(\tau, a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + \varepsilon a \frac{d\omega}{d\tau} \sin \psi + \\ &+ \varepsilon a \omega_0 \sin \psi \frac{1}{\mu(\tau)} \frac{d}{d\tau} \mu(\tau). \end{aligned} \quad (51.9)$$

Периодическую по ψ функцию εQ можно представить в виде ряда:

$$\begin{aligned} \varepsilon Q(\tau, a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon\alpha_n(\tau, a) \sin n\psi + \varepsilon\beta_n(\tau, a) \cos n\psi]. \end{aligned} \quad (51.10)$$

Решение уравнения (51.9) также ищем в виде ряда:

$$\xi_1(\tau, a, \psi) = \nu_0(\tau, a) + \sum_{n=2}^{\infty} [\gamma_n(\tau, a) \sin n\psi + \nu_n(\tau, a) \cos n\psi].$$

В соответствии с формулами (51.8) здесь первая гармоника отсутствует. Это означает, что в правой части (51.9) суммы коэффициентов при $\sin \psi$ и при $\cos \psi$ по отдельности равны нулю. Отсюда следуют два уравнения для εf_1 и $\varepsilon\omega_1$:

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \varepsilon f_1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon a \frac{1}{\mu(\tau)} \frac{d}{d\tau} (\omega_0 \mu(\tau)) &= 0, \\ 2a\omega_0 \varepsilon \omega_1 + \varepsilon\beta_1(\tau, a) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения для амплитуды и фазы имеют вид

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega_0(\tau)} \varepsilon\alpha_1(\tau, a) - \frac{\varepsilon a}{2\omega_0(\tau)\mu(\tau)} \frac{d}{d\tau} (\omega_0 \mu(\tau)), \quad (51.11)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0(\tau) - \frac{1}{2a\omega_0(\tau)} \varepsilon\beta_1(\tau, a). \quad (51.12)$$

Оценки погрешностей для амплитуды и фазы, приведенные выше для физических систем с фиксированными параметрами, остаются в силе и для систем с медленно меняющимися параметрами на интервале $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Поэтому решение задачи о нелинейных колебаниях систем с медленно меняющимися па-

раметрами дается в первом приближении метода Крылова–Боголюбова формулой

$$\xi = a \cos \psi, \quad (51.13)$$

где a и ψ — решения уравнений (51.11), (51.12).

Решение задачи с точностью до ε^2 , ε^3 и т. п. можно получить, подставив разложения (51.5), (51.6), (51.7) в уравнение (51.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Для оценки эволюции малых отклонений от состояния равновесия может оказаться достаточным приближения линейных колебаний. В таких случаях εQ в правой части уравнения (51.4) отсутствует и $\varepsilon\alpha_1 = 0$, $\varepsilon\beta_1 = 0$ в уравнениях (51.11), (51.12). Уравнение (51.11) легко интегрируется, и мы находим

$$a^2(t)\omega_0(t)\mu(t) = \text{const}. \quad (51.14)$$

Энергия системы с медленно изменяющимися параметрами

$$E = \xi \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = \frac{1}{2} \mu(\tau) \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} k(\tau) \xi^2 \quad (51.15)$$

не сохраняется. Но, как видно из (51.14), могут существовать определенные комбинации амплитуды, частоты, параметров системы, которые изменяются со временем медленнее, чем сами параметры системы. Полная производная по времени от таких комбинаций в первом приближении метода Крылова–Боголюбова обращается в нуль. Такие величины называются *адиабатическими инвариантами*.

Положим в формуле (51.15) $\xi = a \cos \psi$, $\dot{\xi} = -a\omega_0(\tau) \sin \psi$, получим

$$E = \frac{1}{2} \mu(t) a^2(t) \omega_0^2(t). \quad (51.16)$$

Отсюда видно, что адиабатический инвариант представляет собой отношение энергии (51.15) системы с медленно меняющимися параметрами в приближении линейных колебаний к частоте колебаний: $E(t)/\omega_0(t) = \text{const}$.

Для математического маятника с медленно меняющейся длиной, $l = l(t)$,

$$L = \frac{1}{2} m l^2(t) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m g l(t) \varphi^2,$$

так что $\mu(t) = m l^2(t)$ и $\omega_0^2(t) = g/l(t)$. Адиабатическим инвариантом, согласно (51.14), является произведение $a^2(t) l^{3/2}(t) = \text{const}$ или отношение энергии маятника $E = m g l(t) a^2(t) / 2$ к частоте $\omega_0(t)$.

§ 52. Движение в быстро осциллирующем поле; динамическая стабилизация

Действие дополнительных быстроосциллирующих сил на физические системы может сопровождаться при определенных условиях пространственным дрейфом систем, появлением эффекта динамической стабилизации неустойчивых состояний. Внешние высокочастотные силы при этом не обязательно являются слабыми. К механическим системам такого типа относится маятник с быстроосциллирующей точкой подвеса.

Одномерное движение системы с потенциальной энергией $U(q)$ под действием переменной во времени силы $Q(q, t)$ может быть представлено уравнением

$$\mu \ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q, t). \quad (52.1)$$

Пусть $Q(q, t)$ — периодическая по переменной t функция с периодом T , таким, что $T \ll T_0$, где T_0 — характерный период движения в поле $U(q)$. Такая функция $Q(q, t)$ может быть представлена рядом Фурье

$$Q(q, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_n(q) e^{-in\Omega t}, \quad (52.2)$$

где $\Omega = 2\pi/T$,

$$Q_n(q) = \frac{1}{T} \int_0^T Q(q, t) e^{in\Omega t} dt. \quad (52.3)$$

Представим координату q в виде $q = \bar{q} + \xi$, где

$$\bar{q} \equiv \langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q(t + \tau) d\tau \quad (52.4)$$

— медленно изменяющаяся функция; $\langle \xi \rangle = 0$.

При $\Omega \gg 2\pi/T_0$ система не будет успевать за быстрыми осцилляциями Q вследствие инерционности системы, и можно считать, что $|\xi| \ll |\bar{q}|$. В этом случае правую часть уравнения движения (52.1) можно заменить разложением в ряд по степеням ξ . В первом порядке по ξ получим

$$\mu(\ddot{\bar{q}} + \ddot{\xi}) = -\frac{\partial U(\bar{q})}{\partial \bar{q}} - \xi \frac{\partial^2 U(\bar{q})}{\partial \bar{q}^2} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(Q_n(\bar{q}) + \xi \frac{\partial Q_n(\bar{q})}{\partial \bar{q}} \right) e^{-in\Omega t}. \quad (52.5)$$

Усредним это уравнение по периоду быстрых осцилляций. Получим

$$\mu \ddot{\bar{q}} = -\frac{\partial U(\bar{q})}{\partial \bar{q}} + Q_0(\bar{q}) + \left\langle \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \xi \frac{\partial Q_n(\bar{q})}{\partial \bar{q}} e^{-in\Omega t} \right\rangle. \quad (52.6)$$

Вычтем этот результат из уравнения (52.5) и ограничимся нулевым порядком по ξ . Тогда найдем

$$\mu \ddot{\xi} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} Q_n(\bar{q}) e^{-in\Omega t}. \quad (52.7)$$

На интервале времени порядка периода T функция \bar{q} изменяется незначительно, и уравнение (52.7) можно проинтегрировать, считая \bar{q} постоянной. Поэтому

$$\xi = -\frac{1}{\mu} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{Q_n(\bar{q})}{n^2 \Omega^2} e^{-in\Omega t}. \quad (52.8)$$

Подставляя это выражение в уравнение (52.6), приходим к уравнению для усредненного движения:

$$\mu \ddot{\bar{q}} = -\frac{\partial U(\bar{q})}{\partial \bar{q}} + Q_0(\bar{q}) - \frac{1}{\mu} \left\langle \sum_{\substack{n, n'=-\infty \\ n, n' \neq 0}}^{+\infty} \frac{Q_n(\bar{q})}{n^2 \Omega^2} \frac{\partial Q_{n'}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} e^{-i(n+n')\Omega t} \right\rangle. \quad (52.9)$$

Так как

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{-i(n+n')\Omega t'} dt' = \delta_{n, -n'},$$

уравнение (52.9) преобразуется к виду

$$\mu \ddot{\bar{q}} = -\frac{\partial U(\bar{q})}{\partial \bar{q}} + Q_0(\bar{q}) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{|Q_n(\bar{q})|^2}{n^2 \Omega^2}. \quad (52.10)$$

Далее, на основании преобразования Фурье (52.2) имеем

$$Q(\bar{q}, t) - Q_0(\bar{q}) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} Q_n(\bar{q}) e^{-in\Omega t}.$$

Интегрируя по времени обе части этого равенства и возводя результат в квадрат, найдем

$$\left[\int (Q(\bar{q}, t) - Q_0(\bar{q})) dt \right]^2 = - \sum_{\substack{n, n'=-\infty \\ n, n' \neq 0}}^{+\infty} \frac{Q_n(\bar{q}) Q_{n'}(\bar{q})}{n' n \Omega^2} e^{-i(n+n')\Omega t}.$$

Среднее по периоду T быстрых осцилляций от обеих частей этого равенства равно:

$$\left\langle \left[\int (Q(\bar{q}, t) - Q_0(\bar{q})) dt \right]^2 \right\rangle = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{|Q_n(\bar{q})|^2}{n^2 \Omega^2}. \quad (52.11)$$

Равенство (52.11) позволяет представить уравнение движения, усредненное по периоду быстрых осцилляций (52.10), в виде

$$\mu \ddot{\bar{q}} = - \frac{\partial U(\bar{q})}{\partial \bar{q}} + Q_0(\bar{q}) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \left\langle \left[\int (Q(\bar{q}, t) - Q_0(\bar{q})) dt \right]^2 \right\rangle. \quad (52.12)$$

Для усредненного движения можно ввести эффективную потенциальную энергию по формуле

$$U_{\text{эфф}} = U(\bar{q}) + \frac{1}{2\mu} \left\langle \left[\int (Q(\bar{q}, t) - Q_0(\bar{q})) dt \right]^2 \right\rangle - \int_C^{\bar{q}} Q_0(x) dx, \quad (52.13)$$

где учтено, что производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции. Тогда уравнение (52.12) будет иметь вид

$$\mu \ddot{\bar{q}} = - \frac{\partial U_{\text{эфф}}(\bar{q})}{\partial \bar{q}}. \quad (52.14)$$

Появление эффекта динамической устойчивости можно продемонстрировать на примере маятника с осциллирующей точкой подвеса (рис. 34).

Декартовы координаты маятника связаны с вертикальным смещением $s(t)$ точки подвеса и углом отклонения θ формулами

$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta + s(t),$$

поэтому функция Лагранжа маятника может быть представлена в виде

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m l \dot{s} \theta \sin \theta + m g l \cos \theta.$$

Из уравнения Лагранжа получаем уравнение движения маятника:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\dot{s}}{g} \right) \sin \theta = 0. \quad (52.15)$$

В обозначениях уравнения (52.1) здесь $Q = m l \dot{s} \sin \theta$, $U = -m g l \cos \theta$, и эффективная потенциальная энергия усредненного движения (52.13) равна

$$U_{\text{эфф}} = -m g l \cos \bar{\theta} + \frac{1}{2} m \langle \dot{s}^2 \rangle \sin^2 \bar{\theta}.$$

Для гармонических колебаний точки подвеса $s(t) = a \cos \Omega t$. Следовательно, $\langle \dot{s}^2 \rangle = a^2 \Omega^2 / 2$ и

$$U_{\text{эфф}} = m g l (-\cos \bar{\theta}) + \frac{a^2 \Omega^2}{4 \omega_0^2 l^2} \sin^2 \bar{\theta}, \quad (52.16)$$

где $\omega_0^2 = g/l$. Производная этой функции обращается в нуль в точках $\bar{\theta}_1 = 0$, $\bar{\theta}_2 = \pi$. Точка $\bar{\theta}_1$ является положением устойчивого равновесия. Вычислим вторую производную от $U_{\text{эфф}}$ в точке π . Получим

$$U_{\text{эфф}}''(\pi) = -m g l \left(1 - \frac{a^2 \Omega^2}{2 \omega_0^2 l^2} \right).$$

Эта производная положительна, если выполняется неравенство

$$\frac{a^2 \Omega^2}{2 \omega_0^2 l^2} > 1. \quad (52.17)$$

Положение равновесия $\bar{\theta}_2 = \pi$ в таких случаях является устойчивым.

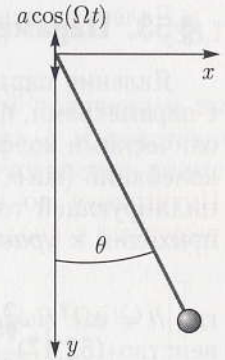


Рис. 34. Маятник с осциллирующей точкой подвеса

§ 53. Параметрический резонанс. Метод усреднения

Явление параметрического резонанса характерно для систем с параметрами, периодическими во времени. К уравнению с периодическими коэффициентами сводится в приближении линейных колебаний ($\sin \theta \cong \theta$) уравнение (52.15) движения маятника с осциллирующей точкой подвеса $s(t) = a \cos \Omega t$. В этом случае мы приходим к уравнению Матье:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t)\theta = 0, \quad (53.1)$$

где $h = a\Omega^2/l\omega_0^2$. Мы полагаем $h \ll 1$, и, таким образом, неравенство (52.17) не имеет места. Задача состоит в определении поведения функции $\theta(t)$ при частотах внешних модуляций Ω , близких к удвоенной собственной частоте $2\omega_0$. Используя метод усреднения, можно построить приближенное решение нелинейного уравнения:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon Q(q, \dot{q}, \Omega t), \quad (53.2)$$

и затем получить решение задачи как частный случай.

При помощи замены переменной q , использованной выше в теории линейных колебаний:

$$\begin{aligned} q &= u e^{i\omega_0 t} + u^* e^{-i\omega_0 t}, \\ \dot{u} e^{i\omega_0 t} + \dot{u}^* e^{-i\omega_0 t} &= 0, \end{aligned}$$

уравнение (53.2) приводится к виду

$$\dot{u} = \frac{1}{2i\omega_0} e^{-i\omega_0 t} \varepsilon Q(q, \dot{q}, \Omega t) \equiv \varepsilon F(u, u^*, t, \Omega t). \quad (53.3)$$

Производная \dot{u} оказывается пропорциональной малому параметру ε . Поэтому будем искать решение уравнения (53.3) в виде суперпозиции медленно меняющейся за период $2\pi/\omega_0$ функции η и малых осциллирующих слагаемых:

$$u = \eta + \varepsilon u_1(\eta, t) + \varepsilon^2 u_2(\eta, t) + \dots \quad (53.4)$$

Функция η определяется уравнением

$$\dot{\eta} = \varepsilon \chi_1(\eta, t) + \varepsilon^2 \chi_2(\eta, t) + \dots \quad (53.5)$$

Дифференцируя выражение (53.4) по времени и используя формулу (53.5), получаем разложение левой части уравнения (53.3):

$$\dot{u} = \dot{\eta} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \dot{\eta} + \dots = \varepsilon \left(\chi_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \chi_1 + \dots \quad (53.6)$$

В правой части уравнения (53.3), после замены переменных q, \dot{q} , будем иметь периодическую с периодом $2\pi/\omega_0$ функцию, которую можно представить в виде ряда Фурье

$$F(u, u^*, t, \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(u, u^*, \Omega t) e^{-in\omega_0 t}. \quad (53.7)$$

Подставим сюда u, u^* из (53.4), разложим полученное выражение в ряд по степеням малого параметра ε и подставим в правую часть уравнения (53.3). Тогда это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\chi_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \chi_1 + \dots = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t} \left[\varepsilon F_n(\eta, \eta^*, \Omega t) + \varepsilon^2 u_1 \frac{\partial F_n}{\partial u} \Big|_{u=\eta} + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 u_1^* \frac{\partial F_n}{\partial u^*} \Big|_{u^*=\eta^*} + \dots \right]. \quad (53.8) \end{aligned}$$

В уравнении (53.8) можно приравнять множители при одинаковых степенях ε . В первом приближении имеем

$$\chi_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t} F_n(\eta, \eta^*, \Omega t). \quad (53.9)$$

Функцию χ_1 , медленно меняющуюся в течение периода $T = 2\pi/\omega_0$, можно найти путем усреднения (53.9) по этому периоду (χ_1 можно вынести из-под знака интеграла по периоду, а среднее от быстроосциллирующего слагаемого дает нуль). В результате получим

$$\chi_1(\eta, t) = \bar{F}(\eta, \eta^*, t, \Omega t) \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t'} F_n(\eta, \eta^*, \Omega t') dt'. \quad (53.10)$$

Это выражение для $\chi_1(\eta, t)$ следует подставить в уравнение (53.9) и результат проинтегрировать по времени. Получим

$$u_1(\eta, t) = \int_0^t \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t'} F_n(\eta, \eta^*, \Omega t') - \bar{F}(\eta, \eta^*, t', \Omega t') \right] dt'. \quad (53.11)$$

Окончательно решение уравнения (53.2) в первом приближении по ε дается формулами

$$q = \eta e^{i\omega_0 t} + \eta^* e^{-i\omega_0 t}, \quad \dot{q} = i\omega_0(\eta e^{i\omega_0 t} - \eta^* e^{-i\omega_0 t}), \quad (53.12)$$

$$\dot{\eta} = \varepsilon \chi_1(\eta, t) = \frac{1}{2i\omega_0} \langle e^{-i\omega_0 t} \varepsilon Q(q(\eta, t), \dot{q}(\eta, t), \Omega t) \rangle. \quad (53.13)$$

Здесь интегрирование производится при фиксированном η .

Используем эти результаты для решения уравнения Матье. Из сравнения уравнений (53.1), (53.2) находим

$$\varepsilon Q = -q\omega_0^2 h \cos \Omega t = -q\omega_0^2 h (\eta e^{i\omega_0 t} + \eta^* e^{-i\omega_0 t}) \cos \Omega t.$$

Поэтому уравнение для функции η имеет вид

$$\dot{\eta} = \frac{i\omega_0 h}{2} \langle e^{-i\omega_0 t} (\eta e^{i\omega_0 t} + \eta^* e^{-i\omega_0 t}) \cos \Omega t \rangle = \frac{i\omega_0 h}{2} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\eta + \eta^* e^{-2i\omega_0 t'}) \cos \Omega t' dt'. \quad (53.14)$$

В области частот Ω , близких к частоте $2\omega_0$, можно положить $\Omega = 2\omega_0 + \delta$, $\delta \ll \omega_0$. Тогда вычисление среднего в правой части (53.14) значительно упрощается, и мы приходим к уравнению

$$\dot{\eta} = \frac{i\omega_0 h}{4} \eta^* e^{i\delta t}. \quad (53.15)$$

При помощи подстановки $\eta = \rho \exp\left(\frac{1}{2}i\delta t\right)$ уравнение (53.15) приводится к виду

$$\dot{\rho} + \frac{i\delta}{2}\rho - \frac{i h \omega_0}{4}\rho^* = 0, \quad (53.16)$$

или для вещественной ϑ_1 и мнимой ϑ_2 частей функции ρ по отдельности:

$$\dot{\vartheta}_1 - \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) \vartheta_2 = 0, \quad (53.17)$$

$$\dot{\vartheta}_2 + \frac{1}{2} \left(\delta - \frac{h\omega_0}{2} \right) \vartheta_1 = 0. \quad (53.18)$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде $\vartheta_{1,2} = A_{1,2} \exp(\lambda t)$. Нетривиальным решениям для A_1 и A_2 соответствует равный нулю определитель системы:

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} \left[\delta^2 - \left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 \right] = 0. \quad (53.19)$$

Отсюда находим два корня $\lambda_{1,2}$:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \delta^2}. \quad (53.20)$$

Полагая в (53.17), (53.18) $\vartheta_{1,2} = A_{1,2} \exp(\lambda_1 t)$ (корню λ_1 соответствует знак «+» в (53.20)), находим

$$A_1^{(1)} = c_1, \quad A_2^{(1)} = c_1 \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) / \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \delta^2}.$$

Для корня λ_2 :

$$A_1^{(2)} = c_2, \quad A_2^{(2)} = c_2 \left(\delta - \frac{h\omega_0}{2} \right) / \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \delta^2}.$$

Эти формулы определяют решения системы (53.17), (53.18):

$$\vartheta_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (53.21)$$

$$\vartheta_2 = \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) / \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \delta^2} (c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (53.22)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями.

Обобщенная координата q связана с функциями ϑ_1 , ϑ_2 формулой

$$q = \eta e^{i\omega_0 t} + \eta^* e^{-i\omega_0 t} = (\vartheta_1 + i\vartheta_2) e^{i(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t} + (\vartheta_1 - i\vartheta_2) e^{-i(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t}, \quad (53.23)$$

из которой видно, что для мнимых λ_1 и λ_2 q будет ограниченной функцией времени. Вещественной координата q будет при вещественных λ_1 и λ_2 . Но в этом случае $\lambda_1 > 0$ и решение (53.23) содержит экспоненциально нарастающие слагаемые, свидетельствующие о том, что в системе имеет место *параметрический резонанс*. Условием вещественности корней λ_1 и λ_2 является неравенство

$$\frac{h\omega_0}{4} > \left| \omega_0 - \frac{1}{2}\Omega \right|,$$

так что область резонансных частот Ω определяется неравенством

$$2\omega_0 \left(1 - \frac{h}{4} \right) < \Omega < 2\omega_0 \left(1 + \frac{h}{4} \right).$$

Глава 13
КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 54. Уравнения Гамильтона

Уравнения движения системы частиц, а также уравнения движения системы макроскопических тел с s степенями свободы представлены в виде системы s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{(d)} \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (54.1)$$

если известна функция Лагранжа $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$ и диссипативные силы $Q_\alpha^{(d)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$. Представим s уравнений (54.1) в виде системы $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ набор новых функций χ_1, \dots, χ_s по формулам

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, q_1, \dots, q_s, t) \quad (54.2)$$

и будем рассматривать далее все χ_α в качестве неизвестных функций времени наряду с функциями $q_\alpha(t)$. Произвольный выбор χ_α следует ограничить требованием обратимости равенств (54.2) относительно \dot{q}_α . Тогда s уравнений (54.1) становятся уравнениями первого порядка относительно $q_1, \dots, q_s, \chi_1, \dots, \chi_s$. Еще s уравнений дают непосредственно равенства (54.2), разрешенные относительно \dot{q}_α :

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_1, \dots, q_s, \chi_1, \dots, \chi_s, t). \quad (54.3)$$

Полученная таким образом система $2s$ уравнений первого порядка эквивалентна системе (54.1) при любых допускающих обращении функциях χ_α . Однако наиболее продуктивным оказывается выбор в качестве χ_α обобщенных импульсов p_α . Формулы (54.2) при этом будут иметь вид

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \equiv p_\alpha(q, \dot{q}, t). \quad (54.4)$$

Преобразование такого рода, в которых новые переменные p_α являются производными по старым переменным \dot{q}_α некоторой

производящей функции $(L(q, \dot{q}_\alpha t))$, принадлежат к классу преобразований Лежандра. Якобиан преобразования (54.4) отличен от нуля,

$$\det \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right) \neq 0, \quad (54.5)$$

вследствие положительной определенности кинетической энергии. Поэтому обратное преобразование

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) \equiv \dot{q}_\alpha(q, p, t) \quad (54.6)$$

существует. Формулы (54.6) обратного преобразования также могут быть получены путем дифференцирования по p_α некоторой функции — производящей функции обратного преобразования Лежандра. Действительно, так как преобразование (54.6) существует, функцию Лагранжа можно рассматривать как функцию переменных q, p, t . Тогда очевидно

$$dL(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha(q, p, t) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (54.7)$$

Вычитая от обеих частей этого равенства дифференциал суммы $p_\alpha d\dot{q}_\alpha(q, p, t)$, получим

$$\begin{aligned} d[p_\alpha d\dot{q}_\alpha(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)] = \\ = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha(q, p, t) dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (54.8)$$

Обозначим через $H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$ функцию обобщенных координат, импульсов и времени, стоящую под знаком дифференциала в левой части (54.8):

$$H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = p_\alpha d\dot{q}_\alpha(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (54.9)$$

Производные по переменным q_α, p_α, t этой функции должны быть равны коэффициентам при dq_α, dp_α, dt в правой части (54.8), и мы находим

$$\dot{q}_\alpha(q, p, t) = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_\alpha}, \quad (54.10)$$

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}, \quad (54.11)$$

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}. \quad (54.12)$$

Формулы (54.10) определяют обратное преобразование Ляжандра (54.6). Производящей функцией этого преобразования является функция Гамильтона (гамильтониан) системы, представленная формулой (54.9). Соотношения (54.11), (54.12) устанавливают связь между производными функций Лагранжа и Гамильтона.

При помощи равенств (54.11) и (54.4) можно исключить производные $\partial L/\partial q_\alpha$ и $\partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ в уравнениях Лагранжа (54.1). Таким образом мы приходим к уравнениям движения в виде системы $2s$ уравнений первого порядка в канонических переменных q_α, p_α или к уравнениям Гамильтона

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^{(d)}(q, \dot{q}(q, p, t), t), \quad (54.13)$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (54.14)$$

Состояние механической системы с s степенями свободы в момент времени t задается в канонических переменных набором $q_1(t), \dots, q_s(t), p_1(t), \dots, p_s(t)$, который геометрически можно интерпретировать как точку в $2s$ -мерном фазовом пространстве переменных q, p . Закон движения системы $q_\alpha = q_\alpha(t), p_\alpha = p_\alpha(t)$ в фазовом пространстве однозначно определяется уравнениями Гамильтона, если задано начальное состояние.

§ 55. Уравнения Гамильтона и вариационный принцип

Уравнения Гамильтона, как и уравнения Лагранжа, могут быть связаны с вариационным принципом.

Вычислим вариацию функционала

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_\alpha \dot{q}_\alpha(q, p, t) - H(q, p, t)] dt, \quad (55.1)$$

считая все $q(t)$ и $p(t)$ независимыми функциями. Получим

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} (p_\alpha \delta q_\alpha) - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha \right] dt = \end{aligned}$$

$$= (p_\alpha \delta q_\alpha) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt. \quad (55.2)$$

Потребуем далее, чтобы сумма $p_\alpha \delta q_\alpha$ обращалась в нуль на верхнем и нижнем пределах интегрирования и чтобы действие S было стационарным ($\delta S = 0$). Тогда из (55.2) непосредственно следуют уравнения Гамильтона в виде

$$\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0, \quad \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (55.3)$$

Диссипативные силы должны задаваться независимо.

§ 56. Функция Гамильтона и энергия системы

Для механических систем с голономными стационарными связями, для систем взаимодействующих частиц без связей обобщенные координаты q_α всегда можно выбрать так, что формулы, устанавливающие связь декартовых координат N частиц и обобщенных координат q_α :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s), \quad (56.1)$$

не будут содержать явную зависимость от времени. Функция Лагранжа в таких случаях представима в виде

$$L = E_{(k)} - U(q_1, \dots, q_s, t) + a_\alpha(q_1, \dots, q_s, t) \dot{q}_\alpha, \quad (56.2)$$

где

$$E_{(k)} = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_s, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (56.3)$$

— кинетическая энергия системы; U, a_α — потенциалы обобщенно-потенциальных сил. Поэтому

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \left[\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right]_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)} = \\ &= \left[\dot{q}_\alpha \frac{\partial E_{(k)}}{\partial \dot{q}_\alpha} - E_{(k)} + U \right]_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)} = [E_{(k)} + U]_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}, \quad (56.4) \end{aligned}$$

и функция Гамильтона совпадает с полной энергией системы в канонических переменных q, p . Формулу (56.4) можно использовать для составления гамильтониана системы в таких практически важных случаях. Так, функция Гамильтона системы N

частиц с парным потенциалом взаимодействия U_{ik} в декартовых координатах равна сумме

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_1) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N U_{ik}. \quad (56.5)$$

Полная энергия частицы в поле $U(\mathbf{r}, t)$ в цилиндрических координатах равна

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, \varphi, z, t).$$

Формулы преобразования от обобщенных скоростей $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$, \dot{z} к обобщенным импульсам p_ρ , p_φ , p_z получаются при помощи дифференцирования по обобщенным скоростям функции Лагранжа или полной энергии и имеют вид

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

В соответствии с формулой (56.5) имеем

$$H(\rho, \varphi, z, p_\rho, p_\varphi, p_z, t) = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z, t). \quad (56.6)$$

Функция Гамильтона той же частицы в сферических координатах равна

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi, t) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) + U(r, \theta, \varphi, t). \quad (56.7)$$

В релятивистской механике полная энергия заряженной частицы определяется формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi(\mathbf{r}, t),$$

а функция Лагранжа имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}.$$

Для вектора обобщенного импульса получаем формулу

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

с помощью которой можно исключить скорость из выражения для энергии. В результате получаем функцию Гамильтона релятивистской частицы:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 c^2 + m^2 c^4} + e\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (56.8)$$

§ 57. Интегралы движения в фазовых пространствах. Сепарабельные гамильтонианы

Вычислим полную производную по времени от функции Гамильтона. Получим

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\alpha = 1, \dots, s).$$

На фазовой траектории значения q_α , p_α определяются уравнениями Гамильтона

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^{(d)}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}.$$

Поэтому

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + Q_\alpha^{(d)} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial t} + Q_\alpha^{(d)} \dot{q}_\alpha, \quad (57.1)$$

т.е. функция Гамильтона представляет собой сохраняющуюся комбинацию канонических переменных, если только она не зависит от времени явно и диссипативные силы отсутствуют. Гамильтониан в этом случае совпадает с полной энергией системы в переменных q , p . При $\partial H / \partial t \neq 0$ и $Q_\alpha^{(d)} = 0$ из (57.1), строго говоря, не следует, что энергия не сохраняется, так как функция Гамильтона может содержать аддитивно произвольную функцию времени, добавление которой к функции $H(q, p, t)$ не изменяет уравнений Гамильтона.

Какая-либо из обобщенных координат q_σ (при их удачном выборе) может оказаться циклической. Функция Гамильтона в этом случае не будет зависеть от q_σ и, следовательно, $\dot{p}_\sigma = 0$, если $Q_\sigma^{(d)} = 0$. Обобщенный импульс p_σ , канонически сопряженный циклической координате q_σ , в отсутствие диссипативных

сил является интегралом движения. Так, потенциальная энергия частицы в центральном поле является функцией расстояния r до центра поля и ее гамильтониан (56.6) не будет зависеть от координаты φ . Следовательно, в системе координат с началом в центре поля $p_\varphi = \text{const}$.

Функция Гамильтона одномерного гармонического осциллятора

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

не зависит явно от времени. Поэтому $H(q, p) = E = \text{const}$. Уравнением фазовой траектории осциллятора служит эллипс

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{(2E/m\omega^2)} = 1$$

с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Закон движения изображающей точки вдоль фазовой траектории определяется уравнениями Гамильтона

$$\dot{q} = p/m, \quad \dot{p} = -m\omega^2 q,$$

так что

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t, \\ p = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \sin \omega t,$$

где $q_0 = q(0)$, $p_0 = p(0)$ — начальное состояние осциллятора.

Предположим теперь, что гамильтониан системы с s степенями свободы может быть представлен в виде

$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \dots, \varphi_k(q_k, p_k), q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s, t), \quad (57.2)$$

где k пар канонических переменных отделены, $k \leq s$. Гамильтонианы такого типа носят название *сепарабельных*. Покажем, что все k функций $\varphi_\mu(q_\mu, p_\mu)$ являются интегралами движения. Действительно, уравнения Гамильтона для канонических переменных q_μ, p_μ в этом случае имеют вид

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\mu}, \quad (57.3)$$

$$\dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_\mu} \quad (\mu = 1, \dots, k). \quad (57.4)$$

Умножим обе части уравнения (57.3) на $\partial \varphi_\mu / \partial p_\mu$ и используем уравнение (57.4). Получим

$$\dot{p}_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_\mu} \frac{\partial H}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\mu} = -\dot{q}_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\mu}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_\mu} \dot{p}_\mu = \frac{d\varphi_\mu(q_\mu, p_\mu)}{dt} = 0, \quad (57.5)$$

т. е.

$$\varphi_\mu(q_\mu, p_\mu) = \alpha_\mu = \text{const}. \quad (57.6)$$

Из равенств (57.6), в частности, следует, что если некоторые из функций $\varphi_\sigma(q_\sigma, p_\sigma)$ не содержат зависимости от обобщенных координат q_σ , то импульсы p_σ , канонически сопряженные таким циклическим координатам, сохраняются.

Результаты (57.6) можно учесть явно в выражении для гамильтониана (57.2). Тогда получим

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s, t). \quad (57.7)$$

Уравнения Гамильтона с функцией Гамильтона (57.7) определяют эволюцию остальных канонических переменных $q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s$.

Мы видим, что предпочтительным является такой выбор канонических переменных, при котором гамильтониан системы оказывается сепарабельным.

Продemonстрируем изложенный метод отыскания первых интегралов уравнения Гамильтона на примере движения частицы с зарядом e в поле магнитного диполя с моментом μ . Векторный потенциал этого поля можно представить в виде $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r})/r^3$. В сферических координатах с полярной осью вдоль магнитного момента обобщенные импульсы равны

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + (e\mu/c) \sin^2 \theta$$

и функция Гамильтона частицы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} \left[p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(p_\varphi - \frac{e\mu}{c} \sin^2 \theta \right)^2 \right].$$

Здесь φ — циклическая координата, Поэтому $p_\varphi = \alpha_1 = \text{const}$, и выражение в круглых скобках является функцией только θ, p_θ . Следовательно,

$$p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\alpha_1 - \frac{e\mu}{c} \sin^2 \theta \right)^2 = \alpha_2^2 = \text{const}.$$

Наконец,

$$\frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{\alpha_2^2}{2mr^2} = E = \text{const},$$

что следует также из закона сохранения энергии.

§ 58. Скобки Пуассона. Алгебра Ли динамических функций

Канонические переменные $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$, энергия системы, компоненты импульса кинетического момента системы могут служить примерами динамических функций. Динамические функции в конфигурационном пространстве содержат обобщенные координаты как функции времени. В фазовых пространствах динамические функции имеют вид

$$f(q_1(t), \dots, q_s(t), p_1(t), \dots, p_s(t), t) \equiv f(q, p, t)$$

и являются вещественными функциями $2s$ канонических переменных и времени. При движении системы канонические переменные изменяются с течением времени в соответствии с уравнениями Гамильтона, так что полная производная по времени от любой динамической функции равна

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \dot{p}_\sigma + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} + Q_\sigma^{(d)} \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (58.1)$$

где $Q_\alpha^{(d)}$ — компоненты обобщенной диссипативной силы.

Определим скобку Пуассона двух динамических функций $g(q, p, t)$ и $h(q, p, t)$ формулой

$$[g, h] = \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} \frac{\partial h}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial g}{\partial p_\sigma} \frac{\partial h}{\partial q_\sigma} = \left(\frac{\partial h}{\partial p_\sigma} \frac{\partial}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial h}{\partial q_\sigma} \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \right) g \equiv [h]g. \quad (58.2)$$

Последнее равенство в (58.2) означает, что скобку Пуассона можно рассматривать как линейный оператор $[h]$, действующий на динамическую функцию $g(q, p, t)$. С учетом (58.2) выражение (58.1) можно представить в виде

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] + Q_\sigma^{(d)} \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}. \quad (58.3)$$

Производные по каноническим переменным также можно выразить через скобки Пуассона. Положив в (58.2) $h = p_\sigma$ и затем $h = q_\sigma$, найдем

$$\frac{\partial g}{\partial q_\sigma} = [g, p_\sigma] = [p_\sigma]g, \quad (58.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_\sigma} = -[g, q_\sigma] = -[q_\sigma]g. \quad (58.5)$$

Поэтому

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] - [f, q_\sigma] Q_\sigma^{(d)} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{ [H] - Q_\sigma^{(d)} [q_\sigma] \} f. \quad (58.6)$$

Это равенство можно рассматривать в качестве фундаментального уравнения гамильтоновой динамики. Уравнения Гамильтона получаются из него при $f = q_\sigma$ и $f = p_\sigma$. В этом случае согласно (58.3)

$$\dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H] - [q_\alpha, q_\sigma] Q_\sigma^{(d)}, \quad (58.7)$$

$$\dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H] - [p_\alpha, q_\sigma] Q_\sigma^{(d)}. \quad (58.8)$$

Скобки Пуассона для канонических переменных легко вычислить на основании формул (58.4), (58.5). Находим

$$\begin{aligned} [q_\alpha, q_\sigma] &= [p_\alpha, p_\sigma] = 0, \\ [q_\sigma, p_\alpha] &= -[p_\alpha, q_\sigma] = \delta_{\alpha\sigma}. \end{aligned} \quad (58.9)$$

Следовательно,

$$\dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H], \quad \dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H] + Q_\alpha^{(d)}. \quad (58.10)$$

Такой вид имеют уравнения Гамильтона в терминах скобок Пуассона. Для систем без диссипации эти уравнения симметричны относительно переменных q, p .

Каждой паре динамических функций f и φ скобка Пуассона ставит в соответствие динамическую функцию ψ по правилу

$$\psi = [f, \varphi] = [\varphi]f, \quad (58.11)$$

и поэтому является специальной алгебраической операцией над множеством динамических функций. Из определения (58.2) вытекают следующие свойства этой алгебраической операции:

1) антикоммутативность:

$$\begin{aligned} [f, \varphi] &= -[\varphi, f], \\ [\varphi]f &= -[f]\varphi, \quad [f, f] = 0; \end{aligned} \quad (58.12)$$

2) равенство нулю с постоянной:

$$[f, C] = 0, \quad C = \text{const}; \quad (58.13)$$

3) неассоциативность, в виде тождества Якоби

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (58.14)$$

или

$$[f][h]g + [g][f]h + [h][g]f = 0.$$

Первые два свойства очевидны. Для доказательства тождества Якоби достаточно заметить, что в сумме (58.14) нет слагаемых, не содержащих вторых производных по каноническим переменным одной из трех функций f, g, h , и показать, что слагаемые со вторыми производными какой-либо из этих функций взаимно сокращаются.

Вторые производные функции f содержатся в двух слагаемых $[g][f]h + [h][g]f$, равных, согласно (58.12), $([h][g] - [g, h])f$.

Введем новые обозначения для канонических переменных по формулам $q_1 = x_1, p_1 = x_2, q_2 = x_3, p_2 = x_4$ и т. д. Тогда операторы $[g], [h]$ можно представить формулами

$$[g] = \frac{\partial g}{\partial p_\sigma} \frac{\partial}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \equiv \sum_{k=1}^{2s} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$[h] = \frac{\partial h}{\partial p_\sigma} \frac{\partial}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial h}{\partial q_\sigma} \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \equiv \sum_{l=1}^{2s} \eta_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

при помощи которых получим

$$[h][g] = \sum_{k,l=1}^{2s} \left\{ \eta_l \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} + \eta_l \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\},$$

$$[g][h] = \sum_{k,l=1}^{2s} \left\{ \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \right\}.$$

Мы видим, что в выражении $([h][g] - [g, h])f$ вторые производные функции f взаимно сокращаются. Но функция f ничем не выделена. Следовательно, такой же результат будет справедлив и для функций g, h . Попарно сокращаются все слагаемые, и тождество Якоби выполняется.

Любая абстрактная операция, обладающая свойствами (58.12), (58.13), (58.14), называется *скобкой Ли*. Скобка Пуассона является частной реализацией скобки Ли.

Из определения (58.2) следуют равенства

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \quad (58.15)$$

$$[C \cdot f, g] = C[f, g], \quad C = \text{const}, \quad (58.16)$$

$$[f_1 \cdot f_2, g] = [f_1, g]f_2 + f_1[f_2, g], \quad (58.17)$$

которые устанавливают связь скобки Пуассона с другими алгебраическими операциями: сложением, умножением на число, произведением. Посредством операций сложения, умножения и образования скобок Пуассона можно комбинировать любые элементы множества динамических функций, не выходя за пределы этого множества. Любое множество, на котором определены эти три операции, называется *алгеброй Ли*.

Алгебра Ли может быть реализована также как алгебра эрмитовых операторов. Тогда скобке Пуассона будет соответствовать коммутатор двух операторов \hat{f}, \hat{g} :

$$[f, g] \rightarrow -\frac{i}{\hbar} (\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}),$$

где \hbar — постоянная Планка. Точке фазового пространства будет соответствовать элемент гильбертова пространства — волновая функция. Таким образом, мы приходим к квантово-механической динамической алгебре.

§ 59. Теорема Пуассона

Пусть φ, f, g — динамические функции, связанные равенством $\varphi = [f, g]$. Найдем соотношение между полными производными по времени этих функций. В отсутствие диссипативных сил имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + [\varphi, H] = \frac{\partial}{\partial t} [f, g] + [[f, g], H],$$

где H — функция Гамильтона.

Вследствие перестановочности частных производных по времени и производных по каноническим переменным находим

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right].$$

Согласно тождеству Якоби

$$[[f, g], H] = [[f, H], g] + [f, [g, H]].$$

Поэтому

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[f, g] = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \right), g \right] + \left[f, \left(\frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right) \right] = [\dot{f}, g] + [f, \dot{g}].$$

Теорема Пуассона является следствием этого равенства. Согласно теореме Пуассона каждым двум интегралам движения f и g ($\dot{f} = 0$, $\dot{g} = 0$) скобка Пуассона ставит в соответствие динамическую функцию φ , которая также является интегралом движения ($\dot{\varphi} = 0$). Найденный путем образования скобок Пуассона интеграл движения $\varphi(q, p, t) = \text{const}$ может не сводиться к уже известным интегралам. В этом случае мы будем иметь новый интеграл движения.

§ 60. Формальное решение центральной задачи гамильтоновой динамики

Центральная задача гамильтоновой динамики состоит в отыскании динамической функции $f(q(t), p(t))$ в момент времени t , если известны ее значение $f(q(0), p(0)) \equiv f(q, p)$ в момент времени, принятый в качестве начального, и уравнение эволюции системы

$$\dot{f} = [f, H]. \quad (60.1)$$

Уравнения Гамильтона следуют из (60.1) при $f = q_\alpha$, $f = p_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, s$). Соответствие между $f(q(t), p(t))$ и $f(q, p)$ предполагается непрерывным. Поэтому общее решение (60.1) может быть найдено в виде ряда по степеням t .

Преобразуем (60.1) в интегральное уравнение. Получим при условии сохранения полной энергии системы частиц

$$f(q(t), p(t)) = f(q, p) + \int_0^t dt' [f(q(t'), p(t')), H(q(t'), p(t'))]. \quad (60.2)$$

Представим решение уравнения (60.2) в виде итерационного ряда:

$$f(q(t), p(t)) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad (60.3)$$

считая интегральный член в (60.2) малым. В нулевом порядке

$$f_0 = f(q, p). \quad (60.4)$$

Функцию f_1 находим, оставляя в интегральном члене лишь нулевой порядок,

$$f_1 = \int_0^t dt' [f_0, H(q, p)] = t[f(q, p), H(q, p)] = t[H]f(q, p). \quad (60.5)$$

Для f_2 имеем

$$\begin{aligned} f_2 &= \int_0^t dt' [f_1, H(q, p)] = \int_0^t t' dt' [[f(q, p), H(q, p)], H(q, p)] = \\ &= \frac{t^2}{2} [H][H]f(q, p) = \frac{t^2}{2} [H]^2 f(q, p). \end{aligned} \quad (60.6)$$

Мы видим, что решение принимает вид экспоненциального ряда:

$$f(q(t), p(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n [H(q, p)]^n f(q, p). \quad (60.7)$$

Определим оператор $\hat{U}(t)$ соотношением

$$\hat{U}(t) = e^{t[H]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n [H]^n. \quad (60.8)$$

Тогда (60.7) можно представить в виде

$$f(q(t), p(t)) = e^{t[H]} f(q, p) = \hat{U}(t) f(q, p). \quad (60.9)$$

Оператор $\hat{U}(t)$, переводящий $f(q, p)$ в $f(q(t), p(t))$, называется пропагатором. Формулы (60.7), (60.9) дают формальное решение центральной задачи гамильтоновой динамики. Функция (60.9) удовлетворяет уравнению (60.1) при произвольных начальных значениях канонических переменных, комбинацией которых является $f(q, p)$.

Преобразование $\hat{U}(t)$, по отношению к $f = q_\alpha$ и $f = p_\alpha$, можно также рассматривать как преобразование фазового пространства, которое каждой точке q, p ставит в соответствие другую точку $q(t), p(t)$. Из определения $\hat{U}(t)$ видно, что

$$\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1 + t_2), \quad (60.10)$$

$$\hat{U}(0) = 1, \quad (60.11)$$

$$\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}(-t), \quad (60.12)$$

т. е. множество преобразований $\widehat{U}(t)$ образует однопараметрическую непрерывную группу (*группу Ли*). Выделенный элемент алгебры $H(q, p)$ является производящим элементом группы или генератором.

Преобразование $\widehat{U}(t)$ обладает также следующими свойствами.

1. Произведение двух динамических функций преобразуется в произведение преобразованных функций.

Для доказательства достаточно использовать бесконечно малые или инфинитезимальные преобразования, поскольку группа непрерывна. Для таких преобразований имеем вместо (60.7)

$$f(q(\delta t), p(\delta t)) = f(q, p) + \delta t [f(q, p), H(q, p)], \quad (60.13)$$

или кратко

$$f(\delta t) = f + \delta t [f, H] = f + \delta t [H]f.$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка по δt

$$\begin{aligned} f(\delta t) \cdot g(\delta t) &= (f + \delta t [f, H]) \cdot (g + \delta t [g, H]) = \\ &= f \cdot g + \delta t ([f, H]g + f[g, H]) = \\ &= (f \cdot g) + \delta t [H](f \cdot g), \end{aligned} \quad (60.14)$$

где использовано распределительное свойство скобок Пуассона относительно умножения. Из (60.14) видно, что произведение динамических функций $(f \cdot g)$ преобразуется в произведение преобразованных функций $f(\delta t) \cdot g(\delta t)$.

2. Скобка Пуассона двух динамических функций преобразуется в скобку Пуассона преобразованных функций. Действительно,

$$\begin{aligned} [f(\delta t), g(\delta t)] &= [(f + \delta t [f, H]), (g + \delta t [g, H])] = \\ &= [f, g] + \delta t ([f, [g, H]] + [[f, H], g]). \end{aligned}$$

Два последних слагаемых преобразуются при помощи тождества Якоби, и мы имеем

$$[f(\delta t), g(\delta t)] = [f, g] + \delta t [[f, g], H] = [f, g] + \delta t [H][f, g]. \quad (60.15)$$

3. Сумма динамических функций преобразуется в сумму преобразованных функций. Доказательство очевидно.

Таким образом, преобразования $\widehat{U}(t)$ сохраняют все три операции алгебры Ли динамических функций. Отображение $\widehat{U}(t)$ является *автоморфизмом*.

Из инвариантности скобок Пуассона следует, что если в качестве канонических переменных в момент t выбраны $q(t), p(t)$, удовлетворяющие условиям

$$[q_\alpha, q_\beta] = [p_\alpha, p_\beta] = 0, \quad [q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}, \quad (60.16)$$

то преобразованные величины образуют совершенно эквивалентный набор.

Все динамические функции в момент $t + \tau$ подчиняются тем же уравнениям движения, что и в момент t . Действительно, в момент t уравнение эволюции системы имеет вид $\dot{f} = [f, H]$. Функции $f(t + \tau)$ и $f(t)$ связаны инфинитезимальным преобразованием

$$f(t + \tau) = f(t) + \tau [f(t), H(t)]. \quad (60.17)$$

Дифференцируя (60.17), имеем при $\dot{H} = 0$

$$\begin{aligned} \dot{f}(t + \tau) &= \dot{f}(t) + \tau \frac{d}{dt} [f, H] = \dot{f} + \tau [\dot{f}, H] = [f, H] + \tau [[f, H], H] = \\ &= [(f + \tau [f, H]), H] = [f(t + \tau), H], \end{aligned} \quad (60.18)$$

что и доказывает инвариантность уравнений движения относительно преобразований группы.

Заметим теперь, что при доказательстве автоморфизма алгебры динамических функций был использован только вид $\widehat{U}(t)$ и свойства скобок Пуассона. Поэтому доказательство останется в силе, если гамильтониан $H(q, p)$ заменить любым другим элементом $g(q, p)$ алгебры. Каждый элемент $g(q, p)$ алгебры порождает однопараметрическую группу автоморфизмов

$$f \rightarrow e^{\sigma[g]} f,$$

где σ — вещественный параметр. Соответствующие бесконечно малые преобразования имеют вид

$$\delta f = \delta \sigma [f, g]; \quad (60.19)$$

если g — вектор, то вместо (60.19) будем иметь

$$\delta f = \delta \sigma_\gamma [f, g_\gamma].$$

Полный импульс системы P_γ является генератором сдвига пространства. Полагая $f = x_\mu$, $g_\gamma = P_\gamma$ и затем $f = p_\mu$, получим

$$\delta x_\mu = \delta \sigma_\gamma [x_\mu, P_\gamma], \quad \delta p_\mu = \delta \sigma_\gamma [p_\mu, P_\gamma].$$

После вычисления скобок Пуассона найдем

$$\delta x_\mu = \delta \sigma_\mu, \quad \delta p_\mu = 0. \quad (60.20)$$

Полный момент импульса системы L_γ является генератором поворота системы на вектор бесконечно малого поворота. Действительно, координаты и импульсы в этом случае преобразуются по формулам

$$\delta x_\mu = \delta\sigma_\gamma [x_\mu, L_\gamma], \quad \delta p_\mu = \delta\sigma_\gamma [p_\mu, L_\gamma].$$

Скобки Пуассона равны

$$[x_\mu, L_\gamma] = \varepsilon_{\mu\gamma\lambda} x_\lambda, \quad [p_\mu, L_\gamma] = -\varepsilon_{\mu\gamma\lambda} p_\lambda,$$

где $\varepsilon_{\mu\gamma\lambda}$ — символ Леви-Чивиты. Поэтому

$$\delta x_\mu = \varepsilon_{\mu\gamma\lambda} \delta\sigma_\gamma x_\lambda, \quad \delta p_\mu = -\varepsilon_{\mu\gamma\lambda} \delta\sigma_\gamma p_\lambda. \quad (60.21)$$

Параметры $\delta\sigma_\gamma$ в этом случае являются компонентами вектора бесконечно малого поворота фазового пространства.

Мы видим, что имеется бесконечное семейство преобразований вида $e^{\sigma[g]}$, которые оставляют инвариантной гамильтонову динамику. Преобразования этого семейства называются *каноническими преобразованиями*.

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И МЕТОД ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

§ 61. Канонические преобразования; производящие функции

Представление канонических преобразований в виде степенных рядов неудобно, когда требуется иметь явную функциональную зависимость преобразованных канонических переменных Q, P от прежнего набора q, p :

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t), \quad P_\alpha = P_\alpha(q, p, t). \quad (61.1)$$

Снимем также ограничение $\partial H/\partial t = 0$ на вид гамильтониана, использованное в предыдущем параграфе.

По определению канонические преобразования обратимы. Поэтому якобиан преобразования (61.1) отличен от нуля:

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \neq 0. \quad (61.2)$$

Кроме того, при таких преобразованиях должна сохраняться форма уравнений Гамильтона. Если в переменных q, p

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (61.3)$$

то в переменных Q, P должно быть

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad (61.4)$$

где \mathcal{H} — гамильтониан в переменных Q, P .

Уравнения (61.3) могут быть получены из вариационного принципа (55.1):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_\alpha \dot{q}_\alpha(q, p, t) - H(q, p, t)] dt = 0. \quad (61.5)$$

Следовательно, преобразованный к переменным Q, P вариационный принцип должен иметь вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P_\alpha \dot{Q}_\alpha(Q, P, t) - \mathcal{H}(Q, P, t)] dt = 0. \quad (61.6)$$

При таком преобразовании подынтегральное выражение в (61.6) может получить дополнительное слагаемое в виде полной производной по времени от некоторой функции $F(t, q, p, Q, P)$. Уравнения (61.4) будут следовать из (61.6) при любых F , поскольку

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta(F(t_2) - F(t_1)) = 0.$$

Разрешим уравнения $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$ относительно импульсов p . Получим

$$p_\alpha = p_\alpha(q, Q, t) \quad (61.7)$$

при условии

$$\frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(Q_1, \dots, Q_s)} \neq 0. \quad (61.8)$$

Подставляя (61.7) в формулы для сопряженных импульсов (61.1), мы можем преобразовать их, а следовательно, и $F(t, q, p, Q, P)$ к переменным q, Q, t . Обозначим через $F_1(q, Q, t)$ полученную таким образом функцию. Тогда из (61.5), (61.6) будем иметь

$$p_\alpha dq_\alpha - H dt = P_\alpha dQ_\alpha - \mathcal{H} dt + dF_1, \quad (61.9)$$

или

$$dF_1(q, Q, t) = p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H) dt. \quad (61.10)$$

Отсюда

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_\alpha}, \quad (61.11)$$

$$\mathcal{H}(q, Q, t) = H(q, Q, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}.$$

Функция $F_1(q, Q, t)$ оказывается производящей функцией преобразования Лежандра от переменных q, Q к перемен-

ным p, P . Эта функция существует при условии (61.8), которое на основании (61.11) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(Q_1, \dots, Q_s)} = \det \left| \frac{d^2 F_1(q, Q, t)}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta} \right| \neq 0. \quad (61.12)$$

При выполнении требования (61.12) функция $F_1(q, Q, t)$ может быть задана произвольно. Тогда канонические преобразования получаются дифференцированием заданной функции в соответствии с формулами (61.11).

Пусть, например, $F_1 = q_\alpha Q_\alpha$. Тогда формулы (61.11) принимают вид

$$Q_\alpha = p_\alpha, \quad P_\alpha = -q_\alpha, \quad \mathcal{H} = H,$$

и каноническое преобразование сводится к замене старых координат новыми импульсами (со знаком «-») и старых импульсов — новыми координатами.

Далее, прибавим к обеим частям равенства (61.10) дифференциал $d(Q_\alpha P_\alpha)$. Получим

$$d[F_1(q, Q, t) + P_\alpha Q_\alpha] = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H) dt. \quad (61.13)$$

Пусть теперь

$$\frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \neq 0. \quad (61.14)$$

Тогда из формул $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$ можно найти $p_\alpha = p_\alpha(q, P, t)$. Это позволяет представить $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$ в виде функций $Q_\alpha = Q_\alpha(q, P, t)$, и мы находим

$$d \left\{ [F_1(q, Q, t) + P_\alpha Q_\alpha]_{Q_\alpha = Q_\alpha(q, P, t)} \right\} = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H) dt. \quad (61.15)$$

Полагая

$$[F_1(q, Q, t) + P_\alpha Q_\alpha]_{Q_\alpha = Q_\alpha(q, P, t)} = F_2(q, P, t), \quad (61.16)$$

находим формулы канонических преобразований в виде

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_\alpha}, \quad (61.17)$$

$$\mathcal{H}(q, P, t) = H(q, P, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}.$$

Функция $F_2(q, P, t)$ является производящей функцией канонических преобразований (61.17) при условии

$$\det \left| \frac{d^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \right| \neq 0. \quad (61.18)$$

Выберем функцию $F_2(q, P, t)$ в виде

$$F_2(q, P, t) = f_\alpha(q_1, \dots, q_s, t) P_\alpha.$$

Формулы (61.17) приводят к каноническим преобразованиям

$$Q_\alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_s), \quad p_\gamma = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\gamma} P_\alpha,$$

которые в этом случае совпадают с точечными преобразованиями. При $f_\alpha = a_{\alpha\beta} q_\beta$ и $a_{\alpha\beta} a_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\sigma}$ — это ортогональные преобразования, а при $f_\alpha = q_\alpha$ — тождественные преобразования.

Производящую функцию от новых координат и старых импульсов $F_3(p, Q, t)$ можно ввести по формуле

$$\begin{aligned} F_3(p, Q, t) &= F_1(q, Q, t) - p_\alpha dq_\alpha \Big|_{q_\sigma = q_\sigma(p, Q, t)} = \\ &= -q_\alpha dp_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H) dt. \end{aligned} \quad (61.19)$$

Эта функция существует при условии

$$\det \left| \frac{d^2 F_3(p, Q, t)}{\partial p_\alpha \partial Q_\beta} \right| \neq 0 \quad (61.20)$$

и определяет канонические преобразования в виде

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_\alpha}, \quad (61.21)$$

$$\mathcal{H}(p, Q, t) = H(p, Q, t) + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}.$$

Аналогичным путем может быть введена производящая функция от новых и старых импульсов $F_4(p, P, t)$:

$$F_4(p, P, t) = -q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H) dt. \quad (61.22)$$

С помощью $F_4(p, P, t)$ канонические преобразования могут быть заданы по формулам

$$\begin{aligned} q_\alpha &= -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_\alpha}, \\ \mathcal{H}(p, P, t) &= H(p, P, t) + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (61.23)$$

при условии

$$\det \left| \frac{d^2 F_4(p, P, t)}{\partial p_\alpha \partial P_\beta} \right| \neq 0. \quad (61.24)$$

Полный определитель (61.2) канонического преобразования отличен от нуля. Поэтому якобианы (61.12), (61.18), (61.20), (61.24) не равны нулю одновременно, и всегда существует производящая функция канонического преобразования.

С помощью канонических преобразований можно получить более простое выражение для гамильтониана и более простые уравнения движения. Найдем в качестве примера преобразованный гамильтониан гармонического осциллятора $\mathcal{H}(Q, P, t)$ и закон движения осциллятора в переменных Q, P , если исходный гамильтониан и производящая функция выбраны в виде

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, \\ F_1(q, Q) &= \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q. \end{aligned}$$

Из формул (61.11) получаем формулы преобразования канонических переменных

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega q \operatorname{ctg} Q, \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(Q, P) = H(Q, P) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 Q) = P \omega.$$

Уравнения Гамильтона в новых переменных:

$$\dot{Q} = \partial \mathcal{H} / \partial P = \omega, \quad \dot{P} = -\partial \mathcal{H} / \partial Q = 0,$$

легко интегрируются, и мы находим

$$P = E / \omega, \quad Q = \omega t + \vartheta,$$

где E — энергия осциллятора, ϑ — начальная фаза.

§ 62. Теорема Лиувилля; уравнение Лиувилля

Состояние системы с s степенями свободы геометрически изображается точкой в $2s$ -мерном пространстве переменных q, p . Совокупность большого числа N ($N \rightarrow \infty$) невзаимодействующих физически тождественных систем с одной и той же функцией

ей Гамильтона $H(q, p, t)$ будет изображаться в момент t набором точек, образующих некоторую область в фазовом пространстве. Такая совокупность называется ансамблем Гиббса. Концепция ансамблей позволяет ввести статистические идеи в динамику многочастичных систем.

Обозначим через Γ_0 объем, заполненный изображающими точками ансамбля в начальный момент времени. При отображении

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t), \quad (62.1)$$

совпадающем с законом движения системы, этот объем преобразуется в объем Γ , так что

$$\int_{\Gamma} dq dp = \int_{\Gamma_0} |J(q, p/q_0, p_0)| dq_0 dp_0, \quad (62.2)$$

где

$$J(q, p/q_0, p_0) = \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_{01}, \dots, q_{0s}, p_{01}, \dots, p_{0s})} \quad (62.3)$$

— якобиан преобразования (62.1).

Вычислим dJ/dt . Для этого введем обозначения $q_1 = x_1, p_1 = x_2, q_2 = x_3, p_2 = x_4$ и т. д., а также

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{0\beta}} = a_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 2s). \quad (62.4)$$

Тогда

$$J = \det \left| \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{0\beta}} \right| = \det |a_{\alpha\beta}|. \quad (62.5)$$

Разложение определителя J по какому-либо столбцу или строке имеет вид

$$\delta_{\alpha\beta} J = \sum_{\sigma=1}^{2s} a_{\alpha\sigma} J_{\beta\sigma}, \quad (62.6)$$

где $J_{\alpha\sigma}$ — алгебраические дополнения. Алгебраическое дополнение $J_{\beta\sigma}$ элемента $a_{\beta\sigma}$ не зависит от $a_{\beta\sigma}$. Поэтому $dJ/da_{\beta\sigma} = J_{\beta\sigma}$.

Дифференцируя равенство (62.5) по времени, принимая во внимание разложение (62.6) и уравнения Гамильтона, находим

$$\dot{J} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2s} \frac{dJ}{da_{\alpha\beta}} \dot{a}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2s} J_{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2s} J_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_{0\beta}} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{2s} J_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_{0\gamma}} \frac{\partial x_{0\gamma}}{\partial x_{0\beta}} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{2s} J_{\alpha\beta} a_{\gamma\beta} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_{0\gamma}} = \\ &= \sum_{\alpha,\gamma=1}^{2s} J \delta_{\alpha,\gamma} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_{0\gamma}} = J \sum_{\alpha=1}^{2s} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_{0\alpha}} = J \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \dot{p}_\sigma}{\partial p_\sigma} \right) = \\ &J \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\sigma \partial p_\sigma} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma \partial q_\sigma} \right) = 0, \quad (62.7) \end{aligned}$$

т. е. $J = \text{const}$. Но в левой части равенства (62.2) $J = 1$. Следовательно, при всех t

$$\int_{\Gamma} dq dp = \int_{\Gamma_0} dq_0 dp_0. \quad (62.8)$$

Это равенство составляет содержание теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема ансамбля Гиббса.

Для систем с диссипацией энергии $\dot{J} \neq 0$. Действительно, используя в (62.7) уравнения Гамильтона для системы с диссипативными силами:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^{(d)}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},$$

приходим к уравнению

$$\dot{J} = J \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \dot{p}_\sigma}{\partial p_\sigma} \right) = J \sum_{\sigma=1}^s \frac{\partial Q_\sigma^{(d)}}{\partial p_\sigma}. \quad (62.9)$$

Уравнение (62.9) легко интегрируется, если силы трения пропорциональны скоростям взаимодействующих частиц: $\mathbf{F}_i = -k_{(i)} \mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, N$). Получим

$$J(t) = J(t_0) \exp \left\{ -3(t - t_0) \sum_{i=1}^N (k_i/m_i) \right\}. \quad (62.10)$$

Формулы (62.9), (62.10) определяют изменение со временем фазового объема ансамбля Гиббса системы частиц за счет диссипации энергии.

Теореме Лиувилля нетрудно придать форму уравнения Лиувилля — фундаментального уравнения статистической механики. Пусть dN — число изображающих точек ансамбля в элементе фазового объема $d\Gamma$. Тогда $dN/d\Gamma$ — плотность изображающих точек, а $dN/Nd\Gamma \equiv D$ по определению есть вероятность того, что

механическая система имеет координаты и импульсы в $d\Gamma$. Так как каждая изображающая точка движется по своей фазовой траектории, которая не пересекается с остальными траекториями, число изображающих точек dN в момент времени t_0 то же, что и в момент $t_0 + \Delta t$. Учитывая также, что фазовый объем не изменяется с течением времени, имеем

$$D_{t_0} d\Gamma_{t_0} = D_{t_0+\Delta t} d\Gamma_{t_0+\Delta t} \cong \left(D_{t_0} + \frac{dD}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t \right) d\Gamma_{t_0}.$$

Отсюда $\frac{dD}{dt} \Big|_{t_0} = 0$ при любых t_0 . Следовательно, и в момент t

$$\frac{\partial D}{\partial t} + [D, H] = 0. \quad (62.11)$$

Уравнение (62.11) есть *уравнение Лиувилля*. Если функция $D(q, p, t)$ известна, то макроскопические наблюдаемые \bar{A} вычисляются как средние значения соответствующих микроскопических функций $A(q, p)$:

$$\bar{A} = \int A(q, p) D(q, p, t) dq dp. \quad (62.12)$$

Например, при $A(q, p) = H$ величина \bar{A} есть средняя энергия системы. Величины \bar{A} в свою очередь определяют ансамбль Гиббса. Он строится таким образом, чтобы каждая из систем ансамбля имела один и тот же набор наблюдаемых средних \bar{A} .

§ 63. Метод Гамильтона–Якоби

Движение системы с s степенями свободы определяется в канонических переменных $2s$ уравнениями

$$\begin{aligned} q_\alpha(t) &= q_\alpha(q_{01}, \dots, q_{0s}, p_{01}, \dots, p_{0s}, t), \\ p_\alpha(t) &= p_\alpha(q_{01}, \dots, q_{0s}, p_{01}, \dots, p_{0s}, t). \end{aligned} \quad (63.1)$$

При условии, что эти уравнения являются обратимыми, их можно разрешить относительно начальных координат и импульсов и представить в виде

$$\begin{aligned} q_{0\alpha} &= q_{0\alpha}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \\ p_{0\alpha} &= p_{0\alpha}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t). \end{aligned} \quad (63.2)$$

Формулы (63.2) можно рассматривать в качестве формул канонического преобразования от переменных q, p к переменным q_0, p_0 . Но тогда для них, как и для всякого канонического

преобразования, должна существовать производящая функция. Если будет сформулирован метод отыскания такой производящей функции и эта функция будет найдена, тогда закон движения (63.1) получится путем простого дифференцирования производящей функции.

Метод Гамильтона–Якоби включает в себя формулировку уравнения для производящей функции, соответствующей движению системы, метод решения этого уравнения и правила получения общего решения канонических уравнений Гамильтона с помощью найденной производящей функции.

1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Начальные значения q_0, p_0 канонических переменных могут появляться при решении уравнений движения в различных комбинациях: полной энергии, компонент кинетического момента системы и т. п. Удобнее, поэтому, вместо (63.2) рассматривать общие формулы канонических преобразований:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \\ P_\alpha &= P_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \end{aligned} \quad (63.3)$$

и потребовать, чтобы Q_α, P_α были постоянными.

Это требование будет выполнено, если гамильтониан \mathcal{H} в новых переменных Q, P будет произвольной функцией времени. Действительно, в этом случае

$$\dot{Q}_\mu = \partial \mathcal{H} / \partial P_\mu = 0, \quad \dot{P}_\mu = -\partial \mathcal{H} / \partial Q_\mu = 0$$

и, следовательно,

$$Q_\mu = \beta_\mu, \quad P_\mu = \alpha_\mu \quad (\alpha_\mu, \beta_\mu = \text{const}, \quad \mu = 1, \dots, s). \quad (63.4)$$

Так как прибавление к гамильтониану функции времени не приводит к изменению уравнений движения, можно считать вообще $\mathcal{H} = 0$.

Пусть $H(q, p, t)$ — известный гамильтониан системы и F_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) — производящая функция. Тогда преобразованный гамильтониан \mathcal{H} будет связан с H формулой

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}.$$

При $\mathcal{H} = 0$ отсюда следует уравнение

$$H + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (63.5)$$

в котором функция Гамильтона H должна быть отнесена к тем же переменным, что и F_α .

Будем искать производящую функцию в классе функций $F_2 = F_2(q, P, t)$. Такие функции определяют канонические преобразования по формулам

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_\alpha}, \quad (63.6)$$

обратимым при условии

$$\det \left| \frac{d^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \right| \neq 0. \quad (63.7)$$

Так как уравнение (63.5) справедливо при постоянных Q, P , (63.4), то функция F_2 должна содержаться в нем в виде

$$F_2(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) \Big|_{P=\alpha} \equiv \\ \equiv S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) \equiv S(q, \alpha, t). \quad (63.8)$$

Формулы преобразования канонических переменных (63.6), (63.7) в этом случае сводятся к формулам

$$p_\sigma = \partial S / \partial q_\sigma, \quad \beta_\sigma = \partial S / \partial \alpha_\sigma, \quad (63.9)$$

$$\det \left| \frac{d^2 S(q, \alpha, t)}{\partial q_\alpha \partial \alpha_\sigma} \right| \neq 0. \quad (63.10)$$

Остается сделать замену переменных в гамильтониане H по формулам (63.6) и положить $P_\mu = \alpha_\mu$. Такая замена сводится к подстановке импульсов (63.9) в известную функцию Гамильтона $H(q, p, t)$. Таким образом, искомая производящая функция $S(q, \alpha, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t \right) = 0. \quad (63.11)$$

Мы получили уравнение Гамильтона–Якоби.

Дифференцирование по времени в (63.11) относится лишь к явной зависимости S от времени. Функция S , как и всякая динамическая функция, содержит также зависимость от времени посредством обобщенных координат: $S = S(q(t), \alpha, t)$.

Из вывода уравнения (63.11) следует также, что динамическая функция $S = S(q(t), \alpha, t)$ является *полным интегралом* уравнения Гамильтона–Якоби, т.е. содержит в качестве аргументов s постоянных α_μ . Ни одна из постоянных α_μ в полном интеграле не должна быть аддитивной, поскольку в этом случае

условие обратимости (63.10) не будет выполнено. Полная производная по времени от $S = S(q(t), \alpha, t)$ равна

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma = -H + p_\sigma \dot{q}_\sigma = L,$$

где L — функция Лагранжа. Отсюда

$$S = \int_{t_0}^t L dt = S(q(t), \alpha, t), \quad (63.12)$$

и, следовательно, полный интеграл S имеет смысл действия, если его рассматривать как функцию координат и времени на верхнем пределе интегрирования.

Если полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби найден, то его дифференцирование в соответствии с формулами (63.9) приводит к результату

$$p_\sigma = p_\sigma(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t), \\ \beta_\sigma = \beta_\sigma(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t). \quad (63.13)$$

Из второй группы уравнений (63.13) вследствие (63.10) можно найти

$$q_\mu = q_\mu(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s). \quad (63.14)$$

После подстановки (63.14) в первую группу формул (63.13) получим

$$p_\mu = p_\mu(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s). \quad (63.15)$$

Формулами (63.14), (63.15) представлен закон движения системы в переменных q, p .

2. Теорема Якоби. Покажем непосредственно, что формулами (63.9), (63.10), в которых S — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, и, следовательно, формулами (63.14), (63.15) представлено общее решение канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}.$$

Это утверждение носит название *теоремы Якоби*.

Пусть $S(q, \alpha, t)$ — полный интеграл уравнения (63.11). Подставляя его в (63.11), получаем тождество

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + H \left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_s}, t \right) = 0, \quad (63.16)$$

которое можно почленно дифференцировать. Дифференцируя по α_μ , находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} = 0. \quad (63.17)$$

С другой стороны, вычисляя полную производную по времени от обеих частей равенства (63.9): $\beta_\sigma = \partial S / \partial \alpha_\sigma$, получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_\mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\mu} \dot{q}_\sigma = 0. \quad (63.18)$$

Из (63.17), (63.18) имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\mu \partial q_\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \dot{q}_\sigma \right) = 0. \quad (63.19)$$

Определитель этой однородной системы уравнений относительно величин, стоящих в круглых скобках, отличен от нуля по условию (63.10). Поэтому система (63.19) имеет только тривиальные решения:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \quad (63.20)$$

Далее, дифференцируя (63.16) по q_σ , а равенство (63.9): $p_\sigma = \partial S / \partial q_\sigma$, по t , найдем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\sigma \partial q_\mu} = 0, \quad (63.21)$$

$$\dot{p}_\sigma = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \dot{q}_\mu. \quad (63.22)$$

Учитывая (63.20), отсюда заключаем, что

$$\dot{p}_\sigma = -\partial H / \partial q_\sigma. \quad (63.23)$$

Уравнения Гамильтона (63.20), (63.23) удовлетворяются тождественно.

3. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных систем. Для консервативных систем $\partial H / \partial t = 0$, диссипативные силы отсутствуют и гамильтониан является интегралом движения:

$$H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = E.$$

В этом случае уравнение Гамильтона–Якоби в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) = -E \quad (63.24)$$

можно проинтегрировать по переменной t и выбрать энергию E в качестве одной из постоянных α_μ . Тогда

$$S = -Et + W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E). \quad (63.25)$$

Функция $W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)$ называется *укороченным действием*. Как видно из (63.24), укороченное действие является полным интегралом уравнения

$$H \left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) = E. \quad (63.26)$$

Общее решение канонических уравнений Гамильтона по-прежнему определяется формулами (63.9), которые для консервативных систем сводятся к формулам

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E}, \quad (63.27)$$

$$\beta_\mu = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu} \quad (\mu = 1, \dots, s-1), \quad (63.28)$$

$$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial W}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, s). \quad (63.29)$$

Формулы (63.28) дают уравнение траектории системы в конфигурационном пространстве, а формулы (63.29) — уравнение траектории в фазовом пространстве. Эти результаты получаются в методе Гамильтона–Якоби непосредственно, а не путем исключения времени в формулах закона движения системы.

4. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Интегрирование канонических уравнений Гамильтона эквивалентно отысканию полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби и последующему дифференцированию полного интеграла в соответствии с теоремой Якоби. Если обобщенные координаты выбраны так, что гамильтониан будет сепарабельным, метод Гамильтона–Якоби решения канонических уравнений Гамильтона оказывается более простым. Предположим, что гамильтониан системы является сепарабельным:

$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \dots, \varphi_k(q_k, p_k), q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s, t), \quad (63.30)$$

где k пар канонических переменных отделены, $k \leq s$. Тогда уравнение Гамильтона–Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \dots, \varphi_k\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right), q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0. \quad (63.31)$$

Для сепарабельных гамильтонианов все функции φ_μ ($\mu \leq k$) являются интегралами движения и зависят только от двух переменных

$$\varphi_\mu(q_\mu, p_\mu) = \alpha_\mu = \text{const}. \quad (63.32)$$

Поэтому в уравнении (63.31) интегралы движения φ_μ могут зависеть только от координат q_μ . Это возможно, если полный интеграл S представляет собой сумму:

$$S = \sum_{\sigma=1}^k S_\sigma(q_\sigma) + \tilde{S}(q_{k+1}, \dots, q_s, t). \quad (63.33)$$

Подставляя (63.33) в (63.31), имеем

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(\varphi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right), \dots, \varphi_k\left(q_k, \frac{dS_k}{dq_k}\right), q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}, t\right) = 0. \quad (63.34)$$

Координатная зависимость в уравнении (63.34) отделилась в виде комбинаций $\varphi_\mu(q_\mu, dS_\mu(q_\mu)/dq_\mu)$ для каждой переменной q_μ ($\mu = 1, \dots, k$) в отдельности и для остальной совокупности переменных. При этом в соответствии с (63.32)

$$\varphi_\mu\left(q_\mu, \frac{dS_\mu(q_\mu)}{dq_\mu}\right) = \alpha_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k), \quad (63.35)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(\alpha_1, \dots, \alpha_k, q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}, t\right) = 0. \quad (63.36)$$

Задача отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби свелась к интегрированию k обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (63.34) и отысканию полного интеграла \tilde{S} уравнения Гамильтона–Якоби (63.35) с меньшим числом переменных.

Из (63.34) видно, что полный интеграл $S(q, \alpha, t)$ является линейной функцией циклических координат. Для каждой циклической координаты q_σ уравнение (63.34) сводится к уравнению

$$\frac{dS_\sigma(q_\sigma)}{dq_\sigma} = \alpha_\sigma.$$

Отсюда $S_\sigma(q_\sigma) = \alpha_{(\sigma)}q_\sigma$, где α_σ — сохраняющийся обобщенный импульс.

5. Движение в центральном поле и поле диполя (канонические переменные). Найдем уравнение фазовой траектории и закон движения частицы в силовом поле, представляющем собой суперпозицию центрального поля $u(r)$ и поля диполя $\frac{d \cos \theta}{r^2}$, ориентированного вдоль полярной оси сферической системы координат.

Потенциальная энергия $U(r, \theta)$ частицы в этом случае может быть представлена суммой

$$U(r, \theta) = u(r) + \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

или каждым слагаемым по отдельности. Гамильтониан частицы в таком поле является сепарабельным в сферических координатах:

$$H = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} \left[p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right] + u(r) + \frac{d \cos \theta}{r^2} = \\ = \frac{1}{2m}p_r^2 + u(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[p_\theta^2 + 2md \cos \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right].$$

Поэтому три первых интеграла движения можно получить просто из вида гамильтониана:

$$p_\varphi = p_{\varphi 0}$$

(координата φ — циклическая);

$$p_\theta^2 + 2md \cos \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_{\varphi 0}^2 = \alpha = \text{const}$$

(канонические переменные θ , p_θ содержатся в гамильтониане в виде отделяющейся функции);

$$\frac{1}{2m}p_r^2 + u(r) + \frac{\alpha}{2mr^2} = E = \text{const}$$

(гамильтониан не содержит явной зависимости от времени и диссипативные силы отсутствуют).

Найденные импульсы p_φ , p_θ , p_r в соответствии с теоремой Якоби равны также производным от укороченного действия по канонически сопряженным координатам: $\partial W / \partial q_\mu = p_\mu$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= -Et + W(r, \theta, \varphi, p_{\varphi 0}, \alpha, E) = \\ &= -Et + p_{\varphi 0} \varphi + \int d\theta \sqrt{\alpha - 2md \cos \theta - p_{\varphi 0}^2 / \sin^2 \theta} + \\ &\quad + \int dr \sqrt{2m \left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2} \right)}. \quad (63.37) \end{aligned}$$

Новые результаты получаются отсюда согласно теореме Якоби в виде вторых интегралов движения по формулам

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m \left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2} \right)}},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - 2md \cos \theta - p_{\varphi 0}^2 / \sin^2 \theta}} - \frac{1}{2} \int \frac{dr^2}{r} \sqrt{2m \left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2} \right)},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial p_{\varphi 0}} = \varphi - p_{\varphi 0} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha - 2md \cos \theta - p_{\varphi 0}^2 / \sin^2 \theta}}.$$

Постоянные β_0 , β_1 , β_2 определяются начальными условиями.

Эти формулы вместе с формулами для канонически сопряженных импульсов p_φ , p_θ , p_r дают в общем виде решение поставленной задачи.

§ 64. Переменные «действие–угол»

Уравнение Гамильтона–Якоби и теорема Якоби останутся в силе, если вместо постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ в $S(q, \alpha, t)$ использовать новый набор. Воспользуемся этой неоднозначностью и сформулируем эффективный метод вычисления частот системы, совершающей условно-периодические движения. Класс механических систем ограничим консервативными системами, и предположим, что для каждой из них существует хотя бы один набор канонических переменных, в которых гамильтониан является полностью сепарабельным, и, следовательно, уравнение Гамильтона–Якоби допускает полное разделение переменных. Тогда

$$S = -Et + W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)$$

и укороченное действие W является полным интегралом уравнения

$$H \left(\varphi_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1} \right), \dots, \varphi_s \left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) \right) = E. \quad (64.1)$$

Уравнение (64.1) допускает решение

$$W = \sum_{\mu=1}^s w_\mu(q_\mu). \quad (64.2)$$

Функции $w_\mu(q_\mu)$ при этом находятся из уравнений

$$\varphi_\mu \left(q_\mu, \frac{dw_\mu(q_\mu)}{dq_\mu} \right) = \alpha_\mu. \quad (64.3)$$

(Здесь $\mu = 1, \dots, s$, и на индексы в скобках не распространяется правило суммирования по дважды повторяющимся индексам.)

Постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_s, E$ связаны соотношением

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = E. \quad (64.4)$$

Подставляя найденный таким образом полный интеграл $S(q, \alpha, t)$ в формулы (63.9):

$$p_\sigma = \partial S / \partial q_\sigma, \quad \beta_\sigma = \partial S / \partial \alpha_\sigma, \quad (64.5)$$

получим, в соответствии с теоремой Якоби, общее решение канонических уравнений. Это решение содержит уравнения фазовых траекторий в виде

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q_\mu} = \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = \frac{dw_\mu(q_\mu)}{dq_\mu} = p_\mu(q_\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (64.6)$$

Каждое из соотношений (64.6) представляет собой проекцию на фазовую плоскость (p_μ, q_μ) многомерной фазовой траектории.

Движение является *условно-периодическим*, если каждая из проекций (64.6) является либо замкнутой кривой (*либрация*), либо периодической по q_μ функцией (*вращение*). Радиусы-векторы $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s)$ частиц системы в этом случае могут быть представлены многомерным рядом Фурье:

$$\mathbf{r}_i = \operatorname{Re} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_s=-\infty}^{+\infty} C_i(n_1, \dots, n_s) \exp \{-i(n_1 \omega_1 + \dots + n_s \omega_s) t\}. \quad (64.7)$$

Количество частот в (64.7), относящихся как целые числа, определяет степень вырождения. Система невырождена, если таких частот нет. Несмотря на то, что все $\exp\{-in\omega_\mu t\}$ —

периодические функции, $\mathbf{r}_i(t)$ будут периодическими функциями времени только в случае полностью вырожденной системы, когда все частоты связаны рациональными соотношениями.

Для условно-периодических движений функции (64.6) можно проинтегрировать по периоду или целому циклу изменения q_μ . Циклическим координатам с постоянными сопряженными импульсами можно приписать период, равный 2π . Тогда

$$\oint p_\mu(q_{(\mu)}, \alpha_1, \dots, \alpha_s) dq_\mu = J_\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (64.8)$$

Величины J_μ имеют размерность момента импульса или действия и называются *переменными действия*.

При всех μ соотношения (64.8) независимы, поскольку независимы пары p_μ, q_μ канонических переменных. Поэтому при помощи соотношений (64.8) можно ввести вместо набора постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ набор «действий» J_1, \dots, J_s . Разрешив (64.8) относительно α_μ , получим

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu(J_1, \dots, J_s) \quad (\mu = 1, \dots, s). \quad (64.9)$$

Подстановка (64.9) в соотношения $H(\alpha) = E$, $W = W(q, \alpha)$ дает

$$H = H(J_1, \dots, J_s) = E, \quad W = W(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s). \quad (64.10)$$

Функцию $W = W(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s)$ можно рассматривать как производящую функцию канонического преобразования из класса функций $F_2(q, P, t)$, зависящую от «старых» координат и «новых» импульсов. Тогда формулы канонического преобразования должны иметь вид

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s), \\ \theta_\mu &= \frac{\partial W}{\partial J_\mu} = \theta_\mu(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s), \\ H' &= H(J_1, \dots, J_s). \end{aligned} \quad (64.11)$$

Переменные θ_μ по определению являются канонически сопряженными «действиями» J_1, \dots, J_s . Они носят название *угловых переменных*. Решения уравнений Гамильтона для них можно получить по теореме Гамильтона–Якоби:

$$\tilde{\beta}_\mu = \frac{\partial S}{\partial J_\mu} = \frac{\partial}{\partial J_\mu} [-H(J_1, \dots, J_s)t + W(q, J)] = -\frac{\partial H}{\partial J_\mu} t + \frac{\partial W}{\partial J_\mu}. \quad (64.12)$$

Здесь $\tilde{\beta}_\mu$ — постоянные, $\partial W / \partial J_\mu$ — угловые переменные θ_μ . Этот результат можно получить и путем непосредственного интегрирования уравнений Гамильтона $\dot{\theta}_\mu = \partial H' / \partial J_\mu$. Вводя обозначения

$$\nu_\mu \equiv \frac{\partial H}{\partial J_\mu}, \quad (64.13)$$

формулу (64.12) можно представить в виде линейной функции времени:

$$\theta_\mu = \nu_\mu t + \tilde{\beta}_\mu. \quad (64.14)$$

Пусть теперь τ_μ — время изменения координаты q_μ на целый цикл (на величину собственного периода). Приращение θ_μ за время τ_μ равно

$$\Delta\theta_\mu = \theta_\mu(\tau_\mu) - \theta_\mu(0) = \nu_\mu \tau_\mu. \quad (64.15)$$

С другой стороны, конечное приращение угловой переменной θ_μ при изменении какой-либо одной координаты q_σ на целый период можно вычислить путем суммирования бесконечно малых приращений так, что

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma \theta_\mu &= \oint \frac{\partial \theta_\mu}{\partial q_{(\sigma)}} dq_\sigma = \oint \frac{\partial}{\partial q_{(\sigma)}} \left(\frac{\partial W}{\partial J_\mu} \right) dq_\sigma = \frac{\partial}{\partial J_\mu} \oint \frac{\partial W}{\partial q_{(\sigma)}} dq_\sigma = \\ &= \frac{\partial}{\partial J_\mu} \oint p_{(\sigma)} dq_\sigma = \frac{\partial J_{(\sigma)}}{\partial J_\mu} = \delta_{\sigma\mu}. \end{aligned} \quad (64.16)$$

Следовательно, $\Delta_\sigma \theta_{(\sigma)} = 1$. Но тогда из (64.15) и (64.13) следует, что

$$\nu_\mu = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{\partial H}{\partial J_\mu} \quad (64.17)$$

есть частота периодического движения, соответствующего изменению во времени канонических переменных p_μ, q_μ .

Таким образом, для вычисления частот механической системы, совершающей условно-периодическое движение, нет необходимости находить закон движения системы. Достаточно вычислить интегралы $J_\mu = \oint p_{(\mu)} dq_\mu$ и выразить через них функцию Гамильтона системы. Тогда частоты находятся простым дифференцированием функции Гамильтона по формулам (64.17).

В качестве иллюстрации метода найдем частоты *анизотропного гармонического осциллятора*. Гамильтониан осциллятора равен

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \sum_{\sigma=1}^3 \left(\frac{p_\sigma^2}{2m} + \frac{k_\sigma x_\sigma^2}{2} \right).$$

Соответственно, уравнение Гамильтона–Якоби для укороченного действия осциллятора имеет вид

$$\sum_{\sigma=1}^3 \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x_{\sigma}} \right)^2 + \frac{k_{\sigma} x_{\sigma}^2}{2} \right] = E.$$

Все переменные разделяются. Поэтому

$$W = \sum_{\sigma=1}^3 w_{\sigma}(x_{\sigma}),$$

и для каждой функции $w_{\sigma}(x_{\sigma})$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dw_{\sigma}}{dx_{\sigma}} \right)^2 + \frac{k_{\sigma} x_{\sigma}^2}{2} = \alpha_{\sigma},$$

а для гамильтониана осциллятора выражение

$$H = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E.$$

Переменные действия равны по определению:

$$J_{\sigma} = \oint p_{(\sigma)} dx_{\sigma} = 2 \int_{-\sqrt{2\alpha_{\sigma}/k_{\sigma}}}^{\sqrt{2\alpha_{\sigma}/k_{\sigma}}} \sqrt{2m \left(\alpha_{\sigma} - \frac{k_{\sigma} x_{\sigma}^2}{2} \right)} dx_{\sigma} = 2\pi \alpha_{\sigma} \sqrt{\frac{m}{k_{\sigma}}}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{k_1}{m}} J_1 + \sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2 + \sqrt{\frac{k_3}{m}} J_3 \right).$$

Производные гамильтониана по переменным действия есть частоты осциллятора, так что круговые частоты находим по формулам

$$\omega_{\sigma} = 2\pi\nu_{\sigma} = 2\pi \frac{\partial H}{\partial J_{\sigma}} = \sqrt{\frac{k_{\sigma}}{m}}.$$

Радиус-вектор материальной точки невырожденного осциллятора описывает незамкнутую кривую, плотно покрывающую область движения, определяемую амплитудами колебаний. Это фигура Лиссажу.

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

§ 65. Полевые динамические функции

1. Общая характеристика метода. Детальную микроскопическую информацию о движении частиц в фазовом пространстве дают уравнения движения вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \sum_{i=1}^N U_{ki} (|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|) + \mathbf{F}_k^{\text{ext}}, \\ \dot{\mathbf{r}}_k &= \mathbf{p}_k/m_k \\ (i, k &= 1, \dots, N, \quad i \neq k), \end{aligned} \quad (65.1)$$

если указан способ определения и задания начального состояния системы на *микроуровне* в виде набора точек $\mathbf{r}_k(t_0)$, в которых должны были находиться все частицы в один и тот же момент времени t_0 и иметь в этот момент скорости $\mathbf{v}_k(t_0)$ или импульсы $\mathbf{p}_k(t_0)$. Такая абстрактная постановка задачи столь же универсальна, сколь бесполезна практически в приложении к любому образцу, состоящему из большого числа частиц. Для систем частиц, которые остаются в связанных состояниях во внешних силовых полях, можно ввести модельные представления в виде твердых тел путем фиксации расстояний между материальными точками. Система с $3N$ степенями свободы при этом заменяется модельным твердым телом с шестью степенями свободы. Начальные координаты материальных точек сохраняются в выражениях для координат центра масс, компонент тензора инерции. Сохраняются и трудности вычисления подобных физических характеристик на основе суммирования свойств отдельных частиц. Таким образом, уже при вычислении инерционных характеристик твердого тела суммирование комбинаций пространственных координат N частиц твердого тела должно быть заменено при больших N интегрированием плотности массы, плотности тензора инерции, т. е. скалярного и тензорного материальных полей в физическом (не в конфигурационном) пространстве. Гладкие динамические функции должны строиться путем отображения

динамических функций частиц на гладкие полевые динамические функции без предельного перехода к бесконечно малым массам в бесконечно малых объемах, игнорирующего атомно-молекулярную структуру вещества.

В общем случае малая окрестность каждой точки физического пространства имеет определенную плотность числа частиц, массы, электрического заряда, импульса, кинетической энергии, является источником электромагнитного и гравитационного полей. Все эти и другие аддитивные динамические характеристики различны в окрестностях разных точек и являются функциями времени в каждой фиксированной точке. Состояние системы N частиц при таком представлении должно определяться набором скалярных, векторных, тензорных полевых функций и их производных, а уравнениями движения служить уравнения в частных производных. Формулировка континуальных методов для систем взаимодействующих частиц включает в себя метод построения полевых динамических характеристик системы и вывод уравнений для них на основе уравнений вида (65.1).

2. Физически бесконечно малый объем и полевые динамические функции. Пусть \mathbf{r} — произвольная точка 3-мерного евклидова пространства, а $\Delta(\mathbf{r})$ — некоторая окрестность этой точки. Обозначим через Δ объем области $\Delta(\mathbf{r})$ и будем считать его и форму окрестности одними и теми же для всех \mathbf{r} . Обозначим далее через $N(\mathbf{r}, t)$ число частиц в $\Delta(\mathbf{r})$ в момент t . Тогда полная масса $N(\mathbf{r}, t)$ частиц $\rho_{(m)}(\mathbf{r}, t)$, импульс $\mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t)$, кинетическая энергия $\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t)$, электрический заряд $\rho_{(e)}(\mathbf{r}, t)$, электрический ток $\mathbf{j}_{(e)}(\mathbf{r}, t)$, приходящиеся на единицу объема области $\Delta(\mathbf{r})$, будут равны

$$\begin{aligned}\rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i, & \mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i \mathbf{v}_i(t), \\ \rho_{(e)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} e_i, & \mathbf{j}_{(e)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} e_i \mathbf{v}_i(t), \\ \varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(t)}{2}.\end{aligned}\quad (65.2)$$

Вообще для любой аддитивной динамической функции $\chi_i(t)$ может быть указана соответствующая полевая динамическая

функция по формуле

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} \chi_i(t). \quad (65.3)$$

Определения (65.2), (65.3) имеют ясное физическое содержание, однако в качестве верхнего предела суммирования в эти определения входит переменное число частиц $N(\mathbf{r}, t)$. Это препятствует их использованию совместно с уравнениями движения (65.1). Преобразуем формулы (65.2), (65.3) так, чтобы в них входило полное число частиц системы N , уже содержащееся в уравнениях движения (65.1), а также законы движения частиц $\mathbf{r}_i(t)$. Для этого заметим, что в соответствии с определением точечной частицы (материальной точки) как частицы с распределением массы $m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$, имеем для частицы с единичной массой

$$\int_{\Delta(\mathbf{r})} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi} = \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_i(t) \in \Delta(\mathbf{r}), \\ 0, & \mathbf{r}_i(t) \notin \Delta(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (65.4)$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — радиус-вектор с началом в пространственной точке \mathbf{r} и интегрирование распространяется на всю трехмерную область $\Delta(\mathbf{r})$. Поэтому справедливы следующие представления формул (65.2), (65.3):

$$\rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi}, \quad (65.5)$$

$$\rho_{(e)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} e_i = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi}, \quad (65.6)$$

$$\mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i \mathbf{v}_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi}, \quad (65.7)$$

$$\mathbf{j}_{(e)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} e_i \mathbf{v}_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi}, \quad (65.8)$$

$$\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(t)}{2} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(t)}{2} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi, \quad (65.9)$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} \chi_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \chi_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi. \quad (65.10)$$

Каждая из полевых функций (65.5)–(65.10) представляет собой проинтегрированную по области $\Delta(\mathbf{r})$ микроскопическую плотность аддитивной физической характеристики системы, определенную во всем пространстве в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \chi_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \quad (65.11)$$

В частности, плотность числа частиц (концентрация) $n(\mathbf{r}, t) = N(\mathbf{r}, t)/\Delta$ получается путем интегрирования по $\Delta(\mathbf{r})$ и деления на объем Δ распределения частиц $\sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi = N(\mathbf{r}, t)/\Delta. \quad (65.12)$$

Плотность кинетической энергии (65.9) есть результат интегрирования по $\Delta(\mathbf{r})$ и деления на Δ микроскопической плотности $\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{v}_i^2(t)/2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ и т. п. Функции (65.5)–(65.10) обладают важным физическим свойством: интегралы от них по всему пространству дают глобальные физические характеристики системы — число частиц, массу, заряд, импульс, полный электрический ток, кинетическую энергию системы и т. п., которые определяют количественно систему частиц в классической динамике. Действительно, имеет место формула

$$\int \chi(\mathbf{r}, t) dV = \int \varphi(\mathbf{r}, t) dV = \sum_{i=1}^N \chi_i, \quad (65.13)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ определена в (65.11). Правое равенство в (65.13) непосредственно следует из (65.11) и определения δ -функции.

Убедиться в справедливости левого равенства можно, представив $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{k}, t) d^3 k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta(2\pi)^3} \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \xi \int d^3 k \varphi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi})} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \wedge(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (65.14)$$

где

$$\wedge(\mathbf{k}) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}} d^3 \xi. \quad (65.15)$$

Фурье-образ полевой динамической функции $\chi(\mathbf{k}, t)$ равен, как это видно из (65.14), фурье-образу соответствующего микроскопического распределения $\varphi(\mathbf{k}, t)$, умноженному на $\wedge(\mathbf{k})$:

$$\chi(\mathbf{k}, t) = \varphi(\mathbf{k}, t) \wedge(\mathbf{k}). \quad (65.16)$$

Проинтегрируем обе части (65.14) по всему пространству. Получим

$$\int \chi(\mathbf{r}, t) dV = \int \delta(\mathbf{k}) \wedge(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}, t) d^3 k = \wedge(0) \varphi(0, t).$$

Но $\wedge(0) = 1$, $\varphi(0, t) = \int \varphi(\mathbf{r}, t) dV$, что и доказывает равенства (65.13). Глобальные физические характеристики системы, вычисленные при помощи полевых динамических функций по формулам (65.5)–(65.10), (65.12), совпадают с результатами вычислений при помощи микроскопических распределений.

Значения функций (65.5)–(65.10), (65.12) зависят от выбора Δ . В дальнейшем мы будем полагать, что для данной системы частиц и заданных интервалов изменения физических условий окрестность $\Delta(\mathbf{r})$ может быть выбрана такой, что в ней содержится достаточно много частиц. При нормальных условиях в объеме $\Delta \sim 10^{-9} \text{ см}^3$ будет находиться $\sim 10^{10}$ молекул газа. Тогда приращения $|n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - n(\mathbf{r}, t)|$ при $|\boldsymbol{\epsilon}| > 0$ будут малы по сравнению с $n(\mathbf{r}, t)$, и плотность числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ можно считать гладкой функцией. Это условие вводит ограничение на Δ снизу. Мы будем считать также, что линейные размеры области $\Delta(\mathbf{r})$, например диаметр сферической окрестности, выбраны

меньшими характерных масштабов коллективных физических явлений, таких как длина звуковой волны.

Объем Δ области $\Delta(\mathbf{r})$, удовлетворяющий указанным двум условиям, называется *физически бесконечно малым*, в отличие от бесконечно малых объемов, для которых не существует ограничений снизу и на которых предполагается справедливой механика материальных точек. Физически бесконечно малый объем служит универсальным инструментом введения макромасштабов в физическом пространстве. На макромасштабах проявляются коллективные физические характеристики частиц, причинно-следственные связи между ними и их временная эволюция.

Начальные значения полевых динамических функций однозначно определяются начальным состоянием системы частиц, т. е. набором $\mathbf{r}_i(0)$, $\mathbf{v}_i(0)$. Так что начальные значения плотности массы, импульса, кинетической энергии равны

$$\rho_{(m)}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(0)) d^3 \xi,$$

$$\mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(0) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(0)) d^3 \xi,$$

$$\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(0)}{2} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(0)) d^3 \xi.$$

Вообще для любой аддитивной функции

$$\chi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \chi_i(0) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(0)) d^3 \xi. \quad (65.17)$$

Число аддитивных, имеющих физическое содержание функций для системы из N частиц значительно меньше $6N$. Поэтому микроскопическое начальное состояние не может быть восстановлено по начальным значениям полевых динамических функций. Определенному набору значений таких функций в момент t соответствует бесконечно много микроскопических состояний $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$, ансамбль Гиббса.

При фиксированном \mathbf{r} и $\Delta \rightarrow 0$ в области интегрирования $\Delta(\mathbf{r})$ может оказаться только одна точечная частица или

частиц не будет вовсе. Этому случаю соответствует микроскопическая плотность массы

$$\rho_{(m)}^{(\text{micro})}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \quad (65.18)$$

Представления точечных частиц как частиц с распределениями массы, равными $m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$, вместе с представлением уравнений движения в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (65.1) приводят, как легко видеть, к формулировке классической динамики в частных производных.

§ 66. Уравнение непрерывности

Дифференцируя по времени плотность массы (65.5):

$$\rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi, \quad (66.1)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi. \quad (66.2)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) &= -\mathbf{v}_i(t) \nabla \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) = \\ &= -\nabla (\mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t))), \end{aligned} \quad (66.3)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi = 0. \quad (66.4)$$

Но в соответствии с (65.7)

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi = \mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t)$$

есть плотность потока импульса (интеграл от $\mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t)$ по всему пространству равен полному импульсу системы), и мы приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_{(m)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (66.5)$$

Из формул (65.7), (65.5) и определения скорости центра масс $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ частиц области $\Delta(\mathbf{r})$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{(m)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i \mathbf{v}_i(t) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \sum_{i=1}^{N(\mathbf{r}, t)} m_i = \rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (66.6)$$

которое позволяет представить уравнение (66.5) в виде

$$\frac{\partial \rho_{(m)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_{(m)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (66.7)$$

Уравнения непрерывности для плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ и плотности электрического заряда $\rho_{(e)}(\mathbf{r}, t)$ получаются аналогично (66.5) дифференцированием определений (65.12), (65.6). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} j_{(e)} = 0, \quad (66.8)$$

$$\frac{\partial \rho_{(e)}}{\partial t} + \operatorname{div} j_{(e)} = 0. \quad (66.9)$$

Здесь $j_{(e)}$ — плотность электрического тока (65.8);

$$\mathbf{j}_{(c)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (66.10)$$

— плотность потока числа частиц.

Интегрируя уравнения непрерывности (66.7) ради определенности по произвольному неподвижному макроскопическому объему V , ограниченному поверхностью S , и используя формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{(m)} dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}_{(m)} dV = - \oint_S \mathbf{j}_{(m)} d\mathbf{S}, \quad (66.11)$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, \mathbf{n} — единичный вектор внешней к S нормали. Мы видим, что изменение массы в объеме V с течением времени

определяется разностью масс частиц, приходящих в этот объем, $\mathbf{j}_{(m)} d\mathbf{S} < 0$, и покидающих объем V , $\mathbf{j}_{(m)} d\mathbf{S} > 0$. Эта формула обычно используется в качестве исходной при феноменологическом построении уравнения непрерывности.

Потоки частиц вызываются силовыми полями, градиентами давления, градиентами концентраций. В тех случаях, когда плотность потока частиц определенного сорта пропорциональна градиенту концентрации (закон А. Фика),

$$\mathbf{j}_{(c)}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}, t) \nabla n(\mathbf{r}, t), \quad (66.12)$$

где $D(\mathbf{r}, t)$ — коэффициент диффузии, уравнение непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \operatorname{div} (D(\mathbf{r}, t) \nabla n(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (66.13)$$

и является уравнением диффузии. Это уравнение полностью определяет эволюцию плотности числа частиц, если известны начальные и граничные условия.

Уравнение (66.7) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \nabla \right) \rho_{(m)} = -\rho_{(m)} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (66.14)$$

Оператор в левой части (66.14) представляет собой сумму локальной производной $(\partial/\partial t)\rho_{(m)}$ и конвективной, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \nabla \rho_{(m)}$, и носит название *субстанциональной или материальной производной*. Это полная производная по времени вдоль линии тока. *Линия тока* определяется как линия, для которой векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ является касательным в каждой точке, и, следовательно, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{dx}{v_x(\mathbf{r}, t)} = \frac{dy}{v_y(\mathbf{r}, t)} = \frac{dz}{v_z(\mathbf{r}, t)}. \quad (66.15)$$

В определенных физических условиях движение частиц не сопровождается заметными изменениями плотности массы или концентрации частиц. В таких условиях систему частиц можно считать *несжимаемой жидкостью*, для которой

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \nabla \right) \rho_{(m)} = 0. \quad (66.16)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение непрерывности (66.14) сводится к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (66.17)$$

Если при этом движение является *безвихревым*, то и $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$. Но $\text{rot } \nabla \varphi = 0$ всегда. Поэтому существует потенциал $\psi(\mathbf{r}, t)$ векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, такой, что $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$. Для такого *потенциального движения* уравнение (66.17) принимает вид

$$\text{div grad } \psi(\mathbf{r}, t) = \Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (66.18)$$

т.е. $\psi(\mathbf{r}, t)$ — *гармоническая функция*. Задание $\psi(\mathbf{r}, t)$ на макроскопической граничной поверхности S , ограничивающей объем V , полностью определяет гармоническую функцию внутри S , а задание нормальной производной $\partial \psi / \partial n$ на S определяет $\psi(\mathbf{r}, t)$ внутри S с точностью до постоянной. Поэтому поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ безвихревого движения несжимаемой жидкости полностью определяется уравнением непрерывности (66.18) и граничными условиями. В общем случае это не так; одного уравнения непрерывности недостаточно для нахождения четырех неизвестных функций $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, и необходимо получить векторное уравнение эволюции плотности потока за счет взаимодействий между частицами, а также между частицами и силовыми полями.

§ 67. Уравнения баланса импульса систем взаимодействующих частиц

Полный импульс частиц, находящихся в момент t в $\Delta(\mathbf{r})$ -окрестности произвольной точки \mathbf{r} трехмерного пространства и отнесенный к единице объема, равен (65.7):

$$\rho(\mathbf{r}, t) v^\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^\alpha(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi. \quad (67.1)$$

(Здесь и далее индекс у плотности массы $\rho_{(m)}$ опускается; нижние индексы используются для нумерации частиц; верхние тензорные индексы не имеют преимуществ перед нижними тензорными индексами, поскольку здесь контравариантные и ковариантные составляющие совпадают.)

Дифференцируя (67.1) по времени и учитывая формулу (66.3) для производной δ -функции, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^\alpha(t) \mathbf{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \dot{v}_i^\alpha(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi. \quad (67.2)$$

Симметричным по α, σ тензором в (67.2):

$$\Pi^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^\alpha(t) \mathbf{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi, \quad (67.3)$$

представлено тензорное поле плотности потока импульса. При интегрировании (67.2) по произвольному макроскопическому объему V , ограниченному поверхностью S , первое слагаемое даст изменение в единицу времени полного импульса частиц, находящихся внутри S :

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^\alpha) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v^\alpha dV.$$

Второе слагаемое при каждом фиксированном α можно преобразовать по формуле Остроградского–Гаусса, так что

$$\int_V \frac{\partial \Pi^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma} dV = \oint \Pi^{\alpha\sigma} dS_\sigma$$

и $\Pi^{\alpha\sigma}$ есть приходящийся на единицу объема поток α -компоненты импульса, который переносится частицами в единицу времени через элемент поверхности, перпендикулярный оси x^σ декартовой системы координат. Динамика системы точечных частиц определяется уравнениями движения (65.1). Поэтому в правой части (67.2)

$$m_i \dot{v}_i^\alpha(t) = F_i^\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) - \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} U_{ki}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|), \quad (67.4)$$

где $F_i^\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ — сила, действующая на частицу во внешних полях. Подставляя в (67.2) уравнения движения (67.4) и определение (67.3), а также используя равенство

$$\int f(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i) d^3 \xi = \int f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i) d^3 \xi, \quad (67.5)$$

вытекающее непосредственно из определения δ -функции, получаем уравнение баланса импульса системы частиц в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^\alpha) + \frac{\partial \Pi^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma} = \Phi_{(\text{ext})}^\alpha + \Phi^\alpha, \quad (67.6)$$

где

$$\Phi_{(\text{ext})}^{\alpha} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N F_i^{\alpha}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.7)$$

— приходящаяся на единицу объема внешняя сила;

$$\Phi^{\alpha} = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \sum_{k=1}^N U_{ki}(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_k|) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.8)$$

— плотность силы взаимодействия $N(\mathbf{r}, t)$ частиц области $\Delta(\mathbf{r})$ со всеми частицами системы.

Заметим далее, что для всех \mathbf{r} поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ определено формулой (66.6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^{\alpha}(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \\ = v^{\alpha}(\mathbf{r}, t) \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi, \end{aligned} \quad (67.9)$$

из которой следует равенство

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = 0, \quad (67.10)$$

где

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (67.11)$$

— скорость частицы за вычетом скорости центра масс $\Delta(\mathbf{r})$ -окрестности, или *скорость теплового движения* частицы. В соответствии с (67.9) сумма всех импульсов теплового движения частиц $\Delta(\mathbf{r})$ -окрестности равна нулю. Но плотность потока импульса теплового движения отлична от нуля. Этот вклад можно выделить в выражении (67.3) для $\Pi^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t)$ при помощи формулы (67.10). Слагаемые вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^{\alpha}(t) u_i^{\sigma}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \\ = v^{\alpha}(\mathbf{r}, t) \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^{\sigma}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \end{aligned}$$

равны нулю вследствие (67.9), и мы получим

$$\Pi^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) v^{\alpha}(\mathbf{r}, t) v^{\sigma}(\mathbf{r}, t) + P^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t). \quad (67.12)$$

Здесь

$$P^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^{\alpha} u_i^{\sigma} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.13)$$

— симметричное тензорное поле кинетического давления. Тензор $P^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t)$ обращается в нуль, если тепловое движение частиц отсутствует ($\mathbf{u}_i = 0$).

Принимая во внимание (67.11) и уравнение непрерывности (66.7), левую часть уравнения баланса импульса можно представить в виде суммы произведения плотности массы на субстанциональную производную от поля скоростей и дивергенции тензорного поля кинетического давления:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\rho v^{\alpha} v^{\sigma} + P^{\alpha\sigma}) = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) v^{\alpha} + \frac{\partial P^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (67.14)$$

Правая часть уравнения баланса импульса (67.6) содержит взаимодействие частиц с внешними полями (67.7) и другими частицами системы (67.8). Во внешних полях: гравитационном $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$, электрическом $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитном $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ на частицу с электрическим зарядом e_i действует сила

$$F_i^{\alpha}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) = m_i G^{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) + e_i E^{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) + \frac{e_i}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_i^{\beta}(t) B^{\gamma}(\mathbf{r}_i, t). \quad (67.15)$$

В Δ -окрестности точки \mathbf{r} радиус-вектор частицы можно представить в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i$. Поэтому плотность силы (67.7), действующей на $N(\mathbf{r}, t)$ частиц области $\Delta(\mathbf{r})$, равна

$$\begin{aligned} \Phi_{(\text{ext})}^{\alpha} &= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N F_i^{\alpha}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N G^{\alpha}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) m_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i E^{\alpha}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i B^\gamma(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) \mathbf{v}_i^\beta(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (67.16)$$

Плотность возможных внешних сил, представленная уравнением (67.15), является полевой динамической функцией, общей для широкого класса силовых полей. Но в таком виде она не выражена непосредственно через уже введенные макроскопические динамические функции, представляющие систему частиц в коллективных процессах взаимодействия и движения. Это затрудняет формулировку замкнутого математического аппарата, который должен базироваться на конечном числе аддитивных динамических функций. Новые возможности открываются для задач, в которых внешние силовые поля мало меняются на расстояниях порядка масштабов области $\Delta(\mathbf{r})$ или пространственные масштабы, вводимые посредством физически бесконечно малых объемов, могут быть выбраны большими масштабов неоднородности силовых полей. В таких задачах напряженности полей в точках $\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i$ можно заменить их разложениями по степеням ξ_i^α . В линейном приближении будем иметь

$$E^\alpha(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) = E^\alpha(\mathbf{r}, t) + \xi_i^\beta \frac{\partial E^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta}. \quad (67.17)$$

Аналогичные представления имеют место для гравитационного и магнитного полей. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_{(\text{ext})}^\alpha &= \rho_{(m)}(\mathbf{r}, t) G^\alpha(\mathbf{r}, t) + \rho_{(e)}(\mathbf{r}, t) E^\alpha(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_{(e)}^\beta(\mathbf{r}, t) B^\gamma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial G^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} c^\beta(\mathbf{r}, t) + d^\beta(\mathbf{r}, t) \frac{\partial E^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} + \\ &+ \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial B^\gamma(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu} d^{\beta,\mu}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (67.18)$$

где

$$c^\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \xi_i^\beta \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.19)$$

— отнесенное к единице массы векторное поле смещений центров масс частиц относительно точек \mathbf{r} ;

$$d^\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\beta \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.20)$$

— дипольный момент (поляризация) частиц области $\Delta(\mathbf{r})$, отнесенный к объему этой области;

$$d^{\beta,\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\beta v_i^\mu \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (67.21)$$

— плотность потока дипольного момента.

Таким образом, для любой системы взаимодействующих частиц уравнение баланса импульса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\rho v^\alpha v^\sigma + P^{\alpha\sigma}) = \Phi^\alpha + \Phi_{(\text{ext})}^\alpha, \quad (67.22)$$

где силовые векторные поля Φ^α , $\Phi_{(\text{ext})}^\alpha$ определены формулами (67.7), (67.8). Для систем частиц во внешних полях, медленно меняющихся на масштабах области $\Delta(\mathbf{r})$, общее выражение для плотности силы (67.7) преобразуется к выражению (67.17). Из (67.17) видно, что силовые поля принимают участие в коллективных взаимодействиях напряженностями полей и их производными, а система частиц — распределением частиц, представленном на макромасштабах набором материальных полей или полевых динамических функций различной тензорной размерности. Уравнения для этих функций могут быть получены в рамках излагаемого здесь метода.

В однородных (внешних) полях три последних слагаемых в выражении для $\Phi_{(\text{ext})}^\alpha$ обращаются в нуль. Для разреженных газов иногда можно пренебречь взаимодействием частиц. Тогда уравнение баланса импульса системы невзаимодействующих частиц будет полностью определяться формулой (67.21), в которой следует положить $\Phi^\alpha = 0$.

§ 68. Уравнения баланса импульса систем частиц с конечным радиусом взаимодействия. Тензор напряжений

Основным физическим механизмом пространственно-временных изменений плотности импульса, поля скоростей в отсутствие внешних силовых полей является взаимодействие между частицами системы. Векторное поле плотности силы взаимодействия $\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t)$ частиц области $\Delta(\mathbf{r})$ с частицами системы

определяется формулой (67.8):

$$\Phi^\alpha = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (68.1)$$

Мы полагаем, таким образом, что силы взаимодействия между частицами являются потенциальными, зависящими от времени только через координаты частиц. Для дальнейших преобразований этого выражения необходимо указать явный вид функций U_{ki} , характерные свойства взаимодействий совокупностей частиц, представленных в (68.1).

Силы взаимодействия между нейтральными молекулами являются короткодействующими. Типичным потенциалом этого класса взаимодействий является потенциал Леннард-Джонса

$$U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = 4\epsilon \left\{ \left(\frac{a}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \right)^{12} - \left(\frac{a}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \right)^6 \right\}$$

(на расстояниях $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| > 2a$ взаимодействие практически отсутствует). Будем считать далее, что в формуле (68.1) потенциалы U_{ki} имеют малый радиус действия. Тогда основной вклад во взаимодействие $N(\mathbf{r}, t)$ частиц окрестности $\Delta(\mathbf{r})$ со всеми частицами системы дадут лишь близко расположенные частицы, т. е. малые $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$.

Заменим индексы суммирования в (68.1) по правилу $i \rightleftharpoons k$ и результат сложим с исходной формулой (68.1). Поскольку

$$\partial U_{ik} / \partial x_i^\alpha = -\partial U_{ik} / \partial x_k^\alpha,$$

будем иметь

$$\Phi^\alpha = -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} [\delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) - \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_k(t))] d^3\xi. \quad (68.2)$$

Расстояния между частицами можно ввести явно, положив

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ik} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}, \quad (68.3)$$

где $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $\mathbf{R}_{ik} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)/2$. Тогда

$$\Phi^\alpha = \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} \left[\delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}\right) - \delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}\right) \right] d^3\xi. \quad (68.4)$$

По условию $|\mathbf{r}_{ik}| \sim a \ll \Delta^{1/3}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha &\cong \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \left(-\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right) (x_i^\beta - x_k^\beta) \times \\ &\quad \times \left[-\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] \delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)/2\right) d^3\xi = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U'_{ik} \frac{(x_i^\alpha - x_k^\alpha)(x_i^\beta - x_k^\beta)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \delta \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k) \right) d^3\xi \right\} \equiv -\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}. \quad (68.5) \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по полному аргументу от потенциальной энергии U_{ik} . Силовое поле $\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t)$ для системы частиц с радиусами взаимодействия порядка их линейных размеров оказывается потенциальным, причем «потенциалом» служит тензорное поле

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U'_{ik} \frac{(x_i^\alpha - x_k^\alpha)(x_i^\beta - x_k^\beta)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \times \right. \\ \left. \times \delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)/2\right) d^3\xi \right\}. \quad (68.6)$$

Тензор $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется взаимодействиями частиц и может быть назван *тензором напряжений*. Тензор напряжений симметричен. Этот факт следует из (68.6) непосредственно.

Таким образом, уравнение баланса импульса системы частиц, взаимодействие между которыми имеет эффективный радиус порядка линейных размеров частиц, может быть представлено

в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\rho v^\alpha v^\beta + P^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}) = \rho G^\alpha \quad (68.7)$$

или, принимая во внимание уравнение непрерывности,

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) v^\alpha + \frac{\partial (P^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} = \rho G^\alpha. \quad (68.8)$$

Мы считаем, что система частиц находится во внешнем гравитационном поле. Более полные представления плотности внешних сил содержатся в выражении (67.17); их следует воспроизвести в правых частях (68.7), (68.8) в соответствии с физическими условиями задачи.

В уравнениях (68.7), (68.8) тензоры $P^{\alpha\beta}$, $\sigma^{\alpha\beta}$ содержатся в виде суммы. Вместе с тем они имеют разную физическую природу. При одном и том же молекулярном составе в уравнении баланса импульса может оказаться преобладающим кинетическое давление $P^{\alpha\beta}$ (газ) или «напряжение» $\sigma^{\alpha\beta}$, вызванное взаимодействием частиц (жидкая фаза).

§ 69. Уравнение баланса импульса систем частиц с кулоновским взаимодействием

1. Уравнения баланса импульса электронной и ионных компонент системы. Радиус действия кулоновских сил, как это следует из формулы Резерфорда для сечения рассеяния, является бесконечно большим. Это обстоятельство делает невозможным сведение плотности силы взаимодействия частиц к дивергенции тензора напряжения. Но общая формула (67.8) для этого силового поля останется справедливой, если пренебречь запаздыванием взаимодействий и считать U_{ik} равной потенциальной энергии кулоновых сил: $U_{ik} = e_i e_k G_{ik}$ ($G_{ik} = 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$). Кроме того, формула (67.8) имеет место для гравитационных сил: $U_{ik} = -\gamma m_i m_k G_{ik}$. Таким образом, формулой (67.8) представлены плотности сил взаимодействия широкого класса физических систем.

В коллективных взаимодействиях с внешними электромагнитными полями (67.17) система заряженных частиц была представлена набором динамическими функций, определяющим распределение частиц: плотностью электрического заряда, электрического тока, дипольного момента и т. п. Теперь эти функции сами должны служить источниками силовых полей, суммируемых с внешними полями; уравнение баланса импульса в терминах

макроскопических распределений должно содержать уравнение коллективного поля.

Перейдем к количественной формулировке коллективной динамики частиц и полей. С этой целью преобразуем выражение (67.8). Имеем

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha &= -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi = \\ &= -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_k|)}{\partial x^\alpha} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \xi = \\ &= -\frac{1}{\Delta} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \xi \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t)) = \\ &= -\frac{1}{\Delta} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \xi \frac{\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{N'} [e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t))], \quad (69.1) \end{aligned}$$

где $G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|) = 1/|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|$.

Дальнейшие преобразования связаны с использованием формулы (65.13), согласно которой интеграл по всему пространству от динамической функции равен такому же интегралу от определенной на области $\Delta(\mathbf{r})$ полевой динамической функции. Используя эту формулу по отношению к переменным со штрихом, мы можем представить (69.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha &= -\frac{1}{\Delta^2} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3 \xi' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \xi \frac{\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}'|)}{\partial x^\alpha} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{N'} [e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}' - \mathbf{r}_k(t))]. \quad (69.2) \end{aligned}$$

Формула (69.2) выражает силу, действующую на частицы в их собственном поле. Предполагая, что коллективные поля,

так же как и внешние силовые поля в (67.17), меняются медленно на масштабах физически бесконечно малого объема, мы можем представить $\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}'|)/\partial x^\alpha$ в виде разложения по степеням $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')^\sigma$ и ограничиться слагаемыми с производными функции G не слишком высокого порядка. Принимая во внимание только третий порядок малости, получим

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha = & -\frac{1}{\Delta^2} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3\xi' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3\xi \left\{ \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} (\xi^\mu - \xi'^\mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} (\xi^\mu - \xi'^\mu) (\xi^\nu - \xi'^\nu) + \dots \right\} \times \\ & \times \sum_{i=1}^{N'} [e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}' - \mathbf{r}_k(t))] = \\ = & -\rho(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \rho(\mathbf{r}', t) + \rho(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \times \\ & \times d^\mu(\mathbf{r}', t) - d^\mu(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \rho(\mathbf{r}', t) - \frac{1}{2} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) \int dV' \times \\ & \times \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{2} d^\nu(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} d^\mu(\mathbf{r}', t) + \\ & + \frac{1}{2} d^\mu(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} d^\nu(\mathbf{r}', t) - \frac{1}{2} \rho(\mathbf{r}, t) \int dV' \times \\ & \times \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t) + \dots \quad (69.3) \end{aligned}$$

Здесь $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность электрического заряда;

$$q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\mu \xi_i^\nu \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi$$

— тензорное поле локальных квадрупольных моментов, определяющее (наряду с плотностью заряда и полем дипольных моментов) распределение частиц системы.

Сгруппируем в (69.3) слагаемые, содержащие ρ , d^μ , $q^{\mu\nu}$. Тогда получим

$$\Phi^\alpha = \rho \left\{ - \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \rho(\mathbf{r}', t) + \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} d^\mu(\mathbf{r}', t) - \right.$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t) + \dots \left. \right\} + \\ & + d^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ - \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \rho(\mathbf{r}', t) + \right. \\ & \left. + \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} d^\nu(\mathbf{r}', t) - \dots \right\} + \\ & + \frac{1}{2} q^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left\{ - \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \rho(\mathbf{r}', t) + \dots \right\}. \quad (69.4) \end{aligned}$$

Как легко видеть, выражения во всех трех фигурных скобках совпадают и множителями при них служат составляющие оператора

$$\hat{\rho} = \rho(\mathbf{r}, t) + d^\mu(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \quad (69.5)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках представляет собой электрическое поле, созданное распределением заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$. Преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} d^\mu(\mathbf{r}', t) & = - \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x'^\mu} d^\mu(\mathbf{r}', t) = \\ & = - \int dV' \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[\frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} d^\mu(\mathbf{r}', t) \right] + \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu}. \end{aligned}$$

Интеграл по объему от дивергенции тензорного поля преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль, так как частиц на бесконечности нет. Остается слагаемое, представляющее собой электрическое поле, источником которого служит дивергенция плотности дипольного момента.

Третье слагаемое в фигурных скобках преобразуется аналогично и представляет собой составляющую электрического поля, источником которой служит дивергенция вектора $\partial q^{\mu\nu}/\partial x^\nu$. Этот вектор при помощи операции дивергенции (по одному из тензорных индексов) связан с плотностью тензора квадрупольного момента $q^{\mu\nu}$:

$$-\frac{1}{2} \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t) = -\frac{1}{2} \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}.$$

Таким образом, плотность силы взаимодействия $\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t)$ частиц с собственным кулоновским полем $E^\alpha(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t) = \rho_{(e)}(\mathbf{r}, t)E^\alpha(\mathbf{r}, t) + d^\beta(\mathbf{r}, t)\frac{\partial E^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial^2 E^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \dots, \quad (69.6)$$

где

$$E^\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int dV' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \left[\rho_{(e)}(\mathbf{r}', t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \dots \right]. \quad (69.7)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (69.8)$$

формулу (69.7) можно представить в дифференциальной форме. Вычисляя дивергенцию поля (69.7), используя формулу (69.8) и интегрируя результат по переменным со штрихом, приходим к уравнению электрического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \left[\rho_{(e)}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \right]. \quad (69.9)$$

Выражение для силового поля $\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t)$ можно представить также в виде

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_{(e)}(\mathbf{r}, t)E^\alpha(\mathbf{r}, t), \quad (69.10)$$

где $E^\alpha(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (69.9).

Уравнение баланса импульса системы частиц с кулоновским взаимодействием получается теперь путем подстановки выражений (69.6), (69.7), (67.17) в уравнение баланса импульса общего вида (67.21). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(m)}v^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\rho_{(m)}v^\alpha v^\sigma + P^{\alpha\sigma}) &= \rho_{(m)}G^\alpha(\mathbf{r}, t) + \\ &+ c^\beta(\mathbf{r}, t)\frac{\partial G^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} + \rho_{(e)}(\mathbf{r}, t)[E^\alpha(\mathbf{r}, t) + E_{(ext)}^\alpha(\mathbf{r}, t)] + \\ &+ d^\beta(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial x^\beta}[E^\alpha(\mathbf{r}, t) + E_{(ext)}^\alpha(\mathbf{r}, t)] + \\ &+ \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}[E^\alpha(\mathbf{r}, t) + E_{(ext)}^\alpha(\mathbf{r}, t)] + \\ &+ \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}j_{(e)}^\beta(\mathbf{r}, t)B_{(ext)}^\gamma(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial B_{(ext)}^\gamma(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu}d^{\beta,\mu}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (69.11)$$

где $E_{(ext)}^\alpha(\mathbf{r}, t)$, $B_{(ext)}^\gamma(\mathbf{r}, t)$ — внешние электрическое и магнитное поля, $E^\alpha(\mathbf{r}, t)$ — собственное поле системы частиц (69.7).

Так как электрическое поле $E^\alpha(\mathbf{r}, t)$ определяется также дифференциальным уравнением (69.9), можно утверждать, что уравнение баланса импульса системы частиц с кулоновским взаимодействием распадается на самосогласованную систему уравнений, содержащую уравнение движения частиц в полном электрическом поле и уравнение собственного поля. В макроскопическом уравнении баланса импульса материальные поля $\rho(\mathbf{r}, t)$, $d^\beta(\mathbf{r}, t)$, $q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t, \dots)$ и их потоки служат источниками силовых полей и одновременно определяют силы, действующие на частицы в собственных силовых полях. В системе частиц с кулоновским взаимодействием эти силы непредставимы в виде дивергенции тензора напряжений. Влияние градиентов давления на эволюцию плотности импульса представлено независимо в каждой точке тензором кинетического давления, который обращается в нуль вместе со скоростями теплового движения частиц.

Уравнение баланса импульса является одним из главных инструментов исследования физических процессов и эффектов в системах с кулоновским взаимодействием частиц. Однако это уравнение содержит плотность массы $\rho_{(m)}$ и плотность заряда $\rho_{(e)}$, которые могут сильно различаться, что затрудняет решения задач с участием этих функций. Простые соотношения между $\rho_{(m)}$ и $\rho_{(e)}$ существуют только для частиц одного сорта или для частиц с одинаковым отношением заряда к массе. Плотность массы $m_a n_a(\mathbf{r}, t)$ и плотность заряда $e_a n_a(\mathbf{r}, t)$ частиц сорта «а» пропорциональны плотности числа частиц $n_a(\mathbf{r}, t)$. Полные плотности $\rho_{(m)}$ и $\rho_{(e)}$ системы получаются суммированием по всем сортам частиц. Следовательно, вместо уравнения баланса импульса для системы частиц мы должны иметь такие уравнения для каждого сорта частиц по отдельности: электронов, ионов. Все динамические функции в таких уравнениях будут определяться приведенными выше формулами, в которые вместо полного числа частиц N системы следует подставить число частиц N_a сорта «а». Вычисления, выполненные при выводе уравнений (69.11), (69.9), остаются при такой замене справедливыми за исключением вычисления суммы сил, действующих на частицы сорта «а» в области $\Delta(\mathbf{r})$; теперь суммирование должно вестись по всем частицам одного сорта «b» и по всем сортам «b», включая «а». В результате вместо уравнений (69.9), (69.11) будем иметь уравнения баланса импульса в виде системы уравнений движения для каждого сорта частиц:

$$\begin{aligned}
m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_a \nabla \right) v_a^\sigma + \frac{\partial p_a^{\beta\sigma}}{\partial x^\beta} = \\
= m_a n_a G^\alpha + c_a^\beta \frac{\partial G^\alpha}{\partial x^\beta} + e_a n_a [E^\alpha + E_{(\text{ext})}^\alpha] + \\
+ d_a^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} [E^\alpha + E_{(\text{ext})}^\alpha] + \frac{1}{2} q_a^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} [E^\alpha + E_{(\text{ext})}^\alpha] + \\
+ \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_a^\beta B_{(\text{ext})}^\gamma + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial B_{(\text{ext})}^\gamma}{\partial x^\mu} d_a^{\beta,\mu}, \quad (69.12)
\end{aligned}$$

и уравнения собственного электрического поля \mathbf{E} :

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_b \left[e_b n_b - \frac{\partial d_b^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_b^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \right]. \quad (69.13)$$

Включение полных электромагнитных взаимодействий между частицами в рамках изложенной схемы построения полевых динамических функций и уравнений для них не представляет затруднений и должно опираться на запаздывающие взаимодействия. Вместе с тем более простые системы с кулоновским взаимодействием, а также системы частиц с конечным радиусом взаимодействия являются важными практически и удобными для демонстрации метода перехода к континуальным представлениям динамики.

2. Экранирование поля электрического заряда в плазме. Найдем электрическое поле стационарного распределения $\rho^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ сторонних зарядов в неподвижной, $\mathbf{v}_a = 0$, локально-однородной и изотропной плазме с тензорами парциального давления, равными $p_a^{\beta\sigma} = \delta^{\beta\sigma} p_a$, и пренебрежимо малыми мультипольными составляющими в распределении заряда. В этих условиях и при $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ уравнения баланса импульса (69.12), (69.13) сводятся к системе уравнений

$$\nabla p_a(\mathbf{r}) = -e_a n_a(\mathbf{r}) \nabla \varphi, \quad (69.14)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_a e_a n_a(\mathbf{r}) - 4\pi \rho^{(\text{ext})}(\mathbf{r}). \quad (69.15)$$

В отсутствие сторонних зарядов плазма однородна и электрически нейтральна, так что $\sum_a e_a n_{a0} = 0$. Из определения тензора кинетического давления следует, что

$$p_a^{\beta\beta} = 2n_a \frac{3}{2} T_a,$$

где T_a — температура частиц сорта «а». След изотропного тензора $\delta^{\beta\sigma} p_a$ равен $3p_a$. Отсюда получаем уравнения состояния в виде

$$p_a(\mathbf{r}) = n_a(\mathbf{r}) T_a(\mathbf{r}). \quad (69.16)$$

Для термодинамически равновесной плазмы температуры электронной и ионных компонент $T_a(\mathbf{r})$ одинаковы и постоянны: $T_a(\mathbf{r}) = T$. В этом случае с помощью уравнения состояния можно выразить градиент давления через градиент концентрации в уравнении (69.14), и мы будем иметь

$$\nabla n_a(\mathbf{r}) = -\frac{e_a n_a(\mathbf{r})}{T} \nabla \varphi(\mathbf{r}). \quad (69.17)$$

Интегрируя (69.17), находим

$$n_a = n_{a0} \exp\left(-\frac{e_a \varphi}{T}\right). \quad (69.18)$$

Подставляя это решение в уравнение для потенциала φ , получаем уравнение поля

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_a e_a n_{a0} \exp\left(-\frac{e_a \varphi}{T}\right) - 4\pi \rho^{(\text{ext})}(\mathbf{r}), \quad (69.19)$$

где $\rho^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ — заданная функция. Это уравнение нелинейное, и поэтому принцип суперпозиции в плазме несправедлив.

Найдем поле одиночного заряда e , находящегося в начале координат. Полагая $(e_a \varphi / T) \ll 1$, можем разложить экспоненту в уравнении (69.19) в ряд и оставить в разложении только линейные слагаемые. В этом приближении уравнение поля является линейным и в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_{a0}}{T} \varphi = -4\pi e \delta(r). \quad (69.20)$$

Уравнение (69.20) имеет убывающее на бесконечности решение:

$$\varphi = \frac{e}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad (69.21)$$

где

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{\sum_a 4\pi e_a^2 n_{a0}}} \quad (69.22)$$

— дебаевский радиус экранирования. При $r > r_D$ кулоновское поле одиночного заряда в плазме эффективно экранируется.

3. Продольные плазменные волны. В электрически нейтральной (на масштабах области $\Delta(\mathbf{r})$) среде, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц, могут возбуждаться волны с электрическим полем, параллельным волновому вектору, т.е. продольные волны. Покажем это и найдем закон дисперсии собственных продольных волн в локально-однородной и изотропной двухкомпонентной плазме, состоящей из электронов и ионов. Для простоты будем считать, что масса иона значительно превосходит массу электрона, так что при высоких частотах колебаний движение ионов можно не учитывать.

Поле скоростей электронов определяется уравнением баланса импульса (69.12):

$$mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla p = en \mathbf{E}, \quad (69.23)$$

где \mathbf{E} — собственное поле системы частиц (69.13):

$$\nabla \mathbf{E} = -4\pi e(n - n_0), \quad (69.24)$$

n_0 — плотность ионов, равная равновесной плотности электронов. Уравнение непрерывности для электронной компоненты имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0. \quad (69.25)$$

В равновесном состоянии $n = n_0$, $p = p_0$, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} = 0$. При наличии возмущений $n = n_0 + \tilde{n}$, $p = p(n) = p(n_0 + \tilde{n})$. Для малых, одного порядка малости возмущений \tilde{n} , \mathbf{v} , \mathbf{E} уравнения баланса импульса и непрерывности можно линеаризовать, опуская в них произведения малых возмущений. При малых \tilde{n}

$$p(n_0 + \tilde{n}) = p(n_0) + \frac{dp(n_0)}{dn_0} \tilde{n},$$

и линеаризованная система уравнений имеет вид

$$mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dp}{dn_0} \nabla \tilde{n} = en_0 \mathbf{E}, \quad (69.26)$$

$$\nabla \mathbf{E} = -4\pi \tilde{n} e, \quad (69.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \nabla(n_0 \mathbf{v}) = 0. \quad (69.28)$$

Если возмущения имеют волновой характер, то в линейной теории они должны быть пропорциональны $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$ с амплитудами, зависящими от частоты ω и волнового вектора \mathbf{k} .

Учитывая это в уравнениях (69.26), (69.27), (69.28) или переходя в этих уравнениях к фурье-представлению, получим

$$-i\omega \mathbf{v} + ik \frac{1}{mn_0} \frac{dp}{dn_0} \tilde{n} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (69.29)$$

$$ik \mathbf{E} = -4\pi \tilde{n} e, \quad (69.30)$$

$$\omega \tilde{n} - n_0 k \mathbf{v} = 0. \quad (69.31)$$

Умножим уравнение (69.29) скалярно на \mathbf{k} и затем исключим $k\mathbf{v}$ и \tilde{n} при помощи уравнений (69.30), (69.31). В результате получим

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{m} \frac{dp}{dn_0} k^2 + \omega_p^2 \right) (k\mathbf{E}) = 0. \quad (69.32)$$

Здесь

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$$

— плазменная (ленгмюровская) электронная частота. Из (69.32) при $k\mathbf{E} \neq 0$ находим дисперсионное уравнение волн в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{m} \frac{dp}{dn_0} k^2. \quad (69.33)$$

Для вычисления производной от давления по концентрации предположим, что невозмущенное состояние разреженной плазмы описывается уравнением адиабаты Пуассона $pn^{-\gamma} = \text{const}$. Тогда в уравнении (69.33)

$$dp(n_0)/dn_0 = \gamma p/n_0 = \gamma T.$$

Сравнивая полученное таким образом уравнение с экспериментальными результатами или с результатами кинетической теории плазмы, находим $\gamma = 3$. Таким образом, закон дисперсии продольных плазменных волн имеет вид

$$\omega = \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} r_{De}^2 k^2 \right), \quad (69.34)$$

где

$$r_{De} = \sqrt{T/4\pi e^2 n_0}$$

— дебаевский радиус экранирования.

§ 70. Уравнение баланса энергии

Кинетическая энергия системы частиц, как и импульс системы, является аддитивной функцией. Поэтому в $\Delta(\mathbf{r})$ -окрестности каждой пространственной точки может быть определена кинетическая энергия, приходящаяся на единицу объема, интеграл от которой по всему пространству равен кинетической энергии системы. Скалярное поле плотности кинетической энергии определено формулой (65.9):

$$\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(t)}{2} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (70.1)$$

Для вывода уравнения в частных производных, при помощи которого может быть найдена функция $\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t)$, продифференцируем (70.1) по времени. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{(k)} + \frac{\partial \Pi^\sigma}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^\sigma(t) \dot{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi, \quad (70.2)$$

где

$$\Pi^\sigma(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i^2(t)}{2} \mathbf{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (70.3)$$

— векторное поле плотности потока кинетической энергии.

Выделим вклады теплового движения в выражениях (70.1), (70.3). Для этого представим скорость каждой частицы в виде двух слагаемых: скорости центра масс частиц области $\Delta(\mathbf{r})$ (поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$) и скорости теплового движения $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t). \quad (70.4)$$

Тогда формула (70.1) примет вид

$$\varepsilon_{(k)}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \left(\frac{1}{2} v^2(\mathbf{r}, t) + \varepsilon(\mathbf{r}, t) \right), \quad (70.5)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}, t) \varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (70.6)$$

— плотность кинетической энергии теплового движения частиц.

Подставляя в определение плотности потока (70.3) скорости частиц (70.4), представим Π^σ в виде

$$\Pi^\sigma = \rho v^\sigma \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) + P^{\sigma\gamma} v_\gamma + q^\sigma. \quad (70.7)$$

Здесь $P^{\alpha\sigma}$ — тензорное поле кинетического давления (67.12),

$$q^\sigma(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i u_i^2(t) u_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (70.8)$$

— плотность кинетического потока тепла.

После подстановки выражений (70.5), (70.7) в уравнение (70.2) это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \rho v_\alpha \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) + \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (P^{\sigma\gamma} v_\gamma) + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = \\ = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^\sigma(t) \dot{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \end{aligned} \quad (70.9)$$

С другой стороны, при выводе уравнения баланса импульса мы использовали кинематическое соотношение (67.2), левая часть которого была представлена в виде (67.13):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) v^\alpha + \frac{\partial P^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma} = \\ = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \dot{v}_i^\alpha(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \end{aligned} \quad (70.10)$$

Умножим обе части этого соотношения на v^α и просуммируем по α . Вычитая результат из (70.9), получим

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = \\ = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^\sigma \dot{v}_i^\sigma(t) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \end{aligned} \quad (70.11)$$

Это соотношение приобретает характер локального физического закона после включения в (70.11) основного закона дина-

мики (67.4). Таким образом, мы приходим к общему уравнению баланса энергии

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = W + W^{(\text{ext})}, \quad (70.12)$$

где

$$W(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} u_i^\sigma \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\sigma} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (70.13)$$

— скалярная динамическая функция, представляющая собой мощность, развиваемую на скоростях теплового движения силами взаимодействия между частицами;

$$W^{(\text{ext})}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N F_i^\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (70.14)$$

— локальная мощность возможных внешних сил на скоростях теплового движения.

Левую часть уравнения баланса энергии можно выразить также через неравновесную *температуру* $T(\mathbf{r}, t)$, равную по определению плотности кинетической энергии теплового движения, приходящейся с коэффициентом 2/3 на одну частицу:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{2} n(\mathbf{r}, t) T(\mathbf{r}, t). \quad (70.15)$$

Тогда вместо уравнения (70.12) будем иметь

$$\frac{3}{2} n \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) T + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = W + W^{(\text{ext})}. \quad (70.16)$$

Уравнение такого вида, но с равной нулю правой частью, может быть получено также на основании кинетического уравнения Больцмана.

Для конкретных физических систем в формулы (70.13), (70.14) следует подставить потенциалы взаимодействия частиц и внешние силы в явном виде. Однако уже из формулы (70.13) непосредственно следует, что внешнее гравитационное поле не оказывает влияния на эволюцию плотности кинетической энергии $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ теплового движения. Действительно, в соответствии с (67.14), $F_i^\alpha = m_i G^\alpha(\mathbf{r}_i, t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} W^{(\text{ext})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i G^\alpha(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t) u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} G^\alpha(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t) \sum_{i=1}^N m_i u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \\ &= \overline{G^\alpha}(\mathbf{r}, t) \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi, \quad (70.17) \end{aligned}$$

где $\overline{G^\alpha}$ — среднее значение напряженности поля в области $\Delta(\mathbf{r})$. Мы видим, что в этом случае $W^{(\text{ext})} = 0$, поскольку равен нулю интеграл (67.9), содержащийся в (70.17) в качестве множителя.

Для системы заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле

$$\begin{aligned} w^{(\text{ext})} &= \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i u_i^\alpha \left\{ E_{(\text{ext})}^\alpha(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{(\text{ext})}^\gamma(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_i, t) v_i^\beta \right\} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (70.18) \end{aligned}$$

Если внешние поля мало меняются на масштабах области $\Delta(\mathbf{r})$, то

$$\begin{aligned} w^{(\text{ext})} &= E_{(\text{ext})}^\alpha(\mathbf{r}, t) \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \\ &\quad + \frac{\partial E_{(\text{ext})}^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\mu u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \\ &\quad + \frac{\partial^2 E_{(\text{ext})}^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\mu \xi_i^\nu u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{(\text{ext})}^\gamma(\mathbf{r}, t) \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i u_i^\alpha [u_i^\beta + v^\beta(\mathbf{r}, t)] \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi + \dots. \quad (70.19) \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{u}_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (70.20)$$

— плотность электрического тока, вызванного тепловым движением частиц. Свертка антисимметричного тензора с симметричным равна нулю:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i u_i^\alpha u_i^\beta \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = 0.$$

Интегралами

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\mu u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = d^{\mu,\alpha}(\mathbf{r}, t), \quad (70.21)$$

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N e_i \xi_i^\mu \xi_i^\nu u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi = q^{\mu\nu,\alpha}(\mathbf{r}, t) \quad (70.22)$$

представлены локальные плотности теплового потока дипольного момента (поляризации) $d^{\mu,\alpha}(\mathbf{r}, t)$ и квадрупольного момента $q^{\mu\nu,\alpha}(\mathbf{r}, t)$. В процессе передачи энергии внешнего электромагнитного поля системе зарядов сама система представлена векторным и тензорными полями (70.20), (70.21), (70.22) (в общем случае рядом). Все такие поля обращаются в нуль при равных нулю скоростях теплового движения частиц. Работа в единицу времени (70.19), совершаемая внешними электромагнитными полями на скоростях теплового движения, в терминах макроскопических полей имеет вид

$$w^{(\text{ext})} = j_\alpha E_{(\text{ext})}^\alpha + d^{\mu,\alpha} \frac{\partial E_{(\text{ext})}^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} q^{\mu\nu,\alpha} \frac{\partial^2 E_{(\text{ext})}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j^\alpha(\mathbf{r}, t) v^\beta(\mathbf{r}, t) B^\gamma(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (70.23)$$

Отсюда видно, в частности, что эволюция плотности энергии теплового движения системы частиц с одинаковым отношением заряда к массе $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ определяется не напряженностями силовых полей, а их пространственными производными. Электрический ток с плотностью (70.20) для таких систем обращается в нуль.

§ 71. Уравнения баланса энергии систем частиц с конечным радиусом взаимодействия

Общая формула для мощности, развиваемой на скоростях теплового движения частиц силами взаимодействия между частицами, имеет вид (70.13):

$$W(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} u_i^\sigma \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\sigma} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (71.1)$$

Взаимодействия между частицами, представленные потенциальными энергиями U_{ik} , содержатся в общем уравнении баланса энергии (70.12) только в виде формулы (71.1). Для нейтральных атомов и молекул потенциалы взаимодействия обращаются в нуль на расстояниях порядка размеров частиц. Для взаимодействий такого рода мощность $W(\mathbf{r}, t)$ можно выразить через макроскопические полевые функции.

Представим выражение для мощности (71.1) в виде $W = W_1 + W_2$, где

$$W_1 = -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} (u_i^\alpha - u_k^\alpha) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi, \quad (71.2)$$

$$W_2 = -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} u_k^\alpha \times \\ \times [\delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) - \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_k(t))] d^3\xi. \quad (71.3)$$

В выражении (71.2) $(u_i^\alpha - u_k^\alpha) = (v_i^\alpha - v_k^\alpha)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} (u_i^\alpha - u_k^\alpha) = \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial t}.$$

Поэтому

$$W_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \right\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ v^\alpha(\mathbf{r}, t) \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \right\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \right\}. \quad (71.4)$$

Величина

$$\rho(\mathbf{r}, t)U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi \quad (71.5)$$

представляет собой плотность энергии взаимодействия; интеграл по всему пространству от этой функции равен полной энергии взаимодействия системы частиц:

$$\int \rho(\mathbf{r}, t)U(\mathbf{r}, t)dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|). \quad (71.6)$$

Последним слагаемым в (71.4) представлена дивергенция вектора потока энергии взаимодействия частиц при их тепловом движении, т. е. величина $\partial q_{1(\text{int})}^\alpha / \partial x^\alpha$, где

$$q_{1(\text{int})}^\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) u_i^\alpha \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \quad (71.7)$$

Таким образом,

$$W_1 = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t)U(\mathbf{r}, t)) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (v^\alpha(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t)U(\mathbf{r}, t)) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\alpha} q_{1(\text{int})}^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (71.8)$$

при любых $U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$.

Обратимся теперь к составляющей мощности W_2 , представленной формулой (71.3). Чтобы получить непротиворечивую систему уравнений баланса энергии и импульса, мы должны использовать при выводе уравнений баланса энергии те же приближения, что и при выводе уравнений для плотности импульса.

Введем поэтому в формуле (71.3) явную зависимость от расстояний между частицами $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, положив

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ik} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik},$$

где $\mathbf{R}_{ik} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)/2$. Тогда

$$W_2 = -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} u_k^\alpha \left[\delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}\right) - \right.$$

$$\left. - \delta\left(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ik}\right) \right] d^3\xi. \quad (71.9)$$

Для потенциалов, быстро спадающих на расстояниях порядка размеров частиц, основной вклад в этот интеграл дают малые расстояния $|\mathbf{r}_{ik}|$ между частицами. В нулевом порядке по радиусу взаимодействия δ -функции в квадратных скобках сокращаются и W_2 не дает вклада в мощность $W(\mathbf{r}, t)$. В первом порядке

$$W_2 \cong \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \left(-\frac{\Delta U_{ik}}{\Delta x_i^\alpha} u_k^\alpha \right) (x_i^\beta - x_k^\beta) \left[-\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik}) d^3\xi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i^\alpha} u_k^\alpha (x_i^\beta - x_k^\beta) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik}) d^3\xi \right\} +$$

$$+ \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i^\alpha} (x_i^\beta - x_k^\beta) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_{ik}) d^3\xi \right\} =$$

$$= -\sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial q_{2(\text{int})}^\beta(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta}. \quad (71.10)$$

Здесь

$$q_{2(\text{int})}^\beta(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^{N'} U'_{ik} u_k^\alpha \frac{(x_i^\alpha - x_k^\alpha)(x_i^\beta - x_k^\beta)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} -$$

$$- (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)/2) d^3\xi. \quad (71.11)$$

Подынтегральное выражение в (71.11) представляет собой свертку подынтегрального тензора в (68.6) с вектором скорости

теплого движения. Вектор $q_{2(\text{int})}^\alpha(\mathbf{r}, t)$ представляет, таким образом, поток энергии взаимодействий, определяющих тензор напряжений.

Полная мощность, развиваемая взаимодействиями частиц, равна

$$W(\mathbf{r}, t) = W_1 + W_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(v^\alpha \rho U) - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \sigma^{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}(q_{1(\text{int})}^\beta + q_{2(\text{int})}^\beta). \quad (71.12)$$

Это скалярное поле определяет правую часть уравнения баланса энергии (70.12), которое здесь удобно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(v^\alpha \rho \varepsilon) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = W + W^{(\text{ext})}. \quad (71.13)$$

Подставляя W из (71.12) в уравнение (71.13), приходим к уравнению баланса энергии системы частиц с конечным радиусом взаимодействия:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + U)] + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}[\rho v^\alpha(\varepsilon + U)] + (P^{\sigma\gamma} + \sigma^{\sigma\gamma}) \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(q^\beta + q_{1(\text{int})}^\beta + q_{2(\text{int})}^\beta) = W^{(\text{ext})}. \quad (71.14)$$

Здесь $\rho(\varepsilon + U)$ — плотность полной энергии: кинетической и потенциальной энергии взаимодействия частиц; $\rho v^\alpha(\varepsilon + U)$ — плотность потока полной энергии со скоростью $v^\alpha(\mathbf{r}, t)$. Тензор кинетического давления, обусловленный тепловым движением частиц, и тензор напряжения, определяющий их взаимодействие, входят в уравнение баланса энергии аддитивно. Полный тепловой поток представляет собой сумму кинетического потока тепла (67.12), вызванного переносом кинетической энергии теплого движения со скоростями теплого движения, и потока энергии взаимодействия со скоростями теплого движения частиц. Правая часть уравнения баланса энергии содержит мощность внешних сил (70.23), развиваемую при тепловом движении частиц. Внешнее гравитационное поле практически не оказывает влияния на эволюцию плотности энергии. В генерации мощности внешним электромагнитным полем принимают участие плотность электрического тока с тепловыми скоростями зарядов, тензорные поля плотностей дипольного, квадрупольного моментов, обращаемые в нуль вместе со скоростями теплого движения частиц. Для системы одинаковых частиц плотность

электрического тока на скоростях теплого движения равна нулю и поэтому мощность определяется значениями пространственных производных напряженностей силовых полей.

§ 72. Уравнения баланса энергии систем частиц с кулоновским взаимодействием

Для системы электрически заряженных частиц с потенциалами взаимодействия

$$U_{ik} = e_i e_k G_{ik} \quad (G_{ik} = 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$$

общий вид уравнения баланса энергии (70.12) сохраняется:

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = W + w^{(\text{ext})}. \quad (72.1)$$

Остается также справедливым выражение (70.23) для мощности внешних электрического и магнитного полей на скоростях теплого движения зарядов:

$$w^{(\text{ext})} = j_\alpha E_{(\text{ext})}^\alpha + d^{\mu,\alpha} \frac{\partial E_{(\text{ext})}^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} q^{\mu\nu,\alpha} \frac{\partial^2 E_{(\text{ext})}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j^\alpha(\mathbf{r}, t) v^\beta(\mathbf{r}, t) B^\gamma(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (72.2)$$

Однако разложение (71.10) для мощности сил взаимодействия между частицами

$$W(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} u_i^\sigma \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\sigma} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (72.3)$$

несправедливо для систем заряженных частиц из-за бесконечно большого радиуса действия сил. Вместе с тем при выводе макроскопического уравнения баланса энергии мы должны использовать тот же метод, что и при выводе уравнения баланса импульса (69.11), поскольку оба уравнения образуют единую систему. На основании свойств δ -функций и равенства (65.13) выражение (72.3) можно представить в виде

$$W(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\Delta^2} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3 \boldsymbol{\xi}' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \boldsymbol{\xi} \frac{\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}'|)}{\partial x^\alpha} \sum_{i=1}^{N'} u_i^\alpha \times \times [e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}' - \mathbf{r}_k(t))]. \quad (72.4)$$

Для физических систем с медленно меняющимися на масштабах Δ распределениями частиц и полей функцию $\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}'|)/\partial x^\alpha$ можно заменить разложением по степеням $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')^\sigma$, так что

$$\begin{aligned}
 W = & -\frac{1}{\Delta^2} \int dV' \int_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3 \xi' \int_{\Delta(\mathbf{r})} d^3 \xi \left\{ \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} (\xi^\mu - \xi'^\mu) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} (\xi^\mu - \xi'^\mu) (\xi^\nu - \xi'^\nu) + \dots \right\} \sum_{i=1}^{N'} u_i^\alpha \times \\
 & \times [e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}' - \mathbf{r}_k(t))] = \\
 & = -j^\alpha(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \rho(\mathbf{r}', t) + \\
 & + j^\alpha(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} d^\mu(\mathbf{r}', t) - \\
 & - q^{\mu, \alpha}(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \rho(\mathbf{r}', t) - \\
 & - \frac{1}{2} q^{\mu\nu, \alpha}(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} \rho(\mathbf{r}', t) + \\
 & + d^{\mu, \alpha}(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} d^\nu(\mathbf{r}', t) - \\
 & - \frac{1}{2} j^\alpha(\mathbf{r}, t) \int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t) + \dots \quad (72.5)
 \end{aligned}$$

Отсюда, приводя подобные слагаемые, находим

$$\begin{aligned}
 W = & j^\sigma \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \int dV' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left(\rho(\mathbf{r}', t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_\mu} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \dots \right) \right\} + d^{\mu, \alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int dV' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \right. \\
 & \left. \times \left(\rho(\mathbf{r}', t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_\mu} + \dots \right) \right\} + \frac{1}{2} q^{\mu\nu, \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \times \\
 & \times \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int dV' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left(\rho(\mathbf{r}', t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_\mu} + \dots \right) \right\}. \quad (72.6)
 \end{aligned}$$

В фигурных скобках (72.6) стоит электрическое поле, представленное ранее формулой (69.7):

$$\begin{aligned}
 E^\alpha(\mathbf{r}, t) = & -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int dV' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left[\rho_{(e)}(\mathbf{r}', t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}', t)}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \dots \right]. \quad (72.7)
 \end{aligned}$$

В качестве множителей при первых и вторых производных поля значатся плотности теплового потока дипольного $d^{\mu, \alpha}(\mathbf{r}, t)$ и квадрупольного $q^{\mu\nu, \alpha}(\mathbf{r}, t)$ моментов, определенные формулами (70.21), (70.22). Поэтому мощность кулоновских сил взаимодействия между частицами может быть представлена в виде

$$W(\mathbf{r}, t) = j^\sigma E_\sigma + d^{\mu, \sigma} \frac{\partial E_\sigma}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} q^{\mu\nu, \sigma} \frac{\partial^2 E_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \quad (72.8)$$

Подставляя (72.2), (72.8) в правую часть уравнения (72.1), получаем уравнение баланса энергии системы электрически заряженных частиц в виде

$$\begin{aligned}
 \rho_{(m)} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = \\
 = j^\sigma (E_\sigma + E_\sigma^{(ext)}) + d^{\mu, \sigma} \frac{\partial (E_\sigma + E_\sigma^{(ext)})}{\partial x^\mu} + \\
 + \frac{1}{2} q^{\mu\nu, \sigma} \frac{\partial^2 (E_\sigma + E_\sigma^{(ext)})}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j^\alpha v^\beta B_{(ext)}^\gamma + \dots \quad (72.9)
 \end{aligned}$$

Здесь электрическое поле E_σ определено уравнением поля в интегральной форме (69.7) или уравнением (69.13) в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \left[\rho_{(e)}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \right].$$

В уравнении (72.9) $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$ — плотность кинетической энергии теплового движения частиц, приходящаяся на единицу массы. Поэтому левая часть этого уравнения может быть представлена в терминах температуры и будет иметь тот же вид, что и в уравнении (70.16).

Уравнения баланса импульса и энергии для системы электрически заряженных частиц (69.11), (72.9) справедливы при нерелятивистских скоростях частиц, когда можно пренебречь запаздыванием электромагнитных взаимодействий. Однако изложенный здесь метод легко обобщается и на случай запаздывающих взаимодействий.

§ 73. Проблемы формулировки замкнутого аппарата

Динамика системы N точечных взаимодействующих частиц представлена $3N$ обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка или $6N$ уравнениями первого порядка, которые образуют замкнутый аппарат исследований, если на этом уровне организации материи известны силы взаимодействия между частицами и начальное состояние системы взаимодействующих частиц. Математический аппарат, базирующийся на локальных фундаментальных законах сохранения числа частиц, импульса и энергии, не является замкнутым. Эволюция локальных значений массы, заряда, тока, энергии, импульса, других полевых динамических функций определяется в уравнениях баланса новыми полевыми функциями более высокой тензорной размерности. Поэтому сформулировать замкнутый аппарат — значит установить дополнительные функциональные связи между полевыми динамическими функциями, отражающие физические закономерности в определенной системе частиц и в определенных процессах. В таких задачах теоретические представления дополняются экспериментальными сведениями.

Представленный здесь метод имеет очевидные преимущества перед феноменологическими построениями уравнений, поскольку для всех полевых динамических функций существуют формулы, отображающие их физическое содержание на микро- и макроуровне одновременно. Это позволяет получать уравнения, которым должны подчиняться дополнительно плотности потоков, управляющие эволюцией энергии и импульса. Так, общее уравнение баланса импульса (67.21) содержит дивергенцию тензорного поля кинетического давления $P^{\sigma\gamma}(\mathbf{r}, t)$. Непосредственно тензор $P^{\sigma\gamma}$ входит в уравнение баланса энергии (70.12). Сравнивая определения $P^{\sigma\gamma}$ (67.12) и скалярного поля плотности кинетической энергии (70.6), обозначенной по традиции посредством $\rho(\mathbf{r}, t)\varepsilon(\mathbf{r}, t)$:

$$P^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^\alpha u_i^\sigma \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi,$$

$$\rho(\mathbf{r}, t)\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi,$$

видим, что удвоенное значение плотности кинетической энергии — это след тензора кинетического давления:

$$\rho(\mathbf{r}, t)\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} P^{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, t).$$

Если найдено уравнение эволюции тензора кинетического давления, то уравнение для плотности кинетической энергии может быть получено из него путем вычисления следа тензора $P^{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, t)$. Определение тензора давления базируется на значениях динамических функций $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ в окрестности каждой пространственной точки \mathbf{r} . Следовательно, уравнение для $P^{\alpha\sigma}$, как и для любой полевой динамической функции, может быть получено путем дифференцирования $P^{\alpha\sigma}$, простых преобразований полученных выражений и использования уравнений динамики системы взаимодействующих частиц. Уравнение для тензора кинетического давления в соответствии с этим методом будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) P_{\alpha\beta} + P_{\alpha\sigma} \frac{\partial v_\beta}{\partial x^\sigma} + P_{\beta\sigma} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\sigma} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} P_{\alpha\beta\sigma} = \\ & = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N (F_i^\alpha u_i^\beta + F_i^\beta u_i^\alpha) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi - \\ & - \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N'} \left(u_i^\beta \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i^\beta} \right) \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi. \end{aligned} \quad (73.1)$$

В этом уравнении появляется тензор третьего ранга $P_{\alpha\beta\sigma}$, определенный формулой

$$P^{\alpha\beta\sigma}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^\alpha u_i^\beta u_i^\sigma \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi.$$

Мы видим, что решение практических задач динамики многочастичных систем должно содержать и формулировку уравнений. Пять фундаментальных уравнений баланса являются базовыми при разработке необходимых теоретических моделей.

Вместо динамических функций, определяющих свойства системы частиц в трехмерном физическом пространстве, можно использовать для той же системы частиц аналогичные наборы функций в шестимерном пространстве возможных координат и импульсов. При таком подходе число частиц с координатами

в области $\Delta(\mathbf{r})$ и импульсами в интервале $\widehat{\Delta}(\mathbf{p})$ пропорционально функции распределения. Шестимерный элемент объема $\Delta(\mathbf{r}) \cdot \widehat{\Delta}(\mathbf{p})$ также должен быть физически бесконечно малым. Интеграл по импульсам от функции распределения будет пропорционален числу частиц в $\Delta(\mathbf{r})$. Другие полевые динамические функции могут быть определены как интегралы от функции распределения с определенными весами. Но поскольку в окрестности $\Delta(\mathbf{r})$ точки \mathbf{r} частиц значительно больше, чем в шестимерной области $\Delta(\mathbf{r})\widehat{\Delta}(\mathbf{p})$, сохранить полевые динамические функции гладкими можно только путем их переопределения на больших макромасштабах.

Кроме того, общие уравнения для функций распределения также не являются замкнутыми. Уравнения баланса, полученные на базе замкнутых кинетических уравнений, содержат сделанные в физической кинетике допущения. Каждое кинетическое уравнение порождает свою систему гидродинамических уравнений. Изложенный здесь метод позволяет получить фундаментальные гидродинамические уравнения непосредственно на основе уравнений динамики частиц.

Эффективный практический метод формулировки замкнутого аппарата исследований в системах многих частиц базируется на построении и исследовании моделей конкретных сред и физических процессов.

§ 74. Идеальная жидкость и идеальный газ

1. Уравнения баланса импульса и энергии идеальной жидкости; адиабатические процессы. Из определения тензора кинетического давления (67.12):

$$P^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i u_i^\alpha u_i^\sigma \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) d^3\xi,$$

непосредственно видно, что изотропному распределению скоростей теплового движения, при котором для каждой совокупности частиц в $\Delta(\mathbf{r})$ с суммарным импульсом $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t)$ существует совокупность с противоположным импульсом $-\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t)$, соответствует состояние с тензором $P_{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, t) = \delta_{\alpha\sigma} p(\mathbf{r}, t)$. Тензорное поле давления в таком состоянии сводится к скалярному, причем $P_{\alpha\alpha} = 3p$.

Умножим обе части уравнения (73.1) на тензор $\delta_{\alpha\beta}$ и просуммируем по α, β . Найдем

$$3 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) p + 5p \frac{\partial v_\sigma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} P_{\beta\beta\sigma} = 2(W^{(\text{ext})}(\mathbf{r}, t) + W(\mathbf{r}, t)), \quad (74.1)$$

где локальные мощности внешних сил $W^{(\text{ext})}$ и сил взаимодействия между частицами W определены формулами (70.13), (70.14). Свертка $P_{\beta\beta\sigma}$ совпадает с удвоенным значением плотности кинетического потока тепла $q^\sigma(\mathbf{r}, t)$, определенного формулой (70.8). Дивергенцию поля скоростей в (74.1) можно исключить при помощи уравнения непрерывности, так что

$$3\rho^{5/3} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) (p\rho^{-5/3}) + 2 \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = 2(W^{(\text{ext})}(\mathbf{r}, t) + W(\mathbf{r}, t)). \quad (74.2)$$

Для разреженного газа взаимодействиями в правой части этого уравнения можно пренебречь. Если, кроме того, отсутствуют источники тепла, то равна нулю дивергенция теплового потока. Уравнение (74.2) в этом случае имеет решение

$$p(\mathbf{r}, t)\rho^{-5/3}(\mathbf{r}, t) = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (74.3)$$

Мы получили уравнение адиабатического процесса в идеальном газе. В разреженных газах при указанных предположениях могут происходить только адиабатические процессы. Далее, сравнивая определения давления $p(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho(\mathbf{r}, t)\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} P^{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{2} p(\mathbf{r}, t), \quad (74.4)$$

и температуры $T(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho(\mathbf{r}, t)\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{2} n(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t), \quad (74.5)$$

видим, что в окрестности каждой пространственной точки выполняется уравнение состояния идеального газа

$$p(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t). \quad (74.6)$$

Используя уравнение состояния (74.6), можно получить из уравнения (74.3) адиабатические соотношения между давлением и температурой, плотностью и температурой.

Поле скоростей идеального газа определяется уравнением баланса импульса (68.8):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) v^\alpha + \frac{\partial(P^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} = \rho G^\alpha,$$

в котором можно пренебречь тензором напряжения по сравнению с тензором кинетического давления, а также скалярным давлением по сравнению со скалярным давлением, обусловленным взаимодействием между атомами и молекулами. Для жидкостей и плотных газов это приближение несправедливо. Тензор напряжений определяет взаимодействия частиц области $\Delta(\mathbf{r})$ с частицами соседних областей, расположенных на расстояниях порядка радиуса взаимодействия. Эти взаимодействия зависят от градиентов компонент поля скоростей и не являются изотропными. Вместе с тем при не слишком больших скоростях изменения полевых динамических функций в малых пространственных областях обычно устанавливается состояние термодинамического равновесия. Влияние внутреннего трения и теплопроводности на такие движения можно не учитывать и положить в уравнении $P^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \cong P\delta^{\alpha\beta}$. Уравнение баланса импульса принимает вид

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + \nabla P = \rho \mathbf{G}. \quad (74.7)$$

Это уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости. В том же приближении из общего уравнения баланса энергии (70.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\varepsilon + U)] + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\rho v^\alpha (\varepsilon + U)] + (P^{\sigma\gamma} + \sigma^{\sigma\gamma}) \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (q^\beta + q_{1(\text{int})}^\beta + q_{2(\text{int})}^\beta) = W^{(\text{ext})}, \end{aligned}$$

следует уравнение баланса энергии идеальной жидкости в виде

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathcal{E} + P \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (74.8)$$

Здесь $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon + U$ — плотность полной энергии.

2. Интегралы Бернулли и Лагранжа–Коши движения идеальной жидкости. Будем считать, что внешнее поле, в котором находится жидкость, является потенциальным, так что

в уравнении Эйлера $\mathbf{G} = -\nabla\varphi$. Исключим, кроме того, выражение $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ из этого уравнения при помощи тождества

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}). \quad (74.9)$$

Тогда уравнение баланса импульса идеальной жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \varphi\right) - \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (74.10)$$

Уравнение баланса энергии идеальной жидкости (74.8) можно преобразовать при помощи уравнения непрерывности:

$$\rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \rho \equiv \frac{d}{dt} \rho \quad (74.11)$$

(d/dt — субстанциональная производная). В результате найдем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d}{dt} \rho = -P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (74.12)$$

Добавим к обеим частям этого уравнения слагаемое $\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho}\right)$.

Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{E} + \frac{P}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} P. \quad (74.13)$$

Отсюда видно, что *тепловая функция* или *энтальпия* $w = \mathcal{E} + P/\rho$ является функцией только P , причем производная этой функции равна $1/\rho$. Следовательно,

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial P} \nabla P = \frac{\nabla P}{\rho} \quad (74.14)$$

и последнее слагаемое в уравнении (74.10) можно заменить на ∇w . Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \varphi + w\right). \quad (74.15)$$

Из уравнения (74.15) непосредственно видно, что существуют по крайней мере два интеграла движения идеальной жидкости. Первый из них имеет место для стационарных течений, когда $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$. Тогда после умножения (74.15)

на единичный вектор \mathbf{v}/v скалярно левая часть этого уравнения обратится в нуль, и мы будем иметь

$$\frac{\mathbf{v}}{v} \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \varphi + w \right) = \frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2} + \varphi + w \right) = 0, \quad (74.16)$$

где учтено, что проекция градиента на направление скорости есть производная по направлению линии тока d/dl . Из уравнения (74.16) следует, что

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + w = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (74.17)$$

Мы получили *уравнение Бернулли*, связывающее вдоль линий тока скорость, потенциал внешнего поля и тепловую функцию (функцию давления) стационарного потока идеальной жидкости. Для несжимаемой жидкости это уравнение содержит давление явно:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{P}{\rho} = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (74.18)$$

Другой интеграл движения следует непосредственно из уравнения (74.15) для безвихревого движения идеальной жидкости. В этом случае $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ и, следовательно, поле скоростей определяется одной функцией — потенциалом скоростей $\mathbf{v} = \nabla \psi$. Уравнение (74.15) принимает вид

$$\nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \varphi + w \right) = 0$$

и легко интегрируется, так что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \varphi + w = f(t). \quad (74.19)$$

Произвольная функция $f(t)$ должна определяться из граничных условий. Уравнение (74.19) называется *интегралом Лагранжа–Коши*. Вместе с уравнением непрерывности и условием баротропности (74.13) это уравнение образует замкнутую систему уравнений для двух функций ψ и P , определяющих безвихревое движение идеальной жидкости. Если выполнены условия несжимаемости, то интеграл Лагранжа–Коши принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \varphi + \frac{P}{\rho} = f(t), \quad (74.20)$$

а потенциал скоростей является гармонической функцией, удовлетворяющей уравнению (66.18):

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (74.21)$$

3. Звуковые волны. Найдем уравнение распространения малых возмущений в покоящемся разреженном газе, когда скорость \mathbf{v} , отклонения давления $\tilde{p} = p - p_0$ и плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ от постоянных равновесных значений p_0, ρ_0 малы по сравнению с p_0, ρ_0 и имеют первый порядок малости. В уравнении Эйлера и в уравнении непрерывности при этом можно пренебречь малыми второго и более высоких порядков, так что уравнение Эйлера (74.7) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (\nabla p = \nabla \tilde{p}). \quad (74.22)$$

Уравнение непрерывности при этом сводится к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (74.23)$$

Дивергенция от обоих слагаемых уравнения (74.22) дает

$$\rho_0 \cdot \text{div } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Delta p = 0. \quad (74.24)$$

Дифференцируя по времени уравнение непрерывности (74.23), будем иметь

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0. \quad (74.25)$$

Из (74.24) и (74.25) получаем для малых возмущений

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta p = 0. \quad (74.26)$$

В разреженном газе могут происходить только адиабатические процессы. Потому давление и плотность вдоль линии тока связаны уравнением адиабаты (74.3): $p\rho^{-5/3} = \text{const}$. Для малых возмущений из этого уравнения имеем

$$\Delta p = \text{div grad } p = \text{div} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \text{grad } \rho \right] \cong \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \Delta \rho. \quad (74.27)$$

Здесь символом «s» обозначена производная вдоль адиабаты. Подставляя это выражение в уравнение (74.26), находим, что

распространение малых возмущений плотности происходит в виде звуковых волн, удовлетворяющих волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \rho = 0, \quad (74.28)$$

где c_s — скорость звука, определяемая равенством

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s}.$$

Как нетрудно показать, волновому уравнению удовлетворяют также давление p и скорость \mathbf{v} . Скорость звука зависит от температуры. Действительно, из уравнения адиабаты имеем $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{5p}{3\rho}$. Используя уравнение состояния идеального газа в виде $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$, где μ — молекулярный вес, R — газовая постоянная, находим

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s} = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{RT}{\mu}}. \quad (74.29)$$

Таким образом, скорость звука в разреженном газе можно считать пропорциональной корню квадратному из температуры.

§ 75. Уравнение Навье–Стокса

Силы внутреннего трения возникают в среде, если отлична от нуля разность скоростей в соседних точках $v_\alpha(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - v_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta$, т.е. если не равны нулю производные $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$. Представим сумму тензоров кинетического давления и напряжений в виде

$$p_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} - \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}, \quad (75.1)$$

где $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ — вязкий тензор напряжений, равный нулю при $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = 0$. В линейном приближении тензор $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ является линейной функцией производных $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$. Так как $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор, он может зависеть только от симметричных комбинаций тензоров $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$. Но любой тензор второго ранга, и тензор $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$ в том числе, можно представить в виде суммы трех тензо-

ров: симметричного с равным нулю следом, антисимметричного и диагонального:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}. \quad (75.2)$$

Следовательно, существуют только два тензора, линейной комбинацией которых является $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$, т.е.

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}. \quad (75.3)$$

Коэффициенты η , ζ называются коэффициентами вязкости: сдвиговой и объемной соответственно.

Подставим теперь (75.1), (75.3) в уравнение баланса импульса (68.8). Получим

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v^\alpha + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = \rho G^\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\zeta \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right). \quad (75.4)$$

Коэффициенты вязкости зависят от давления и температуры, но для многих задач их можно считать постоянными. В этом приближении уравнение баланса импульса принимает вид

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v^\alpha + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \rho G^\alpha + \eta \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

или

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{G} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \text{grad div}. \quad (75.5)$$

Уравнение (75.5) носит название уравнения Навье–Стокса. Коэффициенты вязкости, содержащиеся в этом уравнении, должны быть заданы на основании предварительных измерений в определенной жидкости или вычислены приближенно на основании кинетического уравнения Больцмана для разреженного газа.

§ 76. Замкнутая система уравнений гидродинамики

Эволюция во времени состояний электрически нейтральных на масштабах $\Delta(\mathbf{r})$ сред определяется в классической гидродинамике замкнутой системой уравнений, содержащей уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_{(m)}}{\partial t} + \text{div} (\rho_{(m)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (76.1)$$

уравнение Навье–Стокса:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{G} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (76.2)$$

уравнение баланса энергии в виде

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\sigma} \right) + P^{\sigma\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = 0, \quad (76.3)$$

где

$$P_{\alpha\beta} = P \delta_{\alpha\beta} - \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) - \zeta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}, \quad (76.4)$$

$$q^\sigma = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x^\sigma}, \quad (76.5)$$

κ — коэффициент теплопроводности, $\kappa > 0$.

Вместо уравнения (76.3) может быть использовано общее уравнение переноса тепла:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v^\sigma \frac{\partial s}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right)^2 + \zeta \left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right). \quad (76.6)$$

Предполагается также, что заданы уравнения состояния:

$$P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \quad (76.7)$$

Вместо плотности энергии как функции плотности массы и температуры может быть задана энтропия как функция тех же аргументов: $s = s(\rho, T)$.

При равных нулю коэффициентах вязкости η , ζ и теплопроводности κ эти уравнения сводятся к уравнениям идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голдстейн Г. Классическая механика. Изд. 2-е / Пер. с англ. М.: Наука, 1975.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Изд. 2-е. М.: Наука, 1965.
3. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. Изд. 2-е. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
4. тер Хаар Д. Основы гамильтоновой механики / Пер. с англ. М.: Наука, 1975.
5. Синг Дж. Л. Классическая динамика / Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974.
7. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
8. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. 7-е. М.: Наука, 1988.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Изд. 2-е. М.: Наука, 1982.
12. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Изд. 2-е. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
13. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М., 1985. С. 5–304.
14. Вильке В. Г. Теоретическая механика. Изд. 3-е. СПб.: Лань, 2003.
15. Ольховский И. И., Павленко Ю. Г., Кузьменков Л. С. Задачи по теоретической механике для физиков. Изд. 2-е. СПб.: Лань, 2008.
16. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977.
17. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Вып. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1969.