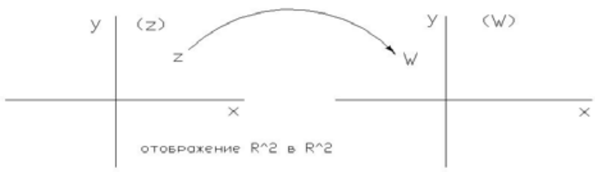
Оглавление

Определение функции комплексного переменного.

W = f (z) – комплексная функция комплексного переменного.
W=U + i V
z=x + i y.



$\left(W = f(z)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} U = U(x, y) \\ V = V(x, y) \end{cases}$ - отображение упорядоченной пары в упорядоченную же пару.

Если при $\left|z - z_0\right| \to 0$ $\left|f(z) - C\right| \to 0$, тогда C – предел функции f(z) в точке z_0. C = A + i B, $\left|f(z) - C\right| = \sqrt{\left(U(x, y) + A\right)^2 + \left(V(x, y) + B\right)^2} \to 0$

Определение: Для того чтобы функция W = f(z) была непрерывна в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы как функция U=U(x,y), так и функция V=V(x,y) были непрерывными в точке (x_0,y_0).

Определение производной функции комплексного переменного. Дифференцируемая функция. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Формула нахождения производной.

Определение: По определению $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$, т.е. если есть конечный предел, то есть и производная.

Условие: Функция f(z) называется дифференцируемой в точке z_0, если $\Delta f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=C\,\Delta z+\Delta z\,\alpha(\Delta z)$, где C = const∈**C**, α (Δz)∈**C**, а $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$.

Теорема.: (НДУ дифференцируемости функции)

Для того чтобы f(z) была дифференцируема в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала конечная производная f '(z).

Док-во: <u>1)Необходимость:</u>

Пусть f(z) дифференцируема в точке z_0, тогда $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(C+\alpha(\Delta z))=C$, то есть доказали, что C = f '(z_0): $\Delta f(z_0)=f'(z_0)\,\Delta z+\Delta z\alpha(\Delta z)$.

<u>2) Достаточность:</u>

Пусть $\exists f'(z_0)=\lim\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}\Rightarrow\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)=\alpha(\Delta z)$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$, а отсюда следует, что $\Delta f(z)=f'(z_0)\Delta z+\Delta z\alpha(\Delta z)$.

Теорема.: (Условия Коши - Римана / Даламбера-Эйлера)

Для того чтобы функция $W=f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0=x_0+i\,y_0$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) Функции U и V были дифференцируемы в точке (x_0,y_0);

2) В этой точке выполнялись условия:

$$\begin{cases}\frac{\partial U(x_0y_0)}{\partial x}=\frac{\partial V(x_0y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial U(x_0y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x_0y_0)}{\partial x}\end{cases}$$ - ***условия Коши-Римана / Даламбера-Эйлера.*(*)**

Док-во: <u>1) Необходимость:</u>

$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z,z_0)\Delta z$, при этом $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z,z_0)=0$.

$f'(z_0)=a+i\,b$, $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$, $\alpha(\Delta z,z_0)=\alpha_1(\Delta x,\Delta y)+i\,\alpha_2(\Delta x,\Delta y)$, при этом $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_k(\Delta x,\Delta y)=0,\ k=1,2$

$$\begin{aligned}&\Delta f(z_0)=\Delta U(x_0,y_0)+i\,\Delta V(x_0,y_0)=\\&=(a+i\,b)(\Delta x+i\,\Delta y)+(\alpha_1+i\,\alpha_2)(\Delta x+i\,\Delta y)=\\&=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y+i\,(b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y)\end{aligned}$$

$\Delta U(x_0,y_0)=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y$; α_1 и α_2 - бесконечно малые, U – дифференцируема в z_0. $a=\frac{\partial U(x_0y_0)}{\partial x}$; $b=-\frac{\partial U(x_0y_0)}{\partial y}$;

$\Delta V(x_0,y_0)=b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y$; α_1 и α_2 - бесконечно малые, V – дифференцируема в z_0. $a=\frac{\partial V(x_0y_0)}{\partial y}$; $b=-\frac{\partial V(x_0y_0)}{\partial x}$;

Итого доказали 1) и 2) → W – дифференцируема в z_0, ч.т.д.

<u>2) Достаточность.</u>

Пусть U и V – дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и верна система **(*)**.

$$\Delta U(x_0, y_0) = \frac{\partial U(x_0 y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U(x_0 y_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x +$$
$$+\alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$
$$\Delta V(x_0, y_0) = \frac{\partial V(x_0 y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V(x_0 y_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha_3(\Delta x, \Delta y)\Delta x +$$
$$+\alpha_4(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$
$$\Delta U(x_0, y_0) + i\,\Delta V(x_0, y_0) = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2\,\Delta y +$$
$$+ i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \alpha_3 \Delta x + \alpha_4\,\Delta y\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Delta x +$$
$$+ i\left(\frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\Delta y + (\alpha_1 + i\alpha_3)\Delta x + i(\alpha_4 - i\alpha_2)\Delta y$$

Согласно системе **(*)** первые две скобки в последнем выражении равны. С учётом этого перепишем:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Delta z + \left((\alpha_1 + i\alpha_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + i(\alpha_4 - i\alpha_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\Delta z = \Delta f(z_0) =$$
$$= \left(\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\right)\Delta z +$$
$$+ \left(\alpha_1\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\alpha_3\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\alpha_4\frac{\Delta y}{\Delta z} + i\alpha_2\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\Delta z$$

Учитывая, что $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1;\ \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1$, перепишем последнее выражение.

$$\left(\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\right)\Delta z + \left(\tilde{\alpha}_1(\Delta x \Delta y) + i\tilde{\alpha}_2(\Delta x \Delta y)\right)\Delta z =$$
$$\left(\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\right)\Delta z + \tilde{\alpha}(\ldots)\Delta z$$
$$f'(z_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial U}{\partial x}$$

Формула нахождения производной:

$$f'(z_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial U}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана в полярных координатах. Формула вычисления производной. Пример: степенная функция.

$f(z)=U(\rho,\varphi)+iV(\rho,\varphi)=U(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+iV(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, где

$U(\rho,\varphi)=U(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi);\ V(\rho,\varphi)=V(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$.

Для дифф-ти функция f(z) в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы

1) U и V были дифференцируемы в точке (ρ_0,φ_0)

2) в этой точке выполнялись условия:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}\end{cases}$$ - ***условия Коши-Римана дифф-ти в полярных координатах.***

Трм.:(Формула вычисления производной)

Если функция $f(z)=U(\rho,\varphi)+iV(\rho,\varphi)$ *дифференцируема в точке* z_0*, то её производную можно вычислить по формуле* $f'(z)=\dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial U}{\partial\rho}+i\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right)$

Док-во: $\rho=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)$

$$f'(z)=\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)=U_\rho\cos\varphi+iV_\rho\cos\varphi-iU_\rho\sin s\varphi+V_\rho\sin\varphi=$$

$$=U_\rho(\cos\varphi-i\sin s\varphi)+iV_\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{\rho(U_\rho+iV_\rho)}{\rho}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=$$

$$=\frac{\rho(U_\rho+iV_\rho)}{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}+i\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$

Пример: Степенная функция с произвольным показателем.

$f(z)=z^\alpha$

$$\left(z^\alpha\right)'=\left(e^{\alpha\ln(z)}\right)'=\alpha\left(\ln(z)\right)'\left(e^{\alpha\ln(z)}\right)=\alpha\frac{1}{z}z^\alpha=\alpha z^{\alpha-1}$$

Свойства аналитических функций (5 св-в)

Определение: Функция $f:(G\subset C)\to C$ - называется аналитической в области G, если она имеет конечную производную в каждой точке области G (область G – открытое множество, т.е. все точки его внутренние).
Определение: Функция f называется аналитической в точке z_0, принадлежащей области G, если существует окрестность этой точки, в которой она является аналитической.
Св-ва:

1) Если функции $f_1(z),\ f_2(z)$ являются аналитическими в области G, то функции $f_1(z)\pm f_2(z),\ f_1(z)f_2(z),\ \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ также является аналитической в области (в точке).

Док-во: $(f_1+f_2)'(z_0)=f_1'(z_0)\pm f_2'(z_0)$ **;**
$(f_1f_2)'(z_0)=f_1'(z_0)f_2(z_0)+f_1(z_0)f_2'(z_0)$;
$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z_0)=\frac{f_1'(z_0)f_2(z_0)-f_1(z_0)f_2'(z_0)}{(f_2(z_0))^2}$$

2) Если функция W = f(z) – аналитическая в области G, а функция $\xi=\varphi(W)$ - аналитическая в области f(G), то функция $\xi=\varphi(f(z))$ - аналитическая в области G.

Док-во: $W_0=f(z_0)$; $\xi'=\dfrac{d\varphi(W_0)}{dW}\dfrac{df(z_0)}{dz}$; $\dfrac{\Delta\xi(z_0)}{\Delta z}=\dfrac{\Delta\varphi(W_0)}{\Delta W}\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$;

3) Предположим, что в области G задана аналитическая функция $f:G\to f(G)$:
1) f – аналитическая в области G;
2) f $f'(z)\neq,\forall z\in C$
Тогда $\exists\varphi:f(G)\to G$ и
1) φ – аналитическая функция
2) $\varphi'(W_0)=\dfrac{1}{f'(z_0)},W_0=f(z_0)$;

Док-во: $f'(z_0)=U_x(x_0,y_0)+iV_x(x_0,y_0)\neq 0$, значит $|f'(z_0)|=\sqrt{U_x{}^2+V_x{}^2}(x_0,y_0)\neq 0$, $\forall(x_0,y_0)\in G\subset R^2$;
$\begin{cases}U=U(x,y)\\V=V(x,y)\end{cases}$ - дифференцируема во всей области G.

Кроме того $\begin{cases}U_x=V_y\\V_x=-U_y\end{cases}$. Рассмотрим якобиан: $\dfrac{D(U,V)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}&\frac{\partial U}{\partial y}\\\frac{\partial V}{\partial x}&\frac{\partial V}{\partial y}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2\neq 0$ $\to$

якобиан этого преобразования не равен нулю $\to$ существует и обратное преобразование: $\begin{cases}x=x(U,V)\\y=y(U,V)\end{cases}$ - дифференцируема во всей области G.
а) Работаем с первым уравнением:
$$1=\frac{\partial x}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|*\frac{\partial V}{\partial y}\qquad 0=\frac{\partial x}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}\Bigg|*\frac{\partial V}{\partial x}\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial U}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial x}{\partial U}|f'(z)|^2\qquad \frac{\partial x}{\partial U}=\frac{1}{|f'(z)|^2}\frac{\partial V}{\partial y}$$

Аналогично находим $\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\partial x}{\partial V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial y}-\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial x}{\partial V}|f'(z)|^2$ $\dfrac{\partial x}{\partial V}=-\dfrac{1}{|f'(z)|^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}$

б) Со вторым: $0=\dfrac{\partial y}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial x}\Bigg|*\dfrac{\partial V}{\partial y}$ $1=\dfrac{\partial y}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial y}\Bigg|*\dfrac{\partial V}{\partial x}$ $-\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial U}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial y}{\partial U}|f'(z)|^2$

$$\frac{\partial y}{\partial U}=-\frac{1}{|f'(z)|^2}\frac{\partial V}{\partial x}$$

Аналогично находим $-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{\partial y}{\partial V}\left|f'(z)\right|^2 \quad \frac{\partial y}{\partial V}=-\frac{1}{\left|f'(z)\right|^2}\frac{\partial U}{\partial x}$

Получаем условие Коши-Римана для функции x + i y:

$\begin{cases}\frac{\partial x}{\partial U}=\frac{\partial y}{\partial V}\\ \frac{\partial y}{\partial U}=-\frac{\partial x}{\partial V}\end{cases}$ - условие Коши-Римана для $\varphi(W)=x(U,V)+iy(U,V)$ - эта функция аналитическая.

Докажем второй пункт теоремы, для чего воспользуемся производной сложной функции:

$z=\varphi(W)=\varphi(f(z));$

$z'=1=\frac{\partial\varphi}{\partial W}\frac{\partial f}{\partial z}\Rightarrow\varphi'(W)=\frac{1}{f'(z)}$, ч.т.д.

4) Пусть в области G задана $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ - аналитическая функция. Утверждается, что мнимая часть этой аналитической функции определяется до постоянного слагаемого

Док-во: $f_1(z)=U(x,y)+iV_1(x,y)$

$f_2(z)=U(x,y)+iV_2(x,y)$

$dV_1(x,y)=\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+\frac{\partial V_1}{\partial y}dy=-\frac{\partial U}{\partial y}dx+\frac{\partial U}{\partial x}dy$

$dV_2(x,y)=-\frac{\partial U}{\partial y}dx+\frac{\partial U}{\partial x}dy$

$d(V_1(x,y)-V_2(x,y))=0$

$V_1(x,y)-V_2(x,y)=const$, ч.т.д.

5) Пусть в области G задана аналитическая функция $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, (x,y)$\in$G. Тогда линии $U(x,y)=C_1$ и $V(x,y)=C_2$, называющиеся линиями уровня, ортогональны.

Док-во:

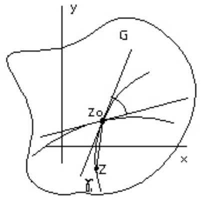
$gradU=\left(\frac{\partial U}{\partial x};\frac{\partial U}{\partial y}\right)$

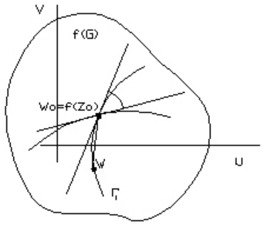
$gradV=\left(\frac{\partial V}{\partial x};\frac{\partial V}{\partial y}\right)$

$(gradU,gradV)=U_xV_y+U_yV_y=U_xV_x-U_xV_x=0$, $gradU\perp gradV$ $\rightarrow$ линии уровня ортогональны.

Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Свойства сохранения углов и постоянства растяжения.

Пусть задана аналитическая функция W=f(z). Имеются две системы координат:





В области G проводим гладкую кривую γ_1 и соответственно ей Γ_1 – в области f(G). Запишем производную: $f'(z_0) = ke^{i\alpha}$, где $k = \left|f'(z_0)\right|, \alpha - аргумент$.

$$f'(z_0) = ke^{i\alpha} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W(z_0)}{\Delta z}$$

$$\left|\frac{\Delta W(z_0)}{\Delta z}\right| = k \neq 0$$

$$\arg \frac{\Delta W(z_0)}{\Delta z} = \arg \Delta W - \arg \Delta z = \alpha$$

Если $\begin{cases} \arg \Delta W_1 = \varPhi_1 \\ \arg \Delta z_1 = \varphi_1 \end{cases}$ то получаем $\varPhi_1 - \varphi_1 = \alpha$.

Берём аналогично γ_2 и Γ_2:

$\begin{cases} \arg \Delta W_2 = \varPhi_2 \\ \arg \Delta z_2 = \varphi_2 \end{cases}$ и $\varPhi_1 - \varphi_1 = \alpha$.

Получаем $\varPhi_2 - \varPhi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$. Т.е. при отображении аналитических функций с отличными от нуля производными углы между прямыми и их отображения равны по величине и направлению. Отображение длин $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ также сохраняется (растяжение / сжатие).

Т.е. получили, что отображение обладает свойствами.

1) сохранение углов

2) постоянство растяжения ($\left|f'(z)\right|$ - коэффициент растяжения / сжатия).

Определение конформного отображения.

Определение: Взаимно-однозначное отображение $f : G \xrightarrow{\text{на}} f(G)$ называется конформным, если оно обладает свойствами:
1) сохранение углов
2) постоянство растяжения

Круговое свойство дробно-линейной функции. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

Дробно-линейная функция $W = \frac{az+b}{cz+d}, \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$

Трм.: Круговое свойство дробно линейного отображения.

При дробно-линейном отображении окружность и прямая переходят либо в окружность, либо в прямую: окр./прямая в плоскости (z) -> окр./прямая в плоскости (W).

Док-во: 1) Отображение **W = Az + B** представляет собой параллельный перенос / растяжение (+поворот). При нём окружность -> в окружность; прямая -> в прямую.

$A = a_1 + ia_2$ $\quad z = x + iy;$

$B = b_1 + ib_2$ $\quad W = U + iV;$

$W_1 = Az;$

$W_2 = W_1 + B$ – <u>параллельный перенос</u>.

2) $W_1 = U_1 + V_1;$

$A = |A|e^{i\arg A}$, $z = |z|e^{i\arg z}$, тогда $W_1 = |W_1|e^{i\arg W_1} = U_1 + iV_1 = |A||z|e^{i\arg A + i\arg z}$ =>

$|W_1| = |A||z|$ - <u>растяжение;</u> $\arg W_1 = \arg A + \arg z$ - <u>поворот;</u>

$U_2 + iV_2 = U_1 + iV_1 + b_1 + ib_2$; $\begin{cases} U_2 = U_1 + b_2 \\ V_2 = V_1 + b_2 \end{cases}$

2) $W = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$ $\quad W_1 = cz + d; W_2 = \frac{1}{W_1}$ **;** $\quad W = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)W_1$

Рассмотрим **W = 1/z.**

(1) $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ - окружность в комплексной плоскости. (A,B,C,D $\in$ **R**);

$$Az\bar{z} + B(z + \bar{z}) + \frac{C}{2i}(z - \bar{z}) + D = 0$$

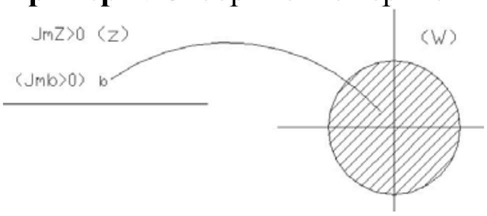
$$A\frac{1}{W\overline{W}} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{W} + \frac{1}{\overline{W}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{\overline{W}}\right) + D = 0$$

$$A + \frac{B}{2}(W + \overline{W}) + \frac{C}{2i}(\overline{W} - W) + DW\overline{W} = 0$$

(2) $A + BU - CV + D(U^2 + V^2) = 0$

Итого получили переход из **(1)** в **(2)** – окружность.

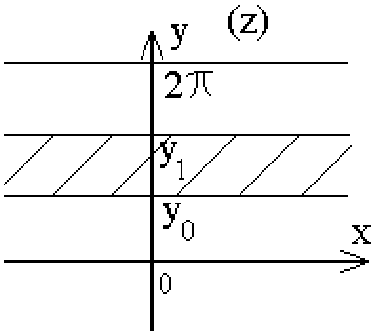
Пример 2: Отображение верхней полуплоскости на единичный круг.



Берём произвольное b (Imb > 0) и переводим её в ноль. Тогда $\bar{b} \mapsto \infty$, $W_1 = \frac{z-b}{z-\bar{b}}$; более общее:

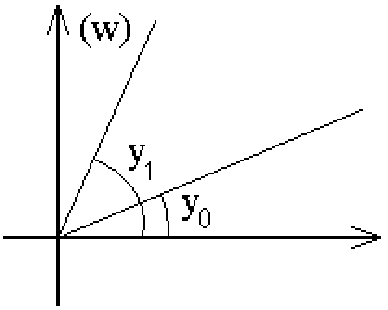
$W = e^{i\alpha}\frac{z-b}{z-\bar{b}}$, Im(b) > 0, α – любое.

Отображения, осуществляемые элементарными функциями.



1. $w=e^z$.

Найдем область однолистности: пусть $z_1 \neq z_2$ и $z=x+iy$, тогда из того, что $e^{z1}=e^{z2} \Rightarrow e^{x1}\, e^{iy1}=e^{x2}\, e^{iy2}$, следовательно $e^{x1}=e^{x2} \Rightarrow x_1=x_2$ и $e^{iy1}=e^{iy2}= e^{iy1+2k\pi I}$ $\Rightarrow y_2=y_1+2k\pi \Rightarrow y_2-y_1=2k\pi$. Как видно полоса ограниченная прямыми $y=0$ и $y=2\pi$ перейдет в полную плоскость w, а сами эти прямые будут отображаться на положительную часть действительной оси плоскости w. Итак, показательная функция e^z производит взаимно однозначное отображение полосы $0 \le y \le 2\pi$ плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по положительной части действительной оси.



Показательная функция $w=e^z$ производит отображение прямой $y=y_0$ плоскости z на луч $\arg(w)=y_0$ плоскости w. Кроме того данная функция переводит прямую $x=x_0$ плоскости z в окружность $u^2+v^2=e^{2x0}$ радиуса e^{x0} плоскости w.

2. $w=\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+(\arg(z)+2k\pi)i$ – можно перевести в полосу шириной 2π.

3. $w=z^2$.

Найдем область однолистности: пусть $z_1 \neq z_2$, тогда $z_1^2-z_2^2=0 \Rightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)=0 \Rightarrow z_1+z_2=0$, следовательно точкам z и –z, аргументы которых отличаются на π, а модули равны соответствует одно и то же значение w. Если представить z и w в показательной форме, т.е. $z=|z|e^{i \arg(z)}$, $w=|z|^2e^{i2 \arg(z)}$, то видно, что верхняя полуплоскость ($\mathrm{Im}(z) > 0$) переходит в полную плоскость w. Но границы области, лучи $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ переходят в положительную часть действительной оси w. Следовательно при $\mathrm{Im}(z) > 0$ и $0 \le \varphi \le \pi$ полуплоскость z переходит в полную плоскость w в разрезом по действительной оси.

4. $w=z^{1/2}$. – аналогично 3). Т.е. первая ветвь функции $w=z^{1/2}$ ($0<\arg(w)< 2\pi$) производит отображение плоскости с разрезом на верхнюю полуплоскость z, а вторая ($2\pi<\arg(w)<4\pi$) – на нижнюю полуплоскость.

5. Функция Жуковского: $w=1/2(z+1/z)$.

Найдем область однолистности: $z_1+1/z_1= z_2+1/z_2 \Rightarrow z_1z_2=1$, значит областями однолистности являются области внутри круга ($|z|<1$) и вне круга ($|z|>1$) единичного радиуса. Найдем отображение окружности $z=\rho e^{i\varphi}$ осуществляемое функцией Жуковского. Для действительной части функции имеем: $u=1/2(\rho+1/\rho) \cos(\varphi)$, а для мнимой – $v=1/2(\rho-1/\rho) \sin(\varphi)$. При ρ=const : $\frac{u^2}{(1/2(\rho+1/\rho))^2}+\frac{v^2}{(1/2(\rho-1/\rho))^2}=1$ - это эллипс с фокусами $c=\pm1$, при $\rho \to 1$ эллипс вырождается в отрезок [-1;1], проходимый дважды. При φ=const : $\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1$ - гипербола с фокусами ±1.

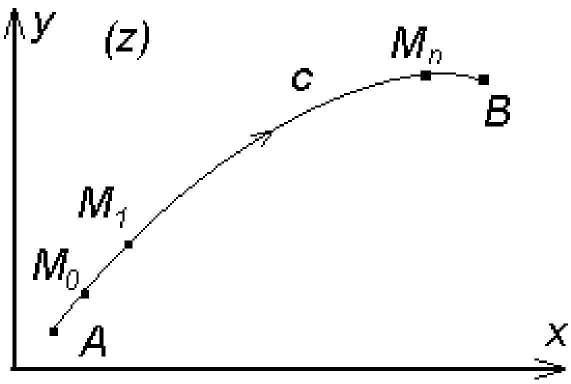
6. $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)=\cos(x)\mathrm{ch}(y)-i\sin(x)\mathrm{sh}(y)$. Прямую x=const функция cos(z) отображает в ветвь гиперболы: $\frac{u^2}{\cos^2 x}-\frac{v^2}{\sin^2 x}=1$. Функция cos(z) осуществляет взаимно однозначное отображение полосы $0 \le x \le 2\pi$ на полную плоскость w с разрезами по лучам действительной оси $[1,\infty]$ и $[-\infty,-1]$. При y=const : $\frac{u^2}{ch^2 y}+\frac{v^2}{sh^2 y}=1$ - эллипс с фокусами ±1.

Основная задача конформных отображений. Теоремы Римана.

Теорема Римана: заданы области G и G^*. Предполагается, что G и G^* односвязные и границы, каждой из областей, состоят более чем их одной точки. Точка $z_0 \in G$, $w_0 \in G^*$ и $\alpha \in \boldsymbol{R}$ – любое число. Тогда $\exists!$ конформное отображение w = f(z), которое отображает $G \to G^*$ и для которого: 1) $w_0 = f(z_0)$; 2) $\arg f'(z_0) = \alpha$.

2-я формулировка: всякую односвязную область G в плоскости z, граница которой состоит более чем из одной точки может быть отображена конформно на внутренность круга R=1 с центром в начале координат, который расположен в области w.

Определение интеграла от функции комплексного переменного. Теорема о вычислении интеграла.



Определение: рассмотрим кривую c в плоскости (z). И пусть на c задана функция f(z) $\forall z\in \boldsymbol{C}$. c: z=z(t), где $\alpha\le t\le\beta$. Произведем разбиение этой прямой $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$ и пусть $M_0=z(t_0)$, $M_1=z(t_1),\ldots,M_n=z(t_n)$. И через точки $M_0,\ldots,M_n$ составим ломанную. Пусть ξ_k принадлежит отрезку $[z_{k-1},z_k]$. И составим предел следующей суммы $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\lambda = \max(|\Delta z_k|)$ (k=1,…,n). Если данный предел существует независимо от выбора разбиения, то этот предел называют интегралом от f по кривой f(z) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \int\limits_{AB} f(z)dz$.

Теорема: пусть c – кусочно-гладкая кривая, а f(z)=u(x,y)+iv(x,y) – кусочно-непрерывная на этой кривой функция, то $\exists \int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} udx - vdy + i\int\limits_{AB} vdx + udy$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k)+iv(\xi_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

Доказательство: $= \sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k}_{(1)} + i\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{v(\xi_k)\Delta x_k + u(\xi_k)\Delta y_k}_{(2)}$ где $\xi_k = \eta_k + i\zeta_k$, $u(\xi_k) = u(\eta_k,\zeta_k)$, и (1) – интегральная сумма для первого криволинейного интеграла, (2) – для второго интеграла. $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB}(u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy) = \int\limits_{AB} udx - vdy + i\int\limits_{AB} vdx + udy$.

Свойства интеграла от функции комплексного переменного.

c^+ - обход контура в прямом направлении, c^- - в противоположном.

1°. $\int\limits_{c^-} f(z)dz = -\int\limits_{c^+} f(z)dz$

2°. $\forall c_1, c_2$: $\int\limits_{c_1+c_2} f(z)dz = \int\limits_{c_1} f(z)dz + \int\limits_{c_2} f(z)dz$

3°. $\forall \alpha \in \boldsymbol{C}$: $\int\limits_{c} \alpha f(z)dz = \alpha \int\limits_{c} f(z)dz$

4°. $\int\limits_{c} (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_{c} f_1(z)dz \pm \int\limits_{c} f_2(z)dz$

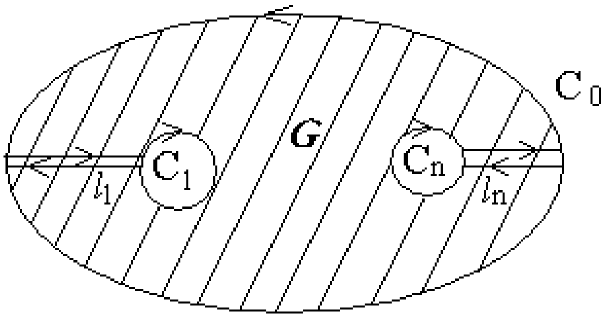
5°. Если функция ограничена на кривой, т.е. $|f(z)| \le M$ ($\forall z \in \boldsymbol{C}$) и l – длина кривой, то $\left|\int\limits_{c} f(z)dz\right| \le Ml$, т.к.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le M \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta z_k\right| \le Ml$$

6°. $\int\limits_{z_0}^{z} dz = z - z_0$

7°. Если $\boldsymbol{c}$ – гладкая, т.е. z=z(t) имеет непрерывную производную, то $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$, где $\alpha \le t \le \beta$, $z(\alpha)=A$, $z(\beta)=B$.

Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.



Теорема Коши для односвязной области: если *f(z)* является аналитической функцией в односвязной области G ограниченной кусочно-гладким контуром *c* и *f(z)* непрерывна в замкнутой области G, то $\oint\limits_c f(z)dz = 0$.

Доказательство:

$$\oint\limits_c f(z)dz = \oint\limits_c udx - vdy + i\oint\limits_c vdx + udy = \iint\limits_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy +$$

$$+ i\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

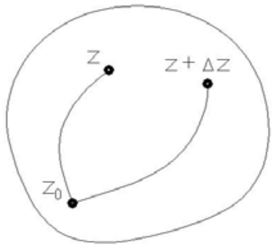
т.к. $\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$ по условию Коши-Римана.

Теорема Коши для многосвязной области: пусть *f(z)* аналитическая функция в многосвязной области G ограниченной кусочно-гладким контуром *c* и *f(z)* непрерывна в замкнутой области, тогда $\oint\limits_c f(z)dz = 0$.

Доказательство: проведем гладкие кривые $l_1,\ldots,l_n$, соединяющие внешний контур C_0 с контурами $C_1,\ldots C_n$, тогда область ограниченная кривыми и $C_0,\ldots C_n$ кривыми $l_1,\ldots,l_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается односвязной. Тогда по первой теореме $\int\limits_{C_0^+} f(z)dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{C_n^-} f(z)dz = 0$ (интегралы по вспомогательным кривым $l_1,\ldots,l_n$ не влияют на конечный интеграл).

Следствие: $\int\limits_{C_1} f(z)dz = \int\limits_{C_2} f(z)dz$

Первообразная аналитической функции (теорема и определение).



Трм.: Пусть f(z) определена и непрерывна в односвязной области G, и интеграл по любому замкнутому контуру от этой функции f(z) равен нулю. Тогда функция от z: $\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ является аналитической в области G, и её производная Ф'(z) = f(z) (когда ставят значение верхнего предела).

Док-во: Дадим приращение: z, z+Δz, и вычислим

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi+\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi=\frac{f(z)}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi=f(z)$$

Оценим разность:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)-f(z)d\xi\right|=$$

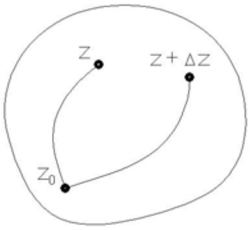
$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)-f(z)d\xi\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)||\Delta z|=0,$$

при $|\Delta z|\to 0$

А это значит, что $\exists\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}\right|=f(z)$, т.е. доказали существование производной.

Def.: Аналитическая функция F(z) называется первообразной (или неопределённым интегралом) для функции f(z) в области G, если в этой области имеет место равенство: F'(z)=f(z).

Неопределенный интеграл. Теорема и определение. Формула Ньютона-Лейбница.



Трм.: Пусть f(z) определена и непрерывна в односвязной области G, и интеграл по любому замкнутому контуру от этой функции f(z) равен нулю. Тогда функция от z: $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ является аналитической в области G, и её производная Ф'(z) = f(z) (когда ставят значение верхнего предела).

Док-во: Дадим приращение: z, z+Δz, и вычислим

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi+\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi=\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\xi=f(z)$$

Оценим разность:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)-f(z)d\xi\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)-f(z)d\xi\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)||\Delta z|=0,$$

$$\text{при } |\Delta z|\to 0$$

А это значит, что $\exists\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}\right|=f(z)$, т.е. доказали существование производной.

Определение: Аналитическая функция F(z) называется первообразной (или неопределённым интегралом) для функции f(z) в области G, если в этой области имеет место равенство: F'(z)=f(z).

Трм. (Формула Ньютона-Лейбница): *Если функция f(z) – односвязная в аналитической области G, то у неё в этой области существует первообразная, и для любых точек z_1 и $z_2 \in G$ имеет место формула:* $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$*, где Ф(z) – одна из первообразных f(z).*

Док-во: По трм. интеграл по любому замкнутому контуру в G равен 0, значит $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ - является первообразной. Если $F_1(z)$ и $F_2(z)$ – различные первообразные для функции f(z), то $F_2(z)$ - $F_1(z)$ = const в G. Если рассмотреть функцию $\varphi(z)=F_2(z)-F_1(z)$, то $\varphi'(z)=0$ в G. Пусть $\varphi=U(x,y)+iV(x,y)$, тогда $\varphi'=U_x+iV_x\equiv 0\Rightarrow U_x\equiv V_x\equiv 0$, но тогда $U_y=-V_x\equiv 0$ и $V_y\equiv 0$.

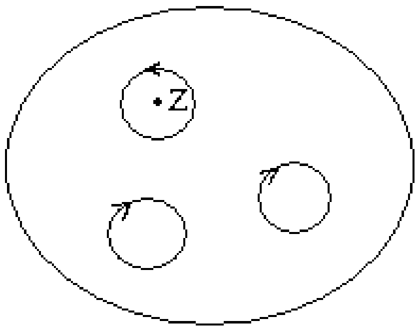
$$dU(x,y)\equiv 0\Rightarrow U=C_1=const$$
$$dV(x,y)\equiv 0\Rightarrow V=C_2=const$$

$\int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi=\int_{z_0}^{z_2} f(\xi)d\xi-\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi=F(z_2)-F(z_1)$. Любая другая первообразная отличается на константу С.

$\Phi(z)=F(z)+C_1$;

$\Phi(z_2)-\Phi(z_1)=F(z_2)+C_1-F(z_1)-C_1=F(z_2)-F(z_1)$

Формула Коши. Следствие. Формула среднего значения.



Предположим, что функция f(x) задана в некоторой области G, ограниченной кусочногладким контуром Г.

$\overline{G} = G + \Gamma$ - замкнутая область.

Тогда для любой точки $z \in G$ имеет место формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Доказательство: Выберем произвольную точку $z \in G$ и окружим ее окружностью радиуса ρ

$$\oint_{\Gamma_\rho C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \left| \begin{matrix} \xi - z = \rho e^{i\varphi} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right| =$$

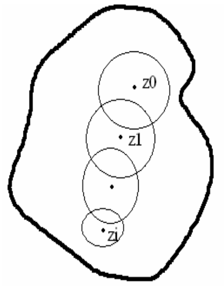
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + \rho e^{i\varphi}\right)}{\rho e^{i\varphi}} \rho i e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} f\left(z + e^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\varphi = f(z)$$

Принцип максимума модуля

Пусть G- связная область, ограниченная кусочногладким контуром Г. f(z)- аналитическая в обл. G. Тогда максимум модуля f(z) либо принимается на границе, либо ф-я константа во всей области.

Доказательство:



$$|f(z)| \le M, M = \max|f(z)| = |f(z_0)|, z_0 \in G$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi, \; \xi = z + \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi \quad \left| f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) \right| \le M.$$

$$(\forall \varphi : x - \delta \le \varphi \le x + \delta) : \left(\left| f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) \right| \le M - \varepsilon \right)$$

Возьмем точку $z_{0i} : |f(z_{0i})| = M$ и проведем окружность с центром в этой точке, целиком принадлежащую обл. G. Тогда за конечное число шагов окр-ть коснется границы, т.е. максимум фун-ии достигается на границе.

Аналитическая зависимость интеграла от параметра.

Пусть дана функция $f: G \subset C \times C \to C$, и $f(x,y,\xi,\eta)$. Или $f(z,t)$, где $z = x+iy, t = \xi + i\eta$.

$t \in F$ -кусочногладкая кривая.

1) Пусть $f(z,t)$ -аналитическая в обл. G для $\forall t \in \varGamma$.

$\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ - непрерывная по совокупности двух аргументов- $(z,t) \in G_{t\in\varGamma}$

$F(z) = \int\limits_{\varGamma} f(z,t)dt$ является аналитической функцией от z в обл. G

2) $F'(z) = \int\limits_{\varGamma} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} dt$

Доказательство:

Пусть $f(z,t) = u(x,y,\xi,\eta) + iv(x,y,\xi,\eta)$, $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ $F(z) = \int\limits_{\varGamma}(u+iv)(d\xi + id\eta) = \int\limits_{\varGamma}(ud\xi - vd\eta) + i(vd\xi + ud\eta)$

$U(x,y) = \int\limits_{\varGamma} ud\xi - vd\eta \quad V(x,y) = \int\limits_{\varGamma} vd\xi + ud\eta$

Продифференцируем по x и y:

$U'_x = \int\limits_{\varGamma} u'_x d\xi - v'_x d\eta \quad V'_x = \int\limits_{\varGamma} v'_x d\xi + u'_x d\eta$

$U'_y = \int\limits_{\varGamma} u'_y d\xi - v'_y d\eta \quad V'_y = \int\limits_{\varGamma} v'_y d\xi + u'_y d\eta$

Из условия Коши-Римана : $U'_x = V'_y, U'_y = -V'_x$

Найдем производную: $F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_{\varGamma}\left(u'_x d\xi - v'_x d\eta\right) + i\int\limits_{\varGamma}\left(v'_x d\xi + u'_x d\eta\right) =$

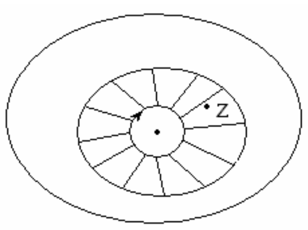
$= \int\limits_{\varGamma}\left(u'_x + iv'_x\right)\left(d\xi + id\eta\right) = \int\limits_{\varGamma} \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} dt$

Существование производных всех порядков аналитической функции.

1) f(x)- непрерывная в замкнутой области G, и аналитическая.

2) f(x) непрерывна в $\overline{G} = G + \Gamma$

Тогда $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$



Причем $|\xi - z| \geq d > 0$

$\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ -непрерывна по совокупности аргументов.

Также можно написать, что $\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right)^{(n)} = \frac{n!f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}$.

Доказательство: По формуле Коши Можно записать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Докажем, что имеет место равенство $f^{/}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$

$$f^{/}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f^{/}(\xi)}{(\xi - z)}d\xi = \left|\begin{matrix} u = 1/(\xi - z), du = -d\xi/(\xi - z)^2 \\ v = f(\xi),\ dv = f^{/}(\xi)d\xi \end{matrix}\right| == \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

$$\oint\limits_{\Gamma}\frac{f^{/}(\xi)}{(\xi - z)}d\xi = \int\limits_{o}^{2\pi}\frac{f^{/}\left(z + \rho e^{i\varphi}\right)}{\rho e^{i\varphi}}\rho i e^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_{0}^{2\pi} f^{/}\left(z + \rho e^{i\varphi}\right)d\varphi$$

$f^{//}(z) = \frac{2!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}d\xi$ - по аналогии с предыдущим.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

Из существования первой производной в некоторой окрестности точки, следует существование n-й производной!!!!

Следствие:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} f(z), если\ z \in G \\ 0, если\ z \notin G \end{cases}$$

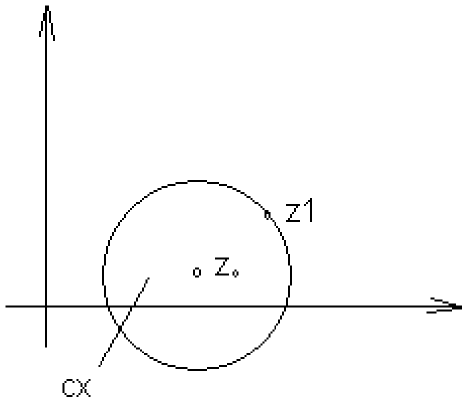
Теорема Морера. Теорема Лиувилля.

Теорема Морера.

1) Пусть f(z) – непрерывная в однозначной области G.

2) $\exists \oint f(z)$ по любому замкнутому контуру.

Тогда f(z) является аналитической в области G.



Доказательство:

Пусть $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$. Тогда получим, что $F^{/}(z) = f(z)$.

В свою очередь можно взять вторую производную. Получим:

$\exists F^{//}(z) = f^{/}(z)$, т.е. функция дифференцируема во всей области G. Тогда функция является аналитической.

Ч.т.д.

Теорема Лиувилля.

1) Дано, что f(z)- аналитическая функция на всей области G.

2) f(z) ограниченная, т.е. $(\exists M > 0)(\forall z \in C):(|f(z)| \le M)$

Тогда f(z)=const.

Доказательство:

Оценим по модулю:

$$\left|f^{/}(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_k}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}\right| \le \frac{1}{2\pi} M \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\left|R e^{it}\right|}{\left|R^2 e^{2it}\right|}dt = \frac{1}{2\pi} M \frac{R}{R^2} 2\pi = \frac{M}{R}$$

Такой переход возможен, если принять: $C_k -$ окр $-$ ть, $t = z + R e^{i\varphi}$.

Теперь устремим R к бесконечности. Тогда $\left|f^{/}(z)\right| = 0 \Rightarrow f(z) = const.$

Ряды аналитических функций. 1 т-ма Вейерштрасса.

1)$U_n(z)$ – аналитическая в односвязной области G (n=1,2…)

2)Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) \xrightarrow{\rightarrow}$ в любой замкнутой подобласти области G

Тогда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ =f(z) – аналитическая в области G

2)$f^{(m)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(m)}(z)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(m)}(z)$ $\rightarrow_{\rightarrow}$ в любой замкнутой подобласти области G

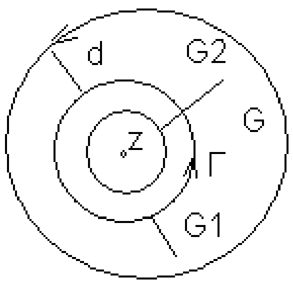
Доказательство:

1)в любой замкнутой области ряд сходится равномерно, то f(z) – непрерывна, и, кроме того, т.к. сходится равномерно по любой замкнутой кривой Г, тогда ряд можно интегрировать

$\oint f(z)dz = \oint_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\Gamma} U_n(z)dz = 0$,т.к $\oint_{\Gamma} U_n(z)dz = 0$

По теореме Морра f(z) – аналитическая.

2)Возьмём точку $z_0 \in G$



d – расстояние (конечно)

$z_0 \in G2 \in G2' \in G1$, тогда

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) = f(t)$ $\rightarrow_{\rightarrow}$ на G1

Теперь поделим на $(t-z)^{m+1}$, $|t-z| \geq d$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(t)}{(t-z)^{m+1}} = \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}}$ - ряд сходится равномерно на Г, тогда его можно интегрировать почленно:

$$\frac{m!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{U_n(t)}{(t-z)^{m+1}} dt$$

$f^m(z)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(m)}(z)$

3)

Тогда получим предыдущий случай, т.к. между двумя областями G и G2 можно провести кривую G1 и разбить на 2 области

Определение степенного ряда. Теорема Абеля. Следствия.

Определение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_\circ)^k = C_\circ + C_1(z-z_\circ) + C_2(z-z_\circ)^2 + \ldots$$

Теорема Абеля: Если степенной ряд сходится в некоторой точке $z_\circ$, то этот ряд сходится абсолютно для любого z, удовлетворяющего неравенству:
$|z-z_\circ|<|z1-z_\circ|$, более того $|z-z_\circ|\le p<|z1-z_\circ|$
Доказательство:

$$|C_n(z-z_\circ)^n| = |C_n(z_1-z_\circ)^n| * \left|\frac{z-z_\circ}{z_1-z_\circ}\right|^n \le Mq^n$$ (1) - сходится

т.к. в точке z1 ряд сходится, то

$|C_n(z-z_\circ)^n| \le M$

$\left|\frac{z-z_\circ}{z_1-z_\circ}\right| = q<1$, таким образом, неравенство (1) выполняется

Если $|z-z_\circ|\le p|z1-z_\circ|$, тогда

$\frac{z-z_\circ}{z_1-z_\circ} \le q1<q<1$; $\quad q1 = \frac{p}{|z1-z_\circ|} < q$; Тогда (для любого z: $|z-z_\circ|\le p$)

$|C_n(z-z_\circ)^n| \le Mq_1{}^n$ - сходится. Значит, ряд сходится равномерно.

Следствия:

1)Если степенной ряд расходится в точке z1, то он расходится для любого z: $|z-z_\circ|>|z1-z_\circ|$.
2)Для любого степенного ряда существует такое число R, что при $|z-z_\circ|<R$ ряд сходится, а при $|z-z_\circ|>R$ – расходится; R – радиус сходимости, $|z-z_\circ|$ - круг сходимости.
3)Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.
4)степенной ряд внутри круга сходимости можно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

5)коэффициенты степенного ряда C_k вычисляются по формуле: $C_k = \frac{f^{(k)}(z_\circ)}{k!}$ (*)

Доказательство: Продифференцировать ряд k раз:
$f^{(k)}(z_\circ)=k!C_k+(k+1)!C_{k+1}(z-z_\circ)+\ldots|_{z=z_\circ}= k!C_k \to (*)$
6)радиус сходимости R определяется по формуле:

$R=\frac{1}{l}$, где $l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}$ при $n \to \infty$

Доказательство:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n(z-z_\circ)^n|} = |z-z_\circ| * \overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|} = l|z-z_\circ| < 1$$

$|z-z_\circ| < \frac{1}{l}$, тогда будет сходится, т.е. это круг сходимости, т.е. это его радиус.

Теорема Тейлора.

f(z) – аналитическая внутри круга $|z-z_\circ|$<R может быть представлена в этом круге, как сумма сходящегося степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_\circ)^n$$

И этот ряд определён однозначно!

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_p}\frac{f(z)dt}{t-z}\quad(1)$$

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_\circ-(z-z_\circ)}=\frac{1}{t-z_\circ}*\frac{1}{1-\dfrac{z-z_\circ}{t-z_\circ}}=\frac{1}{t-z_\circ}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_\circ}{t-z_\circ}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_\circ)^k}{(t-z_\circ)^{k+1}}$$

(1)= $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z-z_\circ)^k*\dfrac{f(t)dt}{(t-z_\circ)^{k+1}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(z_\circ)}{k!}(z-z_\circ)^k$

Нули аналитической функции. Единственность определения аналитической функции.

Если $f(z)=(z-z_\circ)^k\varphi(z)$ и $\varphi(z_\circ)\#0$, то $z_\circ$ - называется нулём функции f(z) k порядка. Если f(z) – аналитическая, то $f(z)=C_\circ+C_1(z-z_\circ)+\ldots+C_{k-1}(z-z_\circ)^{k-1}+C_k(z-z_\circ)^k+\ldots$

Теорема (о нулях):

Если функция f(z) – аналитическая в G и имеет нули в точках z1, z2…zn… и f(zk)=0, $z_i\#z_j$ и существует предельная точка: lim z_k=aЄG при k→к бесконечности (область G – связная), тогда f(z)=0 в G.

Доказательство:

lim f(zk)=f(a)=0→f(z)=(z-a)f1(z)

f1(z)=0 во всех точках кроме, может быть, одной – a, тогда f1(zk)=0, и следовательно lim f1(zk)=0. Таким образом, $C_\circ=0$

$f(z)=(z-a)^2f2(z)\to C_1=0$

Для f2(z) аналогично, как и для f1(z)

Все коэффициенты обратятся в нуль.

Теорема (о единственности):

Пусть f(z) и g(z) – две аналитические в линейно связной и ограниченной области G функции. Если существует последовательность различных точек $\{z_n\}$ЄG и таких, что lim z_n=aЄG при $n\to\infty$ и $f(z_k)=g(z_k)$ в области G. Тогда f(z) тождественно равна g(z).

Доказательство:

φ(z)=f(z)-g(z) имеет в G последовательность $\{z_n\}$=0 и aЄG, тогда φ(z)=0 по теореме о нулях→f(z)=g(z).

Следствия:

Определение аналитического продолжения. Продолжение соотношений с действительной оси. Полная аналитическая функция.

Пусть f1(z) – аналитическая в области G1; f2(z) – аналитическая в области G2
G1∩G2=G#0; f1(z)=f2(z) в G

$$F(z)=\begin{cases} f1(z) \text{ в } G1 \\ f2(z) \text{ в } G2 \\ f1(z)=f2(z) \text{ в } G \end{cases}$$

Тогда F(z)=

F(z) – аналитическая в G1 объединение G2
F(z) – аналитическое продолжение f1(z) в область G2 или f2(z) в область G1
Определение:
Пусть:
1)f: [a,b]→R
2)в GC**C** существует аналитическая функция f(z): G→C
3)f(z) на [a,b] совпадает с f(x)
Тогда f(z) называется аналитическим продолжением функции f(x)c[a,b] в области G.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, e^z – продолжение e^x в C плоскость

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, sinz – продолжение sinx в C плоскость

Теорема: Пусть F(W1,W2…Wn) – функция по n комплексным переменным и F является аналитическим продолжением по каждой переменной Wi в области Di с C (i=1,n). Кроме того, $\frac{\partial F}{\partial W_i}$ - непрерывно по совокупности переменных W1,W2…Wn в области D=D1*D2*…*Dn; [a,b]ЄD, тогда из соотношения F(W1(x),W2(x)…Wn(x))=0 на [a,b]→ F(W1(z),W2(z)…Wn(z))=0 в области D.

Ряд Лорана. Область сходимости РЛ, Трм о разложении анал.ф-ции в РЛ.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ (**Р1**), где z_0 – фикс. Точка компл. пл-ти, c_n – нек. компл.числа, а суммир ведется по полож и по отриц числам индекса n, наз-ся рядом Лорана.

Установим **обл. сх-ти Р1,** предст: **Р1**= $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ (**Р2**) Очев, что обл сх-ти **Р1** – общ. часть обл-й сх-ти каждого из сл-х **Р2**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ это $|z-z_0| < R_1, R_1 = 1 \backslash l_1, l_1 = \overline{\lim\limits_{n->\infty}} \sqrt[n]{|c_n|};$ внутри этого круга, ряд сх-ся к нек. анал.ф-ции к.п. $f_1(z)$. для опр-я ОС ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сделаем замену $\varsigma = 1/(z-z_0)$. Т.о. этот ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} \varsigma^n$ т.о. это обыч. степ ряд, сх-ся внутри своего круга сх-ти к ф-ции φ(ζ). Обозн-м РадиусС (РС) получ степ. ряда как $1/R_2$ тогда $\varphi(\varsigma) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} \varsigma^n, |\varsigma| < 1 \backslash R_2$. Возвр-сь к старой перем. и полагая $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$ получим $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, |z-z_0| > R_2$ Значит ОС $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ - внешняя обл. окр-ти $|z-z_0| = R_2$. Т.о. каждый из степ. рядов **Р2** сх-ся в ОС к соот. анал.ф-ции, если $R_2 < R_1$ то сущ общ ОС этих рядов – кольцо $R_2<|z-z_0|<R_1$ в к-ром **Р1** сх-ся к ан.в данн. кольце ф. $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$; если $R_2 > R_1$ то нет общ ОС и **Р1** нигде не схся к ан.ф.

Трм о разложении анал.ф-ции в РЛ. Ф-ция f(z), анал в $R_2<|z-z_0|<R_1$ однозн предст в этом кольце сх-ся РЛ.

Д-во: Фикс. произв. точку z внутри кольца и постр окр-ти $C_{R'1}$ и $C_{R'2}$, с центр в z_0 и $R_2< R'_2< R'_1< R_1$ и $R'_2<|z-z_0|<R'_1$ согл фор. Коши для многосв обл: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'1} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'2} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$; на $C_{R'1}$ вып-ся нер-во $\left|\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right| \le q < 1$ поэтому предст-в $\frac{1}{\varsigma - z}$ как $\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{(\varsigma - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\varsigma - z_0)} * \frac{1}{1 - (z-z_0) \backslash (\varsigma - z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0})^n$ и провед почл интегр (можно, в силу равном сх-ти ряда) получим $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'1} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n;$ где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'1} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma, n \ge 0$ т.к. на $C_{R'2}$ вып-ся $\left|\frac{\varsigma - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ то анал-но имеем $\frac{1}{\varsigma - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{\varsigma - z_0}{z - z_0})^n$ после почл интегрир получим $f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'2} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} \backslash (z-z_0)^n$ где $c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'2} f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1} d\varsigma, n \ge 0$ изм-в напр. инт. в посл. форм имеем $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CR'2} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}} d\varsigma, n > 0$; заметим, что подинт ф-ции в выр для n и –n анал. в $R_2<|z-z_0|<R_1$ поэтому в силу трм Коши знач соотв интегр не изм-ся при произв деформ контуров инт в обл анал-ти подинт ф-ций, тогда объединим $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma, n = \pm 1, \pm 2 ...$ где C – произв замк конт, леж в $R_2<|z-z_0|<R_1$ и сод z_0 внутри. Итак, тогда мы имеем $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} \backslash (z-z_0)^n = f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ т.к. z-произв точка внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ имеем что этот ряд сх-ся к f(z) всюду внутри данн кольца, причем в замк кольце $R_2< \overline{R_2} \le |z-z_0| \le \overline{R_1} < R_1$ ряд сх-ся равном. остается док-ть **единст-ть разл-я.** Предп-м есть другое разл $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n$ где хотя бы один $c'_n \ne c_n$ тогда всюду внутри кольца имеем

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n$ проведем C_R с центром в z_0 b $R_2<R<R_1$ ряды сх-ся на C_R равн. Умножим их на $(z-z_0)^{-m-1}$ где m фикс цел и проинт почл. $\int\limits_{CR} (z-z_0)^{n-m-1} dz$ = $\{z-z_o=Re^{i\varphi}\}$= $R^{n-m} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 2\pi i, n = m \end{cases}$ с учетом этого видно, что после указ интегр этих рядов, отл от нуля будут по одн. слаг в лев и прав частях, отсюда $c'_m=c_m$, а т.к. m- произв, это доказ единств. разл-я. Трм. док!

Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции *f(z)*, если можно указать такое значение R,что вне круга |z|>R функция *f(z)* не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки z=0.

Разложение: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad R<|z|<\infty$

Классификация:

1. точка z=∞ называется устранимой особой точкой функции *f(z)*, если разложение не содержит членов с положительными степенями.
2. точка z=∞ называется полюсом порядка m функции *f(z)*, если разложение содержит конечное число m членов с положительными степенями.
3. точка z=∞ называется существенно особой точкой функции *f(z)*, если разложение содержит бесконечное число членов с положительными степенями.

Классификация изолированных особых точек.

Определение: Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции *f(z)*, если *f(z)*–однозначная и аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R$, а точка z_0 является особой точкой функции *f(z)*.

Классификация:

1. точка $z=z_0$ называется устранимой особой точкой функции *f(z)*, если разложение не содержит членов с отрицательными степенями.
2. точка $z=z_0$ называется полюсом порядка m функции *f(z)*, если разложение содержит конечное число m членов с отрицательными степенями.
3. точка $z=z_0$ называется существенно особой точкой функции *f(z)*, если разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями.

Теорема. Если точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции f(z), то сущ. предельное значение $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$, причем $|c_0|<\infty$.

Д-во. Т. к. z_0 является устранимой особой точка, то $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Следовательно $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$.

Теорема. Если точка z_0 является полюсом аналитической функции f(z), то при $z\to z_0$ модуль функции f(z) неограниченно возрастает независимо от способа стремления.

Д-во. Пусть z_0 полюс порядка m, тогда

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^{-m}\left\{c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad . (1)$$

φ(z), очевидно, является ограниченной аналитической функцией в окрестности точки z_0. Из представления (1) следует, что при $z\to z_0$ модуль функции f(z) неограниченно возрастает независимо от способа стремления.

Теорема. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в любой окрестности существенно особой точки z_0 функции f(z) найдется хотя бы одна точка z_1, в которой значение функции f(z) отличается от произвольного заданного комплексного числа B меньше чем на ε

Д-во. Предположим, что теорема неверна, т.е. найдется такое $\eta>0$, что

$|f(z)-B|>\varepsilon$, при $|z-z_0|<\eta$.(1)

Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(z)=\frac{1}{f(z)-B}$. В силу (1) функция $\phi(z)$ определена и ограничена в η–окрестности точки z_0. Следовательно, точка z_0 является устранимой особой точкой функции ϕ (z). Это означает, что

$$\phi(z)=(z-z_0)^{-m}\overline{\varphi}(z), \quad \overline{\varphi}(z_0)\neq 0.$$

Тогда в силу определения функции ϕ (z), в данной окрестности точки z_0 имеет место следующие разложение функции f(z):

$$f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)+B, \ (2)$$

где аналитическая функция $\varphi(z)=\frac{1}{\overline{\varphi}(z)}$ ограничена в η–окрестности точки z_0. Но разложение (2) означает, что точка z_0 является полюсом порядка m, или при m=0 правильной точкой функции f(z), что противоречит условию теоремы.

Предельные свойства изолированных особых точек. Связь полюсов и нулей.

<u>Теор:</u> Если z_0 – устранимая особая точка то $\exists\lim f(z)=c_0$ при $z\to z_0$ и наобарот

Док-во

Пусть f(z) – ограничена

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{cR'}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})i\rho e^{i\varphi}}{\rho^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}d\varphi \quad =(*)$$

сделаем замену $t-z_0=\rho e^{i\varphi}$ $|f(z)|\le M$

$$|c_n|\le\frac{1}{2\pi}iM2\pi=\frac{M}{\rho^n}$$

Если n- отрицательное то ρ переходит в числитель, то все отрицательные коэффициенты $|C_n|=0$ при n=-1, -2, …

Второй случай:

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{+\infty}C_k(z-z_0)^k$$

$|C_{-n}|\ne0$ в этом случае точка – полюс n-го порядка.

<u>Теор(О связи нулей и полюсов)</u>

Для того, чтобы функция f(z) имела в точке $z=z_0$ полюс n-го порядка необходимо и достаточно чтобы функция 1/ f(z) имела в точке z_0 ноль n-го порядка.

<u>Док-во:</u> *<u>Необход:</u>* Предположим что в точке z_0 полюс n-го порядка тогда

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)}(C_{-n}+C_{-n+1}(z-z_0)+\ldots)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

$\varphi(z_0)\ne0$ тогда $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^n\psi(z)$ где $\psi(z)=1/\varphi(z)$

так как $\varphi(z_0)\ne0\to\psi(z_0)\ne0$ и $\psi(z)$ – аналитическая в окрестности точки (z_0)

<u>Достат:</u> Если 1/f(z) имеет ноль n-го порядка то она представима в виде $\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$. Где $\varphi(z)\ne0$ и аналитична, тогда z_0 полюс n-го порядка.

Определение вычета. Вычисление вычетов.

Определение: Пусть ф-ция f(z) имеет изолированную особую точку z_0 тогда поместим z_0 внутрь контура γ тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$$ - вычет функции f(z) в точке z_0 и обозначается

Выч[f(z),z_0]=res[f(z),z_0]

<u>Теор:</u> Вычет функции res[f(z),z_0]=C_{-1} в разложении этой функции в окрестности этой точки z_0 т.е

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$$

<u>Док-во</u>: Интеграл по любому замкнутому контуру – одинаков. Выбираем окрестность радиуса ρ тогда

$$res[f(z),z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \oint_{\gamma_\rho} (z-z_0)^n dz$$

$$\oint (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{i\varphi n} i e^{i\varphi} \rho d\varphi = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)} d\varphi =$$

$$= i\rho^{n+1}\begin{cases} \left.\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} \\ 2\pi i, n=1 \end{cases} = \begin{cases} 0, при..n \neq -1 \\ 2\pi i, при..n=-1 \end{cases}$$

Формулы:

1) полюс первого порядка:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + ...$$

lim f(z)(z-z_0)=C_{-1} при z→z_0

Если f(z)=φ(z)/ψ(z) при этом $\varphi(z_0) \neq 0$ φ (z) =(z-z_0)ψ_1(z)

$\psi(z)=\psi'(z_0)(z-z_0)+\psi''(z_0)(z-z_0)^2/2!+\ldots$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)+\psi''\dfrac{z-z_0}{2!}+...} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

2)полюс n-го порядка

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)} + ... + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + ...$$

$$f(z)(z-z_0) = C_{-n} + ... + C_{-2}(z-z_0)^{n-2} + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + ...$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z),(z-z_0)^n] = (n-1)!C_{-1}$$

$$res[f(z),z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim\frac{d^{n-1}}{dz^{z-1}}[f(z)(z-z_0)^n]$$

Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме вычетов.

Теорема (Основная теорема теории вычетов):

Пусть f(z) – аналитическая всюду в замкнутой области G за исключением конечного числа изолированных особых точек, лежащих внутри этой области, тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$$

<u>Док-во:</u>

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^-} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n^-} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz = 2\pi i res[f(z), z_n]$$

предположим, что кроме |z|>R других особых точек в ∞ больше нет

res[f(z),-∞]=-C_{-1}

$$\oint_{C_R^+} C_n z^n dz$$

Предположим что функция f(z) аналитическая на полной комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек включая ∞ тогда сумма всех вычетов во всех особых точках, включая ∞ равна нулю.

<u>Док-во</u> $\oint_{C_R^+} f(z)dz = 2\pi i \sum res[f, z_k]$

$$\oint_{C_R^-} f(z)dz = 2\pi i res[f(z), \infty]$$

Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции с помощью вычетов.

Это инт вида I = $\int\limits_{o}^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$, где R-рац ф-ция своих арг. Инт такого типа легко могут быть сведены к интегр от ан.функции компл.перем по замкн.контуру. Для этого сделаем замену перем. интегр, введя компл. перем. $z=e^{i\varphi}$. Очев, что $d\varphi=dz/iz$, $\cos\varphi=1/2(e^{i\varphi}+ e^{-i\varphi}) = 1/2(z+1/z))$, $\sin\varphi = 1/2i(z-1/z))$. При изм φ от 0 до 2п, z пробег окр-ть |z|=1 в пол. напр-ии. Т.о. $I = 1\backslash i \int\limits_{|z|=1} R[z+1\backslash z, z-1\backslash z]dz\backslash z$; т.о. в силу общ. св-в аналит. ф-ций подинт. ф-ция, явл-ся, очев, рацион $\tilde{R}(z) = (a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n)\backslash(b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m)$ предст собой ф-цию, аналит внутри круга |z|=1 всюду за искл. конечного N≤m числа особ точек z_k явл. нулями знам R~. Т.о. в силу осн.трм.теор.выч. I = $2\pi \sum\limits_{k=1}^{N} выч[\tilde{R}(z), z_k]$. Точки z_k явл-ся полюсами ф-ции R~. Пусть a_k – поряд. полюса z_k (очев, $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \le m$).

Тогда по форм. выч вычета в полюсе m-пор, I = $2\pi \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{(a_k - 1)!} \lim\limits_{z->zk} \frac{d^{\alpha k-1}}{dz^{\alpha k-1}}[(z-z_k)^{ak}\tilde{R}(z)]$;

Пример: выч инт $I = \int\limits_{o}^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi}, |a|<1$ реш: $z=e^{i\varphi}$ т.о. I= $I = 1\backslash i \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1+a\backslash 2(z+1\backslash z)}\frac{dz}{z}$ = $2\backslash i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{az^2+2z+a}$. особ точкми явл нули знам $z_{1,2}$ = $-1\backslash a \pm \sqrt{(1\backslash a^2)-1}$. Это полюсы первого порядка. Так как $z_1 z_2=1$ то ясно что лишь одна из этих точек лежит внутри круга |z|=1 как легко видеть, это точка z_1 = $-1\backslash a + \sqrt{(1\backslash a^2)-1}$ поэтому в силу осн.трм.теор.выч $I = 4\pi Выч\left[1\backslash(az^2+2z+a), z_1\right] = 4\pi * 1\backslash a(z-z_2)|_{z=z1} = 2\pi\backslash\sqrt{1-a^2}$

Вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами с помощью вычетов. Лемма и теорема.

Лемма. Пусть ф-ция f(z) явля-ся анал. в верхн. полупл Im(z)>0 всюду за искл. конечн. числа изолир особых точек и существ. такие полож чила R_0, M и δ что для всех точек верх полупл, удовл услов $|z|>R_0$ имеет метсо $|f(z)|<M\backslash|z|^{1+\delta}$ тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'R} f(\varsigma)d\varsigma=0$ (*) где C'_R –полуокр-ть |z|>R, Imz>0; действит, т.к. $|\int\limits_C f(\varsigma)d\varsigma|\le\int\limits_C|f(\varsigma)ds|$ где ds – дифф-л длины дуги кривой, и в силу усл леммы при $R>R_0$ имеем $|\int\limits_{C'R} f(\varsigma)d\varsigma|\le\int\limits_{C'R}|f(\varsigma)ds|<\frac{M2\pi R}{R^{1+\delta}}=\frac{2\pi M}{R^\delta}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$ что и доказывает лемму.

Зам1 если усл леммы вып в сект φ1<z<φ2 то форм (*) имеет метсо при интегр по дуге C'_R окр-ти, леж в дан сект.

Зам2 Усл леммы очев будут вып, если f(z) явл-ся аналит в окр-ти беск удал точки и z=∞ - нуль не ниже 2 пор ф-ции f(z). Тогда $f(z)=C_{-2}/z^2+C_{-3}/z^3+\ldots=\varphi(z)/z^2$ причем |φ(z)|<M откуда и след $|f(z)|<M\backslash|z|^{1+\delta}$ при δ=1

Трм Пусть ф-ция f(x) заданная на всей действ оси м.б. аналит продолж на Imz ≥ 0 причем ее анал прод f(z) удовл всем усл леммы и не имеет ос точек на дкйств оси. Тогда сущ несобст инт перв рода и

$$\int\limits_{=\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N} выч[f(z),z_k] \qquad (**)$$

Д-во По усл трм функция f(z) в верхн полупл имеет кон чило особ точек z_k причем $|z_k|<R_0$. рассм замк конт сост из отр оси [-R,R] ($R>R_0$) и полуокр C'_R |z|=R в верх полупл. В силу осн трм теор выч. $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx+\int\limits_{C'R} f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N} Выч[f(z),z_k]$ т.к вып условия леммы то предел второго слаг при R→∞ равен нулю а прав часть при $R>R_0$ от R не зав. Отсюда след, что пред перв слаг сущ и его знач опр-ся форм (**) Трм док! Трм имеет место когда f(x) анал прод, как в верх, так и в нижн полупл, главное, чтоб ан прод удовл усл леммы.

Лемма Жордана. Применение леммы Жордана к вычислению несобственных интегралов.

Лемма Пусть функция f(z) явл-ся анал в верх полупл Imz>0 за искл кончен числа изолир особ точек и равном отн-но argz ($0\le z\le\pi$) стрем-ся к 0 при $|z|\to\infty$ тогда при a>0 $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'R} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma = 0$ (*) где C'_R – дуга полуокр |z|=R в вех полупл.

Док-во: Условие равном стремл f(z) к нулю означ что |z|=R имеет место $|f(z)|<\mu_R$ где $\mu_R\to 0$ при $R\to\infty$ с пом этого оч=ценим иссл интегр. сделаем замену $\zeta=Re^{i\varphi}$ и восп очев соотн $\sin\varphi\ge 2\varphi/\pi$ при $0\le\varphi\le\pi/2$ тогда получим $\left|\int\limits_{C'R} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma\right| \le \mu_R * R\int\limits_0^\pi |e^{ia\varsigma}|\,d\varphi$ = $\mu_R * R\int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}d\varphi = 2\mu_R R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi$ < $2\mu_R R\int\limits_0^{\pi/2} e^{\frac{-2aR\varphi}{\pi}}d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R(1-e^{-aR})\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ что и доказ лемму. **Зам** Если a>0 а ф-ция f(z) удовл усл леммы Ж в ниж полупл то формула (*) имеет место при интегр по дуге полуокр C'_R в ниж полупл. Аналог утв имеют место (при $a=\pm i\alpha$, $\alpha>0$) при инт соотв в прав ($Rez\ge 0$) и лев ($Rez\le 0$) полупл. док-ва пров-ся сов аналогично. форма леммы Жорд при инт в прав. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'R} e^{-\alpha\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma$ =0 $\alpha>0$;

Трм Пусть f(z) зад-я на всей действ оси м.б. продолж на верх полупл $Imz\ge 0$ а ее анал продолж f(z) в верх полупл удовл усл леммы Жорд и не имеет ос точ на денств оси. Тогда сущ инт $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz} f(z), z_k]$, a>0; где z_k – особ точки f(z) в верх полупл.

Д-во По усл трм z_k удовл усл $|z_k|<R_0$ рассм в верх полупл замк контур сост из отр [-R, R] $R>R_0$ и дуги C'_R окр-ти |z|=R в верх полупл. По ос трм теор выч $\int\limits_{-R}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int\limits_{C'R} e^{iax} f(\varsigma)d\varsigma = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[e^{iax} f(z), z_k]$ по лемме Ж предел второг слаг в лев части при $R\to\infty$ равен 0 отсюда и след утв трм.

Зам Если f(x) чет (нечет) и удовл усл трм и a>0 то $\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos ax dx = \pi\,\mathrm{Re}\, i\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz} f(z), z_k] = -\pi\,\mathrm{Im}\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz} f(z), z_k]$ $\left(\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin ax dx = \pi\,\mathrm{Re}\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz} f(z), z_k]\right)$

Пример Выч инт I = $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}dx, a>0, \alpha>0$ чтобы иметь возм восп лемЖ, заметим что $I=ReI_1=Re\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}dx$ анал прод подинт ф-ции $\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}$ удовл усл трм и имеет в верх полупл ед особ точку $z_1=ia$, явл полсом 1 пор. Знач, I_1= $2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} Выч[\frac{e^{iaz}}{z^2+a^2}, ia] = 2\pi i\frac{e^{-a\alpha}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}$ отсюда $I = ReI_1 = (\pi/a)e^{-a\alpha}$;