студенты-
физики

Теоретическая механика
Лекции

Юлия

Лектор Халилов В.Р.
Семестры 4 и 5

2014

Владислав Рустемович Хамитов

И.И. Ольховский "Курс ТМ для физиков".

Ю.Г. Павленко (2002) "Лекции по Теор. Мех.

Л.Д Ландау, Е.М. Лифшиц (1988)

В.Р. Хамитов, Г.А. Чижов "Динамика класс. систем"

Теоретическая Механика

Л. 1.

Изучает основные принципы и законы, которым подчиняются простейшие системы, и изучает уравнения движения.

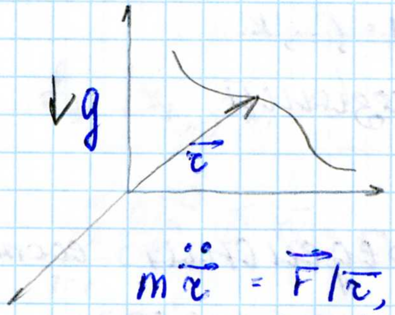
- Создание Мат. аппарата

Движение свободных и несвободных мех. систем

Основная задача механики. Принцип виртуальных перемещен. Принцип Д'Аламбера.

Системы: свободные и несвободные.

Свободная система - мат. точка в поле внешних сил.



Основная задача: решение ур. движения с заданными условиями

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ - свободная (задана $F(\vec{r}, t)$)

$\vec{F} = m\vec{g}$

Найти $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ при заданных условиях.

$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

$\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$

Система мат. точек - совокупность взаимодейств. МТ

N $\qquad \vec r_i(t)$, $i = 1 \dots n$

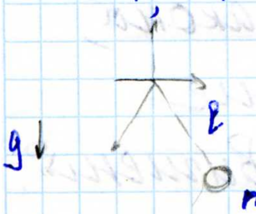
$$\vec F_i = \vec F_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} \vec F_{ji}^{in}$$

Для системы:

$m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i$, $i = 1 \dots n$

(N векторных и 3N скалярных)

$\vec r_i$, $\dot{\vec r}_i$ $\qquad \vec r_i(t_0) = \vec r_{i0}$ $\qquad \dot{\vec r}_i(t_0) = \vec v_{i0}$



$m_l \ll m$

$f = \vec r^2 - l^2 = 0$ - уравнение связи

$\vec r \cdot \dot{\vec r} = 0$ (ограничивающее условие)

$m \ddot{\vec r} = \vec F + \underset{\text{реакция связи}}{\vec R}$

Несвоб:

1. силы, которые априори не заданы (R)
2. не все ур-ия независимы

$f = \dot z - u = 0$

$f = z - ut = 0$

Если система несвободна, то

$m_i \ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \vec R_i$ (3N скалярных ур-ий)

$f_\alpha(\vec r_1 \dots \vec r_n, \dot{\vec r}_1 \dots \dot{\vec r}_n, t) = 0$ $\qquad \alpha = 1, \dots, k$

система стеснена $\underline{k}$ связями.

$\underset{r}{3N} + \underset{R}{3N} - \underset{\text{ур}}{3N} - \underset{\text{св}}{k}$

$s = 3N - k$ - только при определении сост. мы можем решить задачу.

$f_\alpha(\vec r_1 \dots \vec r_n, t) = 0$ - голономные связи (интегрируемые)

$f_\alpha(\bar r_1, \dots \bar r_N) = 0$ - стационарные
$f_\alpha(\bar r_1, \dots \bar r_N, t) = 0$ - нестационарные } удерживающ. (т.к. $= 0$)

$$\begin{cases} m_i \ddot{\bar r}_i = \bar F_i + \bar R_i \\ f_\alpha(\bar r_1 \dots \bar r_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots k \end{cases}$$

$k = 0$ - начальные условия произвольны
свободная система

$k = 3N$ - определяем r, $\ddot r$, R
$k < 3N$ - для того чтобы задача была определена, нужно найти $s = 3N - k$ соотношен.
s - число степеней свободы.
Можно определить для опр. класса.

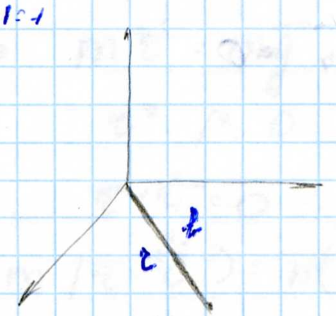
1. Виртуальное перемещение - беск. малое изменение конфиг. системы, удовл. уравнениям связи в тот же момент времени.

$\delta \bar r_i(t)$

$f_\alpha(\bar r_1, \dots, \bar r_N, t) = 0$
$f_\alpha(\bar r_1 + \delta \bar r_1 \dots \bar r_N + \delta \bar r_n, t) = 0$

$$f_\alpha(\bar r_1, \dots, \bar r_N, t) + \sum_i^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar r_i} \cdot \delta \bar r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar r_i} \delta \bar r_i = 0.$$



$f = \bar r^2 - l^2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r} \cdot \delta \bar r = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\bar r$

$2\bar r \cdot \delta \bar r = 0 \qquad x \cdot \delta x + y \delta y + z \delta z = 0$

$f = z - ut = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = (0, 0, 1)$

если связь нестационарная

$d\vec{r}_i$

$f_\alpha(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N, t) = 0$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0.$

Действит. перемещение удовл. и уравнениям движения, и ур-ям связи — единственно возможное.

Идеальные связи — связи, для которых

$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$

Сумма работ реакций связи на виртуальных перемещениях равна 0.

Принцип Д'Аламбера (начало механики)

Мат. предложение, из которого динамика выводится дедуктивно

$\vec{\Phi}_i = 0$ - положение равновесия

$\sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i = 0$ - виртуальная работа

$\vec{\Phi}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$

$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$ (вирт. работа сил) идеальные связи.

Обобщение:

$\vec{\Phi}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i$

система в обобщенном положении равновесия (с ид. связями), если

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\, \delta \vec{r}_i = 0.}$$

// для свободной системы $\delta \vec{r}_i$ - независима =>
$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$

<u>Уравнение Лагранжа</u> с неопределенными множителями (I рода)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (det \neq 0)$$

$$\sum_{a=1}^{k} \lambda_a (t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left[m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \right] \delta \vec{r}_i = 0.$$

Подберем λ_a так, чтобы можно было положить равными нулю коэфф. при зависимых вариациях. => все коэфф = 0.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}$$ (3N+k неизв)
3N ур движения
+

$$f_a (\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, t) = 0$$ k ур связи

Определена

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}$$

// $\sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0$ - условие идеальности связей.

- $m \ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + 2\lambda \vec{r}$ $\qquad R(r)$ - ?

$r^2 - l^2 = 0$

$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$; $\dot{\vec{r}}^2 + \vec{r}\ddot{\vec{r}} = 0$

$m(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) = m(\vec{g} \cdot \vec{r}) + 2\lambda l^2$

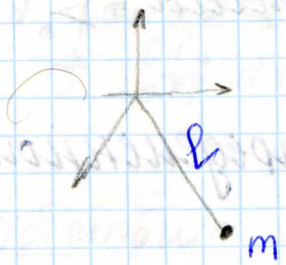
$m(\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}) = m(\vec{g} \cdot \dot{\vec{r}}) + 0$

$$E = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + m(\vec g\,\vec r)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot r^2}{2} - m(\vec g\,\vec r)\right) = 0$$

$$\frac{m\dot r^2}{2} - m(\vec g\,\vec r) = E_0$$

Опр $\lambda(r)$



$\downarrow g$

$$\begin{cases} m\ddot{\vec r} = m\vec g + 2\lambda\vec r \\ f = r^2 - l^2 = 0 \end{cases}$$

условие идеальности:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec r}\cdot\delta\vec r = 0$$

$$\vec r\cdot\delta\vec r = 0$$

$\vec r(x, y, z)$

$$x\cdot\delta x + y\cdot\delta y + z\delta z = 0$$

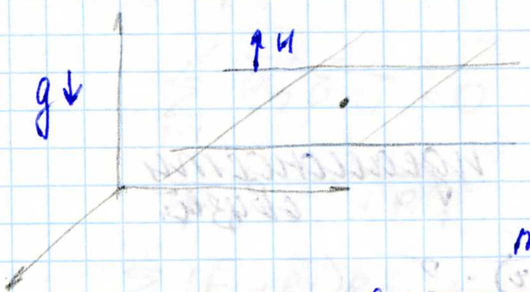
$$r, \theta, \varphi \longrightarrow \delta r, \delta\theta, \delta\varphi$$

$$r\cdot\delta r = 0$$

$$r^2 = l^2$$

возможные перемещения - удовл. ур-нии связи, зависящий от времени

$2\lambda\vec r\cdot\delta\vec r = 0$ - отражает жесткость стержня



$$\vec g = (0, 0, -g)$$

$$m\ddot{\vec r} = m\vec g + \lambda\frac{\partial f}{\partial \vec r}$$

$$f = z - ut = 0$$

$$m\ddot{\vec r} = m\vec g + \lambda\vec e_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\delta\vec r \Rightarrow \delta z = 0$$

$\lambda\vec e_z\cdot\delta_z = 0$ - идеально гладкая пов-сть

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$ – возм. перемещения

$$dz - u\,dt = 0$$

$$z = ut, \quad \dot{z} = u$$

$$R = mg$$

$T = \frac{m\dot{r}^2}{2}$ – кин. энергия

$U = m(\vec{g} \cdot \vec{r})$ – потенц. энергия

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(m(\vec{g} \cdot \vec{r})\right) = mg(\vec{e}_z \cdot \dot{\vec{r}}) = mgu$$

$$E = T - U \qquad \frac{dE}{dt} = mgu$$

$mg\vec{e}_z$

$\parallel \vec{R} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{R} \cdot d\vec{r} \neq 0$

Нестац. связи способна совершать работу, и мех. энергия не сохраняется. Для стационарных связей – сохраняется.

Уравнения Лагранжа независимых координат

вывод из принципа д'Аламбера

к идеальных г. связей:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\,\delta \vec{r}_i = 0$$ – $3N$ компонент

$s = 3N - k$ – независимых координат

$q_1 \ldots q_s$

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots q_s, t)$ – все можно выразить через независимые координаты

$x_j - 3N \quad x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots$

$x_1, x_2, x_3, x_3, \ldots$

Среди $3N$ координат – s-независимы

$$\det\left|\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{i,k=1}^{s} \neq 0$$

$$f_\alpha(\vec{r}_i(q_1,\ldots,q_s,t),t)=0$$

$\alpha = 1,\ldots,k$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

δq_j

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$ – обобщенная скорость

если связи нестационарное

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_k}}_{\delta_{jk}} =$$

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} - \vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\Big|_{\dot{r},q,\dot{q}}$$

$$T(q_1, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_s, t) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$ – обобщенная сила, соотв. координате с индексом j

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0$$

//Пр-во с q... – пр-во конфигураций)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$ – ур-ие Лагранжа II рода

$j=1,\dots,s$

$\dot q_j \quad \dot q_k$

$$\dot{\vec r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$$A=\sum_{j=1}^{s}Q_j\cdot\delta q_j$$

$$\vec F_i=-\frac{\partial U(\vec r_1\dots\vec r_N,t)}{\partial r_i}$$

$$Q_j=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$\mathcal{L}((q),(\dot q),t)=T((q),(\dot q),t)-U((q),t)$ – ф-ия Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

3. Принцип Д'Аламбера:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}_i} - \vec{F_i}) \cdot \delta r_i = 0$$

N, k $\quad s = 3N - k$ обобщенные координаты

$q_1, \dots, q_s$

$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1 \dots q_s, t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$j = 1, \dots, s$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r_i}}^2}{2}$$

$$\dot{r_i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$T((q), (\dot{q}), t)$ $\quad$ $2s+1$ переменная

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

Если только потенциальные сила, то

$$\vec{F_i} = -\frac{\partial U(\vec{r_1} \dots \vec{r_N}, t)}{\partial r_i}$$

$$Q_j = -\frac{\partial U((q), t)}{\partial q_j}$$

$L = T - U$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Диссипативные сила:

$Q_j = Q_j^{p} + Q_j^{d}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = Q_j^{d} = Q_j^{d}((q), (\dot{q}), t)$$

$$Q_j^{d} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{d} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

q_j ?

Пример:
Мат. точка в зад. потенц. поле

$L = m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$

q_1, q_2, q_3.

1. $x; y; z$

$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - U(x, y, z)$

в случае с осевой симметрией

2. ρ, φ, z $\qquad U(\rho, z)$

$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, z)$

$\vec{r} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$

$d\rho \; d\varphi \; dz$

$d\vec{r} = dz\, \vec{e_\rho} + \rho d\varphi \vec{e_\varphi} +$

$d\vec{e_z}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\, d\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z}$

через общую запись:

$L = m\frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$

$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$

3. центральная симметрия

r, θ, φ $\qquad U(r)$

$\vec{r} = \rho\vec{e_r}$

$dr, \; d\theta, \; d\varphi$

$d\vec{r} = dr\vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi \vec{e_\varphi}$

$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) - U(r)$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ – система.

Решение: $\quad q_k = q_k(t, c_1, \ldots, c_s, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_s)$

Структура функции Лагранжа (2S+1 перем). Обобщенный потенциал. Обобщенные потенц. силы.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(\{q\},t)\,\dot{q}_j \dot{q}_k}_{T^{(2)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{S} a_j(\{q\},t)\,\dot{q}_j}_{T^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{T^{(0)}}$$

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$a_{jk} = a_{kj}$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \ldots q_s, t)$$

$T(1)$ и $T(0)$ появляются только в нестацион. случае (нест. связи)

Если стационарна, то $T = T^{(2)}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$e\ m$ $\qquad \vec{E}, \vec{B}$

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{B}]$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) \qquad \varphi(\vec{r},t)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = [\nabla, A] = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$U^{\text{об}} = -\frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) + e\varphi$$

$$\vec{F}_A = -\vec{\nabla}U^{\text{об}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{\text{об}}}{\partial \dot{\vec{r}}} = -e\vec{\nabla}\varphi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) - \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}: \quad -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{e}{c}(\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$= e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\cdot[\nabla\cdot\vec{A}]] = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{B}]$$

$$L = T - U^{об}$$

$U^{об}$ - линейная функция времени.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U^{об}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vec{r}} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} - \frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}}\ \frac{d\partial U^{об}}{dt\partial\dot{\vec{r}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}} = \frac{-\partial U^{об}}{\partial\vec{r}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}} - \frac{\partial U^{об}}{\partial\vec{r}} = \vec{F}_л$$

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = (e\vec{E}\cdot\dot{\vec{r}}) + \overset{=0}{\frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{B}]\cdot\dot{\vec{r}}}$$ для гироскоп. сил

q_1, q_2, q_3

$$Q_j = \vec{F}_л\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}}\right) - \left(\frac{\partial U^{об}}{\partial\vec{r}}\right)\right)\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} \cancel{\frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}}\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{\vec{r}}}\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}((q)(\dot{q}),t)}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial q_j}$$

$$U^{об} = U^{(1)} + U^{(0)} = \sum_{k=1}^{s} U_k((q),t)\,\dot{q}_k + U^{(0)}((q),t)$$

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial q_j} = \frac{\partial U^{0}}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial U_k}{\partial q_j}\,\dot{q}_k +$$

$$+ \frac{d}{dt}U_j = \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial U_j}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_k = -\frac{\partial U^{0}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s}\gamma_{jk}\dot{q}_k$$

$$\gamma_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}$$

$$\sum_{1}^{3}\gamma_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k = 0$$

В отс. диссипативных сил ур-ие Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ сохраняется,

если ф-ия Лагранжа имеет структуру

$$L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)}$$

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)} \text{ - мех. энергия}$$

Обобщенный импульс

Обобщенная энергия. З-ны сохранения.

Первые интегралы уравнений Лагранжа

Мех. система, ф-ия Лагранжа: $2S+1$ пер.

$L(q), (\dot q), t)$

$(q) = q_1 \dots q_s \quad \exists \ \bar q$

$(\dot q) = \dot q_1 \dots \dot q_s \quad \exists \ \bar{\dot q}$

ф-ия Лагранжа задана на пр-венное конфигурац. и касательном расслоении.

$$L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)} \text{ - структура}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + L^{(0)}$$

$U(x, y, z)$ н м: $F = -\frac{\partial U}{\partial \bar r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

$\bar p = m\dot{\bar r}$ - импульс

$\bar p = m\dot{\bar r} = (m\dot x, m\dot y, m\dot z)$

$q_{123} = x, y, z$

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - U(x, y, z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar r}} : \frac{\partial L}{\partial \dot x}, \frac{\partial L}{\partial \dot y}, \frac{\partial L}{\partial \dot z}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$ $\quad m\dot x \quad m\dot y \quad m\dot z$

$\qquad\qquad p_x \quad p_y \quad p_z$

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Пусть $F_1 = 0 \Rightarrow p_1 = p_x = m\dot x = const = m\dot x_0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ - ур-ие Лагранжа для x комп.

$$\frac{d}{dt} m\dot x = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ если $U(y, z)$

в обобщенных координатах

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$ - импульс, сопряженный с координатой

$$p_j((q), (\dot q), t) = \frac{\partial \left(T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)}\right)}{\partial \dot q_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_{jk}((q)t)\dot q_k + a_j - U_j$$

$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d$ - ур-ие Лагранжа для случая, когда есть диссипативные силы.

Пусть дисс. силы равны 0.

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$L(q_1, \dots q_s, \dot q_1 \dots \dot q_s, t)$$

Независимость пот. энергии эквивалентна нез. функции Лагранжа от обобщенных координат

$$p_1 = p_{10}$$

$$p_1 = \sum_{k=1}^{s} a_{1k}\dot q_k + a_1 - U_1$$

$f((q),(\dot q),t)=C$ – первый интеграл ур-ия Лагранжа.

– ф-ия, зависящая от (q) и $(\dot q)$, которая обр. в константу на ур-ии движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j^d$$

Циклическая: обобщенные импульса const.

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\dot q_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\dot q\frac{\partial L}{\partial q_j}\right]=W^d=\sum_{j=1}^{s}Q_j^d\dot q_j$$

$$\dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot q_j\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\ddot q\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot q_j\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\ddot q\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-\dot q_j\frac{\partial L}{\partial q_j}\right]=W^d$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\ddot q_j\right)$$

$$\| \quad \frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\dot q_j\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-L\right]=W^d-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$H((q),(\dot q),t)=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\frac{\partial L}{\partial \dot q}-L$ – обобщ. энергия

$W^d=0$ Если ф-ия Лагранжа явно от времени не зависит

$\frac{\partial L}{\partial t}=0.$

Тогда: $H=H_0$

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)}$$

$$H = \sum_{j=1}^{s} \dot q_j \frac{\partial (T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)})}{\partial \dot q_j} - T^{(2)} - T^{(1)} - T^{(0)} + U^{(1)} + U^{(0)} =$$

$$= 2T^{(2)} + \cancel{T^{(1)}} - \cancel{U^{(1)}} - T^{(2)} - \cancel{T^{(1)}} - T^{(0)} + \cancel{U^{(1)}} + U^{(0)}.$$

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Электромагнитное поле: $\vec A(\vec r, t)$, $\varphi(\vec r, t)$

Ф-ция Лагранжа: $L = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec A \cdot \dot{\vec r}) - e\varphi$

$$U = -\frac{e}{c}(\vec A \cdot \dot{\vec r}) + e\varphi = U^{(1)} + U^{(0)}$$

$$L = T^{(2)} - U^{(1)} - U^{(0)}$$

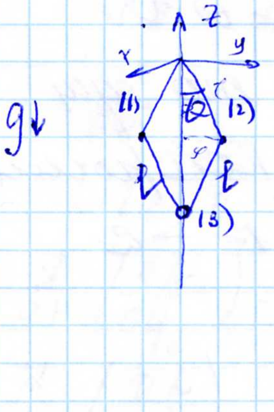
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec r} = 0$$

$$m\ddot{\vec r} = e\vec E + \frac{e}{c}[\dot{\vec r} \cdot \vec H]$$

$$\vec p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} = m\dot{\vec r} + \frac{e}{c}\vec A$$

$$H = \dot{\vec r} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} - L = 2\overset{\frac{m\dot r^2}{2}}{T} + \frac{e}{c}(\vec A \cdot \dot{\vec r}) - \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} - \frac{e}{c}(\vec A \cdot \dot{\vec r}) \underset{+e\varphi}{} = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + e\varphi$$

Пример:



$m_i = m \qquad i = 1, 2, 3$

$\rho_1 = \rho_2 = l$

$f_1 = \rho_1^2 + z_1^2 - l^2 = 0$

$f_2 = \rho_2^2 + z_2^2 - l^2 = 0$

$f_3 = \varphi_1 - \omega t = 0$

$f_4 = \varphi_2 - \omega t = 0$

$f_5 = x_3 = 0$

$f_6 = y_3 = 0$

$f_7 = z_1 - z_2 = 0$

$f_8 = z_3 - (z_1 + z_2) = 0$

Пусть θ - независимая координата

$$T = \frac{m}{2}(\dot\rho_1^2 + \dot\rho_2^2 + \rho_1^2\dot\varphi_1^2 + \rho_2^2\dot\varphi_2^2 + \dot z_1^2 + \dot z_2^2) +$$
$$+ 2m\dot z_1^2$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_{1,2} &= l\sin\theta \\ z_{1,2} &= l\cos\theta \\ \dot\rho_1 &= l\dot\theta\cos\theta \\ \dot z_1 &= -l\dot\theta\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad T = \frac{m}{2}($$

$$h = \underbrace{ml^2(1+2\sin^2\theta)\dot\theta^2}_{T^{(2)}} + \underbrace{ml^2w^2\sin^2\theta}_{T^{(0)}} + \underbrace{4mgl\cos\theta}_{-U^{(0)}}$$

Общее уравнение.

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t}, \text{ где } H = T^{(2)} - T^{(0)} + U(0)$$

в нашем случае: $\frac{dH}{dt} = 0$

$$T^{(2)} + T^{(0)} + U^{(0)} = H_0$$

$$ml^2(1+2\sin^2\theta)\dot\theta^2 - ml^2w^2\sin^2\theta - 4mgl\cos\theta = H_0$$

$$\underbrace{ml^2(1+2\sin^2\theta)\dot\theta^2}_{\geq 0, (=0 \Leftrightarrow \dot\theta = 0)} = H_0 + ml^2w^2\sin^2\theta + 4mgl\cos\theta$$

$$H_0 + ml^2w^2\sin^2\theta + 4mgl\cos\theta \geq 0$$

$$H_0 + ml^2w^2\sin^2\theta + 4mgl\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \dot\theta = 0$$

Если ур-ие имеет два корня, то сущ две граничные точки, между которыми осуществляется движение $1 \leftrightarrow 2$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{H_0 + ml^2w^2\sin^2\theta + 4mgl\cos\theta}{ml^2(1+2\sin^2\theta)}}$$

$$t + c = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{H_0 + ml^2w^2\sin^2\theta + 4mgl\cos\theta}{ml^2(1+2\sin^2\theta)}}}$$ - второй интеграл ур-ия движения.

$E = T^{(2)} + T^{(0)} + U^{(0)}$ в неподвижной системе координат не сохраняется, т.к. связи не стационарны.

H – имеет смысл энергии относительно неинерциальной системы отсчета (вращающейся для данного случая)

в ИСО: $E = \sum_{i=1}^{3} \frac{m\dot{r}_i^2}{2} + U$

в НСО: $E = \sum_{i=1}^{3} \frac{m\dot{r}_i^2}{2} + U_0 + \sum_{i=1}^{3} \frac{m[\vec{w}\vec{r}_i]^2}{2} = T + U^{(0)} + U_ц$

центробежная составляющая.

Принцип наименьшего действия (Гамильтона - Остроградского)

(дифф. принцип - содержит инф о системе в данный момент времени)

$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$

$q_1, \dots, q_s$ – s-мерное координатное пространство R^s

$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}$ – вектор

$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_s b_s$

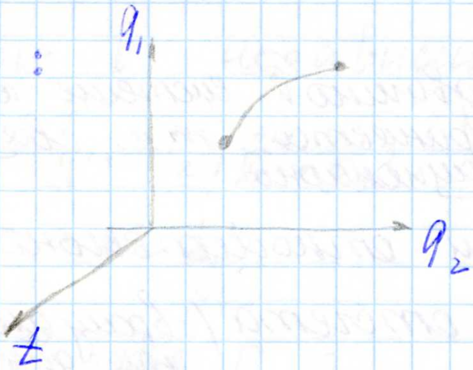
$\frac{\partial f}{\partial \vec{q}}$

$L(\overset{s}{\vec{q}}, \overset{s}{\dot{\vec{q}}}, \overset{1}{t})$ – 2s+1 переменная

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, s$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$

t, x :



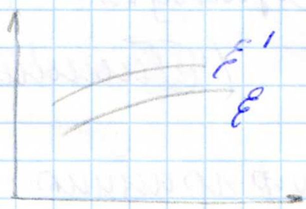
$S+1$ - расширенное конфиг. пр-во

Функционал - ф-ия, введенная на бесконечном пр-ве кривых

$$\xi = \{t, x : x = x(t), t_0 \le t \le t_1\}$$

$$\Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$$ - длина кривой.

Приращение функционала



$$\xi' = \xi + \delta x$$

$$\Phi(\xi+\delta x) - \Phi(\xi)$$

Ф-л дифференцируем, если

$$\Phi(\xi+\delta x) - \Phi(\xi) = \underbrace{F(\xi, \delta x)}_{\text{линейная часть}} + R((\delta x)^2)$$

$\delta x < \varepsilon$

$\delta \dot{x} < \varepsilon$ $\quad R < C\varepsilon^2$

- определен однозначно.

дифференциал функционала = вариация функц. $\delta\Phi$

Пусть задана $L(x, \dot{x}, t)$ - дост. число раз дифф.

$$\xi = \{t, x : x = x(t); t_0 < t < t_1\}$$

$$\Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt$$

$$\Phi(\xi+\delta x) - \Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right\} dt + R(\delta x^2)$$

Интегрируем по частям

$$= \left/ \delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x \right/ = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right\} \delta x \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_1}}_{\text{диф. функционала } \delta\Phi} + R(\delta x^2)$$

$=$

$\xi : \{ t \dots \}$ кривая

ξ - экстремаль функционала, если соотв. $\delta\Phi(\xi, \delta x)$ равен 0 при любых δx

Теорема: Для того, чтобы ξ была экстремалью функционала $L(x, \dot{x}, t)$ на пр-ве кривых, проходящих через $x_0(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой выполнялось следующие ур-ие:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Лемма: Если непр. функция $f(t)$ такова, что для любой δx: $\delta x(t_0), \delta x(t_1) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t)\, \delta x(t))\, dt = 0 \qquad f(t) = 0.$$

$$\delta\Phi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$\vec{q}$ $\quad L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ $\quad 2s+1$ - пер.

$\vec{\xi} = \{ t, \vec{q}, \dot{\vec{q}} = \frac{dq}{dt}; \vec{q} = \vec{q}(t) \}$ - экстр.

$$\Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, dt$$

Необходимо и дост., чтобы вдоль кривой выполнялось ур-ие

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Реальное движение мех. системы с s ст. своб. в пр-ве конфигураций между точками

$t_0\vec{q}_0$ — $t_1\vec{q}_1$ осущ. таким образом, чтобы ф-л S — действие — определенный

$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt$, где L — ф-ия лагранжа, достигает экстремума (минимума)

Ур-ия лагранжа должны быть ковариантны в СК, связанных точечными преобразован.

$$q_i = q_i(q_1', \ldots, q_s', t)$$

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt = 0$$

$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L + \frac{d}{dt}\Phi(\vec{q}, t)$ — не изменяет ур-ия Лагранжа.

$$\delta S' = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d\Phi(\vec{q}, t)}{dt}\right]dt = \delta S + \delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\Phi}{dt}dt =$$

$$= \delta S + \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{q}}\cdot\delta\vec{q}\,\Big|_{t_0}^{t_1} = \delta S$$

Ф-ия Лагранжа определена до ф-ии, которую можно определить как полную

свойство ковариантности относительно точечных преобразований конф. пр-ва.

Пример: мат. точка на гладкой плоскости

Масса m $\quad q_1 = x, \; q_2 = y$

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}\,dt$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = At + B \\ y = Ct + D \end{cases}$$

$\dot x = A, \quad \dot y = C$

$x_{1,0} = A t_{1,0} + B$

$y_{1,0} = C t_{1,0} + D \qquad A = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \quad C = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}$

$$S = \frac{m}{2}\frac{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}{(t_1-t_0)^2}(t_1-t_0) = \frac{m}{2}\frac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}{(t_1-t_0)}$$

кв. система:

t_0 

$A \sim \int \mathcal{D}q\, e^{i\frac{S}{\hbar}}$

S-действие: $S = \int_{t_0}^{t_1} L((q),(\dot q),t)\,dt$

Делим $[t_0\ t]$ на N равных частей.

$(t_1 - t_0) = N\varepsilon = N\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}$

чтобы переход происходил в фазе необходимо, чтобы S было минимальным.

Интегрирование ур-ия Лагранжа. I и II интегралы движения.

$f_j((\dot q),(q),t) = c_j, \quad j = 1 \dots s$

Разрешимость отн. $(\dot q)$: $\det\left|\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right| \neq 0$

s: $F_j((q),t,(c)) = \tilde c_j$

$\det\left|\frac{\partial F_j}{\partial q_i}\right| \neq 0 \Rightarrow q_k = q_k(t,(c),(\tilde c))$

Интегрирование системы с одной степенью свободы

$L = \frac{a(q,t)}{2}\dot q^2 - U(q,t)$

$a(t) > 0 \qquad U(t)$

$L = \frac{a(t)\dot q^2}{2}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = a(t)\dot q = c$ — первый интеграл.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{c}{a(t)}$$

$q(t) = \int \frac{c}{a(t)} dt + c_1$ - второй интеграл движения

$a(q)$ $U(q)$

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q)$$

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

$\frac{a(q)\dot{q}^2}{2} + U(q) = H_0$ - I интеграл движения

$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(H_0 - U(q))}{a(q)}}$ $H_0 = U(q)$, q - (корни) точки остановки

$\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(H_0 - U(q))}} = dt \Rightarrow$

$\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(H_0 - U(q))}} = t + c$ - II интеграл движения

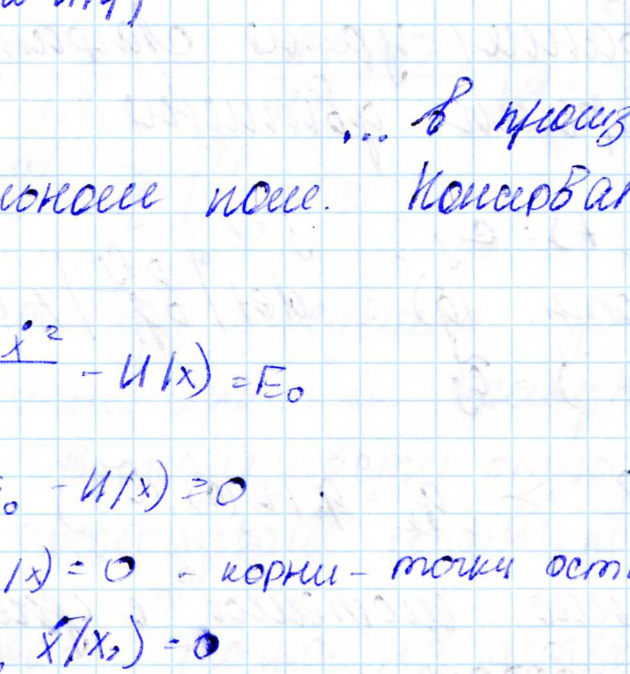
... в произвольном потенциальном поле. Консервативная система.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) = E_0$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - U(x) \geq 0$$

$E_0 - U(x) = 0$ - корни - точки останова

$\dot{x}(x_1)$, $\dot{x}(x_2) = 0$



I инфинитное дв.

II недоступна для частицы с E_0

Период колебаний

$$2\int^{x_2(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0-U(x))}} = T(E_0)$$

$U(E_0)$ $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = f(x)$

$$\Delta t_{x_1,x_2} + \Delta t_{x_2,x_1} = 2\Delta t_{x_1,x_2} = T(E_0)$$

IV – классически недоступна

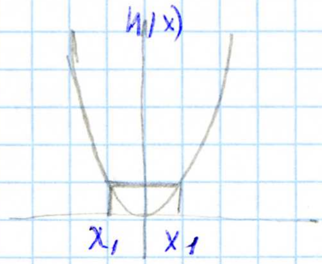
V (аналогична I) – инфинитное движение

$$W_{III\to I} \sim e^{-\frac{2}{\hbar}\int_x^x \sqrt{2m(U(x)-E_0)}\,dx}$$

Пример:

Гарм. осциллятор:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \qquad m,k>0$$



$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - \frac{kx^2}{2}$$

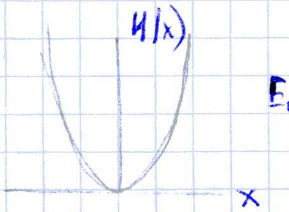
$E_0 \geq 0$ (если 0, движение нет)

$x=0$, $\dot{x}=0$

$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x}=0$

$$x_{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

$$\pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0-\frac{kx^2}{2}\right)}} = t - t_0$$



$$E_0 \geq U(x) \quad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0$$

$E_0 - U(x) = 0$ - точки остановки

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{kx^2}{2}\right)}$$

$$x_{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

$$\dot{x}(x_{\pm 1}) = 0$$

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{kx^2}{2}\right)}} = t + t_0$$ - функция координат - II интеграл движения

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_1^2 - x^2}} = t - t_0$$

$$\arcsin\frac{x}{x_1}\Big|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)$$

$$\arcsin\frac{x}{x_1} - \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0), \quad \alpha = \arcsin\frac{x_0}{x_1}$$

$$x(t) = x_1 \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \alpha\right]$$ - колебания

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T(E_0) = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{kx^2}{2}\right)}}$$

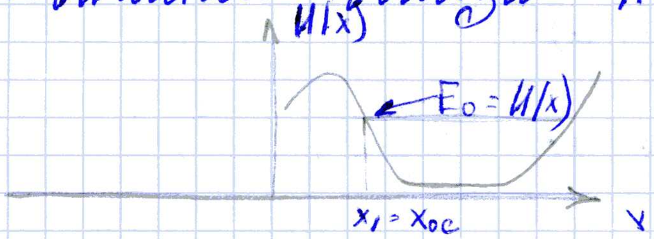
$$T(E_0) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x_1^2 - x^2}}$$

$$4\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\frac{x}{x_1}\Big|_0^{x_1} = T(E_0)$$

$$T(E) = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Движение носит колебат. характер, если есть две точки останови

Движение вблизи точек остановки.



$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{oc}} \neq 0 \qquad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{oc}} = 0$$

$$x - x_1 \leq x_1$$

$$x_0 - x_1 \leq x_1$$

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = t - t_0$$

$$U(x) = U(x_1) \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U(x) = U(x_1) - F(x - x_1)$$

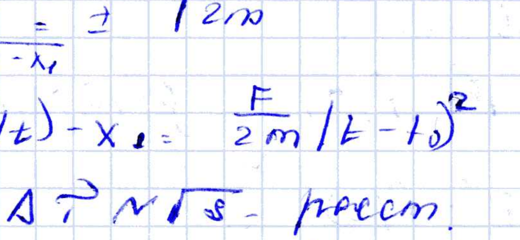
$$U(x): \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} = \sqrt{\frac{2F}{m}}(t - t_0)$$

$$2\sqrt{x - x_1}\Big|_{x_0}^{x} = \pm\sqrt{\frac{F}{2m}}(t - t_0)$$

$$2\sqrt{\frac{x'}{x - x_1}} = \pm\sqrt{\frac{F}{2m}}$$

$$x(t) - x_1 = \frac{F}{2m}(t - t_0)^2$$

$\Delta T \sim \sqrt{s}$ - расст.



$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \pm\int \frac{dx^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \text{t-}$$

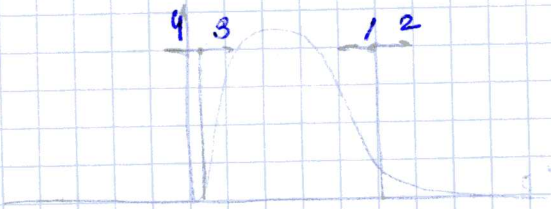
$$U(x) = U(x_1) + \frac{1}{2} U''_{x=x_1} (x-x_1)^2$$

$$\pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\frac{U''(x_1)}{2}(x-x_1)^2}} = t - t_0$$

$$D < a = \sqrt{-\frac{U''}{m}}$$

$$\ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \pm a(t-t_0)$$

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) e^{\pm a(t-t_0)}$$



$$\dot{x}(t_0) = \pm a(x_0 - x_1)$$

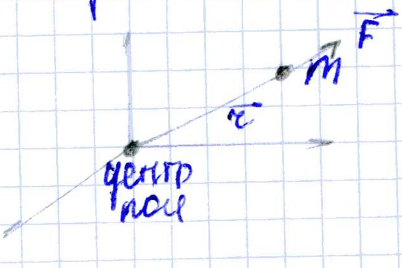
$$\dot{x}_0$$

1, 3: $x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) e^{-a(t-t_0)}$

2, 4: $x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) e^{a(t-t_0)}$

частица приближается к точке максимума потенциального барьера только асимптотически

Движение частицы в центрально-симметричном поле.



$|\vec{F}| = f(\rho)$ ρ - расстояние

$$\vec{F} = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$U(r) \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r)$$

интегралы движения $\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = E_0$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ не сохр.

$$[\bar{r}\cdot m\ddot{\bar{r}}] = [\bar{r}\cdot f(r)\frac{\bar{r}}{r}] = 0$$

$\bar{L} = [\bar{r}\, m\dot{\bar{r}}]$ — момент импульса

$$[\bar{r}\cdot m\ddot{\bar{r}}] \quad \frac{d\bar{L}}{dt} = \underbrace{\cancel{[\dot{\bar{r}}\, m\dot{\bar{r}}]}}_{0} + [\bar{r}\cdot m\ddot{\bar{r}}]$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = \bar{L}_0$$

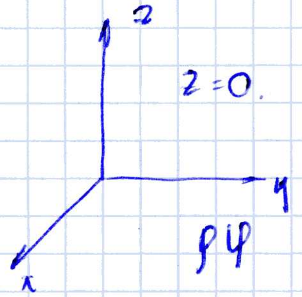
$$L = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = m(y\dot{z} - z\dot{y})\bar{e}_x + m(z\dot{x} - x\dot{z})\bar{e}_y + m(x\dot{y} - y\dot{x})\bar{e}_z$$

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}) = L_{0x}$$
$$m(z\dot{x} - x\dot{z}) = L_{0y}$$
$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_{0z}$$

$\det\left|\frac{\partial L_i}{\partial x_j}\right| = 0 \Rightarrow$ II нез. уравнения.

$\bar{L}\cdot\bar{r} = 0 \qquad L\cdot\dot{\bar{r}} = 0$

$L_{0x}x + L_{0y}y + L_{0z}z = 0$ — II интеграл движения.



$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E_0$$

$$|\bar{L}| = \sqrt{L_{0x}^2 + L_{0y}^2 + L_{0z}^2}$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} = L_0 \qquad \dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho^2}$$

$0 < \rho < \infty$ (φ монотонна)

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{L_0^2}{m^2\rho^2}\right) + U(\rho) = E_0$$

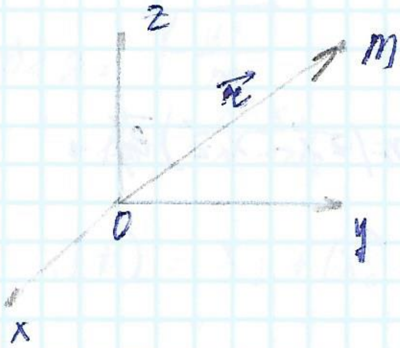
$$U_{эфф} = U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

центроб. энергия.

$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{эфф} = E_0$$

18: Решение ур. движения в центр.-симметр. поле. Основные свойства движения. Классификация траектории.

1.



$U(r)$

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U = E_0$$ - сохр. энергии

$$m[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}] = \vec{L}_0 = (L_{0x}, L_{0y}, L_{0z})$$

сохр. вектора момента импульса ⇒ 3 независимых первых интеграла движения. (E_0, L_{0x}, L_{0y})

$$(\vec{L}_0\cdot\vec{r}) = L_{0x}\cdot x + L_{0y}\cdot y + L_{0z}\cdot z = 0$$

Плоскость движения ортог. моменту имп.

Направим L_0 по z, движение в (x, y)

$U(r)$, $r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$r = \rho$ - в цилиндр. координатах

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E_0 \\ m\rho^2\dot{\varphi} = L_0 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho^2}$$

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - U_{эфф}(\rho, L_0)$$

$$U_{эфф} = U(\rho) + \underbrace{\frac{L_0^2}{2m\rho^2}}_{\text{цб энергия}}$$

$$0 \le \rho < \infty$$

$$\pm\int\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф}(\rho L_0))}} = t + C_5$$ - пятый интеграл движения

$$\varphi = \int \frac{L_0}{m\rho^2(t)}\,dt + C_0$$ – шестое

Получаем 3 нез. I интеграла движения и 3 нез. II интеграла движения.

$E_0 = U_{эфф}(\rho, L_0)$

$\dot\rho(\rho_{корни}) = 0$

$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф}(\rho, L_0))}$

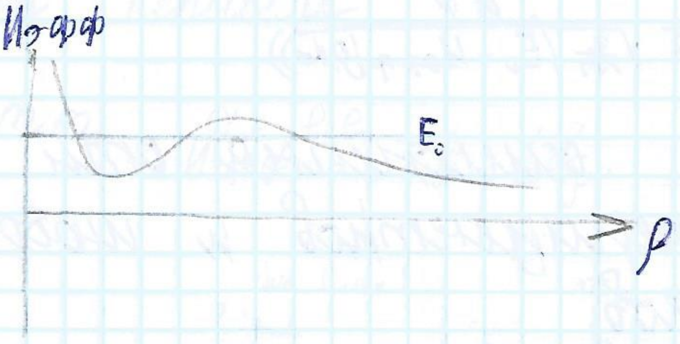
$\dot\varphi$, $\rho\dot\varphi \neq 0$ происходит движение в радиальном направлении

Точки поворота определяются E и L.

$\dot\rho = \dot\rho(\varphi(t)) = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$

$\pm\int \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф})}} = \varphi + C_0'$

2:



$|\vec L_0| \neq 0$

// $\vec L_0 = 0$ $\quad \vec r \parallel \dot{\vec r} \quad \dot\varphi = 0$, $\varphi = const$ –

– прямая линия, прох. через центр поля.

$U_{эфф}(\rho, L_0)\big|_{\rho\to0} \to \infty$ (для поле притяжения (УБ) отталкивания)

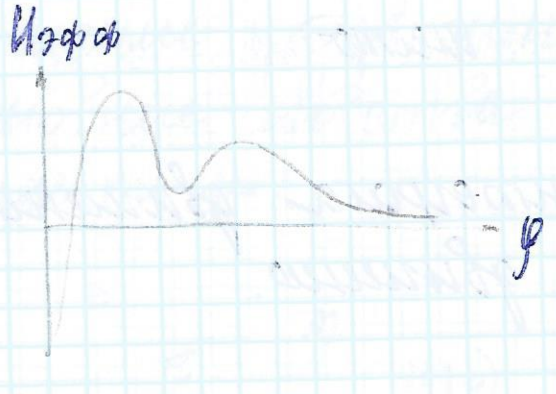
$U(\rho)\big|_{\rho\to0} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\big|_{\rho\to0}$

Поле притяжения:

$U(\rho)\big|_{\rho\to0} \sim -\frac{a}{\rho^2}$

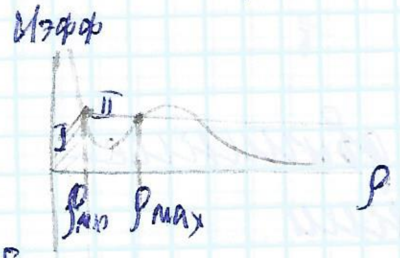
$D = a \qquad \frac{L_0^2}{2m} > a$

$U_{эфф}\big|_{\rho\to0} \sim \left(\frac{L_0^2}{2m} - a\right)/\rho^2$



$\frac{L^2}{2m} < a$

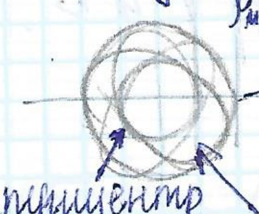
если $D<a$, центробежный барьер есть всегда.



m, L_0, E_0

$\rho_{min} < \rho < \rho_{max}$

$$T_\rho = 2\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф}(\rho, L_0))}}$$



колебания в кольце

$$\varphi + C_0 = \cancel{\pm}\int \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф}(\rho, L_0))}}$$

Траектория симметрична отн. любого из перицентров и любого из апоцентров.

$\Delta\varphi$ - угол между двумя послед. перицентрами (или апоцентрами)

$$\Delta\varphi = 2\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{эфф}(\rho, L_0))}}$$

Пусть $\Delta\varphi = 2\pi\frac{k}{n} = 2\pi\gamma$

n — повторения движений в радиальном направлении

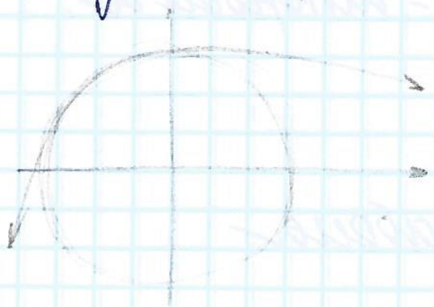
2 вида ц-с полей, в которых траектории замкнуты независимо от E и L

$U(r) = \frac{a}{r}$ — поле ньютоновского типа

$U(r) = kr^2$

III классически недостижимая область

IV — движение инфинитно



1. φ
2. $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}\, d\vec{r}\,]$

$|\vec{L}_0| = 2m\frac{dS}{dt}$

3. Если эфф. энергия при $\rho \to 0$ стремится к бесконечности, то $\rho = 0$ недостижима

Движение частицы в полях вида

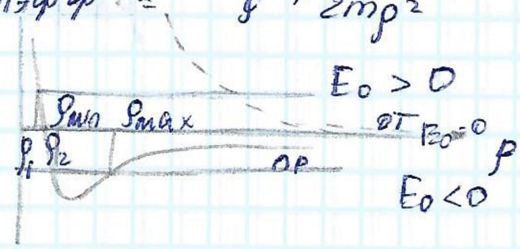
$U(r) = \pm\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$

Задача Кеплера.

$\alpha = G m_1 m_2$, $\alpha = e_1 e_2$

$U_{эфф} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$

m, L_0, E_0



$$\varphi + C = \pm\int \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 \pm \frac{|\alpha|}{\rho} - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

|| $u = \frac{1}{\rho}$

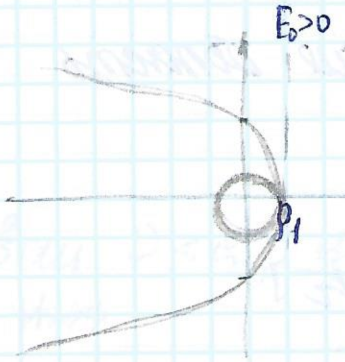
$$= \pm(-)\int \frac{d(u \mp \frac{1}{p})}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - (u \mp \frac{1}{p})^2}}, \quad p = \frac{L_0^2}{m|\alpha|}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}$$

$$\varphi + C = \arccos\frac{\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{p}}{\frac{e}{p}}$$

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{\pm 1 + e\cos(\varphi + C)}$$ — ур-ие конического сечения

р - параметр, е - эксцентриситет
угол φ отсчитывают от перицентра:

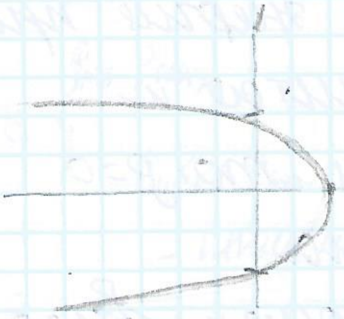


$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

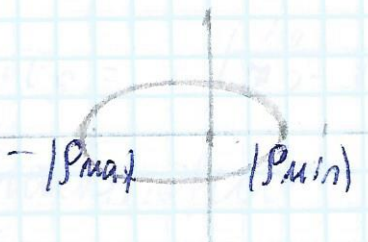
$e>1$

- гипербола.

$E=0$, $e=1$ - парабола



$E<0$, $e<1$ - эллипс



$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e}$$

$$\rho_{max} = \frac{p}{1-e}$$

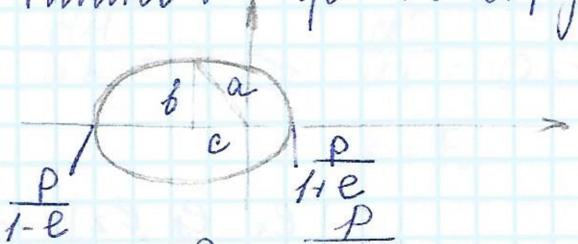
Законы Кеплера. (для финитного движения)

$U(r) = -\frac{\alpha}{r},\ \alpha > 0$

$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$

$e < 1 \Rightarrow E_0 < 0$

1. Планеты дв. по окружности, но солнце - не в центр.



2. За равные промежутки времени планета заметают равные площади

$a = \frac{p}{1-e^2}$

$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

Движение близко к окружности, если $e \ll 1$.

3. Период обращения планет вокруг солнца зависит только от большой полуоси. (пропорционален кубу)

$L = 2m\frac{dS}{dt}$

$LT = 2m\int dS$

$LT = 2m\pi ab$

$L^2T^2 = 4m^2\pi^2a^2b^2 \quad // b^2 = ap$

$L^2T^2 = 4m^2\pi^2a^3p = 4m^2\pi^2a^3\frac{L^2}{m\alpha}$

$T^2 = \frac{4m\pi^2a^3}{\alpha}$

$a = \frac{L_0^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{1-1-\frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}} = \frac{L_0^2}{-\frac{2E_0L_0^2}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2E_0}$

Большая полуось зависит только от энергии.

Вектор-интеграл Лапласа.

$U(r) = \frac{\alpha}{r}$

Кроме инт. движения E и P существует еще один однозначный интеграл движения

$\vec{J} = [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha}{r}\vec{r}$

$$\dot{\vec{J}} = [\ddot{\vec r}\,\vec L] - \frac{\alpha\dot{\vec r}}{r} + \frac{\alpha(\vec r\cdot\dot{\vec r})\vec r}{r^3} = 0$$

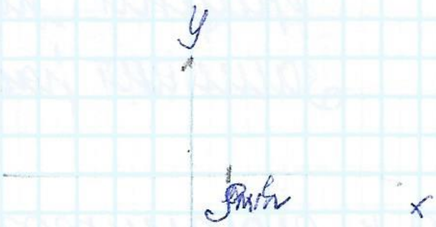
$$m\ddot{\vec r} = -\frac{\alpha\vec r}{r^3}$$

$$L = m[\vec r\cdot\dot{\vec r}] \Rightarrow \vec r(m\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}) - \dot{\vec r}(m\ddot{\vec r}\,\vec r)$$

$$-\frac{\alpha(\vec r\dot{\vec r})}{r^3}\vec r + \frac{\alpha\dot{\vec r}}{r}$$

$\vec J = \vec J_0$ т.к. $\dot{\vec J} = 0$

$\vec J \cdot \vec L_0 =$



$$J = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \rho_{min}\dot\varphi & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{vmatrix} - \frac{\alpha\rho_{min}}{\rho_{min}} = \vec e_x(\rho_{min}\dot\varphi L_0 - \alpha)$$

J направлен от центра к перицентру.

$\rho_{min} = \frac{p}{1+e}$, $\dot\varphi_{min} = \frac{L_0}{m\rho^2_{min}}$

Аддитивные интегралы движения в замкнутой системе и их связь со свойствами физ. пространства-времени. Инвариантность ф. Лагранжа относительно группы движений Галилея.

N мат. точек

Замкнутая система с парными взаимод.

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} - U^{in}$$

$$U^{in} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(|\vec r_i - \vec r_j|)$$

Аддитивные - могут быть представлены в виде суммы интегралов подсистем.

$$t' = t + \underline{\tau}_{пост}$$

$$\delta L = L(t') - L(t)$$

$\delta L = \tau \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (если L не зависит от времени явно)

Функция Лагранжа остается неизменной

Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то обобщенная энергия сохраняется.

$$H = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} + U^{in} = E$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

$$E = E_0$$

Если система замкнута, то

I интеграл движения: $\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} + U^{in} = E_0$

II если незамкнута: $L' = L + U^{ext}$

$$E = E^{in} + U^{ext}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{R}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \quad " \quad \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0.$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} + U^{ext} + U^{in} = E_0$$

$$\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i + \vec{\delta}; \quad \delta L = L(\vec{r} + \vec{\delta}) - L(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\delta L = \vec{\delta} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

$$m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{p}_i$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \vec{P}; \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$$

полный импульс

$\frac{d}{dt} P = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$ (в замк. системе)

I интеграл: $\vec{P} = \vec{P}_0$ 3 - Ix интеграла

$\sum^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$ всего 4

Две системы отсчета S и S'

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i{}' + \vec{V}$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

↑ закон преобразования импульсов

$$\vec{P}' = 0$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M}$$

т.к. $V = const$, то интегрируем.

$$\vec{R}(t) = \vec{V}t + \vec{R}_0 \quad \text{– 3 II интеграла движения.}$$

$$\vec{R}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$ (среднее взвешенное) центр масс

$$\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(t_0)$$

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U^{ext}}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}$$

Сохраняются отдельные компоненты импульса.

Вектор бесконечно малого поворота $\delta\vec{\varphi}$

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}_i]$$

$$\dot{\vec{r}}_i{}' = \dot{\vec{r}}_i + [\delta\vec{\varphi} \cdot \dot{\vec{r}}_i]$$

$$\delta L = L(\vec{r}_i{}', \dot{\vec{r}}_i{}') - L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}}_{\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i} [\delta\vec{\varphi} \cdot \dot{\vec{r}}_i] + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}}_{\dot{\vec{p}}_i} [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}_i] \Big) =$$

$$= \delta\vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = \delta\vec{\varphi} \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot m_i \dot{\vec{r}}_i]$$

$$\delta L = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \text{3 интегралов}$$

$S \quad S' \quad \overline{a}$

$$\overline{r_i} = \overline{r_i}' + \overline{a}$$

$$\overline{L} = \overline{L}' + [\overline{a} \cdot P]$$

$S \quad S' \quad \overline{V}$

$$\overline{L} = \overline{L}' + \underline{?}$$

ЗС рассм. в реальном пр-ве-времени имеет 7 I интегралов движения и 3 II инт. движения.

I Одпор. импульса пространство изотропность.

II $$\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r_i}}{M} = \underbrace{\frac{\sum^{N} m_i \dot{\overline{r}}_{i0}}{M}}_{\overline{V}} t + \overline{R_0}$$

Система дв. относительно другой с $\overline{V} = const$

$$\overline{r_i} = \overline{r_i}' + \overline{V} t$$

$$\delta L = \sum L(r_i \dot{r}_i) - L(r_i', \dot{r}_i') = \sum_{i=1}^{N} (m_i \dot{\overline{r}}_i' \cdot \overline{V}) + \frac{M \overline{V}^2}{2} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r}_i' \overline{V} + \frac{m \overline{V}^2}{2} t \right)$$

$$\delta L = 0$$

$L = L'$ - формиинвариантность!

$$\left.\begin{aligned} \overline{r_i} &= \overline{r_i}' + \overline{b} + A(\delta\varphi)\overline{r_i} + \overline{V} t \\ t' &= t + T \end{aligned}\right\}$$ ур-ия Лагранжа остаются форминв.

Ур. инвариантны относительно 10 параметров-группы движений Галилея.

Механическое подобие, теорема Вириала

N. Система однородна, если

$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$

$\vec{r}_i' = \alpha \vec{r}_i$

$U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$

k - показатель однородности.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n)$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \alpha^2 \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2\beta^2} - \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N),$$

если $t' = \beta t$;

$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

$$L' = \alpha^k \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)\right] = \alpha^k L$$

L' и L приводят к одним и тем же ур-ниям движения.

Поле U - однородное позволяет движения по геометрически подобным траекториям, причем $\frac{t'}{t} = \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$

1. Свойство изохронности:

Если $k = 2$

$$\frac{t'}{t} = const$$

Период не зависит от амплитуды

2. 3-й закон Кеплера:

$k = -1$

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$$

3. $k = 1$

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

$$\frac{p'}{p} \approx \frac{v'}{v} = \frac{l'}{l} \cdot \frac{t}{t'} = \frac{l'}{l} \cdot \left(\frac{l}{l'}\right)^{1-\frac{k}{2}} = \underline{\left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}}$$

Теорема Вириала

N точек, движение финитно

$$G = \sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \cdot \overline{p_i}$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\overline{r_i}} \cdot \overline{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \dot{\overline{p_i}} =$$

$$= \left/ \dot{\overline{p}} = \overline{F_i} \right/ = 2T + \sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \cdot \overline{F_i}$$

$$\overline{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\, dt$$

$$\left.\frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}\right|_{\tau \to \infty} = 2\overline{T} + \overline{\sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \overline{F_i}}$$

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \overline{F_i}} \leftarrow$$ Вириал сил Клаузиуса

$$\overline{F_i} = -\frac{\partial U}{\partial \overline{r_i}}$$

$$2\overline{T} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \overline{r_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \overline{r_i}}} \xrightarrow{\text{теорема Эйлера}} k\overline{U}$$

$$2\overline{T} - k\overline{U} = 0$$

$$\overline{T} - \frac{k}{2}\overline{U} = 0$$

$$\overline{T} + \overline{U} = E$$

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2} E$$

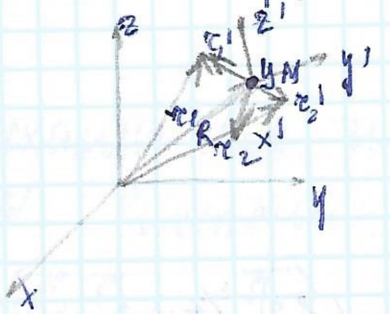
$$\overline{T} = \frac{k}{k+2} E$$

Задача двух тел.

Замкнутая система:

m_1, m_2, взаимодействие подч. III з-ну Ньютона

$U(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$



$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}$$

$$s=6$$

$$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_0$$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V}_0, \quad \vec{V}_0 = \frac{\vec{P}_0}{M}$$

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1{}'$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2{}'$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1{}' = \vec{F}_{21}{}'$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2{}' = \vec{F}_{12}{}'$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}'$$

$$\vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' = \vec{r}$$

$$m_1\vec{r}_1{}' + m_2\vec{r}_2{}' = 0$$

$$\vec{r}_1{}' = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2{}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\varphi + C_1 = \pm \int \frac{L_0'}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U(r)) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}}} \qquad // \, r \equiv \rho$$

$$t + C_2 = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U(r)) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}}}$$

$$\vec{L}' = \mu [\vec{r}\, \dot{\vec{r}}] = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' = [\vec{r}_1' m_1 \dot{\vec{r}}_1'] + [\vec{r}_2' m_2 \dot{\vec{r}}_2']$$

$$\parallel$$

$$\vec{L}_0', \quad (\vec{L}_0' \vec{r}) = 0$$

$$E_{\text{пол}} = E_{\text{цм}} + E'$$

$$E' = T_1' + T_2' + U(r) = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2}{2} + U(r) = E_0'$$

Всего 12 независимых интегралов движения.

$$\vec{V}_0 = \frac{P_0}{M} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_{10} + m_2 \dot{\vec{r}}_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2$$

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} + (\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1) + (\vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2) - U(r)$$

$$U^{ext}(r_1, r_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2) = -(\vec{r}_1, \vec{F}_1) - (\vec{r}_2, \vec{F}_2)$$

$$-\frac{\partial U^{ext}}{\partial r_{1,2}} = \vec{F}_{1,2}$$

Переходим к другим координатам:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$L = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\vec{R} + \left(\frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}\right)\mu \vec{r} - U(r)$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ур-ие Лагранжа:

$$\begin{cases} M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \mu \ddot{\vec{r}} = \mu \left(\frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}\right) - \frac{\partial U}{\partial r} \end{cases}$$

Для mg: $M\ddot{\vec{R}} = M\vec{g}$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Для конденсатора: $\vec{F}_1 = e_1\vec{E}$

$$\vec{F}_2 = e_2\vec{E}$$

~~Решение задачи двух тел в предмо~~

S

m_1, m_2

r_1, r_2

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{R} \mp \frac{m_{2,1}}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{V}_{12} = \vec{V} \mp \frac{m_{2,1}}{m_1+m_2}\vec{V}$$

$$R = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{r} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

S'

$$\vec{r}_{1,2}' = \mp \frac{m_{1,2}}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{V}_{1,2}' = \mp \frac{m_{1,2}}{m_1+m_2}\vec{V}$$

Задача упругого рассеяния.

два простр. разделенных пучка частиц.

$\vec{v}_1 \rightarrow$ $\quad \leftarrow \vec{v}_2$

$m_1, \vec{v}_1$ $\quad m_2, \vec{v}_2$

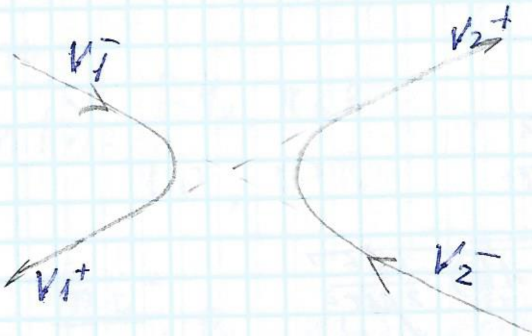
$t = -\infty$: $\vec{v}_1^-, \vec{v}_2^-$

$t = +\infty$: $\vec{v}_1^+, \vec{v}_2^+$

$U_{вз} = 0$.

V всюду – однократное взаимодействие.

Взаимодействие пучков подчиняется III з-ну Ньютона – задача двух тел.



$$\vec{v}_1^+ = \vec{V} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^+$$

$$\vec{v}_2^+ = \vec{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}^+$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1^- + m_2\vec{v}_2^-}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}^+ = \vec{v}_2^+ - v_1^+$$

З-н сохранения энергии в системе центра масс:

$$\frac{\mu\vec{v}^2}{2} + U\Big|_{r\to\infty} = \frac{\mu v^{+2}}{2} + U\Big|_{r\to\infty}$$

$$v^+ = v^-$$

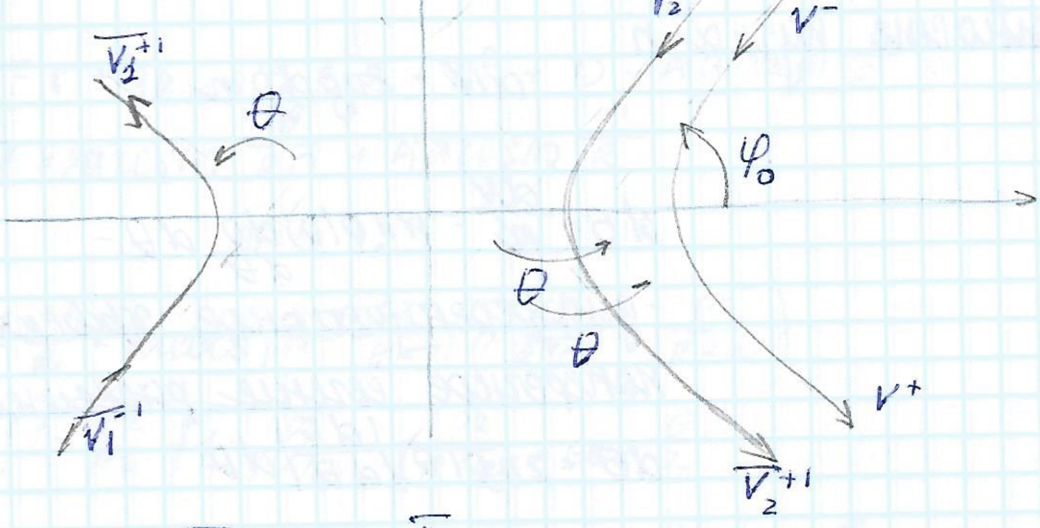
$$\vec{v}^+ = v^-\vec{n}_\theta$$

$$\vec{v}_1^+ = \vec{V} - \frac{m}{m_1+m_2} v^-\vec{n}_\theta$$

$$\vec{v}_2^+ = \vec{V} - \frac{m}{m_1+m_2} v^-\vec{n}_\theta$$

$m_1 = m_2 = m$

$$U(r) = \frac{e^2}{r}$$



$$\vec{r}_1' = -\frac{\vec{r}}{2}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\vec{r}}{2}$$

$$\theta = 2\varphi_0$$

$$\varphi_0 = \int \frac{L_0'}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U(r)) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}}}$$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L_0'}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U(r)) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}}}$$

$$E_0' = \frac{\mu v'^2}{2}$$

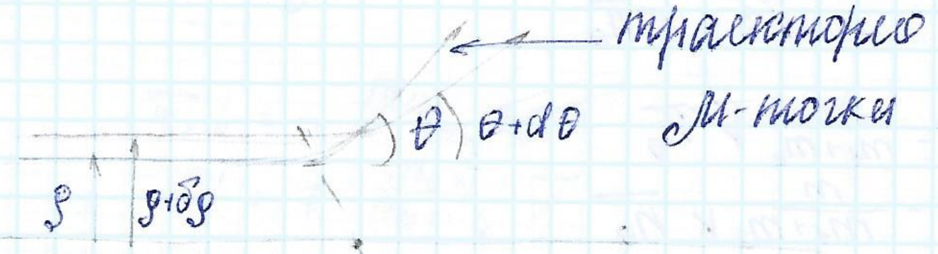
$$L' = \mu[\vec r, \vec v]$$

$$L_0' = \mu \rho v; \quad \rho = r_\infty \sin(\widehat{\vec r, \vec v})$$

ρ - прицельный параметр.

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{\mu v^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$



Будем считать такую $[\theta, \theta + d\theta]$

плотность пучка n

$$dN = 2\pi \rho\, d\rho \cdot n$$

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi \rho(\theta)\, \underline{d\rho}$$

- дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi \rho(\theta) \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta$$

Полное сечение рассеяния:

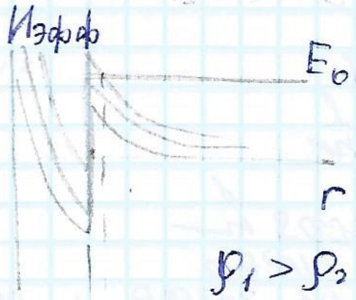
$$\sigma^{tot} = \int_{(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_{(\theta)} 2\pi\rho(\theta) \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta$$

найти сечение на внешнем поле - сила

m,

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r<R \\ 0, & r>R \end{cases}$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E_0 - U(r) - \frac{L_0^2}{2mr^2} \geq 0$$



$$U_{эфф} = -U_0 + \frac{E_0}{r^3}$$

$$U_{эфф} = \frac{E_0 \rho^2}{r^2}\bigg|_{r=1}$$

$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

$$\frac{E_0 \rho_2}{R^2}$$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{R} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{n^2 - \frac{\rho^2}{r^2}}} - 2\int_R^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$$n^2 = 1 + \frac{U_0}{E_0}$$

$$r_{min} = \frac{\rho}{n}$$

$$\theta = \pi + 2\arcsin\frac{\rho}{rn}\bigg|_{r_{min}}^{R} + 2\arcsin\frac{\rho}{r}\bigg|_R^{\infty} =$$

$$\theta = \pi + 2\arcsin\frac{\rho}{Rn} - \pi + 0 - 2\arcsin\frac{\rho}{R} =$$

$$\theta = 2\arcsin\frac{\rho}{Rn} + 2\arcsin\frac{\rho}{R}$$

$n>1$

$$-\frac{\theta}{2} = \arccos\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2n^2}} + \frac{\rho^2}{R^2n}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2n^2}} + \frac{\rho^2}{R^2n} = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\rho^2}{R^2n^2} + \cancel{\frac{\rho^4}{R^4n^2}} = \cos^2\frac{\theta}{2} - 2\frac{\rho^2}{R^2n}\cos\theta + \cancel{\frac{\rho^4}{R^4n^2}}$$

$$\rho^2(n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + 1) = R^2n^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$\rho_{max} = R$ Максимальный угол рассеяния

$$R^2(n^2 - 2n\cos\frac{\theta_m}{2} + 1) = R^2 n^2 \sin^2\frac{\theta_m}{2}$$

$$n^2 - 2n\cos\frac{\theta_m}{2} + 1 = n^2\sin^2\frac{\theta_m}{2}$$

$$n^2\cos^2\frac{\theta_m}{2} - 2n\cos\frac{\theta_m}{2} + 1 = 0$$

$$(n\cos\frac{\theta_m}{2} - 1)^2 = 0$$

$$n\cos\frac{\theta_m}{2} = 1$$

$$\cos\frac{\theta_m}{2} = \frac{1}{n}$$

$$\theta_{max} = 2\arccos\frac{1}{n}$$

$$d\sigma(\theta) = \pi R^2 n^2 \frac{\sin^2\theta/2}{n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + 1} \cdot d\rho$$

$$\rho^2 = R^2 n^2 \frac{\sin^2\theta/2}{n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + 1}$$

$d\rho = $ /дифф./

$$\begin{cases} d\sigma(\theta) = 2\pi\rho\, d\rho, & 0 \le \theta \le \theta_m \\ d\sigma(\theta) = 0, & \theta_{max} < \theta < \pi \end{cases}$$

Рассеяние частиц в электростатич. взаимодействии

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta$$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$m_1 \vec{v}_1$ $\qquad$ $m_2 \vec{v}_2$

$$v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$$

$$U(r) = -\frac{a}{r} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$a > 0$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2a}{r\mu v^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$$x = \frac{\rho}{r} \qquad x_{min} = 0 \to x_{max}$$

$$x^2 + \frac{2a x}{\rho \mu v^2} - 1 = 0$$

$$x_{max} = \frac{a}{\rho \mu v^2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{\rho \mu v^2}\right)^2}$$

$$\theta = \pi - 2\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2ax}{\rho \mu v^2} - x^2}}$$

$$\theta = -2 \operatorname{arctg} \frac{a}{\rho \mu v^2}$$

$a > 0 \quad \theta < 0$

$a < 0 \quad \theta > 0$

$$\rho(\theta) = -\frac{a}{\mu v^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\mu v^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$d\sigma = \pi \left(\frac{a}{\mu v^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2} \, d\theta}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

$$d\sigma(\Omega) = \pi \left(\frac{a}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sigma^{tot} = \int_0 d\sigma(\theta)$$

Огранич. поле

$U(r) \quad r < R \qquad \sigma^{tot} = \pi R^2$

$0 \quad r > R$

$\theta \to 0$

$$d\sigma \approx 8\pi \left(\frac{a}{\mu v^2}\right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3}$$

$$\rho(\theta)|_{\theta \to 0} \quad \rho(\theta) = \frac{2}{\mu v^2} \frac{1}{\theta}$$

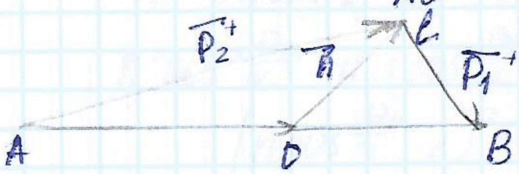
Транспортное сечение: (исключает малые углы)

$$\sigma^{tr} = \int (1 - \cos\theta) \, d\sigma(\theta)$$

Диаграмма импульсов:

$$m_1\vec{V}_1^{+} = m_1\frac{m_1\vec{V}_1^{-} + m_2\vec{V}_2^{-}}{m_1+m_2} - \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}V_-\vec{n}_0$$

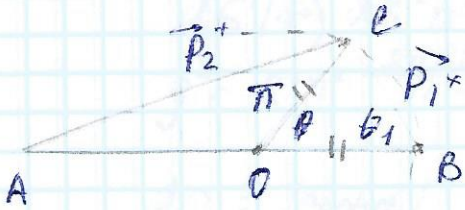
$$m_2\vec{V}_2^{+} = m_2\underbrace{\frac{m_1\vec{V}_1^{-} + m_2\vec{V}_2^{-}}{m_1+m_2}}_{AO} + \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}V_-\vec{n}_0}_{OC}$$



C описывает окружность радиуса μV_-

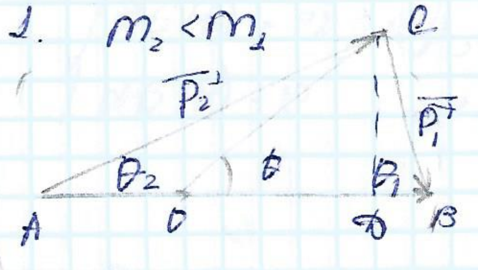
$\vec{V}_1^- = 0$ $\quad m_2 \quad m_1$

$|V_-| = |\vec{V}_2^-|$



$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$

1. $m_2 < m_1$



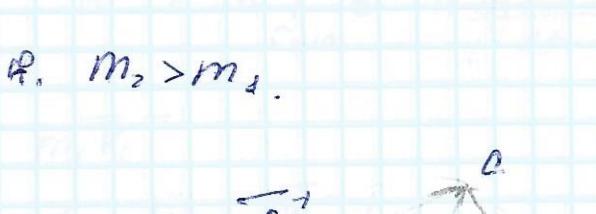
θ, θ_2

$0 < \theta \leq \pi$

$\Downarrow$

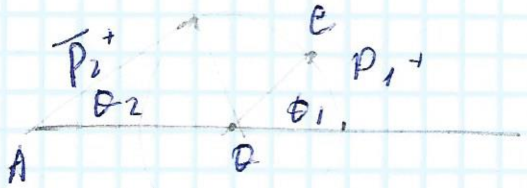
$0 \leq \theta_2 \leq \pi$

2. $m_2 > m_1$.



$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{m_1 m_2 \sin\theta}{m_2^2 + m_2 m_1\cos\theta} = \frac{m_1\sin\theta}{m_2 + m_1\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{m_2}{m_1} + \cos\theta}$$

$\theta_1 + \theta_2 \geq \pi/2$ — углы разлета



$$\sin\theta_{2max} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2} \qquad m_2 > m_1$$

$$\theta = \pi - 2\theta_1$$

$$\theta = \theta(\theta_2)$$

$$d\sigma(\theta)\Big|_{\theta=\theta(\theta_1)} = d\sigma_1$$

Полное сечение падения/захвата.

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} = E_0 - U(r) - \frac{\mu^2 \rho^2 V_-^2}{2 r^2}$$

$$E_0 r^2\Big|_{r\to 0} \geq U(r) r^2 + E_0 \rho^2$$

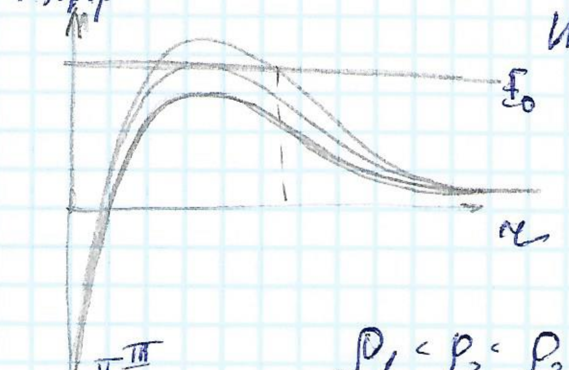
$$\frac{\mu V_-^2}{2} = E_0$$

$$0 \geq U(r) r^2 + E_0 \rho^2$$

ρ_{max} $\quad \sigma = \pi \rho_{max}^2$

З№1:

$m,\quad U(r) = \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2},\quad a, b > 0$



$$U_{эфф} = \frac{a}{r} - \frac{\tilde{b}}{r^2}$$

$$\tilde{b} = -E_0 \rho^2 + b > 0$$

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$$

$\rho > \rho_1$ - рассеяние

$\rho < \rho_1$ - падение

$E_0 = U_{эфф}(r_0)$

$U'_{эфф} = 0$

$-\frac{a}{r_0^2} + \frac{2\tilde{b}}{r_0^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{2\tilde{b}}{a}$

$E_0 = \frac{a^2}{2\tilde{b}} - \frac{\tilde{b}a^2}{4\tilde{b}^2} = \frac{a^2}{4\tilde{b}}$

$b - E_0\rho^2 = \frac{a^2}{4E_0}$

$\rho^2 = \frac{b}{E_0} - \frac{a^2}{4E_0^2}$

$\rho_{max}^2 > 0 \qquad E_0 > \frac{a^2}{4b}$

$\sigma^{tot} = \pi\left(\frac{b}{E_0} - \frac{a^2}{4E_0^2}\right), \; E_0 > \frac{a^2}{4b}$

$\sigma^{tot} = 0 \qquad , \; E < \frac{a^2}{4b}$

Оболочка

$r_{min} > R$ ф-ла работает

$r_{min} < R \qquad E_0 = \frac{a}{R} - \frac{b}{R^2} + \frac{E_0\rho^2}{R^2}$

$\rho_{max}^2 = R^2\left(1 - \frac{a}{E_0 R} + \frac{b}{E_0 R^2}\right)$

Лекция №1. 1.09.

Малые (линейные) колебания в системе с одной степенью свободы

Для того, чтобы в системе возбуждались колебания:

1. $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 - U(q)$ $(U_{вн} - ?^{(q)})$ | a и U не зависят от t

$$\mathcal{H} = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 + U(q) = H_0}$$

- сохранение обобщенной энергии

2. $\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$, $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$ - строгий локальный минимум потенц. энергии

Тогда L можно разложить в ряд:

$$U(q) = U(q_0) + \underbrace{\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0}}_{=0}(q-q_0) + \frac{k}{2}(q-q_0)^2$$

$$k = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

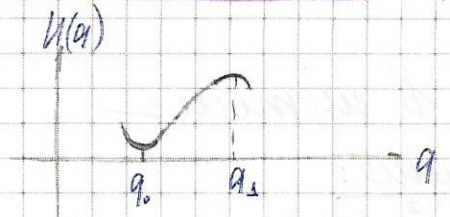
ф-ция Лагранжа примет вид

$a(q_0) = m$ (для учета в кин. энергии достаточно взять $a(q_0)$)

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{k}{2}(q-q_0)^2$$

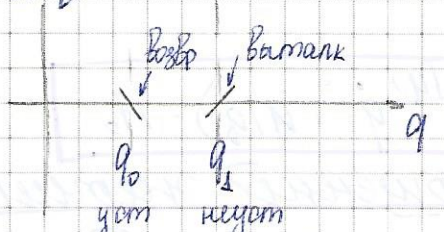
$x = q - q_0$

$$\boxed{L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}x^2}$$ Функция одномерного гармонического осциллятора



$$\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0,q_1} = 0$$

$-\frac{dU}{dq}$ (сила)



Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = -kx \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$C(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$\lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$

$x(t) = \bar{C}_1 \cos\omega_0 t + \bar{C}_2 \sin\omega_0 t = \boxed{a\cos(\omega_0 t + \alpha)}$

$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $tg\,\alpha = -\frac{C_2}{C_1}$

a - амплитуда, $\omega_0 t + \alpha$ - фаза,
α - начальная фаза
ω_0 - собственная частота

Частота не зависит от НУ!
(амплитуда)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$x(t) = x(t+T)$

$x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$

$x_0 = a\cos\alpha$

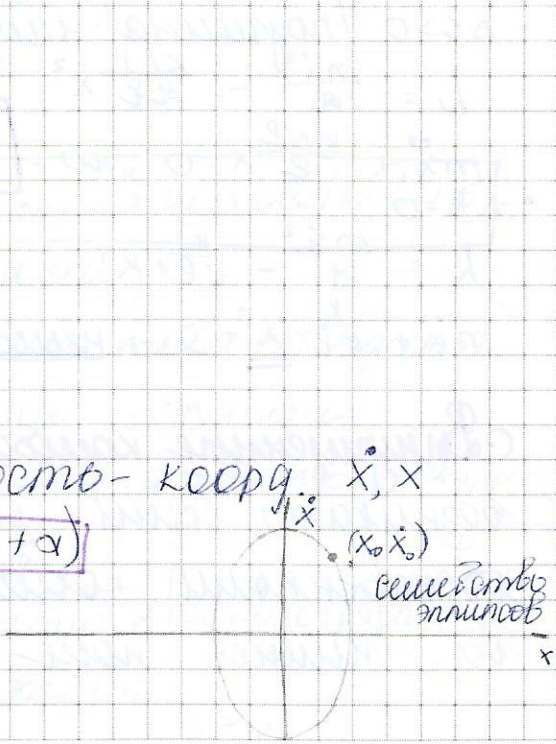
$\dot{x}_0 = -a\omega\sin\alpha$,

$a^2 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$

$tg\,\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}$

Фазовая плоскость - коорд. $\dot{x}$, x

$\boxed{\dot{x} = -a\omega\sin(\omega_0 t + \alpha)}$

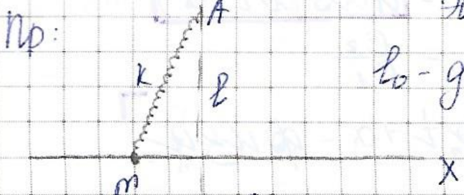


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} = 1$

$$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} = E_0$$ | НУ связаны ЗСЭ

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{E_0}{m},$$ поэтому семейство эллипсов однопараметрич.

Пр:



l_0 - длина пружины

$l, l_0 \gg x$

$$T_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$U(x) = \frac{k}{2}\delta l^2$$

$$\delta l^2 = \left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)^2 \Rightarrow$$ {разл. в ряд}

$$U(x) = \frac{k}{2}\left(\Delta l + \frac{x^2}{2l}\right)^2 = \frac{k}{2}(\Delta l)^2 + \frac{k}{2}\frac{\Delta l}{l}x^2 + \frac{k}{8}\frac{x^4}{l^2}$$

- $\Delta l > 0$ (пружина натянута)

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\Delta l}{2l}x^2$$

$$m\ddot{x} + \frac{k\Delta l}{l}x = 0; \quad \omega = \boxed{\sqrt{\frac{k\Delta l}{ml}}} = \sqrt{\frac{F_н}{ml}}$$

- $\Delta l = 0$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{8l^2}x^4$$

$$m\ddot{x} + \frac{k}{2l^2}x^3 = 0$$ - нелинейные колебания

Вынужденные колебания

возникают, если систему, облад. собственными колебаниями, поместить во внешнее поле

$$U_t = \frac{kx^2}{2} + U_e(t, x)$$

$\parallel$ (в ряд по x)

$$U_e(t,0) + \frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{x=0} x$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{x=0} = -F_e(t)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + Fx$$ - ф-ция Лагранжа

$$m\ddot{x} + kx = F$$ Ур-ие Лагранжа

$$\boxed{\ddot{x} + w_0^2 x = \frac{F(t)}{m}}$$

$$x_t = \underbrace{x(t)}_{\text{одн}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{неодн}}$$

$$x(t) = a\cos(wt + \alpha)$$

Пусть $F(t) = F_0 \cos(\tilde{w}t + \beta)$

$$x_p(t) = b\cos(\tilde{w}t + \beta)$$

$$b = \frac{F_0}{m(w_0^2 - \tilde{w}^2)}$$

$$\boxed{x_t = a\cos(wt + \alpha) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - \tilde{w}^2)}\cos(\tilde{w}t + \beta)}$$ - (наложение колебаний)

Решение справедливо только вдали от точки резонанса. Вблизи:

$$x = A\cos(w_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - \tilde{w}^2)}\left[\cos(\tilde{w}t + \beta) - \cos(w_0 t + \beta)\right]$$

$$w_0 = \tilde{w} + \varepsilon, \quad \tilde{w} = w_0 - \varepsilon$$

$$x = A\cos(w_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{2mw_0\varepsilon}\Big[\cos(w_0 t + \beta)\cos\varepsilon t +$$
$$\sin(w_0 t + \beta)\sin\varepsilon t - \cos(w_0 t + \beta)\Big]_{\varepsilon \to 0}$$

$w_0 = \tilde{w}$

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \gamma) + \frac{F_0 t}{2 m w_0}\sin(wt + \beta)$$

Затухающие колебания

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

сила, приводящая к торможению

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + w_0^2 x = 0 \qquad 2\mu = \frac{\alpha}{m} - k\text{-}m \text{ затухания}$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}: \quad C(\lambda^2 + 2\mu\lambda + w_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

$$C \neq 0 \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\mu\lambda + w_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - w_0^2}$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_{1,2}$ должны быть комплексными

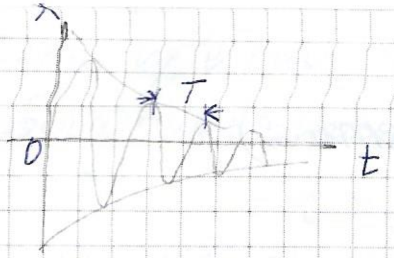
1. $w_0 > \mu \qquad w = \sqrt{w_0^2 - \mu^2}$ - частота затухающ. колебаний

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm iw$$

$$x(t) = ae^{-\mu t}\cos(wt + \alpha)$$

$x(t) \neq x(t+T)$, $T = \frac{2\pi}{w}$ - условный период

Можно показать, что максимумы решений следуют строго через период T



$x_0, \dot{x}_0: \quad x_0 = a\cos\alpha$

$\dot{x}_0 = -a\mu\cos\alpha - a\omega\sin\alpha = -\mu x_0 - a\omega\sin\alpha$

$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \mu x_0)^2}{\omega^2}}$

$tg\alpha = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{x_0\omega}$

$\boxed{\mu T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}}$ - логарифмический декремент затухание

2. $\mu > \omega_0$

$\lambda_{1,2}$ - вещественные

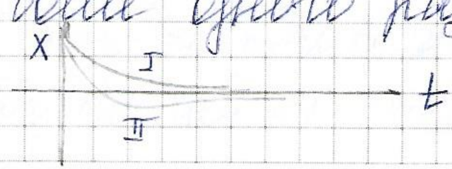
$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = c_1 e^{-\mu t + \sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\mu t - \sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\,t}$ -

апериодическое затухание

$|x| \to 0 \quad t \to \infty$

Система проходит положение равновесия за конечное время не более одного раза.



3) $\mu = \omega_0$

$\lambda_{1,2} = -\mu$ (кратность 2)

$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\mu t}$

$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \mu^2 x = 0$

Особый случай апериодического затухания.

Лекция №3.

Собственные колебания мех. систем с $s>1$ степенями свободы

Устойчивость невозмущенного движения. Возмущение;

Система s ур-ий:

$$\frac{dy_j}{dt} = Y_j(y_1, \dots, y_s, t), \; j = 1, \dots, s$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = Y_1(y_1, \dots y_s, t) \\ \vdots \\ \frac{dy_s}{dt} = Y_s(y_1 \dots y_s, t) \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Y}(\bar{y}, t)$$

Пусть известно частное решение, отвечающее граничным условиям

$y_1 = f_1(t_0), \ldots \; y_s = f_s(t_0)$

$y_0(t)$ - невозмущенное решение

$\boxed{y_j(t) = f_j(t)}$

$y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \ldots \; y_s = f_s(t_0) + \varepsilon_s$

(ε - малые величины)
возмущения

$\boxed{y_j(t) = f_j(t) + \varepsilon_j}$ - возмущенное решение

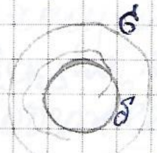
$x_j = y_j(t) - f_j(t)$ - отклонения невозм от возм (вариации)

в s-мерном пр-ве решение отоф. изображающей точкой. В эволюционир. системе изображающая точка описывает траекторию.

$$\sum_{j=1}^{s} x_j^2$$

$$x_{0j} = \varepsilon_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} x_{0j}^2 = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j^2$$

Пусть для любого положительного ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое пол. δ, что при любых начальных возмущениях удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{s} x_{0j}^2 \le \delta$, при любом $t > t_0$ $\sum_{j=1}^{s} x_j^2 < \varepsilon$, то невозмущенное движение назыв. <u>устойчивым</u> (Ляпунов)



$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y})$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, \dots, y_n)$$

$$\dots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, \dots, y_n)$$

$\vec{y}_0$ - <u>положение равновесия</u>, если $\vec{y}_0$ - решение системы уравнений

$// \vec{f}(\vec{y}_0) = 0$

$$L = \frac{1}{2} \overset{T^{(2)}}{\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}(\vec{q}) \dot{q}_l \dot{q}_k} - U(\vec{q})$$

$q_1 \dots q_s$ - явно не зависит от времени

$L = T^{(2)} + T^{(1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + T^{(0)} - U_{ext}$ - натуральная система

$U = U_{ext} - T^{(0)}$ (T^0 если связи нестационарны)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Точка $\left(\begin{array}{l}\vec{q} = \vec{q}_{eq} \\ \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}_{eq}\end{array}\right)$ является положением равновесия тогда и только тогда, когда $\dot{\vec{q}}_{eq} = 0$, а $\vec{q}_{eq}$ является критической точкой потенциальной энергии

$$\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{q}}\right|_{q_{eq}} = 0} ; \left(\left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_{q_{k\,eq}} = 0\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s$$

При $\dot{q}_j = 0$: $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{eq}} = 0$

$\Rightarrow \dot{q}_j = 0, \ \vec{q} = \vec{q}_{eq}$

Теорема Лагранжа:

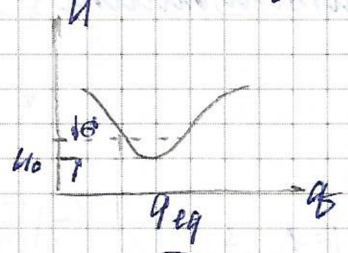
Точка движения вблизи положения равновесия устойчиво по Ляпунову, если потенц. энергия в этой точке имеет строгий локальный минимум

док-во:

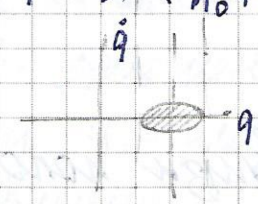
Строгий локальный минимум — точка, в окрестности которой нет других экстремумов

$U(\vec{q}) > U(\vec{q}_{eq}) = U_0$ если $\vec{q} \neq \vec{q}_{eq}$

• Всегда можно найти ε:
$U_0 + \varepsilon$, что $\vec{q}$ находится в малой окрестности $\vec{q}_{eq}$, если $U(\vec{q}) < U_0 + \varepsilon$



• Можно найти область в фаз. пространстве для которой
$H = T + U < U_0 + \varepsilon$



В силу ЗСЭ, система консервативна, область всегда будет существовать и мы не выйдем за ее пределы

Общее решение системы ур-ий Лагранжа в режиме малых колебаний

$$L = \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}\dot{q}_l \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_s)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = const = \mathcal{H}_0 \quad (ЗСЭ)$$

$$\sum_{\ell k=1}^{s} a_{\ell k}(\bar{q})\,\dot{q}_\ell \dot{q}_k + U(\bar{q}) = \mathcal{H}_0$$

Пусть теорема Лагранжа выполняется, тогда $\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_j eq} = 0$ - положение равновесия $j = 1, \dots, s$

$$U = U_0 + \sum_{\ell k=1}^{s} \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\ell \partial q_k}\right|_{\substack{q_\ell eq \\ q_k eq}} (q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq}) =$$

$$= U_0 + \frac{1}{2}\sum_{\ell, k=1}^{s} c_{\ell k}(q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq}),$$

где $c_{\ell k} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\ell \partial q_k}\right|_{\substack{q_\ell eq \\ q_k eq}}$, тогда

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\ell, k=1}^{s} a_{\ell k}\,\dot{q}_\ell \dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{\ell, k=1}^{s} c_{\ell k}(q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq})$$ U_0 опустим

$x_j = q_j - q_{j eq}$ - отклонение ($x = 0$ - равновесие)

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{\ell, k=1}^{s} a_{\ell k}\,\dot{x}_\ell \dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{\ell, k=1}^{s} c_{\ell k}\, x_\ell x_k}$$

$a_{\ell k}$, $c_{\ell k}$ - симметрические

Π - тоже положит.-опр. квадр. форма

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad | \; j = 1, \dots, s$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{\ell k}\ddot{x}_k + c_{jk} x_k) = 0 \qquad j = 1, \dots, s$$

$$a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{x}_s + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1s}x_s = 0$$

$$a_{s1}\ddot{x}_1 + a_{s2}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{ss}\ddot{x}_s + c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{ss}x_s = 0$$

(коэффициенты постоянны).

- ОДСУ II порядка с постоянными к-тами.

$$x_k = C_k e^{\lambda t}, \quad C_k \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk})\, C_k = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{pmatrix}$$

$$\det (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk})_{j,k=1}^{s} = 0 \quad (2s \text{ корней } \lambda)$$

λ_a, $a = 1, \ldots, 2s$ - собственные значения

$$x_k(t) = \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{2s} C_k^a e^{\lambda_a t}$$

$$\lambda_6 = \mathrm{Re}\lambda_6 + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_6 \Rightarrow e^{\mathrm{Re}\lambda_6 + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_6}$$

(+) возрастающ
(-) убывающая,
что приводит к
нарушению ЗСЭ

Система в им ЗСЭ может иметь только s пар комплексно-сопряженных корней $\lambda = \pm i w_a$ $(\mathrm{Re}\,\lambda_a = 0)$

$$x_k(t) = \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{s} \left(C_k^{a+} e^{i w_a t} + C_k^{a-} e^{-i w_a t} \right)$$

амплитуда

w_a - собственные частоты.

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k^\alpha = 0$$

$C_{k'}^\alpha \neq 0 \quad k' \to s$

$$\sum_{k=1}^{s-1} (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k^\alpha = -(a_{js}\lambda_\alpha^2 + c_{js}) C_s^\alpha$$

$C_k^\alpha = \dfrac{\Delta_k^\alpha}{\Delta_s^\alpha} C_s^\alpha$, $k = 1, \ldots, s-1$; Δ_k^α - АД к эл-ту k-столбца ХД, взятого при λ_α^2 (характ. детерм)

Положим $C_\alpha = \dfrac{C_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha}$

$$\boxed{C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha} \quad k = 1, \ldots, s-1$$

Лекция №8 15.09

Общее решение уравнения Лагранжа для мех. системы с s степенями свободы в решении малых колебаний. Нормальные координаты. Вектора смещений. Свойство ортогональности. Случай нулевой и кратной частот системы

1. Ф-ия L не зависит явно от времени

2. В пр-ве конфигураций $q_1 \ldots q_s$, $\dot q_1 \ldots \dot q_s$

Потенц. энергия удовл. условием

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{j\,eq}} = 0 \quad j = 1, \ldots, s$$

$q_k = q_{k\,eq}, \quad \dot{q}_{k\,eq} = 0 \quad k = 1, \dots, s$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_{\substack{q_{k\,eq} \\ q_{j\,eq}}} = 0$$

$U(q) \geq U(q_{eq})$

Ф-ию Лагранжа можно разложить вблизи положения равновесия

$$L = \frac{1}{2}\sum_{l,k} a_{lk}(q)\,\dot{q}_l \dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{l,k} c_{lk}\, q_l q_k$$

$$c_{lk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k}\right|_{q_{eq}}$$

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{lk} \end{vmatrix} > 0 \text{ - положит. опр. форма}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{s} c_{lk}\, q_l q_k$$

$$U(q) = U(q_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k}\dots$$

(удовл. критерию Сильвестра)

Вводим $x_j = q_j - q_{j\,eq}$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}\,\dot{x}_l \dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{l,k} c_{lk}\, x_l x_k$$

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\ddot{x}_k + c_{jk} x_k\right) = 0$$

Собст. колебание - система ЛДУ II порядка

Ищем решение в виде (возмущенное):

$x_k = C_k e^{\lambda t}$, где C - постоянная

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0 \quad j = 1, \dots, s$$

$$\boxed{\det | a_{jk}\lambda^2 + c_{jk} | = 0}$$

$\lambda_\alpha^{\pm} = \pm i\omega_\alpha$ - компл. сопряженное

ω_α - собств. частоты

λ_α - собств. значения

$$x_k = \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(C_k^{\alpha+} e^{+i\omega_\alpha t} + C_k^{\alpha-} e^{-i\omega_\alpha t} \right) \quad // x\text{-вещ.}$$

$\boxed{C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha}$, где Δ_k^α - АД к элементу k-того столбца любой строки хар. детерм., взятого при значении λ_α^2

$$\Delta_k^\alpha (\lambda_\alpha^+) = \Delta_k^\alpha (\lambda_\alpha^-)$$

Тогда:

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha (\lambda_\alpha^2) \Theta_\alpha (t)$$

$$\Theta_\alpha (t) = \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{s} \left[C_\alpha^+ e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \right] =$$

$$= a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

- Любая коорд. пространства q изменяется как наложение периодич. решений, каждое из которых меняется с одной

из собственных частот систем
ω_α

- собств. частоты определяются свойствами системы и не связаны с начальными условиями
- В решении не присутствуют высшие гармоники основных частот.

Пусть существует кривая:
$$f(x_1, \dots, x_s) = 0$$
и все частоты несоизмеримы, то кривая незамкнута.
Если частоты соизмеримы, то кривая замкнута.

$x_k = q_k - q_{k\,eq}$ – вектор смещения

$$\vec{X}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \vdots \\ x_s^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^\alpha \\ \vdots \\ C_s^\alpha \end{pmatrix} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha).$$

$$\vec{X}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} x^\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \vec{\mathbb{C}}^\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

$$\mathbb{C}^\alpha = \begin{pmatrix} C_1^\alpha \\ \vdots \\ C_s^\alpha \end{pmatrix} a_\alpha$$

θ_α - нормальная координата (меняется только с одной частотой системы) (главное колебание)

Выберем НУ:

$$a_\alpha = 0, \quad a_\alpha = a_\gamma, \quad \alpha = \gamma$$

$$X_k = \Delta_k^\gamma a_\gamma \cos(\omega_\gamma t + \beta_\gamma)$$

[За счет НУ можно возбудить колебания только на одной собств. частоте.]

$$X_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha (\lambda_\alpha^2)\, \theta_\alpha(t)$$

Δ - матрица преобразования

$$\dot{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha \dot{\theta}_\alpha$$

$$\ddot{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha \ddot{\theta}_\alpha$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{s} a_{lk} \dot{X}_k \dot{X}_l - \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{s} c_{lk} X_l X_k$$

Для θ: $\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s$

Ф-ия $\boxed{L = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{a_\alpha}{2} \dot{\theta}_\alpha^2 - \frac{c_\alpha}{2} \theta_\alpha^2 \right)}$

В координатах θ колебания развязаны: $\ddot{\theta}_\alpha = -\omega_\alpha^2 \theta_\alpha$ (кин и динам)
(в x - связаны)

Общее решение - сумма s нормальных колебаний.

Нулевая частота: $\omega_j = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_j = 0$

$\theta_j = \dot{\theta}_{j0} t + \theta_{j0}$

сист как целое

Возникает, когда минимум нестрогий

Кратные частоты: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$

$\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3$

Тогда число θ не изменяется (s)

$$L = \frac{a}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \frac{c}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right) + \sum_{\alpha=4}^{s}\left(\frac{a_\alpha}{2}\dot{\theta}_\alpha^2 - \frac{c_\alpha}{2}\theta_\alpha^2\right)$$

Выбор нормальных частот неоднозначен

① Все $\lambda_\alpha^2 < 0$ (λ_α - мнимые)

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}\right) C_k^\alpha = 0 \quad \Big| \cdot C_j^\alpha, \ \sum_{j=1}^{s}$$

$$\sum_{j,k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}\right) C_k^\alpha = 0$$

$$\left(\lambda_\alpha^2 \sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\Delta_j^\alpha \Delta_k^\alpha + \sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}\Delta_j^\alpha \Delta_k^\alpha\right) C_\alpha^2 = 0$$

$$\lambda_\alpha^2 = -\frac{\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}\Delta_j^\alpha \Delta_k^\alpha}{\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\Delta_j^\alpha \Delta_k^\alpha}$$

к-ты вещественны, положит. опр.

② Свойство ортогональности норм. колебаний:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}\right) e_k^\alpha = 0 \quad \Big| \cdot e_j^\beta \sum_j$$

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\beta^2 + c_{jk}\right) e_k^\beta = 0 \quad \Big| \cdot e_j^\alpha \sum_j$$

$$a_{jk} = a_{kj}$$

$$\sum_{j,k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}\right) e_k^\alpha e_j^\beta = 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{s}\left(a_{jk}\lambda_\beta^2 + c_{jk}\right) e_k^\beta e_j^\alpha = 0$$

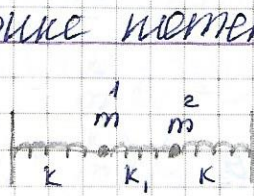
$$(1-2) \qquad \left(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2\right)\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk} e_k^\alpha e_j^\beta = 0$$

Если $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, то $\underbrace{\sum_{j,k=1} a_{jk} e_k^\alpha e_j^\beta = 0}_{\text{скалярное пр-ие}}$ кин

Нормальные колебания ортогональны в метрике кин. энергии.

$\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk} e_j^\alpha c_k^\beta = 0$ потенц.

и в метрике потенц. энергии

Пример: 

Длина l

$x_1, x_2,$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{k_1}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2$$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - k_1x_1 - k_1x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + (k+k_1)x_2 - k_1x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{x_1}{m}(k+k_1) - \frac{k_1}{m}x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{x_2}{m}(k+k_1) - \frac{k_1}{m}x_1 = 0$$

$$x_j = C_j e^{\lambda t}, \quad j = 1,2$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k+k_1}{m}\right)C_1 - \frac{k_1}{m}C_2 = 0$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k+k_1}{m}\right)C_2 - \frac{k_1}{m}C_1 = 0$$

$$\det = \left(\lambda^2 + \frac{k+k_1}{m}\right)^2 - \frac{k_1^2}{m^2} = 0$$

$$\lambda^2_{1,2} + \frac{k+k_1}{m} = \pm\frac{k_1}{m}$$

$$\lambda_1^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_1^{\pm} = \pm i\omega_1 = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{k+2k_1}{m} \Rightarrow \lambda_2^{\pm} = \pm i\omega_2 = \pm i\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$$

Решение: $x_k = \sum_{\alpha=1}^{2} \Delta_k^{\alpha}\,\Theta_\alpha(t)$

$$\Theta_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

$$\Delta_1^1 = -\frac{k_1}{m}(-1)^{2+1} = \frac{k_1}{m}$$

$$\Delta_1^2 = +\frac{k_1}{m}$$

$$\Delta_2^1 = +\frac{k_1}{m}$$

$$\Delta_2^2 = -\frac{k_1}{m}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Theta_2$$

нормировка

Лекция № 4

Пример 2. многомерные колебания

Случай нулевой частоты

x_1, x_2 - отклонение от равновесия

1. равномерное движение, нулевая част.

2. 

$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\omega = 0$ возникает, когда нет строгого минимума

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k(x_2 - x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = x_1}, \text{ равновесие}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$x_j = C_j e^{\lambda t}, \quad j = 1, 2$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) C_1 - \frac{k}{m} C_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m} C_1 + \left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) C_2 = 0$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \frac{2k\lambda^2}{m} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lambda^2 = 0}_{\omega = 0}, \quad \lambda^2 = -\frac{2k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{2k}{m}}}_{\omega_2}$$

$\lambda_1^2 = 0$: $\quad \frac{k}{m}C_1^{(1)} - \frac{k}{m}C_2^{(1)} = 0 \Rightarrow C_1^{(1)} = C_2^{(1)}$

$\lambda_2^2 = -\frac{2k}{m}$ $\quad -\frac{k}{m}C_1^{(2)} - \frac{k}{m}C_2^{(2)} = 0 \Rightarrow C_1^{(2)} = -C_2^{(2)}$

$x_{1,2} = \theta_1(t) \pm \theta_2(t)$

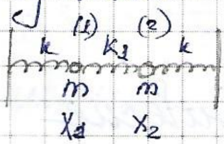
$\theta_1(t) = \dot{\theta}_1(0)\,t + \theta(0)$

$\theta_2(t) = a\cos(\omega_2 t + \beta)$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_1}\theta_1(t) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_2}\theta_2(t)$$

$\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ ортог

$\vec{X}$, $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ - неизв. ф-ии времени. Подставляя в ф-ию Лагранжа, получим: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - \frac{2k}{m}\theta_2^2\right)$



$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$

Гамильтонова динамика

Ур-ие Лагранжа в эквивалентной форме ур-ий Гамильтона. Преобразование Лежандра. Функции Лагранжа и Гамильтона.

$L(q, \dot{q}, t) = T - U$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \dots, s$$

Преобразования Лежандра:

$f(x)$, $f''(x) > 0$

$u = \frac{df}{dx} = f'$ $\quad g(u) = ux - f(x)$

$f(x,y)$, $f_{xx} > 0$

$u = \frac{\partial f}{\partial x}$

$g(u,y) = ux - f(x,y)$ – преобр. Лежандра.

$dg = x\,du + \cancel{u\,dx} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} dx} - \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$x = \frac{\partial g}{\partial u}$; $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$

y – пассивная переменная

Свойство инволютивности

$g^{2} \to f$. Дважды примененное преобразование приведет к функции f (исходной)

$L = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 - U(q,t)$ (выпукла по $\dot{q}$)

$f \leftrightarrow L$, $\quad x \leftrightarrow \dot{q}$, $\quad y \leftrightarrow q$, $\quad u \leftrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$g(p,q) \leftrightarrow H(p,q,t)$ – функция Гамильтона

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$H(p,q,t) = p\dot{q} - L$

$dH = dp\,\dot{q} + \cancel{p\,d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

S степеней свободы:

$$p = a(q)\dot{q}$$

$$\boxed{H = p\dot{q} - \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} + U(q,t) = \frac{p^2}{a} - \frac{p^2}{2a} + U(q,t) = \frac{p^2}{2a(q)} + U(q,t)}$$

$$L((q),(\dot{q}),t) \qquad 2S+1$$

$$L = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{l,k=1}^{S} a_{lk}(q)\dot{q}_l\dot{q}_k}_{>0} - U(q,t)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\boxed{H = \sum_{j=1}^{S} p_j\dot{q}_j - L}$$

преобр. Лежандра приводит выпуклую часть функции в выпуклую часть

$$dH = \sum_{j=1}^{S}\left(\dot{q}_j dp_j + \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad ; \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Система ур-ний Гамильтона

В векторной форме:

$$H = \vec{p}\,\dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}}$$

Эволюция системы в 2S-мерном пр-ве описывается системой ур-ий I порядка. Причем в каждой точке ФП задано векторное поле: $\vec{f}(\vec{q}, \vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ — 2S-мерный вектор.

Тогда: $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$

1. Построить H - ф-ию Гамильтона
2. Определить P - обобщ. импульс
3. Найти обобщ. энергию и найти ф-ию Гамильтона. Получим систему ур-ий Гамильтона

Чтобы не потерять ни одно ур-ие, необходимо, чтобы $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ было разрешимо относительно $\dot{q}_j$

$\left|\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k}\right| \neq 0$ - условие разрешимости

$\boxed{\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0}$ - определитель Гессе (гессиан)

Если $\Gamma = 0$, системы особенные.

Если $\Gamma \neq 0$, системы неособенные, и можно записать ур-ия Гамильтона

Инвалентивность:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L \Leftrightarrow L = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j p_j - H$$

$$H(\{q\}\{\dot{q}\}, t) \qquad L(\{q\},\{\dot{q}\}, t)$$

Ур-ие Гамильтона записана в симм. форме, I порядка по времени!

Следствие:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$H(\overline{q}, \overline{p}, t)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = H_0$ - (энергия сохр)
(поверхность)

Лекция №5

Уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad j = 1, \dots, s$$

$\mathcal{H}(q_1 \dots q_s, p_1, \dots, p_s, t)$ - ф-ия Гамильтона

$\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_s)$

// $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_s b_s$ //.

Тогда: $\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$

Уравн. Гамильтона = канонические

p, q - канонически сопряженные переменные

Динамика описывается в фазовом $2s$-мерном пространстве $(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)$

$\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$

Ур-ия Гамильтона принимают вид:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \qquad \vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}\right)$$

Пусть известно: $\vec{q}(t), \vec{p}(t)$

$\left(\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})\right.$ - касательная к траектории

$\left.\Rightarrow \vec{f}(\vec{x})\right)$ - линии тока

Тогда $g^t\{\vec{q}(0), \vec{p}(0) \to \vec{q}(t), p(t)\}$ - одноп. группа преобразований - фазовый поток ($q(t), p(t)$) - решения ур-ия Гамильтона)

$\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t): \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

Если $H(q, p)$, то $\mathcal{H}(\vec{q}, p) = \mathcal{H}_0$ - Интеграл движения

Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, система консервативна.

Если координата не входит в функцию гамильтона, то она циклическая:

$$\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{\vec{q}}, q)$$

Пусть есть система с цикл. координатой q_1. Тогда $p_1 = const$

Изменение остальных координат происходит как в системе с $S-1$ СС, при этом $H(q_2 \ldots q_s, p_2 \ldots p_s, c, t)$

зависит от c как от параметра

$$\begin{rcases} \vec{q}' = (q_2 \dots q_s) \\ \vec{p}' = (p_2 \dots p_s) \end{rcases} \text{р-сть } s-1.$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \quad p_1 = c$$

$$\dot{\vec{q}}' = \frac{\partial H}{\partial p'}, \quad \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} \quad (s-1)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H(\vec{q}'(t), \vec{p}'(t))}{\partial p_1} \leftarrow \text{решение системы}$$

$$\frac{dq'}{dt} = F(t)$$

Конс:

$\boxed{\text{Система с двумя степенями свободы и одной циклич. координатой интегрируема в квадратурах}}$

$$H(q', p', c) = H_0$$

Пример 1.

Одномерный гарм. осциллятор

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \qquad q = x$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$H = p\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - \text{обобщ. энергия}$$

$$H(x, \dot{x})\Big|_{\dot{x} = f(p, x)} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

Ур-ие: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

$\dot{p} = -kx^2$ } эквивалентно ур-иям лагранжа

$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}x$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

В потенциальном поле: $U(x,y,z)$

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$

$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}$

$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,y,z)$

$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,y,z)$

$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,y,z)$

Пусть $U(\sqrt{x^2+y^2}, z)$

Вводим цилиндр. координаты ρ, φ, z

$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$L = \frac{m}{4}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, z)$

// φ - циклическая координата

$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}$

$H = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, z)$

$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + U(\rho, z) =$

$= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, z)$

$U(r)$

Сферическая система координат

r, θ, φ

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$p_r = m\dot{r}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$H(\dot{q}, q) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + U(r)$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\theta^2\frac{1}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r)$$

Функция Гамильтона во внешнем электромагн. поле с массой m и зарядом e

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U_{об.}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t), \quad \Phi(\vec{r}, t)$$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \end{cases}$$

$$U_{об} = -\frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) + e\Phi$$

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\dot{\vec{r}}) - e\Phi$$

$$\vec p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} = m\dot{\vec r} + \frac{e}{c}\vec A(\vec r, t)$$

$$H = \vec p \cdot \dot{\vec r} - L = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + e\varphi$$

$$\dot{\vec r} = \frac{1}{m}\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)$$

$$H = \frac{\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2}{2m} + e\varphi$$

Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве

$H(\vec q, \vec p, t)$

$$\dot{\vec q} = \frac{\partial H}{\partial \vec p}, \quad \dot{\vec p} = -\frac{\partial H}{\partial \vec q}$$

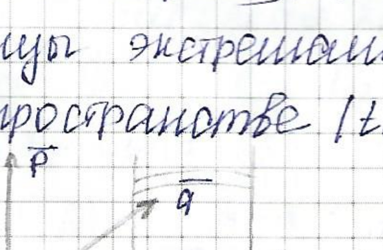
$\mathbb{R}^{2s+1}$ - расширенное фазовое пространство

Рассмотрим интегральную кривую γ, соедин. точки (t_0, q_0, p_0) и (t_1, q_1, p_1)

Теорема:

Функц. $\int \vec p\, d\vec q - H(\vec q, \vec p)\, dt$

γ - экстремаль относительно любых вариаций, при которых концы экстремали остаются на s-мерн. подпространстве $(t_0, \vec q = \vec q_0)$ и $(t_1, \vec q = \vec q_1)$



$$\delta\int_\gamma(\bar p\dot{\bar q}-H)dt=\int_\gamma\left(\bar p\,\delta\dot{\bar q}+\dot{\bar q}\,\delta\bar p-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right)dt$$

$$=\underbrace{\bar p\,\delta\bar q\Big|_{t_0}^{t_1}}_{0}+\int_\gamma\left[\left(\dot{\bar q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta\bar p-\left(\dot{\bar p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta\bar q\right]dt$$

$$\dot{\bar q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{\bar p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

γ - экстремаль, если выполняются уравнения Гамильтона

$\boxed{\bar p\,d\bar q-H\,dt}$ - Интегральный инвариант Картана-Пуанкаре

Скобки Пуассона

// $H(\tau,p)=\dfrac{C(p)}{n(\tau,p)}$ - не имеет ф-ии Лагранжа //

$q_1,\dots,q_s,p_1,\dots,p_s$

$f(\bar q,\bar p,t)$ $\qquad$ $H(\bar q,\bar p,t)$

Является ли f интегралом?

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot q_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot p_j+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\dot q_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \dot p_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$\boxed{[f,H]=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)}$ - скобка Пуассона

$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$, если f - интеграл.

Если $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow [f, H] = 0$

Пусть $u(\bar{q}, \bar{p}, t)$ $v(\bar{q}, \bar{p}, t)$

Тогда $[u\, v] = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right)$

Свойства:

1. $[u, c] = 0$
2. $[u, v] = -[v, u]$ - кососимм.
3. $[u, u] = 0$
4. $[u+v, w] = [u, w] + [v, w]$
5. $[uv, w] = v[u, w] + u[v, w]$
6. $\frac{\partial}{\partial t}[u, v] = [\frac{\partial u}{\partial t}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial t}]$

Фундаментальные скобки Пуассона

$q_1, \ldots, q_s, p_1 \ldots p_s$

$[q_j, q_k] = 0$

$[p_j, p_k] = 0$

$[q_j, p_k] = \delta_{jk}$

$[q_k, v] = \sum_{j=1}^{s} \delta_{kj} \frac{\partial v}{\partial p_j} = \frac{\partial v}{\partial p_k}$

Лекция №6

Скобки Пуассона для любых двух функций состояния

$$[u, v] = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j}\right)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

$$f = q_j \qquad \boxed{\dot{q}_j = [q_j, H]}$$

$$f = p_j \qquad \boxed{\dot{p}_j = [p_j, H]}$$

I интеграл: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$

$f = H$: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow$ если t явно не входит в H, то H - сохраняется

$$H((q), (p)) = H_0$$

Теорема: если u и v - интегралы движения нек. гамильтоновой системы,

$$\frac{du}{dt} + [u, H] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + [v, H] = 0,$$

то $[u, v]$ - тоже является интегралом движения

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \frac{\partial}{\partial t}[u,v] + [[u,v],H] = 0$$

Тождество Якоби: $\forall u, v, w$

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

$w = H$

$$[u,[v,H]] + [v,[H,u]] + [H,[u,v]] = 0$$

$$[[u,v],H] = [u,[v,H]] + [v,[H,u]]$$

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] + [u[v,H]] + [v,[H,u]] =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + [[u,H]v] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] + [u[v,H]] =$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + [uH]}_{=0}, v\Big] + \Big[u, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + [v,H]}_{=0}\Big] \boxed{= 0}$$

$=$

Пример:

1. $u(q_1, p_1)$, $f(v(q_1,p_1), q_2 \dots q_s, p_2 \dots p_s)$

$$[u, F] = \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial v}[u, v]$$

В частности, если в системе

$\mathcal{H}(v(q_1, p_1), q_2 \dots q_s, p_2 \dots p_s)$

$[v, H] = \frac{\partial H}{\partial v}[v, v] = 0 \Rightarrow$ v - интеграл движения

2. $\vec{q} = \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{P} = (P_1 P_2 P_3)$

$\vec{L}_1 = [\vec{r}\,\vec{p}]$

$L_i = e_{ijk} x_j P_k \qquad e_{123} = e_{312} = e_{231} =$

$= -e_{213} = -e_{321} = -e_{132} = 1$

$L_3 = e_{3jk} x_j P_k = e_{312} x_1 P_2 + e_{321} x_2 P_1 = x_1 P_2 + x_2 P_1$

$[\bar{r}, \bar{L}] = [x_l L_i] = [x_l e_{ijk} x_j P_k] =$

$= e_{ijk}(\underbrace{[x_l x_j]}_{0} P_k + \underbrace{[x_l P_k]}_{\delta_{lk}} x_j) = e_{ijk} \delta_{lk} x_j =$

$= e_{ijl} x_j = \underline{e_{lij} x_j}$

3. Показать, что вектор L частицы и H являются интегралами движения задачи дв. т в $U(r) = -\frac{a}{r}$ — задача Кеплера (L отн. центра поля)

$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{a}{r}$, $\vec{p}^2 = p_l^2$

$\bar{r} = \sqrt{x_l^2}$

$L_i = e_{ijk} x_j P_k$

$H = \frac{p_l^2}{2m} - \frac{a}{\sqrt{x_l^2}}$

$\frac{dH}{dt} = 0$ — ф-ия Гамильтона не з. от времени.

$[L_i, H] = e_{ijk} \{x_j [p_k H] + p_k [x_j H]\}$

$$[p_k H] = -\frac{\partial p_k}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_n} = \delta_{kn}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n} = +\frac{a}{r^3} x_e \delta_{en}$$

$$[p_k, H] = \delta_{kn}\delta_{en}\frac{a x_e}{r^3}$$

$$[x_j H] = \delta_{jn}\frac{p_e}{m}\delta_{en}$$

$$[L_i, H] = e_{ijk}\, x_j \delta_{kn}\frac{a}{r^3} x_e \delta_{en} + e_{ijk}\, p_k \delta_{jn}\delta_{en}\frac{p_e}{m}$$

$$= -e_{ijk}\underbrace{x_j x_k}_{0}\frac{a}{r^3} + \underbrace{e_{ikn}\frac{p_k p_e}{m}}_{0} = 0$$

антисим. тензор умн. на симметр. часть

Момент импульса при движении в ЦС поле сохраняется

Канонические преобразования

Ур-ия Лагранжа ковариантны относительно точечных преобразований

$q_1 \dots q_s$

$Q_j = Q_j(q_1 \dots q_s, t)$ - точечные преобразования

Ур-ия сохраняют вид.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot Q_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial Q_j}=0.$$

L' - новая функция Лагранжа

$$L'=L\left(q(Q),\ \dot q(Q,\dot Q)\right)$$

$$\dot q_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \dot p_j=-\frac{\partial H((q),(p))}{\partial q_j}$$

=> Уравнения Гамильтона ковариантны относительно точечных преобразований

$\overset{2s}{\overline{q}, \overline{p}}$

$$Q_j=Q_j(q_1 \ldots q_s,\ p_1 \ldots p_s)$$

$$P_j=P_j(q_1 \ldots q_s,\ p_1 \ldots p_s)$$

Есть преобразование, сохр. форму уравнений Гамильтона:

$$\dot Q_j=\frac{\partial H'}{\partial P_j},\quad \dot P_j=-\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

Канонические преобразования сохр. ур-ия Гамильтона и их можно задать с помощью производящей функции

Будем требовать:

1. Q и P - однозначные ф-ии q и p и имеют непрерывные ЧП до

II порядка.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_s}{\partial p_s} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \frac{\partial (Q_1 \dots Q_s, P_1 \dots P_s)}{\partial (q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)}$$

4s переменных

Производящая функция $F((\overset{s}{q}),(\overset{s}{Q}),(\overset{s}{p}),(\overset{s}{P}))$

2s независимых

s старых и s новых

4 вида производящих функций:

$F_1((\overset{s}{q}),(\overset{s}{Q}),t)$

$F_2((p),(P),t)$

$F_3((q),(P),t)$

$F_4((p),(Q),t)$

Пусть H и H' выводятся из принципа наименьшего действия

$$\delta\left(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H\right)dt = 0$$

$$\delta\left(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H'\right)dt = 0$$

концы кривой: $t_0: \vec{q} = \vec{q}_0$ $\quad \delta q(t_0, t_1) = 0$

$t_1: \vec{q} = \vec{q}_1$

$t_0: \vec{Q} = \vec{Q}_0$

$t_1: \vec{Q} = \vec{Q}_1$: $\delta Q(t_0, t_1) = 0$

даже при δq и $\delta Q = 0$

$$\int \left(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{q}_j - H\right) dt = \int \left(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H'\right) dt + \frac{dF_1}{dt} dt$$

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{dF_1}{dt}$$ – основное уравнение

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right)$$

$$P_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad \text{I}$$

$$P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad \text{II}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \text{III}$$

$F_1(q, Q, t)$
$F_2(q, P, t)$ преобразование Лежандра

$$F_2: \quad F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$$

$t_0: \vec{Q} = \vec{Q}_0$

$\delta Q(t_0, t) = 0$

$t_1: \vec{Q} = \vec{Q}_1$

для ПНД

δq и $\delta Q = 0$

$$\int\left(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H\right) dt = \int\left(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H'\right) dt + \frac{dF_1}{dt} dt$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{dF_1}{dt}$$ — основное уравнение

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j\right)$$

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad \text{I}$$

$$P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad \text{II}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \text{III}$$

$F_1(q, Q, t)$

$F_2(q, P, t)$ преобразование Лежандра

F_2: $F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$

Лекция № 7

Канонические преобразования:

1. $(q)(p) \to (Q)(P)$ однозн.
2. F - производящая функция
3. Динамика ост. Гамильтонова

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H\right)dt$$ ~~своё экстремальное относительно любых~~?

$$t_0 \to \overline{q_0} \to \delta q_j(t_0)=0$$
$$t_1 \to \overline{q_1} \to \delta q_j(t_1)=0$$

$$\delta\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H\right)dt=0 \Leftrightarrow \delta q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

$$\delta'\int_{t_0}^{t_1}\left(P_j\dot Q_j - H'\right)dt=0,\ \delta Q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

При $\delta q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}, \delta Q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H\right)dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\sum_{j=1}^{s} P_j\dot Q_j - H'\right)dt+\frac{dF_1}{dt}dt\right]$$

F такая, что на концах отрезка
$$\delta F_1\Big|_{t_0}^{t}=0$$

$$\delta' F_1=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial F}{\partial Q_j}\delta Q_j\right)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H=\sum_{j=1}^{s} P_j\dot Q_j - H'+\frac{dF_1}{dt}$$ – основное ур-ие каконич. преобраз.

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\dot{Q}_j\right) - \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\begin{cases} p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \\ H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

② $F_2((q),(P),t)$

$F_1((q),(Q),t)$

$$F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{dF_2}{dt} - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$$

$$dF_2 - \sum_{j=1}^{s} Q_j P_j$$

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j}\dot{P}_j - \dot{P}_j Q - P_j \dot{Q}_j\right)$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \quad (I_2)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad (II_2)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (III_2)$$

③

$F_1((q),(Q),t)$

$F_3((p),(Q),t)$

$$F_1 = F_3 + \sum_{j=1}^{s} p_j q_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{d\left(F_3 + \sum_{j=1}^{s} p_j q_j\right)}{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j \right) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \qquad (I_3)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \qquad (II_3)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \qquad (III_3)$$

4.

$$F_4\left((p), (P), t\right)$$

$$F_1 = F_4 + \sum_{j=1}^{s} \left(p_j q_j - P_j Q_j\right)$$

$$\frac{dF_4}{dt} + \sum_{j=1}^{s} \left(p_j q_j - P_j Q_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \dot{P}_j + \dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - P_j \dot{Q}_j - \dot{P}_j Q_j \right) + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \qquad (I_4)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \qquad (II_4)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (III_4)$$

$$\boxed{\begin{matrix} + & + & - & - \\ - & + & - & + \end{matrix}}$$

Каноническое преобразование как тождественное.

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k$$ - тождеств.

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{s} \delta_{kj} P_k = P_j$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j$$

Точечные преобразование:

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} f_k (q_1 \dots q_s, t) P_k$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^{s} f_k (\dots) \delta_{kj} = f_j$$

$$F_1 = \sum_{k=1}^{s} q_k Q_k$$ - меняет местами импульсы и коорд.

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j$$

Канонич. преобразование позволяет упростить решение:

Гармонич. осциллятор: $H = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 q_k^2}{2} \right)$

Цель: найти преобраз. переводящее все коорд. циклические

$$F_1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i \omega_i q_i^2}{2} \operatorname{ctg} Q_i$$

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = m_k \omega_k q_k \operatorname{ctg} Q_k$$

$$P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = \frac{m_k \omega_k q_k^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q_k}$$

$$q_k = \sqrt{\frac{2P_k \sin^2 Q_k}{m_k \omega_k}} = \sqrt{\frac{2P_k}{m_k \omega_k}} \sin Q_k$$

$$p_k = \sqrt{2P_k m_k \omega_k} \cos Q_k$$

$$\boxed{H'((Q),(P)) = \sum_{k=1}^{s} P_k \omega_k}$$

Новые координаты - циклические

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j} = \omega_j \Rightarrow Q_j = \omega_j t + Q_{j0}$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = const = P_{j0}$$

$$q_k = \sqrt{\frac{2P_{k0}}{m_k \omega_k}} \sin(\omega_k t + Q_{k0})$$

$$p_k = \sqrt{2P_{k0} m_k \omega_k} \cos(\omega_k t + Q_{k0})$$

Свойства:

Можно показать, что

$$[u, v]_{(q,p)} = [u, v]_{(Q,P)} \text{ - инвариант}$$

2. Теорема Пуанкаре

2S:

$J_1 = \iint_S \sum_{j=1}^{s} dq_j \, dp_j$ – инвариант канонич. преобразовани

$J_2 = \iiiint_S \sum_{j,k=1}^{s} dq_j \, dp_j \, dq_k \, dp_k$

$J_s = \int\!\!\int\!\!\int_{j \neq k} dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s$

3. Фазовый объем

Инварианты Пуанкаре

Бесконечно малые канонич. преобразования (инфинитезимальные)

$Q_j = q_j + \delta q_j(\{q\}, \{p\}, t)$

$P_j = p_j + \delta p_j(\{q\}, \{p\}, t)$

Пусть $|\delta q_j| \ll |q_j|$, $|\delta p_j| \ll |p_j|$

$F_2 = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k + \varepsilon \tilde{F}_2(\{q\}, \{P\}, t)$

$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}$

$Q_j = \frac{\partial F}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_j}$

$P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}(\{q\}, \{p\}, t)$

$Q_j - q_j = \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_j}(\{q\}, \{P\}, t)$

линейное приближение по ε

Положим $\varepsilon = dt$ $\quad \tilde F_2((q),(p),t) = H$

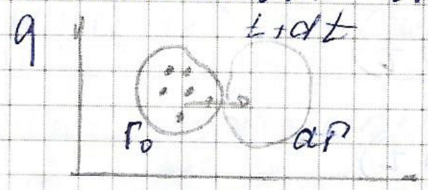
$$P_j = p_j - dt\frac{\partial H}{\partial q_j} = p_j + \dot p_j\, dt = p_j + dp_j = p_j(t+dt)$$

$$Q_j = q_j + dt\frac{\partial H}{\partial p_j} = q_j + \dot q_j\, dt = q_j + dq_j = q_j(t+dt)$$

– малое преобразование – непрерывное каноничное преобразование с произв. функцией в виде ф-ции Гамильтона.

Теорема Лиувилля

Рассмотрим огромное кол-во одинаковых гамильтоновых систем



$$d\Gamma_0 = dq_{10}\dots dq_{s0}\, dp_{10}\dots dp_{s0}$$

$$\Gamma_0 = \int d\Gamma_0$$

Ансамбль Гиббса Γ $\quad d\Gamma = dq_1\dots dq_s\, dp_1\dots dp_s$

$$\Gamma = \int d\Gamma$$

Т. При движении Ансамбля Гиббса его объем сохраняется $\Gamma_0 = \Gamma$.

$$\Gamma_0 = \int\dots\int dq_{10}\dots dq_{s0}\, dp_{10}\dots dp_{s0}$$

$$q_i = q_{i0} + dt\frac{\partial H_0}{\partial p_{i0}}$$

$$p_i = p_{i0} - dt\frac{\partial H_0}{\partial q_{i0}} \qquad H_0 = H((q_0),(p_0),t_0).$$

$$\Gamma = \int\limits_{\Gamma_0} \dots \int D \, dq_{10} \dots dq_{s0} \, dp_{10} \dots dp_{s0}$$

$$D = \frac{\partial(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)}{\partial(q_{10} \dots q_{s0}, p_{10} \dots p_{s0})}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} = \delta_{ij} + dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0} \partial p_{i0}}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} = dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0} \partial p_{i0}}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} = -dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0} \partial q_{i0}}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} = \delta_{ij} - dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0} \partial q_{i0}}$$

$$D = 1 + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0} \partial p_{j0}} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0} \partial q_{j0}} \right) dt$$

$$\Rightarrow D = 1.$$

Лекция №8

Т. Лиувилля: фазовый поток сохр объем

$(q(0), p(0)) \quad g^t \to q(t), p(t)$ - фаз. поток

$$\boxed{g^t D = D}$$

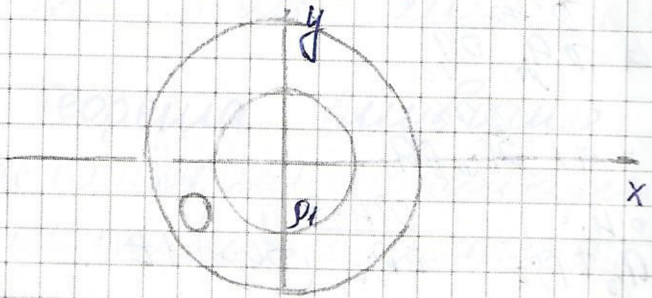
Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть g - сохр. объем непрерывн. взаимнооднозн. отображение $gD = D$

Тогда в любой окр. И любой точки $\in D$ $\exists x \in И$ возвращающегося в И.

$\boxed{\text{д}}$ $^n x \in И$!

Рассмотрим движение частицы в поле $U(r) = ar^4$



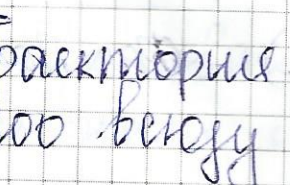
$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \geq 0$$

$$E \geq U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} = a\rho^4 - \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

$\rho_{1,2}(E, L)$ - точки поворота

Траектория либо замкнута, либо всюду плотная?

Идеальный газ



Время за которое газ соберется обратно больше, чем возраст солн. системы

Уравнения Гамильтона-Якоби

$q(t+dt) \longrightarrow q(t+\tau)$ - не на dt, а на конечное τ

$p(t+dt) \longrightarrow p(t+\tau)$

$q(t) \to q(t_0) = q_0$

$p(t) \to p(t_0) = p_0$

Идея: построить преоб, связывающ. q и p с начальными значениями.

$q(t, q_0, p_0)$

$\mathcal{H}((q), (\dot{q}), t)$

Ищем $q(t) \to Q = Q_0$

$p(t) \to P = P_0$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = const = 0$$

$\dot{Q} = 0$

$\dot{P} = 0$

$$H((q),(p),t) + \frac{\partial F_2((q),(P),t)}{\partial t} = 0$$

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$$

$$H\left((q), \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right), t\right) + \frac{\partial F_2((q),(P),t)}{\partial t} = 0$$ - ур-ие Гамильтона-Якоби

S - главная функция

$$H\left((q), \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right), t\right) + \frac{\partial S((q),(P),t)}{\partial t} = 0$$

Полный интеграл — решение, кот. зависит от всех переменных и от пост. интегрирования (от всех)

$S(q_1 \dots q_s, t, \alpha_1 \dots \alpha_{s+1})$

α_{s+1} — аддитивная постоянная

$\underbrace{S(q_1 \dots q_s, t, \alpha_1 \dots \alpha_s)}_{\text{полный интеграл без адд. пост.}} + \alpha_{s+1}$.

$P_j = \alpha_j$

$S(q_1 \dots q_s, t, P_1 \dots P_s)$ — можно рассм. как производящую функцию.

$P_j = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_j}$

$Q_j = \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$

$q_j = (t, (\alpha), (\beta))$

$q_j = (t, (q_0), (p_0))$

Теорема Якоби: ф-ции q_j и p_j, где S — полный интеграл ур-ия Гамильтона-Якоби с ф-ией H являются решениями системы канонич. ур-ий Гамильтона.

Дифф. по времени

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left((q), (p), t\right) = 0 \quad / \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k \partial q_j} = 0 \Rightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \right| \neq 0$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k \partial q_j} = 0$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1 \ldots s.$$

Пример:

Одномерный гарм. осциллятор

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = 0$$

$$S = -Et + S_0(q) \quad / E = \alpha$$

$$-E + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dq}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = 0.$$

$$S_0 = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\, dq$$

$$S = -Et + \int \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\, dq$$

Траектория

$$\beta = \frac{dS}{dE};$$

$$\beta + t = \sqrt{\frac{2m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - \frac{kq^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)$$ $-\beta$

Консервативные системы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1 \ldots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$S = -H_0 t + S_0(q_1 \ldots q_s) \cdot$$

$$H\left(q_1 \ldots q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = H_0$$

S_0 - укороченное действие

S - действие

$$S = \int_{(t_0, q_0)}^{(t_1, q_1)} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$ - функц. действие

$S(\vec{q}, t)$ - действие, удовл. ур-ию Гамильтона Якоби

Метод разделения переменных

Пусть структура ур-ие Г-Я

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(g_1\left(q_1\frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2 \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0$$

$$S = \tilde{S}(q_2 \ldots q_s, t) + S_1(q_1)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(q_1\left(q_1 \frac{dS_1}{dq_1}\right), q_2 \ldots q_s, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}, t\right) = 0$$

$$q_1\left(q_1 \frac{dS}{dq_1}\right) = \alpha_1$$ - инт. в квадратурах

Конс. система: $H\left(g_1\left(q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) \ldots q_s\left(q_s \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)\right)$

$$S = -H_0 t + S_0(q_1 \ldots q_s)$$

$$S_0 = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \ldots + S_s(q_s)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(q_k\, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

$$q_k\left(q_k \frac{dS_{0k}}{dq_k}\right) = \alpha_k$$

$$H_0 = H\left(g_1\left(q_1 \frac{dS_{01}}{dq_1}\right) \ldots g_s\left(q_s \frac{dS_{0s}}{dq_s}\right)\right)$$

$$H_0 = H(\alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

$$S = -H(\alpha_1 \ldots \alpha_s)t + \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(q_k, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$$ -

решение

Лекция №9

Метод разделения переменных в ур-ии Гамильтона-Якоби

Циклические координаты

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_2 \ldots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0$$

// q_1 явно не входит - циклическая

$$S = S_1(q_1) + \tilde{S}(t, q_2 \ldots q_s)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(t, q_2 \ldots q_s, \frac{dS_1}{dq_1}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$\frac{dS_1}{dq_1} = const = \alpha_1$$

$S_1 = \alpha_1 q_1$; α_1 - играет роль обобщ. импульса

$$S = \alpha_1 q_1 + \tilde{S}(t, q_2 \ldots q_s)$$

Пусть консервативна

$$S = \alpha_1 q_1 + \tilde{S}(q_2 \ldots q_s) - H_0 t$$

Пусть $H(g_1(q_1, p_1), \ldots, g_s(q_s, p_s))$

$$S = -H_0 t + \sum_{j=1}^{s} S_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

$$H_0 = H_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

$(q,p) \Rightarrow (\beta,\alpha)$ – S – пр. ф-ция канонического преобразования.

① Декартовы коорд.

$m, \quad U(x,y,z) = U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + U_1(x) + U_2(y) + U_3(z) = 0$$

$$S = -E_0 t + S_1(x) + S_2(y) + S_3(z)$$

$$+E_0 = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2\right] + U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$$

$$E_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 = \alpha_1 - U_1(x) \qquad S_1(x,\alpha_1) = \int\sqrt{2m(\alpha_1 - U_1)}\,dx$$

$$S = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t + \int\sqrt{2m(\alpha_1-U_1)}\,dx + \int\sqrt{2m(\alpha_2-U_2)}\,dy + \int\sqrt{2m(\alpha_3-U_1)}\,dz$$

$$\begin{cases} \beta_1 = -t + \frac{m}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha_1-U_1}} \\ \beta_2 = -t + \frac{m}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha_2-U_2}} \\ \beta_3 = -t + \frac{m}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\alpha_3-U_3}} \end{cases}$$

Пусть $E_0 = \alpha_1$. разделить переменные

② Цилиндрические коорд

$$U(\rho,\varphi,z) = a(\rho) + \frac{b(\varphi)}{\rho^2} + c(z)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right)$$

пусть $b=0$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{(\partial S/\partial\varphi)^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + a(\rho) + \cancel{\frac{b(\varphi)}{\rho^2}} + c(z) = 0$$

$=\alpha_1$

$$S = -E_0 t + p_{\varphi 0}\varphi + S_1(\rho) + S_3(z)$$

$$E_0=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{d\rho}\right)^2+\frac{P_{\varphi_0}^2}{\rho^2}\right]+a(\rho)+\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dz}\right)^2+C(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_3}{dz}\right)^2+C(z)=\alpha_3$$

$$S_3(z)=\int\sqrt{2m(\alpha_3-C(z))}\,dz$$

$$S_1(\rho)=\int\sqrt{2m(E_0-a(\rho)-\alpha_3)-\frac{P_{\varphi_0}^2}{\rho^2}}\,d\rho$$

$$S=-E_0t+P_{\varphi_0}\varphi+S_1(\rho,E_0,P_{\varphi_0},\alpha_3)+$$
$$+S_3(z,\alpha_3)$$

3) Сферические координаты

$$U(r,\theta,\varphi)=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}\to 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right]+$$
$$+a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}=0$$

$$S=-E_0t+P_{\varphi_0}\varphi+S_1(r)+S_2(\theta)$$

$$E_0=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{P_{\varphi_0}^2}{2m}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{P_{\varphi_0}}{r^2\sin^2\theta}\right]+a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}$$

$$g_0\left(\theta,\frac{dS_2}{d\theta}\right)=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2+\frac{P_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}\right]+b(\theta)=\alpha_2$$

$$S_2(\theta)=\int\sqrt{2m(\alpha_2-b(\theta))-\frac{P_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{\alpha_2}{r^2}+a(r)=E_0$$

$$S_1(r)=\int\sqrt{2m(E_0-a(r))-\frac{\alpha_2}{r^2}}\,dr$$

$S = -E_0 t + P_{\varphi_0}\varphi + S(r, E_0, \alpha_2) + S_2(\theta, \alpha_2, P_{\varphi_0})$

Переменные действие-угол

$q_1 \dots q_s$

1) Система консервативна

2) Движение финитно по всем коорд.

3) Близко к периодическому

4) Система допускает полное разделение переменных в ур-ии Г-Я

$H(g_1(a_1, P_1), g_2(a_2, P_2), \dots, g_s(a_s, P_s))$

Возможно только 2 типа движения.

1) $P_k\ q_k$ - оба меняются с одним периодом - либрация

траектория - эллипс

2) q - не период, p - период. ф-ия координат. - вращение

- условно периодич. движения

$S = -H(\alpha_1 \dots \alpha_s)t + S_0(q_1, \dots, q_s), \alpha_1 \dots \alpha_s)$

$S_0 = \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(q_k, \alpha_1 \dots \alpha_s)$

Используем укороченное действие в виде производ. функции.

$S_0 : (q, p) \to (Q, P)$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial S_0}{\partial q_j} = \frac{dS_0}{dq_j}$$

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j (q_j) dq_j = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dS_{0j}}{dq_j} dq_j = \mathcal{I}_j (\alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

$\alpha_1 (\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_s)$ - переменное действие ($\mathcal{I}$)

$S_0 = S_0 (q_1 \ldots q_s, \mathcal{I}_1 \ldots \mathcal{I}_s)$

$H (\mathcal{I}_1 \ldots, \mathcal{I}_s)$ - новая ф-ия Гамильтона

$$Q_j = \varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial \mathcal{I}_j}$$

$\mathcal{I}_j, \varphi_j$ - действие - угол

Запишем ур-ие Гамильтона

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_j}$$

$\dot{\mathcal{I}}_j \quad \dot{\mathcal{I}}_j = 0$

$$\varphi_j = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_j} t + \varphi_{j0}$$

$\frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_j}$ - частота

$$T = \frac{2\pi}{\omega_j}, \quad \omega_j = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_j}$$

$$\Delta \varphi_{j,k} = \oint \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial I_j} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k = 2\pi \delta_{kj}$$

$$2\pi \cdot N$$

$=$

$$\Delta \varphi_j = \omega_j T_j \Rightarrow T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

Чтобы найти соотв. частоты, нужно

1. Найти S_0
2. переменные действ.-угол
3. Энергия системы
4. взять ЧП

Условно-периодическое движение

2S-мерное ФП

$H(q_1(q_1,p_1), \ldots q_s(q_s,p_s))$ - полное разд. переменных

и система консервативна, тогда можно найти полный интеграл $S = -H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)t + \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q_j, \alpha_1, \ldots \alpha_s)$

$g_i(q_i, p_i) = \alpha_i$

$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j(q_j) dq_j = I_j(\alpha_1 \ldots \alpha_s)$ - действ.

$H(I_1 \ldots I_s)$

$S_0(q_1 \ldots q_s, I_1 \ldots I_s)$

$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}$ - перем. угол

$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H'}{\partial J_j} = \frac{\partial H}{\partial J_j}$

$\varphi_j = \omega_j t + \varphi_{j0}$

$J((q),(p)) = J_{j0}$ - ∃ огр. в движении ФП

J_j - однозн. ф-ции координат q

$\varphi_j(q_j,(J))$ - неоднозначные ф-ии.

(при обходе замк. кривой коорд. φ может получать приращение, кратное 2π или 0/ кривая лежит в D)

Пусть есть нек. однозначная

$F((q),(p)) = \sum_{l_1} \dots \sum_{l_s} C_{l_1 \dots l_s}(J) e^{i(l_1\varphi_1 + \dots + l_s\varphi_s)}$

Любую одн. ф-ию состояния можно представить в виде ряда Фурье

$$F((q),(p)) = \sum_{l_1} \dots \sum_{l_s} C_{l_1} J e^{i(l_1\omega_1 \dots l_s\omega_s)t}$$

$\omega_j = \frac{\partial H}{\partial J_j}$

- периодич. ф-ия времени, изм. с частотой $l_1\omega_1 + \dots l_s\omega_s = \Omega_{l_1 \dots l_s}$, если все частоты кратны! Все члены отдельно-периодические

$\det\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial J_j}\right) \neq 0$ - нет кратных частот

Движение системы будет происходить по многообр. s измерен

$T^s = \underbrace{S^1 \times S^1 \times S^1}_{s}$ - намат. на т ф

- Условно периодическое

1. $((q_0)(p_0))$

Через большой пр-л. времени с она через $q_0 p_0$ не пройдет, а пройдет сколь угодно близко.

Невырожденное движение

Если частоты соизмеримы

$n_1 + \omega_1 + n_3 \omega_3 + n_5 \omega_5 \simeq 0$ то движение частично вырожд.

Если n соотношений - вырожден.

все частоты соизмеримы

Все ω кратны или имеют

одну веку. часть.

в общем случае: $\mathcal{H}(I_1 \ldots I_s)$

Пусть $n\omega_s = l\omega_2$

$\mathcal{H}(lI_1 + nI_2, I_3, \ldots, I_s)$

Если в системе есть вырожд., то число однозначных инт. движения будет больше, чем s.

К позволяет разделять переменные в нескольких коорд. сетках.

$U = -\frac{a}{r}$

Интегралы: E, L, Вектор инт Лапласа

$$\mathcal{I} = [\dot{\vec{r}}\vec{L}] - \frac{a}{r}\vec{r}$$

в полярных + в эллипт. коорд.

1. $\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2}$

$k_1 \neq k_2$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big[\Big(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_1}}_{p_1}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_2}}_{p_2}\Big)^2\Big] + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = 0$$

$$S = -\mathcal{H}t + S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

$$g_1(q_1, p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} = \alpha_1$$

$$g_2(q_2 p_2) = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = \alpha_2$$

$$S_i(q_i) = \int \sqrt{2m\left(\alpha_i - \frac{k_i q_i^2}{2}\right)}\, dq_i$$

$$S_0 = S_1(q_1 \alpha_1) + S_2(q_2, \alpha_2)$$

$${=}(J) \qquad {=}(J)$$

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\, dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i)\, dq_i$$

$$\frac{p_i}{2m\alpha_i} + \frac{k_i q_i^2}{2\alpha_i} = 1$$

$$a = \sqrt{2m\alpha_i}, \quad b = \sqrt{2\alpha_i / k_i}$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\pi \frac{2\alpha_i\sqrt{m}}{\sqrt{k_i}} = \alpha_i \sqrt{\frac{m}{k_i}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ H &= \sqrt{\frac{k_1}{m}} J_1 + \sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2 \end{aligned}}$$

$$w_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$$

$$S_0 = \int \sqrt{2m\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}} J_1 - \frac{k_1 q_1^2}{2}\right)}\, dq_1 +$$

$$+ \int \sqrt{2m\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2 - \frac{k_2 q_2^2}{2}\right)}\, dq_2$$

$$w_i = \frac{\partial S_0}{\partial J_i} = \sqrt{2m} \int_0 \frac{dq_i \cdot \sqrt{\frac{k_i}{m}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{k_i}{m}} J_i - \frac{k_i q_i^2}{2}}}$$

$$\int \frac{dq_i}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{k_i m}} J_i - q_i^2}} = \arcsin \frac{q_i}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{k_i m}} J_i}}$$

$J = \frac{\text{Дж}}{\text{Гц}}$ – энергия на частоту

φ – фаза

Полностью выр движение

$k_1 = k_2$ $\quad \mathcal{H} = \alpha_1 + \alpha_2 = \omega(J_1 + J_2) = \sqrt{\frac{k}{m}}(J_1 + J_2)$

рассмотреть изотр гарм осц в поляр. координатах

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2}$$

$$q_1^2 + q_2^2 = r^2$$

2. Движение частицы массой m в ЦС поле $U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ в переменных „действие"

r, θ — полярные

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = 0$$

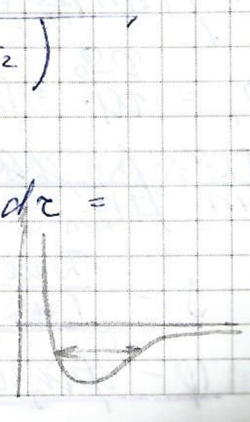
$$S = -Et + S_r(r) + L\theta$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint L\,d\theta = L$$

$$J_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{\ldots\ldots}\;dr =$$

$$= -\sqrt{L^2 + 2mb} + \sqrt{\frac{ma^2}{-2E}}$$



$$J_r = -\sqrt{J_\theta^2 + 2mb} + \sqrt{\frac{ma^2}{-2E}}$$

$$E = -\frac{ma^2}{2\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^2}$$

$$\omega_r = +\frac{ma^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^3}$$

$$\omega_\theta = \frac{ma}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^{-2}} \frac{J_\theta}{\sqrt{J_\theta^2 + 2mb}}$$

$$\gamma' = \sqrt{1 + \frac{2mb}{J_\theta^2}}$$

$$\omega_\theta = \gamma' \omega_r.$$

$b = 0$: $\omega_\theta = \omega_r$, $\gamma' = 1$. – полностью вырождение

$$E = -\frac{ma^2}{J_r + J_\theta}$$

Можно решать задачи в разл координатах

$U = -\frac{a}{r}$ в элл координатах

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

Идеальная жидкость

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{dV_i}{dt} &= \rho f_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \\ \frac{d\rho}{dt} &+ \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \end{aligned}\right\}$$

ρ, V_i, P_{ik} - неизвестные

Модель ид. жидкости:
движущаяся сплошная среда, в которой: 1. P_{ik} изотропен

$$P_{ik} = -P(x, y, z, t)\,\delta_{ik}$$
давление

2. движение происходит адиабатически и отсутствует вязкость
отсутствует теплообмен $\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + V_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = 0$
= изэнтропическое движение s - const

$V = \frac{1}{\rho}$; $\left(\frac{P}{\rho}\right)^{\varkappa}$ - const, $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$

$\rho = F(P)$ — баротропные процессы

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \overset{=0}{\vec{f}} - \vec{\nabla} p$$ ограничение

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\rho = F(p)$$

уравн. Эйлера

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} - [\vec{v}[\vec{\nabla}\vec{v}]]$$

$$\frac{1}{2}[\vec{\nabla}\vec{v}] = \vec{\omega}$$ – вихрь

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2[\vec{\omega}\vec{v}] = -\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + \vec{f} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

Пусть $\vec{f} = -\vec{\nabla} u$

уд. энерг.

Энтальпия: $\boxed{w = e + p\frac{1}{\rho}}$

$$dw = Td\overset{=0}{s} + Vdp = \frac{dp}{\rho}$$

$$\vec{\nabla} w = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2[\vec{\omega}\vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + u + w\right)}$$ – в форме Громеки Лэмба

НУ: v_0
ГУ: $v_n\big|_{гр} = 0$

1. Стационарное течение – поле скоростей от времени не зависит $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

2. Линии тока касат. к которым указывают напр. скорости

$$\frac{d\vec r}{ds} = \frac{\vec v}{v} = \vec e \qquad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Умножим на $\vec l$:

$$\vec l \cdot \vec\nabla P = 0, \quad P = \frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + U$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 0$$ – вдоль лин тока P сохраняется.

Интеграл Бернулли $\boxed{\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + U = c}$

Безвихревое движение (потенциальное)

$$\vec\omega = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\vec v = 0 \Rightarrow \vec v = \vec\nabla\varphi(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \vec v}{\partial t} = -\vec\nabla\left(\frac{v^2}{2} + w + U\right)$$

$$\vec\nabla\left(\frac{v^2}{2} + w + U + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w + U + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(t)}$$ – инт Коши

Если безв. и уст. то

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w + U + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \tilde{C}}$$ едина для всего объема

Потоки энергии и импульса

СС

Уравнение неразрывности

$$\rho\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\rho\varphi v_k}{\partial x_k}$$

Эйлер: $$\rho\frac{d\vec v}{dt} = \rho\vec f - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\rho\frac{dv^2}{dt\,2} = -v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i v_i$$

$$\frac{de}{dt} = T\overset{=0}{\frac{ds}{dt}} - p\frac{dV}{dt} \qquad V = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \rho f_i v_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)v_i}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \rho f_i v_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\rho\left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)v_i = \rho f_i v_i - \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)$$

Если $f_i = 0$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0}$$ ур-ие неразрывности

$$W_i = \rho\left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)v_i$$ - вектор потока энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)dV = -\oint\left[\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) + p\right]v_i n_i dS$$

внут. кин. потери

перенос через границу; работа сил давления

$\overline{W}$ - поток энергии сс, вытек. из V в ед. времени через ед. площадку с век. нормали $\vec{n}$

Поток импульса

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

$P_{ik} = -(p_{ik} - \rho v_i v_k)$ – плотность потока имп.

$p_{ik} = -p\delta_{ik}$

$P_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ – для ид. жидкости

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\oint P_{ik} n_k \, ds}$$

$\boxed{P_{ik}}$ – i-ая комп. импульса, вы[текающего] через площадку с норм. n_k

Звуковые волны

распр. малых возмущений ρ, p, v в сжимаемой сплошной среде. Колебания распр. в виде волн малых амплитуд

p_0 – равн. значение

$$p = p_0 + p', \quad p' \ll p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho' \ll \rho_0$$

$$\begin{cases} \rho_0\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) + \cancel{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}} = -\nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0 \end{cases}$$

Лин. прибл.:
$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p' \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

div:
$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v = -\Delta p'$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho'$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \Rightarrow p' = +c_0^2 \rho'$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0 \\ &\frac{\partial p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p^2 = 0 \end{aligned}}$$

$$\overline{V} = \overline{\nabla} \phi$$

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p'$$

$$p' = -c_0^2 \rho' \quad \rho' = -\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$-\frac{\rho_0}{c_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho_0 \Delta \phi = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0}$$

Возм
только
в одной
среде

Плоская волна

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\xi = x - ct, \quad y = x + ct$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \xi} = 0$$

$$\phi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Пусть $f_2 = 0$

$\rho' = f_1(x-ct)$ $\quad x - ct = const$

$x = const + ct$

$\underset{\xrightarrow{c}}{f_1}$ возм. - бегущая волна

Такое же решение у поля скорост

Пусть $\quad y = f_1(x-ct)$

$V_y = V_z = 0, \quad V_x = f_1'$

V - скорость частиц жидкости

совп. с напр. распр. волны - продольн

$\rho' = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Rightarrow \rho' = +\frac{\rho_0}{c} f_1'$

$\rho' = \frac{\rho_0}{c} V, \quad \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V}{c}$

Монохроматич. волна

$\varphi = Re\, e^{-i\omega t} \varphi_0(x, 0, z)$

$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0.$

Если плоская, то

$\varphi(x, t) = Re A e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$

$A = a e^{i\alpha}$ $\quad \vec{n}$ - вдоль напр. волны
$(1, 0, 0)$

Волновой вектор: $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi(\vec{r}, t) = Re A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ &\varphi = a\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha) \end{aligned}}$$

Тензор вязкого напряжения
Уравнение Навье - Стокса
Динамически подобные течения
Число Рейнольдса.

Вязкая жидкость - модель движения в жидком или газообр. состоянии, при котором существенна сила внутр. трение

$p_{ik} = -p\delta_{ik}$

В вязкой жидкости появляются напряжения сдвига. Нормаль к разным эл-ам пов-ти неодна.
$p_{ik}^{пол}$ неизотропны т.к. зависят от нормали

$p_{ik} = -p\delta_{ik} + t_{ik}$ — опр. тензором скорости деформации

$\frac{\partial V_i}{\partial x_k}$; Если $\frac{\partial V_i}{\partial x_k}$ мало, V_i - мало, то t_{ik} - лин. одн. ф-ия $\frac{\partial V_i}{\partial x_k}$

Нужно исключить вращение $\Rightarrow$
t_{ik} - симметричный тензор

$$t_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

– тензор вязких напряжений

η и ζ – ф-ии давления и температ. ($\Rightarrow$ координат)

$t_{ii} \Rightarrow$ η – внутр. трение

ζ – объемная вязкость

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Чаще всего:

Ур-ие Навье-Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$t \to -t$, $v \to -v$

Вязкость приводит к необратимости процесса

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \operatorname{grad} p + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

Если жидкость несжимаема

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \operatorname{grad} p + \eta\Delta\vec{v}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Решение:

$\mathcal{f} = \nabla \varphi$

rot: $\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\, V + \mathrm{rot}(\vec{V}\nabla)\vec{V} =$

$= \eta \Delta\, \mathrm{rot}\, \vec{V}$

div:

$\Delta P = -\rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$

ГУ: $\vec{V}_{гр} = 0$ · условие прилипания

Несж. жидкость:

$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \eta \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k}$

$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$

Возникла идея отделить влияние дин. параметров, хар. жидкость от влияния самих движ. изменение

ρ, η xV

Записываем в безразм. форме

$V_i = \frac{V_i}{V_0}, \quad X_i = \frac{x_i}{R}, \quad T = \frac{t V_0}{l}$

$P = \frac{P - P_0}{R \quad \rho}$, пусть $f = 0$

$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k}$

$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$

$Re = \frac{\rho V_0 \ell}{\eta}$ - число Рейнольдса

Пусть наше решение
$V_i = F_i(T', X, Re)$ при опр. Re
Тогда выбираем 3 из 4
(ρ, V_0, ℓ, η) при фикс. Re

Получим III семейства решений, описываемых одной формулой.
- Динамически подобное течение.
Аналогично: $P = P(T, X_\alpha, Re)$
- Закон динамического подобия
(для вязкой жидкости с мен. вязкостью)