ТФКП. 14.09.12г.

Литература: 1) В.И. Смирнов т.3 ч.2 (Курс высшей математики) просто
2) М.А. Лаврентьев, Б.А. Шабат (Методы ТФКП) прикладная мат.
3) И.И. Привалов (Введение в ТФКП) чистая математика

История ТФКП:

Джс. Кардано (1501–1576) – выделил ТФКП как отдельную обл. мат-ки.
Эйлер Леонард – открыл ТФКП.
О. Коши – наиболее лучшее развит-ие ТФКП (Франция)
в 1875 – центр мат. мысли в обл-ти ТФКП перешел в Германию –
Б. Риман (1826 – 1866) – теория относительности.
К Вейерштрасс – 1я мат. работа в 40 лет.
с конца XIX века ТФКП – прикладная наука, начала внедряться
Петербургская школа мат-ков (Жуковский, Седов, Келдыш, Лаврентьев...)
ТФКП сейчас – наука о материалах (для станций, стр-ва и т.п.)

Поле комплексных чисел. Оп-ция слож-я и умн-я. Геом-я интерпретация компл. чисел, алг-я, тригон-я и показ-я формы компл-х чисел. Осн-е пон-я о компл-х числах

K: Рассм-м мн-во всевозм-х пар вещ-х чисел $(a,b),(c,d)\dots(m,n)$ с упоряд-м расп-ем самих чисел, т.е.

$$(a,b)\neq(b,a)$$

Будем считать, что в мн-ве K пары равны $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ (a,b)=(c,d)\ \Leftrightarrow\ a=c,\ b=d.$$

Введем 2 арифм-ие оп-ции: 1) **Сложение**:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$

2) Умножение

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

$\forall$ сост-я этого поля K будем наз-ть компл-м числом, состоящим из пары вещ-х чисел:

$$z_1=(a,b),\ \dots,\ z_k=(a_k,b_k)$$

Произв-ое число, и-е не конкр-ся обозн-ся $z=(x,y)$

$c=(c,0)$ – вещ-ое число.

$\exists\ d=(d,0)$

$$c\cdot(a,b)=(c,0)\cdot(a,b)=(ac,\ bc)$$

$$(a,b)=a\cdot\overbrace{(1,0)}^{1}+b\underbrace{(0,1)}_{i}$$ (от лат. imaginarius) – Эйлер

$$i\cdot i=i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,\quad i=\sqrt{-1}$$

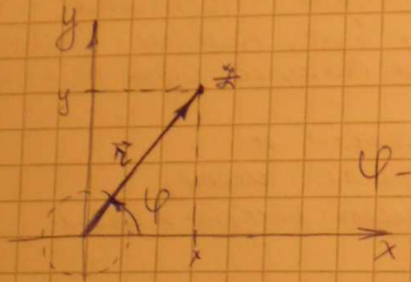
$(a,b)=a+ib$ – алгебраическая запись опр-го компл. числа

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
3. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$
4. $(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$
5. $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1z_3+z_2z_3$

Для компл-х чисел $\nexists$ понятия больше или меньше нельзя: $z_1>z_2$, $z_3<z_5$!

Рассм-м геом-е понятие, связ-ое с ТФКП:

$z=(x,y)$



x – вещ-я часть компл. числа $\quad x=\mathrm{Re}\,z$

y – мнимая часть компл. числа $\quad y=\mathrm{Im}\,z$

$z=(x,y)=x+iy=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z$ (1)

φ – положительно при отсчете против часовой стрелки.

Каспер Вессель (1745 - 1818) – 1799 – предложил компл-ую плоскость

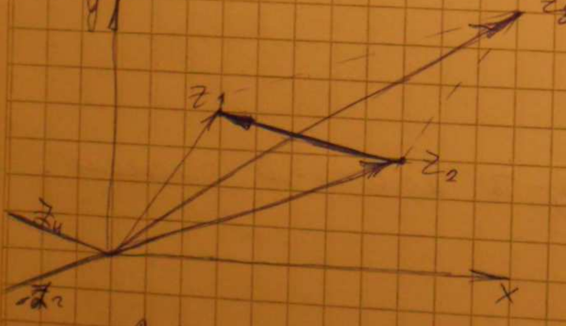
$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (2)

$r=|z|$ – модуль $\qquad |z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ → ф-ция однозн-я

$\varphi=\mathrm{Arg}\,z$ – аргумент числа z

$(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{i\varphi}$

$z=|z|e^{i\varphi}$ (3) – показательная форма компл. числа



$z_1+z_2=z_3$

2 вектора наз-ся св-ми, если для них вып-ся усл-е
• векторы равны, если их можно совместить путём парал-го переноса

Нельзя увлекаться векторным анализом, кроме умн-я и сл-я

компл-е число – своб-й вектор с от-ями сложе-я, ~~умн-я~~ вкл...

2 параметра: модуль, аргумент.

$|z|=R$ – окр-сть радиуса R.

Компл-но сопряж-е число для числа $z=x+iy$ обозн-ся $\bar{z}=x-iy$.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Модуль произведения 2х компл-х чисел $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(z_1\cdot z_2)(\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2)}$

$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1)}\cdot\sqrt{z_2\bar{z}_2} = |z_1||z_2|$

$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k| = |z_1||z_2|\cdot\ldots\cdot|z_k|$

$|\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{k}| = |z|^k$

$|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2| \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \qquad (4)$

$|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big| \qquad (5)$

$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$

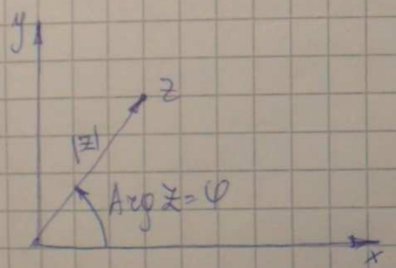
$z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$

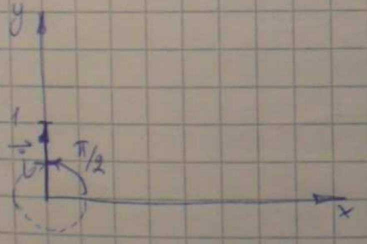
$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Главное зн-ние аргумента комплексного числа:

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$





$i = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$k = 1 \Rightarrow i = 1\cdot e^{-\frac{3}{2}\pi}$

$\operatorname{Arg} z = \underset{\varphi}{\underset{\|}{\arg z}} + 2\pi k \qquad -\pi < \arg z \le +\pi$

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x>0$, $y-\forall$

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi$, если $x<0$, $y>0$

$\arg = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi$, если $x<0$, $y<0$.

Д/З. 1. Док-ть рав-во $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$

2. Для 3х точек зададим z_1, z_2, z_3 вып-ся усл-е:

- $z_1+z_2+z_3 = 0$
- $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Док-ть, что z_1, z_2, z_3 яв-ся вершинами равност-его треуг-ка, вписанного в единичную окр-сть.

$\cancel{|z_1+z_2|^2 = \sqrt{|(z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2)|} = \sqrt{(z_1+z_2)(z_1+\bar{z}_2)(\bar{z}_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)}}$

$\cancel{= \sqrt{(z_1+z_2)^2(\bar{z}_1+\bar{z}_2)^2} = |z_1+z_2||\bar{z}_1+\bar{z}_2| = 1}$

$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (а)

$z = re^{i\varphi}$ $\quad -\pi < \varphi < +\pi$

Абрахам Муавр: предположения, что

$z = 1\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (б)

Подставив (б) в (а)

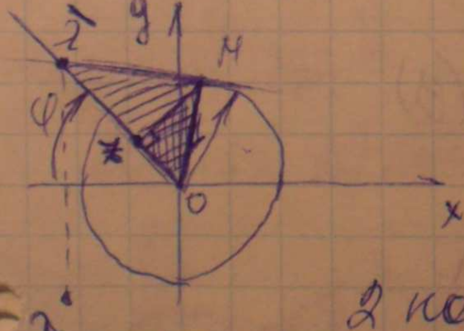
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (1)

$\cos 5\varphi$ $\quad \sin 5\varphi$.

Инверсия отн-но един-й окружности.

$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\left(\frac{1}{z_2}\right)$ $\quad \boxed{w = \frac{1}{z}}$ (*)

Преобр-ние отн-но ед. окружности



$\boxed{|z| < 1}$

$|z| > 1$

2 подобных треуг-ка

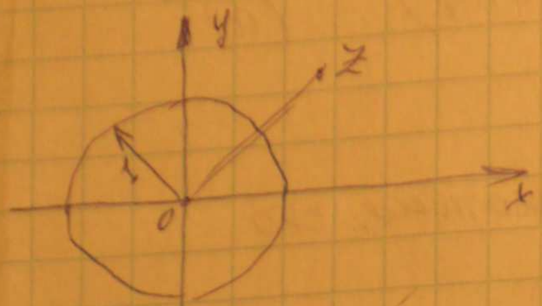
$\frac{|OM|}{|Oz|} = \frac{|O\lambda|}{|OM|}; \Rightarrow \frac{1}{|z|} = \frac{|\lambda|}{1} \Rightarrow |z| = \frac{1}{|\lambda|}$ (1)

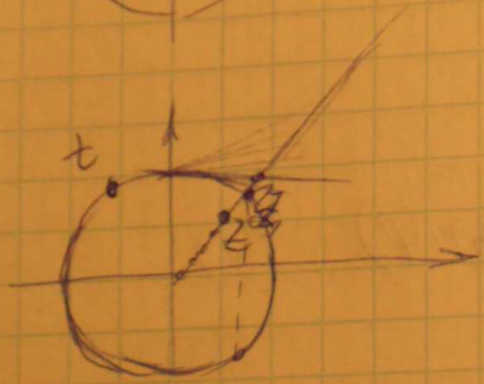
$|z|\cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{|\lambda|}e^{i\varphi} = \frac{1}{|\lambda|e^{-i\varphi}}$ (2)

$z = \frac{1}{\bar\lambda} \Rightarrow \bar\lambda = \frac{1}{z} \Rightarrow \bar{\bar\lambda} = \frac{1}{\bar z} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\bar z}$

опр Нах-ние по зад-й точке z ($|z|<1$) точки λ^* наз-ся инверсией относительно единичной окруж-сти, при этом

$|\lambda||z| = 1$.





$0 \cdot \infty = 1.$

$t = 1 \cdot e^{i\varphi}$; $\bar{t} = 1 \cdot e^{-i\varphi}$

Яков Штайлер.

Корень n-й степени из компл-го числа

$w = \sqrt[n]{z}$, $w^n = z$ *

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $-\pi < \theta < \pi$ (3)

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (4)

$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho^n = r$, $\rho = +\sqrt[n]{r}$; $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $(k = \overline{0, n-1})$

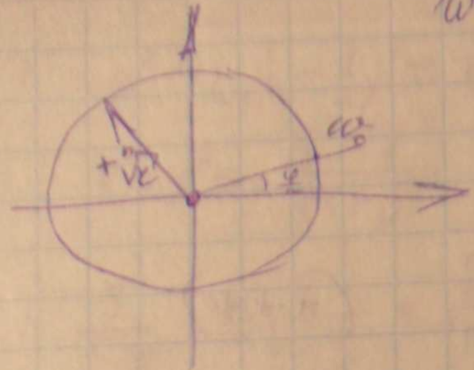
$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$

$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)$

. . . .

$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right)$

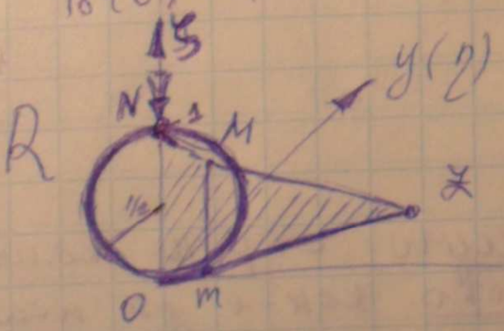
w_i вершины $i = 0, n-1$



Стереограф-я проекция. Сфера Римана

Бернхарт Риман (1826–1866)

1846г.



$M(\xi_M, \eta_M, \zeta_M)$ как ф-ции коорд-т точки z на пл-сти.

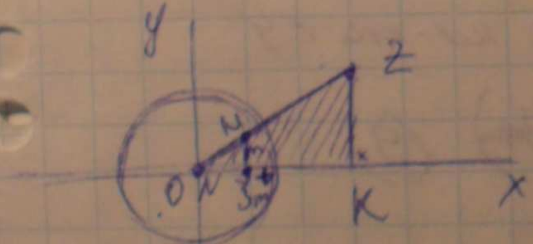
радиус $\frac{1}{2}$

$\triangle ONz \sim \triangle mMz$

$$\frac{|NO|}{|Mm|} = \frac{|Oz|}{|mz|} \Rightarrow \frac{1}{\zeta_M} = \frac{|z|}{|Oz| - |Om|}$$

$$\frac{1}{\zeta_M} = \frac{|z|}{|z| - |Om|}$$

$$\zeta_M = 1 - \lambda \quad (5) \quad \left(\lambda = \frac{|Om|}{|z|}\right)$$



$\triangle OMt \sim \triangle OzK$

$$\frac{\xi_M}{x} = \frac{\eta_M}{y} = \frac{|OM|}{|Oz|}$$

$$\xi_M = x \cdot \lambda, \quad \eta_M = y \cdot \lambda; \quad (6)$$

уравнение сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (7) \qquad \xi_M^2 + \eta_M^2 + \left(\zeta_M - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Внося выражения (5) и (6) в (7)

$$\lambda^2(x^2+y^2)+\frac{1}{4}-\lambda+\lambda^2=\frac{1}{4}$$

$$\lambda[\lambda|z|^2-1+\lambda]=0.$$

$$\lambda=\lambda_0=0 \qquad \boxed{\lambda=\frac{1}{1+|z|^2}} \quad (8)$$

$$\xi_M=\frac{x}{1+|z|^2},\ \eta_M=\frac{y}{1+|z|^2};\ \zeta_M=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \qquad (***)$$

$|z|\to\infty$

В ТФКП различают так называемую откр-ю компл. плоскость, к-я содержит только кон-е зн-ния компл-х чисел

Под замкн-той пл-стью понимают сферу Римана

(Т) $\forall$ окружн-ть на пл-сти компл. переменного XY имеет своей стереограф-й проекцией сферу Римана

Запишем ур-ние окр-сти на пл-сти XY.

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \quad \cancel{(***)} \quad (9)$$

Подставим зн-ния x, y

$$1-\zeta=1-\frac{|z|^2}{1+|z|^2}=\frac{1}{1+|z|^2}$$

$$\boxed{1+|z|^2=\frac{1}{1-\zeta}}$$

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta} \qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta}; \quad (10)$$

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta} \qquad (11)$$

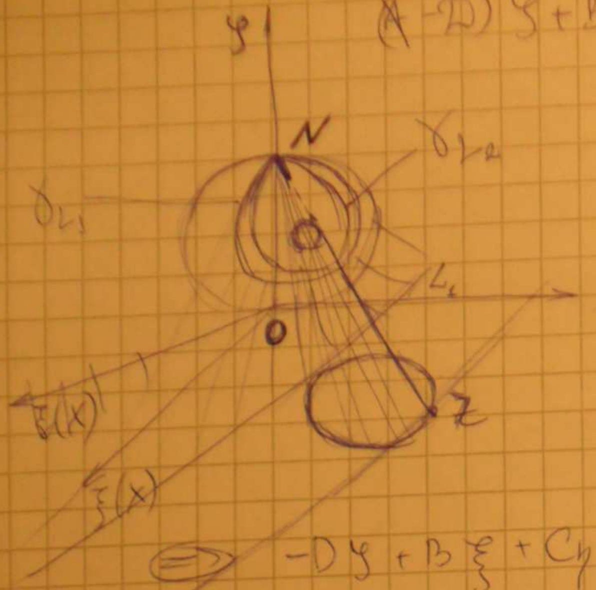
$$A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

$$(A-D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0 \qquad (12)$$

$(A-D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0$ (12)

$\exists A = 0$

$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ → прямая в плоскости x, y



(1) Рис.

$\Rightarrow -D\zeta + B\xi + C\eta + D = 0$ (13) — ур-ние плоскости, не в начале координат.

$\exists(\xi,\eta)=0$: $-D\zeta = -D$

$\zeta = 1$

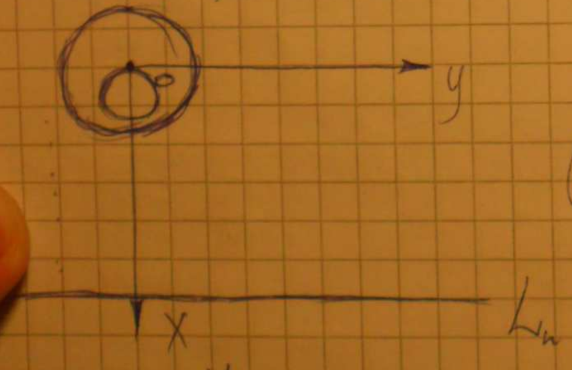
Стереогр. проекция: окружность в окружность, прямая в окружность

На сфере Римана нет разницы между линиями и окружност.

$L_2 \parallel L_1$.

2 ||-ые прямые на пл-сти компл-ного перем-го на сфере Римана как 2 окр-сти, касающиеся в N — сев. полюс

Точка пересечения 2х линий — соотв-ет соотв-ая точка на сфере Римана



(2) Рис.

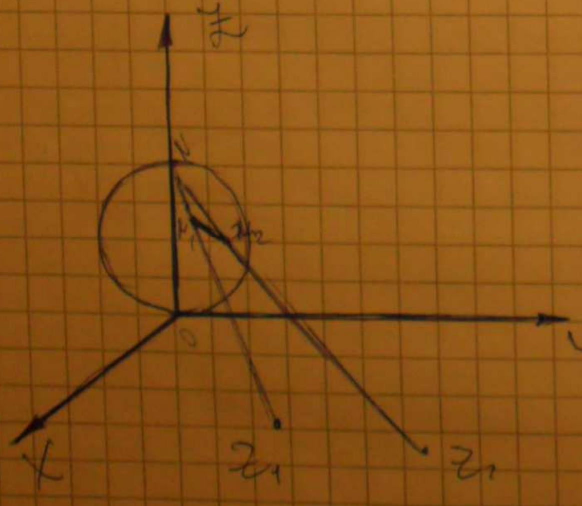


Рис. 3.

$|M_1M_2| = d$

$d = \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 + (\zeta_1-\zeta_2)^2}$ (14)

$\xi_1 = \frac{x_1}{1+|z_1|^2}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{1+|z_1|^2}, \quad \zeta_1 = \frac{|z_1|}{1+|z_1|^2}$

$\xi_2 = \dots, \quad \eta_2 = \dots, \quad \zeta_2 = \dots$

$d = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$ (16)

$\exists z_2 \to \infty \Rightarrow d = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$ (16)$_*$

Расстояние на сфере Римана между 2мя точками всегда конечно.

$\{z_n\}$ — посл-сть к.ч.

$z_n = a_n + ib_n \Rightarrow$ посл-сть к.ч. — сумма 2х вещ-х посл-стей

Следоват-но, введем понятия для к.ч.

Опр 1. Число $z_* \neq \infty$ наз-ся $\lim \{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{Z}_+$: при $\forall n > N$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ $|z_n - z_*| < \varepsilon$ — сходящаяся $\{\}$ к кон. числу $(N(\varepsilon))$

Опр 2. $z_* = \infty \Rightarrow |z_*| = \infty$ наз-ся пределом посл-сти $\{z_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_+$: при $\forall n > N (n \in \mathbb{Z}_+) \Rightarrow |z_n| > \varepsilon$

Опр 3. Если все члены посл-сти по модулю $\forall n \geq 1$ $|z_n| \leq M$, где M — кон. положит-е число, то такая посл-сть наз-ся огр-й.

Геом-ски: огр-я посл-сть лежит внутри окр-сти с радиусом M.

Т. Н-м и Д-м дл-ем сх-сти посл-сти $\{z_n\}$ к числу z_* яв-ся сх-сть посл-стей $\{a_n\} \to a_*$ и $\{b_n\} \to b_*$, $z_n = a_n + ib_n$, $z_* = a_* + ib_*$.

▷ Н) $\exists \{z_n\}$ сх-ся $\Rightarrow |z_n - z_*| < \varepsilon$, $(\varepsilon > 0, \forall)$, $n > N \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n - a_*| < |z_n - z_*| < \varepsilon$

$|b_n - b_*| < |z_n - z_*| < \varepsilon$

Д) Из того, что эти посл-сти сх-ся, мы можем сказать, что

$|a_n - a_*| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\forall n > N_1 (N_1)$ $\quad N_1 \neq N_2$

$|b_n - b_*| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\forall n > N_2 (N_1)$

выбираем $\max(N_1, N_2)$. $\exists \max - N_1$.

Эти посл-сти будут заведомо сх-ся при $n > N_2 (N_1)$

$$|z_n - z_*| = \sqrt{(a_n - a_*)^2 + (b_n - b_*)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} < \sqrt{\varepsilon^2} \leq \varepsilon$$ ◀

Пример. $\exists \{z_n\}$, $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ $\quad \underbrace{z_n = |z_n| e^{i\arg z_n}}$ сх-ся при $|z_n| \to z_*$, $\arg z_n \to \arg z_*$

При этом $\{z_n\}$, $z_n = a_n + ib_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = ?$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} [e^{i\arg z_n}]$

$$|z_n| = \left|1 + \frac{x+iy}{n}\right|^n = \left|1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n$$

$$|z_n| = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$ при $n \gg 1$ (дост-о большом)

— второго пор-ка малости

тогда $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2x}}\right]^x = e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = e^x$

$e^{i\arg z_n}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n e^{in\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \longrightarrow$$

$\Rightarrow n\arg z_n - n\varphi = n\arctg \frac{y/n}{1 + \frac{x}{n}}$ ⊖ $\quad \operatorname{tg} x \approx x$

$\frac{x}{n}$ — можно отбросить

$$\lim_{n\to\infty} e^{i\varphi_n} = \lim_{n\to\infty} e^{i\arg z_n} = e^{iy}.$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = e^x \cdot e^{iy} = e^z$$

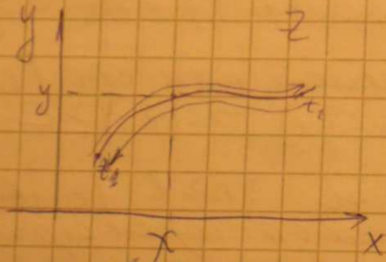
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z = e^x \cdot \boxed{e^{iy}}$$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

$$e^{iy} = e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy} \cdot e^{2k\pi \cdot i}$$

Кривая (линия)

Опр. Кривой наз-ся мн-во компл. пл-сти Z, коорд-ты к-х опр-ся 2мя вещ-ми ур-ниями.



$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

t – вещ. параметр

$$t_1 < t < t_2$$

Если кривая имеет касат-ую в каждой точке, то она наз-ся гладкой.

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0.$$

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$
$$dy = \psi'(t)\,dt$$

$\sqrt{dy^2 + dx^2}$ – дифф-л дуги этой кривой.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t_1) &= \varphi(t_2)\\ \psi(t_1) &= \psi(t_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ замкнутая кривая

Область – D (G)

Опр 1. Обл-ю наз-ся мн-во компл. чисел, обладающее 2мя св-вами:
1) каждая точка мн-ва $\in D$ в месте с нек-й окр-стю
2) $\forall$ 2 точки обл-ти можно соединить непр-й кривой, целиком располож-й в этой обл-ти

Опр 2. Гр. точкой обл-ти наз-ся точка, в беск-о малой окр-сти к-й есть точки $\in D$ и $\notin D$.

Сов-сть гр. точек – граница обл-ти (контур)

Гр. точки $\notin$ области.

Т (Жордана) $\forall$ простая замкнутая кривая конечной длины разбивает все мн-во (·) компл-й пл-сти на 2 обл-ти: внутр. D_+ и внешн D_-, а (·)ки самой кривой $\notin$ ни той ни другой пл-сти.

Внутр. разрезы O^+ или O^- наз-ся замк. или разомкнутая кривая (линия)

Кон. обл-сть O^+ наз-ся многосвя-й или n-связной, если её контур (граница) образован n кривыми (линиями) замкнутыми или разомкнутыми, но не касающиеся друг друга и не пересекающиеся друг с другом

$\int$ z контур $\Rightarrow$ $D^+ + \gamma = \bar{D}$ – замк. область.

∀ n-связную конечную область можно превратить в односвязную, введя в нее n-1 внутр. разрезов.

Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность, дифференц-сть, условие Коши-Римана.

Опр. Если $\forall (\cdot)\, z \in D^+$ (или D^-) по какому-нибудь правилу (закону) поставлена в соответствие 1 или неск-о $(\cdot)\, w \in G^+$ (или G^-), то говорят, что задана ф-ция на D^+ (или D^-) $w = f(z)$

$w = f(z)$ - однозн-я, если $\forall z_* \to w_*$ (!)

$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

Опр. $w_* \neq \infty$ наз-ся $\lim f(z)$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall z$, удовл-их усл-ю $|\vec{z} - \vec{z}_*| < \delta$ вып-ся $|f(z) - w_*| < \varepsilon$.

Опр. $f(z)$ - непр. в $(\cdot)\, z_0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$f(z)$ - дифф-ма в $(\cdot)\, z_0$, если $\exists \lim$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$ независящий от закона стремления h к 0.

Опр. Однозн-я в обл. D $f(z)$, имеющая в этой обл-ти непр. конеч. производную наз-ся регулярной ф-цией компл. перем-го z.

$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$

Пример. $f(z) = iy$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ (вещ.)}} \frac{0}{h} = 0 \qquad f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{ih}{ih} = 1.$$

Т.к. $\lim$ различны $\Rightarrow \lim$ не $\exists$.

∀ 2 случая:
1) h - вещ, $h = \Delta x$
2) h - чисто мнимая $h = i\Delta y$.

1) $$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

2) $$f'(z) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x, \Delta y + y) - v(x,y)]}{i\Delta y} =$$
$$= \frac{\partial u}{i\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

$$-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \qquad (4) \qquad \text{Условие Коши-Римана (C.R.)}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \; \text{(=)} \; — \text{ критерий Даламбера}$$

$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ (5)

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f'_z = 2z.$$

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2z.$$

Докажем дост-ть CR

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\text{Пусть } h = \Delta x + i\Delta y$$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$f(z) \to \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad f(z) = u + iv.$$

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) + v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y. \qquad (6)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (7)$$

внесем в (7) (6), учитывая, что

$$f(z+\Delta z) - f(z) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y) \quad (8)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (9)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_5 \Delta x + \varepsilon_6 \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (10)$$

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4 \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0, \quad \varepsilon_5 \to 0, \ \varepsilon_6 \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cancel{(\Delta x + i\Delta y)}}{\cancel{\Delta x + i\Delta y}} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varepsilon_5 \Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varepsilon_6 \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (11)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varepsilon_5 \Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varepsilon_6 \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (12) \Rightarrow 0$$

см. (5) и лемма

оценим по модулю 2 слагаемые ф-ы (12):

$$\left|\frac{\varepsilon_5 \Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| = |\varepsilon_5| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \qquad \lim_{\Delta z \to 0} |\varepsilon_5| \to 0$$

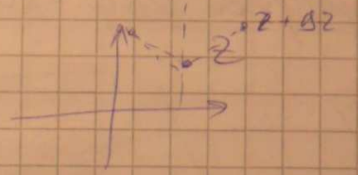
$[0,1]$

док-ва достаточность усл-й Коши-Римана для того, чтобы ф. $f(z)$ имела непр-ую произв-ую.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

формула кон. прираш-й предполагает, что частные произв-е $f(z)$ по x, y непрерывны ВСЕГДА! (1-е ч. произв.) для рег-х ф-ций

$$f'(z) = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$



необх-сть усл. К.-Р. мы доказали, устр-ял $\lim z \to z + \Delta z$

Предполагаем, что произв-я д/б, строго говоря, (9)

Док-во необ-сти $\exists$ ия 1-й произв-й рег-й ф-ции.

<u>Замечание!</u> отрешимся от усл-й К-Р, мы не будем налагать на (9) усл. К-Р: посмотрим, что будет

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \overbrace{\varepsilon_5 \Delta x + \varepsilon_6 \Delta y}^{\to 0}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x}} \left[1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\right)\right] \quad (*)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (**)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

только в 1-м сл-е произв-е не зависит от напр., когда вып-ся усл. К-Римана, в ост-х зависит.

В данной обл-сти (G) ф-ция д/б однозн-й -

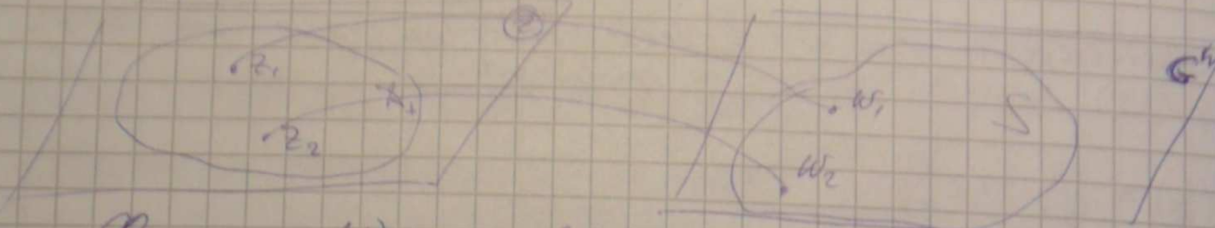
1) Сложная ф-ция
2) Обр-я ф-ция
3) Нек-е следствия из соотн-й К.-Р.
4) Инвариантность соотн-й К.-Р.
5) Усл-е К.Р. в криволин-х ортог-х координатах

Будем говорить, что ф. компл-го перем-го представляет собой $w = S \to$

Если на пл-сти компл-ой перем-ой зад-а обл-сть D, $\exists$ закон, ставящий в соответствие 2 (ед)ин. $(z_1, z_2) \in D$ др. 2 точки w_1 и w_2 в др пл-сти

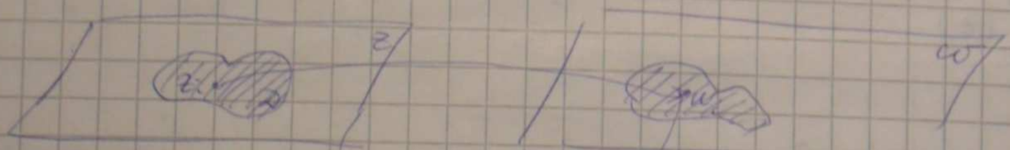
Поточечно можем в z на все точки получаем обл-сть S в G

S – отображение области D на область $S \in G$

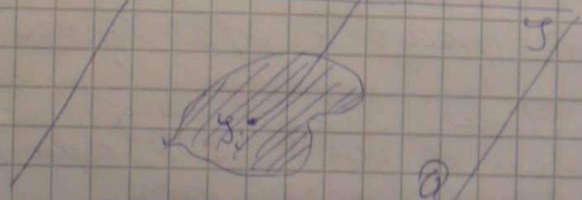


<u>Опр.</u> Ф-ция (1) $w = f(z)$ наз-ся вз. однозн-й, если 2-м различным точкам из D пл-сти z соотв-ют 2 разл-ые точки из области S в пл-сти w.

<u>Опр</u> $w = f_1(z)$ (2) осуществляет отобр-ние нек-й обл-сти D в z на обл-сть S в w



$\zeta = f_2(w)$ (3)



В эт/сл рассм-ся сложная ф-ция, к-я получается, если мы 2 подставим 3.

$$\zeta = f_2(f_1(z)) \qquad (4)$$

Можно считать, что (4) напрямую связывает (·)ки z_i и (·)ки ζ_i.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Все теоремы о $\lim$-х произв-х вещ-го анализа справ-вы и для компл-го анализа.

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1' f_2 + f_2' f_1$$

Важно не сл-ть усл-е однозн-сти.

Обр. ф-ция: $z = \varphi(w)$ при усл-ии вз. однозн-сти

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

<u>Следствия из соотн-й Коши – Римана:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}(2)-\frac{\partial}{\partial y}(1)\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{ур-ния Лапласса}$$

Вещ-я и мнимая части рег-й ф-ции удовл-ет одному и тому же дифф-му уравнению.

Ур-ния Лапласа Пьер Симон (1747–1827) (граф, маркиз)

гармонические ф-ция – ф-ции удовл-ие ур-нием Лапласа

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\exists$ u,v известн

$$\left.\begin{array}{l}u(x,y)=C_1=const\\ v(x,y)=C_2=const\end{array}\right\}(5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

$$V\cdot Q=(V_x i+V_y j)(Q_x i+Q_y j)=V_xQ_x+V_yQ_y$$

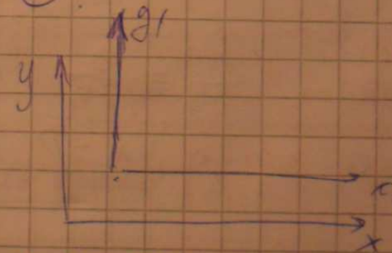
ф-ция u, v (скалярные) связаны 2мя вект-ми ф-циями.

$u, v \longrightarrow \operatorname{grad} v=\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\partial v}{\partial y}j$

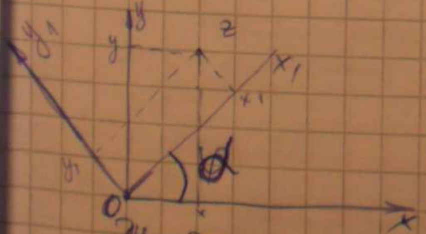
$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j$

$$\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\qquad \begin{array}{l}x_1=x+x_0\\ y_1=y+y_0\end{array}$$



1°. соотн-я **К–Р** инвариантны переноса начала координат (без поворота коорд-х осей)



$$\begin{cases}x_1=x\cos(x,x_1)+y\cos(y,x_1)\\ y_1=x\cos(x,y_1)+y\cos(y,y_1)\end{cases}\quad(1)$$

$$\begin{cases}x_1=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y_1=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}\quad(2)$$

$$(3)\ \left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\}\text{C.R}$$

Инвариантна и отн-ко поворота коорд. осей.

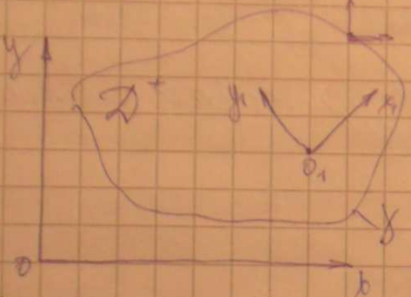
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}\end{cases}\quad(4)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y_1}(-\sin\alpha)\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\sin\alpha+\frac{\partial v}{\partial y_1}\cos\alpha\end{cases}\quad(4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y_1}\sin\alpha = \frac{\partial v}{\partial x_1}\sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial y_1}\cos\alpha$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial v}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_1} &= -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{aligned}\right. \quad (6)$$

К.-Р. только в СК Ox_1y_1 $\Rightarrow$ инвар-ны отн-но поворота СК



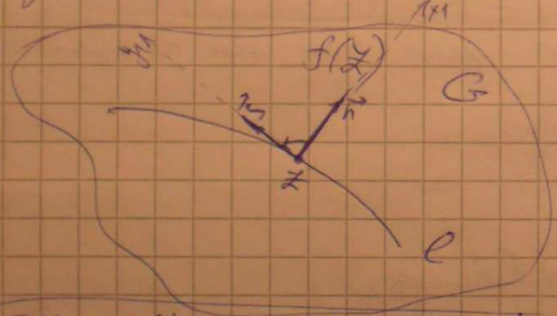
$\llcorner$ если ф-ция рег-на на D^+ $\Rightarrow$ С-R. спр-ва для $\forall$ т. O_1

Если рег. не только в D^+

$\bar{D} = D^+ + \gamma$, $f(z)$ рег-на в $\bar{D}$ (*)

Раз это так, то $\forall$ на пл-сти компл. перем-го нек-уго гладкую непр-ую кривую ℓ в обл-сти G нек-ой ф. $f(z)$

$\forall$ СК помещую в $\forall$ной т. ℓ и одна ось по нормали $\vec{n}$, а другая по касат-й $\vec{s}$



$$\boxed{\frac{\partial()}{\partial x} \equiv \frac{\partial()}{\partial n}, \quad \frac{\partial()}{\partial s} \equiv \frac{\partial}{\partial y_1}} \quad (7)$$

Обобщенное ур-е К.-Р. в $\forall$ ортог-й прямолинейной СК:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= -\frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned}\right| \quad (8)$$

В полярной СК

$r \equiv n$; $s = r\varphi$, φ – пол. угол, $\varphi = \frac{s}{r}$

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r} \quad (9) \text{ в пол СК}$$

$\exists$ $w = z^n$, n – произв. положит. целое число.

В полярной СК: $w = r^n e^{in\varphi}$

$$w = \underbrace{r^n\cos n\varphi}_{u} + i\underbrace{r^n\sin n\varphi}_{v}$$

$\forall$ рег. ф-ция $f(z)$ в алг. форме $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $\Leftrightarrow$ дифф-ма, имеет непр. произв. 2го, при этом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \Delta u = \Delta v = 0, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$u = (x^2 - y^2)$ — гармонические ф-ции

$v = 3x^2 y - y^3$

$f(z) = x^2 - y^2 + i(3x^2 y - y^3)$ — не регулярна, т.к. для неё соотн-е C.-R. не удовл-ся $\Rightarrow$ форм-а выч-ет произв-ое

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial y}$, зависящие от напр-ния дифф-ния.

Нужно быть аккур-ым! сост-ая из гарм.-х 2х — компл-ую

1 функция — произвольно (u,v), а 2го — исходя из C.-R.

Пример. $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ — гармоническая

Ответ. $f(z) = \ln z + C$, $C = \bar{C}$ = вещ. постоянная.

$f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} + i \dfrac{\partial v}{\partial x}$

Элементарные ф-ции комплексного переменного. z^n, $\sqrt[n]{z}$. Римановы поверхности этих функций. Функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ — ф-ция Жуковского

А. Эйлер 1707–1783

1725г — прибыл в Петербург., в АН (в кач-ве врача), 26 лет — академик по разделу мат-ка.

1741г — уехал из России, в Пруссию, Берлин, в АН.

1741–1766 — Берлин

1748 — книга: введение в анализ бесконечно малых.

1766 — позвали в Россию, вернулся, потом ослеп.

1783 — скончался в Петербурге

$w = z^n$ (1)

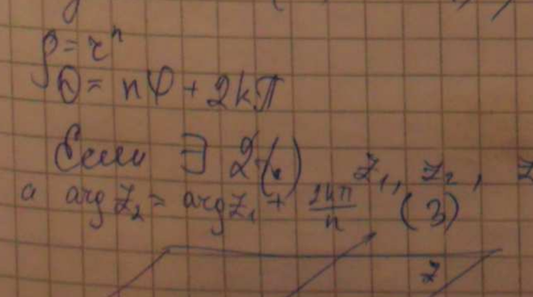
Введем полярную СК, $\exists\, z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ } (2)

Подставим (2) в (1), приравняем соотв-ие слаг-е и получим:

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \theta = n\varphi + 2k\pi \end{cases}$$

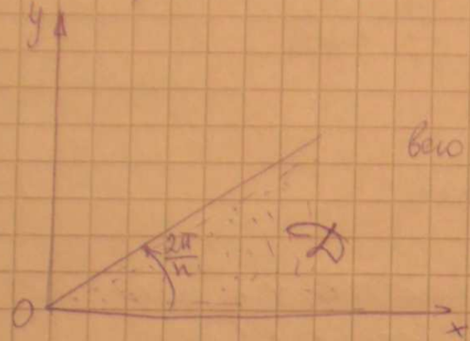
Если $\exists$ 2 (.) z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$, но есть общее: $|z_1| = |z_2|$, а

а $\arg z_2 = \arg z_1 + \dfrac{2k\pi}{n}$ (3)



2(·) на 1й окружн. эти уч. нерет. в (1) получим 1(·)

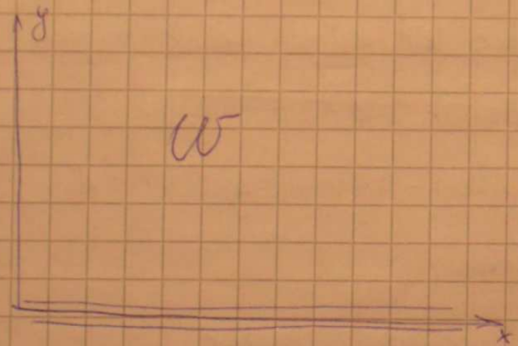
Сектор $k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (4)



$\exists k = 0$

на пл-сти w обл. D образ-ся во всю плоскость, кроме оси X

$\exists \quad \varepsilon < \varphi < \frac{2\pi}{n} - \varepsilon$



при $\varepsilon \to 0$ разрез $\to 0$
разрез ∞-о тонкий по вещ. оси

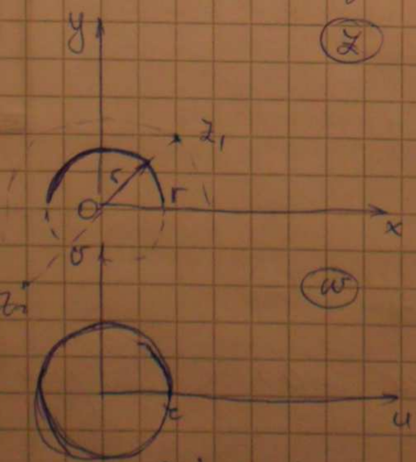
$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n}$ – каждый из этих секторов преобр-ся в пл-сть w с разрезом в оси x беск-о тонкой.

4 ф-цию $w = z^2$ (5)

$w = \rho e^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$ (6)

$\rho = r^2$; $\theta = 2\varphi$

При этом получится:



На пл-сти z опис-ся окр-сть радиуса r
r – const, $0 < \varphi < 2\pi$.

$\rho = r^2$, $0 < \theta < 4\pi$

1 окр. на z соотв-ют 2 на w.

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + \pi \end{cases} \quad (7) \quad \text{при } w = z^2$$

Эти 2 т. переходят в 1 на w

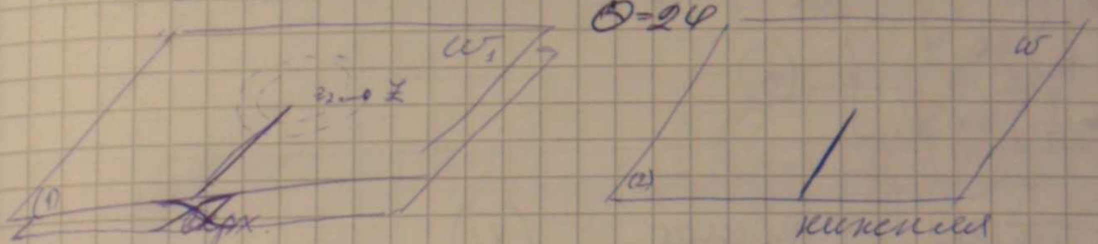
нарушение – о 1-п однозн-сти для $w = z^2$

все верх. полупл-сть при отобр-нии (за искл. границы) перейдет в $\mathbb{C}$ без $\mathbb{O}x$

$w = z^2$ вз. треб-ся вз. однозн-е соотв-ие построить

Поверхность Римана.

$\measuredangle$ $w = z^2$ мог $\triangle$ 2 места пл-сти w



кинемия

Римана предл. как. поместить под верхнюю.

вз. однозн-е ф-ции $w = z^n$ $\sqrt[n]{z}$

$(\cdot) z$

нев. одн-ть на пл-стях можно получить на пов-стях Римана

$\measuredangle$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (8) ф-ция Жуковского

$\measuredangle$ 2 $\forall (\cdot)\ z_1, z_2,\ z_1 \neq z_2$, $\triangle$ случаи не однозн-сти.

при подст-ке 2х точек в w получаем 1.

$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$

$z_1 - z_2 + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = 0$

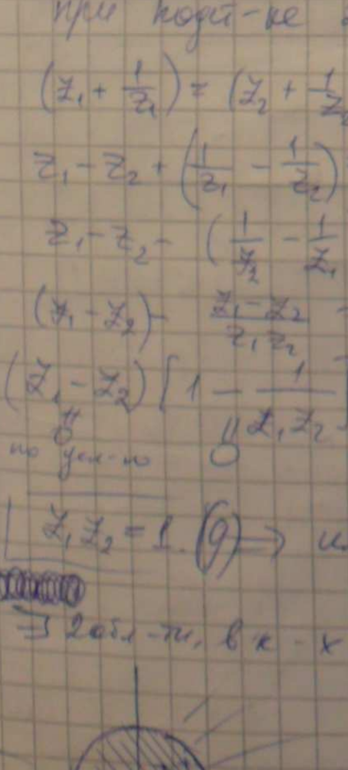
$z_1 - z_2 - \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) = 0$

$(z_1 - z_2) - \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} = 0$

$\underset{\text{по усл-ю}}{\underset{0}{\underset{\neq}{(z_1 - z_2)}}} \left[1 - \frac{1}{\underset{0}{\underset{\parallel}{z_1 z_2}}}\right] = 0$ ~~или это вып-ся, то~~

$z_1 z_2 = 1$. (9) $\Rightarrow$ имеет место переход в 1 точку.

$\exists$ 2 обл-ти, в к-х (9) заведомо не вып-ся:



$(z_1, z_2) \in D^+$

$(|z_1|, |z_2|) < 1$

либо обл. одн-сти — внутр-сть, либо внешность 1-го круга

4 круг, во что переходит.

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (8)$$

$$\begin{cases} w = u + iv \\ z = re^{i\varphi} \end{cases} \quad (10)$$

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \quad \text{— эллипс} \quad (11)$$

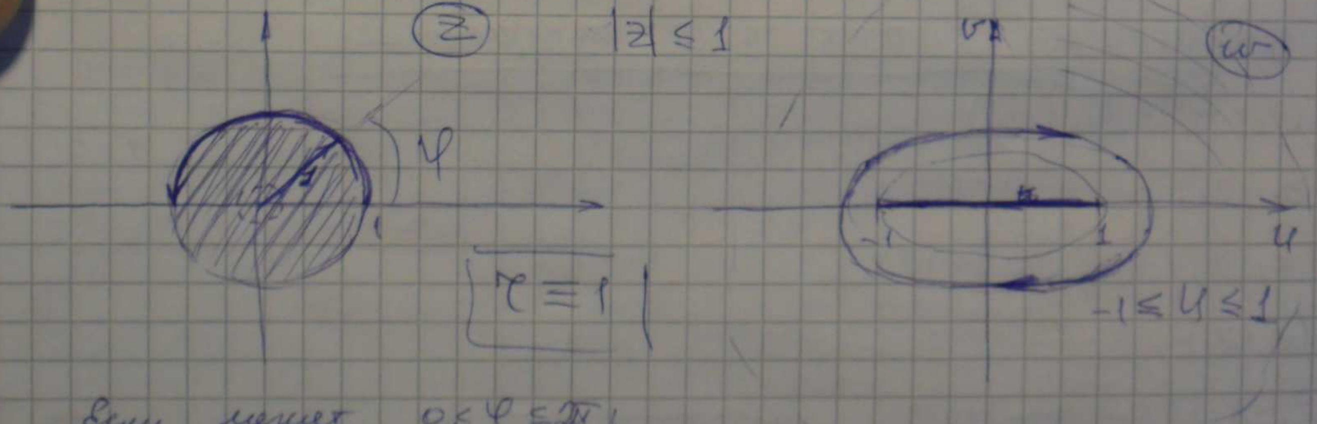
(310)

при $r = const$ ур-ние (11) — эллипс с главными осями $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ (12)

а) $\exists\ 0 < r \leq 1$, $r \to 1$, начиная от 0.

~~при r очень малых~~

На пл-сти w при r очень малых эллипс напоминает окруж-сть и нач-ет сжиматься.



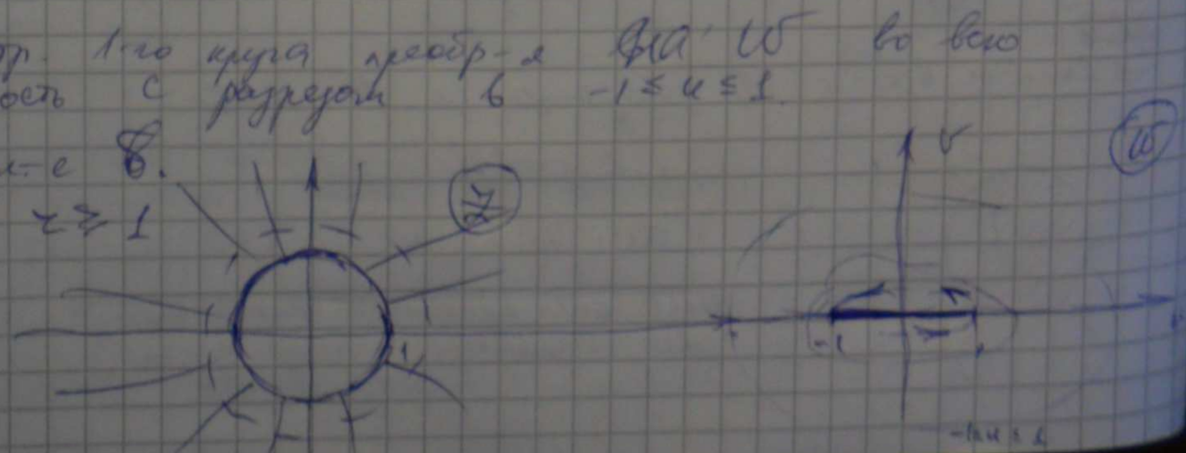
Если меняет $0 < \varphi \leq 2\pi$:

u — положит. зн-я, а v — при малых φ, < 0 и меняет напр. с на во верхней полуокруж-сти правый берег отрезка нижней — левый.

Внутр. 1-го круга преобр-я ФА w во всю плоскость с разрезом в $-1 \leq u \leq 1$

б) 4 вел-е 8.

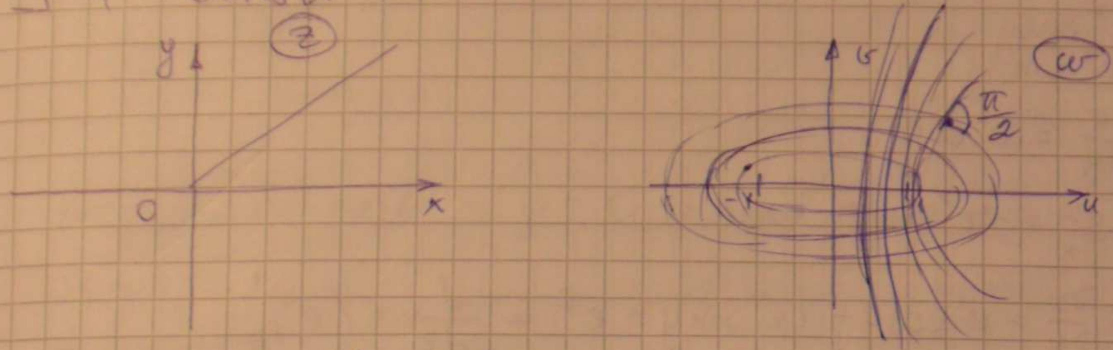
$\exists\ r \geq 1$



увеличивая r ⇒ получаем все более округлые эллипсы
при $r \to \infty$ эллипсы округл-ся и → к окруж-сти.

Внешность 1го круга переходит в ту же обл-сть w, также разрез-но по $-1 \le u \le 1$

$\exists\ \varphi = const$



Из соотн-я (*) выведем след. ур-ние:

$\varphi = const$

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

Если φ увеличивается до $\frac{\pi}{2}$, то соотв-щие гиперболы на w начинают распрямляться и с соотв-щими эллипсами дают ортогон-ую сетку.

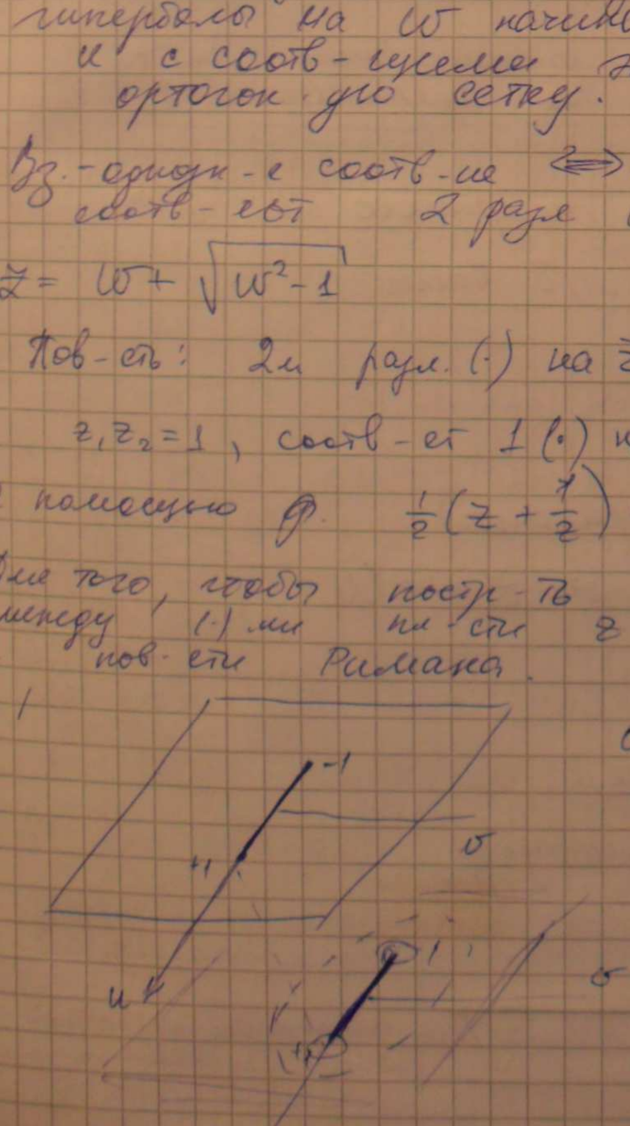
Вз.-однозн-е соотв-ие ⟺ для разл-х (·) на w соотв-ют 2 разл (·) на z.

$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$

Пов-сть: 2и разл. (·) на z, связ-ые между собой $z_1 z_2 = 1$, соотв-ет 1 (·) на w $z_1 \ne z_2$.

С помощью ф. $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \longrightarrow$!-я (·) на w

Для того, чтобы постр-ть вз. однозн-е соотв-ие между (·)-ми пл-сти z и w, треб-ся перейти к пов-сти Римана.



соотв-ие вз-одн-е, кроме окр-сти (·) ±1 на u.

Эти (·) наз-ся (·)-ми ветвления.
В этих (·) →
$$w_z'(\pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=\pm 1} = 0.$$

Потенциальная ф-ция! e^z (Экспонента)

$w = e^z$ (1)

$w = u + iv$, $z = x + iy$.

$u + iv = e^x(\cos y + i \sin y)$

$u = e^x \cos y$
$v = e^x \sin y$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z = \frac{d}{dz} = (e^z)'_z$$

Обл-ть опр-я — вся пл-сть, кроме ∞

Всегда ли эта ф-ция однолист-на на пл-сти КП?

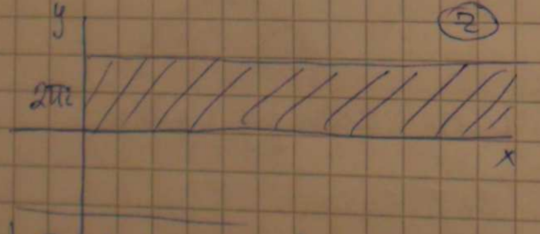
$$\boxed{e^{z_1} \equiv e^{z_2} + 2k\pi i}$$

На пл-сти КП ф-ция e^z — период-кая с чисто мнимым периодом $2\pi i$

Для того, чтобы гов-ть о О одн-ти ф-ции необх-о найти обл-ть D на пл-ти Z, к-я не содержала бы 2 (·)-ек

$z_1 = z_2 + 2k\pi i$, ($k = 1, 2, \dots$)

Это обл-ть D — $\forall$ полоса, шириною $2\pi i$ на Z, м/б выше.



$$\boxed{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi}$$ (не вкл-ет границы)

$w = e^z$ (1) Отображение пл-сти $Z \longrightarrow W$

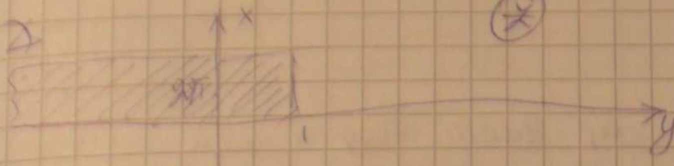
$w = \rho e^{i\theta}$; $z = x + iy$; (2)

вносим (2) в (1), получаем:

$$\boxed{\begin{cases} \rho = e^x \\ \theta = y \end{cases}}$$

при этом, если $0 < y < 2\pi$.

ф-ция (1) отображает полосу на w, разрезанную вдоль вещ-й оси u.

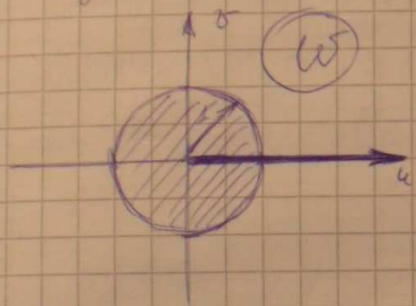


$-\infty < x \leq 1$

когда $x \in (-\infty; 1]$, $\rho = 0$, при $x = 0 \Rightarrow \rho = 1$.

$0 < y < 2\pi$.

Получается



Логарифмическая ф-ция

$e^w = z$ (1)

$w = \ln z$.

$\forall z_1, z_2$ если извест., то $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$. (2)

$e^{w_1} = z_1$, $e^{w_2} = z_2$

$z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2}$ $\Rightarrow$ по опр. логарифма

В (2) будем считать, что $z_1 = |z|$ $z_2 = e^{i\,\mathrm{Arg}\, z}$

$\ln\left(|z| e^{i\,\mathrm{Arg}\, z}\right) = \ln z$

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z.} \quad (3)$$

Логарифм $\forall$ компл. числа имеет бесчисл-ое мн-во зн-ний.

$i\,\mathrm{Arg}\, z$ – неопред-но.

$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ $\longrightarrow$ привлекается для иссл-ния только собственных св-в $\ln$

Когда мы переходим от З к гл. зн-ю аргум-та, всё становится однозн-но.

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i \arg z} \qquad -\pi < \arg z < \pi.$$

~~При этом $\arg z$~~

Главн. знач-ие:

$\ln i = \ln|i| + i\arg i$

$\boxed{\ln i = \frac{i\pi}{2}}$

$w = \ln z$ — разрез по отриц. части вещ-й оси

[самост-но рассмотреть: во что отображает $w = \ln z$ верхнюю полупл-сть (и нижнюю) пл-сти z на пл-сть w]

Тригонометрические ф-ции КП

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

В ТФКП тригоном-ие ф-ции не имеют самост-ого зн-я

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

$(\sin z)'_z \equiv \cos z$

$(\cos z)'_z \equiv -\sin z$

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i} = -i \cdot 1{,}2$$

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} \approx 1{,}54.$$

$$\cos 100i \approx \frac{e^{100}}{2}$$

Гиперболические ф-ции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z}$$

Обр. тригонометрические ф-ции и гиперболические выраж-ся через логарифм:

$\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arccos} z$, ..., $\operatorname{arcth} z$, ...

Формулы этих ф-ций необязательно запоминать

Док-м $\arccos z$:

$w = \arccos z$.

$z = \cos w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$

$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$.

$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$

$iw = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$

$$\boxed{w = \mp i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)}$$

$\Downarrow$

$\arccos z = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$

$\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^{-1}$

$\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)\left(z - \sqrt{z^2-1}\right) \equiv 1$.

изменение знака перед корнем приводит к изм-нию знака перед ln.

$w = \arccos z = i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

Общестепенная функция

$w = z^a$ (1), $a = \alpha + i\beta$ (2)

Представим (1) в следующем виде:

$w = e^{a \operatorname{Ln} z}$ (3), $\operatorname{Ln} z$ – ∞-но зн-ная функция.

(1) $\equiv$ (3)

$w = \rho e^{i\theta}$ (4), $z \neq 0$, $z = r e^{i\varphi}$ (5), $r = |z|$

Подставим (5) и (4) в (3), получим:

$\rho e^{i\theta} = e^{(\alpha + i\beta)(\ln r + i\varphi + 2ik\pi)}$ (6)

$\rho = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} e^{-2k\pi\beta}$ (7)

$\theta = \beta \ln r + \alpha\varphi + \alpha \cdot 2k\pi$ (8)

1) Если $\beta \neq 0$, то ф-ция бесконечно значная

Если $\beta \neq 0$, то при фиксир-ых z, a ($z \neq 0$) мы получим, что ф-ция w – ∞-о зн-е, причем модули этой ф-ции (9) получ-ся сист-ма:

$\ln i = \ln|i| + i\arg i$

$\boxed{\ln i = \frac{i\pi}{2}}$

$w = \ln z$ — разрез по отриц. части вещ-й оси

[самост-но рассмотреть:
во что отображает $w = \ln z$ верхнюю полупл-сть (и нижнюю) пл-сти z на пл-сть w]

Тригонометрические ф-ции КП

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$

$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$

В ТФКП тригоном-ие ф-ции не имеют самост-ого зн-я
$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

$(\sin z)'_z \equiv \cos z$

$(\cos z)'_z \equiv -\sin z$

$\sin i = \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i} = -i\,1{,}2$

$\cos i = \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} \approx 1{,}54.$

$\cos 100i \approx \frac{e^{100}}{2}$

Гиперболические ф-ции:

$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$; $\operatorname{ch} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\operatorname{th} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$; $\operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z}$

Обр. тригонометрические ф-ции и гиперболические выраж-ся через логарифмы:
$\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arccos} z$, ..., $\operatorname{arcth} z$, ...

Формулы этих ф-ций необяз-но запоминать

Док-м $\arccos z$:

$w = \arccos z$.

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$$

$$e^{2iw} - 2z e^{iw} + 1 = 0.$$

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1}$$

$$iw = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\boxed{w = \mp i \ln(z \pm \sqrt{z^2-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$\arccos z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2-1})$$

$$(z + \sqrt{z^2-1}) = (z - \sqrt{z^2-1})^{-1}$$

$$(z + \sqrt{z^2-1})(z - \sqrt{z^2-1}) = 1.$$

измен-е знака перед корнем приводит к изм-нию знака перед ln.

$$w = \arccos z = i \ln(z + \sqrt{z^2-1})$$

Общестепенная функция

$w = z^a$ (1), $a = \alpha + i\beta$ (2)

Представим (1) в след-м виде:

$w = e^{a \operatorname{Ln} z}$ (3), $\operatorname{Ln} z$ — ∞-но зн-ная функция.

(1) $\equiv$ (3)

$w = \rho e^{i\theta}$ (4), $z \neq 0$, $z = re^{i\varphi}$ (5), $r = |z|$

Подставим (5) и (4) в (3), получим:

$$\rho e^{i\theta} = e^{(\alpha + i\beta)(\ln r + i\varphi + 2ik\pi)} \quad (6)$$

$$\rho = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} e^{-2k\pi\beta} \quad (7)$$

$$\theta = \beta \ln r + \alpha\varphi + \alpha \cdot 2k\pi \quad (8)$$

① Если $\beta \neq 0$, то ф-ция бескон-но значна

Если $\beta \neq 0$, то при фиксир-ом z, a ($z \neq 0$) мы получим, что ф-ция w — ∞-о зн-е, причём модули этой ф-ции (9) образуют геом. прогрессию, поэтому формулу запишем в след-ем виде:

$\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta}$

$\Theta_k = \beta \ln r + \alpha\varphi + \alpha \cdot 2k\pi$.

В формуле (6) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

при $k>0$ окр-сти ρ_k уменьшаются

при $k<0$ окр-сти $\rho_k \to \infty$.

Θ_k — арифм-я прогрессия.

при $k<0$
при $k>0$ — 2 прогрессии

При фикс-х z, а получ-ся мн-во чисел, лежащих на уменьш-хся и увелич-хся окр-тях и лучах.

Выбрать 1 зн-ние невозможно.

(2) Теперь, $\exists \beta = 0$.

Если $\boxed{\beta = 0}$, то:

$\rho_k = e^{\alpha \ln r} = r^{\alpha}$ — конкр-ное число.

$\Theta_k = \alpha\varphi + \alpha 2k\pi$ — счётное мн-вом, $k = 0, \pm 1, \dots$

$\beta = 0$: $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$

$w = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$ (9) — q-зн-я ф-ция.

$a \equiv \alpha$ — иррациональное число ($\beta = 0$)

$\rho_k = r^{\alpha}$.

Если α – иррац-е, то ф-ция $w = z^a$ оказывается ∞-но-зн-ной.

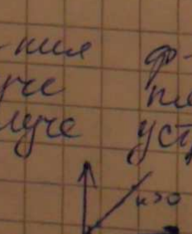
Все её зн-ния лежат на окружности r^{α}.

(3) $\exists \alpha = 0$, $\beta \neq 0$ — мнимый показатель.

$\rho_k = e^{-\beta\varphi} e^{-2k\pi\beta}$ (10)

$\Theta_k = \beta \ln r$ (11) $\to \Theta = \beta \ln r$

Все зн-ния ф-ции $w = z^{i\beta}$ лежат на одном и том же луче пл-сти w, а кол-во зн-ний ф-ции на этом луче устремляется в бесконечность



$$w = z^{\alpha + i\beta} = \begin{cases} \beta \neq 0, & \text{бесконечно значная функция} \\ \beta = 0,\ \alpha = \frac{p}{q} & - q\text{-значная функция} \\ \beta = 0,\ \alpha = n & - \text{однозначная функция} \\ \alpha = 0,\ \beta \neq 0 & - \text{бесконечно зн-я функция} \end{cases}$$

Примеры:

1) $w = z^{\pi} \equiv r^{\pi} e^{i(\pi\varphi + 2k\pi^2)}$ – не м/б периодичности – ∞-но зн-я.

2) $w = z^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{z^2}$ – 3-значная ф-ция.

3) $w = z^{3i} = \underbrace{\boxed{e^{-3(\varphi + 2k\pi)}}}_{\text{модуль}} \cdot e^{i 3 \ln r}$

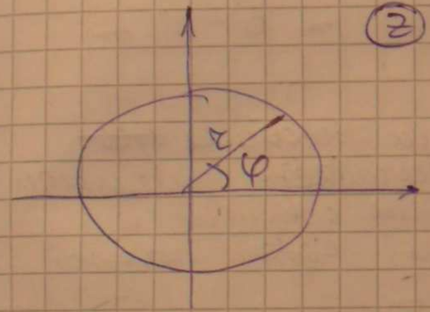
∡ отображение ф-ции $w = z^{\alpha} = z^{\alpha}$ (12) $(\beta = 0)$

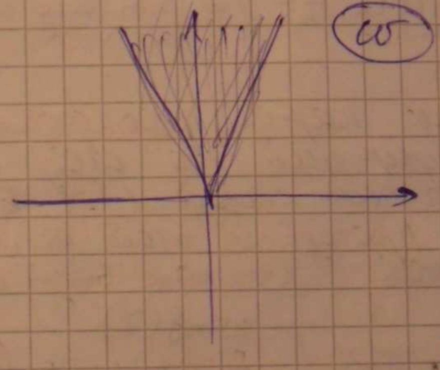
$w = \rho e^{i\theta}$, $z = r e^{i\varphi}$ (13)

Внося в (12) соотн-я (13), получим:

$\rho e^{i\theta} = r^{\alpha} e^{i\alpha\varphi}$

$\rho = r^{\alpha}$, $\theta = \alpha\varphi$ (14)



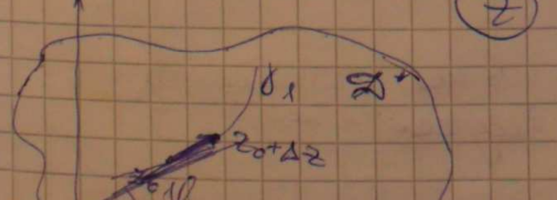


Конформное Отображение

Геом смысл модуля и аргумента производной регул-ой ф-ции.

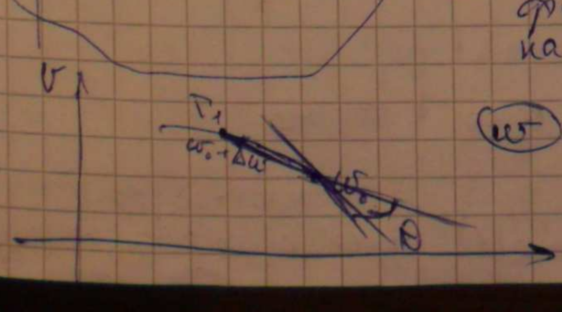
Конформное отображение и его св-ва

□ зад-на обл-ть D^+, в к-й опр-на регул-я ф-ция $w = f(z)$ (1)



рег-я ф-ция – однозн-на, имеет непр-ую 1-ю производную, конечную произв-ую.

Выбирая произв-но (·) $z_0 \in D^+$ и подставляя её в кач-ве арг-та в ф-цию, зн-ие $w_0 = f(z_0)$ (2) отобр-ся на пл-сть w.



Если через z_0 провести нек-ую кривую γ и целиком лежащую в обл-ти D^+, то на пл-сти w получим нек-ую Γ, проходящую через w_0, к-я явл-ся образом

$\gamma_1 : \Gamma_1 = f(\gamma_1)$

$(z_0 + \Delta z) \in \gamma_1$

$w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} e^{i \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)} \quad (3)$$

произв-е конечна!

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \cdot e^{i \lim_{\Delta z \to 0} \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)} \quad (4)$$

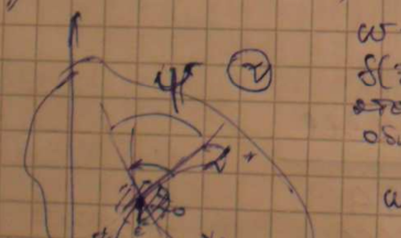
Геом-ски, это отношение длины отрезков.

отн-ние $\lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ – показывает искажение масштаба (·) z_0

Модуль произв-й в рассм-мой (·) хар-ет собой искажение масштаба (увелич-ние или умень-ние в окр-ти рассм-мой (·))

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta w \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg(\Delta z) = \theta - \varphi$$

Отобр-ние хар-ся конформным, если модуль ~~про~~ ф-ции, осущ-щей это отобр-ние, увеличивает (уменьшает) окр-ть рассм-мой (·) z_0 в одинаковом образом, а аргум-т произв-й этой ф-ции хар-ет собой поворот окр-сти этой (·) как твердого целого.

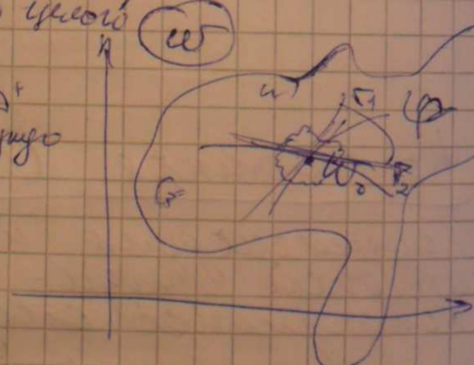


$w = f(z)$

$f(z)$ – рег-я в D^+

отобр-ет однозначную обл. Γ_z

$w_0 = f(z_0)$



$\forall$ ε-окр-сть $|z - z_0| = \varepsilon$. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

ε-окр-сть (окружность) переходит в нек-ую окр-сть, не явл-щуюся окружностью, но близкой к ней.

$$f'(z) = \lim\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| e^{i \lim \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}}$$

$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$

то $\forall$ напр-нию отн-ние $\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ одно и то же

На w образ окружности $|z - z_0| = \varepsilon$ будет с точностью до малых вторсшего пор-ка $\varepsilon = o(1)$ будет отличаться от окр-ти

$|w-w_0|=\rho$, $\rho=o(1)$

$\boxed{\Theta_1-\varphi_1=\Theta_2-\varphi_2}$ (из усл-я, что произв-я не зависела от направления)

$\Downarrow$

$\boxed{\Theta_2-\Theta_1=\varphi_2-\varphi_1}$ — хар-но для рег-х ф-ций.

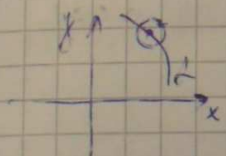
Конформ. отобр-ние. рассм. ее как преобр-ние от малой окружности радиуса ε с центром в (·) z_0, характерно тем, что $\angle(\gamma_1,\gamma_2)$, проход-й через z_0, после преобр-ния на w будет тем же самым.

Если $f'(z_0)\neq 0$

(Св-ва:)

1) $|f'(z_0)|$ — коэфф-т растяж. в (·) z_0

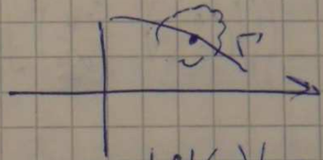
2) $\arg f'(z_0)=\Theta-\alpha$, Θ — угол в w, α — угол в z.



$|z-z_1|=\varepsilon$

$z=z_0+\varepsilon e^{i\varphi}$

$\varepsilon<<1$



$\rho=|f'(z)|\varepsilon$

$w=w_0+\rho e^{i\theta}$

$\exists$ на пл-сти z в нек-й обл-ти зад-на $f(z)=z^2+2z$

рег-на во всей пл-сти z, за искл-ем ∞

$z_0=(1,\frac{1}{2},0)$; $|f'(z_0)|=(4,3,2)$

$w=(1+\varepsilon e^{i\varphi})^2+2(1+\varepsilon e^{i\varphi})=1+2\varepsilon e^{i\varphi}+2+2\varepsilon e^{i\varphi}+\varepsilon^2e^{2i\varphi}=$

$=3+4\varepsilon e^{i\varphi}+\varepsilon^2e^{2i\varphi}$, $\varepsilon<<1$

$\boxed{w\approx 3+4\varepsilon e^{i\varphi}}$ ← окружность (радиуса 4ε)

$z=\frac{1}{2}+\varepsilon e^{i\varphi}$

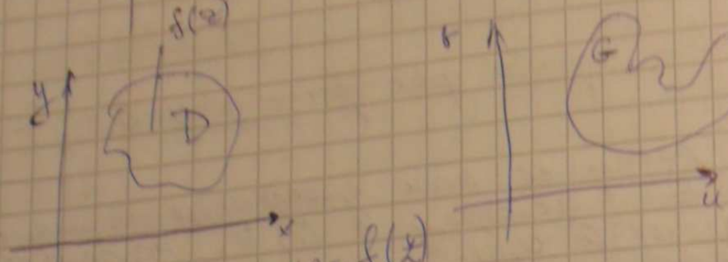
$w=(\frac{1}{2}+\varepsilon e^{i\varphi})^2+2(1/2+\varepsilon e^{i\varphi})=\frac{1}{4}+\varepsilon e^{i\varphi}+1+2\varepsilon e^{i\varphi}+\varepsilon^2e^{2i\varphi}=$

$=\boxed{\frac{5}{4}+3\varepsilon e^{i\varphi}}+o(\varepsilon)$, $\varepsilon<<1$.

окружность (сл- мало отл-ся от окр-сти радиуса 3ε)

$z = \varepsilon e^{i\varphi}$

$w = \varepsilon^2 e^{i\varphi} + 2\varepsilon e^{i\varphi} \approx 2\varepsilon e^{i\varphi},\ \varepsilon << 1$



$w = f(z)$

$f(z)$ - рег-я ф-ция.

$$S = \iint_G du\,dv = \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy = \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy = \iint |f'(z)|^2\,dx\,dy$$

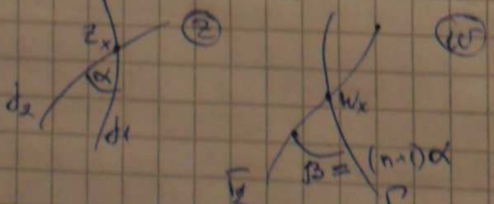
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}$$

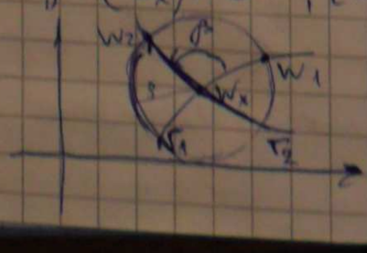
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Опр. (·) z_x ~~наз-ся (·) n~~, в к-й $f'(z_x) = 0$ - рег-ая ф-ция, наз-ся (·)-кой скрещивания.
Если в (·) скрещ-я $0 = f'(z_x) = f''(z_x) = \ldots = f^{(n)}(z_x)$, n =
то точка скрещ-ния порядка n.

Т Если (·) z_x явл-ся (·) скрещивания рег-й ф-ции $f(z)$ порядка n, то в этой (·)ке угол между образами кривых Γ_1 и Γ_2 на пл-сти увеличится в $n+1$ раз.



$w = f^{(i)}(z_x) = 0$, $i = \overline{1,n}$



$\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ — усл-ся

Ф. из (·) z_* проведем окр-сть малого радиуса ε

$$\begin{cases} z_1 - z_* = \varepsilon e^{i\varphi_1} \\ z_2 - z_* = \varepsilon e^{i\varphi_2} \end{cases} \quad (1) \qquad , \varphi_1, \varphi_2 \text{ — хорды, соед-щие } z_* \text{ и (·) } z_1, z_2$$

$$\begin{cases} w_1 - w_* = \rho e^{i\theta_1} \\ w_2 - w_* = \rho e^{i\theta_2} \end{cases} \quad (2)$$

$$f(z) = f(z_*) + \overset{0}{f'(z_*)} + \overset{=0}{\frac{f''(z_*)}{2!}}(z-z_*)^2 + \ldots + \overset{\to 0}{\frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}}(z-z_*)^n + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(z-z_*)^{n+1}$$

$$f(z) = \frac{f^{(n+1)}(z_*)}{(n+1)!}(z-z_*)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(z_*)}{(n+2)!}(z-z_*)^{n+2} + \ldots =$$

$$= f(z_*) + \frac{f^{(n+1)}(z_*)}{(n+1)!}(z-z_*)^{n+1}\left[1 + a_1(z-z_*) + a_2(z-z_*)^2 + \ldots\right] \quad (3)$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{f(z_1) - f(z_*)}{f(z_2) - f(z_*)} \quad (4)$$

в (4) подставим в лев. часть (2), а в пр-ую подставим (3), (1).

$$e^{i(\theta_1-\theta_2)} = e^{i(n+1)(\varphi_1-\varphi_2)}\left[\frac{1 + a_1\varepsilon e^{i\varphi_1} + a_2\varepsilon^2 e^{i2\varphi_1} + \ldots}{1 + a_1\varepsilon e^{i\varphi_2} + a_2\varepsilon^2 e^{i2\varphi_2} + \ldots}\right]$$

разделим на $e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$$1 = e^{i[(n+1)(\varphi_1-\varphi_2) - (\theta_1-\theta_2)]}\cdot\left[\frac{1 + a_1\varepsilon e^{i\varphi_1} + \ldots}{1 + a_1\varepsilon e^{i\varphi_2} + \ldots}\right] \quad (5)$$

Если $\varepsilon \to 0$, то хорды устремятся к кас-м.

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{i[\ldots]}\cdot\underbrace{\left[\frac{\ldots}{\ldots}\right]}_{\to 1}\right) = e^{i\lim_{\varepsilon\to 0}[\ldots]}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(n+1)(\varphi_1-\varphi_2) = (n+1)\alpha$$

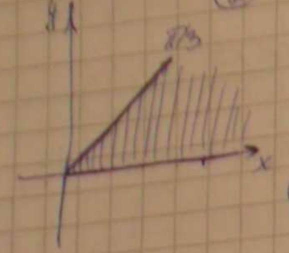
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ (\rho\to 0)}}(\theta_1-\theta_2) = \beta$$

$$(n+1)\alpha = \beta. \qquad \blacktriangleleft$$

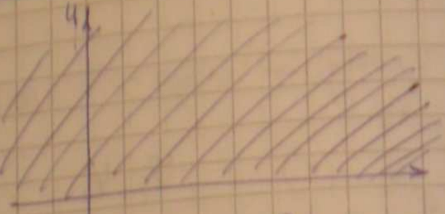
Пример:

$w = f(z) = z^3$

$f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$ $\quad z_*$ 2го порядка



$\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$



угол увеличился в 3 раза

$z_0 = \ldots = k \cdot e^{i0}$

$z_1 = b \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

Дробно-линейная функция, её свойства и отображения, осуществляемые этой функцией.

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ (1) (a, b, c, d) — комплексные постоянные

$c \neq 0$ (a)

Если $c = 0 \Rightarrow w = ez + d_*$

$bc - ad \neq 0$ (b), если вып-ся $\Rightarrow$

$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$ $(1)_*$

Др-о лин-я ф-ция (1) произв-т вз-но однозн-е отобр-е всей компл-й пл-сти на w.

при $z = \left(-\frac{c}{d}\right)^{-1}$, то $w = \infty$.

Обр. ф-ция:

$wcz + wd = az + b$

$\boxed{z = \frac{b - dw}{wc - a}}$, при $w = \frac{a}{c} \Rightarrow z = \infty$

Др-лин-я ф-ция, к-я отобр-ет полную пл-сть z на полную пл-сть w с беск-о удалёнными точками

1) $(R_z \longrightarrow R_w)$

ед-я ф-ция, отображ-я сферу Римана друг на друга

(T) Др-лин-я ф-ция (1) вз-но однозн-о отображает любую окр-сть пл-сти z на $\forall$ др-ю окр-сть пл-сти w.

▸ $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ (2), A, B, C, D — вещ-е пост-ые

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ (3)

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) - \frac{Ci}{2}(z-\bar{z}) + D = 0$$

$$Az\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + D = 0 \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{B-Ci}{2}; \quad \bar{\alpha} = \frac{B+Ci}{2}$$

Треб-ся док-ть, что др-лин-я ф-ция отг-т (4) без изм-ния.

Др-лин-я ф-ция сводится к 3м разл-м преобр-м:

$\zeta = cz + d$ окр-сть в окружность.

$\eta = \frac{1}{\zeta}$ – внутр-сть во внешность.

~~$w = \frac{a}{c} + (bc-ad)/(cz+d)\cdot\eta$~~ $\quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\eta \rightarrow$ окр-сть в окр-сть

Если в рез-те 3х преобр-ний окр-сть переходит в окружность, то и при др-лин-м окр-сть перейдет в окр-сть

$\zeta = c(z_0 + Re^{i\varphi} + d) = cz_0 + d + Re^{i\varphi}$ – окр-сть ~~перем~~ переместилась

$w_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{Re^{i\varphi}} = \frac{1}{R}e^{-i\varphi}$ – окр-сть в окр-сть, только другого радиуса (увел-ся или умен-ся), и угол отсчета будет по часовой стрелке.

Т.е. все 3 преобр-ния: окр-сть в окр-сть.

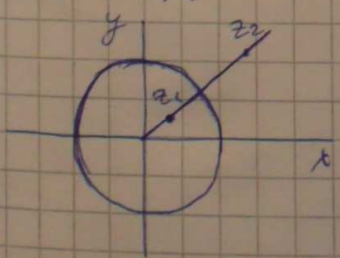
$w = \frac{1}{z}, \ z = \frac{1}{w}$

$$A\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}} + \alpha\frac{1}{w} + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{w}} + D = 0.$$

$$\boxed{A + \alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w + Dw\bar{w} = 0} \quad (5)$$

Сопоставив (4) и (5) получим то же самое, что и в (4) $\Rightarrow$ окр-сть перешла в окр-сть. ◄

(Т) Если (·)-ки z_1, z_2 симметричны относительно окружности K_z, то образы этих точек w_1, w_2 симм-ны относительно образа окружности K_z на пл-сти w. (K_w)



$|z_1||z_2| = R^2$

Если $z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = \infty$.

z_1, z_2 на одном луче всегда

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ (1), a, b, c, d – 4 константы, если они $\neq 0$, то

разделив числ-ль и знам-ль на одну из этих констант, то будет зав-ть от 3-х.

$a_1 = \frac{a}{b}, \ c_1 = \frac{c}{b}, \ d_1 = \frac{d}{b}$

$$w = \frac{a_1 z + 1}{c_1 z + d_1}$$

Три константы на пл-сти z → 3 константы на w.

$(z_1, z_2, z_3) \longleftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$

потребуем

$\underset{\text{пл-сть } z}{(z_1, z_2, z_3)} \to \underset{\text{пл-сть } \zeta}{(0, \infty, 1)} \longleftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$

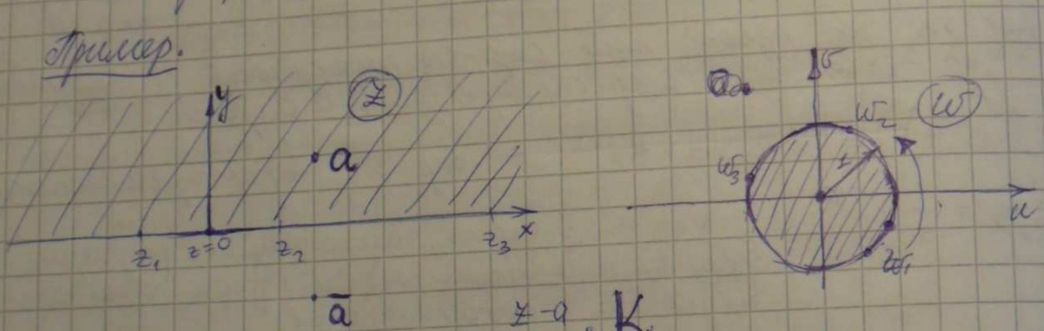
Тогда получим преобраз-щую функцию.

~~Построим общее так~~

$$\boxed{\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}}$$ (6) общ-я зав-сть для др.-ли преобразования.

Осн-е формулы (1), (6)

Пример.



$$w = \frac{z-a}{z-\bar a}\cdot K$$

Окр-сть 1-го радиуса хар-на тем, что $|w| = 1 \Rightarrow$

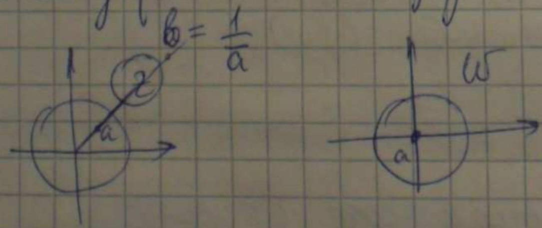
$\Rightarrow \left|\frac{z-a}{z-\bar a}\right| |K| = 1$, при $z = 0 \Rightarrow \left|\frac{-a}{-\bar a}\right| |K| = 1 \Rightarrow K = e^{i\varphi}$

$w = e^{i\varphi}\cdot\frac{z-a}{z-\bar a}$

$w = -\frac{z-i}{z+i} = \frac{1+iz}{1-iz}$

Отобр-ть внутр-сть единичного круга на пл-сти z

на внутр-сть 1го круга на w т.о, чтобы (·) a



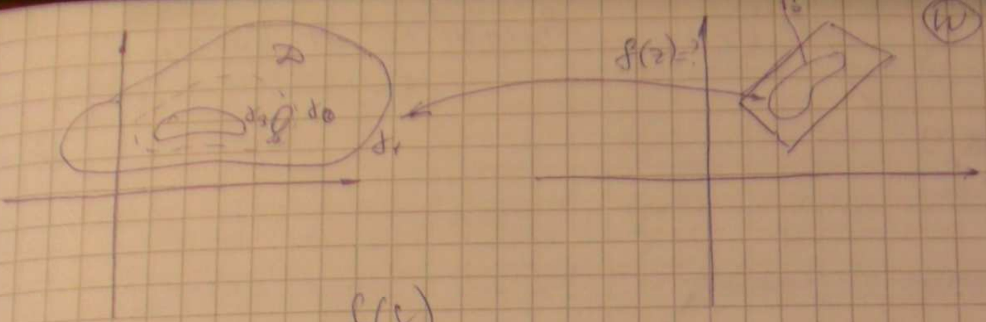
$$w = K\cdot\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar a}} = K_1\frac{z-a}{z\bar a-1}$$

(T) (Осн-я задача конформного отображения) ~~теор~~

$w = f(z)$

конформное отобр-ние $\exists$ только для обл-стей одинаковой связности.

Многосвязную обл-ть невозм-но отобразить на односвязную

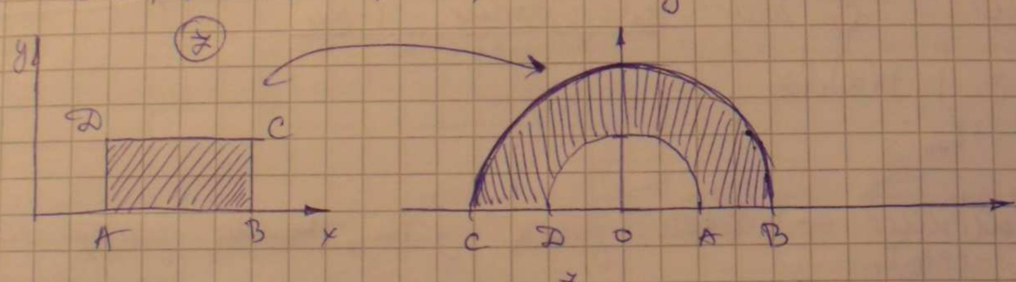


$f(\gamma)$

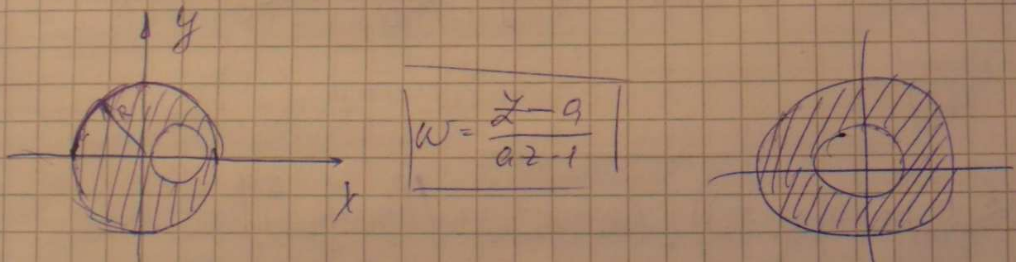
Непр-ная деформ-я контур Γ_0, мы можем его стянуть в (·) и начнем деформ-ть γ_0, но т.к. когда-либо должно пересечь контура $\gamma_3, \gamma_2 \Rightarrow$ неверно.

(Т) Теорема Римана

Каковы бы ни были односвязные области D на пл-сти z и G на w, и для $\forall (\cdot)\ z_0 \in D$ и $w_0 \in G$, а также $\alpha \in \mathbb{R}$ $\exists$ единств-е вз. однозн-е отобр-е, даваемое ф-ией $w = f(z)$: $w_0 = f(z_0)$, а $\arg f'(z_0) = \alpha$.



$w = e^z$



$$w = \frac{z - a}{az - 1}$$

ГЛАВА. Интегральное представление регулярных функций

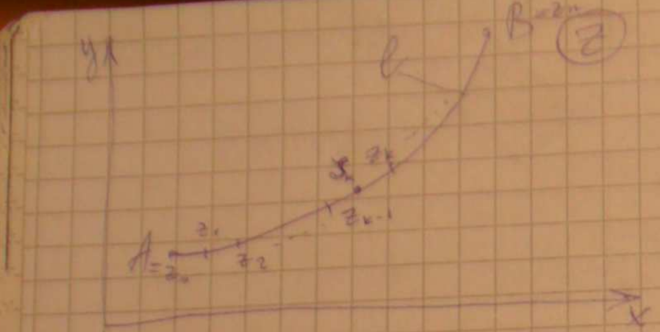
О.Л. Коши 1789 – 1857

Коши в 1814 г – переворот в ТФКП.

Определённый и неопределённый $\int$-л от ф-ии компл. перем-го.
Теорема Коши для односвязной и многосвязной области.

$\exists$ на пл-сти компл. перем-го z задана простая непр-я кривая с концевыми (·) A и B;
$\exists$ на кривой ℓ задана функция компл. перем-го $f(z)$

Разбили на n частей



(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma_k)(z_k - z_{k-1})$, где γ_k — $\forall$ (·) линии l, принадлежащей дуге $\gamma_k \in (z_{k-1}, z_k)$

Начнем в (1) увел-ть кол-во (·)ек разбиения, при этом пост-м усл-е, что, т.к. разбиение произв-е, следовательно:

$$\max_{n\to\infty} |z_k - z_{k-1}| \to 0$$

В эт/сл $S_n \to$ опр. lim, к-й наз-ся опр-м $\int$-лом по линии l_{AB} или контурным $\int$-ом.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{l_{AB}} f(z)\,dz$$

Г.В. Лейбниц — ввёл знак $\int$-ла, ~~[illegible]~~, дифф-ла.
(1646 – 1716)г

Внесем в (1) вместо пр части след. обозн-ние:

$$f = u + iv$$
$$z = x + iy \qquad (a)$$
$$\gamma = \xi + i\eta$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right)\left[(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})\right]$$

Представим выражение под Σ на 2 слаг-мых:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1})\right) + i\sum_{k=1}^{n}\left(u(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1}) + v(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1})\right) \qquad (2)$$

При предельном переходе получим след. соотн-ние:

$$\int_{l_{AB}} f(z)\,dz = \int_{l_{AB}} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_{l_{AB}} u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx \qquad (3)$$

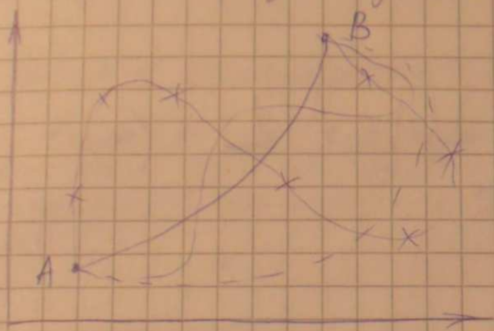
$$\int_{l_{ab}} \left(f_1(z) + f_2(z)\right) dz = \int_{l_{ab}} f_1(z)\,dz \pm \int_{l_{ab}} f_2(z)\,dz$$

$$\int_{l_{ab}} k \cdot f(z)\,dz = k\int_{l_{ab}} f(z)\,dz, \quad k = \alpha + i\beta$$

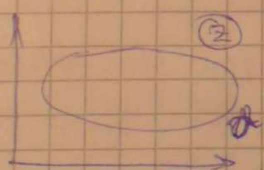
$$\int_{\ell_{AB}} f(z)\,dz = -\int_{\ell_{BA}} f(z)\,dz.$$

§ Два $\int$-л (3) — 2 вещ-х $\int$-л, взятые по той же самой кривой.

В каком случае $\int$-л (3) не зависит от путей $\int$-ния?



Если разомкнутая кривая, то формула (3), а если $\int$-ется по замкнутой, то пишут:



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + \oint_\gamma u(x,y)\,dy + \oint_\gamma v(x,y)\,dx$$

Если кривая задана парам-ски, т.е.:

$x = x(t), \quad y = y(t)$

$A = x(t_0), \quad y = y(t_0)$

$B = x(t_*), \quad y = y(t_*)$

$$\int_{\ell_{AB}} f(z)\,dz = \ ? \quad (\text{дома!!!})$$

Если кривая разомкнута, то $\int$-л не зависит от путей $\int$-ния $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ подинтегр-е выраж-е и во 2-м явл-ся полными дифф-лами нек-х ф-ций.

$\int_a^b \boxed{df}$ — полный дифф-ал.

$\oint_{\ell_{AB}} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \partial\right.$

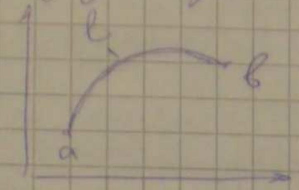
Необх. и дост-м усл-ем для того, чтобы под $\int$-л ф-ция была полным дифф-лом, явл-ся:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad \text{К.Р.}$$

Когда на ℓ задана рег. ф-ция, то ∫-л не зависит от путей ∫-ния по кривой ℓ.

Замечание. В практ-х иссл-ях приходится часто иссл-ть ∫-л по задан. кривой AB

$$\int_{\ell_{ab}} f(z)\,dz$$



$$\left|\int_{\ell_{ab}} f(z)\,dz\right| \le \int_{\ell_{ab}} |f(z)||dz| \le M\int_{\ell_{ab}} |dz| \le ML \qquad (4)$$

$M=\max\limits_{\ell_{ab}}|f(z)|$

L – длина кривой ℓ_{ab}

В ряде случаев оценка, даваемая ф. (4), м/б уточнена след-м образом.

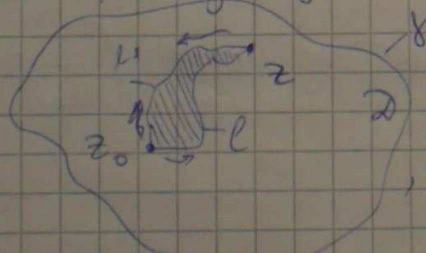
$$\left|\int_{\ell_{ab}} f(z)\,dz\right| \le \int_{\ell_{ab}} |f(z)|\,|dz| \le \int_{\ell_{ab}}|f(z)|\,ds \;-$$

$|dz|=\sqrt{dx^2+dy^2}$

∫-л 1го первого рода (не зависит от путей ∫-ния).

Т Теорема Коши (1825г)

Пусть ф-ция $f(z)$ – рег-на в односвязной области D. Пусть далее (·)ки z_0 и z, соотв-но пост-я и перем-я (z), (·)ки области D, а ℓ – какая-нибудь кус-но непр-я кривая, соед-щая эти точки, тогда ∫-л:



$$\int_{z_0}^{z} f(z_1)\,dz_1$$

взятый по ℓ, не зависит от вида этой кривой, является ф-цией в (·) z, к-я регул-на и произв-я в к-й $F'(z)=F(z)$

Рис. 1.

▶ Пос-ку $f(z)$ – рег-на в односв-й обл-ти, а ∫-л не зав-т от путей ∫-ния, то в 1м ∫-ле в (3) полный дифф-л.

$U:\ \dfrac{\partial U}{\partial x}=u(x,y)$

$\dfrac{\partial U}{\partial y}=-v(x,y)$

2-й ∫-л также полный дифф-л:

$V:\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=u(x,y)$

$\dfrac{\partial V}{\partial x}=v(x,y)$

соот-я Г-Р. для наших ф-ций. След-но,

$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ – регулярная ф-ция.

$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \underline{u(x,y) + i v(x,y)} \Rightarrow$ ф-ция рег-на

Изменим порядок $\int$-ния (по l_1 теперь и от z к z_0).

<u>Соврем-я формулировка т. Коши.</u>

Если ф-ция $f(z)$ – рег-на в односв-й обл-ти D, то $\int$-л от этой ф-ции, взятый по $\forall$ замкнутому контуру γ, целиком лежащему в D, $= 0$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad (5)$$

На Рис. 1 $\gamma = l - l_1$

D – откр-я область, тогда замкнутая обл-ть $\overline{D} = D + \int_D$

$f(z)$ – регулярна в $\overline{D}$, тогда т. Коши говорит, что $f(z)$-рег-на в замкнутой, то $\int$-л, взятый по обл-ти $= 0$. ◄

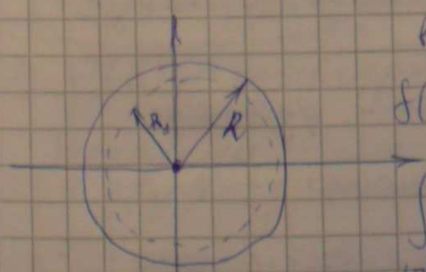
<u>Замечание.</u> В соврем-й мат. лит-ре т-му Коши часто форм-ют след. образом:

Если ф-ция $f(z)$ регулярна в области D (откр-я обл-ть) и непрерывна продолжаемо на контур этой области Γ, то $\int$ по Γ:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

► Док-во для частного случая (<u>круговая обл-ть</u>)

Пусть $f(z)$ – рег-на в области $D: |z| < R$.



Возьмем нек-й контур $|z| \le R_1$, $R_1 < R$, тогда $f(z)$ рег-на не только в обл-ти $|z| < R_1$, но и на самой окр-ти.

$$\int_{|z|<R_1} f(z)\,dz = 0. \quad (*)$$

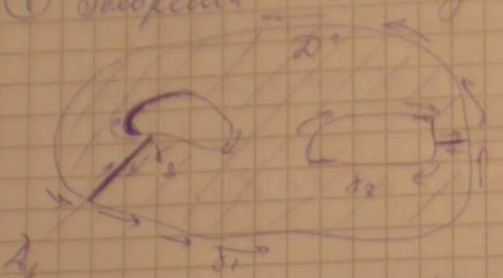
$$\begin{cases} z = re^{i\varphi} \\ dz = re^{i\varphi} \cdot i\,d\varphi \end{cases} \quad (**)$$

Подставим $(**)$ соотв-щие выраж-я в $\int$-л $(*) \Rightarrow$ получим обычн-й $\int$-л

$$iR_1 \int_0^{2\pi} f(R_1 e^{i\varphi}) e^{i\varphi}\,d\varphi = 0$$

$$\lim_{R_1 \to R}\left(iR_1 \int_0^{2\pi} f(R_1 e^{i\varphi}) e^{i\varphi}\, d\varphi\right) = 0$$ ⇒ т. Коши справедлива ◄

Теорема Коши для многосвязной области



$f(z)$ – рег-на в D^+ и непр-но продолжаема на контур обл-ти (3 контура)

Если возьмём 2 разреза λ_1, λ_2, то превратим нашу 3-связную обл-ть в односвязную

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0, \text{ где } \Gamma = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + \vec{\gamma}_3 + \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0 \qquad (6)$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz \qquad (6^*)$$

◄ (для 3-связной)

для n-связной обл-ти аналогично.

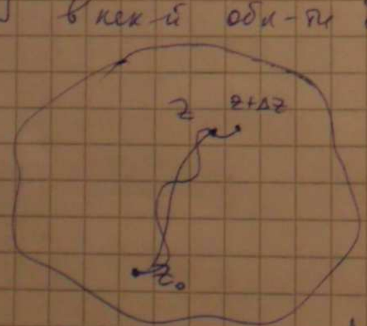
Опр. Неопределённого интеграла:

Если в обл-ти D опр-ны 2 рег-ые ф-ции $F(z)$, $f(z)$: $f(z) \ne F(z)$, такие что $F'(z) = f(z)$, то функция $F(z)$ наз-ся неопр-м $\int$-лом от ф-ции $f(z)$:

$$\int f(z)\,dz$$

1. Основная формула $\int$-го исчисления.
2. $\int$-лы вида $\int_\gamma (z-a)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}_+$, γ – замкнутый контур
3. $\int$-ная формула Коши
4. Формула Коши для ~~рег~~ произв-х рег-й функции.

∃ в нек-й обл-ти D задана рег-я функция $f(z)$.



Тогда: $z_0 = const$

$\int$-л от z_0 к z не зависит о пути $\int$-ния

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz' \qquad (1)$$

Соединим z_0 и $z+\Delta z$ ∀-ной кривой, проход-й через z.

$$\big|\,|z+\Delta z| - |z|\,\big| \ll 1.$$

$$F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z')\,dz' \qquad (2)$$

$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z')dz' - \int_{z_0}^{z} f(z')dz' = \int_{z_0}^{z} f(z')dz' + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z')dz' -$

$- \int_{z_0}^{z} f(z')dz' =$

Хоть пути и разные, но по т. Коши они не зависят от путей интегр-я, т.е. взаимоуничтожаются

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z')dz' \quad (3)$$

Представим $f(z')$ в след. виде:

$$f(z') \equiv f(z) + f(z') - f(z) \quad (4)$$

И внесём 4 в (3) в кач-ве $\int$-ной функции.

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz' + \int_{z}^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)]dz'.$$

$$F(z+\Delta z) - F(z) = f(z)\Delta z + \int_{z}^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)]dz' \quad (5)$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)]dz' \quad (6)$$

Если $\Delta z \to 0$ слева, треб-ся док-ть, что справа $\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [\ldots]dz' \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

$|\Delta z| \ll 1$; $f(z') = f(z) + \delta(z)$; $\lim_{\Delta z \to 0} \delta \to 0$.

Подставляя (7) в (6).

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \delta dz' \quad (8)$$

Оценим в (8) по модулю $\int$-л.

$\left|\int \delta dz\right| \le \max_{[z, z+\Delta z]} |\delta| \cdot \Delta z$ (9) подставляя (9) в (5), получим

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) + \max_{[z, z+\Delta z]} |\delta|$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) + \lim_{\Delta z \to 0} \max_{[z, z+\Delta z]} |\delta'|$$

$\boxed{F'(z) = f(z)}$ (10), $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$, $z_0 = const$, z – переменный предел.

$F'(z)$ – регулярная производная, явл-ся первообразной $f(z)$.

Доказали $\exists$ние, треб-ся док-ть $!$-сть

$\exists$ $\exists$ другая ф-ция $\Phi'(z) = f(z)$ (11) но $\Phi(z) \neq F(z)$

$\underbrace{[F(z) - \Phi(z)]}_{f_1(z)}' = 0$ (12) Φ – также регулярна.

Док-ть, что $f_1(z)$ – рег-на в рассм-ой обл-ти, имеет 1ую произв-ую, равную 0.

$f_1'(z) = 0$.

$f_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$

$\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - i\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$

u_1, v_1 не зависят ни от x, ни от y $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 = \alpha = const$
$v_1 = \beta = const$, т.е. $f_1(z) = C_1$ – const; $C_1 = \alpha + i\beta$

$F(z) = \Phi(z) + C_1$.

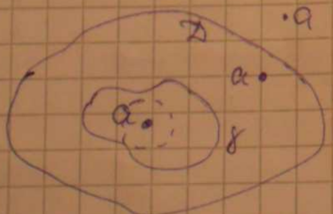
Стало быть $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \Phi(z) + C_1$ (13)

$\exists\ z = z_0$. $\quad 0 = \Phi(z_0) + C_1$

Тогда окончательно:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \Phi(z) - \Phi(z_0) \quad (14)$$ (для разомк. контура)

если $z = z_0$, т.е. $\int_\gamma f(z)\,dz = \Delta\Phi(z)$ (15) – приращение под∫-ной ф-ции при однокр-ом обходе этого контура. (γ – замк. контур)



$\int_\gamma f(z)\,dz$

$\boxed{z \in \gamma}$!

Берем в кач-ве $f(z)$ ф-цию след. вида:

$f(z) = (z-a)^n$, при этом a – $\forall$ная (·), к-я м/б как внутри обл-ти D, так и вне обл-ти D.

Если $a \in D$, то условие: γ не проходит через (·) a.

$\exists$ a внутри γ.

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \Delta\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} = 0. \qquad , n \text{ – целое, } n \neq -1.$$

первообр-я – однозначная функция, т.е. вернется к своему нех-му зн-ию, обходя контур.

$\boxed{n = -1}$ $\quad \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ (*)

$z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$
$dz = \varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi$ подставим в (*)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = i\,2\pi$$

$$\boxed{\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i} \quad (16)$$

В случае $n = -1$, $\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$, в ост-х $= 0$.

$$\boxed{\oint_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \forall n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}} \quad (17)$$

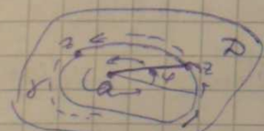
(·) a $\overline{D}$ (·) не в области регулярности, либо в обл-ти рег-сти, но не внутри контура.

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0$$, а вне контура γ.

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = \Delta \ln (z-a)$$

$$\ln(z-a) = \ln|z-a| + i \arg(z-a)$$

$$\Delta \ln(z-a) = \Delta \ln|z-a| + \Delta i \arg(z-a)$$



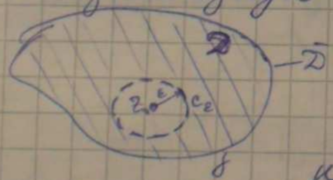
при перемещение z по контуру γ приращение $\Delta \ln|z-a| = 0$.

$$\Delta \arg(z-a) = 2\pi.$$

$$\Delta \ln(z-a) = i 2\pi.$$

Интегральная формула Коши (1831)

$\exists$ односвязную замк-ую обл-ть $\overline{D} = D + \gamma$.



$\exists f(z)$ – регулярная в $\overline{D}$.

Выбрав $\forall$-ую (·) $z_0 \in \overline{D}$, но $\notin \gamma$, составим новую функцию:

$\frac{f(z)}{z-z_0}$ – нерегулярная функция, при $z = z_0$ обращ-ся в ∞.

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} \quad (1)$$

$\int$ по внешнему контуру γ уже $\neq 0$ $\forall$

Искусств-о создав обл-ть двусвязную, мы можем написать (1) для двусвязной области регул-й функции.

$$\begin{cases} z - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi} \\ dz = \varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi \end{cases} \quad (**) \text{ подставим в (1)}$$

$\int$ в (1) справа будет равен:

$$\underbrace{\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})\,\varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \underbrace{i\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi} \quad (2)$$

$\varepsilon = o(1)$ ($\varepsilon \ll 1$)

$f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) = f(z_0) + f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)$

Вносим пр. часть (3) в (2)

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = i f(z_0)\int_0^{2\pi} d\varphi + i\int_{C_\varepsilon}^{2\pi}\left[f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)\right]d\varphi$$

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0) + i\int_0^{2\pi}\left[f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)\right]d\varphi \quad (4)$$

оценить по модулю самостоят-но, и показать, что при $\varepsilon \to 0$, то

$|\int \dots| \to 0.$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)}$$, z_0 — внутри области γ, γ — замкн.

∃ $t = z \in \gamma$

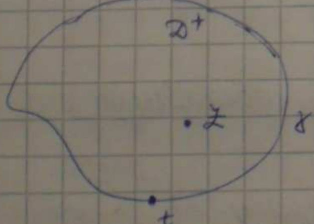
$z_0 = z$ — произв-я фикс-я точка.

В соврем-й мат. лит-ре ∫-я формула Коши выглядит след. обр.:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & \forall z \text{ внутри } \gamma. \\ 0, & \forall z \text{ вне контура } \gamma. \end{cases}}$$ — ∫-ное представление регулярной функции

Формулы Коши для произв-х рег-х ф-ций

∃ зад-а область D с контуром γ, $\bar{D} = D^+ + \gamma$.



$\forall \bar{D}$

Если $t \in \gamma$, пробегает контур γ 1 раз.

$f(t) \in C(\bar{D})$, $t - z \in C$.

Треб-ся ~~можно~~ продифференцировать ∫ под знаком ∫-ла.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\cancel{\int_\gamma f'(t)\,dt}\ \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i}\, 2\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^3}$$

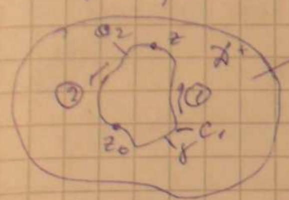
— — — — — — —

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

1) Теорема Морера (1856 – 1909 г.) (формула 1886 г.)
2) Интегральная формула Коши для бесконечной области.
3) Неравенство Коши для производных.
4) Теорема о среднем. 5) Теорема Лиувилля. (1809 – 1882)

Теорема Морера – обратная к теореме Коши.

Т (Морера) Если ф-ция $f(z)\in C$ (односв. обл-ти) и $\int f(z)$ по $\forall$ замкнутому контуру γ, целиком лежащему в рассм-ой обл-ти, равен 0, то эта ф-ция регулярна.



$f(z)\in D^+$, D^+ – односв. обл-ть

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

На γ выбираем $\forall$ (·) z_0 и жестко фикс-ем, а выбираем перем-ую (·) z, к-я может перемещаться по контуру.

(·) z_0 и (·) z – делят контур на 2 пути ① от z_0 к z; ② от z к z_0

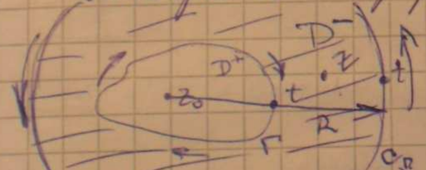
$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)$ и не зависит от пути соед-х z и z_0

$\boxed{C_1+C_2=\gamma.}$

(из т. Коши) $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\Rightarrow F(z)$ – регулярна, т.к. $\exists$ lim и им. св-во непр. ф-ции.

Рег. ф-ция имеет беск-о много произв-х. ◄

Интегральная форма Коши для бесконечной области.



$f(z)$ – регулярна в D^- (вне контура Γ)

Т Если ф. $f(z)$ – регулярна в области D^- с контуром Γ и непр-на на Γ и, кроме того, $\lim_{z\to\infty} f(z)\to 0$ равномерно относительно z, то $f(z)$ в $\forall$ (·) обл-ти D^- опр-ся след. обр-м:

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{t-z}}\quad z\in D^-$$

(1), где t – текущая точка контура Γ, а Γ обх-ся ~~по час~~ положит-м напр-нии отн-но обл-ти опр-ния.

► Выбираем $\forall$ (·) $z\in(D^+)$ и из этой (·) описываем окр-ть большого радиуса R: D^+ целиком лежит в круге радиуса R, $R>>1$.

Рег. ф-цию можем расс-м. для двусв-й ~~от~~ получ-шейся обл-ти по т. Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\quad (2),$$

C_R – окр-ть радиуса R.

Требуется док-ть, что $\int_{C_R}\to 0$ при $R\to\infty$.

Z 2й $\int$-л в рав-ве (2)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right|\le\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{|f(t)|\cdot|dt|}{|t-z|}<\frac{\max\limits_{C_R}|f(t)|\,2\pi R}{2\pi(R-|z|)}\le$$

$$\le\frac{\max\limits_{на\ C_R}|f(t)|\cdot R}{R(1-\frac{|z|}{R})}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\max_{t\in C_R}|f(t)|}{1-\frac{|z|}{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$ ◄

(Т) (теорема Коши для беск-й области) Интегр. ∫-я формула Коши для ∞-й обл-ти справедлива в том случае, когда

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) = const.$$

▶ Т.к. ф-цию $f(z) - f(\infty)$ — ~~рег. ф~~ разность опр-ет рег. ф-цию, исчезающую на ∞-сти.

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[f(t)-f(\infty)]\,dt}{t-z}, \text{ для } \forall z\in D^-$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[f(t)-f(\infty)]\,dt}{t-z}, \text{ для } \forall z\in D^+$$

разбивается на 2 ∫-ла: треб-ся рассм-ть:

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{t-z}-\frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dt}{t-z}, \quad \forall z\in D^-$$

$$\ln(t-z)\big|_\gamma = \cancel{\ln|t-z|}^{=0} + \cancel{i\arg\varphi}^{=0}, \ \cancel{\forall z}$$

Если $(\cdot)\in D^-$, то ~~тд~~ имеет место след-щее:

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{t-z} - f(\infty)$$ (САМИМ ДОКОНЧИТЬ)

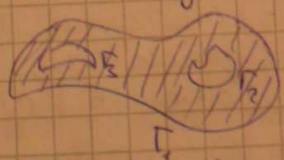
Зам-е отн-но теор. Коши для односв-й и многосв-й обл-ти.

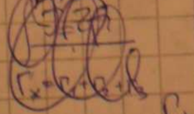
Односвязная область

если $f(z)$ – рег-на в D^+, то по ∀ контуру внутри этой обл-ти $\int = 0$., в частности, если Γ рассм-ся как принадлежащ. $\bar{D} = D^+ + \Gamma$, тогда и по Γ можно ∫-ть.

и по контуру, и внутри.

Многосвязная область





$$\int_{\Gamma_*} f(z)\,dz = 0;$$

$$\Gamma_* = \Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$$

Только по контуру!

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz$$

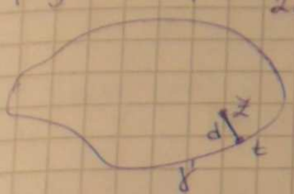
Нер-во Коши для производных:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \quad f(z) \text{ – рег-на}$$

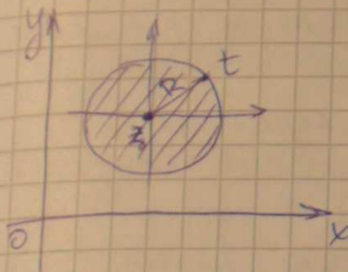
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} \quad (1), \quad n=1,2,\dots$$

Оценим последнее выражение (1) по модулю:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\,\frac{\max\limits_{\text{на }\gamma}|f(t)|\cdot l}{d^{n+1}}$$ — общий случай



l – длина контура γ.
d – наим. ее расст-е от (·) z до контура γ.



$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!\; M\cdot \cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi}\cdot R^{n+1}}$$

$$M=\max_{\text{на }\gamma}|f(t)|$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!\,M}{R^{n}}$$ для круговой обл-ти, z_0 – центр.

Частный случай для 1-й производной:

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{M}{R}$$

Для круг-й обл-ти формула Коши, центр круга в xy обозначим через z_0

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0} \quad (2)$$

C_R – круг-й контур

Замена: $t-z_0=Re^{i\varphi}$ (3)

$$\begin{cases} t=z_0+Re^{i\varphi} \\ dt=Rie^{i\varphi}d\varphi \end{cases} \quad (4)$$

Подставляем (3), (4) в (2), получим:

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\varphi})\cdot \cancel{Ri}\,e^{i\varphi}d\varphi}{\cancel{Re^{i\varphi}}}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$\cancel{f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}}$$

Ⓣ Т. о среднем; зн-ние рег. ф-ции в центре круга:

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi}$$

Ⓣ (Теорема Лиувилля)

Если рег. ф-ция $f(z)$ рег-на во всей комплексной пл-сти и огр-на в ней по модулю, то эта ф-ция постоянна.

z^n — рег-на во всей к. пл-сти, но не огр на по модулю
($\cos$, $\sin$, e^z, $\ln z$)

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R}, \text{ для центра круга}$$

$$|f'(z)| = 0$$

$$f(z) = |f(z)| e^{i\varphi} \to 0 \Rightarrow f(z) \text{ — конст-я.}$$ ◄

Т Осн. теорема алгебры:

Если $f(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ — полином, то имеет, по кр-й мере, 1 корень.

► От противного: $\exists$ $f(z)$ не имеет ни одного корня, тогда

$$q(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^n\left(a_n + a_{n-1}/z + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)}$$

$q(z)$ — рег-на, $\Rightarrow \frac{1 \text{ — рег}}{f(z) \text{ — рег}} \Rightarrow$ рег-на во всей к. пл-сти

при $|z| >> R >> 1 \Rightarrow q(z) \to 0$, тогда

с какого-то круга радиуса R в D^- ф-ция огр-на, т.е.

$q(z) \le 1$, $\forall$

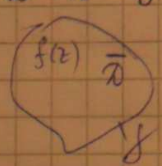
вне ~~ф-ции~~ круга ограничена и внутри.

Тогда во всей к. пл. $q(z)$ — огр-на, прим-ем т. Лиувилля

при $z \to 0$ $q(z)$ д/б $= 0$, но $q = \frac{1}{f(z)}$, т.е. частное на 0, а потому наше утвержд-ие неверно ◄

Т (Принцип максимума модуля)

Если ф-ция $f(z)$ — рег-на в нек-й замкн-ой обл-ти $\bar{D} = D^+ + \gamma$, то макс-м модуля этой ф-ции достиг-ся на границе γ этой обл-ти.

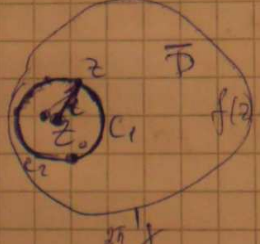


► осн-но на теореме о среднем.

От противного: $\exists$ $\max |f(z)|$ дост-ся не на границе в D^+ в нек-й $(\cdot)$ z

Запишем для этой $(\cdot)$ теор. о среднем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,d\varphi \quad (1)$$



$$\overset{M}{\parallel}\; |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r}|f(z)|\,dS, \quad z\in C_r, \quad r\,d\varphi = dS \text{ — дифф. дуги}$$

$f(z) \in C_1$, $|f(z)| = M$

$f(z) \in C_2$, $|f(z)| = M - \varepsilon$.

$C_r = C_1 + C_2$.

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r}\left[M \cdot C_1 + (M - \varepsilon) C_2\right] \leq \frac{1}{2\pi r}\left[M(\underbrace{C_1 + C_2}_{2\pi r}) - \varepsilon C_2\right]$$

$$M \leq \frac{1}{2\pi r}\left[M 2\pi r - \varepsilon C_2\right] = M - \frac{\varepsilon C_2}{2\pi r} \Rightarrow$$ т.к. все положит., то $\nearrow$ Знак неверно, след-но рег. ф-ция имеет макс на контуре!

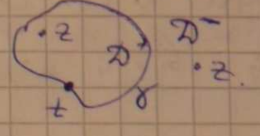
Интегралы типа Коши

Зн-ние интеграла типа Коши на линии интегрирования. Главное значение интеграла по Коши

Интеграл Коши:

$$f(z) = \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \text{ для } \forall z \in D^+, \text{ ограниченной контуром } \gamma.$$

$$0 = \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \forall z \in D^-$$



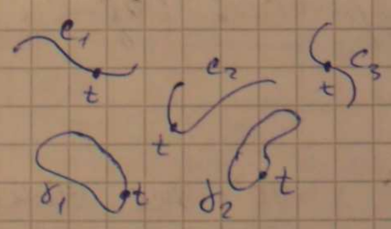
$f(z)$ – регулярная функция

$$\lim_{\substack{z \to t \\ \text{из } D^+}} f(z) = f(t)$$

Интеграл типа Коши:

$$\boxed{F(z) = \int_C \frac{\omega(t)\,dt}{t - z}}$$, где C – $\begin{cases} \text{замкнутая кривая} \\ \text{разомкнутая кривая} \end{cases}$

а также м/б $C = C_1 + C_2 + C_3 + \gamma_1 + \gamma_2$, т.е.:



$\omega(t)$ – произвольная непрерывная функция (не треб-ся рег-ость)

далее в случае замк-го контура, то $\int$-л типа Коши не переходит в $\int$-л Коши

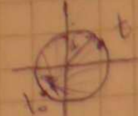
Пример:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{dt}{t(t-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{z}\,dt = \frac{1}{2\pi i z}\int_{|t|=1}\frac{dt}{t-z} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i z}\int_{|t|=1}\frac{dt}{t} \quad (1)$$

a) $(\cdot)\ z$ внутри единичного круга, $|z| < 1$.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i z}(2\pi i - 2\pi i) = 0$$



$$\ln(t-z) = \ln|t-z| + i\arg(t-z)$$

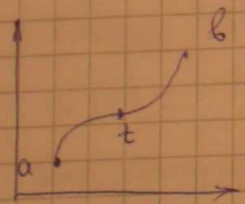
б) (·) z вне единичного круга $|z|>1$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i z}(0 - 2\pi i) = -\frac{1}{z} \ !$$

Замечат. от рег-сти:

если все точки в обл-сти рег-ны, то ∫-л Коши,

если ф-ция хоть в 1-й нерег-на, то ∫-л типа Коши.



$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C=l_{ab}} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \quad (2)$$

$$z \notin C = l_{ab}$$

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$, если $z\to b$, то $f(b)\to f(b)$ (Инт. Коши)

а в ∫-ле типа Коши по-другому.

В случае разомк-й кривой: (одной линии)

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = 0 \ !$$

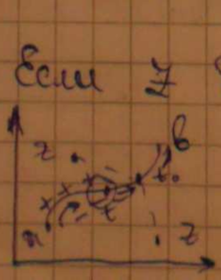
Если неск-ко линий, то же самое.

<u>Утв.</u> В случае разомк-го контура ∫-л типа Коши(!) опр-ет в пл-сти Z 1 рег-ую ф-цию

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\omega(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

F(z) имеет беск-е число произв-х конечных.

Если z будет на линии интегрирования:



$$F(t_0)=\int\limits_C \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} \quad ? \quad (3)$$

Говоря об области D^+ и D^- разомкнутой кривой, имеют в виду:

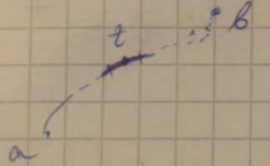
1) $\exists$ напр-ние от a к b
2) в окрестности (·) t область слева „+", справа „−"

C – разомкнутая кривая с концевыми (·) a, b

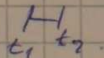
t_0 не совпадает ни с (·) a, ни с (·) b.

Опр1. Если ф-ция $\omega(t)$, заданная на кривой C, удовлетворяет в смежных (·) этой кривой t_1, t_2 условию: $|\omega(t_1)-\omega(t_2)| \le A\,|t_1-t_2|^{\mu}$ (4) то говорят, что ф-ция $\omega(t)$ удовлетворяет усл-ию Гельдера на кривой C.

Опр2. Если ф-ция $\omega(t)$, зад-я на кривой C, удовл-ет в окр-сти точки (·) t_0 условию $|\omega(t)-\omega(t_0)| \le A\,|t-t_0|^{\mu}$ то говорят, что эта ф-ция удовл-ет усл-ию Гельдера в (·) t_0. (4)



смежные точки – точки, следующие одна за другой

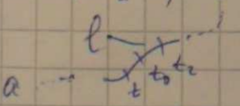


$0<\mu\le 1$

Будем ∡ ∫-л (3) как lim-й случай от след. интеграла:

$$F(t_0)=\lim_{l\to 0}\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C-l}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}\,dt}_{J_1}+\underbrace{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C-l}\frac{\omega(t_0)\,dt}{t-t_0}}_{J_2}\Bigg\} \quad (5)$$

t_1, t_2, в t_0 по контуру дуги. $|t_2-t_1| \ll 1$



$l: \; |t_1-t_0| \equiv |t_2-t_0|$ (6)

$$\left|\frac{1}{\pi i}\int\limits_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{|\omega(t)-\omega(t_0)|}{|t-t_0|}\,|d(t-t_0)| \le$$

$$\le \frac{A}{2\pi i}\int\limits_l |t-t_0|^{\mu-1}\,d(t-t_0) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

При $l\to 0$ 1-й ∫-л в (5) $\exists$, т.е. будет $\int\limits_C$

∡ 2-й ∫-л в (5)

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-l} \frac{\omega(t_0)dt}{t-t_0} = \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\int_{C-l}\frac{dt}{t-t_0} = \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\left\{\int_a^{t_1}\frac{dt}{t-t_0} + \int_{t_2}^{b}\frac{dt}{t-t_0}\right\}$$

$$J_2 = \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\left\{\ln(t-t_0)\Big|_a^{t_1} + \ln(t-t_0)\Big|_{t_2}^{b}\right\}$$

$$J_2 = \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\left\{\ln(t_1-t_0) - \ln(a-t_0) + \ln(b-t_0) - \ln(t_2-t_0)\right\}$$

$$J_2 = \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} + \ln\frac{b-t_0}{a-t_0}\right] \quad (7)$$

$$\ln\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} = \cancel{\ln\frac{|t_1-t_0|}{|t_2-t_0|}} + i(\arg(t_1-t_0) - \arg(t_2-t_0))$$

Согласно усл-ю (6) $\ln\frac{|t_1-t_0|}{|t_2-t_0|} = 0$

$$\lim_{\substack{t_1\to 0\\ t_2\to 0}} i(\arg \text{———}) = \pi.$$

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{[\omega(t)-\omega(t_0)]dt}{t-t_0} + \frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{\omega(t_0)}{2} \quad (8)$$

(8) опр-ет гл. зн-ние $\int$-ла по Коши на линии интегрирования.

II семестр.

Вейерштрасс (1815-1897)

1) Бесконечные числовые ряды с компл-ми членами
2) Функц-ые и степенные ряды
3) Теорема Абеля
4) Теорема Коши

Опр. ∞-й ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1), общий член к-го $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ (компл. число), наз-ся сх-щимся, если $\exists \lim_{n\to\infty}[a_1+a_2+\ldots+a_n] = S$. Если S по модулю ..., ряд сход-щийся, а если $S \nexists$ или $=\infty$, то ряд наз-ся расх-ся.

Теорема. Ряд (1) $\to\leftarrow \iff$ когда сх-ся вещ-е ряды α_i $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots)$ и β_i $(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n+\ldots)$.

▶ $S_n^* = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_i$: если сх-ся предел част-х сумм
$S_n^{**} = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i$

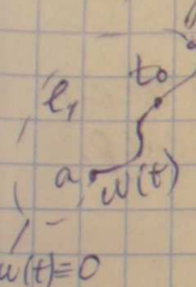
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n^{*} + i\lim_{n\to\infty} S_n^{**}}_{}$$

сх-ся $\Rightarrow$ S_n также сх-ся.

$$F^-(t_0) = F(t_0) - \frac{\omega(t_0)}{2}$$

Для замк-й линии l док-о

$\forall$ разомк. линию



$$L = l_{ab} + l_1$$

Положим на l_1 $\omega(t)\equiv 0$

Берем $\int$-л по L, $\int$-л по $l_1 = 0$,

получаем формулу Сохоцкого-Племеля, но в гл. зн-ние $F(t_0)$ будет содержаться l_1.

Главное зн-ние $\int$-ла по ∞ прямой

L – ∞-я прямая

$\int$-ла типа Коши м/б распр-но на случай, когда линия $\int$-ния L представляет собой ∞-ую прямую.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\omega(t) = c \quad (c = const)$$

Тогда $\int$-л подобного рода записывается в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(t)-c}{t-z}\,dt + \frac{c}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-z}$$

$$F(z) = \lim_{B\to\infty}\left(\int_{-B}^{+B}\frac{\omega(t)-c}{t-z}\,dt + \frac{c}{2\pi i}\int_{-B}^{+B}\frac{dt}{t-z}\right)$$

$$\int_{B_1}^{B_2}\frac{dt}{t-z} =$$

самим

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-l} \frac{\ldots}{t-t_0} \ldots + \int^{b} \frac{dt}{t-t_0} \Big\}$$

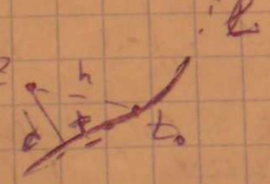
Теорема Сохоцкого-Племеля

Пусть ф-ция $\omega(t)$ удовлетворяет (·) t_0 линии l (замк. или разомк.) условию Гельдера, а (·) z стремится к (·) t_0 так, что отношение $\frac{h}{d}$ остается огр-й величиной, тогда $\int$-л типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \quad (a)$$

имеет предельное зн-ние слева и справа от точки t_0, которые связаны с гл. значением $\int$-ла типа Коши след. соотнош-ми:

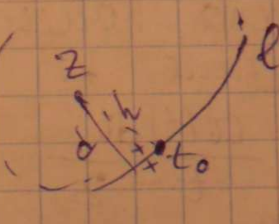
$$\begin{cases} F^+(t_0) = F(t_0) + \dfrac{\omega(t_0)}{2} \\ F^-(t_0) = F(t_0) - \dfrac{\omega(t_0)}{2} \end{cases} \quad (*)$$



(*) — пред. зн-ния справа слева, а $F(t_0)$ — гл. зн-ние $\int$-ла типа Коши на линии $\int$-ния.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(t_0)\,dt}{t-z} \quad (2)$$

1) Пусть l — замкнутая кривая γ



$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\omega(t_0)\,dt}{t-z} = \begin{cases} \omega(t_0), & \forall z \in D^+ \\ 0, & \forall z \in D^- \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-z}\,dt + \begin{cases} \omega(t_0), & \forall z \in D^+ \\ 0, & \forall z \in D^- \end{cases} \quad (3)$$

В (3) устремим $z \to t_0$.

По лемме: $z \to t_0 \in D^+$

$$\left.\begin{aligned} F^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-z}\,dt + \omega(t_0) \\ F^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}\,dt + 0 \end{aligned}\right\} (4)$$

С учетом рав-ва (9) пред. лекции:

$$F^+(t_0) = F(t_0) + \frac{\omega(t_0)}{2}$$

Опр. ∞-й ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1), общий член к-го $a_n = \alpha_n + \ldots$ наз. сх-щимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}[a_1 + a_2 + \ldots + a_n] = S$. Если S по модулю [illegible] … наз. сх-щийся, а если S ∄ или $= \infty$, то него наз-ся расх-ся сх-ся $\Rightarrow$ S_n также сх-ся.

Критерий сх-сти. Ряд (1) наз-ся сх-щимся, если для

Δ разность Δ между левой и правой частью, отсекая ряд lim.

$$\Delta = \int_C \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-z}\,dt - \int_C \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}\,dt \quad (1)$$

$$\Delta = \int_C \frac{(z-t_0)(\omega(t)-\omega(t_0))\,dt}{(t-t_0)(t-z)} \quad (2)$$

Выделим дугу α с концевыми точками t_2, t_1

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \text{ где } \Delta_1 = \int_\alpha \frac{(z-t_0)(\omega(t)-\omega(t_0))\,dt}{(t-t_0)(t-z)}$$

$$\Delta_2 = \int_{C-\alpha} \frac{(z-t_0)(\omega(t)-\omega(t_0))\,dt}{(t-t_0)(t-z)}$$

Докажем, что:

$\frac{|z-t_0|}{|z-t|}$ – конечно.

Оценим $\int$-л Δ_1 по модулю:

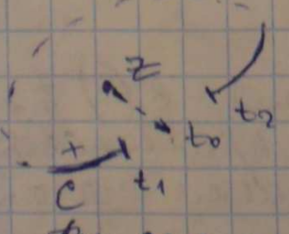
$$|\Delta_1| \le \int_\alpha \frac{|z-t_0|\,|\omega(t)-\omega(t_0)|\,d|t-t_0|}{|t-z|\,|t-t_0|} \le \frac{hA}{d}\int_\alpha |t-t_0|^{\mu-1}\,d|t-t_0| \le$$

$$\le \frac{hA}{d}|t-t_0|^{\mu}\Big|_{t_1}^{t_2} \le \frac{hA}{d}\left|\varepsilon_2^{\mu} - \varepsilon_1^{\mu}\right|$$

Считаем, что $t_2 = t_0+\varepsilon_2$, $t_1 = t_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \ne \varepsilon_2$.

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \Delta_1 \Rightarrow 0 \qquad \lim \Delta_1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_*}{2}$

$\measuredangle\ \Delta_2$: $\quad \Delta_2 = \int_{C-\alpha} \frac{[\omega(t)-\omega(t_0)][z-t_0]\,dt}{(t-t_0)(t-z)} =$



$$= \underbrace{(z-t_0)}_{\delta}\int_{C-\alpha}\frac{(\omega(t)-\omega(t_0))\,dt}{(t-t_0)(t-z)}$$

При дост-х малых α, $\int$-л $|\Delta_2| < \frac{\varepsilon_*}{2}$ за счет $(z-t_0)\to 0$

Пусть $|\alpha| < 1$: $|\Delta| \le |\Delta_1| + |\Delta_2| = \varepsilon_* \to 0$.

Если а) абс-сх-вами: при $\forall i$: $|f_n(z)| <$
и сх-сти ряда (б) вытекает абс-я сх-сть ря
при этом из абс. сх-сти ряда (а) вытекает и рав

$S_n = S_n^{*} + i S_n^{**}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{*} + i \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{**}$

сх-ся $\Rightarrow$ S_n также сх-ся.

<u>Критерий сх-сти</u>. Ряд (1) наз-ся сх-щимся, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in Z_+$ при к-м $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$ (*) при $\forall$ полож-м k.

Из этого критерия $\xrightarrow{\text{вытекает}}$ необх-е условие сх-сти ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \to 0$.

Ряд (1) наз-ся <u>абс-но сх-щимся</u>, если сх-ся ряд, сост-й из ряда (1) и предст-щий сумму <u>модулей</u>:

$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ (2)

Функциональный ряд — ряд, слаг-мые к-х предст-ют ф-ции компл. перем-го z.

$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$ (3)

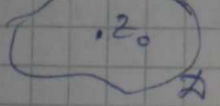
М/б как рег-ми, так и нерег-ми (ф-ции в ряде)

Если подст-ть нек-е z_0: $f_0(z_0) + f_1(z_0) + \ldots + f_n(z_0) + \ldots$, то получим числ. ряд из компл-х чисел.

<u>Опр.</u> (Вейерштрасс) Если для функц-го ряда $f(z)$, к-й ~~[illegible]~~ состоит из $f_i(z)$ опр-ных в нек-й обл-ти D, и возьмем нек-ую z_0

<u>Опр.</u> (Вейерштрасса)

Если функц-й ряд (3), опр-й в D, сх-ся в нек-й $(\cdot)$ $z_0 \in D$, причем z_0 — $\forall$, то этот ряд наз-ся сх-щимся в обл-ти D.



<u>Опр.</u> Если ряд (3) сх-ся в D ф-ции $\boxed{F(z)}$, то он наз-ся равном-о сх-щимся, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $|F(z) - F_n(z)| <$ при $n > N$ для <u>всех</u> $z \in D$, ~~то ряд (3) наз-ся равном-но~~

$\underline{F(z)}$ — сумма ряда (предельная), $F_n(z)$ — част. сумма.

(Т2) $\exists$ зад-а 2 ряда а) функц-й $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(z)$; б) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i$ — числовой (веч-й) $r_i > 0$

Если а) обл-ет ев-вами: при $\forall i$: $|f_n(z)| < r_n$, то из сх-сти ряда (б) вытекает абс-я сх-сть ряда (а), при этом из абс. сх-сти ряда (а) вытекает и равном-ая сх-сть ряда (а) (по условию (*))

▶ $|f_0(z)| + \ldots + |f_n(z)| < \underbrace{r_0 + \ldots + r_n}$,

сх-ся, стрем. ся к кон. зн-нию,

тогда и сумма модулей → к кон. зн-нию.

равномерная сх-сть ; самим ◀

Степ. ряды:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i \quad (4)$$, a – центр ряда, c_i – коэф. ряда

были иссл-ны Нильсом Абелем.

Т (Абеля). Если ряд (4) сх-ся в нек. й (·) z_0, то он абс-но сх-ся в ∀ (·) z, распол-й ближе к центру a ряда, чем (·) z_0. В ∀ замк-м круге $|z-a| \le k|z_0-a|$, где $0<k<1$, сх-сть этого ряда равномерная.

$|z_0 - a| = R$ – окр-сть радиуса R

$k|z_0 - a| = kR = R_1 < R$.

▶ Т.к. в z_0 степ. ряд (4) сх-ся, то ∃ полож. е число M, что при ∀ i $|c_i (z_0-a)^i| < M$.

$$c_i (z-a)^i \equiv c_i (z_0-a)^i \cdot \frac{c_i (z-a)^i}{c_i (z_0-a)^i}$$

$$|c_i (z-a)^i| = \underbrace{|c_i (z_0-a)^i|}_{<M} \cdot \left|\frac{(z-a)^i}{(z_0-a)^i}\right|$$

$$\frac{|z-a|}{|z_0-a|} \le k.$$

$|c_i (z-a)^i| < Mk^i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ и по Т2 абс-но сх-ся и рав-о сх-ся также по Т2 ◀

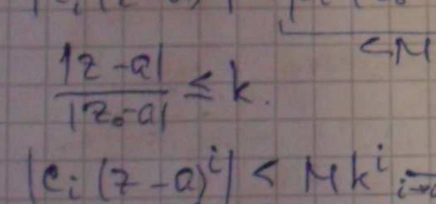
Следствие. Если ряд (4) расходится в (·) z_0, то он расх-ся в ∀ (·) z, удал-й от центра a ряда дальше, чем z_0.

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z_0 - a)^i$ – расх-ся, в этом случае:

$\forall z \quad |z-a| > |z_0 - a|$

↪ расх-ся.

▶ ∃ в (·) z ряд сх-ся, тогда по теор. Абеля противоречие ◀



Формула Коши-Адамара

$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n}$ – радиус сх-сти степ-го ряда, R предельной, наиб-й увел-ем окр-стей в (·) a

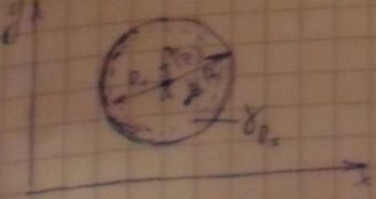
В случае:

$R_* = \infty$, $R_* = 0$, R_* – предельный радиус сх-сти

$R_* = R^0$

Теорема Коши. (18) Функция $f(z)$, рег-я в круге $|z-a|<R$, a – центр, представима в нем рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ и это предст-ние единств-о.

$R_1 < R$ и тогда $f(z)$ рег-на, как внутри круга радиуса R_1, так и на границе.



$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad (1)$$

$$\underbrace{1+q+q^2+\ldots+q^n}= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q} \quad (3)$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)\left[1-\frac{z-a}{t-a}\right]}$$

$$\frac{|z-a|}{|t-a|} = q$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a} + \frac{z-a}{(t-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^{n+1}}{(t-a)^{n+1}(t-z)} \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{(z-a)^n f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}} + Q_n^* \; (5) \quad Q_n^* = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{(z-a)^{n+1} f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}(t-z)}$$

$$|Q_n^*| < \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{|(z-a)^{n+1}||f(t)||dt|}{|(t-a)^{n+1}||t-z|} < \frac{1}{\cancel{2\pi}}\,\frac{|(z-a)^{n+1}|M\,\cancel{2\pi} R_1}{|R_1-a|^{n+1}\rho}$$

$$M = \max_{t\in\gamma_{R_1}} f(t), \quad \rho = \min_{t\in\gamma_{R_1}} |t-z|$$

$\lim\limits_{n\to\infty} |Q_n^*| = 0$ – треб-ся док-ть

$$(6) \quad |Q_n^*| < \underbrace{\frac{MR_1}{\rho}}_{\text{кон. число } M_*} \cdot \frac{|z-a|^{n+1}}{|R_1-a|^{n+1}} < M_* \left|\frac{z-a}{R_1-a}\right|^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}|Q_n^*| \le M_* \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-a}{R_1-a}\right|^{n+1}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|Q^*| = 0$$

тогда получаем (5) в след. виде:

$$\boxed{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n} \quad (7)$$

Док-ли часть теоремы, ост-ся док-ть, что

Полагаем слева и справа $z=a$

$$f(a)=C_0$$

$$f'(a)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, n(z-a)^{n-1} = C_1\cdot 1$$

$$C_1=\frac{f'(a)}{1},\ C_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \dots,$$

получаем ряд Тейлора

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(z-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)(z-a)^n}{n!}+\dots,\quad z\in D$$

Оценим по модулю $\forall$ член ряда Тейлора, разложение рег. ф-ции внутри круга с центром в a с радиусом R

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n \quad (*)$$

Док-ть, что $|C_n(z-a)^n| < \max\limits_{\gamma_R}|f(z)|$

Ни один член ряда $(*)$ внутри круга сх-ти не превосходит $\max|f(z)|$

(T) (Вейерштрасса) (1859) — обр-я теорема к теореме Коши

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ $(*)$, сост-щий из рег-х ф-ций $f_n(z)$ в нек-й односв-й области D равномерно сх-ся внутри этой области и равном-но сх-ся в $\forall$ замкн. области $\bar{D}^*\in D$, то:

1) $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ явл-ся рег-й ф-цией внутри D.

2) Произв-я $F^{(k)}(z)$ м/б получ. почл-м диффер-ем ряда $(*)$, причем получ-й ряд

$$F^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (**)$$ также равномерно сх-ся внутри D.

$$\bar{D}_* = D_* + \gamma_*$$

$z\in D_*$, $t\in\gamma_*$

► 1) $F(t)=f_0(t)+f_1(t)+\dots+f_k(t)+\dots$ (1) по усл-ю равно сх-ся на γ_*

Разделим (1) на $t-z$, и получ-й ряд также будет равном-о сх-ся

$$\frac{F(t)}{t-z} = \frac{f_0(t)}{t-z} + \frac{f_1(t)}{t-z} + \ldots + \frac{f_n(t)}{t-z} + \ldots \quad (2)$$

Из равн. сх-сти (1) $\Rightarrow$ равн. сх-сть (2) $\Rightarrow$ можно почленно $\int$-ть.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{F(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z} + \ldots \quad (3)$$

$\bar{D}_*$ – односв-я, замк-я и на контуре ф-ция также рег-я.

Применим $\int$-ую форм-лу Коши в (3) справа:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{F(t)\,dt}{t-z}}_{} = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \underbrace{F(z)}_{\text{ру-т } F(z)} \quad (4)$$

$\int$-я ф-ция $F(t)$.

По теореме Коши (рег. ф-ция в замкн-й обл-ти и т.д.)

След-но, $F(z)$ – регулярна, т.к. опр-ся $\int$-й формулой Коши.

2) Проведём доп. контур C (между γ_* и контуром обл. D)

$\bar{D}_* \in \bar{D}_C \in D$

d – min расст-е между γ_* и C. C – замкн-й.

$\cdot\ \zeta \in C$

На контуре C имеем:

$$F(\zeta) = f_0(\zeta) + \ldots + f_n(\zeta) + \ldots \quad (5)$$

~~Продифф-ем (5) по ζ (можно т.к. $F(\zeta)$ – рег-я, и только что док-ли, можем почленно дифф-ть)~~

$$\cancel{F^{(k)}(\zeta) = f_0^{(k)}(\zeta) + \ldots + f_n^{(k)}(\zeta) + \ldots \quad (6)}$$

$$\frac{F^{(k)}(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} = \frac{f_0^{(k)}(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} + \ldots + \frac{f_n^{(k)}(\zeta)}{(\zeta+z)^{k+1}} + \ldots \quad (7) \text{ (равн. сх-ся)}$$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{F^{(k)}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}} =$$

Имеем односв. обл-ть, огр-ную контур-м C, по формуле Коши для произв-ных имеем:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (8)$$

$$\frac{F(t)}{t-z} = \frac{f_0(t)}{t-z} + \frac{f_1(t)}{t-z} + \ldots + \frac{f_n(t)}{t-z} + \ldots \quad (2)$$

Из равн. сх-сти (1) $\Rightarrow$ равн. сх-сть (2) $\Rightarrow$ можно почленно $\int$-ть.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{F(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z} + \ldots \quad (3)$$

$\bar{D}_*$ – односв-я, замк-я и на контуре ф-ция также рег-я.

Применим $\int$-ую форм-лу Коши в (3) справа:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_*} \frac{F(t)\,dt}{t-z}} = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \underbrace{F(z)}_{\text{ру-т } F(z)} \quad (4)$$

Под $\int$-я ф-ция $F(t)$.

По теореме Коши (рег. ф-ция в замк-й обл-ти и т.д.)

След-но, $F(z)$ – регулярна, т.к. опр-ся $\int$-й формулой Коши.

2) Проведём доп. контур C (между γ_* и контуром обл. D)

$\bar{D}_* \in \bar{D}_C \in D$

d – min расст-е между γ_* и C. C – замкн-й.

$(\cdot)\ \zeta \in C$

На контуре C имеем:

$$F(\zeta) = f_0(\zeta) + \ldots + f_n(\zeta) + \ldots \quad (5)$$

~~Продифф-ем (5) по ζ (можем т.к. $F(\zeta)$ – рег-я, и, по только что док-ному, можем почленно дифф-ть)~~

$$\cancel{F^{(k)}(\zeta) = f_0^{(k)}(\zeta) + \ldots + f_n^{(k)}(\zeta) + \ldots \quad (6)}$$

$$\frac{F^{(k)}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{f_0^{(k)}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \ldots + \frac{f_n^{(k)}(\zeta)}{(\zeta + z)^{k+1}} + \ldots \quad (7) \text{ (равн. сх-ся)}$$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{F^{(k)}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \; (=)$$

Имеем односв. обл-ть огр. ую контур-м C, по формуле Коши для произв-ых имеем:

$$(=) \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (8)$$

Ряд можно дифф-ть почленно ⇒ т. 2 в т. Вейерштрасса док-а.

Теперь док-м равном. сх-сть ряда (8):

Ряд $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ наз-ся равн. сх-ся $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ такое $N = N(\varepsilon)$: для $\forall$ зн-ий $n > N$ вып-ся $|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon$ для $\forall z \in D$.

Усл-е равном. сх-сти ряда (8):

$$|F^{(k)}(z) - F_n^{(k)}(z)| < \varepsilon.$$

$$F^{(k)}(z) - F_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(F(\xi) - F_n(\xi))\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} \qquad (9)$$

Оценим (9) по abs:

$$|F^{(k)}(z) - F_n^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(F(\xi) - F_n(\xi))\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}\right| \le$$

$$\le \frac{k!}{2\pi}\int\limits_C \frac{|F(\xi) - F_n(\xi)|\,|d\xi|}{|\xi - z|^{k+1}} \le \frac{k!}{2\pi}\,\frac{\max_C |F(\xi) - F_n(\xi)|\, l}{d^{k+1}} <$$

l - длина контура C $(|d\xi|)$

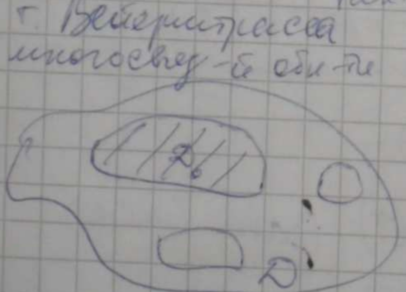
$< \dfrac{k!\,\varepsilon\, l}{2\pi d^{k+1}} < \varepsilon_*$, ε_* м/б сколь угодно малой

$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ - сх-ся внутри круга радиуса 1.

$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n^2}$ $\quad z = 1, \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ - расх-ся ⇒

⇒ по т. Абеля ~~___~~ т.к. расх-ся в 1 ⇒ и на гр-це ⇒ д/б сх-ися внутри обл-ти

т. Вейерштрасса справ-ва также в том случае, если в многосвяз-й обл-ти выделена односвяз-я обл-ть.

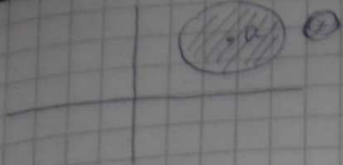


$D_0 \subset D$.

Ч. случай функцион-го ряда - степ. ряд с центром в (.) a.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Степ-й ряд абс. и равн-но сх-ся с центр в (.) a (т. Абеля)



Радиус сх-сти по формуле Коши-Адамара

Т. Коши: Устеп. ряд явл-ся рядом Тейлора своей суммы,

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

Т. Вейерштрасса – обр. теорема к т. Коши: если ф. рег-на в круге, то она разлаг-ся в ряд Тейлора с центр. в (·) a.

Ряд Лорана (1813 – 1854г)

Док-л теорему 1843 – дата публикации.

1841 – Вейерштрасс

Т Если ф-ция $f(z)$ рег-на в кольцевой обл-ти с центром в (·) a, $r<|z-a|<R$, то она в этой обл-ти предст-ма в виде:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad (1)$$

▶ Х кольцевую обл-ть $r_1<|z-a|<R_1$ $\qquad r<r_1<R_1<R$

Очевидно для того, чтобы $f(z)$ была рег-на в кольце

$r_1\le |z-a|\le R_1$

должно применить f-ую формулу Коши для $\forall (\cdot)\, z\in\{z \mid r_1\le|z-a|\le R_1\}$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t\in\gamma_{R_1}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}}_{J_1}+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t\in\gamma_{r_1}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}}_{J_2} \qquad (2)$$

$$J_1:\ \frac{1}{t-z}\equiv\frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{z-a}{t-a}\right)} = \quad t\in\gamma_{R_1}$$

$$\frac{|z-a|}{|t-a|}<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} \qquad (3)$$

$$J_2: \quad \frac{1}{t-z} = -\frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{t-a}{z-a}\right]} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad (4)$$

$$\frac{|t-a|}{|z-a|}<1, \quad t\in \gamma_{r_1}$$

пр. часть (3) и (4) подст. их в (2)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}}_{=c_n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(t)(t-a)^n\,dt}_{J_2} \qquad (5)$$

Меняем напр-ние $\int$-ния в J_2

Преобразуем J_2 в (5)

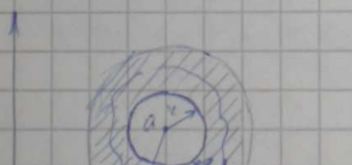
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(t)(t-a)^n\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(t)(t-a)^{n-1}\,dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{-1} (z-a)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}}_{c_n} \qquad (6)$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Коэффициенты ряда Лорана. Их свойства. Связь ряда Лорана с рядом Фурье. Изолированные особые точки регулярных ф-ций

$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k$ (1) — ряд Лорана, если $f(z)$ рег. в кольце с центром в т. a



$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{k+1}} \qquad (2)$$

Ряд Лорана можно предст. в виде суммы 2х рядов

$$f(z) = f_1(z)+f_2(z),$$

где $f_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$ (а) — ряд Тейлора, сх-ся в окр-сти

$f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ (б) — сх-ся вне окр-сти рад. r

(а) — прав. часть ряда Лорана

(б) — главная часть ряда Лорана

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{k+1}}$$!!!

$c_k = f^{(k)}(a)/k!$? ни к прав-й, ни к гл-й

эта формула не применима,

т.к. в (·) a ф-ция не опр-на и не рег-на.

Оценим коэфф-ты ряда Лорана по абс:

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r^*}} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{k+1}}\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{r^*}} \frac{\max|f(t)|\,|dt|}{|t-a|^{k+1}} \leq$$

$r < r^* < R$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{M\cdot 2\pi r^*}{(r^*)^{k+1}} = \frac{M}{(r^*)^k}$$

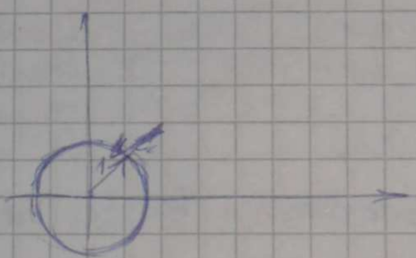
$M = \max\limits_{\gamma_{r^*}} |f(t)|$

Сопоставим ряды Лорана и Тейлора

Ряд Лорана и ряд Фурье

Д р. Лорана в узком кольце с центром с (·) a

(·) a перенесем в начало коорд-т.



$R = 1+\varepsilon,\ \varepsilon = o(1)$

$r = 1-\varepsilon$

окр-ть рад-са 1 — окр-ть между r и R (серединная)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k \quad (3)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell} \frac{f(t)\,dt}{t^{k+1}} \quad (4)$$

$z = 1\cdot e^{i\varphi}$; $f(z) = f(e^{i\varphi}) = F(\varphi)$ (компл. ф-ция от вещ. пер-ой)

$$F(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\varphi} \quad (5)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(e^{i\varphi})\,d(e^{i\varphi})}{e^{i(k+1)\varphi}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int F(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi}_{|z|=1} \quad (6)$$

Ряд Лорана при $|z| \equiv 1$ ⟵ ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\ \ldots\ )$$

написать ряд Фурье и связь с c_k и c_{-k}

Жан Батист Фурье (1768-1830)

1798г - участие в походе Нап-на в Египет

1801 - вернулся во Францию

1801-1815 - История Египта.

Изолиров-ые особые (·) рег-х ф-ций

$f(z) = \frac{1}{z}$

$z=0$ — f не рег-на, не непр-на и стрем. в ∞ ст.

У рег. ф-ций появился (·), где ф-ция перестает быть рег-й.

Эти (·) изолир-ные особ-ми (·)-ми.

$z = \varepsilon e^{i\varphi}$

$f(z) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\varphi}$ — (·) в ∞-о малой окр-сти уже регул-на.

Такие (·) изолир-ые и особые.

Опр. Изолир-ая особая (·) рег. ф-ций считается (·) в том случае, когда в окр-сти д-ной (·) не $\exists$ др. особых (·).

3 вида особых (·):

1. Устранимая особая (·)
2. Полюс
3. Существенно особая (·)

① Устран-ой особ-ой (·) рег. ф-ции $f(z)$ наз-ся такая (·), для к-й $\exists$ кон. lim

$\exists$ (·)a - УОТ $\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z) = M$ — конечное число

Пр. $\exists\ f(z) = \frac{\sin z}{z}$

(·) $z=0$ — УОТ, т.к. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)$$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$ — кон. число.

$f(0) = 1$ — изб-ся от особой (·)

② Изолир-я особая (·)

$z = b$ наз-ся полюсом рег. ф-ции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to b} f(z) = \infty$

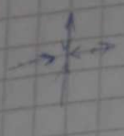
Пр. $f(z) = \frac{1}{z-b}$

③ ∀(·) $z = c$ наз-ся СОТ рег. ф-ции $f(z)$, если $\lim_{z\to c} f(z)$ ∄

$c = 0$

$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \lim_{z\to 0+0} f(z) = +\infty$

$\lim_{z\to 0-0} f(z) = 0$



В зав-сти от напр-ния — разные lim-е зн-ния ⇒ lim ∄

Дост. усл-е сущ-е ИОТ

Т1 Для того, чтобы ИОТ $z=a$ была УОТ ф-ции $f(z)$ н. и д., чтобы в разложении ф-ции $f(z)$ в ряд Лорана с центром в (·) a в этом ряду отсутст-ла гл. часть.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

Т2 Для того, чтобы ИОТ $z=b$ была полюсом рег. ф-ции $f(z)$ н. и д., чтобы в р. Лорана с центром в (·) b гл. часть содержала кон. число слаг-х

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} C_k (z-b)^k = \underbrace{\frac{C_{-m}}{(z-b)^m} + \ldots + \frac{C_{-1}}{(z-b)}}_{\text{гл. часть — конеч-х}} + C_0 + C_1(z-b) + \ldots$$

Полюс наз-ся пор-ка m рег. ф-ции $f(z)$, если в гл. части р. Лорана коэфф-т $\boxed{C_{-m} \neq 0}$ ∃

Если так, то (·) $z = b$ — полюс пор-ка m.

Т3 Для того, чтобы ИОТ $z = c^*$ была СОТ рег. ф-ции $f(z)$ н. и д., чтобы в р. Лорана ф-ции $f(z)$ с центром в (·) c^* присутств-ло ∞ число ~~слаг~~ слаг-х обоих знаков

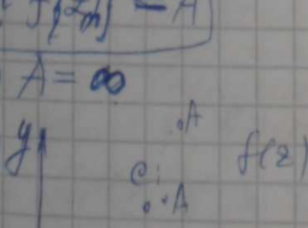
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k (z-c^*)^k$$

Об-но ∄! $\lim_{z\to c^*} f(z) = \infty$

Т (Сохоцкого) (1868) Теорема о СОТ.
$\forall A \in \mathbb{C}$ в окр-сти СОТ ф-ции $f(z)$ ∃ посл-ть (·) $\{z_m\} \to c$:

$$\boxed{\lim_{z\to c} f(z_m) = A}$$

▶ 1) $A = \infty$

2)  $f(z)$ (·) c — СОТ для $f(z)$

A — кон. компл. число

а) в $\forall$ окр-сти (·) с $\exists!$ (·) A (число)

$\{f(z_m)\} = A$

б) в $\forall$ окр-сти (·) с $\nexists$ зн-ний $f(z) = A$

Δ ф-цию $g(z) = \left[\frac{1}{f(z)-A}\right]$

(·) $z = c$ не м/б ни полюсом, ни УОТ ф-ции $g(z)$, тогда $\exists$ lim:

$$\lim_{z\to c} f(z) = \left[\frac{1}{g(z)} + A\right]$$

м/б только СОТ для $g(z)$, а

$z = c$ СОТ $g(z)$ хар-ка тем, что $\exists$ хотя бы 1 посл-ть $\longrightarrow \infty \Rightarrow$

$$\lim_{z\to c} f(z) = \left[\underbrace{\left(\frac{1}{g(z)}\right)}_{\to 0} + A\right] = A.$$

Св-ва нулей рег-й ф-ции.

Δ ф-цию $f(z)$, к-я, будучи рег-й в нек-й обл-ти D, обращ-ся в (·) $z=a$ в 0.

$f(z)$ раскл-ся в ряд Тейлора, т.к. рег-на в круг-й обл-ти с центром в (·) a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots + \underline{C_m(z-a)^m + \dots}$$

Если $C_0 = C_1 = \dots = C_{m-1} = 0$

В этом случае (·) $z=a$ — ноль порядка m.

Если взять $f^{(m)}(a) \neq 0$

Рег. ф-ция $f(z)$, к-я разл-ся в ряд Тейлора и имеет (·) $z=a$ 0-ль пор-ка m,

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_m (z-a)^k$$

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m$$

$$f(z) = (z-a)^m \underbrace{\left[C_m + C_{m+1}(z-a) + \dots\right]}$$

Док-м, что 0 пор-ка m — (·) изол-я, а в $\forall$ ε-окр-ти (·) $z=a$ ф-ция $f(z) \neq 0$.

$z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$

$f(a + \varepsilon e^{i\varphi}) = \varepsilon^m e^{im\varphi} [C_m + C_{m+1} \varepsilon e^{i\varphi} + \ldots]$

причем $C_m \neq 0$.

в $\forall$ ε-окр-ти ф-ция не обращ-ся в $0 \Rightarrow$

(·) a — 0 пор-ка m — изолированная (·).

Теорема о нулевой области регулярной функции. Теорема единственности. Аналитическое продолжение регул-х ф-ций. Теорема об аналитическом продолжении. Анал-е продолж-е по Вейерштрассу. Теорема Римана. Принцип симметрии. Вычеты рег-х ф-ций. Теорема Коши о вычетах

Рег-я ф-ция имеет изолир-й 0 k пор-ка.
если хотя бы 1 коэфф-т $\neq 0 \Rightarrow$ (·) 0 - изолир-я
если все коэфф-ты обнуляются, то ф-ция обнул-ся в нек-й круговой обл-ти.

Т (Теорема о нулевой области рег. ф-ции)

Пусть ф-ция $f(z) \in D$ рег-ка в нек-й области D, при этом в области β $f(z) \equiv 0$, тогда $f(z) = 0$ во всей области D

▶ Пусть в нек-й (·) $c \in D$ и $c \notin \beta$ ф-ция $f(z) \neq 0$.

возьмём (·) $b \in \beta$ и соединим (·)-ки b и c непр-й линией l, тогда она состоит из 2х частей.
α - гр. (·) β.

$l = b\alpha + \alpha c$, на части $b\alpha$ ф-ция $f(z) \equiv 0$ (по усл.)

на части αc $f(z) \neq 0$, по крайней мере в нек-х (·), близких к (·) α.
Тогда возьмем (·) α за центр ряда и разложим в ряд $f(z)$ по степеням $(z - \alpha)$.
Если на внутр. части окр-ти в (·) ф-ция равна 0, тогда коэфф-ты обнуляются, а по док-ву выше (·) 0 - изолир-я, и след-но во всех (·) $f(z)$ обращ-ся в 0 ◀

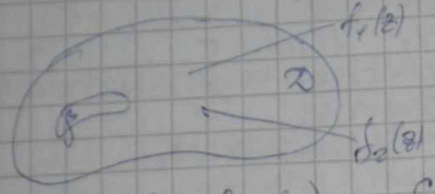
переформул-ка:

Т' Если ф-ция $f(z) \in D$ и рег-ка в D обращ-ся на нек-й дуге l обращ-ся в $0 \Rightarrow$ обращ-ся в 0 на всей обл-ти D.

(T1) Если ф-ция $f(z) \in \mathcal{D}$, рег-я, и в нек-й $(\cdot)$ $m \in \mathcal{D}$ $f(m) = 0$ вместе с произв-ми $f'(m) = 0, \dots, f^{k}(m) = 0, \dots$, то это озн-т, что разложив в ряд в окр-ти $(\cdot)$ m, то получаем коэфф-ты, равные нулю все $\Rightarrow$ в окр-ти $(\cdot)$ m ф-ция обнуляется $\Rightarrow$ и во всей обл-ти $\mathcal{D}$.

(T2) (теорема единств-ти)

I Если в нек-й обл-ти $\mathcal{D}$ задано 2 рег. с ф-ции $f_1(z), f_2(z)$ и в нек-й обл-ти β эти ф-ции совп-т между собой, то они совп-т во всей обл-ти $\mathcal{D}$.



$$\beta \in \mathcal{D}, \ f_1(z) \equiv f_2(z), \ \forall z \in \beta$$

▶ $\exists$ $f_3(z) \equiv f_1(z) - f_2(z) \Rightarrow f_3(z)$ рег-на $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в β обнуляется $\Rightarrow f_3$ обнул-ся в β и в $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$

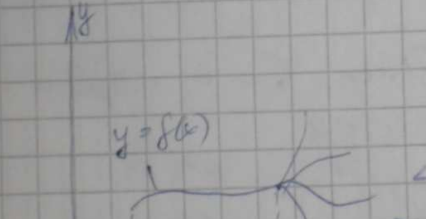
$\Rightarrow f_1(z) \equiv f_2(z)$ во всей обл-ти $\mathcal{D}$ ◀

II Если совп-т на $l \in \mathcal{D} \Rightarrow$ то совп. и в $\mathcal{D}$

III Если $f_1(m) = f_2(m), m \in \mathcal{D}$

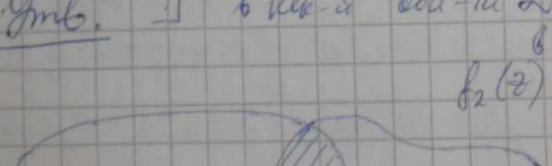
$f_1'(m) = f_2'(m)$

$f_1^{(k)}(m) = f_2^{(k)}(m) \Rightarrow$ тогда они совп-т между собой. ◀



анал-е продолжение за пределами рег-сти (отрезка) возможно и !-но (а в веществ. анализе м/б $\forall$)

Утв. $\exists$ в нек-й обл-ти $\mathcal{D}_1$ зад-а рег ф-ция $f_1(z)$, а в нек-й обл-ти $\mathcal{D}_2$ зад-а рег-я ф-ция $f_2(z)$, а в обл-ти $\mathcal{D}_{12}$ (общ. части) $f_1(z) \equiv f_2(z)$ $\forall z \in \mathcal{D}_{12}$. ~~тогда~~



Ф-ция $f_2(z)$ явл-ся анал-м продолж-м $f_1(z)$ из $\mathcal{D}_1$ в $\mathcal{D}_2$ через их общ. части $\mathcal{D}_{12}$

$f_1 + f_2 = f_*$ — единая аналит-я ф-ция в обл-ти $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$

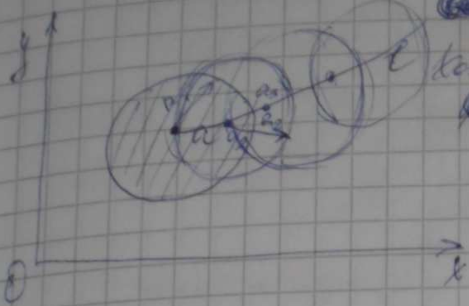
▶ $\exists$ в $\mathcal{D}_2$ $\exists$ 2 рег-х ф-ций $f_2(z)$ и $f_3(z)$, к-е совп-т в $\mathcal{D}_{12}$ с ф-цией $f_1(z)$

Но они совп-т в D_{12} f_2 и f_3 ⇒ они совп-т и в D_2
по теореме ед-сти

Вейерштрасс этот мы построим анал. е продолжение ф-ций.

в круг. обл-ти:

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C_{k1}(z-a)^k$$



Хотим получать рег. ф-цию в более широкой обл-ти

Вейерштрасс сказал: надо дв-ся как-л. напр-м l.

Все центр. круг. обл-тей будут лежать на линии l.

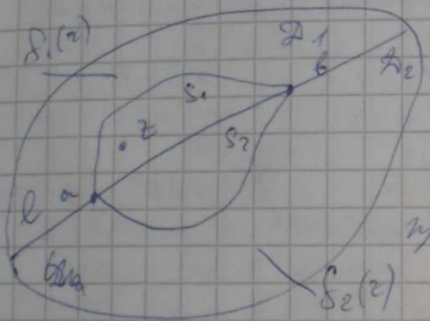
Построим с центром в (·) a_2 ф-цию $f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C_{k2}(z-a_2)^k$

т.к. f_2 – ∀ выберем коэф. C_{k2}: они опр-ся через C_{k1} в (·)a_2

$$C_{k2}=\frac{f_1^{(k)}(a_2)}{k!}$$

т.е. в (·)a_2 совп-т как зн-я самой ф-ции в этой (·), так и зн-я произв-х.

Выбираем (·)a_3 и т.д. получается посл-ть



(Римана)

l – обычная непр-я кривая.

D_1 и D_2 – обл-ти.

∃ в D_1 опр. на ф-ция $f_1(z)$ рег-я
а в D_2 опр. на рег. ф-ция $f_2(z)$,
причем на линии l

$$f_1(z)\equiv f_2(z)$$

f_1 непр. о продолжаема на l из D_1
f_2 " — " на l из D_2,

тогда, согласно Риману, ф-ция $f_1(z)$ анал-е продолж-е f_2 из D_2 в D_1 и, наоборот.

▶ проведем в D_1 ∀-ный контур Γ_1, имеющий конц-е (·) a и b, а в D_2 проведем Γ_2, к-й также имеет (·) a и b на l – концы

Х обл-ти S_1 и S_2

f_1 рег-на и непр. в замкн. обл S_1, а f_2 рег. и непр. продолжаема на в S_2 на l

(·) $z\in S_1$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 + C_{ab}} \frac{f_1(t)\,dt}{t-z} \qquad (1)$$

Для этой же (·) z восп-ся ∫-й формулой Коши для f_2

$$① = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2 + C_{ba}} \frac{f_2(t)\,dt}{t-z} \qquad (2)$$

$$\boxed{f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{f_*(t)\,dt}{t-z}} \qquad (3) \quad z \in S_1$$

$$f_*(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in \gamma_1 \\ f_2(t), & t \in \gamma_2 \end{cases}$$

Если выч-ть $f_2(z)$, где $z \in S_2$, получим (3), только вместо $f_1 \to f_2$

$$\boxed{f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{f_*(t)\,dt}{t-z}} \qquad (4) \quad z \in S_2$$

Т.к. $(\gamma_1 + \gamma_2) \supset z \in S_1$ и $z \in S_2$ ⇒ a, b можно удалить произ-но.

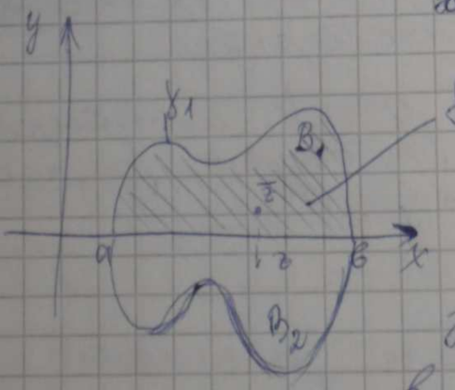
Одна и та же ∫-я формула Коши, к-я опр-т только 1 ф-цию ⇒

⇒ $f_1(z)$ и $f_2(z)$ согл-но (3), (4) опр-т 1 ф-цию ◄

(a, b — $\forall$)

Следствие. (принцип симметрии)

$\exists$ ф-ция $f_1(z)$ рег-на в нек-й об-ти B_1 в верх. полупл. Построим симм. обл. B_2



Если f_1 рег-на в B_1 и принимает вещ. зн-я на $[a, b]$ будучи непр. продолженной в (·) $z \in B_1$, тогда ф-ция $f_2(z)$, к-я принимает компл. сопр. зн-ние в (·), симм-й (·) z явл-ся анал-м продолжением ф-ции f_1 в верх. полупл.

$$f_2(z) = \overline{f(\bar z)}$$

▶ док-м, что f_2 – рег-на в B_2

$$f_2'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta z} = \ldots\ldots \quad \text{(самим)}$$

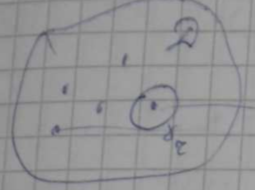
f_1 – рег-на, будучи от обычного ф-е и компл. сопр-е, и имеет как и lim как с обычными, так и сопр-ми, $\Rightarrow f_2$ – рег-на.

Из упл-я внут-сти ф-й на $[a, b]$ f_1, те же ф-и внут-е принимает f_2 на $[a, b]$ и по т. Римана приходим к продолжению реш-е. ◀

Вычет по Коши: Res (res) – residue – остаток.

$$\mathrm{Res}(f(z), a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \text{, вычисл. в окр-ти ИОТ}$$

γ – замк. контур (окр-сть)



ИОТ (УОТ, СОТ, полюсы)

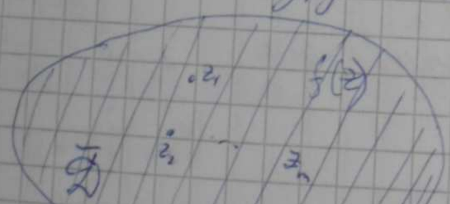
Теорема Коши о вычетах. Вычет относительно полюса. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента

$\mathrm{Res}\,[f(z), z = a]$, (·) a – ИОТ (УОТ, полюс, СОТ)

$$\mathrm{Res}\, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz \quad (1)$$ γ – малый контур с центром в (·) a

Т (Коши о вычетах) (1825)

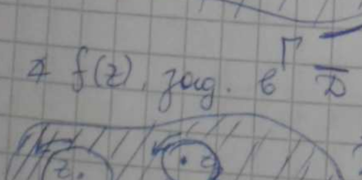
Если рег-я ф-ция $f(z)$ задана в односвязной области $\overline{D}$ (замк-й) и в этой обл-ти она имеет кон. число ИОТ $z_1, z_2, \ldots, z_m$, то ∫-л по контуру Г обл-ти D, вз-й в полож. напр-нии =



$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\, f(z_k)$$

$(z_1, \ldots, z_m) \in D$ (на контур не поп-ют)

▶ $f(z)$, зад. в $\overline{D}$, ∃ $f(z)$ – рег-я в $\overline{D}$, ∃ z_1, z_2, z_3 – ИОТ



Как из центра, из каждой (·) проведем окр-сти, чтобы не касались и не ×-сь.

Выбросим эти окр-сти из D (могли

В этой 4-х связной обл-ти ф-ция рег-на (не имеет особых (·))

по т. Коши (т-а о многосв. обл.)

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\,dz. \quad (2)$$

Перепишем (2) с учетом (1)

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res} f(z_k)$$

В окр-ти ∀ИОТ $f(z)$ функция разл-ся в ряд Лорана (1843).

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{— ряд Лорана} \quad (3)$$

где $$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{k+1}} \quad (4)$$

УОТ: $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Полюс порядка m: $$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

СОТ: $$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(t)\,dt \quad (5)$$

Сравним (1), (5)

$$\boxed{\operatorname{Res} f(a) \equiv c_{-1}} \quad (6) \quad a \text{ — ИОТ}$$

Практические способы отр-ния вычетов, в случае, когда 1) a — полюс $f(z)$

1) ∃ (·) a — П1П рег. ф-ции $f(z)$ ⇒ в соотв. с рядом Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (7)$$

Умн-м обе части (7) на $(z-a)$

$$(z-a) f(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^{k+1} \quad (8)$$

$$\lim_{z\to a} [(z-a) f(z)] = \lim_{z\to a} \left[c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^{k+1} \right]$$

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a} [(z-a) f(z)] \quad (9) \text{ когда } a \text{ — П1П}$$

1 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, φ, ψ — рег. ф-ции

$\psi(a)=0$.

$\psi'(a)\neq 0$, $\varphi(a)\neq 0$

Заменим (9), подставив $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\operatorname{Res} f(a)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]\equiv \lim_{z\to a}\left[\frac{\varphi(z)}{\left(\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}\right)}\right]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (10)$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, z=a\right]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \quad a \text{ — Н1П ф-ции } \psi \quad (10^*)$$

Пример. ~~П1П ф-ции $f(z)$~~

$f(z)=\frac{z^2}{z-1}$ $\quad$ (·) $z=1$ — П1П, тогда

$$C_{-1}=\operatorname{Res}[f(z), z=1]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z^2}{z-1}\right]=1.$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z-1}, z=1\right]=\frac{1}{(z-1)'_{z=1}}=1.$$

2) $\exists$ (·) $z=a$ — ПmП, полюс ф-ции $f(z)$

Разлагая $f(z)$ в ряд Лорана с центром в (·) a имеем

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\dots+\frac{C_{-1}}{(z-a)}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-a)^k \quad (11)$$

Умн-м обе части (11) на $(z-a)^m$

$$(z-a)^m f(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-a)+\dots+C_{-1}(z-m)^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-a)^{k+m} \quad (12)$$

в (12) продифф-ем до $(m-1)^{го}$ порядка

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!\,C_{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+m)(k+m-1)\dots(k+2)(z-a)^{k+1} \quad (13)$$

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!\,C_1 \quad (14)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z=a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \quad (15)$$

a — ПmП

$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $\quad$ (·) $z=i$ — полюс $2^{го}$ пор-ка.

$$f(z)=\frac{1}{[(z+i)(z-i)]^2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z=i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}}\right]=\frac{i}{4}$$

3) $f(z)$ имеет в (·) $z=a$ – ИОСТ

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-a)^k$$

Находить C_{-1}

Пример:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots+\frac{1}{n!z^n}+\dots$$

$C_{-1}\equiv 1$ – Res в (·) $z=0$

Логарифм-м вычетом ист-ф-ции $f(z)$ наз-ся вычет её логарифм-й произв-й.

$f(z)\longrightarrow [\ln f(z)]'$ – логарифм. произв-я.

$$[\ln f(z)]'=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

• $\exists$ $z=a$ НmП ф-ции $f(z)$ (рег-е), тогда:

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),\quad \varphi(a)\neq 0 \quad (1)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+\varphi'(z)(z-a)^m}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad (2)$$

$C_{-1}\equiv m$, т.к. (·)a – П1П для $\frac{f'(z)}{f(z)}$

• $\exists$ (·) $z=a$ ПnП ф-ции $f(z)$

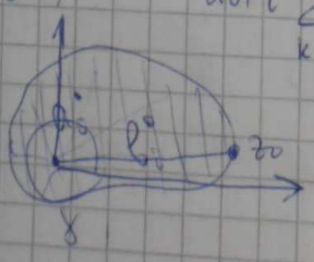
$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n} \quad (3)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{[\psi'(z)(z-a)^n-n(z-a)^{n-1}\psi(z)]\cancel{(z-a)^n}}{(z-a)^{2n}\psi(z)}=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}-\frac{n}{(z-a)} \quad (4)$$

рег-е.

$\boxed{C_{-1}\equiv -n}$ – П1П

$$\oint_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\text{Res}\, f(z_k)$$



$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \overset{(4)}{=} 2\pi i\,[\underset{\text{с учетом кр-тей}}{N} - P]$$

$N = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ — нули ф-ции $f(z)$

$P = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ — полюса

Если нет полюсов, тогда:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i N$$

Принцип аргумента

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \equiv \int_\gamma d(\ln f(z)) \equiv \int_\gamma d[\ln|f(z)| + i\arg f(z)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\underbrace{\cancel{\int_\gamma d[\ln|f(z)|]}}_{0} + i\int_\gamma d[\arg f(z)]\Big)$$

С одной ст-ны кол-во нулей ($P \equiv 0$)

$P = 0$, N – кол-во нулей с учетом кр-ти

$$\boxed{N = \Delta_\gamma \arg f(z)}$$ (приращение арг-та)

Принцип аргумента по Куранту

Если ф-ция $f(z)$ рег-на в замк. обл. $\bar{D}$ кроме кон-го числа полюсов и не имеет на гр-це γ ни 0-й, ни полюсов, то деленное на 2π полное изм-ние арг-та $f(z)$ при обходе контура γ = разн-ти между числом нулей и полюсов с учетом кр-ти внутри D.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z) = N - P$$

Теорема Руше (1832–1910).

Основная теорема алгебры.

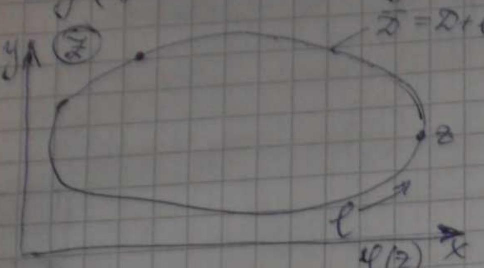
Вычисление интегралов типа $\int^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$

Основная лемма, Лемма Жордана

Т (Руше) Если ф-ции $\varphi(z)$, $f(z)$ рег-ны в односв-й обл-ти $\bar{D} = D + l$, огр-й контуром l, и на самом l $|\varphi(z)| < |f(z)|$, $z \in l$, то внутри D ф-ции $f(z)$ и $f(z) + \varphi(z)$ имеют одинаковое число нулей.

▶ Очев-е тожд-во $f(z) + \varphi(z) \equiv f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$ (1)

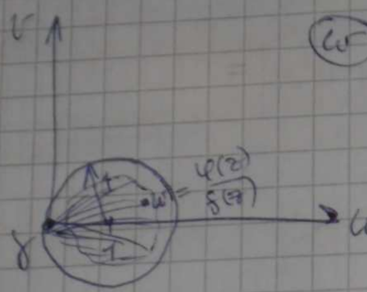
Дув-но, что arg, взятый слева и справа один и тот же
$\arg(f(z)+\varphi(z)) = \arg f(z) + \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$



По приращению арг-та:

$\Delta_\ell \arg[f(z)+\varphi(z)] =$
$= \Delta_\ell \arg f(z) + \Delta_\ell\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$ (2)

Δ (.) $w = 1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$

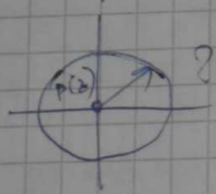


$w-1 = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$

$|w-1| = \underbrace{\frac{|\varphi(z)|}{|f(z)|}}_{<1}$

$\Delta_\ell \arg[f(z)+\varphi(z)] = \Delta_\ell \arg f(z)$ (3)

Пример $p(z) = \underbrace{z^6-4z^4}_{f(z)} + \underbrace{z^2-1}_{\varphi(z)}$. Число нулей внутри ед. окр-сти с центром в нач. коорд.



$|\varphi(z)| < |f(z)|$ — д/б так

$|f(z)| = |z^6-4z^4| = |z^4||z^2-4| = 1\cdot|4-z^2|_{|z|=1} \geq$

$\geq |4| - |z^2| \geq 3$

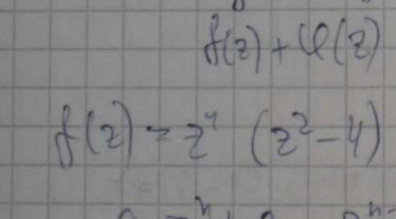
$|\varphi(z)|_{|z|=1} = |z^2-1| \leq |z^2| + |1| \leq 2 \Longrightarrow$ усл. т. Руше вып-но

число нулей $f(z) = z^6-4z^4$ равно число 0-ей
$f(z)+\varphi(z) = z^6-4z^4+z^2-1$

$f(z) = z^4(z^2-4)$, при $|z|<1$

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$

Т (осн. теорема алгебры)
полином n-й степени имеет на пл-ти z компл. ровно n корней



▷ $|z| = R \gg 1$.

$\underbrace{a_n z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}_{\varphi(z)} = 0 \qquad a_n \neq 0.$

при дост-о большом R $|f(z)|_{|z|=R} > |\varphi(z)|$ — всегда вып-ся

$f(z) + \varphi(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$a_n z^n = 0 \rightarrow n$ корней

Вычисление $\int$-ов $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$

Замена перем-х:

$z = e^{ix}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$dx = \dfrac{dz}{z \cdot i}$ $\qquad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$

$\cos x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$

Подставив в под $\int$-ное выраж-ие приходим к виду опр-го контурного $\int$-ла.

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right) dz =$$

Теорема вычетов, т.е. если $\psi(z)$ имеет НКП $\Rightarrow$ полюс для $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} \Rightarrow$ т. вычетов

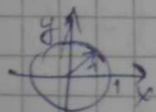
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}\right)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + a\cos x)^2}, \quad 0 < a < 1$$

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \cdot i\,(1 + a(\frac{z + z^{-1}}{2}))^2} = \frac{4}{i} \int \frac{z\, dz}{(az^2 + 2z + a)^2} =$$

$az^2 + 2z + a = 0$

$z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$; $\quad z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$ — не подходит



по теореме о вычетах корень должен лежать внутри ~~радиуса~~ ед. окр-сти

$\operatorname{Res} f(z_k)$ — полюс порядка m.

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_k)^m f(z)\right]$$

$\circleddash\ \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(az^2+2z+a)^2},\ z=z_1\right)\ \circleddash$

$\mathrm{Res}(\ldots) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-z_1)^2\cdot z}{a^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right] =$

$= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{a^2}\cdot\frac{(z-z_2)^2-2(z-z_2)\cdot z}{(z-z_2)^4} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{a^2}\,\frac{z^2-2zz_2-z_2^2-2z^2+2zz_2}{(z-z_2)^4}$

$= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{a^2}\,\frac{-z^2-z_2^2}{(z-z_2)^4}$

$= \frac{1}{4(1-a^2)^{3/2}}$

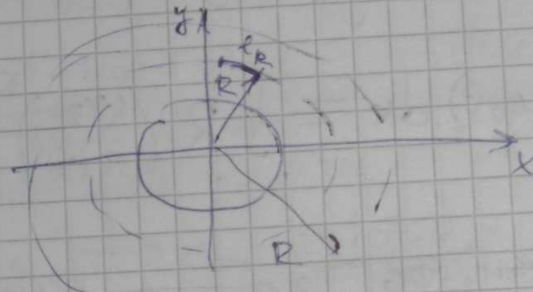
$\circleddash\ \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}$

Лемма (Осн-я) Если ф-ция $f(z)$ непр-на в окр-сти ∞-но удал-й (·) и

$\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z) \rightrightarrows 0$ (равном-о $\to 0\ \forall z$), то

$\int$, взятый по $\forall$ дуге окр-сти ℓ с центром в начале коорд-т, $\to 0$ при $R\to\infty$.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\ell_R} f(z)\,dz = 0$$



▶ $\Delta\ \int_{\ell_R} f(z)\,dz = \int_{\ell_R} z f(z)\,\frac{dz}{z}$.

$$\left|\int_{\ell_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{\ell_R}|zf(z)|\,\frac{|dz|}{|z|} \le \max_{\ell_R}|zf(z)|\int_{\ell_R}\frac{|dz|}{|z|} \le$$

$$\le \frac{\max_{\ell_R}|zf(z)|\cdot S_{\ell_R}}{R} \le$$, S_{ℓ_R} — длина дуги в рад. R

$\to 0$, $2\pi R$

$$\le \frac{\max_{\ell_R}|zf(z)|\cdot 2\pi R\cdot\alpha}{R} \to 0 \quad 0<\alpha<1$$ ◀

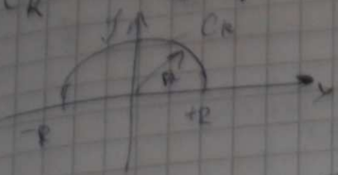
Лемма Жордана (1838-1922).

Если ф-ция $F(z)$ в верх-й полуп-ти и на вещ. оси $\rightrightarrows 0$ при $z\to\infty$

$\lim_{z\to\infty}F(z)\rightrightarrows 0$ и m — нек-е полож. число,

то контурный $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)\,e^{imz}\,dz \rightrightarrows 0$, $R\to\infty$, где

C_R – полуокр-сть радиуса R, в верх. полупл-сти



$R \to \infty$

▶ перейдем в полярную СК

$z = Re^{i\varphi}$

$dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$

$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\int\limits_{C_R} F(z)e^{imz}dz = \int\limits_0^{\pi} F(Re^{i\varphi})\, e^{imR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi \quad (1)$$

$$\left|\int\limits_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| \le \int\limits_0^{\pi} |F(Re^{i\varphi})| \cdot |e^{imR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}|\,|e^{i\varphi}| \cdot |i| R\, d\varphi \quad (2)$$

$$\left|\int\limits_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| \le \max_{\text{на } C_R} |F(Re^{i\varphi})| \underbrace{\int\limits_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} \cdot R\, d\varphi}_{J_1}$$

будет огр-но при $R \xrightarrow{J_1} \infty \xRightarrow{\text{тогда}}$ док-но

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} \cdot R\, d\varphi$$

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi} \cdot R\, d\varphi + \overbrace{\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi}^{J_2}$$

$\varphi = \pi - \varphi_1$

$$\underline{J_2} = -\int\limits_{\pi/2}^{0} e^{-mR\sin\varphi_1} \cdot R\, d\varphi_1 \equiv \int\limits_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi} R\, d\varphi$$

$$J_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi_1} \cdot R\, d\varphi_1$$

$$J_1 \le 2\int\limits_0^{\alpha} e^{-mR\sin\varphi} \cdot \frac{R\cos\varphi}{\cos\alpha}\, d\varphi + 2\int\limits_{\alpha}^{\pi/2} e^{-mR\sin\alpha} \cdot R \cdot d\varphi$$

$$J_1 \le \frac{2}{-m\cos\alpha} \int\limits_0^{\alpha} e^{-mR\sin\varphi}\, d(-mR\sin\varphi)$$

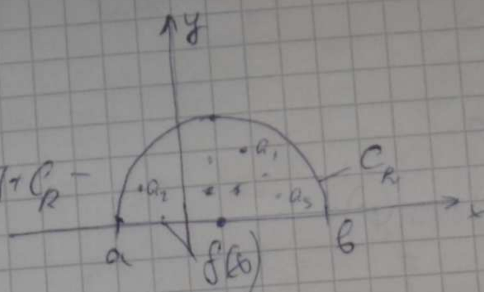
$$J_1 \le \frac{2e^{-mR\sin\varphi}}{-m\cos\alpha}\Bigg|_0^{\alpha} + 2e^{-mR\sin\alpha} R\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$\lim_{R\to\infty} J_1 \le \frac{2}{m\cos\alpha} + 0$ | → 7. фу-ем по величине.

Общие принципы выч-ния однократных вещ. интегралов с помощью теории вычетов

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Если ∡ контур $\int = [a,b] + C_R$ – замкн. контур, внутри к-го д/б опр-на рег. ф-ция, а к должна иметь ИОТ



ф-цию $f(x) \in [a,b]$ должны анал-ки продолжить в верхнюю полупл-ть.

1) контур C_R
2) ф-цию $f(x)$ продолж-ла: $f(x) \to f(z)$ (т. е. из вещ. в компл.)

Треб-ся, чтобы $f(z)$, при $z = f(x)$ не имела ИОТ в виде полюсов и сот на вещ. оси.

$f(z)$ – рег-ая внутри $\int$, за искл. ем кон. числа ИОТ: $a_1, a_2, \ldots, a_s$

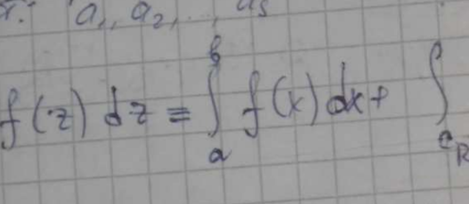
$$\int f(z)\,dz \equiv \int_a^b f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz \underset{\text{по теореме Коши о вычетах}}{=} 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{res} f(a_k) \quad (1)$$

В (1) $\int_{C_R}$ (по окр-ти C_R) нужно вычислять отд-но, либо свести к $\int_a^b$.

Тогда легко, что т. Кошиив-на $\Rightarrow \int_a^b = 2\pi i \sum - \int_{C_R}$

Если $(a,b) \to (-\infty, +\infty) \Rightarrow$ выч-ся проще.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx \quad (2)$$



продолж-т $f(x)$ на $(-R, +R)$ на верх. полупл-ть (замена $x \to z$)

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint_{C_R} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz \;=$$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res} f(z_k)$

Эт лучше тем, что $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \longrightarrow 0$, или

$f(z)$ удовл-ет усл-ям леммы Жордана, либо усл-ям осн. леммы.

Вычисление $\int$-ов вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx.$$

$\varphi(x), \psi(x)$ — полином, причем $\deg \psi(x) \geq \deg \varphi(x) + 2$

$\psi(x)$ не имеет корней на оси Ox

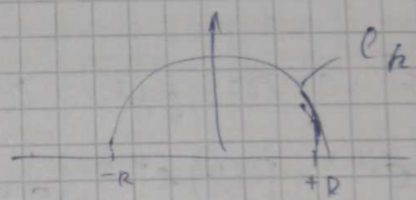
$$\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \longrightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res} \frac{\varphi(z_k)}{\psi(z_k)}$$

Пример

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$



$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} \longrightarrow \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

$\boxed{z_1 = +i}$, $z_2 = -i$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)}, z = +i\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3\, 1}{(z-i)^3 (z+i)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5}$$

$$J = 2\pi i \,\frac{12}{64 i} = \frac{3}{8}\pi$$

Вычисление $\int$-ов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos mx\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)\cos mx\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin mx\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\left[f(z_k)\right] \quad (3)$$

1) ф-ция $f(x)$ анал-ки продолж-ся в верх. п/п рег-на в п/п, за иск-ием ИОТ кон. числа.

2) $f(z)$ не имеет ИОТ и полюсов на вещ. оси

3) $\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot f(z) \rightrightarrows 0$ равном. по z

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\Big[\underbrace{\int_{-R}^{0} f(x)\,dx}_{x=-x_1} + \int_{0}^{R} f(x)\,dx\Big]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\int_{+R}^{0} f(-x_1)\,dx_1 + \int_{0}^{R} f(x)\,dx\Big] =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\Big[\int_{0}^{R}\big(f(-x)+f(x)\big)\,dx\Big] = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\big[f(-z_k)+f(z_k)\big] \quad (*)$$

в част. ~~случ~~ вид. ф-ции $f(x)$

$$f(x) \equiv F(x)\, e^{imx} \qquad (4)$$

где $f(z) = F(z)\, e^{imz}$

$$e^{imz} = e^{im(x+iy)} = e^{-my} e^{imx}$$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) \to 0$$

в $(*)$ вместо $f(x)$ подст-м (4), тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big[F(x)e^{-imx} + F(x)e^{+imx}\big]\,dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}[\ \ .\ \ ] \qquad (5)$$

пункт А. $\quad]\ F(-x) \equiv F(x)$, т.е. $F(x)$ — четная ф-ция

$$\int_{0}^{\infty} F(x)\cos mx\,dx = \pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\big[F(z_k)\, e^{imz_k}\big] \qquad (6)$$

$$\int_{0}^{\infty} F(x)\sin mx\,dx = \pi \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\big[F(z_k)\, e^{imz_k}\big] \qquad (7)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \pi i \Big(\lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\Big(\frac{\cancel{(z-ia)^2}\, e^{imz}}{\cancel{(z-ia)^2}(z+ia)^2}\Big)\Big) =$$

$$F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$$

Особ. угол. точки

$\boxed{z_1 = +ai}$; $\quad z_2 = -ai$

$$= \pi i \lim_{z\to ia} \frac{im\, e^{imz}(z+ia)^2 - 2(z+ia)\, e^{imz}}{(z+ia)^4} = \pi i\Big(\frac{im\, e^{-am}}{\dots}$$

$$\frac{\cancel{4ia}\, e^{-am}}{\cancel{4}2ia}$$

Пример

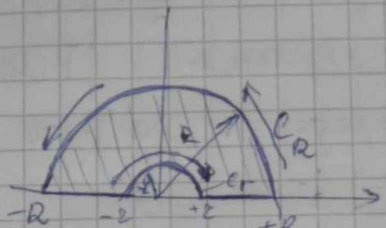
$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx \qquad (a>0,\ m>0)$$

$F(z)=\frac{z}{(z^2+a^2)}$; $z_1=+ia$; $\boxed{\frac{\pi}{2}e^{-ma}}$

Пр $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$F(z)=\frac{1}{z}$

Если $R\to\infty$,
$r\to 0$,
тогда получим
кон-й рез-т.



$\gamma=[-R;-r]+C_r+[+r,+R]+C_R$

$r=0\ (1)$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$Im(e^{ix})=\sin x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$ (т.к. $\frac{\sin x}{x}$ — четная)

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx \ominus$$ — вычисляем и берём мнимую часть.

главное зн-ние по Коши-ε $$\ominus \lim_{\substack{r\to0\\ R\to\infty}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

$$I \equiv \int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \underbrace{\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{\text{т.к. вышли за вещ. ось: } z} + \int_{+r}^{+R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0\ (1)$$ по т. Коши: =

$\vdots = \frac{f(z)}{z}$ — рег-на в односв-й обл-ти и непр-на на границе
$\int = 0$

γ опр-е слаг-ого в (1):

$$\int_{C_R}\frac{e^{i\cdot 1\cdot z}}{z}\,dz = 0$$ по лемме Жордана:

$\left[\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}\,dz=0\right]$ $\cdot$ $m=1$, $F(z)\xrightarrow[R\to\infty]{}0$: $\frac{1}{z}\xrightarrow[|z|\to\infty]{}0$

След-но, при $R \to \infty$ посл-ее слаг-е в (1) удовл-т лемме Жордана и $\int = 0$.

$$J_1 = \int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \quad (2) \qquad \text{(2-е слаг-е в (1))}$$

e^{iz} – рег-на, $\frac{1}{z}$ – рег-на ($(\cdot)$ $z=0$ не поп-ет в обл),

$(\cdot)$ $z=0$ – полюс ф-ции $\frac{e^{iz}}{z}$. в окр-ти полюса ф-ция раз-ся в ряд Лорана:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{2} + \ldots}{z} = \frac{1}{z} + P(z), \quad P(z) \text{ – полином,}$$

рег-я ф-ция, причем $|P(0)| = |i| = 1 \neq 0$.

в (2) можно предст-ть под $\int$-ую ф-цию в виде $\frac{1}{z} + P(z)$

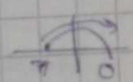
$$J_1 = \int\limits_{C_r} \frac{dz}{z} + \int\limits_{C_r} P(z)\,dz \quad (3)$$

Оценим 2е слаг-е в (3):

$$\left|\int\limits_{C_r} P(z)\,dz\right| \leq \int\limits_{C_r} |P(z)|\cdot|dz| \leq \underbrace{\max_{C_r} |P(z)|}_{\text{огр-я величина}} \cdot \underset{\downarrow 0}{\pi r}$$

$$\lim_{r \to 0} J_1 = \int\limits_{C_r} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{-r}^{+r}$$

$$J_1 = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{r i e^{i\varphi}\,d\varphi}{r e^{i\varphi}} = i\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi = -i\pi$$



$z = re^{i\varphi}$

$dz = r i e^{i\varphi}\,d\varphi$

$$J_1 \xrightarrow[r \to 0]{} -i\pi$$

Переходя к lim в (1) пол-м:

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ r \to 0}} J = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - i\pi + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + 0 = 0 \quad (4)$$

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}} \quad (5)$$

вычисляли в смысле гл. зн-ния по Коши

Общая формула вычисления несобств-х интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, когда $f(z)$, будучи рег-й в ~~верх~~ имеет S ~~особ~~; на вещ. оси m – полюсов 1го пор-ка

~~$f(z) = \ldots$~~

$x_1, \dots, x_m$ – полюса 1-го порядка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx \qquad \text{(по Коши)}$$

$C_1, \dots, C_m$ – полуокр-ети радиуса r с центрами в (·) $x_1, \dots, x_m$.

в этой обл-ти, где $f(z)$ рег-на по предп-нию, где $z_1, \dots, z_s$ – ИОТ.

Усл-я на ф-цию $f(z)$:

$\lim\limits_{z\to 0} z\cdot f(z) \to 0.$ (всп. лемма)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\left\{\lim_{r\to 0}\left[\int_{-R}^{x_1-r} f(x)\,dx + \int_{x_1+r}^{x_2-r} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{m-1}+r}^{x_m-r} f(x)\,dx + \int_{x_m+r}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{C_m} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\downarrow\, 0}\right]\right\} \equiv 2\pi i \sum_{p=1}^{s} \operatorname{Res} f(z_p)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{s} \operatorname{Res} f(z)$$

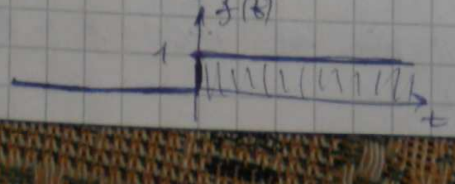
Док-ть, что сумма этих $\int$-ов по C_k будет равна сумме вычетов $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res} f(x_i)(-\pi i)$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left\{\sum_{p=1}^{s} \operatorname{Res} f(z_p) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res} f(x_i)\right\}$$

Представление разрывных функций с помощью контурных интегралов

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \forall t > 0 \\ 0, & \forall t \le 0 \end{cases}$$ – единичная ф-ция

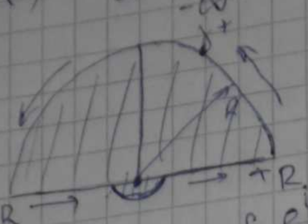
введена О. Хевисайдом (1850 – 1925)



А: $t>0$

$$f(t) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{itz}}{z}dz$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itz}}{z}dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{itz}}{z}dz$$

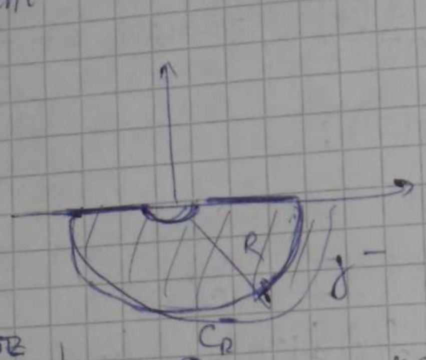


$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{itz}}{z}, z=0\right]\right] - 2\pi i \cdot 1$$

$$\Downarrow$$

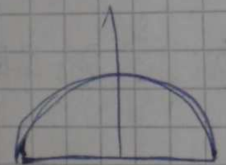
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1$$

Б: $t<0$



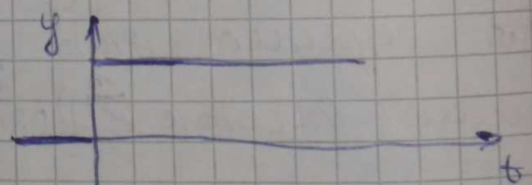
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} \frac{e^{itz}}{z}dz = 0,$$ т.к. не полюсов, рег. обл.

Треб-ся док-ть: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^-} \frac{e^{itz}}{z}dz = 0$



$t<0$ $\int \frac{e^{-tz_1}}{z_1}dz_1 = 0$

$$e(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{itz}}{z}dz$$



$$e(t) = \begin{cases} 0, & \forall t<0 \\ 1, & \forall t>0 \end{cases}$$ ур-ние Хевисайда

Дельта-ф-ция П. Дирака (1902–1984)

ищем непр-е ф-ции, облад-щие усл-ми:

1) $f(x)$ – опр-на и непр-на на $-\infty < x < \infty$

2) $\max f(x) = f(0)$

3) $f(x)$ быстро убывает симметр. относительно оси Oy.

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin x}{x}$$

} удовл-т всем св-вам выше.

Увеличим ординату каждой ф-ции в α раз и абсциссу в α.

$$\alpha f_1(x) = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{1+(\alpha x)^2}$$
$$\alpha f_2(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(\alpha x)^2}$$
$$\alpha f_3(x) = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\right)$$

Устремим $\alpha \to \infty$. Св-ва сохр-ся.

Покажем, что $\int$-лы ост-ся $=1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha f_i(\alpha x)\,dx \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(\alpha x)\,d(\alpha x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,dt \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$$

$i = 1, 2, 3$

Дельта-ф-ция: $\delta(x) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} f_i(\alpha x)$

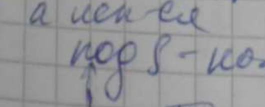
Обл-ет св-вами: 1°. $\delta(x) = 0$, $\forall x > 0$, $\forall x < 0$,

2°. $\delta(0) = \infty$

3°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx \equiv \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) \equiv 1$

Зам 1. В мат-ке ф-ция $\delta(x)$ исп-ся только при вещ-х зн-ях своего аргумента.

Зам 2. Ф-ция $\delta(x)$ не имеет „самост-го зн-ния", а исп-ся только в кач-ве „сомнож-ля" в под $\int$-ком выражении.



P – сила (сосред-ая в (·))

$P\cdot\delta(x)$ – сила в нач. коорд-т

$P\delta(x-a)$ – в (·) на оси x

Св-ва дельта-функции $\delta(x)$.

1° $\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\delta(x)\,dx = q(0)$

$q(x)$ – непр-я ф-ция.

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\delta(x-a)\,dx = q(a)$

3° $\cancel{\int q(x)}$ $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

$a = const \neq 0$. (док-ть самим)

4° $\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x-x_0)$, где x_0 – ! корень ф-ции

$e(x)$ – единичная ф-ция на пл-ти xy.

$$\boxed{e(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta(x)\,dx} \quad (1)$$

$e'(x) = \delta(x)$

!!! Док-ть самост-но формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(k)}(x)\,dx = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

Интегральное преобразование Лапласа

$\forall$ непр-й ф-ции вещ-го ар-та t ставится в соотв-ие след. $\int$-л:

$$f(t) \to \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = F(p);\ p = x+iy.$$

Если $\operatorname{Re} p = -x$, то $\int$-л расх-ся

$f(t)$ – ф-ция оригинал

$F(p)$ – ф-ция изображение $f(t)$

$f(t) \to F(p)$ $\quad q(t) \to Q(p)$

Для того, чтобы для ф-ции $f(t)$ $\exists$ ло $F(p)$ необх-о, чтобы $f(t)$ уровл-ла 3-м усл-м:

1°. $f(t) \equiv 0 \quad \forall t<0$

2°. $f(t)$ на $\forall$ кон-м интервале $t\in[a,b]$ имеет конечное число разрывов 1-го рода.

3°. $f(t)$ на всем промежутке $\int$-ния от $-\infty$ до $+\infty$ д/б огр-на по модулю:

$$|f(t)| < Me^{at}, M>0, a>0$$

a - степень роста ф-ции $f(t)$

(T1) Преобразование Лапласса существует в области, где вещ-я часть $\operatorname{Re} p > a$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

▶ $F(p)$ - существует. и

$$|F(p)| \leq \int_0^\infty |e^{-pt}|\,|f(t)|\,dt < \int_0^\infty Me^{at}\cdot e^{-xt}\,dt \leq$$

$$|e^{-pt}| = |e^{-(x+iy)t}| = e^{-xt}$$

$$\leq M\int_0^\infty e^{-(x-a)t}\,dt \leq \frac{Me^{-(x-a)t}}{-(x-a)}\Big|_0^\infty \leq \frac{M}{(x-a)}$$ ◀

(T2) Если в $\forall$-мой обл-ти, где $\operatorname{Re} p > a$, ф-ция $F(p)$ рег-на.

▶ Продифф-ем,

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt}\, t f(t)\,dt \quad \text{произв-я д/б огр-а.}$$

$$|F'(p)| \leq \int_0^\infty |e^{-pt}|\,|f(t)|\cdot t\,dt \leq M\int_0^\infty e^{-(x-a)t}\, t\,dt \leq$$

$$\leq M\Bigg(\underbrace{\frac{e^{-(x-a)t}}{-(x-a)}\cdot t\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{e^{-(x-a)t}}{x-a}\,dt\Bigg) \leq M\frac{e^{-(x-a)t}}{-(x-a)^2}\Big|_0^\infty \leq \frac{M}{(x-a)^2}$$

Произв-я огр-на по модулю $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ регулярная ф-ция во всей обл-ти определения ◀

Примеры/ $f_1(t)=\delta(t) \longrightarrow F_1(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\delta(t)\,dt=1$

$f_2(t)=e(t) \longrightarrow F_2(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\cdot dt=\frac{1}{p}$

$f_3(t)=e^{at} \longrightarrow F_3(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{at}\,dt=\frac{1}{p-a}$

Основные св-ва преобразования Лапласа:

1° Св-во линейности

$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \longrightarrow \alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$

α, β – произв-е комплексные const.

где $f_1(t)\to F_1(p)$; $f_2(t)\to F_2(p)$

] $f_1(t)=\sin\varphi t=\frac{e^{i\varphi t}-e^{-i\varphi t}}{2i} \longrightarrow \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i\varphi}-\frac{1}{p+i\varphi}\right]$

$f_2(t)=\cos\varphi t=\frac{e^{i\varphi t}+e^{-i\varphi t}}{2}$

$\sin\varphi t \longrightarrow \frac{\varphi}{p^2+\varphi^2}$

$\cos\varphi t \to \frac{p}{p^2+\varphi^2}$

$\mathrm{sh}\,\varphi t \to \frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$

$\mathrm{ch}\,\varphi t \to \frac{p}{p^2-\varphi^2}$

2° Дифференцирование оригинала

] изв-но, что некий оригинал имеет изобр-ние

$f(t)\longrightarrow F(p)$

$f'(t)$ – ?

Вывод формулы для произв-й $f'(t)$

$f'(t) \longrightarrow \int\limits_0^\infty e^{-pt}f'(t)\,dt =$ $\int$-ем по частям (док-ть самым)

$= pF(p)-f(0)$

$f''(t) \to p\,(pF(p)-f(0))-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$

$f^{(n)}(t) = p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

3° Св-во дифер-ти оригинала

если $f(t) \to F(p)$, то ставится вопрос!

$F^{(n)}(p)$ − ? − n-е произв-е изображение, и это изображение ф-ции след-го вида.

$$\underset{\text{изобр.}}{F(p)} \div (-1)^n \int_0^\infty \left[t^n f(t)\right] dt \to F^{(n)}(p)$$

4° $$\int_0^t f(t)\,dt \longrightarrow \frac{F(p)}{p},$$ где $F(p)$ − изобр-ние $f(t)$.

$f(t) \to F(p)$

5° Теорема умножение (теорема о свертке)

$$\int_0^t f(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau \longrightarrow F(p)\, Q(p)$$

Пример. $x'(t) - a x(t) - b^2 \int_0^t x(t)\,dt = c$ (2); $x(0)=0$

Умн-м левые и пр-е части на $e^{-pt}dt$ — a, b, c − вещ. const.
и проинтегр-ем. $a>0$, $c>0$.

$$\int_0^\infty x'(t) e^{-pt} dt - a\int_0^\infty e^{-pt} x(t)\,dt - b^2 \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t x(t)\,dt\right) dt = c\int_0^\infty e^{-pt} dt \quad (3)$$

(3) $$p X(p) - a X(p) - b^2 \frac{X(p)}{p} = \frac{c}{p}$$

$$(p^2 - ap - b^2)\, X(p) = c$$

$$X(p) = \frac{c}{p^2 - ap - b^2} = \frac{c}{(p_1-p_2)(p-p_1)} - \frac{c}{(p_1-p_2)(p-p_2)}$$

$$p^2 - ap - b^2 = 0$$

$$p_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

$$p_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

$$X(t) = \frac{c}{p_1-p_2} e^{p_1 t} - \frac{c}{p_1-p_2} e^{p_2 t}$$

Обратное преобр-ние Лапласа по изв й $f(t)$ опр-ем $F(p)$:

$$f(t) \to \underbrace{\int_0^\infty e^{-p(t)} f(t)\,dt}_{F(p)}$$

$F(p) \to f(t) = ?\ ;\ f(t) < M.$

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp$$

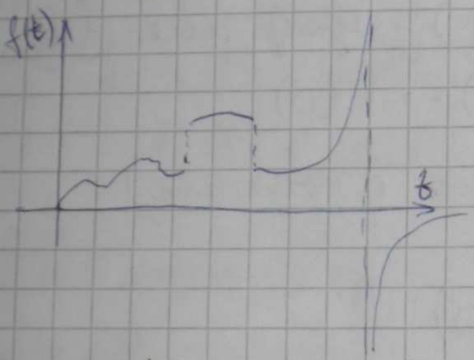
$$f(t) = \lim_{b \to +\infty} \int_{-ib}^{+ib} F(p) e^{pt} dp$$

Задача Коши

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \quad (5)$$ где $(a_0, \ldots, a_n)$ = const веществ-е

$$x(0) = x_0^*,\ x'(0) = x_1^*, \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}^* \quad (6)$$

$f(t)$ – действ-я ф-ция.



если $f(t)$ – непр-я.

$$a_0[p^n X(p) - p^{n-1}x_0^* - \ldots - x_{n-1}^*] + a_1[p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0^* - p^{n-3}x_1^* - \ldots - x_{n-2}^*] + \ldots +$$
$$+ a_n X(p) = F(p)$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t)\, dt$$

$\exists\ B(p) = a_0 x_0^* p^{n-1} + (a_0 x_1^* + a_1 x_0^*) p^{n-2} + \ldots + (a_0 x_{n-1}^* + a_1 x_{n-2}^* + \ldots + a_{n-1} x_0^*)$

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$$

$X(p) = \dfrac{F(p) + B(p)}{A(p)}$ – реш-е ДУ в изображениях.

$x(t) = x_0(t) + y(t)$ — реш-е;

реш-е Однор. ДУ $a_0 y^{(n)}(t) + \ldots + a_n y(t) = 1$

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^t f(\tau)\, x_1'(t-\tau)\, d\tau$$