студенты-
физики

Интегральные уравнения и вариационное исчисление. Ответы к экзамену

Юлия

Очень важны Adobe reader'овские правки - в них исправления

Лектор Волков В.Т.

Июнь, 2014

Интегральные уравнения.

Раздел 1.

1. Уравнение Фредгольма II рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds + f(x) \quad x, s \in [a, b]$$

$k(x,s)$ заданная непрерывная по совокупности аргументов функция - ядро.
$f(x)$ заданная непрерывная функция неоднородность.
Уравнение однородно, если $f(x) \equiv 0$

2. Уравнение Вольтерра II рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^x k(x,s) y(s) ds + f(x), \quad s \in [a, x], \quad x \in [a, b]$$

Однородное уравнение, если $f(x) \equiv 0$.

3. Уравнение Фредгольма I рода:

$$f(x) = \int_a^b k(x,s) y(s) ds \quad s \in [a,b] \quad x \in [c, d]$$

Однородное, если $f(x) \equiv 0$

4. Уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_a^x k(x,s) y(s) ds = f(x), \quad s \in [a, x] \quad x \in [a, b]$$

Однородное, если $f(x) \equiv 0$

5. Линейное пространство:

Множество L - ЛП, если $\forall x,y \ \exists (x+y) \in L$ - сумма
$\forall x, \forall \alpha \in R \ \exists (\alpha x) \in L$

аксиомы ЛП

1. $\forall x,y \in L \quad x+y = y+x$ - коммутативность
2. $\forall x,y,z \in L \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ - ассоциативность
3. $\forall x \in L \ \exists (-x) \in L : x+(-x) = 0$ - обратный элемент
4. $\exists \theta : \forall x \in L \quad x+\theta = x$ - нулевой элемент
5. $\forall x,y \in L, \forall \alpha \in R \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ - дистрибутивность
6. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in L \quad \alpha x + \beta x = (\alpha+\beta)x$ - дистрибутивность
7. $\forall \alpha, \beta \in R \ \forall x \in L \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ассоциативность
8. $\forall x \in L \quad 1x = x$ - свойство единицы.

6. Метрическое пространство:

Множество M - МП, если $\forall x,y \in M \ \exists \rho(x,y) \in R$:

1. $\forall x,y \in M \quad \rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ - неотрицательность
2. $\forall x,y \in M \quad \rho(x,y) = \rho(x,y)$ - симметричность
3. $\forall x,y,z \in M \quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ - неравенство треугольника

7. Нормированное пространство:

ЛП N - нормированное, если $\forall x \in N \ \exists \|x\|$ - норма:

1. $\forall x \in N \quad \|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $\forall x \in N \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ неотрицательная однородность
3. $\forall x,y \in N \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ неравенство треугольника // $\rho(x,y) = \|x-y\|$

8. Евклидово пространство:

ЛП E - евклидово, если $\forall x,y \in E \ \exists (x,y)$ - скалярное произведение:

1. $\forall x,y \in E \quad (x,y) = (y,x)$ симметричность
2. $\forall x_1, x_2, y \in E \quad (x_1+x_2, y) = (x_1,y) + (x_2, y)$ - аддитивность
3. $\forall x,y \in E, \forall \alpha \in R \quad (\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ однородность
4. $\forall x \in E \quad (x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ свойство скалярного квадрата

9. Сходимость в метрическом пространстве
Последовательность элементов $x_n \in M$, $n = 1, 2 \dots$ сходится к $x_0 \in M$
если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$
10. Сходимость в нормированном пространстве:
$x_n \in N$ сходится по норме пр-ва N к $x_0 \in N$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$
11. Фундаментальная последовательность
Последовательность x_n, $n = 1, 2 \dots$ элементов N фундаментальна,
если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k : \forall n \geq k\ \forall p \in \mathbb{N}$ $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$
12. Банахово пространство
Полное нормированное пространство.
Полное, если любая фундаментальная последовательность сходится ($C[a,b]$)
13. $C[a,b]$
Пространство функций, непрерывных на $[a,b]$
$\|y\|_{C[a,b]} = \max\{|y(s)|\}$, $s \in [a,b]$
Сходимость по норме - равномерная сходимость
14. $C^p[a,b]$
пространство функций, непрерывных с производными до p-го порядка включительно на интервале $[a,b]$
$\|y\|_{C^p} = \sum_{k=0}^{p} \max\limits_{s \in [a,b]} \{|y^{(k)}(s)|\}$

15. Скалярное произведение в $h[a,b]$
$h[a,b]$ - линейное пространство функций, непрерывных на $[a,b]$
скалярное произведение $(y_1, y_2) = \int y_1 y_2 \, dx$ - вещество
$\|y\|_h = \sqrt{\int_a^b y\, y\, dx} = \sqrt{\int_a^b y^2 dx}$. Сходимость по норме $h[a,b]$ -
сходимость в среднем.
$h[a,b]$ - бесконечномерное, т.к. можно задать бесконечную последовательность функций, ЛН и непрерывных ($\cos \frac{\pi n x}{2}$, x^n)
16. Неравенство Коши-Буняковского
$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$ если $|(x,y)| = \|x\| \|y\| \Rightarrow x, y$ - ЛЗ
17. Линейный оператор:
Оператор $A: L_1 \to L_2$ линейный, если $\forall y_1, y_2 \in L_1$, $\forall\ a_1$ и $a_2 \in \mathbb{R}$
$A(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 A y_1 + a_2 A y_2$
18 Непрерывность оператора в точке:
A - непрерывен в точке $y_0 \in D(A)$, если
А: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y \in D(A) : \|y - y_0\| \leq \delta$ $\|Ay - Ay_0\| \leq \varepsilon$
Б: $\forall y_n, n = 1, 2 \dots$ $y_n \in D(A) : y_n \to y_0$ $Ay_n \to Ay_0$.
19. Норма линейного оператора
$$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1} = 1} \|Ay\|_{N_2}.$$

20. Ограниченный линейный оператор:
Оператор A - ограничен, если $\|A\| < +\infty$

21. Ограниченная последовательность N пр-ва

Последовательность y_n элементов нормированного пространства ограничена, если $\exists C \in \mathbb{R}: \ \|y_n\| \le C \ \forall n \in \mathbb{N}$

22. Компактная последовательность

Последовательность y_n элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся - компактная

23. Вполне непрерывный оператор:

ЛО A - вполне непрерывный, если для любой последовательности $y_n \in N_1$ $z_n = Ay_n \in N_2$ такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся.

24. Необходимое и достаточное условие компактности послед. векторов $\mathbb{R}^n$

- теорема Больцано-Вейерштрасса:
из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность
$\Rightarrow$ Н и Д условие - ограниченность, т.к. любая компактная последовательность ограничена.

25. теорема Арцела

Если последовательность элементов $C[a,b]$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

равномерно ограничена $|z_n| \le 6 \ \forall x \ \forall n$

равностепенно непрерывна. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x_1, x_2: |x_1 - x_2| \le \delta$

$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \le \varepsilon \ \forall n$

26. Сопряженный оператор:

Оператор $A^*: E \to E$ сопряженный к A, если
$\forall y_1, y_2 \in E \quad (Ay_1, y_2) = (y_1 A^* y_2)$

27. Самосопряженный оператор:

Если $A = A^*$, то A - самосопряженный.
то есть $A: E \to E$ самосопряженный, если $\forall y_1, y_2 \in E \ (Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2)$

28. интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром.

Оператор Фредгольма, действующий из $E = h[a,b]$ в $E = h[a,b]$

$Ay = \int_a^b k(x,s) y(s) ds$

$\forall y_1, y_2 \in E \quad (Ay_1, y_2) = \int_a^b \left(\int_a^b k(x,s) y_1(s) ds\right) y_2(x) dx = \int_a^b \left(\int_a^b k(x,s) y_2(x) dx\right) y_1(s) ds =$
$= (y_1 A^* y_2)$

$(y_1, A^* y_2) = \int_a^b \left(\int_a^b k^*(s,x) y_2(x) dx\right) y_1(s) ds$, т.к. $k^*(s,x) = k(x,s)$

Если $k^*(x,s) = k(s,x) = k(x,s)$, ядро $k(x,s)$ - симметрическое. оператор - самосопряженный.

29. Собственное значение

Пусть $\hat{A}: L \to L$ $\quad \lambda$ - собственное значение, если $\exists y \ne 0: Ay = \lambda y$

30. Собственный вектор:

Пусть $\hat{A}: L \to L$ $\quad y$ - собственный вектор, если $Ay = \lambda y$ и $y \ne 0$.

31. Максимальный вектор
элемент e - максимальный вектор если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$

32. Инвариантное подпространство ЛО.
H - инвариантное подпространство, если $AH \subseteq H$ (из того, что $y \in H$, следует, что $Ay \in H$)

33. Кратность собственного значения.
кратность - число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению.

34. Собственная функция ядра
- собственные векторы оператора Фредгольма, т.е. $Ay = \lambda y$, если $A = \int k(x,s) y(s) ds$, если $k(x,s)$ непрерывное, симметрическое, не равное нулю.

35. Вырожденный оператор
Оператор, имеющий нулевое собственное значение
нуль-пространство которого нетривиально $\ker A = \{y : Ay = 0\}$

36. Замкнутое ядро:
Ядро $k(x,s)$ замкнутое, если интегральный оператор невырожденный

37. Вырожденное ядро:
Ядро $k(x,s)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде $k(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s)$ на $[a,b]$, где функции a_i, b_i - непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$

38. Скалярное произведение в комплексном расширении $h[a,b]$
$h^c[a,b]$ - пространство непрерывных комплекснозначных функций, состоящих из функций вещественной переменной
x: $y(x) = u(x) + iV(x)$ $x \in [a,b]$
в таком случае можно ввести скалярное произведение
$(y_1, y_2) = \int y_1^*(x) y_2(x) dx$, $(y_1, y_2) = (y_2, y_1)^*$

39. Истокопредставимая функция
Функция $f(x)$ - истокопредставима с помощью ядра $k(x,s)$, если существует непрерывная $g(s)$ такая, что
$f(x) = \int k(x,s) g(s) ds$ или $f = Ag$

40. Теорема Гильберта-Шмидта
Если $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $k(x,s)$, то она может быть разложена в ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$, $f_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds$, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$

41. Интегральный оператор с полярным ядром

Если ядро $k(x,s) = \frac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$, где $\Phi(x,s)$ непрерывная в Ω по совокупности аргументов и симметрическая, $\alpha>0$, $|x-s| = r_{xs}$ - расстояние между точками в пр-ве R^n

Если $\alpha<n$, то $k(x,s)$ - полярное (вполне непр, $\exists \lambda, \varphi$)

42. Оператор со слабополярным ядром

— " — Если $\alpha < \frac{n}{2}$ (— " — + Г-Ш)

43. Резольвента интегрального оператора

$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds + f(x)$

Пусть $y(x) = f(x) + g(x)$, чтобы у стала истокопредставимой?

$f(x) + g(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)(f(s)+g(s))ds + f(x)$

$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)(f(s)+g(s))ds \Rightarrow g = \lambda A(g+f)$

Истокопредставима $\Rightarrow$ по Г-Ш $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(x)$

$g_k = \lambda(A(g+f), \varphi_k) = \lambda(g+f, A\varphi_k) = \lambda(g+f, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}) = \frac{\lambda}{\lambda}(g_k + f_k)$

$g_k(\lambda_k - \lambda) = \lambda f_k, \quad k = 1,2\ldots$

$\lambda \neq \lambda_k \Rightarrow g_k = \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \Rightarrow g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda f_k \varphi_k(x)}{\lambda_k - \lambda}$

$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \varphi_k(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) =$

$= f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} f(s)ds = y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)ds$

$R(x,s,\lambda)$ - резольвента

44. альтернатива Фредгольма

Либо неоднородное уравнение имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное имеет нетривиальное решение

45. Условие: неодн. ур-ие Фредгольма имеет единственное решение:

Если однородное уравнение имеет только тривиальное решение

46. Условие разрешимости.

Если однородное уравнение имеет нетривиальное решение то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда когда неоднородность - непрерывная функция $f(x)$ - ортогональна всем собственным функциям, соответствующих данному λ

47. сжимающий оператор

оператор D сжимающий, если $\exists q: 0 \le q < 1$ и $\forall y_1, y_2 \in B$

$\|Dy_1 - Dy_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$ // D - нелинейный, действующий из банахова $B \to B$

48 Неподвижная точка:

элемент y оператора D, если $Dy = y$

49. теорема о существовании неподв. точки

Пусть D - сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$: $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений $y_{n+1} = Dy_n$, где y_0 - произвольная фикс. точка в ...

50. Метод последовательных приближений

Пусть $y_{n+1} = \lambda A y_n + f$, $n = 0, 1, 2 \dots$ $y_0 = 0$.

1. $y_1 = \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot 0 ds + f(x) = f(x)$

2. $y_2 = \lambda \int_a^b k(x,s) f(s) ds + f(x)$

3. $y_3 = \lambda^2 \int_a^b k(x, \xi) \left(\int_a^b k(\xi, s) f(s) ds \right) d\xi + \lambda \int_a^b k(x,s) f(s) ds + f(x) =$

$= \lambda^2 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b k(x, \xi) k(\xi, s) d\xi \right)}_{k_2(x,s) \text{ - повторное ядро}} f(s) ds + \lambda \int_a^b k(x,s) f(s) ds + f(x)$

$y_{n+1} = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^{n-1} A^{n-1} f + \lambda^n A^n f$, где A^n - оператор с повторным ядром $k_n(x,s) = \int_a^b k(x, \xi) k_{n-1}(\xi, s) d\xi$

51. Повторное ядро:

$k_n(x,s) = \int_a^b k(x, \xi) k_{n-1}(\xi, s) d\xi$, $n = 2, 3 \dots$ $k_1 = k$ -

ядро оператора A^n: $y_{n+1} = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^n A^n f$.

52. Теорема о разрешимости уравнения Вольтерра II рода

Для любого λ существует натуральное k такое, что D^k - сжимающий. Решение уравнения Вольтерра можно найти методом последовательных приближений, который в данном случае называется методом Пикара.

$\forall y_0 \in C[a, b]$ $y_{n+1} = \lambda \int_a^x k(x,s) y_n(s) ds + f(x)$

53. Уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром

$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,s) y(s) ds + f(x)$, $x,s \in [a,b]$, где $k(x,s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$

$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(x) + f(x)$

54. Союзное уравнение:

- уравнение с ядром $k^*(x,s) = k(s,x)$

55. Условие разрешимости неоднородной СЛАУ

СЛАУ $BX = F$, $B: R^n \to R^n$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_n \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

найти все нетривиальные ЛН решения $B^* \psi = 0$

если F ортогональна всем решениям, то неоднородная система разрешима

56. 1-я теорема Фредгольма:

Однородное уравнение $\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) y(s) ds = 0$ и союзное с ним $\psi(x) - \lambda \int_a^b k^*(x,s) \psi(s) ds = 0$ при любом фикс. λ имеют либо только тривиальное решение, либо одинаковое конечное число ЛН решений. (вырожденное и симметрическое ядра)

57. 2-я теорема Фредгольма

Для разрешимости неоднородного ур-ия $\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) \varphi(s) ds = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем ЛН решениям однородного союзного уравнения ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2$, если $\lambda = \lambda_0$) (симметрические и вырожд. ядра)

58. 3-я теорема Фредгольма

Либо неоднородное уравнение разрешимо $\forall f(x)$, либо однородное имеет нетривиальное решение (симметрические и вырожд. ядра)

59. 4-я теорема Фредгольма:

Множество характеристических чисел однородного уравнения не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞ (непрерывное самосопряженное оператора, симметрические ядра. для вырожденных результат тривиален)

60. Оператор Штурма - Лиувилля

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y$$

61 Задача Штурма - Лиувилля.

$$Ly + \lambda \rho(x) y = 0$$

$y(a) = y(b) = 0$, где $Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{x}\right) - q(x)y$

$p(x)$ - непр. дифф

q и ρ - непр на $[a, b]$ $\quad \rho(x), p(x) > 0 \quad q(x) \geq 0$

62. Свойства собственных значений и собственных функций

1. Существует бесконечно много собственных значений λ_n
2. каждое собственное значение имеет кратность 1.
3. Собственные значения положительны
4. Собственные функции ортогональны с весом ρ
5. наименьшее собств. значение

$$\lambda = \int_0^l \left[q y^2 + p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx \geq \int_0^l \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x) y^2(x)\, dx = \frac{q(\bar{x})}{\rho(\bar{x})} \int_0^b \rho(x) y^2(x) dx = \frac{q(\bar{x})}{\rho(\bar{x})} \geq$$

$\lambda \geq \inf \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0.$

63. Теорема Стеклова

Любая дважды непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ и обращающаяся в нуль на концах отрезка функция $f(x)$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе СФ задачи Штурма-Лиувилля $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$, где $f_n = \int_a^b f(x)\rho(x) y_n(x)\, dx$.

64. Функционал

- оператор, множество значений которого состоит из чисел $V: C \to R$

65. непрерывный функционал

Функционал $V[y]$ непрерывный в $y_0 \in Y$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\forall y \in Y: \|y - y_0\| \leq \delta \quad |V[y] - V[y_0]| \leq \varepsilon$

66. дифференцируемый функционал

Функционал $V[y]$ - дифф. в y_0, если $\forall h \in Y \quad V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\|h\|)$ где $dV(y_0, h)$ - линейный и непрерывный по h функционал - сильная вариация.

67. Вариация функционала

Если существует $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left[V[y_0 + th]\right]\Big|_{t=0}$ для любого $h \in Y$, то эта производная называется вариацией функционала $\delta V(y_0, h)$

$V[y_0 + th] - V[y_0] = t\,\delta V(y_0, h) + o(|t|)$ $\quad \delta$ - слабая вариация

Если существует сильная вариация, существует и слабая.

68. Сильный минимум

на $y_0(x)$ достигается сильный минимум, если $V[y] \geq V[y_0] \; \forall y \in Y^1$ $\max|y(x) - y_0(x)| \leq r, \; r > 0$

69. постановка задачи с закрепленными концами

$Y^1 \subseteq Y = C^1[a, b]: \; Y^1 = \{y = C^{(1)}[a, b], \; y(a) = A, \; y(b) = B\}$

$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$. задача - найти экстремум на мн-ве Y^1

70. Сильный максимум: $V[y] \leq V[y_0] \; \forall y \in Y$ ... y_0: $\max|y(x) - y_0(x)| \leq$ ...

91. Слабый минимум:
$V[y] \geq V[y_0]$ $\forall y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике $C^{(1)}[a,b]$
$\max\limits_{x \in [a,b]} |y(x) - y_0(x)| + \max\limits_{x \in [a,b]} |y'(x) - y_0'(x)| \leq r$, $r > 0$.

92. Слабый максимум:
$V[y] \leq V[y_0]$ $\forall y \in Y'$ — " —

93. Необходимое условие экстремума в задаче с закр. концами
1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в задаче с закр. концами и дважды непрерывно дифференцируема
2. $F(x,y,y')$ обладает непрерывными ч.п. до второго порядка включительно
Тогда $y(x)$ является решением краевой задачи для уравнения Эйлера
$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \ y(b) = B \end{cases}$$

94. Основная лемма вариационного исчисления
Пусть $\varphi(x)$ фикс на $[a,b]$, и $\int\limits_a^b \varphi(x) h(x) dx = 0$ для всякой непрерывно дифференцируемой $h'(x)$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$.
Тогда $\varphi(x) = 0$

95. Постановка задачи с закр. концами и необходимые условия экстремума для $V[y] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n') dx$
Задача: найти экстремум функционала на множестве Y'.
$Y' = \{ y \in C^{(1)}[a,b] \ y(a) = A, \ y(b) = B \}$
Пусть 1. функции $y_1(x) \dots y_n(x)$ осуществляют экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закр. концами и дважды непр. дифф на $[a,b]$
2. $F(x, y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно
Тогда $y_1 \dots y_n$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера
$$\begin{cases} F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \\ y_i(a) = A_i, \ y_i(b) = B_i \end{cases}, \text{ где } i = 1, \dots n$$

96. НУ для задачи с неголономной связью
Задача: найти экстремум функционала $V[y,z] = \int\limits_a^b F(x, y, z, y', z') dx$ с граничными условиями $\begin{matrix} y(a) = y_0 & z(a) = z_0 \\ y(b) = y_1 & z(b) = z_1 \end{matrix}$, где $y = y(x)$, $z = z(x)$ удовлетворяют уравнению связи $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$
Пусть 1. $y(x)$ $z(x)$ осуществляет экстремум $V[y,z]$ в задаче с закрепленными концами и неголономной связью и дважды непр. дифф. на $[a,b]$
2. F, Φ имеют непрерывные ч.п. до второго порядка включительно, причем $\Phi_{z'} \neq 0$.
Тогда существует дифф. $\lambda(x)$: $y(x)$, $z(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера для функционала $\int\limits_a^b H(x, y, z, y', z') dx$, где $H = F + \lambda(x) \Phi$
$$\begin{cases} F_y + \lambda \Phi_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda \Phi_{y'}) = 0 \\ F_z + \lambda \Phi_z - \frac{d}{dx}(F_{z'} + \lambda \Phi_{z'}) = 0 \\ \Phi(x, y, z, y', z') = 0 \\ y(a) = y_0, \ y(b) = y_1 \\ z(a) = z_0, \ z(b) = z_1 \end{cases}$$

77. Голономная связь.

Задача: найти экстремум функционала $V[y, z] = \int\limits_a^b F(x, y, z, y', z')\,dx$, где $y = y(x)$, $z = z(x)$ с граничными условиями $y(a) = y_0$, $z(a) = z_0$, $y(b) = y_1$, $z(b) = z_1$,

и удовлетворяют условию $\varphi(x, y, z) = 0$ - уравнение связи.

1. Пусть $y(x)$ и $z(x)$ реализуют экстремум в задаче с закр. концами и голономной связью и дважды непр. диф.
2. F - непрерывна с ЧП до второго порядка включительно
3. φ непрерывна с ЧП, $\varphi_z \neq 0$.

тогда $\exists \lambda(x)$: $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (F_y + \lambda\varphi_y) - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ (F_z + \lambda\varphi_z) - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1 \\ z(a) = z_0,\ z(b) = z_1 \end{cases}$$

78. Геодезическая линия

Пусть уравнение $\varphi(x, y, z) = 0$ задает некоторую поверхность. Пусть на данной поверхности фиксированы две точки. Геодезическая линия - кривая минимальной длины, соединяющая эти точки.

79. Изопериметрическая задача:

найти экстремум функционала $V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx$ при выполнении граничных условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ и дополнит. условие $J[y] = \int\limits_a^b G(x, y, y')\,dx = \ell$

1. Пусть $y(x)$ реализует экстремум функционала $V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx$ и дважды непрерывно дифференцируема
2. F и G непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно

тогда $\exists \lambda = const$: $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $\int H\,dx$, где $H = F + \lambda G$

$$\begin{cases} (F_y + \lambda G_y) - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0 \\ \frac{d\lambda}{dx} = 0 \end{cases}$$

80. Условие трансверсальности

$$(F - (y' - \varphi')F_{y'})\big|_{x = x_1} = 0$$

81. Задача и НУ:

Минимизировать функционал $V[y] = \int\limits_a^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ при условии, что на котором достигается экстремум, левый конец функции закреплен $y(a) = y_0$, а правый может перемещаться вдоль заданной кривой $y = \varphi(x)$

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в задаче и дважды непр. диф.
2. F непрерывна с ЧП до второго порядка включительно
3. $\varphi(x)$ непрерывна с первой производной

тогда $y(x)$ удовлетворяет ~~уравнению~~ Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

и при $x = x_1$ выполнено условие трансверсальности

$$(F - (y' - \varphi')F_{y'})\big|_{x = x_1} = 0.$$

82. задача с н.у

Минимизировать функционал $V[y] = \int^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ при условии, что левый конец свободен, а правый перемещается вдоль кривой $y = \varphi(x)$

Тогда

1. $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
2. при $x = a$ выполнено $F_{y'}|_a = 0$
3. при $x = x_1$ выполнено условие трансверсальности $(F - (y' - \varphi')F_{y'})|_{x=x_1} = 0$.

83. Оба подвижны

Минимизировать функционал $V[y] = \int_a^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ при условии, что левый конец передвигается вдоль кривой $y = \varphi_1(x)$, а правый — $y = \varphi_2(x)$

1. $y(x)$ удовлетворяет Эйлеру: $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
2. Выполнены условия трансверсальности

$$(F(y'-\varphi')\,F_{y'})_{x=x_1} = 0$$

$$(F - (y'-\varphi')F_y)_{x=x_2} = 0.$$

84. оба свободны:

2. $F_{y'}|_a = 0, \; F_{y'}|_b = 0$.

85. Центральное поле экстремалей

Пусть область G содержит кривую заданную $\bar{y}(x)$. Если через каждую точку G проходит единственная кривая, являющаяся решением уравнения Эйлера и все экстремали пересекаются в одной точке

86. Собственное поле экстремалей

Пусть область G содержит кривую, заданную функцией $\bar{y}(x)$. Если через каждую точку G проходит единственная кривая, являющаяся решением уравнения Эйлера, то множество экстремалей образуют собственное поле

87. достаточные условия сильного минимума

1. $y = \bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера
2. $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей
3. $E(x, y, y', p) \geq 0$ в сильной окрестности $y = \bar{y}(x)$

88. слабого минимума

1. $y = \bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера
2. $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в собственное поле (центральное) экстремалей
3. $E(x, y, y', p) \geq 0$ в слабой окрестности $y = \bar{y}(x)$

89. Достаточные условия Лежандра сильного минимума

1. $y = \bar{y}(x)$ удовл. уравнению Эйлера
2. может быть включена в поле экстремалей
3. $F_{y'y'} \geq 0$ в сильной окрестности экстремали

90 условие Лежандра слабого минимума
— " — $F_{y'y'} \geq 0$ в слабой окрестности экстремали
91. дост. условие сильного максимума:
— " — $E(x, y, y', p) \leq 0$ в сильной окрестности
92. дост. условие слабого максимума
— " — $E(x, y, y', p) \leq 0$ в слабой окрестности
93. Условие Лежандра сильного максимума
— " — $F_{y'y'} \leq 0$ в сильной окрестности
94. Условие Лежандра слабого максимума
— " — $F_{y'y'} \leq 0$ в слабой окрестности

95. Корректно и некорректно поставленная задача
Условия корректной постановки задачи:
1. Решение существует для любой непрерывной на $[c, d]$ ф-ции
2. Единственность решения
3. Устойчивость решения.
$\forall f_n \to \bar{f}$ $\quad Ay_n = f_n,\ A\bar{y} = \bar{f} \Rightarrow y_n \to \bar{y}$ $\Leftrightarrow$ непрерывности обратного оператора

96. Регуляризируемая некорректно поставленная задача
Некорректно поставленная задача называется регуляризуемой, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм ее решения.

97. Регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова
Оператор $R(f_\delta, \delta) = R_\delta(f_\delta)$ - регуляризирующий алгоритм для решения операторного уравнения $Ay = f$; $A: C[a, b] \to L[c, d]$, если:
1. $R_\delta(f_\delta)$ определен $\forall f_\delta \in L[c, d]$ $\forall$ $0 < \delta \leq \delta_0$
$R_\delta(f_\delta): L[c, d] \to C[a, b]$ $\forall \delta > 0$.
2. $\forall \bar{y} \in C[a, b]$ $\forall f_\delta \in L[c, d]: \|f_\delta - \bar{f}\|_{L[c,d]} \leq \delta,\ \delta > 0,\ A\bar{y} = \bar{f}$
$y_\delta = R_\delta(f_\delta) \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\delta \to 0$.

98. Функционал Тихонова
$$M^\alpha[y] = \|Ay - f\|^2_{L[c,d]} + \alpha(\|y\|^2_{L[a,b]} + \|y'\|^2_{L[a,b]})$$

99. Теорема о существовании и единственности минимума
Для любой $f \in L[c, d]$ и любого $\alpha > 0$ существует и притом единственная функция $y^\alpha(s)$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[y]$ и являющаяся решением краевой задачи для интегродифференциального ур-ия Эйлера

100. Теорема о согласовании параметров
Пусть $f_\delta(x)$ непрерывная на $[c, d]$ $\quad \|f_\delta - \bar{f}\|_{L[c,d]} \leq \delta,\ \delta \in [0, \delta_0],\ \delta_0 > 0$
$A\bar{y} = \bar{f}$, где A - инт. оператор с ядром $K(x, s)$, $x \in [c, d]$, $s \in [a, b]$ непрерывным по совокупности аргументов и замкнутым.
$\bar{y}(x)$ непр дифф на $[a, b]$. Пусть: $\alpha(\delta) > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$
и $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \leq C$, $C > 0$ $\forall \delta \in [0, \delta_0]$. Тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)} = \arg\min M^{\alpha(\delta)}[y]$ -
функция на которой достигается минимум функционала Тихонова, обладает свойством $y_\delta^{\alpha(\delta)} \to \bar{y}$ при $\delta \to 0$

Раздел 2.

1. Найти расстояние между функциями в $C[0,2]$

$y = 2\sin\pi x \qquad z = \cos\pi x.$

$$\rho(y,z) = \|y - z\| = \max_{[0,2]} |2\sin\pi x - \cos\pi x| = \max_{[0,2]} |\sqrt{5}\sin(\pi x - \alpha)| = \sqrt{5}$$

$y = x^2 \qquad z = 6x$

$$\rho(y,z) = \|x^2 - 6x\| = \max_{[0,2]} |x^2 - 6x| = 8$$

$2x - 6 = 0$

$x = 3 - \max$

2. Найти расстояние между функциями в $h[0,1]$

$y = 3\cos\pi x \qquad z = \sin\pi x$

$$\rho(y,z) = \|3\cos\pi x - \sin\pi x\| = \sqrt{\int_0^1 (3\cos\pi x - \sin\pi x)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9\cos^2\pi x - 3\sin 2\pi x + \sin^2\pi x\, dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 9\frac{1+\cos 2\pi x}{2} - 3\sin 2\pi x + \frac{1-\cos 2\pi x}{2} dx} = \sqrt{\int_0^1 5 + 4\cos 2\pi x - 3\sin 2\pi x\, dx} = \sqrt{5x + \frac{2}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{3}{2\pi}\cos 2\pi x} =$$

$$= \sqrt{5 + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}} = \sqrt{5}$$

$y = x^2 \qquad z = x$

$$\rho(y,z) = \|x^2 - x\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx} = \sqrt{\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{6 - 15 + 10}{30}} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

3. Найти норму в пространстве $C[0,2]$

а) $y = 2\sin\pi x - \cos\pi x.$

$$\|y\| = \max_{[0,2]} |2\sin\pi x - \cos\pi x| = \max_{[0,2]} |\sqrt{5}\sin(\pi x - \alpha)| = \sqrt{5}$$

б) $y = x^2 - 4x.$

$$\|y\| = \max_{[0,2]} |x^2 - 4x| = 4$$

$f' = 2x - 4 = 0 \qquad x = 2$

4. Найти норму в пространстве $h[0,1]$

а) $y = 3\cos\pi x - \sin\pi x$

$$\|y\| = \sqrt{\int_0^1 (3\cos\pi x - \sin\pi x)^2 dx} = \sqrt{9\cos^2\pi x - \sin 2\pi x + \sin^2\pi x\, dx} = \sqrt{\frac{9}{2}(1+\cos 2\pi x) - 3\sin 2\pi x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (5 + 4\cos 2\pi x - 3\sin 2\pi x) dx} = \sqrt{5x + 2\sin 2\pi x + \frac{3}{2\pi}\cos 2\pi x}\Big|_0^1 = \sqrt{5}$$

б) $y = x^3 - 1.$

$$\|y\| = \sqrt{\int_0^1 (x^3 - 1) dx} = \sqrt{\int_0^1 x^6 - 2x^3 + 1 dx} = \sqrt{\frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{14}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{14}}$$

5. Найти ХЧ и СФ

$$y = \int_0^\pi \cos x \sin s\, y(s)\, ds$$

$f = \cos x \qquad g = \sin s \qquad a = \int_0^\pi \cos x \sin x\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = 0$

$c = \int_0^\pi \sin s\, y(s) ds; \quad y(x) = \lambda c\cos x \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$

б) $y = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s) y(s) ds = \lambda \int_0 (\cos x \cos s - \sin x \sin s) y(s) ds.$

$p_1 = \cos x \qquad g_1 = \cos s$
$p_2 = \sin x \qquad g_2 = -\sin s$

$a_{11} = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$
$a_{22} = \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = 0$
$a_{21} = 0$
$a_{22} = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = -\frac{\pi}{2}$

$c_1 = \lambda \frac{\pi}{2} c_1 \qquad (1+\lambda\frac{\pi}{2})(1-\lambda\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi} \quad \lambda = -\frac{2}{\pi}$
$c_2 = -\lambda \frac{\pi}{2} c_2$

$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cos x$
$-\frac{2}{\pi} C \sin x.$

в) $y = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s) y(s) ds = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos s - \cos x \sin s) y(s) ds.$

$p_1 = \sin x \qquad g_1 = \cos s$
$p_2 = \cos x \qquad g_2 = -\sin s$

$a_{11} = 0$
$a_{12} = \pi$
$a_{21} = -\pi$
$a_{22} = 0$

$c_1 = \lambda \pi c_2$
$c_2 = -\lambda \pi c_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ \lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2\pi^2 = 0 \qquad \lambda\pi = \pm i$
$\lambda = \pm \frac{i}{\pi}$

$\lambda = \frac{i}{\pi}: \quad c_1 = i c_2 \Rightarrow \varphi = \frac{iC}{\pi}(\sin x + i\cos x) = \tilde{C} e^{ix}.$
$\lambda = -\frac{i}{\pi}: \quad \tilde{C} e^{-ix}.$

г) $y = \lambda \int_{-1} (x+s) y(s) ds.$

$p_1 = x \qquad g_1 = 1$
$p_2 = 1 \qquad g_2 = s$

$a_{11} = \int_{-1}^{1} x \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$
$a_{12} = \int_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$
$a_{21} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$
$a_{22} = 0$

$c_1 = \lambda 2 c_2$
$c_2 = \lambda \frac{2}{3} c_1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{2\lambda}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{4\lambda^2}{3} = \lambda^2 = \frac{3}{4} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}: \quad c_1 = \sqrt{3} c_2, \qquad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} C (x\sqrt{3}+1) = \tilde{C}(x\sqrt{3}+1)$
$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad c_1 = -\sqrt{3} c_2 \qquad \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} C = \tilde{C}(x\sqrt{3}-1)$

6. Решить интегральное уравнение Фредгольма II рода

а) $y(x) = \lambda \int_0 (x-s) y(s) ds + x.$

$p_1 = x \qquad g_1 = 1 \qquad F(x) = x.$
$p_2 = 1 \qquad g_2 = -s$

$a_{11} = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$
$a_{12} = \int_0^1 dx = 1$
$a_{21} = -\int_0^1 dx = -\frac{1}{2}$
$a_{22} = -\int_0^1 dx = -1.$

$F_1 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$
$F_2 = \int_0^1 -x \, dx = -\frac{1}{2}.$

$c_1 = \lambda(\frac{1}{2} c_1 + c_2) + \frac{1}{2}$
$c_2 = \lambda(-\frac{1}{2} c_1 - c_2) - \frac{1}{2}$

$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ +\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1-\frac{\lambda}{2})(1+\lambda) - \frac{\lambda^2}{2} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} = \qquad \lambda = -2$

Если $\lambda \neq -2$: $\quad c_1 = -c_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\lambda}{2}+1} = \frac{1}{\lambda+1} \qquad \varphi = \frac{\lambda x - \lambda}{\lambda+2} + x = \frac{2x(1+\lambda) - \lambda}{\lambda+2}$

$\lambda = -2 \qquad A' = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \quad$ св $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ нет решений?

б) $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} xs\, y(s)\, ds + 1.$

$f = x$ $\quad F = 1.$ $\quad \alpha = \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2} = 1.$

$g = s$

$a = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$

$c = \lambda \cdot \frac{2}{3} c + 1.$

$\lambda = \frac{3}{2}$, то $\alpha \neq 1$ - решений нет

$\lambda \neq \frac{3}{2}$ $\quad c(3-2\lambda) = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{3-2\lambda}$

$\varphi = \frac{3\lambda x}{3-2\lambda} + 1$

7. СЗ и СФ задачи Штурма-Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0$
$y(0) = 0$
$y'(1) = 0.$

$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$y' = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y'(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} c_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

$\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$

$y = c \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x.$

б) $y'' + \lambda y = 0$
$y(0) = y(2\pi)$
$y'(0) = y'(2\pi)$

$\Rightarrow$ $c_1 \cos\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, 2\pi = c_1$

$-\cancel{\sqrt{\lambda}} c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, 2\pi + \cancel{\sqrt{\lambda}} c_2 \cos\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = \cancel{\sqrt{\lambda}} c_2$

$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi - 1 & \sin\sqrt{\lambda}\, 2\pi \\ -\sin\sqrt{\lambda}\, 2\pi & \cos\sqrt{\lambda}\, 2\pi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\sqrt{\lambda}\, 2\pi + 1 - 2\cos\sqrt{\lambda}\, 2\pi + \sin^2\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi$

$= \cos\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 2\pi n$

$\boxed{\lambda = n^2}$

$y = c_1 \sin nx$

$y = c_2 \cos nx.$

8. доказать, что все СЗ задачи Штурма-Лиувилля $(p(x)\cdot y')' - q(x) + \lambda \rho(x)\cdot y = 0$ положительны при следующих граничных условиях

Пусть λ - СЗ, $y \neq 0$ - СФ.

$\int_a^b [(p(x)y')' - q(x) + \lambda \rho(y)\cdot y)\cdot y\, dx =$

$= \int_a^b ((p(x)y')' - q(x)y)y\, dx = p(x)y'y\Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'^2(x)dx - \int_a^b q(x)y^2(x)dx =$

$= -\lambda \int_a^b \rho(x)y^2(x)\, dx.$

а) $y'(a) = 0$, $y(b) = 0$, $(y'(a), y'(b) = 0)$

$\underbrace{\lambda \int_a^b \rho(x) y^2(x) dx}_{>0} = \int_a^b p(x)y'^2(x)dx + \int_a^b q(x)y^2(x)dx \Rightarrow \lambda > 0.$

$\geq 0 \quad y(x) \neq c \qquad \geq 0.$

$= 0$ $\boxed{y = c}$ противоречие!

9. Записать уравнение Фредгольма, эквивалентное задаче Ш-Л

а) $y'' + \lambda(1+x^2)y = 0$

$y(0) = 0$

$y(1) = 0$ $\qquad p(x) = 1 > 0,\ q(x) \equiv 0,\ \rho(x) = 1+x^2 > 0,\ x \in [0,1]$

$\lambda = 0$ не явл СЗ $\Rightarrow$ можно ввести.

$y'' = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2$.

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$ $\quad y = x.$ $\qquad W = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - x + 1 = 1.$

$y(1) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1\ y = x - 1.$

$G = \begin{cases} x(s-1) & 0 \le x \le s \\ s(x-1) & s \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \lambda\int_0^1 -G(x,s)(1+s)y(s)\,ds$

$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\,ds$, где $\varphi = y(x)\sqrt{1+x^2}$

б) $y'' + \lambda e^{2x}y$ $\qquad y'' = 0\quad y = C_1x + C_2.$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = x.$

$y'(1) = 0\quad y = 1.$ $\qquad W\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

$G = \begin{cases} -x & 0 \le x \le s \\ -s & s \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \lambda\int_0^1 -G(x,s)e^{2x}y(s)\,ds$

$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 -e^x \cdot G(x,s)\cdot e^s\varphi(s)\,ds,\quad \varphi = y(x)e^x$

10. Найти вариацию функционала:

а) $V[y] = \int_a^b (x+y)\,dx.$

$\delta V = \frac{d}{dt}V[y+th]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b (x + y + th)\,dx\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b th\,dx = \int_a^b h\,dx.$

б) $\int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx.$

$\delta V = \frac{d}{dt}V[y+th]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b ((y+th)^2 - (y' + th')^2)\,dx\Big|_{t=0} =$

$= \int_a^b 2hy + 2th^2 - 2h'y' - 2th'^2\,dx\Big|_{t=0} = \int_a^b 2hy - 2h'y'\,dx. = 2\int_a^b hy - h'y'\,dx.$

11. Найти экстремали функционала с условием

$V[y] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2)\,dx$ $\qquad y(0) = 0\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

уравнение Эйлера $\quad F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y + 2y'' = 0.$

$y'' + y = 0. \Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\sin x$

$\left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \underline{y = \sin x}$

12. Записать условие трансверсальности:

$V[y] = \int_a^{b=B(y)} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ $\quad$ левый закреплен, правый подвижен.

$F - (\varphi' - y')F_{y'} = 0$

$A(x,y)\sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y')\cdot\frac{A(x,y)\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

$\frac{A(x,y)(1+\varphi'y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$ т.к. $A(x,y) \ne 0$, то $1 + y'\varphi'\Big|_{x=x_0} = 0$

$y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)}$ — условие ортогональности

13. Необходимое условие экстремума:

$$V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]dx$$

$$J[y] = \int_a^b \rho(x) y' dx = 1$$

$y(a)=0$

$y(b)=0$.

1. на $y(x)$ достигается экстремум $V[y]$
2. F – трижды дифф.
3. $y(x)$ дважды дифф. и не является экстремалью J.

тогда $H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0$, $\frac{d\lambda}{dx} = 0$.

$y(a)=0$

$y(b)=0$

$J[y] = \int_a^b \rho(x) y' dx = 1$.

$H = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda\rho(x)y^2$

уравнение Эйлера: $2q(x)y + 2\lambda\rho(x)y - 2p(x)y'' = 0$.

$$\begin{cases} p(x)y'' - q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0 \\ y(a)=0 \\ y(b)=0 \\ J[y] = \int_a^b \rho(x)y' dx = 1 \end{cases}$$

14. НУЭ в задачах со связями:

а) $V[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)dx$ $\quad y^2+z^2=1$ – голономная связь.

$y(0)=1$

$y(1)=0$

$z(0)=0$

$z(1)=1$.

$$\begin{cases} H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0 \\ H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ y(0)=1, \ y(1)=0 \\ z(0)=0 \ z(1)=1 \end{cases}$$

$H = F + \lambda\Phi = y'^2 + z'^2 + \lambda(y^2+z^2-1)$

$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = \lambda 2y - 2y'' = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ z'' - \lambda z = 0 \\ y^2+z^2-1=0 \\ y(0)=1 \ y(1)=0 \\ z(0)=0 \ z(1)=1 \end{cases}$

$H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} = z'' - \lambda z = 0$

б) $V[y,z] = \int_0^\pi (y'^2 - z'^2)dx$ $\quad y' = \sin x - z$

$y(0)=0, \ y(\pi)=0 \quad z(0)=0 \quad z(\pi)=\frac{\pi}{2}$.

$H = y'^2 - z'^2 + \lambda(\sin x + z - y') = 0$

НУЭ: $-\frac{d}{dx}(2y' + \lambda) = $ $\begin{cases} y''=0 \\ \lambda + 2z'' = 0 \\ y' - \sin x + z = 0 \\ + НУ \end{cases}$

$\lambda - \frac{d}{dz}(-2z')$

Раздел 3. Утверждения и теоремы, которые нужно уметь доказывать.

1. Пусть A - самосопряж. e - произвольный вектор, $\|e\|=1$.
$\|Ae\|^2 \le \|A^2e\|$, причем $\|Ae\|^2=\|A^2e\| \Leftrightarrow e$ - СВ, $\lambda=\|Ae\|^2$

$\|Ae\|^2=(Ae,Ae)=(A^2e,e)\le\|A^2e\|\cdot\|e\|=\|A^2e\|$, причем равенство может быть, тогда если $A^2e=\lambda e$ (из нер-ва Коши Буняковского)
Пусть e - СВ, $A^2e=\lambda e$

$(A^2e,e)=\lambda(e,e)$

$\|Ae\|^2=\lambda$

Пусть e - СВ, отвечающий $\lambda=\|Ae\|^2$. $A^2e=\|Ae\|^2e$

$\|A^2e\|=\|Ae\|^2$

2. Самосопряженный вполне непрерывный оператор имеет макс. вектор
Пусть $\|A\|=M$. По опред. нормы $\exists y_n$ $\|y_n\|=1$: $z_n=Ay_n$: $\|z_n\|\to\|A\|=M$.
т.к. y_n ограничена, A - ВН, то z_n - компактна =>
$z_{n_k}\to z\in E$. Из сходимости $z_{n_k}\to z \Rightarrow \|z_{n_k}\|\to\|z\|=M$.
$\tilde{z}=\frac{z}{M}$: Рассмотрим $\tilde{z}_{n_k}=\frac{z_{n_k}}{M}$

$\|A\tilde{z}_{n_k}\|=\left\|\frac{Az_{n_k}}{M}\right\|=\frac{1}{M}\|A^2y_{n_k}\|\ge\frac{1}{M}\|Ay_{n_k}\|^2=\frac{1}{M}\|z_{n_k}\|^2$

с другой стороны $\|A\tilde{z}_{n_k}\|\le\|A\|\|\tilde{z}_{n_k}\|=\|A\|\frac{\|z_{n_k}\|}{M}=\|z_{n_k}\|$

$\frac{\|z_{n_k}\|^2}{M}\le\|A\tilde{z}_{n_k}\|\le\|z_{n_k}\|$

$n\to\infty \Rightarrow$ $M\le\|A\tilde{z}\|\le M$, $\|A\tilde{z}\|=M$, т.е. $\tilde{z}$ - макс вектор

3. Если z - макс вектор оп. A, то z - СВ A^2, соотв. $\lambda=\|A\|^2=M^2$
Из определения макс. вектора
$M^2=\|A\|^2=\|Az\|^2\le\|A^2z\|\le\|A^2\|\|z\|=\|A^2\|\le\|A\|^2=M^2$

$\|Az\|^2=\|A^2z\| \Rightarrow$ z - СВ оператора A^2

$\lambda=\|Az\|^2=\|A\|^2=M^2$ (1)

4. Пусть A действует в E_n и A^2 обладает СВ z, соотв. $\lambda=M^2$.
Тогда A имеет СВ, соотв. M или -M

$A^2z=M^2z$, $z\ne0$. $(A^2-M^2J)z=0 \Rightarrow (A-MJ)(A+MJ)z=0$.
1. Пусть $u=(A+MJ)z\ne0 \Rightarrow (A-MJ)u=0 \Rightarrow Au=Mu \Rightarrow u$ - СВ, отв. (M)
2. Пусть $u=(A+MJ)z=0 \Rightarrow z$ - СВ A, отв. (-M)

5. Последовательность утверждений: самосопряж. ВН A обладает СВ, соотв. $\lambda=|\lambda|=\|A\|$

1. (2) A обладает макс. вектором z
2. (3) z - СВ оператора A^2 соотв. СЗ $\|A\|^2$
3. (4) A имеет СВ, соответствующий $\lambda=\|A\|$ или $\lambda=-\|A\|$, т.е. $|\lambda|=\|A\|$

6. Оператор Фредгольма с вещественным .... ядром обладает СЗ λ, $\lambda\ne0$: $Ay=\lambda y$, $y\ne0$, $y\in L_2[a,b]$
Оператор Фредгольма - вполне непрерывный и самосопряженный. Значит, имеет СВ. (теорема Арцела, стр 23!)
Утверждение: A - ЛО: $A: N_1\to N_2$, $A\ne0$. $\|A\|>0$.
$\|A\|=\|A\|\|e\|\ge\|Ae\|\ge0$ в N, $A\ne0 \Rightarrow \|A\|>0$.
$|\lambda|=\|A\| \Rightarrow |\lambda|\ne0$

7. СЗ λ: $|\lambda| = \|A\|$ - максимально

Пусть $\tilde{\lambda}$ - другое СЗ. $A\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x}$

$|\tilde{\lambda}| = \|A\tilde{x}\| \le \|A\| \, \|\tilde{x}\| = \|A\| = |\lambda| \qquad |\tilde{\lambda}| \le |\lambda|$

8. Число СЗ ВН A $|\lambda| \ge \delta > 0$ конечно

Пусть СЗ бесконечно много. Выберем послед. $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ и СВ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_n$ - ОНС

A - ВН => из $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ можно выделить сходящуюся подпослед.

Пусть $i \ne j$, тогда $\|A\varphi_i - A\varphi_j\|^2 = \|\lambda_i \varphi_i - \lambda_j \varphi_j\|^2 = (\lambda_i \varphi_i - \lambda_j \varphi_j, \lambda_i \varphi_i - \lambda_j \varphi_j) =$
$= \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \ge 2\delta^2 > 0$ => никакая подпоследовательность не является фундаментальной => не сходится

9. Ненулевому СЗ может соответствовать только конечное число ЛН СВ

Пусть $\lambda \ne 0$ и λ соответствует бесконечно много ЛН СВ $\varphi_1 \dots \varphi_n$
Применив процедуру Грама-Шмидта, преобразуем $\varphi_1 \dots \varphi_n$ в ОНС
тогда обозначим $|\lambda| = \delta > 0$. $\|\varphi_n\| = 1$, $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i \ne j$, а
$A\varphi_n = \lambda\varphi_n$, из $A\varphi_n$ нельзя выбрать сходящуюся, т.к.
$\|A\varphi_i - A\varphi_j\|^2 = 2|\lambda|^2 > 0$ (по предыдущему) => A не ВН.

Грам-Шмидт: $\psi_1 = \varphi_1$, $e = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}$

$$\psi_n = \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, e_k) e_k, \quad e_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}.$$

10. Если самосопряженный ВН оператор A имеет беск. последовательность λ_n, то $|\lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Если ненулевых СЗ бесконечно много, то $|\lambda_n|$ - монотонно невозрастающая (стр 33) и ограниченная снизу нулем
=> имеет предел. Если предел больше нуля, то получим противоречие с (8) - бесконечное число СЗ, модули которых превышают любое положит. число.

11. Построение СВ и СФ ВН оператора

$\exists \lambda_1 : |\lambda_1| = \|A\|$ => φ_1 считаем $\|\varphi_1\| = 1$.

Пусть $H_1 = H[a, b]$ - все пр-во.

Рассмотрим H_2 $y : (y, \varphi_1) = 0$ (ортогональное дополнение)

H_2 - ЛП $\quad (y_1 \varphi_1) = 0$, $(y_2 \varphi_1) = 0$ => $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \varphi_1) = 0$

H_2 - замкнуто $\quad y_n \to y$ и $(y_n \varphi_1) = 0$, то $(y, \varphi_1) = 0$.

$|(y_n, \varphi_1) - (y, \varphi_1)| = |(y_n - y, \varphi_1)| \le \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} \|\varphi_1\|$

H_2 - инвариантное подпространство $\quad AH_2 \subseteq H_2$.

$(z, \varphi_1) = (Ay, \varphi_1) = (y, A\varphi_1) = (y, \lambda_1 \varphi_1) = \lambda_1 (y, \varphi_1) = 0$.

$A : H_2 \to H_2$. A - ВН, самосопряж. $\|A\|_{H_2 \to H_2} \le \|A\|_{H_1 \to H_1} = \|A\|$ =>

A имеет СЗ λ_2 : $|\lambda_2| = \|A\|_{H_2 \to H_2} = \sup \|Ay\| \quad \|\varphi_2\| = 1$

Если $\lambda_2 \ne 0$, то вводим H_3 : $(y, \varphi_1) = 0$ $(y, \varphi_2) = 0$ . . .

и т.д.

12. Процесс построения СВ и СФ оператора Фредгольма

1. $H_1 = h[a,b]$, $|\lambda_1| = \|A\|_{H_1 \to H_1}$
φ_1.

2. $H_2 = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0\}$, $|\lambda_2| = \|A\|_{H_2 \to H_2}$
φ_2.

n) $H_n = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0 \dots (y, \varphi_{n-1}) = 0\}$ $|\lambda_n| = \|A\|_{H_n \to H_n}$
φ_n

1. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_n| = 0$ конечная послед.
2. $|\lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - бесконечно

13. Необходимые и достаточные условие того, что $\varphi \in \ker$

Вектор y принадлежит нуль-пространству тогда и только тогда, когда $(y, \varphi_n) = 0$, $n = 1, 2 \dots$

1. Необходимость. $\ker$: $Ay = 0 \cdot y$
Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ - послед. векторов, отвечающих ненулевым СЗ
вектора, отвечающие различным СЗ ортогональны $\Rightarrow (y, \varphi_n) = 0$

2. Достаточность. Пусть $P \in h[a,b]$: $(y, \varphi_n) = 0$.
P-ЛП, замкнутое, инвариантное
допустим P-не нуль пространство. $\Rightarrow \exists \tilde{y} \in P : A\tilde{y} \neq 0$ $\|\tilde{y}\| = 1 \Rightarrow$
$\|A\|_{P \to P} = \sup \|Ay\| = \|A\tilde{y}\| > 0 \Rightarrow \exists \varphi_n$ - СВ. $\Rightarrow$ в послед.
φ_n указаны не все собств. вектора

14. Если оператор Фредгольма имеет конечное число ХЧ, то ядро $K(x,s) = \sum_{i=1} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$

Пусть $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$
$\varphi_1 \quad \varphi_2 \dots \varphi_n$

1. $K^{(1)}(x,s) = K(x,s)$
2. $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$ и рассмотрим $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}$
все φ_n - СФ оператора $A^{(2)}$, соотв. тем же λ, поскольку
$\int_a^b K^{(2)}(x,s)\varphi_n(s)ds = \int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_n(s)ds = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} - 0 = \frac{\varphi_n}{\lambda_n}$.
φ_1 остается СФ, но соответствует $\lambda = 0$.

$K^{n+1}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$. Оператор $A^{(n+1)}$ с $K^{(n+1)}$ имеет те же λ и φ, кроме первых n.
Если ХЧ конечное число, то
$K^{n+1}(x,s) = 0$ и $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$

15. Теорема Гильберта-Шмидта

Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд $f(x) = \sum_{k=1} f_k\varphi_k(x)$, $f_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно. на $[a,b]$

1. $f_k = (f, \varphi_k) = (Ag, \varphi_k) = (g, A\varphi_k) = (g, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}) = \frac{g_k}{\lambda_k}$
критерий Коши:
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left| g_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}}$$ - нер-во Коши-Буняковского

неравенство Бесселя: $\sum_{k=1} q_k^2 \le \int_a^b q^2(s)\,ds \Rightarrow \sum q_k^2$ сходится,
т.к. состоит из неотриц. чисел и ограничен

$\frac{\varphi_k}{\lambda_k} = \int_a^b K(x,s)\varphi_k(s)\,ds$. Фиксируем x:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2 \le \int_a^b K^2(x,s)\,ds \le \underbrace{K_0}_{\max K}{}^2(b-a)$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} q_k^2 \le \frac{\varepsilon^2}{K_0^2(b-a)} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p}\left|q_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \le \varepsilon \Rightarrow$ сходится абсолютно и равномерно

2. Сумма ряда — непрерывная ф-ия.

$w(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x)$

$(w,\varphi_i) = \int_a^b w\varphi_i\,dx = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx - \int_a^b\sum_{k=1}^\infty f_k\varphi_k(x)\varphi_i(x)\,dx = f_i - \sum_{k=1}^\infty f_k\int_a^b\varphi_k\varphi_i\,dx$

$= f_i - f_i = 0$. т.к. $w \perp \varphi_i \Rightarrow w\in \ker A \Rightarrow Aw=0$

$\int_a^b w^2(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x)\right]w(x)\,dx = \int_a^b f(x)w(x)\,dx = (f,w) = (A\varphi, w) = 0 \Rightarrow$

$w(x)\equiv 0$.

16. Построить решение ур-ия Фредгольма (Б1)

$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x) = \lambda Ay + f$.

$y(x) = f(x) + g(x)$

$f(x)+g(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)(f(s)+g(s))\,ds + f(x)$

$g(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)(g(s)+f(s))\,ds$ — истокопредставима.

по Г-Ш: $g(x)=\sum_{k=1}^\infty g_k\varphi_k(x)$; $g_k = \lambda(A(g+f),\varphi_k) = \lambda(g+f, A\varphi_k) = \lambda\left(g+f, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right) =$
$= \frac{\lambda}{\lambda_k}(g_k+f_k) \Rightarrow g_k(\lambda_k-\lambda) = \lambda f_k$.

1. $\lambda\ne\lambda_k$: $g_k = \frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k \Rightarrow g(x) = \sum_{k=1}^\infty\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\varphi_k(x)$,

$y = f(x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\varphi_k(x)$

$|\lambda_k|\to\infty$ $\left|\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right| = \left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|\left|\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_k}}\right| \le 5\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|$ с некоторого номера

тогда $\sum_{n+1}^{n+p}\left|f_k\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)\right| \le 5|\lambda|\sum_{n+1}^{n+p}\left|\frac{f_k\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \Rightarrow$ ряд сходится
$y = f+\Sigma$ — решение.

2. $\lambda=\lambda_n$ пусть $r=1$: $k\ne n$: $(\lambda_k-\lambda)g_k = \lambda f_k$ и $g_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k-\lambda}$
$k=n$: $0\cdot g_n = \lambda\cdot f_n$, $\lambda\ne 0$.

если $f_n\ne0$, $f_n=(f,\varphi_n)$ — нет решения
если $f_n=0$ — решений бесконечно много

3. λ_n $r=r$ $\begin{cases}0\,g_n=\lambda f_n\\0\,g_{n+1}=\lambda f_{n+1}\\ \dots\\0\cdot g_{n+r-1}=\lambda f_{n+r-1}\end{cases}$ имеет решение $\Leftrightarrow f_n=0,\ f_{n+1}=0\dots$

$\Rightarrow$ условие разрешимости — ортогональность f всем φ.
тогда решение не единственно.

17. Существование неподв. точки

Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует единств. точка $y \in B$: $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом послед. приближений $y_{n+1} = Dy_n$, где $y_0 \in B$ – произв. точка в, причем $y_n \to y$: $Dy = y$.

1. единственность:

Пусть существуют две неподв. точки y_1 и y_2.

$0 < \|y_1 - y_2\| = \|Dy_1 - Dy_2\| \leq q\|y_1 - y_2\| < \|y_1 - y_2\|$ – противоречие.

2. $y_n = Dy_n$.

$$y_{n+1} = \underbrace{(y_{n+1} - y_n)}_{\text{общ. член}} + (y_n - y_{n-1}) + \dots + (y_1 - y_0) + y_0$$

$\|y_{n+1} - y_n\| = \|Dy_n - Dy_{n-1}\| \leq q\|y_n - y_{n-1}\| \leq \dots \leq q^n\underline{\|y_1 - y_0\|}$, то общ. член мажорируется геометрической прогр. => y_n сходится по признаку Вейерштрасса. $y_n \to y$.

Пусть $Dy = \tilde{y}$, $\tilde{y} \neq y$. Тогда $\forall n$

$0 < \|y - \tilde{y}\| \leq \|\tilde{y} - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - y\| = \|Dy - Dy_n\| + \|y_{n+1} - y\| \leq$

$\leq q\|y - y_n\| + \|y_{n+1} - y\| \to 0$ => $\|y - \tilde{y}\| = 0$ или $y = \tilde{y}$

18. Существование неподвижной точки у оператора, степень которого – сжимающий оператор

Пусть $D: B \to B$ и $\exists k \in \mathbb{N}$: D^k – сжимающий. Тогда существует единственная неподвижная точка D, причем y можно найти методом послед. приближений: $\forall y_0 \in B$ $y_{n+1} = Dy_n$ $y_n \to y$.

1. y_0 y_1 ... y_{k-1} y_k y_{k+1} ... y_{2k-1} y_{2k} ...
   Dy_0 $D^{k-1}y_0$ $D^k y_0$ $D^{k+1}y_0$ $D^{2k-1}y_0$ $D^{2k}y_0$.

подпоследовательности:

$y_0,\ y_k = D^k y_0,\ y_{2k} = D^k(D^k y_0) \dots \to y$ (D^k – сжим.)

$y_1,\ y_{k+1} = D^k y_1,\ y_{2k+1} = D^k(D^k y_1) \to y$

y_{k-1} $y_{2k-1} = D^k y_{k-1}, \dots \to y$ => вся последоват. сходится к y =>

2. Пусть $y = Dy$ => $y = D^k y$ => неподв. точка D является неподвижной точкой D^k => НТ D единственна (если есть)

Пусть $y = D^k y$. $Dy = D(D^k)^n y = D^{nk}(Dy) \to y$ => $y = Dy$

19. Если λ мало, то неодн. ур-ие Фредгольма II рода имеет единств. решение для любых непр. $f(x)$, причем решение может быть найдено МПП

$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$; $Ay = \int_a^b k(x,s)\, y(s)\, ds$

D: $Dy = \lambda Ay + f = \lambda\int_a^b k(x,s)y(s)\,ds + f(x)$

D – (в C) непрерывный неоднород. оператор. $\max\limits_{x,s \in [a,b]} k(x,s) = M$

Возьмем произвольные $y_1, y_2 \in C[a,b]$

$z_1 = \lambda Ay_1 + f = Dy_1$, $z_2 = Dy_2$.

$|z_1 - z_2| = |\lambda\int_a^b k(x,s)(y_1(s) - y_2(s))\,ds| \leq |\lambda| M(b-a)\|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}$ =>

$\|z_1 - z_2\| = |\lambda| M(b-a)\|y_1 - y_2\|$ => D сжимающий, если $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$

=> существует неподвижная точка и она может быть найдена МПП

20. Если λ мало, то диф. имеет только тривиальное решение

$Dy = \lambda Ay = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds$

$z_1 = Dy_1$,

По теореме Фредгольма: неоднородное ур-ие имеет решение для любой непр. $f(x) \Rightarrow$ однородное имеет только тривиальное решение

21. Сходимость ряда Неймана и выражение для резольвенты.

Рассмотрим метод послед. приближений:

$y_{n+1} = \lambda Ay_n + f \quad y_0 = 0$

$y_1 = \lambda \int_a^b K(x,s) 0 ds + f(x) = f(x)$

$y_2 = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x)$

$y_3 = \lambda^2 \int_a^b K(x,\xi) \left(\int_a^b K(\xi,s) f(s) ds \right) d\xi + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x) =$

$= \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,\xi) K(\xi,s) d\xi f(s) ds + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x)$

$y_{n+1} = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \dots \lambda^n A^n f$, где A^n оператор с повторным ядром $K_n = \int_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,s) d\xi \; n = 2, 3 \dots$

При малых λ решение существует и единственно

$y = \lambda Ay + f \to (I - \lambda A) y = f \Rightarrow y = (I - \lambda A)^{-1} f$.

1. $|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M$
2. $|K_2(x,s)| \le \int_a^b |K(x,\xi)| |K(\xi,s)| d\xi \le M^2 (b-a)$

n. $|K_n(x,s)| \le M^n (b-a)^{n-1}$ - сходится по признаку Вейерштрасса.

$K + \lambda K_2 + \dots = R(x,s,\lambda)$ - резольвента и

$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds$ (стр 60)

22. Интегральное уравнение Вольтерра имеет единств. решение для любой непрерывной $f(x)$

Пусть $Dy = \lambda Ay + f$

$\forall \lambda \; \exists k$: D^k - сжимающий

$z_1 = Dy_1, \; z_2 = Dy_2$

$|z_1 - z_2| = |Dy_1 - Dy_2| = |\lambda| |Ay_1 - Ay_2| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)(y_1 - y_2) ds \right| \le |\lambda| M (x-a) \|y_1 - y_2\|_C$

$\Rightarrow \|Ay_1 - Ay_2\|_C \le M(b-a) \|y_1 - y_2\|$

$\|Dy_1 - Dy_2\|_C \le |\lambda| M (b-a) \|y_1 - y_2\|_C$

$\|D^2 y_1 - D^2 y_2\| \le |\lambda|^2 \int_a^x K(x,s) (Ay_1 - Ay_2) ds \le \lambda^2 \frac{M^2}{2!} (x-a)^2 \|y_1 - y_2\| \le |\lambda|^2 \frac{M^2}{2!} (b-a)^2 \|y_1 - y_2\|$

...

$a_n = |\lambda|^n \frac{M^n}{n!} (b-a)^n \quad \forall \lambda \; a_n \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow a_n < 1$ при больших n

$\Rightarrow D^k$ сжимающий и имеет неподвижную точку $\Rightarrow$ единственное решение.

23. Если $f(x) = 0$, то решение тривиально

теорема 22 + альтернатива Фредгольма

24. Не имеет х.ч

теорема 23 $\quad \lambda Ay = y$ - только тривиальные решения $\Rightarrow$

λ не существует

25. Если λ не является х.ч, то ур-ие Фредгольма II рода с выр. ядром имеет единственное решение $\forall f(x)$

Решение находится по формулам Крамера

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) f_k$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s)\,ds$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\,ds, \text{ где } R(x,s,\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x) b_k(s)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\,ds + f(x)$$

$K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$ - вырожденное.

$$c_j = \int_a^b b_j(s) y(s)\,ds$$

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_j(x) + f(x)$$

$$c_i = \int_a^b y(x) b_i(x)\,dx = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int a_j(x) b_i(x)\,dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x) b_i(x)\,dx}_{f_i}$$

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i$$

Определитель: $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & \\ \cdots & & \ddots & \\ & & & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}$

26. $\forall \lambda$ число ЛН решений однородного уравнения равно числу решений союзного

$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\,ds + f(x) \Rightarrow y = \lambda A y + f$.

$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s) \psi(s)\,ds + g(x) \Rightarrow \psi = \lambda A^* \psi + g$.

$\psi(x) = \lambda \int \sum_{j=1}^{n} a_j(s) b_j(x) \psi(s)\,ds + g(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j b_j(x) + g(x)$, $\tilde{c}_j = \int_a^b \psi(s) a_j(s)\,ds$

$\tilde{c}_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k^*_{ij} \tilde{c}_j = g_i$, $g_i = \int_a^b g(s) a_i(s)\,ds$

$k^*_{ij} = k_{ji}$, $K^* = \{k^*_{ij}\}$ или $(I - \lambda K^*)\tilde{C} = G$

для исходного $(I - \lambda K)C = 0$ (однор) } одинаковое число решений
союзного $(I - \lambda K^*)\tilde{C} = 0$

27. Неоднородное уравнение Фредгольма разрешимо тогда и только тогда, когда f орт. всем ЛН решениям однородного

$BX = F$, $B: R^n \to R^n$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$R^n = R(B) \oplus \ker B^*$.

Разрешимость означает, что $F \in R(B) \Rightarrow F \perp \ker B^*$

$R(B) = \overline{R(B)}$ и $\ker B^* = \overline{\ker B^*}$ - замкнутые ЛП.

1. $Y \in R(B) \Rightarrow Y \perp \ker B^*$: $Y \in R(B) \Rightarrow Y = BX \Rightarrow \forall \psi \in \ker B^*\ (\psi, Y) = (BX, \psi) = (X, B^*\psi) = 0$
$Y \perp \ker B^*$
2. $\psi \perp R(B) \Rightarrow 0 = (\psi, BX) = (B^*\psi, X)\ \forall X \in R^n \Rightarrow B^*\psi = 0 \Rightarrow \psi \in \ker B^*$

Если F ортогональна всем ЛН решениям $B^*\psi = 0$, то $BX = F$ - имеет решение

условие разрешимости: $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \tilde{c}_1^{(l)} \\ \vdots \\ \tilde{c}_n^{(l)} \end{pmatrix}$ $l = 1, \dots, p$

$\sum_{i=1}^{n} f_i \tilde{c}_i^{(l)} = 0$ или $\int_a^b f(x) \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(l)} b_i(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \psi_l(x) = 0$

28. Разрешимо $\Leftrightarrow$ одн. имеет тривиальное решение.

29. Любое ур-ие фредгольма 2 рода с непр. ядром при фикс. λ можно заменить эквивалентным ур-ием с вырожд. ядром

$\forall \varepsilon > 0 \quad k(x,s) = k_B(x,s) + k_\varepsilon(x,s)$

$k_B(x,s) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) b_k(s), \quad k_\varepsilon : \max_{x,s \in [a,b]} |k_\varepsilon(x,s)| = \max_{x,s\in[a,b]} |k(x,s) - k_B(x,s)| \le \varepsilon$

$y = \lambda T_\varepsilon y + \lambda S_\varepsilon y + f$

λ фикс: $(I - \lambda S_\varepsilon) y = \lambda T_\varepsilon y + f$.

выберем $\varepsilon > 0$: $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon(b-a)}$, λ станет малым для S_ε, и оператор станет обратимым.

$(I - \lambda S_\varepsilon)^{-1} = I + \lambda R_\varepsilon$

введем ф-ию $Y = (I - \lambda S_\varepsilon) y = Y$

$Y = \lambda (T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon) Y + f$

ядро T_ε вырождено, а $\int_a^b \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) b_k(\xi) R_\varepsilon(\xi, s, \lambda) d\xi = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) \tilde{b}_k(s,\lambda)$

$\Rightarrow T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon$ - оператор с вырожд. ядром.

30. ШЛ эквивалентна задаче на ХЧ и СФ

Рассмотрим краевую задачу: $Ly = f(x)$
$y(a) = y(b) = 0$.

Допустим, однородная задача $\begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ имеет не только тривиальное решение. Тогда в $x_0 \in (a,b)$ решение имеет макс. положит. значение $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) = 0$.

$y(b) = 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (a,b), x_0 < x_1 : y(x) > 0 \ \forall x \in [x_0, x_1], y'(x_1) < 0$.

$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) = q(x) y \Rightarrow 0 > p y' \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} q(x) y(x) dx \ge 0$ - противоречие

$\Rightarrow \exists G$ - функция грина. тогда $y(x) = -\lambda \int_a^b G(x,\xi) \rho(\xi) y(\xi) d\xi$

$y = -\lambda A y \qquad \varphi(x) = -\lambda \int_a^b k(x,\xi) \varphi(\xi) d\xi$

ядро замкнутое: $\int_a^b k(x,\xi) z(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow z(\xi) \equiv 0 \Rightarrow \sqrt{\rho(x)}\, z(x) = 0$.

31. Существует бесконечно много СЗ

существование хотя бы одного λ следует из эквивалентности интегр. оператору

Пусть их конечное число. Тогда $k(x,s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n} \Rightarrow$ ядро не замкнутое.

32. Каждое СЗ имеет кратность единица:

Пусть это не так. Тогда некоторому λ соотв. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ $\Rightarrow y_1$ и y_2 - ФСР $\Rightarrow$ решение представимо в виде $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad y(a) = y(b) = 0$. Но это противоречит теореме существования решения задачи Коши для $Ly + \lambda \rho(x) y = 0$ с НУ $y(a) = 1, y'(a) = 0$.

33. СФ ортогональны с весом ρ

$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \ne n \end{cases} \qquad \varphi = y\sqrt{\rho(x)}$

$\int_a^b y_k(x) y_n(x) \rho(x) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \ne n \end{cases}$

34. Собств. зн. положительные

$\int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\,dx = 1.$

$Ly_n + \lambda_n \rho y_n = 0 \Rightarrow \int_a^b y_n(Ly_n + \lambda_n \rho y_n)\,dx = \int_a^b y_n \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)dx -$

$- \int_a^b q y_n^2\,dx + \lambda_n \int_a^b \rho y_n^2\,dx = -\int_a^b p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b q y_n^2\,dx + \lambda_n = 0 \Rightarrow$

$\lambda_n = \int_a^b \left[q y_n^2 + p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2\right]dx > 0.$

35. Теорема Стеклова

Любая дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]$ и обращающаяся в нуль на концах отрезка представима в виде абсолютно и равномерно сходящ. ряда фурье по СФС с $\rho(x)$ соотв. функций задачи Ш-Л

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$, где $f_n = \int_a^b f(x)\rho(x) y_n(x)\,dx$

$\begin{cases} L f(x) = h(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = \int_a^b G(x,s)h(s)\,ds = \int_a^b K(x,s)\frac{h(s)}{\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(s)}}\,ds.$

$F(x) = f(x)\sqrt{\rho(x)}, \quad H(s) = \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}}$

$F(x) = \int_a^b K(x,s)H(s)\,ds$ – истокопредставима

По теореме Г-Ш $F(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сход. ряд по СФВ оператора, т. е.

$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \varphi_n(x)$, причем $F_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)\,dx$

$\sqrt{\rho(x)}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x)\sqrt{\rho(x)} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x)$

$F_n = \int_a^b f(x)\sqrt{\rho(x)}\,y_n(x)\sqrt{\rho(x)}\,dx = \int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx = f_n$

36. Необходимое условие экстремума: $\delta V = 0$

Пусть $y_0 \in Y$ – точка экстремума $V[y]$ и $\exists\, \delta V(y_0, h)\ \forall h \in Y$ тогда $\delta V(y_0,h) = 0$

Пусть y_0 – т. мин. Тогда $\exists$ шар $\overline{S_r}(y_0)$ $r>0$: $V[y] \geq V[y_0]$ $\forall\, y \in \overline{S_r}(y_0)$

Если $|t| \leq \frac{r}{\|h\|}$, то $y_0 + th \in \overline{S_r}(y_0)$ и $V[y_0+th] \geq V[y_0] \Rightarrow \varphi(t) \geq \varphi(0)$

$\varphi(t)$ – дифф. $\Rightarrow \varphi'(t)\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \delta V(y_0,h) = 0$

37. Задача с закрепленными концами и условие экстремума

Пусть $Y' \subset Y = C^{(1)}[a,b]$: $Y' = \{y \in C^{(1)}[a,b],\ y(a) = A,\ y(b) = B\}$

$V[y] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx.$

Найти экстремум функционала на множестве Y'.

НУЭ: $\delta V(y_0, h) = 0$

$\delta V(y_0, h) = \frac{d}{dt}V[y+th]\big|_{t=0}.$ $\quad$ (F имеет все необх. производные

$\frac{d}{dt}V[y+th] = \frac{d}{dt}\int_a^b F(x, y+th, y'+th')\,dx$

$y(x) + th(x) \in Y' \Rightarrow h(a) = h(b) = 0$

$\frac{d}{dt}V[y+th] = \int_a^b [F_y(x, y+th, y'+th')h + F_{y'}(x, y+th, y'+th')h']\,dx$

$\delta V(y,h) = \int_a^b [F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h']\,dx = 0$

$\int_a^b F_{y'}h'\,dx = \underbrace{F_{y'}h\big|_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}h\,dx. \Rightarrow$

$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ – ур-ие Эйлера.

Пусть $\varphi(x)$ - фиксированная на $[a,b]$ и $\int \varphi(x)h(x)dx = 0$ $\forall h(x)$: $h(a)=h(b)=0$. Тогда $\varphi(x)\equiv 0$

Пусть $\varphi(x)\neq 0$. $\Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$: $\varphi(x_0)>0$ и $[x_0-\delta, x_0+\delta]\subseteq(a,b)$, $\delta>0$: $\varphi(x)\geq \frac{\varphi(x_0)}{2}$ $\forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Пусть h - непр. диф ф.

$h(x)\equiv 0$ $x\notin(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$h(x)>0$ $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\int_a^b \varphi(x)h(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi(x)h(x)dx \geq \frac{\varphi(x)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx > 0$ - противоречие.

39. Задача с закр. концами для n ф-ий

Найти экстремум ф-ла $V[y] = \int_a^b F(x, y_1, \dots y_n; y_1' \dots y_n')dx$ на мн-ве Y': $Y' = \{y\in C^{(1)}[a,b]\ y_i(a)=A_i,\ y_i(b)=B_i\}$

Если $y(x)$ осущ. экстремум $V[y]$ в случае, когда можно менять компоненты $\Rightarrow$ осущ. и тогда, когда меняется одна компонента.

Тогда аналогично (37)
$$\begin{cases} F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0 \\ y_i(a) = A_i \\ y_i(b) = B_i \end{cases}$$

40. Задача с неголономной связью.

отыскание экстремума ф-ла $V[y,z] = \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$, $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$, $z(a)=z_0$, $z(b)=z_1$ и $\Phi(x,y,z,y',z')=0$.

Рассм. функционал $V[y+th_1(x), z+th_2(x)]$, $h_1(a)=h_1(b)=h_2(a)=h_2(b)=0$

$\frac{d}{dt}V[y+th_1, z+th_2(x)]\Big|_{t=0} = \int_a^b (F_y h_1 + F_{y'}h_1' + F_z h_2 + F_{z'}h_2')dx =$

$= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})h_1 dx + \int_a^b (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})h_2 dx = 0$, h_1 и h_2 подчиняются Φ:

$\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ $\quad \Phi_y h_1 + \Phi_{y'}h_1' + \Phi_z h_2 + \Phi_{z'}h' = 0 \quad |\cdot \lambda(x)\ \int^b$

$\Phi_{z'}\neq 0 \Rightarrow h_2' = -\underbrace{\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}}_{a_2}h_2 - \underbrace{\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}}_{a_1}h_2 - \underbrace{\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}}_{b_1}h_1' \Rightarrow \begin{cases} h_2' = a_2h_2 + (a_1h_1 + b_1h_1') \\ h_2(a) = 0 \end{cases}$

$h_2 = \int_a^b (a_1h_1 + b_1h_1')e^{(\int a_2 d\eta)}d\xi$

$\int_a^b (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})dx \int_a^x (a_1h_1 + b_1h_1')\exp(\int_\xi^x a_2 d\eta)d\xi = \int_a^b (a_1h_1 + b_1h_1')d\xi \int_\xi^b (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\exp(\int_\xi^x a_2 d\eta)dx$

$= \int_a^b (a_1h_1 + b_1h_1)\gamma(\xi)d\xi = \int_a^b [a_1\gamma - \frac{d}{dx}(b_1\gamma)]h_1 d\xi$

по ОЛВИ: $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + a_1\gamma - \frac{d}{dx}(b_1\gamma) = 0$

$\int_a^b (\lambda\Phi_y h_1 + \lambda\Phi_{y'}h_1')dx + \int_a^b (\lambda\Phi_z h_2 + \lambda\Phi_{z'}h_2')dx = 0$

$\int_a^b (\lambda\Phi_y h_1 - \frac{d}{dx}\lambda\Phi_{y'}\cdot h_1)dx + \int_a^b (\lambda\Phi_z - \frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{z'}))h_2 dx$

$\int_a^b (F_y + \lambda\Phi_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda\Phi_{y'}))h_1 dx + \int_a^b [F_z + \lambda\Phi_z - \frac{d}{dx}(F_{z'} + \lambda\Phi_{z'})]h_2 dx$

по ОЛВИ:
$$\begin{cases} H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} = 0 \\ H_z - \frac{d}{dx}H_{z'} = 0 \end{cases}$$

41. Задача с голономной связью

Найти экстремум функционала $V[y, z]$ при выполнении граничных условий $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$, $z(a)=z_0$, $z(b)=z_1$ и уравнения связи $\varphi(x, y, z)=0$.

$$\delta V = \int_a^b \left(\left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] h_1 + \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) h_2 \right) dx = 0.$$

$$\varphi_y h_1 + \varphi_z h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = h_1. \quad \varphi_z \neq 0 !$$

$$\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) - \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) \frac{\varphi_y}{\varphi_z} = 0 \text{ - ОЛВИ}$$

Полагая $\lambda = -\dfrac{F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}}{\varphi_z}$, получаем

$$\begin{cases} (F_y + \lambda \varphi_y) - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ (F_z + \lambda \varphi_z) - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}$$

42. Изопериметрическая задача с закр. концами

Найти экстремум функционала $V[y] = \int F(x, y, y') dx$ при выполнении граничных условий $y(a)=A$, $y(b)=B$ и дополнительного условия $I[y] = \int G(x, y, y') dx = L$

Введем ф-ию $z(x) = \int_a^x G(x, y, y') dx$

$$V[y, z] = \int F(x, y, y') dx$$

$$y(a)=A, \ y(b)=B, \ z(a)=0, \ z(b)=L$$

Уравнение неголономной связи $\varphi(x, y, z, y', z') = -z' + G(x, y, y')$

тогда $\begin{cases} (F_y + \lambda G_y) - \frac{d}{dx} (F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0 \\ \frac{d\lambda}{dx} = 0 \end{cases}$

по теореме о НУЭ с неголономной связью

43. Левый закреплен, правый подвижен

Минимизировать функционал $V[y] = \int^{x_1} F(x, y, y') dx$ при условии, что левый конец закреплен $y(a)=y_0$, а правый подвижен $y = \varphi(x)$

Если на y реализуется экстремум, то выполняется уравнение Эйлера.

$$V[y+th] = \int_a^{B[y+th]} F(x, y+th, y'+th') dx = \int_a^{B[y+th]} [F_y h + F_{y'} h'] dx + F(B[y+th], y(B)+th(B), y'(B)+th'(B)) \frac{d}{dt} B[y+th]$$

Положим $t=0$. Тогда $y+th \to y(x)$, $B[y+th]|_{t=0} = x_1$.

$$\delta V = \int_a^{x_1} [F_y(x y y') h + F_{y'}(x y y') h'] dx + F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \frac{d}{dt} B[y+th]|_{t}$$

$$\delta V = F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) h(x_1) + F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \frac{dB}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$$

$$B(t) = y(B(t)) + th(B(t)) \equiv \varphi(B(t))$$

$$y'(B(t)) B'(t) + th'(B(t)) B'(t) + h(B(t)) = \varphi'(B(t)) B'(t)$$

$$B'(t) = \frac{h(B(t))}{\varphi'(B(t)) - y'(B(t)) - th'(B(t))}$$

1. $\varphi'(x_1) \neq y'(x_1)$, то при $t \to 0$ $B'(0) = \dfrac{h(x_1)}{\varphi'(x_1) - y'(x_1)}$

$\delta V = \{F_{y'}|_{x=x_2} + F|_{x=x_2} \frac{1}{\varphi'(x_2) - y'(x_2)}\} h(x_2) = 0.$

$F - (y'-\varphi')F_{y'} = 0$ – условие трансверсальности.

2. $\varphi'(x_1) = y'(x_2)$, то $B'(t) \to \infty$

$\delta V = F_{y'} h + F \frac{dB}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \iff F - (y'-\varphi')F_{y'} = 0$

44. Левый свободен, правый подвижен

Пусть $A(t) = a$, $\frac{dA}{dt}\Big|_{t=0} = 0$

аналогично, получаем $\delta V = F_{y'} h(a) = 0 \Rightarrow F_{y'}|_{x=a} = 0$

для правого полностью как в предыдущем случае.

46. Оба подвижны

аналогично $\begin{cases} F_{y'}|_{x=a} = 0 \\ F_{y'}|_{x=B} = 0 \end{cases}$

48 оба свободны

аналогично: $\begin{cases} F - (y'-\varphi_1')F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \\ F - (y'-\varphi_2')F_{y'}|_{x=x_2} = 0 \end{cases}$

47. Достаточные условия сильного минимума

Пусть на $y = \bar{y}(x)$ достигается минимум $V[y]$ для задачи с закр. концами $\bar{y}(a) = A$, $\bar{y}(B) = B$

$V[\tilde{y}] - V[\bar{y}] \geq 0$ $\forall \tilde{y}(x)$ в окр. $\bar{y}(x)$, таких, что $\tilde{y}(a) = A$, $\tilde{y}(B) = B$

$V[\tilde{y}] = \int^B F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = \int_{\tilde{C}} F(x,y,y')dx$ – криволин. II рода

введем кривую $\tilde{C} = \{(x,y): y = \tilde{y}(x),\ x \in [a, B]\}$.

$J(\tilde{C}) = V[\tilde{y}]$, $J(\bar{C}) = V[\bar{y}]$

нужно оценить знак $J(\tilde{C}) - J(\bar{C}) = \int F(y, \tilde{y}', x)dx - \int_{\bar{C}} F(y, y'; x)dx$.

Пусть $p(x,y)$ – производная в т. x. $\tilde{y}(x)$ – экстремали, проходящей через (x,y)

$J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \{(F(x,y,p(x,y)) + (\frac{d}{dx}y(x) - p(x,y)) F_p(x,y,p(x,y))\} dx$

$J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} [F(x,y,p) - pF_p]dx + F_p dy$

покажем, что под знаком полный интеграл:

$\frac{\partial}{\partial y}(F - pF_p) = \frac{\partial}{\partial x} F_p$

$\frac{\partial}{\partial y}(F - pF_p) = F_y + F_p p_y - F_p p_y - p(F_{py} + F_{pp} p_y)$

$\frac{\partial}{\partial x} F_p = F_{px} + F_{pp} p_x$

в каждой точке выполняется ур-ие Эйлера:

$(F_y - \frac{d}{dx} F_p(x,y,p(x,y)))\Big|_{y=y(x)} = 0$

$F_y - F_{px} - F_{py}p - F_{pp}(p_x - p_y p) = 0$, то есть под знаком – полный интеграл и $J(\bar{C})$ не зависит от пути интегрирования. $\Rightarrow \Delta V = J(\tilde{C}) - J(\bar{C}) = J(\tilde{C}) - J(\tilde{C}) =$

$= \int F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p) F_p(x,y,p)\} dx$

$E(x,y,y',p) = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p)$ - ф-ция Вейерштрасса

=> дост. условие 47,48 минимума $E \geq 0$ в сильной/слабой окрестности

51,52 максимума $E \leq 0$ в сильной/слабой окрестности

+ уравнение Эйлера
+ поле экстремалей

49,50,53,54. условие Лежандра

Пусть $F(x,y,y')$ дважды непр. дифф. по y'.
Разложим в ряд Тейлора:

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y'-p)F_{y'}(x,y,p) + \frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q)$$

$$E = \frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q) \Rightarrow$$

$F_{y'y'} \geq 0$ в сильной/слабой окрестности

$F_{y'y'} \leq 0$ в сильной/слабой окрестности

55. Задача решения ур-ия Фредгольма 2-го рода корректна в $C[a,b]$

$$y = \lambda Ay + \bar{f} \Rightarrow \bar{y} = \bar{f} + \lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)\bar{f}(s)ds \quad \lambda \neq \lambda_n$$

$$y_n = f_n + \lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f_n(s)ds$$

$$\|f_n - \bar{f}\| \to 0 \quad n \to \infty.$$

$$\|y_n - \bar{y}\| \leq \max|f_n - \bar{f} + \lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)(f_n - \bar{f})ds| \leq \max|f_n - \bar{f}| +$$
$$|\lambda|\max|\int_a^b \ldots| \leq \|f_n - \bar{f}\| + |\lambda|\int_a^b R_0\|f_n - \bar{f}\|ds = M\|f_n - \bar{f}\| \to 0.$$

устойчиво

56. в $L[a,b]$

$$\|y_n - \bar{y}\| = \int_a^b (f_n - \bar{f} + \lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)(f_n - \bar{f})ds)^2dx = \int_a^b (f_n - \bar{f})^2dx + 2\lambda\int_a^b\int_a^b R(x,s,\lambda)(f_n - \bar{f})ds(f_n - \bar{f})dx$$
$$+ \int_a^b \lambda^2(\int_a^b R(x,s,\lambda)(f_n - \bar{f})ds)^2dx = \|f_n - \bar{f}\| + 2\lambda R(\int_a^b (f_n - \bar{f})dx)^2 + \lambda^2R^2(\int_a^b (f_n - \bar{f})dx)^2$$

?

57. Фредгольм 1 рода - некорректна в $C[a,b] \to L[c,d]$

1. Решение существует $\forall f$ непр. на $[c,d]$?
Пусть $k(x,s)$: $k'_x(x_0,s)$ $x_0 \in (c,d)$ тогда $\exists \left(\int k(x,s)y(s)ds\right)'\Big|_{x=x_0}$ $\forall y(s)$
Если $f'(x)|_{x=x_0}$ не существует, то решение не существует

2. Единственность.
требуем замкнутость ... Тогда $\exists A^{-1}: D(A^{-1}) \neq L[c,d]$

3. устойчивость:
Пусть $y_n(s)$: $y_n(s) \neq 0$ на $\left[\frac{a+b}{2} - d_n, \frac{a+b}{2} + d_n\right]$ и $y_n(s) = 0$ вне.
$\max|y_n(s)| = 1$, $s \in [a,b]$, $d_n \to 0+0$.
$\forall x \in [c,d]$ $|f_n(x)| = \left|\int_a^b k(x,s)y_n(s)ds\right| = \left|\int_{\frac{a+b}{2}-d_n}^{\frac{a+b}{2}+d_n} k(x,s)y_n(s)ds\right| \leq k_0 \cdot 1 \cdot 2d_n \to 0$
но $A\bar{y} = \bar{f} = 0$ $y_n \not\to \bar{y}$. не устойчиво

58. существование и единственность минимума функционала
Для любой $f \in L[c,d]$ и любого параметра $\alpha > 0$ существует и притом единственная $y^\alpha(s)$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[y]$ и являющаяся решением краевой задачи для интегродифф. ур-ия Эйлера

$$M^\alpha[y] = \|Ay - f\|^2 + \alpha(\|y\|^2 + \|y'\|^2)$$
$$\|y\|^2 = \int_a^b y^2(s)ds, \quad \|y'\|^2 = \int_a^b (y'(s))^2 ds$$
$$\|Ay - f\|^2 = \int_c^d \left(\int_a^b k(x,s)y(s)ds - f(x)\right)^2 dx.$$
задача со свободными концами: $F_{y'}|_a = 0$, $F_{y'}|_b = 0$.
$V[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$ $\quad F_{y'} = 2\alpha y' \Rightarrow y'(a) = y'(b) = 0$.
$$M^\alpha[y+\delta y] - M^\alpha[y] = \|A(y+\delta y) - f\|^2 + \alpha(\|y+\delta y\|^2 + \|y' + \delta y'\|^2) - M^\alpha[y]$$
$\delta y'(a) = 0$ $\delta y'(b) = 0$

$$\|A(y-\delta y) - f\|^2 = \|(Ay - f) + A\delta y\|^2 = ((Ay-f) + A\delta y, (Ay-f) + A\delta y) = (Ay - f, Ay - f) + 2(Ay - f, A\delta y) + (A\delta y, A\delta y) = \|Ay - f\|^2 + 2(A^*Ay + A^*f; \delta y) + \underbrace{\|A\delta y\|^2}_{O(\|\delta y\|)}$$

$$\|y + \delta y\|^2 = (y+\delta y, y + \delta y) = \|y\|^2 + 2(y\delta y) + \|\delta y\|^2$$
$$\|y' + \delta y'\|^2 = (y' + \delta y', y' + \delta y') = \|y'\|^2 + 2(y'\delta y') + \|\delta y'\|^2$$
$$(y'\delta y') = \int_a^b y'(s)\delta y'(s)ds = y'\delta y\Big|_a^b - \int_a^b y''(s)\delta y(s)ds = -(y''\delta y)$$

$$M^\alpha[y+\delta y] - M^\alpha[y] = 2(A^*Ay - A^*f, \delta y) + \|A\delta y\|^2 + 2\alpha((y\delta y) - (y''\delta y)) + \alpha\|\delta y\|^2 + \alpha\|\delta y'\|^2 = 2(A^*Ay - A^*f + \alpha(y - y''), \delta y) + \|A\delta y\|^2 + \alpha(\|\delta y\|^2 + \|\delta y'\|^2)$$
$$(A^*Ay - A^*f + \alpha(y - y''), \delta y) = \int_a^b (A^*Ay - A^*f + \alpha(y - y''))\delta y(s)ds = 0.$$
ОЛВИ: $\begin{cases} A^*Ay - A^*f + \alpha(y - y'') = 0. \\ y'(a) = 0, \ y'(b) = 0 \end{cases}$

Если y решение задачи, то $M^\alpha[y+\delta y] - M^\alpha[y] = \|A\delta y\|^2 + \alpha(\|\delta y\|^2 + \|\delta y'\|^2) \geq 0$ $\forall \delta y$.
$\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\alpha}(A^*Ay - A^*f) \\ y'(a) = 0, \ y'(b) = 0 \end{cases}$
однородная задача имеет только тривиальное решение $\Rightarrow$
$\exists G$: получим $y = \frac{1}{\alpha}(GA^*Ay - GA^*f)$
ядро A^*A, GA^*A непр. по совокупности аргументов

$-\delta(\alpha A^* f)$ - непр.

однородное ур-не имеет только тривиальное решение => решение неодн. существует и единственно.

$$\text{одн}: \begin{cases} \alpha(y - y'') + A^*Ay = 0 \\ y'(a) = y'(b) = 0 \end{cases}$$

Пусть y - решение

$$\|Ay\|^2 + \alpha\|y\|^2 + \alpha\|y'\|^2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0.$$

теорема 59:

Пусть $f_\delta(x)$ непрерывна на $[c,d]$ $\|f_\delta - \bar{f}\|_h \le \delta$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$
$\bar{f}: A\bar{y} = \bar{f}$, где A - оператор с ядром $K(x,s)$, $x \in [c,d]$ $s \in [a,b]$ непр. по совокупности аргументов и замкнутый.
$\bar{y}(x)$ непр. дифф. на $[a,b]$. Пусть $\alpha(\delta) > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$
и $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \le C$, $C > 0$, $\forall \delta \in (0, \delta_0]$. Тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)} = \arg\min M^{\alpha(\delta)}[y]$
обладает свойством, что $y_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\delta \to 0$

$y_\delta^{\alpha(\delta)}$ существует и единственна. Пусть $y_\delta^{\alpha(\delta)} \not\to \bar{y}$ при $\delta \to 0$.
тогда $\exists \varepsilon > 0$ и $\delta_k \to 0$: $\|y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - \bar{y}\|_C \ge \varepsilon > 0$.

$$M^\alpha[y_\delta^\alpha] = \min M^\alpha[y] \le M^\alpha[\bar{y}] = \|A\bar{y} - f_\delta\|^2 + \alpha(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2) \le \delta^2 + \alpha(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2)$$

$$\|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha(\|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2) \le \delta^2 + \alpha(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2)$$

$$\|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2 \le \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2$$

Если $\alpha = \alpha(\delta)$, то $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ $\frac{\delta^2}{\alpha} \le C$ и $\|y_\delta^{\alpha(\delta)}\|^2 + \|(y_\delta^{\alpha(\delta)})'\|^2 \le C + \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2 < C$
=> послед. компактна и $y_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)} \to y^*$.
тогда $\|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - A\bar{y}\|_h = \|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k} + f_{\delta_k} - \bar{f}\| \le \|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k}\| + \delta_k \le$
$\le \sqrt{\delta_k^2 + \alpha(\delta_k)(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2)} + \delta_k$ $\lim k = \infty \Rightarrow \|Ay^* - A\bar{y}\| = 0. \Rightarrow$
$y^* = \bar{y}$

следствие-
теорема 60.
Пусть $\delta = 0$, $f_\delta = \bar{f}$, $M^\alpha[y] = \|Ay - \bar{f}\|^2 + \alpha(\|y\|^2 + \|y'\|^2)$
$y^\alpha = \arg\min M^\alpha[y]$ $y^\alpha \xrightarrow{C} \bar{y}$ при $\alpha \to 0+0$.

Раздел 4. Теоретические задачи

1. $| \|x\| - \|y\| | \le \|x-y\|$

$\|x\| = \|x+y-y\| \le \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$

$\|y\| = \|y-x+x\| \le \|y-x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$

$| \|x\| - \|y\| | \le \|xy\|$

2. Если посл. сходится, то эта посл. фундаментальна

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \quad \forall n: n > N(\varepsilon): |x_n - x| < \varepsilon/2$

$\forall p \quad |x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$

$|x_n - x| + |x - x_{n+p}| < \varepsilon$

$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ - фундаментальна

обратное верно в полном пространстве

3. Если последовательность сходится, то она ограничена

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - x| < \varepsilon$

$|x_n - x| \geqslant |x_n| - |x| < \varepsilon$

$|x_n| < \varepsilon + |x| = c$

4. Из сходимости в среднем не следует равномерная сходимость

$f_n = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

тогда $\int\limits_0^2 (f_n - 0)^2 dx = \int\limits_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{2}{n} \to 0$ при $n \to \infty$

но $f_n \ \forall x: \sim 000\,1111\,0000$ - не явл. сходящейся.

5. $C[a,b]$ - линейное:

Пространство непрерывных функций

1. $\forall f, g: \quad f+g = g+f$
2. $\forall f, g, h: \quad f+(g+h) = (f+g)+h$
3. $\exists f \equiv 0 \quad g+f = g$
4. $f + (-f) = 0$
5. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$
6. $(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$
7. $(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$
8. $1 \cdot f = f$.

6. Норма в $C[a,b]$

$\|y\|_C = \max\limits_{[a,b]} |y(s)|$

1. $\|y(s)\| = \max\limits_{[a,b]} |y(s)| \ge 0$, $\max |y(s)| = 0 \Leftrightarrow y = 0$
2. $\|\alpha y(s)\| = \max\limits_{[a,b]} |\alpha y(s)| = |\alpha| \max\limits_{[a,b]} |y(s)| = |\alpha| \|y\|$
3. $\|x+y\| = \max\limits_{[a,b]} |x(s)+y(s)| \le \max\limits_{[a,b]} |\,|x| + |y|\,| = \max\limits_{[a,b]} |x| + \max\limits_{[a,b]} |y| = \|x\| + \|y\|$

7. $C^p[a,b]$ линейное

1. $f,g: \quad f+g = g+f$
2. $(f+g)+h = f+(g+h)$
3. $f\equiv 0: \quad g+f=g$
4. $f+(-f)=\theta$
5. $\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$
6. $(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$
8. $1\cdot f = f$

} дифф.

8. Норма в $C^p[a,b]$

$\|y\| = \max\limits_{[a,b]}|y| + \max\limits_{[a,b]}|y'| + \ldots \max\limits_{[a,b]}|y^{(p)}|$

1. $\|y\| = \max\limits_{[a,b]}|y| + \max\limits_{[a,b]}|y'| + \ldots \max\limits_{[a,b]}|y^{(p)}| \geq 0. \quad \|y\|=0 \Leftrightarrow y=0. \Rightarrow y'=0, y''=0\ldots$

2. $\|\alpha y\| = \max\limits_{[a,b]}|\alpha y| + \max\limits_{[a,b]}|\alpha y'| + \ldots \max\limits_{[a,b]}|\alpha y^{p}| = |\alpha|(\max\limits_{[a,b]}|y| \ldots) = |\alpha|\,\|y\|$

3. $\|x+y\| = \max\limits_{[a,b]}|x+y| + \max\limits_{[a,b]}|x'+y'| + \ldots \leq \max\limits_{[a,b]}|x| + \max\limits_{[a,b]}|y| + \max\limits_{[a,b]}|x'| + \max\limits_{[a,b]}|y'| + \ldots = \|x\|+\|y\|$

9. $h[a,b]$ - линейное

1. $f+g = g+f$
2. $(f+g)+h = f+(g+h)$
3. $f\equiv 0: \quad g+f=g$
4. $f+(-f)=\theta$
5. $\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$
6. $(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$
8. $1f = f$

} непрерывно

10. Норма в $h[a,b]$

$\|y\|_h = \sqrt{\int_a^b y^2 dx}$.

1. $\|y\| = \sqrt{\int_a^b y^2 dx} \geq 0. \quad \|y\|=0 \Leftrightarrow y^2=0 \Rightarrow y\equiv 0$
2. $\|\alpha y\| = \sqrt{\int_a^b \alpha^2 y^2 dx} = \sqrt{\alpha^2 \int_a^b y^2 dx} = |\alpha|\sqrt{\int_a^b y^2 dx} = |\alpha|\,\|y\|$
3. $\|y+z\| = \sqrt{\int_a^b (y+z)^2 dx} = \sqrt{\int_a^b y^2+2yz+z^2 dx} = \sqrt{\int_a^b y^2 dx + \int_a^b z^2 dx + 2\int_a^b yz\, dx} \leq$

$\leq \sqrt{\|y\|^2+\|z\|^2+2\sqrt{\int_a^b y^2 dx}\sqrt{\int_a^b z^2 dx}} = \sqrt{(\|y\|+\|z\|)^2} = \|y\|+\|z\|$

11. $h[a,b]$ не является полным

Пусть $y_n(x) = \begin{cases} -1 & -1\leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & 0\leq |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Зададим $\varepsilon>0$, $m>n \Rightarrow \exists N(\varepsilon)$ $\|y_n(x)-y_m(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}(y_n-y_m)^2 dx =$

$= 2\int_0^{1/m}(mx-nx)^2 dx + 2\int_{1/m}^{1/n}(1-nx)^2 dx = \frac{2}{3n} + \frac{2n}{3m^2} - \frac{4}{3m} \leq \frac{4}{3n} < \varepsilon$ при

$\forall m>n>N(\varepsilon) = \left[\frac{4}{3\varepsilon}\right]+1$.

Пусть y_n сходится, т.е. $\exists\, \varphi(x)$: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n\geq N_1(\varepsilon)$

$\|y_n(x)-\varphi(x)\| = \sqrt{\int (y_n-\varphi)^2 dx} \leq \varepsilon/2$

рассмотрим разрывную $\psi = \begin{cases} -1 & -1\leq x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & 0<x\leq 1. \end{cases}$

тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon): \forall n\geq N_2(\varepsilon)$ $\sqrt{\int (y_n-\psi)^2 dx} = \sqrt{\ldots} \ldots \sqrt{\frac{2}{\ldots}} < \varepsilon$

т.к. φ непр. и ψ разрывна, то $\varphi-\psi\neq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2dx}>0 \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ и $\forall n\geq\max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$0<\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2dx}=\sqrt{\int_{-1}^{1}((\varphi(x)-y_n(x))+(y_n-\psi(x))^2dx}\leq\sqrt{\int(\varphi(x)-y_n(x))^2dx}+\sqrt{\int(\varphi(x)-y_n(x))^2dx}=\varepsilon$

Ввиду произвольности ε получаем противоречие.

12. Неравенство Коши-Буняковского

$(y,z)^2=\left(\int_a^b yz\,dx\right)^2\leq\int_a^b y^2dx\cdot\int_a^b z^2dx \quad \forall y,z\in h[a,b]$

$0\leq(y+\lambda z, y+\lambda z)=(y,y)+2\lambda(y,z)+\lambda^2(z,z)$

~~справедливо~~ $\forall y,z\in h$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow D<0$.

$4(y,z)^2-4(y,y)(z,z)\leq 0.$

$(y,z)^2\leq(y,y)(z,z)=\int_a^b y^2(x)dx\cdot\int_a^b z^2(x)dx.$

13. Бесконечная ортонормированная система в $h[a,b]$

$e_n: \|e_j\|=1 \quad (e_i,e_j)=\delta_{ij}$

$e_n=\frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n x\pi}{\ell}$

$\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n x\pi}{\ell}\right)^2dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi n x}{\ell}\right)dx=1.$

14. Ограниченная некомпактная последовательность в $h[a,b]$

Пример:

1. $h[0,2\pi]$ $\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$

2. $e_n: \|e_j\|=1 \quad (e_i e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

$\|e_i-e_j\|^2=(e_i-e_j,e_i-e_j)=(e_ie_i)+(e_je_j)+2(e_ie_j)=2\Rightarrow$

$\|e_i-e_j\|=\sqrt{2}\Rightarrow$ никакая послед. не сходится.

15. Оператор, обратный к линейному, линейный

Пусть A - взаимно однозначный. Тогда $\exists A^{-1}$:

$Ax_1=y_1,\ Ax_2=y_2.$

$A(a_1x_1+a_2x_2)=a_1Ax_1+a_2Ax_2=a_1y_1+a_2y_2.$

$a_1x_1+a_2x_2=A^{-1}(a_1y_1+a_2y_2)$

$A^{-1}y_1=x_1,\ A^{-1}y_2=x_2\Rightarrow a_1A^{-1}y_1+a_2A^{-1}y_2=a_1x_1+a_2x_2\Rightarrow$

$A^{-1}(a_1y_1+a_2y_2)=a_1A^{-1}y_1+a_2A^{-1}y_2$

16. Оператор Фредгольма $h[a,b]\to h[a,b]$ - линейный

$Ay=\int_a^b k(x,s)y(s)ds.$

Если $k(x,s)$ непрерывно по совокупности аргументов, то $\int_a^b k(x,s)y(s)ds$ - непрерывна как собственный интеграл от непр. ф-ции. $\Rightarrow h[a,b]\to h[a,b]$

$A(a_1y_1+a_2y_2)=\int_a^b k(x,s)(a_1y_1+a_2y_2)ds=$

$a_1\int_a^b k(x,s)y_1ds+a_2\int_a^b k(x,s)y_2ds=a_1Ay_1+a_2Ay_2$

17. Оператор Вольтерра $h[a,b]\to h[a,b]$ - линейный

$By=\int_a^x k(x,s)y(s)ds$

Если $k(x,s)$ непрерывно по совокуп. аргументов, то By непрерывна

$B(a_1y_1+a_2y_2)=a_1By_1+a_2By_2.$

18. Линейный оператор в N непрерывен $\Leftrightarrow$ непр. в нуле

Если $y_n \to y_0$, то $y_n - y_0 \to 0$

$Ay_n \to Ay_0 \Leftrightarrow A(y_n - y_0) \to 0$

// Если $y_0 = 0$, то при $y_n \to 0$ $Ay_n \to 0$ //

19. Линейный оператор в N непрерывен $\Leftrightarrow$ ограничен

1. $y_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \Rightarrow \|Ay_n\| \le \underset{<\infty}{\|A\|}\|y_n\| \to 0$ – непрерывен

2. Пусть неограничен. тогда $\exists y_n : \|y_n\| = 1$

$\|Ay_n\| \ge n$ при $n \to \infty$

$\|A\frac{y_n}{n}\| \ge 1$, $\frac{y_n}{n} \to 0$ – противоречит непрерывности.

20. Эквивалентность определений непрерывности.

$A: N_1 \to N_2$ непр. в $y_0 \in D(A)$ если $\forall y_n \in D(A)$: $y_n \to y_0$ $Ay_n \to Ay_0$.

$A: N_1 \to N_2$ непр. в $y_0 \in D(A)$ если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall y \in D(A)$ $\|y - y_0\| \le \delta$: $\|Ay - Ay_0\| \le \varepsilon$

Коши-Гейне: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall y \in D(A)$ $\|y - y_0\| \le \delta$ $\|Ay - Ay_0\| \le \varepsilon$. Возьмем $y \to y_0$. $\exists N\ \forall n > N: \|y_n - y\| < \delta \Rightarrow \forall n > N: \|Ay_n - Ay_0\| \le \varepsilon \Rightarrow Ay_n \to Ay_0$

Г-К: Пусть не так. т.е. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y_n: \|y_n - y_0\| < \delta_n: \|Ay_n - Ay_0\| > \varepsilon$. В силу произв. δ выберем $\{\delta_n\} \to 0$ и $\|y_n - y_0\| < \delta_n$: $y_n \to y_0$, а $Ay_n \not\to Ay_0$ – противоречие.

21. Оператор дифференцирования ограничен

$C^1[a,b] \to C[a,b]$

$\exists \sup\limits_{\|y\|_{N_1} = 1} \|Ay\|_{N_2} < +\infty$

$z(x) = Dy = \frac{dy}{dx}$; $\|y\| = \max\limits_{[a,b]} |y(x)| + \max\limits_{[a,b]} |y'(x)| = 1$

$\|Dy\|_C = \max\limits_{[a,b]} |y'(x)| \le 1$

22. Оператор дифференцирования $C[a,b] \to C[a,b]$ неограничен

$z = \frac{dy}{dx}$

$\|y\| = \max\limits_{[a,b]} |y| = 1$.

$\sup \|z\|_C = \max\limits_{[a,b]} |y'|$. Пусть $y_n = \cos nx$.

$\|y_n\| = 1$ $\|Ay_n\| = \|n \sin nx\| = n \to \infty$ – неогр.

23. Если A – линейный огранич. оператор $A: N_1 \to N_2$, $A \ne 0$, то $\|A\| > 0$

$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup\limits_{\|y\|_{N_1} = 1} \|Ay\|_{N_2}$

$\sup \|Ay\|_{N_2} = \sup \|z\|_{N_2} \ge 0$ в силу положит. определенности нормы.

$\sup \|z\|_{N_2} \ne 0$ если $z \ne 0$, т.е. $A \ne 0$. $\Rightarrow \|A\| > 0$.

24. $\forall y \in N_1$ $\|Ay\| \le \|A\|\|y\|$, где $A: N_1 \to N_2$ ЛО

1. $y = 0$ $\|Ay\|_{N_2} = \|A0\| = 0 = \|A\| \cdot 0 = \|A\| \cdot \|y\|$ sup

2. $y \ne 0$ $z = \frac{y}{\|y\|}$ – единичный: $\|Az\| = \|A\frac{y}{\|y\|}\| \le \|A\|$ $\Rightarrow \|Ay\| \le \|A\|\|y\|$

25. $B: N_2 \to N_3$ – непр, $A: N_1 \to N_2$ – ВН, то $BA: N_1 \to N_3$ – ВН

1. $A: N_1 - N_2$ – ВН $\Rightarrow \forall z_n \in N_1$ – огр. $\exists Az_n \in N_2$ – компактна

2. т.е. y_n – коши. $\Rightarrow$ можно выделить $y_{nk} \to y_0 \in N_2$. Из $By_n \in N_3$ выделим By_{nk}. Из y_{nk} можно выделить $y_{nm} \to y_0$, в силу непрерывности $By_{nm} \to By_0 \Rightarrow By_n$ – компактна $\Rightarrow$ BA переводит огр. в компактную $\Rightarrow$ ВН

26. Пусть $A: N_1 \to N_2$. $B: N_2 \to N_3$. $\|BA\| \le \|A\| \|B\|$

$| \; y \in N_3 \quad \|y\| = 1$

$\|BAy\| \le \|B\| \|Ay\| \le \|B\| \|A\| \|y\| = \|B\| \|A\|$

$\sup \|BAy\| = \|BA\| \le \|B\| \|A\|$ в силу произвольности y

27. Если взаимно однозн. оператор A ВН, то обратный – не огранич.

Пусть A^{-1} ограничен. т.к. A – ВН, A^{-1} огр, то

$A^{-1}A$ – ВН, что неверно, т.к. $A^{-1}A = I$ не является вполне непрерывным $\Rightarrow A^{-1}$ – ограничен

28. Единичный оператор не является вполне непр.

Пусть e_n – ОНС : $\|e_i\| = 1$ $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – ограниченная

$\|e_i - e_j\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = 2, \; i \ne j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ – не компактна.

$I e_n = e_n$ – не компактна $\Rightarrow I$ не явл. ВН.

29. Оператор Фредгольма $C[a,b] \to C[a,b]$ ограничен

Пусть $z(x) = Ay = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$, где $y(s)$ – пр. непр. на $[a,b]$

$\|y\|_C = \max_{[a,b]} |y(x)| = 1$

ядро $K(x,s)$ непрерывно $\Rightarrow$ ограничено. $K_0 = \max_{[a,b] \times [a,b]} |K(x,s)|$

$\forall x \in [a,b] \quad |z(x)| = \left| \int_a^b K(x,s) y(s) ds \right| \le \int_a^b |K(x,s)| \cdot |y(s)| ds \le \|y\| \cdot K_0 \cdot (b-a)$.

$\|Ay\| = \|z\| = \underbrace{\|y\|}_{1} K_0 (b-a) = K_0 (b-a)$

30. Оператор Фредгольма $L[a,b] \to L[a,b]$ ограничен

Пусть $z(x) = Ay = \int_a^b K(x,s) y(s) ds \qquad \|y\| = \sqrt{\int_a^b y^2 dx} = 1$.

$|z(x)|^2 = |Ay|^2 = \left| \int_a^b K(x,s) y(s) ds \right|^2$

$\forall x \in [a,b]$ КБ: $\left| \int_a^b K(x,s) y(s) ds \right|^2 \le \int_a^b K^2(x,s) ds \cdot \int_a^b y^2(s) ds = \int_a^b K^2(x,s) ds$.

$\|Ay\|^2 \le \int_a^b \int_a^b K^2(x,s) dx ds < +\infty$ т.к. не зависит от y

31. Интегральный оператор Фредгольма $L[a,b] \to C[a,b]$ вполне непрерывный

Рассмотрим послед. непр. $y_n \in L[a,b]: \|y_n\| \le M$ и

$z_n = Ay_n = \int_a^b K(x,s) y_n(s) ds$. По теореме Арцела:

1. $K_0 = \sup \{ |K(x,s)| : x, s \in [a,b] \}$ $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов на $[a,b] \times [a,b]$, $\Rightarrow K_0 < +\infty$.

$|z_n| = \left| \int_a^b K(x,s) y_n(s) ds \right| \le \sqrt{\int_a^b K^2(x,s) ds \int_a^b y_n^2 ds} \le M K_0 \sqrt{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$ – равномерно ограничена.

2. $|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_a^b [K(x_1,s) - K(x_2,s)] y_n(s) ds \right| \le \sqrt{\int_a^b (K(x_1,s) - K(x_2,s))^2 ds \int_a^b y_n^2(s) ds}$

фиксируем $\varepsilon > 0$. $K(x,s)$ непр. по совокупности в $[a,b][a,b] \Rightarrow$ равномерно непрерывна. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall s \in [a,b]$

$|K(x_1,s) - K(x_2,s)| \le \frac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}$, если $|x_1 - x_2| \le \delta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |z_n(x_1) - z_n(x_2)| \le \varepsilon$

$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| \le \delta \; \forall n$ – равностепенно непрерывна

32. $L[a,b] \to L[a,b]$

аналогично. Из сходимости равномерной следует сходимость в средн

33. Оператор Фредгольма $h[a,b] \to h[a,b]$ - самосопряженный

$Ay = \int_a^b k(x,s)\, y(s)\, ds$. тогда $\forall y_1$ и $y_2 \in h[a,b]$

$(Ay_1, y_2) = \int_a^b \left(\int_a^b k(x,s) y_1(s) ds \right) y_2(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_a^b k(x,s) y_2(x) dx \right) y_1(s)\, ds = (y_1, A^* y_2)$

$(y_1, A^* y_2) = \int_a^b \left(\int_a^b k^*(s,x) y_2(x) dx \right) y_1(s)\, ds \Rightarrow$ если $k(x,s) = k(s,x)$ - ядро симметрическое, оператор самосопряженный

$k^*(s,x) = k(x,s)$

35. Если оператор действует в h^c, то может иметь только вещественные СЗ

$h^c[a,b]$ состоит из комплекснозначных функций вещественной переменной.

$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1^*(x)\, y_2(x)\, dx$.

Пусть λ - СЗ оператора A, $y(x) \neq 0$ - СФ. тогда

$\lambda y(x) = \int_a^b k(x,s) y(s) ds$, $\quad \lambda^* y^*(x) = \int_a^b k(x,s)\, y^*(s)\, ds$

$\lambda \int_a^b |y|^2 dx = \int_a^b y^*(x) \left(\int_a^b k(x,s) y(s) ds \right) dx$

$\lambda^* \int_a^b |y|^2 dx = \int_a^b y(x) \left(\int_a^b k(x,s)\, y^*(s) ds \right) dx$. $\Rightarrow (\lambda - \lambda^*) \underbrace{\int_a^b |y(x)|^2 dx}_{\neq 0} = 0$

$\lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda$ - вещественное.

36. Самосопряженный оператор в $h[a,b]$, не имеющий СЗ

Оператор умножения на независимую переменную в $h[0,1]$

$Ay = x y(x)$

а) $(Ay, z) = \int_a^b x y(x) \cdot z(x) dx = \int_a^b y(x)\, x\, z(x) dx = (y, Az)$ - самосопряж.

б) $Ay = xy(x) = \lambda y(x) \Rightarrow (x - \lambda) \cdot y(x) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$.

$\forall \lambda\ \exists$ только тривиальное решение $\Rightarrow$ не существует СЗ

37. ВН оператор, не имеющий СЗ

Оператор Вольтерра $A(y) = \int_0^x y(s)\, ds$

1. $\|y_n\| = \sqrt{\int_0^1 y_n^2(x) dx} \le M \quad z_n(x) = Ay_n = \int_0^x y_n(s) ds$

$z_n(x) = \left| \int_0^x y_n(s) ds \right| = \left| \int_0^x 1 \cdot y_n(s) ds \right| \le \sqrt{\underbrace{\int_0^1 ds}_{\le 1} \underbrace{\int_0^1 y_n^2 ds}_{\le M^2}} \le M \quad \forall x \in [0,1]\ \forall n$.

$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_0^{x_1} y_n(s) ds - \int_0^{x_2} y_n(s) ds \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_n(s) ds \right| \le \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} ds \int_{x_1}^{x_2} y_n^2 ds} \le \sqrt{|x_2 - x_1| \cdot M^2}$

фикс ε и выберем $0 < \delta = \varepsilon^2/M \Rightarrow \forall |x_1 - x_2| \le \delta \quad |z_n(x_1) - z_n(x_2)| \le \varepsilon$ - равн. непрерывн.

$\Rightarrow$ ВН $h[0,1] \to C[0,1] \Rightarrow$ ВН $h[0,1] \to C[0,1]$

2. $Ay = \int_0^x y(s) ds = \lambda y(x) \qquad y(x) = ce^{x/\lambda}$, $y(0) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$. нет СЗ

$Ay = \int_0^\pi \sin x \cos s\; y(s)\, ds$ тоже ВН, не имеющий СЗ

38. Собственные векторы, отвечающие разным λ, ортогональны

Пусть $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$, $A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$0 = (A\varphi_1, \varphi_2) - (A\varphi_2, \varphi_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

39. СВ, отвечающие разным $\neq \lambda$, независимы

пусть $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$, $A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. и $\varphi_2 = a\varphi_1$

$0 = (A\varphi_1, \varphi_2) - (A\varphi_2, \varphi_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\, a (\varphi_2, \varphi_1) = 0 \Rightarrow$

$\varphi_1 = 0$, противоречит определению СВ

40. [illegible] оператора Фредгольма, нулевое значение которого имеет беск. кратность

любой с вырожденным ядром

$k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \sin 2ns}{(2n)^2}$ (сф $\sin s, \sin 3s, \dots$)

41. — « — конечную кратность

$k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n^2}$ $\lambda = 0$ rank $= 1$ сф $\sin s$.

42. Оператор Фредгольма с ядром $k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n^2}$ невырожд.
Ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, $k(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных.
сф - $\sin ns$, $\lambda_n = n^2$ $\sin ns$ - замкнутая сист. сист $\Rightarrow$
$k(x,s)$ замкнуто - невырожденный.

43. Нуль - простое СЗ оператора с ядром $k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n^2}$
$\lambda_0 = 0$, соответствует единственная сф $\sin s \Rightarrow$ кратность 1.

44. Нуль - бесконечнократное СЗ $k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \sin 2ns}{(2n)^2}$
$\lambda = 0$ сф $\sin s, \sin 3s \dots \to \infty$ Оператор вырожденный

45. Вырожденный оператор с невырожд. ядром

$k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \sin 2ns}{(2n)^2}$ $k(x,s) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n^2}$

- нуль-пространство нетривиально, ядро невырожденное

46. Интегральный оператор Фредгольма, ядро которого имеет $r = 5$.

$k(x,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n^2}$. тогда λ_0 соответствуют

сф $\sin s, \sin 2s, \sin 3s, \sin 4s, \sin 5s$ - кратность 5

47. Сжимающий оператор непрерывный

Оператор A в банаховом пространстве B - сжимающий, если $\exists q: 0 \le q < 1: \forall y_1, y_2 \in B: \|Ay_1 - Ay_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$
Возьмем любое $\varepsilon > 0$, пусть $0 < \delta \le \varepsilon$. Тогда $\forall y, y_0: \|y - y_0\| \le \delta$
$\|Ay - Ay_0\| \le q\|y - y_0\| \le \|y - y_0\| \le \delta \le \varepsilon$ - оператор непрерывный

48 Оператор Фредгольма с малым λ - сжимающий в $C[a,b]$

возьмем $y_1, y_2 \in C[a,b]$: $z_1 = \lambda A y_1 + f = D y_1$, $z_2 = \lambda A y_2 + f = D y_2$

$|z_1(x) - z_2(x)| = |\lambda \int_a^b k(x,s)(y_1(s) - y_2(s)) ds| \le |\lambda| \cdot k_0 (b-a) \|y_1 - y_2\|$

$\|z_1 - z_2\| = \|Dy_1 - Dy_2\| \le |\lambda| k_0 (b-a) \|y_1 - y_2\|$ Если λ малое:
$|\lambda| < \frac{1}{k_0(b-a)}$, то оператор сжимающий.

49. D^n - сжимающий для оператора Вольтерра

$D = \lambda A y + f$. возьмем две непр. ф-ции y_1 и y_2.

$|z_1(x) - z_2(x)| = |Dy_1 - Dy_2| = |\lambda| |Ay_1 - Ay_2| = |\lambda| |\int_a^x k(x,s)(y_1 - y_2) ds| \le$
$\le |\lambda| k_0 (x-a) \|y_1 - y_2\| \le |\lambda| k_0 (b-a) \|y_1 - y_2\|$

$|D^2 y_1 - D^2 y_2| \le |\lambda^2 \int_a^x k(x,s)(Ay_1 - Ay_2) ds| \le |\lambda|^2 \frac{k_0^2}{2!} (x-a)^2 \|y_1 - y_2\| \le |\lambda|^2 \frac{k_0^2}{2!} (b-a)^2 \|y_1 - y_2\|$

$\|D^n y_1 - D^n y_2\| \le |\lambda|^n \frac{k_0^n}{n!} (b-a)^n \|y_1 - y_2\| = q \|y_1 - y_2\|$. $\forall \lambda$ $q_n \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$

$k = M(n)$: $\lambda^n \frac{M^n}{n!} (b-a)^n < 1 \Rightarrow D^k$ - сжимающий

50. Неподвижные точки D и D^k совпадают => D имеет единств. неподв. точку

y_0 y_1 y_{k-1} y_k y_{k+1} y_{2k-1} y_{2k} ...

Dy_0 $D^{k-1}y_0$ $D^k y_0$ $D^{k+1}y_0$ $D^{2k-1}y_0$ $D^{2k}y_0$.

Рассмотрим подпоследовательности:

$y_0, y_k = D^k y_0, y_{2k} = D^k(D^k y_0), \to y$ D^k - сжимающий

$y_1, y_{k+1} = D^k y_1, y_{2k+1} = D^k(D^k y_1) \to y$

$y_{k-1}, y_{2k-1} = D^k y_{k-1} \ldots \to y$

=> вся последовательность сходится к y =>

y - неподв. точка D^k

пусть $y = Dy$ => $D^{k-1}y = D^k y$ => $y = D^k y$ => неподв. точка общая и единственная.

пусть $y = D^k y$, $Dy = D(D^k)^n y = D^{kn}(Dy) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

51 Оператор Фредгольма не имеет ХЧ на $[0; \frac{1}{M(b-a)})$

если $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ то оператор сжимающий

$\|z_1 - z_2\| \le |\lambda| M(b-a) \|y_1 - y_2\|$ => имеет единственную неподвижную точку - решение - для любой непр. неоднородности значит, однородное имеет только тривиальное решение => нет ХЧ.

52 Оператор не имеет ХЧ в $h[a,b]$

$\|z_1 - z_2\|^2 = \lambda^2 \int_a^b dx \left(\int_a^b K(\ldots)(y_1 - y_2) ds\right)^2 dx \overset{КБ}{\le} \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K^2(x,s) ds \int_a^b (y_1 - y_2)^2 ds\right) dx =$

$= \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 K_0^2 (b-a)^2$ => сжимающий, если $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

тогда по теореме о неподв. точке имеет единств решение для любой неоднородности значит однородное имеет только тривиальное решение (альтернатива Фредгольма) => нет ХЧ.

53. $|\lambda_{min}| \ge \frac{1}{M(b-a)}$ в $C[a,b]$

по 51: на $[0; \frac{1}{M(b-a)})$ ХЧ нет => $|\lambda_{min}| \ge \frac{1}{M(b-a)}$

54. $|\lambda_{min}| \ge \frac{1}{M(b-a)}$ в $h[a,b]$

по 52: на $[0; \frac{1}{M(b-a)})$ ХЧ нет => $|\lambda_{min}| \ge \frac{1}{M(b-a)}$

55. Оператор Вольтерра в $C[a,b]$ не имеет ХЧ.

$\forall \lambda \exists k : D^k$ - сжимающий:

$|z_1 - z_2| = |Dy_1 - Dy_2| = |\lambda| |Ay_1 - Ay_2| = |\lambda| \left|\int_a^x K(y_1 - y_2) ds\right| \le |\lambda| M(x-a) \|y_1 - y_2\| \le$

$\le |\lambda| M(b-a) \|y_1 - y_2\|$

$|D^2 y_1 - D^2 y_2| \le |\lambda|^2 \left|\int_a^x K(x,s)(Ay_1 - Ay_2) ds\right| \le |\lambda|^2 \frac{M^2}{2!}(x-a)^2 \|y_1 - y_2\| \le |\lambda|^2 \frac{M^2}{2!}(b-a)^2 \|y_1 - y_2\|$

$\|D^n y_1 - D^n y_2\| \le |\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n \|y_1 - y_2\|$ => $q = |\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n \to 0$ $n \to \infty$ =>

существует единств. решение $\forall f$ => $\forall \lambda$ однородное ур-ие имеет только тривиальные решения => ХЧ нет

56. Оператор Вольтерра в $h[a,b]$ не имеет ХЧ.

$\|z_1 - z_2\|^2 = \int_a^b \left(\int_a^x K(x,s)(y_1 - y_2) ds\right)^2 dx \le \int_a^b \left(\int_a^x K(x,s)^2 ds \int_a^x (y_1 - y_2)^2 ds\right) dx \le \|y_1 - y_2\|^2 K_0^2 (x-a)^2$

$\|D^n y_1 - D^n y_2\| \le |\lambda|^n \frac{K_0^n}{n!}(b-a)^n \|y_1 - y_2\|$ => D^n - сжимающий, единств решение $\forall f$ => однородное имеет только трив. => ХЧ нет

57. Разрешимость решения СЛАУ и задачи ур-я Фредгольма.
Уравнение Фредгольма 2-го рода
$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x),\ x, s \in [a, b],\ где\ K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$$
Пусть $c_j = \int_a^b b_j(s) y(s) ds$
$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_j(x) + f(x) \quad \Big| \cdot b_i(x) \int_a^b$$
$$c_i = \int_a^b y(x) b_i(x) dx = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x) dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x) b_i(x) dx}_{f_i}$$
Получаем СЛАУ: $c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i,\ i = 1, \dots n$
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \vdots \\ -\lambda k_{12} & 1-\lambda k_{22} & \vdots \\ \dots & \dots & \end{vmatrix}$$ Веществ. корни $D(\lambda)$ - ХЧ уравнения.

59 Резольвента неоднородного уравнения, если λ - не явл. ХЧ
Если λ не явл ХЧ, то ур-е Фредгольма имеет единственное решение $\forall f(x)$ непр.
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \vdots \\ -\lambda k_{12} & 1-\lambda k_{22} & \vdots \\ \dots & \dots & \end{vmatrix}$$ По ф-лам Крамера:
$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1} D_{ki}(\lambda) f_k$$
$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s) ds$$
$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds,\ где\ R(x,s,\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$$
$$R(x,s,\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$$

58. Уравнение для отыскания ХЧ
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$ Вещественные корни $D(\lambda)$ - ХЧ уравнения Фредгольма с вырожд. ядром.

60 Оператор Ш-Л - симметрический, если $D(L) = \{y \in C^2_{[a,b]}\ \text{вагупе}\ y(a) = y(b) = 0$.
$$(Ly, z) = \int_a^b [(p(x) y'(x)]' z(x) dx = [py']z\Big|_a^b - \int_a^b p(x) y'(x) z'(x) dx =$$
$$= -\int_a^b p(x) y'(x) z'(x) dx$$
$$(y, Lz) = \int_a^b y(x) [(p(x) z'(x)]' dx = y[pz']\Big|_a^b - \int_a^b y'(x) p(x) z'(x) dx =$$
$$= -\int_a^b p(x) y'(x) z'(x) dx = (Ly, z)$$

61 $\lambda_{min} \geq \inf\limits_{[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0$
$$Ly_n + \lambda_n \rho y_n = 0 \Rightarrow \int_a^b y_n (Ly_n + \lambda_n \rho y_n) dx = \int_a^b y_n \frac{d}{dx}\left(p \frac{dy_n}{dx}\right) dp - \int_a^b q y_n^2 dx +$$
$$+ \lambda_n \int_a^b \rho y_n^2 dx = -\int_a^b p \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b q y_n^2 dx + \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = \int_a^b \left[q y_n^2 + p \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2\right] dx.$$
$$\lambda_1 = \int_a^b \left[q y_1^2 + p \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2\right] dx \geq \int_a^b \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x) y_1^2 dx \geq \frac{q(\bar{x})}{\rho(\bar{x})} \int_a^b \rho(x) y_1^2 dx = \frac{q(\bar{x})}{\rho(\bar{x})} \geq \inf\limits_{[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0$$

62. Краевая задача, не имеющая решения

$V[y]=\int_0^{\pi} y'^2 dx$. Ур-ие Эйлера $2y=0$

$y(0)=0 \quad y(\pi)=1$ нет решение.

63. Краевая задача, имеющая единств. решение

$V[y]=\int_0^{\pi} y'^2 dx$. Ур-ие Эйлера $2y=0$

$y(0)=0, \ y(\pi)=0$ Решение $y\equiv 0$

64. Уравнение Эйлера для функционала $V[y]=\int_a^b F(y')dx$

$V[y]=\int F(y')dx$.

$F_{y'y'}y''=0$

получаем два уравнения: $y''=0 \quad (y=c_1x+c_2)$

$F_{y'y'}(y')=0$ } прямые

если k_i - корни, то $y=k_ix+\tilde{c}_i$

65. Первый интеграл для $V[y]=\int_a^b F(x,y')dx$

Ур-ие Эйлера: $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$ или $\underline{F_{y'}(x,y')=C}$

66. Первый интеграл для $V[y]=\int_a^b F(y,y')dx$

Эйлер: $F_y-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0$

$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$

$\underline{F-y'F_{y'}=C}$.

67. Решить задачу о брахистохроне

-кривая, по которой мат. точка в поле силы тяжести скатывается за наименьшее время из $(0,0)$ в (x_1,y_1)

$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy} \qquad ds=\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad y$ - траектория, s - путь.

$T[y]=\frac{1}{2g}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx$.

I интеграл: $F-y'F_{y'}=C \Rightarrow \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}=C$.

$\frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}=C; \quad y(1+(y')^2)=C_1 \quad , \ y'=ctg\,t.$

$y=\frac{C_1}{1+ctg^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t))$

$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t\,dt}{ctg\,t}=2C_1\sin^2 t\,dt=C_1(1-\cos(2t))\,dt$

$x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)$

$y(0)=0 \Rightarrow C_2=0. \quad 2t=t_1\geq 0 \ , \frac{C_1}{2}=\tilde{C}_1 \qquad \left.\begin{array}{l} x=\tilde{C}_1(t_1-\sin t_1) \\ y=\tilde{C}_1(1-\cos t_1)\end{array}\right\}$ циклоида

68 Уравнение движение мат. точки в потенц. поле

пусть $U=U(x_1,y_1,z_1\dots x_n,y_n,z_n)$

$F_i=\left(-\frac{\partial U}{\partial x_i},-\frac{\partial U}{\partial y_i},-\frac{\partial U}{\partial z_i}\right)$

$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}((x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2)$

Функционал действие $\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$. $L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}((x_i')^2+(y_i')^2+z_i')^2)-U(x_1,y_1,\dots)$

по принципу наименьшего действие, ур-ие Эйлер.

$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_i'}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_i'}=0\\ \dots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m_ix_i''=-\frac{\partial U}{\partial x_i}\\ m_iy_i''=-\frac{\partial U}{\partial y_i}\\ m_iz_i''=-\frac{\partial U}{\partial z_i}\end{cases}$ I инт - $T+U$ - const

69. Отыскание кривой заданной длины, площадь под которой максимальна

$$V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx,\quad y(a)=A,\ y(b)=B$$
$$I[y]=\int_a^b G(x,y,y')\,dx=l$$

$$V[y]=\int_a^b y\,dx$$

$$G=\sqrt{1+(y')^2},\quad H=y+\lambda\sqrt{1+(y')^2},\ \lambda=const.$$

первый интеграл ур-ия Эйлера: $H-y'H_{y'}=c_1$.

$$y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}-y'\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=c_1.$$

$$y-c_1=-\lambda\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}};\quad y'=tg\,t$$

$$y-c_1=-\lambda\cos t$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\lambda\sin t}{tg\,t}dt=\lambda\cos t\,dt\Rightarrow x-c_2=\lambda\sin t$$

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2.$$

$$\begin{cases}(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2 \text{ — окружность}\\ y(a)=A\\ y(b)=B\\ \int_a^b G\,dx=l.\end{cases}$$

70. Трансверсальность → ортогональность

$$V[y]=\int_0^{B[y]}A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\quad A(x,y)\neq 0$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_t=0.$$

$$A(x_1,y(x_1))\sqrt{1+(y'(x_1))^2}-(y'(x_1)-\varphi'(x_1))\frac{A(x_1,y(x_1))\,y'(x_1)}{\sqrt{1+(y'(x_1))^2}}=0.$$

$$1+\varphi'(x_1)\,y'(x_1)=0$$

$$y'(x_1)=-\frac{1}{\varphi'(x_1)}\text{ — усл. ортогональности}$$

71. Найти экстремали функционала

$$V[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\,dx,\quad y(0)=0\quad y_1=x_1-5$$

Первый интеграл ур-ия Эйлера: $F-y'F_{y'}=c$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}=c;\quad 1=c\,y\sqrt{1+(y')^2}\qquad y'=tg\,t.$$

$$y=\tilde{c}_1\cos t.$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=-\frac{\tilde{c}_1\sin t\,dt}{tg\,t}=-\tilde{c}_1\cos t\Rightarrow x=-\tilde{c}_1\sin t+\tilde{c}_2$$

получаем ур-ие окружности $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$

$y(0)=0\Rightarrow (x-c)^2+y^2=c^2$

условие трансверсальности → усл. ортогональности

Окружность ортогональна прямой ⇒ диаметр ∈ прямой

$\Rightarrow c=5$, т.е. $(x-5)^2+y^2=25$

72. Какой экстремум достигается?

$V[y]=\int_0^a(y')^3dx.\quad y(0)=0,\ y(a)=b,\ a>0,\ b>0.$

Ур-ие Эйлера: $y''=0\quad y=c_1x+c_2\Rightarrow y=\bar{y}(x)=\frac{b}{a}x.$

центр. поле — $y=cx$. или собств. $y=\frac{b}{a}x+c$.

$E=(y')^3-p^3-(y'-p)3p^2=(y'-p)^2(y'+2p)=0$ при $y'=p,\ y'=-2p$

на $\bar{y}(x)=\frac{b}{a}x,\ p=\frac{b}{a}>0\Rightarrow E\geq 0$ в слабой окрестности — слабый минимум ф-ла.

74. Исследовать на разрешимость: $\int_a^x y(s)ds = f(x)$, $x, s \in [a, b]$

Найдем производную $\left(\int_a^x y(s)ds\right)' = y(x)$

Если $f'(x)$ существует и непрерывна, то $f'(x) = y(x)$ — решение существует. Если $f'(x)$ не существует — решений нет

и $f(a) = 0$!

74. $\|y\|^2 + \|y'\|^2 \le c^2$, $c > 0$ равн. огр и равност. непр.

$\|y\| \le c$, $\|y'\| \le c$

$$|y(x_2) - y(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} y' dx\right| \le \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx}\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (y'(x))^2 dx} \le \sqrt{|x_2 - x_1|}\int_a^b (y'(x))^2 dx \le c\sqrt{x_2 - x_1}$$

равност. непрерывно.

$$\int_a^b y^2(x)dx \le c^2 \Rightarrow y^2(\xi)\int_a^b dx \le c^2;\ \xi \in [a, b]$$

$$|y(\xi)| \le \frac{c}{\sqrt{b-a}}$$

возьмем $x \in [a, b]$. Тогда $|y(x)| = |y(\xi) + y(x) - y(\xi)| \le$

$$\le |y(\xi)| + |y(x) - y(\xi)| \le \frac{c}{\sqrt{b-a}} + c\sqrt{|x - \xi|} \le \frac{c}{\sqrt{b-a}} + c\sqrt{b-a} = \tilde{c}$$

равном. ограничено

75. $\|y_n\|^2 + \|y_n'\|^2 \le c^2$ — компактна в $C[a, b]$

74 + теорема Арцела $\Rightarrow$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\Rightarrow$ компактна.