студенты-
физики

Задачи к зачёту по атомной физике Часть №1

Семинарист Андреев П.А.

23 декабря 2014 г.

Нестеров Константин

группа №327

Источники

Вопросы семинариста

Задачи к зачёту по атомной физике. Часть №1

Нестеров Константин, группа №327

23 декабря 2014 г.

Задача №1 (2.40)

Используя представление о световых квантах, доказать, что давление света на освещённое тело определяется соотношением $p = \rho(1+R)$, совпадающим с выражением для давления света в классической электродинамике (ρ – плотность энергии излучения, R – коэффициент отражения).

Решение. На тело площадью S падает поток фотонов с энергией $E = Nh\nu$ и общим импульсом $p = \frac{E}{c} = N\frac{h\nu}{c}$. RN - число отражённых фотонов, $(1-R)N$ - число поглощённых. При поглощении телом фотона, фотон передаёт импульс $p_{\text{погл}} = \frac{h\nu}{c}$, а при отражении $p_{\text{отр}} = \frac{h\nu}{c} - (-\frac{h\nu}{c}) = \frac{2h\nu}{c}$. N фотонов за единицу времени передают телу импульс

$$p = (1-R)N\frac{h\nu}{c} + NR\frac{2h\nu}{c}$$

Импульс за единицу времени равен силе давления

$$P = \frac{F}{S} = \frac{p}{S} = \frac{(1-R)N(h\nu/c) + NR(2h\nu/c))}{S} = \frac{(1+R)N(h\nu/c)}{S} =$$
$$= \frac{h\nu N}{S}\frac{(1+R))}{c} = \frac{I}{c}(1+R) = \rho(1+R)$$

■

Задача №2 (4.2)

По Томпсону атом водорода представляет собой однородно заряженный шар радиусом $R \approx 10^{-8}$см с общим зарядом $e = \pm 4.8 * 10^{-10}$ед. заряда СГСЭ, внутри которого находится один электрон (в центре шара, если атом не возбуждён). Найти частоту излучения такого атома.

Решение. По теореме Гаусса для шара

$$\Phi_E = 4\pi Q; \qquad E4\pi r^2 = 4\pi\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0, \quad \text{где } e = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0; \quad \vec{E} = \frac{e}{R^3}\vec{r}$$

Уравнение движения электрона $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{R^3}\vec{r}$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mR^2}} = 5.03 \cdot 10^{16}\text{с}^{-1}$$

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1 \cdot 10^{16}\text{с}^{-1}$$

Ответ. $\nu = 10^{16}\text{с}^{-1}$

■

Задача №3 (5.2)

Найти динамические параметры всех круговых орбит электрона в атоме водорода: радиусы, скорости энергии, частоты и периоды обращения, релятивистский параметр v/c. Массу ядра считать бесконечно большой.

Решение. Уравнение движения для электрона

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \tag{3.1}$$

Правило квантования момента импульса

$$L = [r \times p] = mvr = n\hbar \tag{3.2}$$

Из (3.2) $v = \frac{n\hbar}{rm}$. Подставляя в (3.1)

$$\frac{m}{r}\frac{n^2\hbar^2}{r^2m^2} = \frac{Ze^2}{r^2}$$

$$\frac{n^2\hbar^2}{rm} = Ze^2 \Rightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2}{Ze^2m}$$

$$v_n = \frac{n\hbar Ze^2m}{\hbar^2n^2m} = \frac{Ze^2}{\hbar n}$$

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{me^4Z^2}{2\hbar^2n^2} - \frac{me^4Z^2}{\hbar^2n^2} = -R_y\frac{Z^2}{n^2}$$

$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} = \frac{Z^2e^2me^2}{n\hbar n^2\hbar^2} = \frac{me^4Z^2}{\hbar^3n^3}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi\hbar^3n^3}{me^4Z^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{Ze^2}{n\hbar c} = \alpha\frac{Z}{n}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \text{ — постоянная тонкой структуры}$$

■

Задача №4 (6.6)

Определить собственные значения и нормированные собственные функции оператора кинетической энергии $\hat{T}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$.

Решение.

$$\hat{T}_x\psi = T_x\psi; \qquad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}; \qquad \frac{\hat{p}_x^2}{2m}\psi = T_x\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = T_x\psi$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mT_x}{\hbar^2}$$

$$\psi = A\sin kx + B\cos kx = \begin{cases}\sin kx\\ \cos kx\end{cases} = C\exp(\pm ikx)$$

$$C^2\int_{+\infty}^{-\infty} e^{ikx}e^{-ikx}\,dx = \delta(T_x - T'_x)$$

$$C^2\hbar\int_{+\infty}^{-\infty}\exp(-i(T_x - T'_x)\frac{x}{\hbar})\,\frac{dx}{\hbar} = C^2\hbar 2\pi\delta(T_x - T'_x) = \delta(T_x - T'_x) \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Ответ. $\psi_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(\pm\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mT_x}x); \qquad T_x = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$ ■

Задача №5 (6.16)

Волновая функция состояния некоторой квантовой системы, как функция полярного угла, имеет виде (B - нормировочная константа):

$$\psi(\phi) = B\cos^4\phi.$$

Какие значения z-проекции момента количества движения L_z могут быть измерены в этом состоянии? Каковы вероятности их измерения и среднее значение L_z?

Решение.

$$\psi = B(1 + \frac{1}{2}\cos 2\phi)^2 = \frac{B}{4}(1 + \cos 2\phi + \frac{1+\cos 4\phi}{2}) =$$
$$\frac{B}{4}(\frac{3}{2}e^{0i\phi} + e^{2i\phi} + e^{-2i\phi} + \frac{1}{4}e^{4i\phi} + \frac{1}{4}e^{-4i\phi}) = \frac{B}{16}(6e^{0i\phi} + 4e^{2i\phi} + 4e^{-2i\phi} + e^{4i\phi} + e^{-4i\phi})$$

$$B^2\int_0^{2\pi}\cos^8\phi\,d\phi = \frac{B^2 35\pi}{64} = 1 \Rightarrow B = \frac{8}{\sqrt{35\pi}}$$

$$\psi = \frac{8\sqrt{2\pi}}{\sqrt{35\pi}}\left(\frac{3}{8}\underbrace{\frac{e^{0i\phi}}{\sqrt{2\pi}}}_{n=0}+\frac{1}{4}\underbrace{\frac{e^{2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}}_{n=2}+\frac{1}{4}\underbrace{\frac{e^{-2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}}_{n=-2}+\frac{1}{16}\underbrace{\frac{e^{4i\phi}}{\sqrt{2\pi}}}_{n=4}+\frac{1}{16}\underbrace{\frac{e^{-4i\phi}}{\sqrt{2\pi}}}_{n=-4}\right)$$

$$P_0 = \left(\frac{8\sqrt{2\pi}}{\sqrt{35\pi}}\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{18}{35} \qquad L_z = n\hbar = 0$$

$$P_2 = P_{-2} = \left(\frac{8\sqrt{2\pi}}{\sqrt{35\pi}}\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8}{35} \qquad L_z = \pm 2\hbar$$

$$P_4 = P_{-4} = \left(\frac{8\sqrt{2\pi}}{\sqrt{35\pi}}\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{70} \qquad L_z = \pm 4\hbar$$

$$\langle L_z\rangle = P_0 0\hbar + P_2 2\hbar + P_{-2}(-2\hbar) + P_4 4\hbar + P_{-4}(-4\hbar) = 0$$

Ответ. $L_z = 0, \pm 2\hbar, \pm 4\hbar; \qquad \langle L_z\rangle = 0$ ■

Задача №6 (6.17)

Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением (A - нормировочная константа):

$$\psi(r,\theta,\phi) = AR(r)\sin^2\theta\sin 2\phi,$$

причём $\int_0^\infty R^2(r)r^2\,dr = 1$. Какие значения квадрата и z-проекции импульса L^2 и L_z могут быть измерены в этом состоянии? Каковы вероятности их измерения и средние значения?

Решение.

$$\psi(r,\theta,\phi) = AR(r)\sin^2\theta\sin 2\phi = AR(r)sin^2\theta\left(\frac{e^{2i\phi}-e^{-2i\phi}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{AR(r)}{2i}\sqrt{\frac{48\pi}{3}}\left\{Y_{2,2}(\theta,\phi) - Y_{2,-2}(\theta,\phi)\right\} \qquad Y_{\underbrace{2,\pm 2}_{l,m}}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{48\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

↑ сферические функции

$$L_z = m\hbar \Rightarrow L_z = \pm 2\hbar$$
$$L_z^2 = \hbar^2 l(l+1) \Rightarrow L_z^2 = 6\hbar^2$$
$$P_{6\hbar^2} = 1 \quad \text{так как всего одно С.З.}$$

Найдём A:

$$\left|\frac{A}{2i}\sqrt{\frac{48\pi}{3}}\right|^2 + \left|\frac{A}{2i}\sqrt{\frac{48\pi}{3}}\right|^2 = 1$$

$$|A|^2 \cdot \frac{48\pi}{6} = 1 \qquad A^2 = \frac{6}{48\pi}$$

$$P_{\pm 2\hbar} = \frac{6 \cdot 48\pi}{4 \cdot 3 \cdot 48\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\langle L_z \rangle = \frac{1}{2}2\hbar - \frac{1}{2}2\hbar = 0$$

Ответ.

$$L_z = \pm 2\hbar; \qquad P_{\pm 2\hbar} = \frac{1}{2}$$

$$L_z^2 = 6\hbar^2; \qquad P_{6\hbar^2} = 1$$

■

Задача №7 (7.7)

Частица находится в одномерной симметричной потенциальной яме глубиной V_0 и шириной a. Определить условие возникновения n-го стационарного состояния в таком потенциале. Нарисовать распределение $|\psi(x)|^2$ для этого состояния.

Решение.

$$V(x) = \begin{cases} 0, \quad |x| \leq \dfrac{a}{2} & \text{область II} \\ V_0, \quad |x| \geq \dfrac{a}{2} & \text{области I и III} \end{cases}$$

Введём $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

В каждой из областей непрерывности потенциала уравнение Шрёдингера, к решению которого сводится задача по отысканию уровней энергии имеет вид

$$\text{области I и III} \qquad \psi'' - \varkappa^2\psi = 0$$

$$\text{область II} \qquad \psi'' - k^2\psi = 0$$

1. Чётное состояние $\quad \psi(x) = \psi(-x)$
   Решения имеют вид:

$$\text{область I} \qquad \psi_I = A_I \exp(\varkappa x)$$

$$\text{область II} \qquad \psi_{II} = A_{II} \cos(kx)$$

$$\text{область III} \qquad \psi_{III} = A_{III} \exp(\varkappa x)$$

$$A_I = A_{III}$$

“Сшивая” функции и первые производные в точке разрыва потенциала $x = \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} A_{II}\cos(\frac{ka}{2}) = A_{III}\exp(-\frac{\varkappa a}{2}) \\ -kA_{II}\sin(\frac{ka}{2}) = -\varkappa A_{III}\exp(-\frac{\varkappa a}{2}) \end{cases}$$

$$ka\tan(\frac{ka}{2}) = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} - (ka)^2} \tag{7.1}$$

2. Нечётное состояние $\psi(x) = -\psi(-x)$ Решения имеют вид:

$$\begin{gathered} \text{область I} \qquad \psi_I = A_I\exp(\varkappa x) \\ \text{область II} \qquad \psi_{II} = A_{II}\sin(kx) \\ \text{область III} \qquad \psi_{III} = A_{III}\exp(-\varkappa x) \\ A_I = -A_{III} \end{gathered}$$

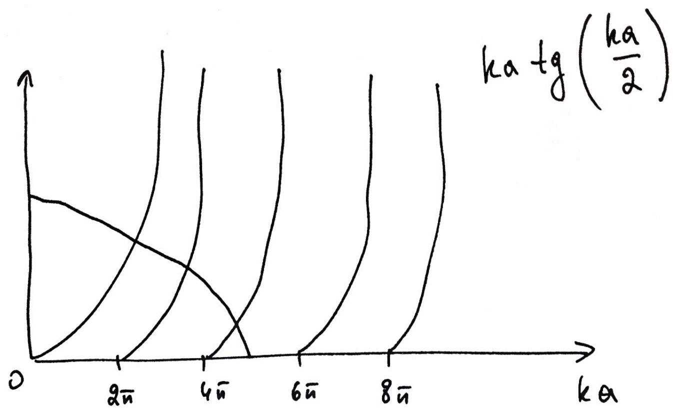
“Сшивая” функции и первые производные в точке разрыва потенциала $x = \frac{a}{2}$

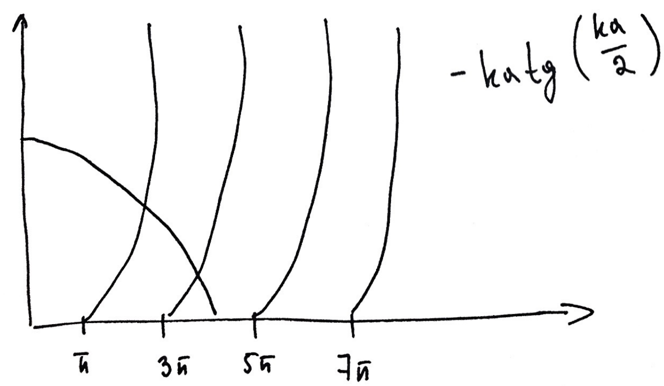
$$\begin{cases} A_{II}\sin(\frac{ka}{2}) = A_{III}\exp(-\frac{\varkappa a}{2}) \\ kA_{II}\cos(\frac{ka}{2}) = -\varkappa A_{III}\exp(-\frac{\varkappa a}{2}) \end{cases}$$

$$-ka\,\mathrm{ctg}(\frac{ka}{2}) = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} - (ka)^2} \tag{7.2}$$

Будем анализировать решения уравнений (7.1) и (7.2) графически

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \xi\tan\xi \qquad \alpha_1^2 + \xi^2 = R^2 \\ \alpha_2 = -\xi\,\mathrm{ctg}\,\xi \qquad \alpha_2^2 + \xi^2 = R^2 \\ R = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \geq \pi^2 \end{gathered}$$





Ответ. Условие возникновения стационарного состояния

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \geq \pi^2(n-1)^2$$

■

Задача №8 (7.20)

Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний в δ-потенциале $V(x) = (\hbar^2/m)V_0\delta(x)$. Считать, что $V_0 < 0$.

Решение.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)\psi = E(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = \varepsilon\psi; \quad \psi'' + \underbrace{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}_{k^2} = 0$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-x}$$
$$\psi_1(x) = C_1 \exp(kx), \quad x < -\varepsilon$$
$$\psi_2(x) = C_2 \exp(-kx), \quad x > \varepsilon$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{m}V_0\delta(x)\psi = E(x)\Bigg| \cdot \frac{2m}{\hbar^2}$$
$$-\psi'' - 2|V_0|\psi(x)\delta(x) = -k^2\psi$$
$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi''\,dx + 2|V_0|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\psi\,dx = k^2\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi\,dx; \qquad \varepsilon \to 0$$
$$\begin{cases} \psi(+0) - \psi(-0) + 2|V_0|\psi(0) = 0 \\ \psi'(+0) - \psi'(-0) + 2|V_0|\psi(0) = 0 \\ \psi(+0) = \psi(-0) \end{cases}$$
$$C_1 = C_2 = C \quad \text{из условия согласования}$$
$$-kC - kC + 2|V_0|C = 0$$
$$k = |V_0| = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\hbar^2|V_0|^2}{2m}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{-k|x|}\,dx = 2C^2\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx = 2\frac{C^2}{k} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{k}{2}}$$

Ответ.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}e^{kx}; \qquad \psi_2 = \sqrt{\frac{k}{2}}e^{-kx}$$

■

Задача №9 (7.28)

Показать, что в произвольном стационарном состоянии одномерного гармонического осциллятора средние значения потенциальной и кинетической энергии равны.

Решение.

$$U(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2}$$
$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4}\exp(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar})H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)$$
$$\langle U\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\psi_n^2(x)\,dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\hbar\omega$$

$$\langle T\rangle = E - \langle U\rangle = \left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega - \left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)\hbar\omega = \left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)\hbar\omega = \langle U\rangle$$

■

Задача №10 (7.30)

Частица находится в основном состоянии в одномерном гармоническом осцилляторном потенциале. Определить плотность вероятности измерить значение импульса p.

Решение.

$$C_p = \int \psi_0(x)\frac{\exp(-ipx/\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,dx$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\exp(-\frac{x^2}{2a^2})$$

$$C_p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\exp(-\frac{x^2}{2a^2})\frac{\exp(-ipx/\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,dx = \sqrt{\frac{\hbar}{a\sqrt{pi}}}\exp(i\frac{pa}{\hbar})$$

$$W_p = |C_p|^2 = \frac{\hbar}{a\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{p^2a^2}{\hbar^2})$$

■