Задачи к экзамену по теоретической механике (2-й поток)

1. Найти закон движения частицы массы m в поле $U(x) = - U_0 \cos(x/a)$, $a>0$, если в начальный момент времени квадрат скорости частицы $v^2(0) = 4U_0/m$, а $x(0) = 0$.
2. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в скрещенных магнитном **B** (в калибровке векторного потенциала $\mathbf{A}=(0, xB, 0)$ и электрическом $\mathbf{E}=(E, 0, 0)$ полях. Указать первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_o = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Найти границы области движения заряда по координате x, если $\mathbf{r}(0) =(h, 0, 0)$, а $\mathbf{v}(0) = (v, 0, 0)$.
3. Составить функцию и уравнения Лагранжа частицы с зарядом e, массой m, находящейся в полости гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме окружности радиуса R. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести **g** и магнитное поле **H**. Найти первый интеграл уравнений Лагранжа и закон движения в квадратурах.
4. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в однородном магнитном поле **H** (в калибровке векторного потенциала $\mathbf{A}=(yH/2, -xH/2, 0))$ и электрическом поле $\mathbf{E}=-(ax, ay, 0)$, $a>0$. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_o = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_o$, а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o$.
5. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы m в центральном поле $U(r) = U_0$, $r<R$, $U(r) = 0$, $r>R$. Энергия частицы E_0.
6. Частица с массой m и зарядом e может двигаться по поверхности конуса с углом при вершине 2α. Ось конуса вертикальна. В направлении оси конуса действуют поле тяжести **g** и магнитное поле **H**. Записать функцию Лагранжа в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа.
7. Частица может двигаться по наклонной плоскости (составляющей угол α с горизонтом) из точки B в точку A, упруго отражаясь от стенки в точке A. Найти, как изменяется энергия и максимальная высота подьема частицы при медленном изменении угла α.
8. Найти траекторию и закон движения частицы с зарядом e, массой m в неоднородном электрическом поле $\mathbf{E}=(ax, 0, bz)$ с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.
9. Стержень массы m и длины l движется в вертикальной плоскости так, что один из его концов скользит по горизонтальной прямой (есть поле тяжести). Найти закон движения стержня в квадратурах.
10. Найти, как изменяется амплитуда колебаний математического маятника при медленном изменении его длины.
11. Найти период колебаний частицы массы m в поле $U(x) = -a/(|x|+b)$, $a, b>0$. Энергия частицы E_0.
12. Как изменяется энергия частицы с массой m и зарядом e в центральном поле $U(\mathbf{r})$ при медленном (адиабатическом) включении слабого однородного магнитного поля напряженности **H**.
13. Найти траекторию и закон движения (в квадратурах) частицы в поле $U(\mathbf{r})=ar^2$, $a>0$, с помощью уравнения Гамильтона-Якоби (в сферических координатах).
14. Стержень массы m и длины l скользит по сторонам прямого угла без трения. Написать функцию Лагранжа и найти закон движения в квадратурах.
15. Найти траекторию (и угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек $r_{\min}$) частицы с массой m, энергией $E_o<0$ в центральном поле $U(\mathbf{r}) = - a/r + b/r^2$, $a, b>0$.
16. Найти траекторию и закон движения заряда e, массы m в однородном магнитном поле **H** (векторный потенциал $\mathbf{A}=(yH, 0, 0)$), решая уравнения Гамильтона. Указать все первые интегралы уравнений движения. В момент времени $t_o = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_o$, а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o$.
17. Вычислить скобки Пуассона $[L_i, L_j]$, где L_i - декартовы компоненты вектора момента импульса частицы.
18. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы m в центральном поле $U(r) = a/r-a/R$, $r<R$, $U(r) = 0$, $r>R$. Энергия частицы E_0.
19. Вычислить скобки Пуассона $[v_i,v_j]$, где v_i - декартовы компоненты вектора скорости заряда e, массы m в однородном магнитном поле **H**.
20. Как изменяется механическая энергия и параметр орбиты финитного движения частицы с массой m в центральном поле $U(\mathbf{r})=-a/r$, $a>0$, при адиабатическом изменении параметра a.
21. Система описывается лагранжианом

$$L = m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)/2 - k\left(2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right)/2,\ m, k > 0 .$$

Найти собственные частоты и закон движения, если $x_1\left(0\right) = a,\ x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$

22. Найти полное сечение захвата частиц массы m шариком радиуса R, находящимся в центре поля $U(r) = a/r^2-a/r^4$, $a, b>0$. Энергия частицы E_0.

23. Как изменяется энергия системы, описываемой лагранжианом

$$L = m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)/2 - k\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right)/2,\ m, k > 0$$

.

при адиабатическом изменении параметра k?

$\boxed{51}$

Дано: m, $U(x) = -U_0 \cos\frac{x}{a}$, $a > 0$, $v^2(0) = \frac{4U_0}{m}$ $x(0) = 0$

Найти закон движения. $x(t)$

Полная энергия: $E = U(0) + \frac{m v^2(0)}{2} = -U_0 \cdot \cos 0 + \frac{m}{2} \cdot \frac{4U_0}{m} =$

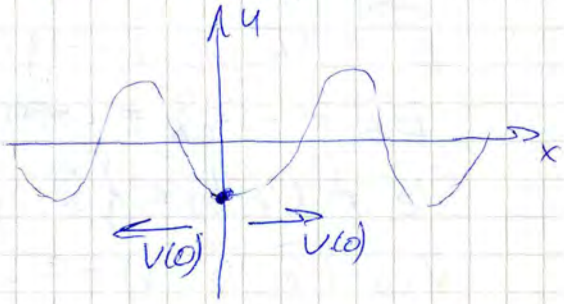
$= U_0 = const.$

$$-U_0 \cos\frac{x}{a} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = U_0$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} U_0 \cdot \left(1 + \cos\frac{x}{a}\right) = \frac{4U_0}{m} \cos^2\frac{x}{2a}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}^2(0) \cos^2\frac{x}{2a} \qquad \dot{x} = \dot{x}(0) \cdot \left(\pm \cos\frac{x}{2a}\right)$$

1) $\dot{x} = \dot{x}(0) \cos\frac{x}{2a}$



$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(0) \cos\frac{x}{2a}$$

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{2a}} = \dot{x}(0) \int dt = \dot{x}(0) \cdot t$$

$z = \sin\frac{x}{2a}$ $\quad dz = \frac{1}{2a} \cos\frac{x}{2a} dx$ $\qquad \frac{1}{1-z^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{A + Az + B - Bz}{1-z^2}$

$\frac{dx}{\cos\frac{x}{2a}} = \frac{2a\, dz}{\cos^2\frac{x}{2a}} = \frac{2a\, dz}{1 - z^2}$ $\qquad A + B = 1$, $A - B = 0$ $\quad A = B = \frac{1}{2}$.

$$\int \frac{2a\, dz}{1 - z^2} = a\left(\int \frac{dz}{1+z} + \int \frac{dz}{1-z}\right) = a \cdot \left(\ln(1+z) - \ln(1-z)\right) =$$

$a \cdot \ln \frac{1}{1} = 0 + c \Rightarrow c = 0$

$$= a \ln \frac{1+z}{1-z}$$

$$a \ln \frac{1 + \sin\frac{x}{2a}}{1 - \sin\frac{x}{2a}} = \sqrt{\frac{4U_0}{m}}\, t + \cancel{c} = 0$$

$$\frac{1 + \sin\frac{x}{2a}}{1 - \sin\frac{x}{2a}} = e^{\frac{\sqrt{\frac{4U_0}{m}}\, t}{a}}$$

$$1 + \sin\frac{x}{2a} = e^{\cdots} - \sin\frac{x}{2a}\, e^{\cdots}$$

$$\sin\frac{x}{2a}\left(1 + e^{\cdots}\right) = e^{\cdots} - 1$$

$$\sin\frac{x}{2a} = \frac{e^{\frac{v_0 t}{a}} - 1}{e^{\frac{v_0 t}{a}} + 1} = \frac{e^{\frac{v_0 t}{2a}} - e^{-\frac{v_0 t}{2a}}}{e^{\frac{v_0 t}{2a}} + e^{-\frac{v_0 t}{2a}}} = \underline{th\left(\frac{\sqrt{\frac{4U_0}{m}}\, t}{2a}\right)}$$

$$t \to \infty \qquad th\left(\frac{\sqrt{\frac{4U_0}{m}}\, t}{2a}\right) \to 1 \to \frac{x}{2a} \to \frac{\pi}{2} \to x \to a\pi$$

2) $\dot{x} = -\dot{x}_0(0) \cos\frac{x}{2a}$

$t \to \infty \Rightarrow x \to -a\pi$

$$a \ln \frac{1 + \sin\frac{x}{2a}}{1 - \sin x/2a} = -t$$

$$\sin\frac{x}{2a} = \frac{e^{-\frac{v_0 t}{a}} - 1}{e^{-\frac{v_0 t}{a}} + 1} = -\frac{e^{\frac{v_0 t}{2a}} - e^{-\frac{v_0 t}{2a}}}{e^{\frac{v_0 t}{2a}} + e^{-\frac{v_0 t}{2a}}} = -th\left(\frac{\sqrt{\frac{4U_0}{m}}\, t}{2a}\right)$$

(3) Система консервативная:

$$Const = E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U_0 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \qquad a > 0$$

Из начальных условий. $E = \frac{m \frac{4U_0}{m}}{2} U_0 = U_0$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(E + U_0\cos(\frac{x}{a}))}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2U_0}{m}\left(1+\cos\left(\frac{x}{a}\right)\right)}$$

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\frac{dx}{\sqrt{1+\cos\left(\frac{x}{a}\right)}} \qquad t = \pm\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\cos(\frac{x}{a})}} + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+\cos(\frac{x}{a})}} = \left[z = \sqrt{1+\cos\frac{x}{a}};\ dx = \frac{-2a\,dz}{\sqrt{2-z^2}}\right] =$$

$$= -2a\int\frac{dz}{z\sqrt{2-z^2}} = -2a\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{z}{\sqrt{2}+\sqrt{2-z^2}} = -\sqrt{2}\,a\ln\frac{\sqrt{1+\cos\frac{x}{a}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos\frac{x}{a}}}$$

$$t = \pm a\sqrt{\frac{m}{U_0}}\ln\frac{\sqrt{1+\cos\frac{x}{a}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos\frac{x}{a}}}$$

Из начальных условий $C = 0$.

$\boxed{№ 2}$

Дано: $e, m, \vec{B}, \vec{A}(0, xB, 0), \vec{E} = (E, 0, 0)$,

Найти: функцию и ур-е Лагранжа, 1-ые интеграл ур-й Л.

закон движения, если в $t_0 = 0$ $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{V}(0) = \vec{v}_0$

границы области движения по X, если $\vec{r}(0) = (h, 0, 0)$ $\vec{V}(0) = (V, 0, 0)$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U_{об}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad \boxed{H = \operatorname{rot} \vec{A} = B \cdot \vec{k}}$$

обобщенная потенциальная энергия

$$U_{об}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e\varphi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = (E, 0, 0) = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = const = E \Rightarrow \varphi = \overset{0}{\varphi_0} - EX = -EX.$$

$$\dot{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}, t) = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} \cdot \{0, xB, 0\} = xB \cdot \dot{y}$$

$$U_{об}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -eEX - \frac{e}{c} xB \dot{y}.$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eEx + \frac{e}{c} xB\dot{y}$$ — функция Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{exB}{c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = eE + \frac{eB\dot{y}}{c} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - eE - \dfrac{eB\dot{y}}{c} = 0 \\ m\ddot{y} + \dfrac{e\dot{x}B}{c} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$ — уравнения Лагранжа.

$$\underline{z = z_0 + \dot{z}_0 t}$$ — закон движения.

$$m \cdot (\dot{y} - \dot{y}_0) + \frac{eB}{c}(x - x_0) = 0.$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - \frac{eB}{mc}(x - x_0) \qquad - \frac{eB}{c} y_0 + \frac{e^2B^2}{mc^2}(x - x_0)$$

$$m\ddot{x} - eE - \frac{eB}{c} \cdot \left(\dot{y}_0 - \frac{eB}{mc}(x - x_0)\right) = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{e^2B^2}{mc^2} x = eE + \frac{eB}{c}\dot{y}_0 + \frac{e^2B^2}{mc^2} x_0.$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB}{mc}\right)^2 x = \frac{eE}{m} + \left(\frac{eB}{mc}\right)\dot{y}_0 + \left(\frac{eB}{mc}\right)^2 x_0.$$

$$\omega = \frac{eB}{mc}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{eE}{m} + \omega \dot{y}_0 + \omega^2 x_0.$$

$x_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$x_2 = \text{const}$ $\qquad x_2 = \dfrac{\frac{eE}{m} + \omega\mathring{y}_0 + \omega^2 x_0}{\omega^2}$

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega} + x_0$

$t=0 \qquad \cancel{x_0} = A + \dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega} + \cancel{x_0}$

$A = -\dfrac{eE}{m\omega^2} - \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega}$

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \qquad \mathring{x}_0 = B\omega \to B = \dfrac{\mathring{x}_0}{\omega}$

$x = \left(-\dfrac{eE}{m\omega^2} - \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega}\right)\cos\omega t + \dfrac{\mathring{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega} + x_0$

$\cancel{\dot{y} = \mathring{y}_0 - \omega\left(\left(-\frac{eE}{m\omega^2}\right)\right.}$

$\dot{y} = \cancel{\mathring{y}_0} + \omega\left(\dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega}\right)\cos\omega t - \mathring{x}_0\sin\omega t - \dfrac{eE}{m\omega} - \cancel{\mathring{y}_0} =$

$= \left(\dfrac{eE}{m\omega} + \mathring{y}_0\right)\cos\omega t - \mathring{x}_0\sin\omega t - \dfrac{eE}{m\omega}$

$y = y_0 + \left(\dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{\mathring{y}_0}{\omega}\right)\sin\omega t + \dfrac{\mathring{x}_0}{\omega}\cos\omega t - \dfrac{eE}{m\omega}t$

если $\quad x_0 = h \quad \mathring{x}_0 = v \quad y_0 = z_0 = 0 \quad \mathring{y}_0 = \mathring{z}_0 = 0$

$z = 0$

$y = 0 + \left(\dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{0}{\omega}\right)\sin\omega t + \dfrac{v}{\omega}\cos\omega t - \dfrac{eE}{m\omega}t = \dfrac{eE}{m\omega^2}\sin\omega t + \dfrac{v}{\omega}\cos\omega t - \dfrac{eE}{m\omega}t$

$x = \left(-\dfrac{eE}{m\omega^2} - 0\right)\cos\omega t + \dfrac{v}{\omega}\sin\omega t + \dfrac{eE}{m\omega^2} + \dfrac{0}{\omega} + h =$

$= -\dfrac{eE}{m\omega^2}\cos\omega t + \dfrac{v}{\omega}\sin\omega t + \dfrac{eE}{m\omega^2} + h$

$x_{\max/\min} = \dfrac{eE}{m\omega^2} + h \pm \sqrt{\left(\dfrac{eE}{m\omega^2}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2}$, где $\omega = \dfrac{eB}{mc}$

$\boxed{p_j = p_{j0} \text{ если } \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$

обобщенный импульс: $p_z = m\dot{z} = p_{z0}$

$p_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ – не сохр. $\quad \cancel{p_z = m\dot{z}} \quad p_y = m\dot{y} + \dfrac{exB}{c} = p_{y0}$

обобщенный момент импульса:

$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} + \frac{exB}{c} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(my\dot{z} - m\dot{y}z - \dfrac{exzB}{c}\right) +$

$+ \vec{j}\left(mz\dot{x} - mx\dot{z}\right) + \vec{k}\left(mx\dot{y} + \dfrac{ex^2B}{c} - my\dot{x}\right)$ $\qquad \boxed{H = H_0 \text{ если } \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0}$

обобщенная энергия:

$H = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - eEx = H_0$

3) $A = (0, xB, 0)$

$E = (E, 0, 0)$

$\varphi = -Ex$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$U = -\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) + e\varphi = -\frac{e}{c}x\dot{y}B \pm e\varphi$

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}x\dot{y}B + eEx$

$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$

$$\begin{cases} \frac{e}{c}\dot{y}B + eE - m\ddot{x} = 0 \\ -\frac{e}{c}\dot{x}B - m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$\bar{r}_0 = (r_{0x}, r_{0y}, r_{0z})$

$\bar{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$

Первые интегралы:

$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e}{c}x\dot{y}B \mp eEx = E_0$

$p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c}xB = p_{y0}$

$p_z = m\dot{z} = p_{z0}$

$z = At + B = V_{0z}t + r_{0z}$

$-\frac{e}{c}\ddot{x}B = m\dddot{y}$

$\ddot{x} = -\frac{mc}{eB}\dddot{y}$

$\frac{e}{c}\dot{y}B + eE + \frac{m^2c}{eB}\dddot{y} = 0$

$\frac{m^2c}{eB}\dddot{y} + \frac{e}{c}B\dot{y} = -eE$

Одиор: $\frac{m^2c}{eB}\dddot{y} + \frac{e}{c}B\dot{y} = 0$ $\quad y = e^{kt}$

$\frac{m^2c}{eB}k^3 + \frac{e}{c}Bk = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k^2 = -\frac{e^2B^2}{c^2m^2}$; $\tilde{y} = -\frac{Ec}{B}t$

$y = c_1 + c_2\sin\frac{eB}{cm}t + c_3\cos\frac{eB}{cm}t - \frac{Ec}{B}t$

$\ddot{y} = -\left(\frac{eB}{cm}\right)^2 c_2\sin\frac{eB}{cm}t - \left(\frac{eB}{cm}\right)^2 c_3\cos\frac{eB}{cm}t$

$$\dot{x} = \frac{mc}{eB}\ddot{y} = -\frac{eB}{cm} c_2 \sin\frac{eB}{cm}t - \frac{eB}{cm} c_3 \cos\frac{eB}{cm}t$$

$$x = c_2 \cos\frac{eB}{cm}t - c_3 \sin\frac{eB}{cm}t + c_4$$

$$\begin{cases} c_2 + c_4 = r_{x0} \\ c_1 + c_3 = r_{y0} \\ -\frac{eB}{cm} c_3 = V_{x0} \\ \frac{eB}{cm} c_2 = V_{y0} \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_1 &= r_{y0} + \frac{cm}{eB} V_{x0} \\ c_2 &= \frac{cm}{eB} V_{y0} \\ c_3 &= -\frac{cm}{eB} V_{x0} \\ c_4 &= r_{x0} - \frac{cm}{eB} V_{y0} \end{aligned}$$

$$x = \frac{cm}{eB} V_{y0} \cos\frac{eB}{cm}t + \frac{cm}{eB} V_{x0} \sin\frac{eB}{cm}t + r_{x0} - \frac{cm}{eB} V_{y0}$$

$$y = r_{y0} + \frac{cm}{eB} V_{x0} + \frac{cm}{eB} V_{y0} \sin\frac{eB}{cm}t - \frac{cm}{eB} V_{x0} \cos\frac{eB}{cm}t - \frac{Ee}{B}t$$

$$z = V_{0z} t + r_{0z}$$

При $\bar{r}(0) = (h, 0, 0)$ и $\bar{V}(0) = (V, 0, 0)$:

$$x = \frac{cmV}{eB} \sin\frac{eB}{cm}t + h$$

$$y = \frac{cmV}{eB} - \frac{cmV}{eB} \cos\frac{eB}{cm}t - \frac{Ee}{B}t$$

$$z = 0$$

Пределы по x: $h - \frac{cmV}{eB}$

$h + \frac{cmV}{eB}$

c_0

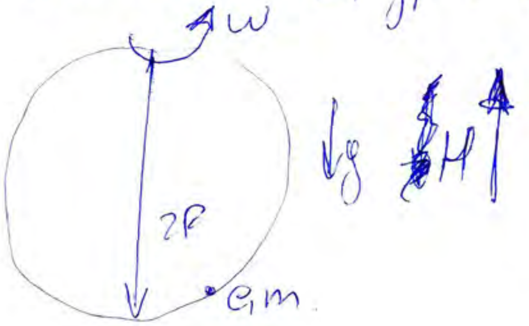
$$\cancel{h} + \omega^2\left(-\frac{Ee}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{eE}{m}\right)^2 + V^2\omega^2}\right) = x_{1,2}$$

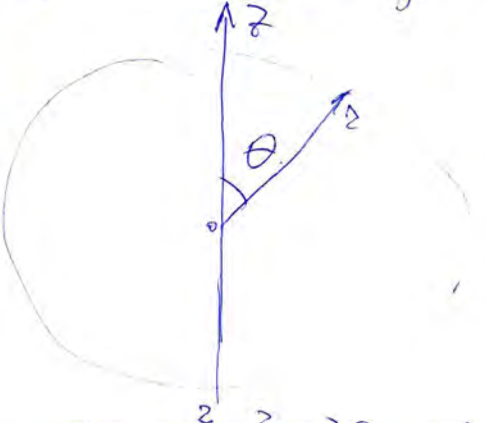
$$\omega = \frac{eB}{mc}$$

~~W31~~

Дано: e, m, R, ω, g, H

Найти: L, ур-е Л., 1-й интеграл ур-й Л., закон движения.





$x = R\sin\theta\cos\omega t$

$y = R\sin\theta\sin\omega t$

$z = R\cos\theta$

$$\cancel{T = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) = \frac{m}{2}(R^2\omega^2\sin^2\theta(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)) = \frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\theta}$$

$$\cancel{U = mgz = mgR\cos\theta}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) = \frac{m}{2}R^2\Big((\cos\theta\cos\omega t\cdot\dot\theta - \omega\sin\theta\sin\omega t)^2 +$$

$$+(\cos\theta\sin\omega t\cdot\dot\theta + \sin\theta\cdot\cos\omega t\cdot\omega)^2 + (\sin\theta\cdot\dot\theta)^2\Big) =$$

$$= \frac{mR^2}{2}\Big(\dot\theta^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)) + \omega^2\sin^2\theta(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)\Big) =$$

$$= \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2+\omega^2\sin^2\theta).$$

$$U = mgz - \frac{e}{c}(A_x\cdot\dot x + A_y\cdot\dot y + A_z\cdot\dot z).$$

$$\vec H = \{0,0,H\} = \operatorname{rot}\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & \underset{0}{\overset{}{A_y}} & \underset{0}{A_z}\end{vmatrix} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\vec k = H\cdot\vec k$$

$$A_x = -yH + A_0^{\,\nearrow 0} = -yH.$$

$$U = mgz + \frac{e}{c}\cdot yH\cdot\dot x = mgR\cos\theta + \frac{eH}{c}\cdot R\sin\theta\sin\omega t(\cos\theta\cos\omega t\cdot\dot\theta - \omega\sin\theta\sin\omega t)$$

$$= mgR\cos\theta + \frac{eHR}{c}\sin\theta\sin\omega t\,(\cos\theta\cos\omega t\cdot\dot\theta - \omega\sin\theta\sin\omega t)$$

$$L = T - U = \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2+\omega^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta - \frac{eHR}{c}\sin\theta\sin\omega t\,(\cos\theta\cos\omega t\cdot\dot\theta - \omega\sin\theta\sin\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = mR^2\dot\theta - \frac{eHR}{c}\sin\theta\cos\theta\sin\omega t\cos\omega t = mR^2\dot\theta - \frac{eHR}{4c}\sin2\theta\sin2\omega t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta - \frac{eHR}{4c}(2\cos2\theta\sin2\omega t\cdot\dot\theta + 2\omega\sin2\theta\cos2\omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta - \frac{eHR}{c}\sin\omega t(\dot\theta\cos\omega t\cos2\theta - 2\omega\sin\omega t\sin\theta\cos\theta) =$$

$$= \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin2\theta + mgR\sin\theta - \frac{eHR}{c}\sin\omega t\cdot(\dot\theta\cos\omega t\cos2\theta - \omega\sin\omega t\sin2\theta)$$

конец №3 в.1

Уравнение Лагранжа:

$$mR^2\ddot{\theta} - \frac{eHR}{2c}(\dot\theta \sin 2\omega t\cos 2\theta + \omega\cos 2\omega t \sin 2\theta) - \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin 2\theta - mgR\sin\theta +$$
$$+ \frac{eHR}{2c}\,\cancel{\sin\omega t}\cdot(\dot\theta\,\overset{\sin 2\omega t}{\cancel{\cos\omega t}}\cos 2\theta - \omega\,\overset{1-\cos 2\omega t}{\cancel{\sin\omega t}}\sin 2\theta) = 0$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{\omega^2\sin 2\theta}{2}\right) - mgR\sin\theta - \frac{eHR}{2c}\omega\sin 2\theta = 0.$$

$$\ddot\theta = \frac{\omega^2\sin^2 2\theta}{2} + \frac{1}{mR^2}\left(mgR\sin\theta + \frac{eHR}{2c}\omega\sin 2\theta\right)$$ $$\frac{d(\dot\theta)}{dt} = f(\theta).$$

$f(\theta)$

$\dot\theta = \cancel{\dot\theta_0 + \int d\theta}$

$\theta = \dot\theta_0 t \cancel{+ \theta_0 + \iint \ldots d\theta d\theta}$.

$$\int\frac{d\dot\theta}{f(\theta)} = \int dt.$$

~~первый интеграл~~: $H = \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - L =$

$$= mR^2\dot\theta^2 - \frac{eHR}{c}\sin\theta\cos\theta\sin\omega t\cos\omega t\cdot\dot\theta - \frac{mR^2\dot\theta^2}{2} - \frac{mR^2\omega^2\sin^2\theta}{2} + mgR\cos\theta$$
$$+ \frac{eHR}{c}\sin\theta\cos\theta\sin\omega t\cos\omega t\cdot\dot\theta - \frac{eHR}{c}\omega\sin^2\theta\sin^2\omega t =$$
$$= \frac{mR^2\dot\theta^2}{2} - \frac{mR^2\omega^2\sin^2\theta}{2} + mgR\cos\theta - \frac{eHR}{c}\omega\sin^2\theta\sin^2\omega t$$

Лагранжиан зависит явно и от t, и от $\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow$ обобщенные импульс и энергия не сохраняются

Напишем теперь ур-я Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad (\alpha = q,\ \dot\alpha = \dot q) \text{ для координаты}$$

конец №3 в.3

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = \frac{mR^2\omega(\omega-\Omega)}{2}\sin 2\alpha - mgR\sin\alpha$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\alpha} = mR^2\dot\alpha$$

Итак, ур-е Лагранжа:

$$mR^2\ddot\alpha = \frac{mR^2\omega(\omega-\Omega)}{2}\sin 2\alpha - mgR\sin\alpha \qquad \Omega = \frac{eH}{mc}$$

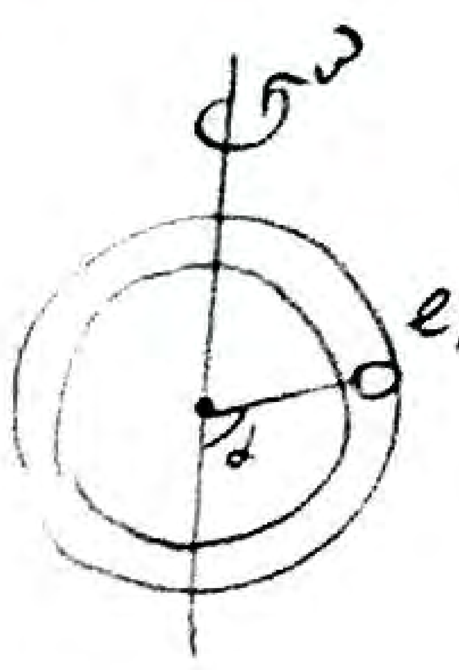
Первый интеграл — энергия:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\alpha}\dot\alpha - \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\dot\alpha^2 - \frac{mR^2(\omega-\Omega)}{2}\sin^2\alpha - mgR\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \dot\alpha = \sqrt{\omega(\omega-\Omega)\sin^2\alpha + \frac{2g}{R}\cos\alpha}$$

$$t = \int_0^{\alpha(t)}\frac{d\alpha}{\sqrt{\omega(\omega-\Omega)\sin^2\alpha + \frac{2g}{R}\cos\alpha}} + C$$

3) Составить ф-ию Лагранжа частицы с зарядом e, массой m, находящейся в полости гладкой трубки, изогнутой в форме окружности радиуса R. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести g и магнитное поле H.
Найти первый интеграл уравнения Лагранжа.

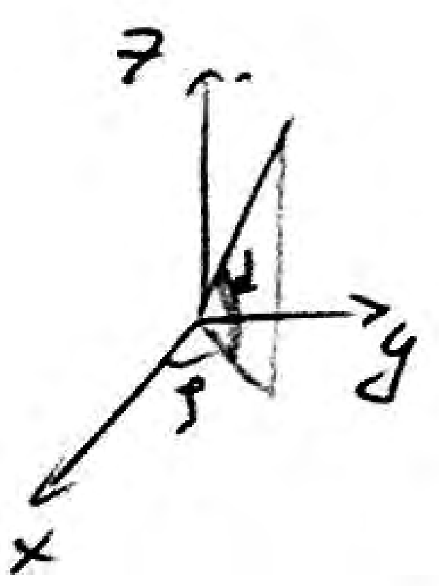


$\downarrow \vec{g} \quad \uparrow \vec{H}$

в цилиндрич. коорд.:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - mgz + \frac{e}{c}\left(\vec{A}\dot{\vec{r}}\right)$$

$\vec{H} = \{0, 0, +H\}$ $\quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ $\quad x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$



Пусть $\vec{A} = \left\{\frac{yH}{2}, -\frac{xH}{2}, 0\right\}$

$\operatorname{rot}\left\{\frac{yH}{2}, -\frac{xH}{2}, 0\right\} = \{0, 0, H\}$

т.е. $\vec{A} = \left\{\frac{yH}{2}, -\frac{xH}{2}, 0\right\}$ Вычислим $(\vec{A}\dot{\vec{r}})$:

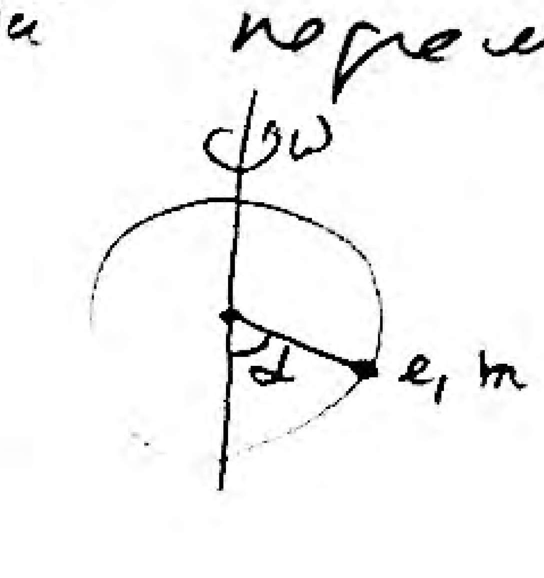
Перейдем в цилиндрические координаты:

$$\vec{A}\dot{\vec{r}} = \frac{\dot x y H}{2} - \frac{x\dot y H}{2} = \frac{\dot\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi\, H}{2} - \frac{\dot\varphi\rho^2\sin^2\varphi}{2}H + \frac{\dot\rho\sin\varphi\,\rho\cos\varphi\, H}{2} - \frac{\dot\varphi\rho^2\cos^2\varphi}{2}H = -\frac{\rho^2 H}{2}\dot\varphi$$

Теперь напишем __связи__:

$\omega t = \varphi$, $\dot\varphi = \omega$ $\quad \rho = R\sin\alpha$, $z = -R\cos\alpha$

Удобно в качестве независимой переменной выбрать именно угол α



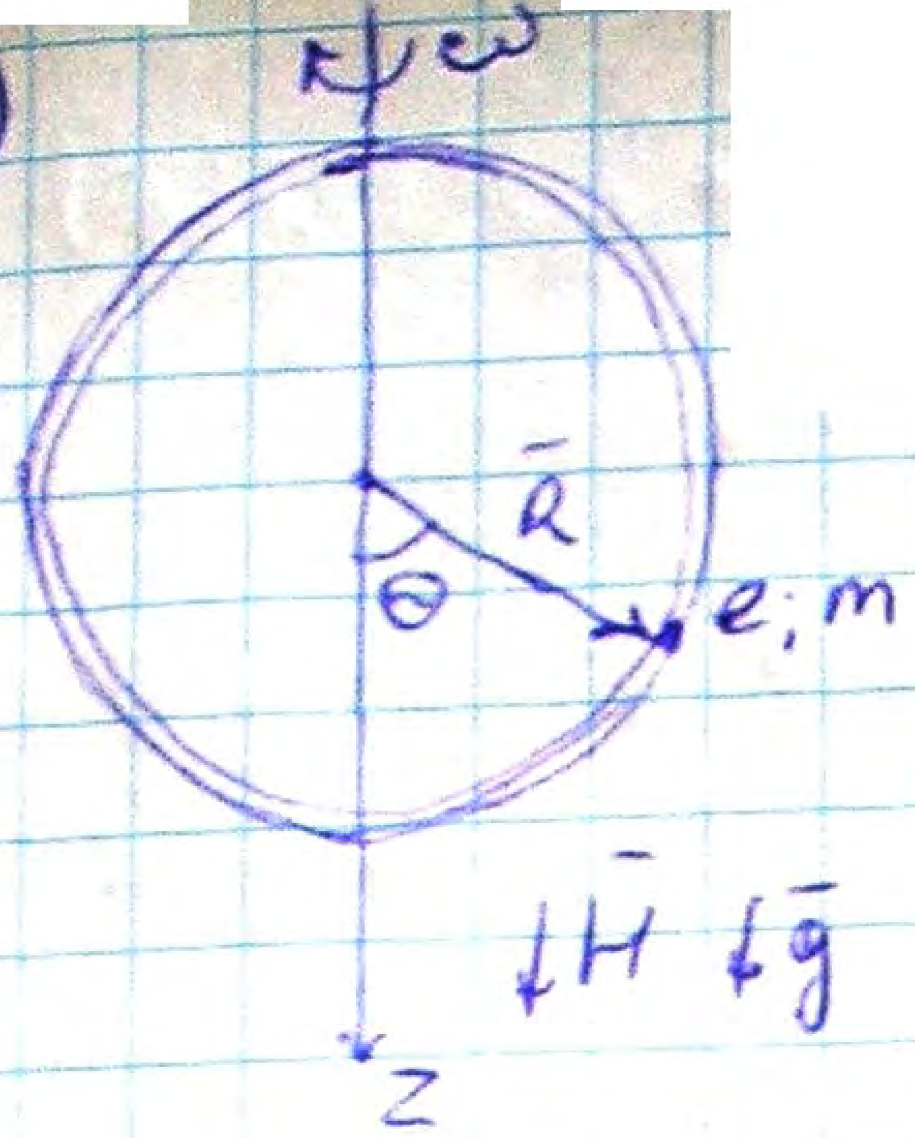
$\angle\alpha$ − полностью характеризует положение системы.

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\dot\alpha^2 + \frac{mR^2}{2}\omega^2\sin^2\alpha + mgR\cos\alpha - \frac{eH\omega R^2}{2c}\sin^2\alpha$$

Переобозначим $\Omega = \frac{eH}{mc}$ (частота, задаваемая магнитным полем)

Тогда $$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\dot\alpha^2 + \frac{mR^2\omega(\omega-\Omega)}{2}\sin^2\alpha + mgR\cos\alpha$$

3)



В цилиндр. коорд.

$$L = \frac{m}{2}(\dot z^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot\rho^2) + mgz +$$
$$+ \frac{e}{c}(\bar A \bar v)$$
$$A_z = A_\rho = 0 \qquad v = \rho\dot\varphi$$
$$A_\varphi = \frac{H}{2}\rho$$

Введем сист. координат с началом в центре окр-ти и обобщ. координатой θ - угол отклонения от оси z

$$\rho = R\sin\theta \quad ; \quad z = R\cos\theta \quad ; \quad \varphi = \omega t$$
$$\dot\rho = R\cos\theta\cdot\dot\theta \; ; \quad \dot z = -R\sin\theta\cdot\dot\theta \; ; \quad \dot\varphi = \omega$$
$$\frac{e}{c}(\bar A\bar v) = \frac{e}{c}\frac{H}{2}\rho\cdot\rho\dot\varphi$$
$$L = \frac{m}{2}(R^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 + R^2\sin^2\theta\cdot\omega^2 + R^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2) +$$
$$+ mgR\cos\theta + \frac{e}{c}\frac{H}{2}\omega\cdot R^2\sin^2\theta$$
$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 + \omega^2\sin^2\theta) + mgR\cos\theta + \frac{e}{c}\frac{H}{2}\omega R^2\sin^2\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = mR^2\dot\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{mR^2}{2}\omega^2\, 2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta + \frac{e}{c}\frac{H}{2}\omega R^2\cdot$$
$$\cdot 2\sin\theta\cos\theta = R^2\left(\frac{m}{2}\omega^2 + \frac{e}{c}\frac{H}{2}\omega\right)\sin 2\theta -$$
$$- mgR\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\ddot\theta - R^2\left(\frac{m}{2}\omega^2 + \frac{e}{c}\frac{H}{2}\omega\right)\sin 2\theta$$
$$+ mgR\sin\theta = 0$$

$$H = \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - L = mR^2\dot\theta^2 - \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 + \omega^2\sin^2\theta) -$$
$$- mgR\cos\theta - \frac{e}{c}\frac{H}{2}R^2\omega\sin^2\theta = H_0$$
$$\frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 - \omega^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta - \frac{e}{c}\frac{H}{2}R^2\omega\sin^2\theta = H_0$$

5.4

Дано: $\vec{A} = \left(\frac{yH}{2}, -\frac{xH}{2}, 0\right)$, $\vec{E} = (-ax, -ay, 0)$ $a>0$

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{V}(0) = \vec{V}_0$, e, m

Найти L, ур-е Л., 1-ые интегралы, закон движения.

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi$

$$\cancel{-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{yH}{2} \qquad \varphi = -\frac{xyH}{2} + \varphi_0}$$

$$\cancel{-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{xH}{2} \qquad \varphi = \frac{xyH}{2}}$$

$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ax \qquad \varphi_1 = \frac{ax^2}{2} + c = \frac{ax^2}{2}$

$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ay \qquad \varphi_2 = \frac{ay^2}{2} + c = \frac{ay^2}{2} \qquad \varphi = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$

$L = T - U_{оп};\quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$U_{оп} = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) = \frac{ae}{2}(x^2+y^2) - \frac{eH}{2c}(\dot{x}y - x\dot{y})$

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{ae}{2}(x^2+y^2) + \frac{eH}{2c}(\dot{x}y - x\dot{y})$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{eH}{2c}y \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{eH}{2c}x \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -aex - \frac{eH\dot{y}}{2c} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -aey + \frac{eH}{2c}\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{eH}{2c}\dot{y} + aex + \frac{eH}{2c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} - \frac{eH}{2c}\dot{x} + aey - \frac{eH}{2c}\dot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \qquad z = z_0 + \dot{z}_0 t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} + aex + \frac{eH}{c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + aey - \frac{eH}{c}\dot{x} = 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{x - x_0 = \frac{c}{eH}\left(m(\dot{y} - \dot{y}_0) + \frac{ae}{2}(y^2 - y_0^2)\right)}$$

$$\cancel{\ddot{x} = \frac{c}{eH}(m\dddot{y} + ae\dot{y})}$$

$$\cancel{\frac{mc}{eH}(m\dddot{y} + ae\dot{y}) + aex_0 + \frac{aec}{eH}m(\dot{y}-\dot{y}_0) + \frac{a^2e^2}{2}\frac{c}{eH}(y^2 - y_0^2) + \frac{eH}{c}(y\ldots}$$

$$\cancel{\frac{mc}{eH}\dddot{y}} \qquad x = e^{\lambda t} \qquad y = e^{\lambda t}$$

$m\lambda^2 + ae \pm \frac{eH}{c}\lambda = 0 \qquad \lambda^2 \pm \frac{eH}{mc}\lambda + \frac{ae}{m} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ первые интегралы $\quad p_z = m\dot{z} = p_{z0} = m\dot{z}_0$

$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{ae}{2}(x^2+y^2) = H_0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + aex + \frac{eH}{c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + aey - \frac{eH}{c}\dot{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda t} \\ y &= A_2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} mA_1\lambda^2 + aeA_1 + \frac{eH}{c}A_2\lambda = 0 \\ mA_2\lambda^2 + aeA_2 - \frac{eH}{c}A_1\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + ae & \frac{eH}{c}\lambda \\ -\frac{eH}{c}\lambda & m\lambda^2 + ae \end{vmatrix} =$$

$$= m^2\lambda^4 + 2mae\lambda^2 + a^2e^2 + \frac{e^2H^2}{c^2}\lambda^2 = 0$$

$$D = \left(2mae + \frac{e^2H^2}{c^2}\right)^2 - 4m^2a^2e^2 =$$

$$= 4mae\,\frac{e^2H^2}{c^2} + \left(\frac{eH}{c}\right)^4 = 4mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^4$$

$$\lambda^2 = \frac{-2mae \pm \sqrt{4mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^4}}{2m^2}$$

$$1)\ \lambda^2 = \frac{-2mae \pm \sqrt{4mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^4}}{2m^2}$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{-2mae \pm \sqrt{4mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^4} + 2mae}{2m}\right) -$$

Продолжение 4.2.2

$$x(t) = \frac{1}{\omega_- - \omega_+}\Big[(\omega_- x_0 - \dot{y}_0)\cos(\omega_+ t) - (\omega_- y_0 + \dot{x}_0)\sin(\omega_+ t) - $$
$$- (\omega_+ x_0 - \dot{y}_0)\cos(\omega_- t) + (y_0\omega_+ + \dot{x}_0)\sin(\omega_- t)\Big]$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega_- - \omega_+}\Big[(y_0\omega_- + \dot{x}_0)\cos(\omega_+ t) + (x_0\omega_- - \dot{y}_0)\sin(\omega_+ t) - $$
$$- (y_0\omega_+ + \dot{x}_0)\cos(\omega_- t) - (x_0\omega_+ - \dot{y}_0)\sin(\omega_- t)\Big]$$

где: $\omega_+ = \frac{eH}{2mc} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2 + \left(\frac{ea}{m}\right)^2}$

$\omega_- = \frac{eH}{2mc} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2 + \left(\frac{ea}{m}\right)^2}$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t$$

③. $\vec{A} = \left(y\frac{H}{2}; -x\frac{H}{2}; 0\right)$; $\vec{E} = -(ax, ay, 0)$, $a>0$

Ф-ия Лагранжа заряж. частицы в эл.-магн. поле:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v}) \quad , \text{где } \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$\varphi = a\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$, тогда:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{ea}{2}(x^2+y^2) + \frac{eH}{2c}(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

Найдем интегралы движения.

1) Ф-ия Лагранжа не зависит явно от времени => сохраняется обобщенная энергия:

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L = const$$

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{ea}{2}(x^2+y^2) = const$$

2) Ф-ия Лагранжа не зависит от z => сохран. обобщ. импульс

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = const \Rightarrow m\dot{z} = const$$

3) Для нахождения 3-го интеграла движ. перейдем к цилиндрич. координатам:

$x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$ =>

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{ea}{2}\rho^2 - \frac{eH}{2c}\rho^2\dot{\varphi}$$

таким образом ф-ия Лагранжа не зависит от φ => сохран. соответств. обобщ. импульс:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const \Rightarrow m\rho^2\left(\dot{\varphi} - \frac{eH}{2mc}\right) = const$$

Закон изменения коорд. $z(t)$ легко найти, воспользовавшись соотв. интегралом движения:

$$\dot{z} = const = \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \Rightarrow \boxed{z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t}$$

Чтобы найти $x(t)$ и $y(t)$ запишем ур-ния Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}+\frac{eH}{2c}y\right)+eax+\frac{eH}{2c}\dot{y}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+eax+\frac{eH}{c}\dot{y}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \Rightarrow m\ddot{y}+eay-\frac{eH}{c}\dot{x}=0$$

таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases}\ddot{x}+\frac{ea}{m}x+\frac{eH}{mc}\dot{y}=0\\ \ddot{y}+\frac{ea}{m}y-\frac{eH}{mc}\dot{x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{x}+\omega_0^2x+\gamma\dot{y}=0\\ \ddot{y}+\omega_0^2y-\gamma\dot{x}=0\end{cases}; \quad \text{где } \omega_0^2=\frac{ea}{m},\ \gamma=\frac{eH}{mc}$$

Домножим второе ур-ние на i и сложим с первым:

$$(\ddot{x}+i\ddot{y})+\omega_0^2(x+iy)+\gamma(\dot{y}-i\dot{x})=0$$

обозначим $\xi=x+iy$, тогда:

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi-i\gamma\dot{\xi}=0$$

ищем решение в виде: $\xi=e^{\tilde{\omega}t}$, где $\tilde{\omega}$ – некот. компл. число

$$\tilde{\omega}^2e^{\tilde{\omega}t}+\omega_0^2e^{\tilde{\omega}t}-i\gamma\tilde{\omega}e^{\tilde{\omega}t}=0$$

$$\tilde{\omega}^2-i\gamma\tilde{\omega}+\omega_0^2=0 \Rightarrow \tilde{\omega}=\frac{i\gamma\pm\sqrt{-\gamma^2-4\omega_0^2}}{2}$$

т.е. $i\omega_\pm=i\left(\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2+\omega_0^2}\right)$

Общее решение ур-ния имеет вид: $\xi=\tilde{C}_1e^{i\omega_+t}+\tilde{C}_2e^{i\omega_-t}$

где $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2$ – произв. компл. постоянные. Определим их из нач. условий:

$$\begin{cases}\xi(0)=\xi_0=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2\\ \dot{\xi}(0)=\dot{\xi}_0=i\omega_+\tilde{C}_1+i\omega_-\tilde{C}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{C}_1=\frac{\dot{\xi}_0-i\omega_-\xi_0}{i(\omega_+-\omega_-)}\\ \tilde{C}_2=\frac{i\omega_+\xi_0-\dot{\xi}_0}{i(\omega_+-\omega_-)}\end{cases}$$

т.е. $\xi(t)=\frac{1}{i(\omega_+-\omega_-)}\left[(\dot{\xi}_0-i\omega_-\xi_0)e^{i\omega_+t}+(i\omega_+\xi_0-\dot{\xi}_0)e^{i\omega_-t}\right]$

$x(t)=\mathrm{Re}\,\xi(t)$; $\quad x_0=\mathrm{Re}\,\xi_0$, $\quad \dot{x}_0=\mathrm{Re}\,\dot{\xi}_0$

$y(t)=\mathrm{Im}\,\xi(t)$; $\quad y_0=\mathrm{Im}\,\xi_0$; $\quad \dot{y}_0=\mathrm{Im}\,\dot{\xi}_0$

Выделяя действит. и мнимую части имеем:

3. Составить функцию и уравнение Лагранжа заряда e массы m в однородном магнитном поле H (в калибровке векторного потенциала $A = \left(\frac{yH}{2}, -\frac{xH}{2}, 0\right)$) и электрическом поле $E = -(ax, ay, 0)$, $a > 0$. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ радиус вектор частицы $\bar{r}(0) = \bar{r}_0$, а вектор скорости $\bar{V}(0) = \bar{V}_0$.

Решение:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi \;\rightarrow\; E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ax$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -ay$$

$$U_e = \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U_n = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) = \frac{ae}{2}(x^2 + y^2) - \frac{eH}{2c}(\dot{x}y - x\dot{y})$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{ae}{2}(x^2 + y^2) + \frac{eH}{2c}(\dot{x}y - x\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{eH}{2c}\dot{y} + aex + \frac{eH}{2c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} - \frac{eH}{2c}\dot{x} + aey - \frac{eH}{2c}\dot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + aex + \frac{eH}{c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + aey - \frac{eH}{c}\dot{x} = 0 \end{cases}$$

Первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = const = p_{z0}$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + \frac{ae}{2}(x^2 + y^2) = H_0$$

$$\begin{cases} m\ddot x + aex + \frac{eH}{c}\dot y = 0 \\ m\ddot y + aey - \frac{eH}{c}\dot x = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = A_1 e^{\lambda t} \\ y = A_2 e^{\lambda t} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m\lambda^2 A_1 + aeA_1 + \frac{eH}{c} A_2 \lambda = 0 \\ m A_2 \lambda^2 + aeA_2 - \frac{eH}{c} A_1 \lambda = 0 \end{cases}$$

$$det = \begin{pmatrix} m\lambda^2 + ae & \frac{eH}{c}\lambda \\ -\frac{eH}{c}\lambda & m\lambda^2 + ae \end{pmatrix} = 0$$

$$m^2\lambda^4 + 2mae\lambda^2 + m^2 e^2 + \frac{e^2H^2}{c^2}\lambda^2 = 0$$

$$D = \left(2mae + \frac{e^2H^2}{c^2}\right)^2 - 4m^2a^2e^2$$

$$\lambda^2 = \frac{-2mae \pm \sqrt{2mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^2}}{2m^2}$$

~~$x = A_1$ $x = x_0 e^{\lambda t}$ $y = y_0 e^{\lambda t}$~~

подставим λ в нашу систему уравнений и найдем $\frac{A_{21}}{A_{11}}$, подставим λ с минусом, и найдем $\frac{A_{12}}{A_{22}}$

ответ получим в виде

$$x = A_{11}\cos(\omega_1 t + \alpha) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \beta)$$

$$y = A_{21}\cos(\omega_1 t + \alpha) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \beta)$$

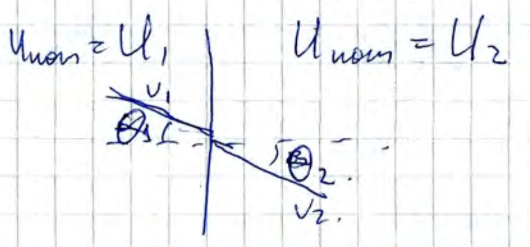
где $\omega_1 = \sqrt{\frac{+2mae + \sqrt{2mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^2}}{2m^2}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{-2mae + \sqrt{2mae\left(\frac{eH}{c}\right)^2 + \left(\frac{eH}{c}\right)^2}}{2m^2}}$

α, β – произвольные – зависят от нач. условий

№51

Дано: E_0, m ~~$U_0, m, R \ll R_0$~~ $\quad U(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ U_0 & r < R \end{cases}$

Найти $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

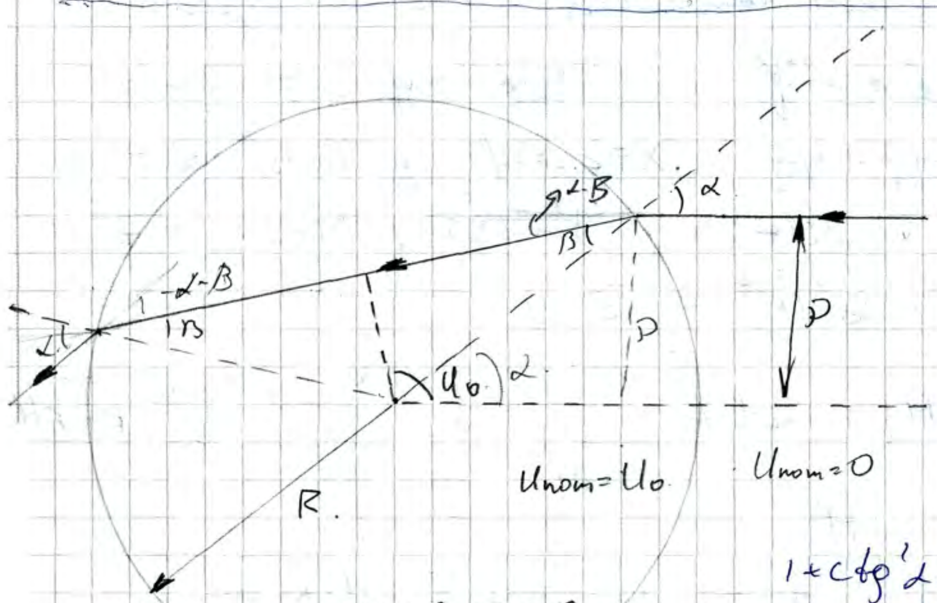


Uпот не зависит от координат вдоль осей, параллельных плоскости раздела между полупространствами => сохраняется проекция импульса частицы на эту плоскость.

$\Rightarrow v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$.

$$\frac{mv_1^2}{2} + U_1 = \frac{mv_2^2}{2} + U_2 \Rightarrow v_2^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{mv_1^2}{2} + U_1 - U_2\right).$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}$$



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_\infty^2}(-U_0)} = n.$$

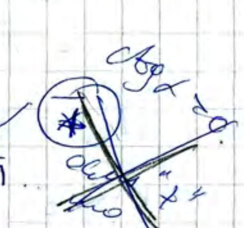
угол отклонения

$$\gamma = 2\cdot(\alpha - \beta).$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\gamma}{2} - \operatorname{ctg}\alpha \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{n}$$

$$R\cdot\sin\alpha = \rho.$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{R^2}{\rho^2}.$$



заменить притяжение отталкиванием

на рисунке формулы не изменятся

$$\cos\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{R^2-\rho^2}{\rho^2}}\,\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{n}.$$

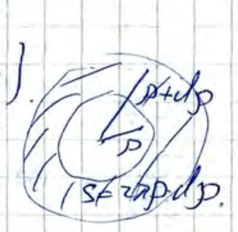
$$\frac{R^2-\rho^2}{\rho^2}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \cos^2\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{n}\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{n^2}.$$

$$(R^2-\rho^2)\sin^2\frac{\gamma}{2} = \rho^2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{n}\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\rho^2\cdot\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{n}\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{n^2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) = R^2\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

$$\rho^2 = \frac{R^2\sin^2\gamma/2}{1 - \frac{2}{n}\cos\gamma/2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{R^2n^2\sin^2\gamma/2}{n^2 - 2n\cos\gamma/2 + 1}$$

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \qquad \gamma \to \gamma + d\gamma \Longleftrightarrow \rho(\gamma) \Longleftrightarrow \rho(\gamma) + d\rho(\gamma).$$



$$dN = 2\pi\rho\cdot d\rho\cdot n \Rightarrow d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho.$$

$$d\Omega = 2\pi\sin\gamma\, d\gamma \Rightarrow d\sigma = \frac{\rho(\gamma)}{\sin\gamma}\cdot\left|\frac{d\rho}{d\gamma}\right|\cdot d\Omega.$$

$$2\rho\cdot d\rho = \frac{R^2n^2\, d\gamma}{(n^2-2n\cos\gamma/2+1)^2}\cdot\left(2\sin\gamma/2\cos\gamma/2\cdot\frac{1}{2}(n^2-2n\cos\gamma/2+1) - \sin^2\gamma/2\,(-2n)(-\sin\gamma/2)\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{R^2n^2\sin\gamma/2\, d\gamma}{(n^2-2n\cos\gamma/2+1)}\left(n^2\cos\gamma/2 - 2n\cos^2\gamma/2 + \cos\gamma/2 - n(1-\cos^2\gamma/2)\right) =$$

$$= \frac{R^2n^2\sin\gamma/2\, d\gamma}{(n^2-2n\cos\gamma/2+1)}\left(n^2\cos\gamma/2 - n\cos^2\gamma/2 + \cos\gamma/2 - n\right) =$$

$$= \frac{R^2n^2\sin\gamma/2\, d\gamma}{(n^2-2n\cos\gamma/2+1)^2}\cdot(n\cos\gamma/2 - 1)\cdot(n - \cos\gamma/2).$$

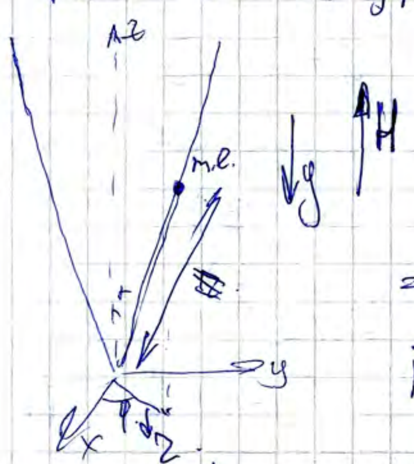
$$d\sigma = \frac{1}{2\sin\gamma}\cdot\frac{2\rho\, d\rho}{d\gamma}\cdot d\Omega. \qquad n = \sqrt{1 - \frac{2U_0}{mv_\infty^2}} = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}.$$

$$d\sigma = \frac{R^2n^2}{4\cos\gamma/2}\cdot\frac{(n\cos\gamma/2 - 1)(n - \cos\gamma/2)}{(1+n^2-2n\cos\gamma/2)^2}\, d\Omega.$$

№6

Дано: $m, e, 2\alpha, g, H$

Найти L, ур-е Л., закон движения, 1-ые интегралы.



~~$x = r\sin\alpha\cos\varphi \quad y = r\sin\alpha\sin\varphi \quad z = r\cos\alpha$~~

цилиндр. коорд: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$

$$T = \frac{m}{2}\left((\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi)^2 + (\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2 + \dot z^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right)$$

$$\vec H = \{0, 0, H\} = \operatorname{rot}\vec A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & \underset{0}{A_y} & \underset{0}{A_z} \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\vec k = \vec k H$$

$$A_x = -yH + \overset{=0}{A_0} = -yH$$

$$U_{оп} = mgz - \frac{e}{c}(A_x\dot x + A_y\dot y + A_z\dot z) = mgz + \frac{e}{c}yH\cdot\dot x =$$
$$= mgz + \frac{eH}{c}\cdot r\sin\varphi\cdot(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi).$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - mgz - \frac{eH}{c}r\sin\varphi\cdot(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi)$$

$z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \dot z = \dot r\,\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad -\frac{eH}{2c}r\dot r\sin 2\varphi + \frac{eH}{c}r^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi$

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2\dot\varphi^2 + \frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha}\right) - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{eH}{c}r\sin\varphi(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot r} = \frac{m}{2}\frac{2\dot r}{\sin^2\alpha} - \frac{eH}{c}r\sin\varphi\cos\varphi = \frac{m\dot r}{\sin^2\alpha} - \frac{eHr\sin\varphi\cos\varphi}{c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi + \frac{eH}{c}r\sin\varphi\cdot r\sin\varphi = mr^2\dot\varphi + \frac{eH}{c}r^2\sin^2\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 - mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{eH}{c}2r\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi - \frac{eH}{2c}\dot r\sin 2\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\frac{eH}{2c}r\cdot\dot r\cdot 2\cos 2\varphi + \frac{eH}{c}r^2\dot\varphi\,2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{eH}{c}r\cdot\dot r\cos 2\varphi + \frac{eH}{c}r^2\dot\varphi\sin 2\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot r}\right) = \frac{m\ddot r}{\sin^2\alpha} - \frac{eH}{2c}(\dot r\sin 2\varphi - 2r\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) = 2mr\cdot\dot r\dot\varphi + mr^2\ddot\varphi + \frac{eH}{c}(2r\sin^2\varphi\cdot\dot r + r^2 2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot\varphi).$$

$$\begin{cases} \frac{m\ddot r}{\sin^2\alpha} - \frac{eH}{2c}(\dot r\sin 2\varphi - 2r\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi) - mr\dot\varphi^2 + mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{eH}{2c}(4r\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi - \dot r\sin 2\varphi) = 0 \\ 2mr\cdot\dot r\dot\varphi + mr^2\ddot\varphi + \frac{eH}{c}(2r\sin^2\varphi\cdot\dot r + r^2\sin 2\varphi\cdot\dot\varphi) + \frac{eH}{c}(r\cos 2\varphi\cdot\dot r - r^2\dot\varphi\sin 2\varphi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m\ddot r}{\sin^2\alpha} - mr\dot\varphi^2 + mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{eH}{2c}(-2r\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi + 2r\cdot\dot\varphi(1 - \cos 2\varphi)) = 0 \\ mr^2\ddot\varphi + 2mr\cdot\dot r\dot\varphi + \frac{eH}{c}\cdot(r\cdot\dot r(1 - \cos 2\varphi) + r\cdot\dot r\cos 2\varphi) = 0 \end{cases}$$

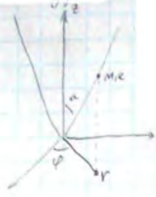
$$\begin{cases} \frac{m\ddot r}{\sin^2\alpha} - mr^2\dot\varphi^2 + mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{eH}{2c}(4r\dot\varphi\cos 2\varphi - 2r\dot\varphi) = 0. \\ mr^2\ddot\varphi + 2mr\cdot\dot r\dot\varphi + \frac{eH}{c}r\cdot\dot r = 0. \end{cases}$$

L явным образом зависит от r, φ, z. $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ первый интеграл $H = \dot r p_r + \dot\varphi\cdot p_\varphi - L =$

$$= \frac{m\dot r^2}{\sin^2\alpha} - \frac{eHr\cdot\dot r\sin\varphi\cos\varphi}{c} + mr^2\dot\varphi^2 + \frac{eH}{c}r^2\dot\varphi\sin^2\varphi - \frac{m}{2}r^2\dot\varphi^2 - \frac{m}{2}\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha} +$$
$$+ mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{eH}{2c}r\cdot\dot r\sin 2\varphi - \frac{eH}{c}r^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\dot r^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot\varphi^2\right) + mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha = H_0$$

№3 Частица m, e может двигаться по поверхности конуса с углом при вершине 2α. Ось конуса вертикальна. В направлении оси конуса действуют поле тяжести g и магнитное поле H. Записать ф. Лагранжа в цилиндрических координатах и найти з-н движения в квадратурах. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа.



$$x = r\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$z = z \qquad \dot{z} = \dot{z}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$U = mgz - \frac{e}{c}(\vec{A}, \vec{v})$$

$$\vec{H} = (0, 0, H) = \operatorname{rot}\vec{A} = \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\vec{k} = \vec{H}\vec{k}$$

$$A_x = -\frac{yH}{2}; \quad A_y = \frac{xH}{2}$$

$$U = mgz - \frac{e}{2c}(-\dot{x}yH + \dot{y}xH) = mgz - \frac{eH}{2c}\left(-r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi) + r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\right) =$$
$$= mgz - \frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi}$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right) - mgz + \frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi}$$

Т.к. частица движется по пов-ти конуса: $z = r\operatorname{ctg}\alpha$; $\dot{z} = \dot{r}\operatorname{ctg}\alpha$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\dot{r}}{\sin\alpha}\right)^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) - mgr\operatorname{ctg}\alpha + \frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi}$$

$\mathcal{L} \neq f(\varphi) \Rightarrow \varphi$ - циклическая:

$L_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{eH}{2c}r^2$ – первый интеграл (сохр. момент импульса вдоль оси z)

$\mathcal{L} \neq f(t) \Rightarrow$ сохраняется мех. энергия системы

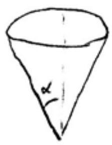
$$p_r = \frac{m\dot{r}}{\sin^2\alpha} \quad ; \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{eH}{2c}r^2$$

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + mr^2\dot{\varphi}^2 + \cancel{\frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi}} - \frac{m\dot{r}^2}{2\sin^2\alpha} - \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgr\operatorname{ctg}\alpha - \cancel{\frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi}} =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\dot{r}}{\sin\alpha}\right)^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) + mgr\operatorname{ctg}\alpha = E_0 \text{ – I первый интеграл.}$$

$$U_{эфф} = mgr\operatorname{ctg}\alpha - \frac{eH}{2c}r^2\dot{\varphi} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U_{эфф}(r)\right)}} \text{ – закон движения.}$$

3.



$\downarrow\vec{g} \; \updownarrow\vec{H}$ В качестве обобщённых координат выберем z, φ.

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{z}^2}{tg^2\alpha} + \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{mgz}{tg\,\alpha} + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v});$$

$$\vec{H} = rot\vec{A}, \quad \vec{H} = (0, 0, H) \Rightarrow \vec{A} = \left(-\frac{1}{2}yH, +\frac{1}{2}xH, 0\right)$$

$$(\vec{A}\vec{v}) = \Big(-\frac{1}{2}H\Big(z\cdot\sin\varphi\cdot(\dot{z}\cos\varphi - z\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}) + z\cdot\cos\varphi\,*$$

$$*\,(\dot{z}\sin\varphi + z\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi})\Big)\Big) = \frac{1}{2}H(z^2\dot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi + z^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}Hz^2\dot{\varphi}.$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{z}^2}{\sin^2\alpha} + z^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{mgz}{tg\,\alpha} + \frac{e}{2c}r^2H\dot{\varphi}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const, \quad H = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\cdot\dot{z} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\cdot\dot{\varphi} - L =$$

$$= \frac{m\dot{z}^2}{\sin^2\alpha} + mz^2\dot{\varphi}^2 + \frac{e}{2c}r^2\cdot H\dot{\varphi} - L =$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{\dot{z}^2}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}mz^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mgz}{tg\,\alpha}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = const = P_\varphi.$$

$$P_\varphi = mz^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}r^2H$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\dot{z}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}mz^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mgz}{tg\,\alpha} = E \\ mz^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}r^2H = P_\varphi \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}mz^2\left(\frac{P_\varphi - \frac{e}{2c}r^2H}{mz^2}\right)^2 + \frac{mgz}{tg\,\alpha} = E$$

$$\dot{z}^2 + \sin^2\alpha\cdot\frac{\left(P_\varphi - \frac{e}{2c}r^2H\right)^2}{m^2z^2} + 2gz\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2E}{m}\sin^2\alpha$$

$$\int\limits_{z(t_0)}^{z(t)}\frac{dz}{\sqrt{\frac{2E}{m}\sin^2\alpha - gz\cdot\sin 2\alpha - \left(P_\varphi - \frac{e}{2c}z^2H\right)^2\frac{\sin^2\alpha}{m^2z^2}}} = t - t_0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - \frac{e}{2c}z^2H}{mz^2} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t}\frac{P_\varphi - \frac{e}{2c}\cdot H\cdot z^2(t)}{mz^2(t)}\,dt.$$

$\boxed{№7}$.

$$H = x\sin\alpha \qquad T = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

$$U_1 = mgH = mgx\sin\alpha.$$

$$U_2 = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \infty & x \le 0. \end{cases}$$

$$U = U_1 + U_2.$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx\sin\alpha - U_2.$$

$$p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}.$$

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\frac{p^2}{m^2} + mgx\sin\alpha + U_2(x) = \frac{p^2}{2m} + mgx\sin\alpha + U_2(x)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + mgx\sin\alpha + U_2(x) = 0.$$

$$S = -H_0 t + S'(x)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + mgx\sin\alpha + U_2(x) = H_0.$$

$$\frac{\partial S'}{\partial x} = \sqrt{2m(H_0 - mgx\sin\alpha - U_2(x))}$$

обход туда и обратно

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dS}{dx}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{H_0}{mg\sin\alpha}} \sqrt{2m(H_0 - mgx\sin\alpha)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{2m}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(H_0 - mgx\sin\alpha)^{3/2}\Big|_0^{\frac{H_0}{mg\sin\alpha}} * \frac{1}{mg\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{2m}\left(\frac{2}{3}\right)H_0^{3/2}\frac{1}{mg\sin\alpha} = I$$ – адиабатический инвариант.

$$H_0^{3/2} = \frac{3}{2}\frac{I\cdot\pi}{\sqrt{2m}}\,mg\sin\alpha$$

$$\underline{H_0 \sim \sin\alpha^{2/3}}$$

в верхней точке (B) $H_0 = U = mgx\sin\alpha$

$x\cdot\sin\alpha = \text{const}\cdot\sin\alpha^{2/3}$ $\qquad x = \underline{\text{const}\cdot\sin\alpha^{-1/3}}$.

$\underline{H = x\sin\alpha = \text{const}\,\sin\alpha^{2/3}}$

Решение

$H - x\sin\alpha$

$T - \frac{m\dot{x}^2}{2}$

$U_1 = mgH = mgx\sin\alpha$

$U_2 = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \infty & x \le 0 \end{cases}$

$U = U_1 + U_2$

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx\sin\alpha - U_2$

$p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = p/m$

$H = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\frac{p^2}{m^2} + mgx\sin\alpha + U_2(x) = \frac{p^2}{2m} + mgx\sin\alpha + U_2(x)$

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + mgx\sin\alpha + U_2(x) = 0$

$S = -H_0 t + S'(x)$

$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + mgx\sin\alpha + U_2(x) = H_0$

$\frac{\partial S'}{\partial x} = \sqrt{2m(H_0 - mgx\sin\alpha - U_2(x))}$

$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial S}{\partial x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,2\int_0^{H_0/mg\sin\alpha}\sqrt{2m(H_0 - mgx\sin\alpha)}\,dx =$

$= \frac{1}{\pi}\sqrt{2m}\left(-\frac{2}{3}\right)(H_0 - mgx\sin\alpha)^{3/2}\Big|_0^{H_0/mg\sin\alpha}\frac{1}{mg\sin\alpha} =$

$= \frac{1}{\pi}\sqrt{2m}\left(\frac{2}{3}\right)H_0^{3/2}\frac{1}{gm\sin\alpha} = I$ адиабатический инвариант.

$H_0^{3/2} = \frac{3}{2}\frac{I\pi}{\sqrt{2m}}mg\sin\alpha$

$H_0 \sim \sin\alpha^{2/3}$

l верхн. т. (B) $H_0 = U = mgx\sin\alpha$

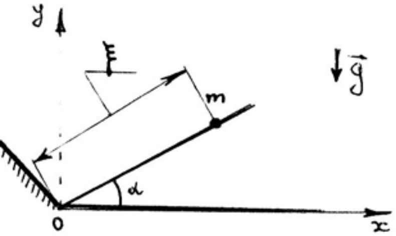
$x\sin\alpha = \text{const}\,\sin\alpha^{2/3}$

$\underline{H = x\sin\alpha = \text{const}\cdot\sin\alpha^{2/3}}$

$\underline{x = \text{const}\cdot\sin\alpha^{-1/3}}$

№3.

Частица движется по наклонной плоскости (составляющей угол α с горизонтом) из точки B в точку A, упруго отражаясь от стенки в точке A. Найти, как изменяется энергия и максимальная высота подъема частицы при медленном изменении угла α



Введем обобщенную координату „ξ"

Тогда $\begin{cases} x = \xi\cos\alpha \\ y = \xi\sin\alpha \end{cases}$

Т.о. имеем

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2\cos^2\alpha + \dot{\xi}^2\sin^2\alpha) = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2$$

$$U = mgy = mg\xi\sin\alpha$$

$\Longrightarrow$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - mg\xi\sin\alpha$$

$$P_\xi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} = m\dot{\xi} \quad\Longrightarrow\quad \dot{\xi} = \frac{P_\xi}{m}$$

Запишем гамильтониан.

$$H = T + U = \frac{1}{2m}P_\xi^2 + \xi mg\sin\alpha$$

отсюда видно, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad\Rightarrow\quad H = E \quad, \text{т.е.} \quad P_\xi = \sqrt{2m(E - \xi mg\sin\alpha)}$$

$P_\xi(\xi)$ – периодическая ф-ия с периодом : $2\xi_{max} = \dfrac{2E}{mg\sin\alpha}$

Переменная „действие":

$$I_\xi = \frac{1}{2\pi}\oint P_\xi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi_{max}}\sqrt{2m}\,(E - \xi mg\sin\alpha)^{1/2}d\xi = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\left\{-\frac{2}{3}\frac{(E-\xi mg\sin\alpha)^{3/2}}{mg\sin\alpha}\right\}\Bigg|_0^{\xi_{max}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2m}}{3\pi mg\sin\alpha}E^{3/2}$$

Но действие – адиабатический инвариант, т.е. при „медленном" $\alpha(t)$ не меняется. Поэтому

$$E^{2/3} = \frac{3\pi mg\sin\alpha}{2\sqrt{2m}}I_\xi \quad\Longrightarrow\quad E = \left(\frac{3\pi mg I_\xi}{2\sqrt{2m}}\right)^{2/3}\sin^{2/3}\alpha$$

Но

$$y_{max} = \xi_{max}\sin\alpha = \frac{E}{mg} \quad\Longrightarrow\quad y_{max} \sim \sin^{2/3}\alpha$$

__Ответ__ :

$$E = \left(\frac{3\pi mg I_\xi}{2\sqrt{2m}}\right)^{2/3}\sin^{2/3}\alpha$$

$$y_{max} \sim \sin^{2/3}\alpha$$

|58|

Дано: $e, m, \vec{E} = (ax, 0, bz)$

Найти: траектория, закон движения.

$$U_{об} = e\varphi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\vec{A}(r,t). \quad \vec{A} = 0 \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0.$$

$$\vec{E} = (ax, 0, bz) = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}^{=0} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

$$E_x = ax = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \qquad \frac{d\varphi_1}{\partial x} = -ax \qquad \varphi_1 = \varphi_{10}^{=0} - \frac{ax^2}{2} = -\frac{ax^2}{2}.$$

$$E_z = bz = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \qquad \varphi_2 = \varphi_{20} - \frac{bz^2}{2} = -\frac{bz^2}{2}.$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}(ax^2 + bz^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{2}(ax^2 + bz^2).$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad p_y = m\dot{y} \qquad p_z = m\dot{z}.$$

$$H = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e}{2}(ax^2 + bz^2) =$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e}{2}(ax^2 + bz^2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) - \frac{e}{2}(ax^2 + bz^2) = 0$$

$$S = -H_0 t + S'(r, \theta, \varphi).$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right) - \frac{e}{2}(ax^2 + bz^2) = H_0.$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 - \frac{eax^2}{2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 - \frac{ebz^2}{2} = H_0.$$

$$S' = c_1 y + S''(x, z).$$

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S''}{\partial x}\right)^2 - \frac{eax^2}{2}}_{c_2} + \frac{c_1^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S''}{\partial z}\right)^2 - \frac{ebz^2}{2}}_{c_3} = H_0.$$

$$c_2 + \frac{c_1^2}{2m} + c_3 = H_0$$

$$\frac{\partial S''}{\partial x} = \sqrt{2m\left(c_2 + \frac{eax^2}{2}\right)}, \qquad \frac{\partial S''}{\partial z} = \sqrt{2m\left(c_3 + \frac{ebz^2}{2}\right)}$$

$$S = -H_0 t + c_1 y + \int \sqrt{2m\left(c_2 + \frac{eax^2}{2}\right)}\,dx + \int \sqrt{2m\left(c_3 + \frac{ebz^2}{2}\right)}\,dz =$$

$$= -H_0 t + c_1 y + \sqrt{mea}\int \sqrt{\frac{2c_2}{ea} + x^2}\,dx + \sqrt{meb}\int\sqrt{\frac{2c_3}{eb} + z^2}\,dz =$$

$$= -H_0 t + c_1 y + \sqrt{mea}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2c_2}{ea} + x^2} + \frac{c_2}{ea}\ln\left|x + \sqrt{\frac{2c_2}{ea} + x^2}\right|\right\} +$$

$$+ \sqrt{meb}\left\{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{2c_3}{eb} + z^2} + \frac{c_3}{eb}\ln\left|z + \sqrt{\frac{2c_3}{eb} + z^2}\right|\right\}$$

(3) Найти траекторию и закон движения частицы с зарядом e, массой m в неоднородном электрическом поле $\vec{E} = (ax, 0, bz)$ с помощью уравнения Гамильтона-Якоби [11]

запишем функцию Лагранжа частицы

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - e\varphi$$

φ – потенциал, соответствующий полю $\vec{E}$

$$\varphi = -\frac{ax^2}{2} - \frac{bz^2}{2}$$

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{eax^2}{2} + \frac{ebz^2}{2}$$

обобщённые импульсы

$$p_x = m\dot{x}$$

$$p_y = m\dot{y}$$

$$p_z = m\dot{z}$$

гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{eax^2}{2} - \frac{ebz^2}{2}$$

уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) - \frac{eax^2}{2} - \frac{ebz^2}{2} = 0$$

полный интеграл

$$S = -E_0 t + S_x(x) + \chi_y y = 0$$

подставим его в уравнение Гамильтона-Якоби

$$-E_0 + \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_x}{dx}\right)^2 - \frac{eax^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_z}{dz}\right)^2 - \frac{ebz^2}{2}\right) + \frac{1}{2m}\chi_y^2 = 0$$

переменные разделяются, получаем

$\boxed{12}$

$$\alpha_x = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_x}{dx}\right)^2 - \frac{eax^2}{2}$$

$$\alpha_z = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_z}{dz}\right)^2 - \frac{ebz^2}{2}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{2m}\chi_y^2$$

$$\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = E_0$$

$$S = -E_0 t + \int\sqrt{2m\left(\alpha_x + \frac{eax^2}{2}\right)} + \int\sqrt{2m\left(\alpha_z + \frac{ebz^2}{2}\right)} + \sqrt{2m(E_0 - \alpha_x - \alpha_z)}\, y$$

согласно теореме Якоби получим

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E_0}$$

$$t_0 = t - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E_0 - \alpha_x - \alpha_z}}\, y$$

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E_0 - \alpha_x - \alpha_z}}\, y$$

$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} \qquad \beta_z = \frac{\partial S}{\partial \alpha_z}$$

$$\beta_x = \sqrt{2m}\int\frac{1}{2\sqrt{\alpha_x + \frac{eax^2}{2}}} - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E_0 - \alpha_x - \alpha_z}}\, y$$

$$\beta_z = \sqrt{2m}\int\frac{1}{2\sqrt{\alpha_z + \frac{ebz^2}{2}}} - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E_0 - \alpha_x - \alpha_z}}\, y$$

$$\beta_x + t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{ea}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha_x}{2ea} + x^2}}$$

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{\alpha_x}{2ea}}\right) = \sqrt{\frac{ea}{m}}\,(\beta_x + t - t_0)$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{ea}{m}}$$

$$x + \sqrt{x^2 + \frac{d_x}{2ea}} = e^{w_x(\beta_x + t - t_0)}$$

$$2x^2 + \frac{d_x}{2ea} + 2x\sqrt{x^2 + \frac{d_x}{2ea}} = e^{2w_x(\beta_x + t - t_0)}$$

$$2x\, e^{w_x(\beta_x + t - t_0)} = e^{2w_x(\beta_x + t - t_0)} - \frac{d_x}{2ea}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{w_x(\beta + t - t_0)} - \frac{d_x}{2ea} e^{-w_x(\beta_x + t - t_0)}\right)$$

аналогично $\left(w_z = \sqrt{\frac{eb}{m}}\right)$

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{w_z(\beta_z + t - t_0)} - \frac{d_z}{2eb} e^{-w_z(\beta_z + t - t_0)}\right)$$

обозначим $A = \frac{1}{2} e^{w_x \beta_x}$ $\quad B = -\frac{1}{2}\frac{d_x}{2ea} e^{-w_x \beta_x}$

$$C = \frac{1}{2} e^{w_z \beta_z} \qquad D = -\frac{1}{2}\frac{d_z}{2eb} e^{-w_z \beta_z}$$

$$V_y = \frac{2\sqrt{E_0 - d_x - d_z}}{\sqrt{2m}}$$

закон движения

$$x = A e^{w_x(t - t_0)} + B e^{-w_x(t - t_0)}$$

$$y = V_y (t - t_0)$$

$$z = C e^{w_z(t - t_0)} + D e^{-w_z(t - t_0)}$$

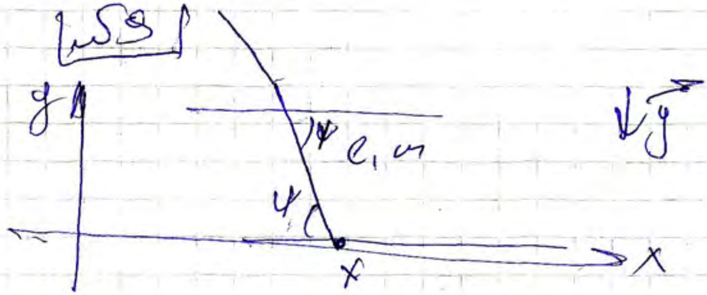
траектория

$$x = A \cdot e^{\frac{w_x}{v_y} y} + B e^{-\frac{w_x}{v_y} y} \qquad z = C e^{\frac{w_z}{v_y} y} + D e^{-\frac{w_z}{v_y} y}$$

или (в виде $f(x, y, z) = 0$)

$$x + z - \left(A \cdot e^{\frac{w_x}{v_y} y} + B e^{-\frac{w_x}{v_y} y}\right) - \left(C e^{\frac{w_z}{v_y} y} + D e^{-\frac{w_z}{v_y} y}\right) = 0$$

№59



$$T = \frac{m V_m^2}{2} + \frac{1}{2} I_z \dot{\psi}^2 \qquad I_z = \frac{m l^2}{12} \text{ — относ. центра масс.}$$

$$x_m = X - \frac{l}{2}\cos\psi \qquad y_m = l/2 \sin\psi$$

$$\dot{x}_m = \dot{x} + l/2 \sin\psi \cdot \dot{\psi} \qquad \dot{y}_m = l/2 \cos\psi \cdot \dot{\psi}$$

$$V_m^2 = (\dot{x} + l/2 \sin\psi \cdot \dot{\psi})^2 + (l/2 \cos\psi \cdot \dot{\psi})^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + \dot{x}\, l \sin\psi \cdot \dot{\psi} + \frac{l^2}{4}\dot{\psi}^2$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{x} l \sin\psi \cdot \dot{\psi} + \frac{l^2}{4}\dot{\psi}\right) - mg\frac{l}{2}\sin\psi$$

$$p_{x_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\sin\psi \cdot \dot{\psi}\right)$$

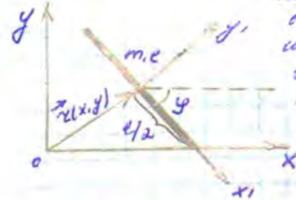
$$E = \frac{p_{x_0}^2}{2m} + \left(\frac{m l^2}{24}\cos^2\psi + \frac{m l^2}{24}\right)\dot{\psi}^2 + \frac{mgl}{2}\sin\psi = E_0$$

$$\dot{\psi}^2 = \sqrt{\frac{E - \frac{p_{x_0}^2}{2m} - \frac{mgl}{2}\sin\psi}{\frac{ml^2}{8}\cos^2\psi + \frac{ml}{24}}}$$

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{E - \frac{p_{x_0}^2}{2m} - \frac{mgl}{2}\sin\psi}{ml^2/8 \cos^2\psi + \frac{ml}{24}}}} = t - c$$

③ Стержень массы m и длины ℓ движется в вертикальной плоскости так, что один из его концов скользит по горизонтальной прямой (есть поле тяжести). Найти закон движения стержня в квадратурах.

Решение.



Опишем движение стержня с помощью координат центра масс x, y (радиус-вектор $\vec{r}$ показывает положение центра инерции стержня относительно центра лабораторной СК), а также угла φ между стержнем и горизонтальным направлением.

Запишем ф-цию Лагранжа

$$(*)\ \mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mgy$$

Т.к стержень скользит одним концом по горизонтальной прямой, то $y = \frac{\ell}{2}\sin\varphi$ ($\dot{y} = \frac{\ell}{2}\cos\varphi$)

Т.к. мы описываем движение центра масс стержня, то

$$I = \frac{m\ell^2}{12}$$

Учитывая это перепишем (*) в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\cos^2\varphi\right) + \frac{m\ell^2\dot{\varphi}^2}{24} - \frac{mg\ell}{2}\sin\varphi$$

Зависимость $x(t)$ определим из ур-ния Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \rightarrow x(t) = v_0t + x_0,$$ где v_0 и x_0 имеют смысл начальной скорости стержня, направленной по оси x и начальной абсциссы соответственно.

Т.к функция Лагранжа явно не зависит от времени, то приводим закон сохранения обобщённой энергии

$$H = \ldots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L} = H_0$$

$$H_0 = m\dot x^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{12}ml^2\dot\varphi^2 - L =$$

$$= m\dot x^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{12}ml^2\dot\varphi^2 - \frac{m\dot x^2}{2} - \frac{m}{2}\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2$$

$$- \frac{1}{24}ml^2\dot\varphi^2 + mg\frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$, выразим $\dot\varphi$ (должно б. отриц. т.к. угол φ уменьш. с течением времени)

$$H_0 = \dot\varphi^2\left(\frac{ml^2}{8}\cos^2\varphi + \frac{1}{24}ml^2\right) + \frac{m\dot x^2}{2} + \frac{mgl}{2}\sin\varphi$$

$$\dot\varphi^2 = \frac{H_0 - \frac{m\dot x^2}{2} - \frac{mgl}{2}\sin\varphi}{\frac{ml^2}{8}\cos^2\varphi + \frac{1}{24}ml^2} = 12\,\frac{2H_0 - m\dot x^2 - mgl\sin\varphi}{3ml^2\cos^2\varphi + ml^2}$$

$$= \{\dot x = v_0\} = 12\,\frac{2H_0 - mv_0^2 - mgl\sin\varphi}{3ml^2\cos^2\varphi + ml^2}$$

$$\dot\varphi = -\sqrt{12}\sqrt{\frac{2H_0 - mv_0^2 - mgl\sin\varphi}{ml^2(3\cos^2\varphi + 1)}}$$

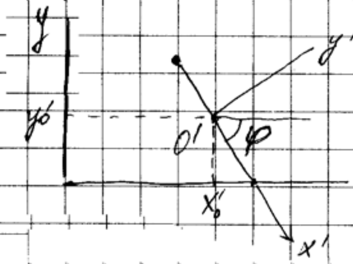
$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{12}\sqrt{\frac{2H_0 - mv_0^2 - mgl\sin\varphi}{ml^2(3\cos^2\varphi + 1)}}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = -\frac{l}{\sqrt{12}}\int\frac{\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}\,d\varphi}{\sqrt{2\frac{H_0}{m} - v_0^2 - gl\sin\varphi}}$$ – закон движения стержня $\varphi(t)$ в квадратурах

$$= t - t_0$$

<u>Ответ.</u> $$t - t_0 = \frac{-l}{\sqrt{12}}\int\frac{\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}\,d\varphi}{\sqrt{\frac{2H_0}{m} - v_0^2 - gl\sin\varphi}},$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$



$$x_0' = x$$
$$y_0' = \frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$\dot{x}_0' = \dot{x}$$
$$\dot{y}_0' = \frac{l}{2}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$J_{z'z'} = \frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$U = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2}{8} + \frac{ml^2}{24}\dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_{x_0} = m\dot{x}$$

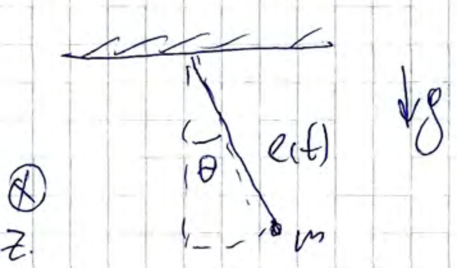
$$H_0 = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2}{8} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{24} + \frac{mgl}{2}\sin\varphi =$$

$$= \frac{p_{x_0}^2}{2m} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{4}\left(\frac{\cos^2\varphi}{2} + \frac{1}{6}\right) + \frac{mgl}{2}\sin\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{4}{ml^2}\left(H_0 - \frac{p_{x_0}^2}{2m} - \frac{mgl}{2}\sin\varphi\right)\frac{6}{(3\cos^2\varphi+1)}}$$

$$\int dt = \int\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\frac{24\left(H_0 - \frac{p_{x_0}^2}{2m} - \frac{mgl}{2}\sin\varphi\right)}{ml^2(3\cos^2\varphi+1)}}}$$

|5.10| Дано: $l = l(t)$ Найти амплитуду (t)



в уравнении Гамильтона-Якоби предполагаем, что $l = const$.
условие адиабатически медленного изменения $T \cdot \frac{dl}{dt} << l$.

не влияет const

$U = -mgl\cos\theta$.

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\underbrace{\dot\rho^2}_{0\,(l=const)} + \underbrace{\rho^2}_{=l}\dot\theta^2 + \underbrace{\dot z^2}_{=0}) + mgl\cos\theta = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + mgl(1-\frac{\theta^2}{2}) = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{P_\theta}{ml^2}$$

$$H = P_\theta\dot\theta - L = \frac{P_\theta^2}{ml^2} - \frac{m}{2}l^2\frac{P_\theta^2}{m^2l^4} + mgl\frac{\theta^2}{2} = \frac{P_\theta^2}{2ml^2} + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \qquad P_\theta = \frac{\partial S}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$S = -H_0 t + S'(\theta)$$

$$-H_0 + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial S'}{\partial\theta} = \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\frac{\theta^2}{2}\right)} = P_\theta$$

$$\int_{-x_0}^{+x_0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint P_\theta\, d\theta$$

условия обращения корня в ноль

$$\theta^2 = \frac{2H_0}{mgl} \qquad \theta = \pm\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\,2\int_{-\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}}^{\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}} \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\frac{\theta^2}{2}\right)}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{m^2l^3g}\;2\,\frac{H_0}{mgl}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) =$$

$$= ml\sqrt{gl}\,\frac{H_0}{mgl} = H_0\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$H_0 = I_\theta\sqrt{\frac{g}{l(t)}}$$

$$H_0 = \frac{ml^2}{2}\langle\dot\theta^2\rangle + mgl\frac{\langle\theta^2\rangle}{2}$$

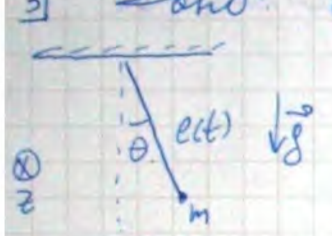
$$\langle\theta^2\rangle = \frac{\theta_0^2}{2} \qquad \langle\dot\theta^2\rangle = \frac{\theta_0^2}{2}\omega^2$$

$\theta_0(t)$ - амплитуда

$$H_0 = \frac{mg}{2}l\,\theta_0^2$$

$$l^{-1/2} = const\cdot l\cdot\theta_0^2 \qquad \underline{\theta_0 = const\cdot l^{-3/4}}$$

3 Дано: $l = l(t)$ Найти $\theta_0(t)$.



В уравнении Гамильтона-Якоби полагаем $l = const$
Условие адиабатически медленного изменения длины: $T\cdot\frac{dl}{dt} << l$, где T-хар. период

$$U = -mgl\cos\theta \approx -mgl\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right).$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\underbrace{\dot\rho^2}_{0} + \underbrace{\rho^2}_{l^2}\dot\theta^2 + \underbrace{\dot z^2}_{0}) + mgl\cos\theta = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + mgl\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

const не влияет

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}.$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{P_\theta}{ml^2}$$

$$H = P_\theta\dot\theta - L = \frac{P_\theta^2}{2ml^2} + mgl\frac{\theta^2}{2}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \qquad P_\theta = \frac{\partial S}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$S = -H_0 t + S'(\theta).$$

$$-H_0 + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{dS'}{d\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$\frac{dS'}{d\theta} = \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\frac{\theta^2}{2}\right)} = P_\theta.$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint P_\theta\, d\theta.$$

условия обращения корня в нуль:

$$\theta^2 = \frac{2H_0}{mgl} \Rightarrow \theta = \pm\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\underset{\text{т.к. полный цикл}}{2}\int_{-\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}}^{\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}} \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\frac{\theta^2}{2}\right)}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}}^{\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}}\sqrt{\underbrace{2ml^2H_0}_{a} - \underbrace{m^2gl^3\theta^2}_{b^2}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{\sqrt b}\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\theta\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}}^{\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2ml^2H_0}{ml\sqrt{gl}}\left\{\arcsin\left(\frac{ml\sqrt{gl}}{l\sqrt{2mH_0}}\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}\right) - \arcsin\left(-\frac{ml\sqrt{gl}}{l\sqrt{2mH_0}}\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2H_0}{\sqrt{g/l}}\underbrace{\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right)}_{\pi} = \frac{2H_0}{\sqrt{g/l}}.$$

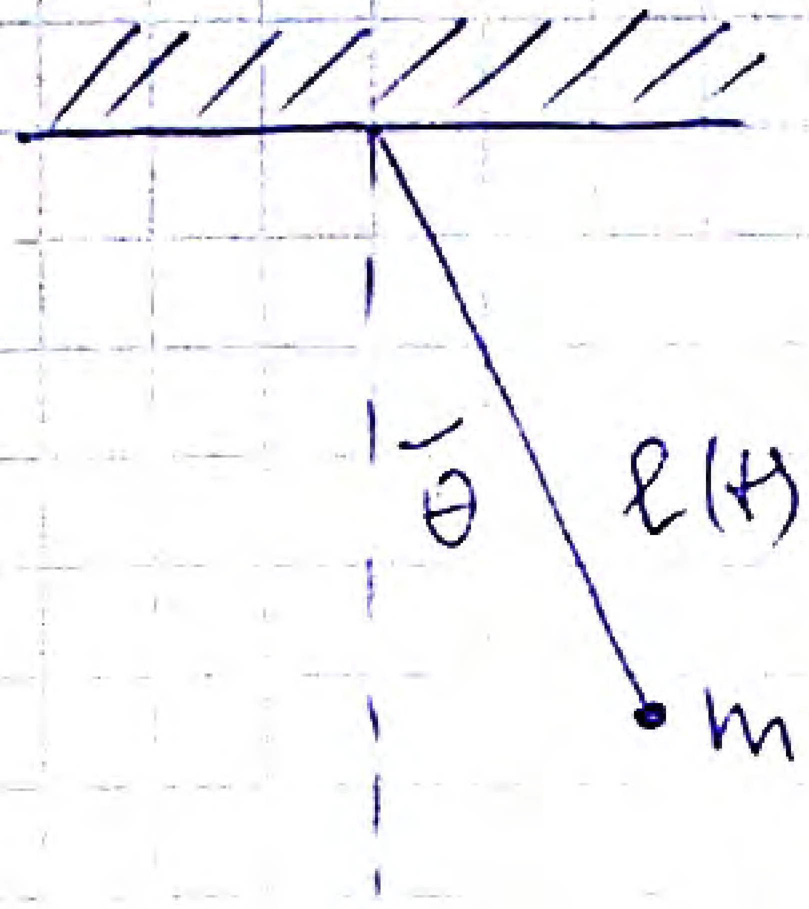
$2H_0 = \sqrt{g/l}\; I \Rightarrow$ полная энергия маятника пропорциональна $l^{-1/2}$.

$$H_0 = \frac{mgl}{2}\theta_0^2 = \frac12\sqrt{g/l}\; I. \qquad \theta_0 \text{ - угловая амплитуда.}$$

$$\theta_0^2 = \frac{1}{mg}\sqrt{g}\cdot I\cdot l^{-3/2} \Rightarrow \theta_0 \sim l^{-3/4}$$

Ответ: $E \sim l^{-1/2}$, $\theta_0 \sim l^{-3/4}$.

3). Найти, как изменяется амплитуда колебаний матем. маятника при медленном изменении его длин.



ф-ция Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\underset{\dot{\ell}=0}{\dot{\rho}^2} + \underset{\ell^2}{\rho^2}\dot{\theta}^2\right) +$$

$$+ mgl\cos\theta = \ldots$$

считаем, что $l = const$, что

$$\ldots = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta = \left\{\cos\theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = p_\theta = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

ф-ция Гамильтона: $H = \sum^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L =$

$$= p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{m}{2}l^2\frac{p_\theta^2}{m^2l^4} + mgl\frac{\theta^2}{2} =$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

ур-ние Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0.$$

$$S = -H_0 t + W(\theta, H_0)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_0$$

$$-H_0 + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + mgl\,\frac{\theta^2}{2} = 0.$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = P_\theta = \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\,\frac{\theta^2}{2}\right)}$$

смотрим, когда корень обращ в ноль.

$$H_0 - mgl\,\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$\theta^2 = \frac{2H_0}{mgl} \Rightarrow \theta = \pm\sqrt{\frac{2H_0}{mgl}}$$

переменная действия

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint P_\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{2H_0/mgl}}^{\sqrt{2H_0/mgl}} \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\,\frac{\theta^2}{2}\right)}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sqrt{2H_0/mgl}} \sqrt{2ml^2\left(H_0 - mgl\,\frac{\theta^2}{2}\right)}\, d\theta =$$

$$= \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \underbrace{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}}_{\text{в подст.} = 0} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, ml\sqrt{gl}\int_{0}^{\sqrt{2H_0/mgl}} \sqrt{\overbrace{\frac{2H_0}{mgl}}^{=a^2} - \theta^2}\; d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} ml\sqrt{gl}\,\frac{H_0}{mgl}\Big\{\underbrace{\arcsin\sqrt{\frac{2H_0\,mgl}{mgl\,2H_0}}}_{=\pi/2} - \underbrace{\arcsin 0}_{=0}\Big\} =$$

$$= H_0\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow H_0 = J\sqrt{\frac{g}{l(t)}}$$

маятник сов. гарм. колеб. с медленно мен. амплитудой $\theta_0(t)$ и частотой $\omega(t)$.

$$H_0 = \frac{ml^2}{2}\langle\dot\theta^2\rangle + \frac{mgl}{2}\langle\theta^2\rangle$$

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{\theta_0^2}{2} \qquad \langle\dot\theta^2\rangle = \frac{\theta_0^2}{2}\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow H_0 = \frac{ml^2}{2}\frac{\theta_0^2}{2}\frac{g}{l} + \frac{mgl}{2}\frac{\theta_0^2}{2} = \frac{mgl}{2}\theta_0^2$$

$$H_0 = J\sqrt{\frac{g}{l(t)}} = \frac{mgl}{2}\theta_0^2$$

$$J = \sqrt{\frac{l(t)}{g}}\,\frac{mg\,l(t)}{2}\,\theta_0^2 = const$$

$$l^{3/2}\theta_0^2 = const \Rightarrow l^{3/4}\theta_0 = const$$

углов. амплитуда θ_0

линейная ампл. $l\theta_0$

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет
Теоретическая механика и основы механики сплошной среды

Билет 7

1. Задача двух тел. Общее решение задачи (в квадратурах) методом интегралов движения.
2. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера.
3. Найти, как изменяется амплитуда колебаний математического маятника при медленном изменении его длины.

Зав. кафедрой теоретической физики, академик РАН   А.А. Славнов

1. 75, 86 из Халилова
116 Ольховский
42 Ландау
6, 122, 123, 127-130, 133, 153 Петкевич

сбр 45 метод инт-в движ. Халилов Чижов

2. сбр 15 семинаров
366 Ольховский
377 Петкевич

3. 258 ольховский

Для случая мат. колебаний маятника:

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 + m^2 g l^3 \theta^2 = 2ml^2 E$$

где E - медленно мен-ся полн. эн-я маятника.

Инт-уя при постоянных l и E, полный инт-л:

$$W = \sqrt{m^2 g l^3}\left\{\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{2E}{mgl} - \theta^2} + \frac{E}{mgl}\arcsin\frac{\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mgl}}}\right\}$$

Приращение ф-ии W за полный цикл изм-я θ в пределах $\pm\sqrt{2E/mgl}$ равно

$$\Delta W = 2\pi\frac{E}{\omega} = 2\pi I$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$, а I - переменная действия. Поскольку I - адиабатическая инварианта, то полн. эн. маятника будет равна

$$E(t) = I\omega(t) \qquad ①$$

В соотв-ии с док-м инвар-ти I эн-я в ф-ии ⑤ явл-ся эн-й, усредн-й по некоторому интервалу времени:

$$\bar{E} = \frac{ml^2}{2}\bar{\dot{\theta}}^2 + mgl\,\frac{\bar{\theta}^2}{2}$$

Учитывая, что маятник совершает гарм. кол-е с медленно меняющейся амплитудой $\theta_0(t)$ и частотой $\omega(t)$, в рез-те усред-ия получим $\bar{\theta}^2 = \frac{\theta_0^2}{2}$ $\qquad \bar{\dot{\theta}}^2 = \frac{\theta_0^2}{2}\omega^2$

Таким образом $\bar{E} = \frac{mg}{2} l\theta_0^2$. ③

Наконец из ① и ③ получим $l^{3/4}\theta_0 = \mathrm{const}$

При бескон-о мед-м уменьшении подвеса маятника его угловая амплитуда θ_0 уменьшается, а лин-я амп-а $l\theta_0$ увеличивается; при этом $E(t)$ уменьшается обр. пропор. $\sqrt{l}$

N 3

Дано:

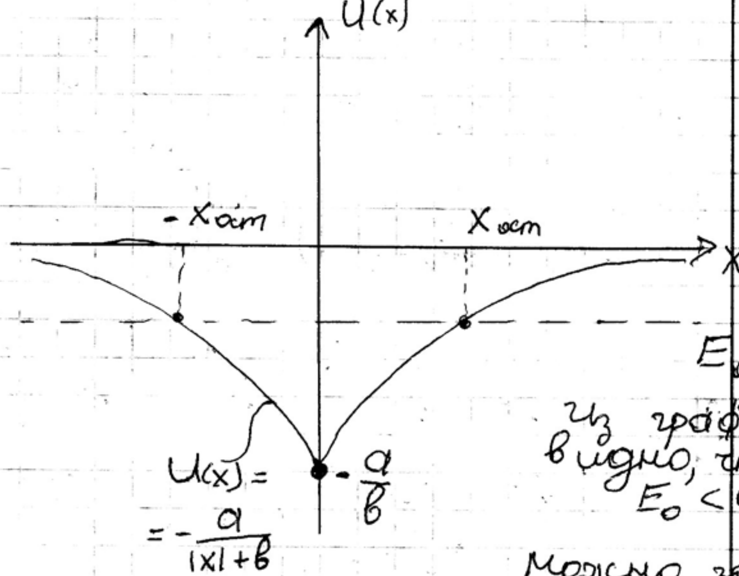
m

$U(x) = -\dfrac{a}{|x|+b}$

$a, b > 0$

E_0

$T - ?$



Из графика видно, что $E_0 < 0$

Можно записать:

$(*)\ E_0 = -|E_0|$

$\dfrac{a}{b} < |V_0|$

Ур-ие колебаний:

$$(1)\ \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E_0$$

Тогда:

$$(2)\ T = 2\int_{-x_{ост}}^{x_{ост}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 + \frac{a}{|x|+b}\right)}} =$$

$$= \underbrace{2\int_0^{x_{ост}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{a}{x+b} - |E_0|\right)}}}_{I_1\ (\text{при } x \geq 0)} + \underbrace{2\int_{-x_{ост}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{a}{b-x} - |E_0|\right)}}}_{I_2\ (\text{при } x \leq 0)}$$

Условие для точки остановки:

$$(3)\ U(x) = E_0 \Rightarrow -\frac{a}{|x|+b} = E_0$$

$$|x| = \frac{a}{|E_0|} - b \Rightarrow \begin{cases} x_{ост} = +\left(\frac{a}{|E_0|} - b\right), & x > 0 \\ -x_{ост} = b - \frac{a}{|E_0|}, & x < 0 \end{cases}$$

Найдем соответствующие интегралы I_1 и I_2: $\{y = x+b\}$ (1-ая)

$$I_1 = 2\int_0^{x_{ост}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 + \frac{a}{x+b}\right)}} = \sqrt{2m}\int_b^{x_{ост}+b} \frac{d(x+b)}{\sqrt{\frac{a}{x+b} - |E_0|}} =$$

$\{z = y/a\}$ (2-ая)

$$= \sqrt{2m}\,a\int_{y_0}^{y_{ост}} \frac{d(y/a)}{\sqrt{\frac{a}{y} - |E_0|}} = \cancel{\sqrt{2m}\int_0^{x_{ост}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z} - |E_0|}}}$$

$$\left\{\sqrt{a - |E_0| y} = \rho;\ y = \frac{a-\rho^2}{|E_0|}\right\}\ (2\text{-ая})$$

$$= \sqrt{2m}\int_{y_0}^{y_{ост}} \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{a - |E_0| y}} = -\frac{\sqrt{8m}}{|E_0|^{3/2}}\int_{\rho_0}^{\rho_{ост}} \sqrt{a-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= -\frac{\sqrt{8m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\int_{\rho_0}^{\rho_{ост}} \sqrt{1-(\rho/\sqrt{a})^2}\,d\frac{\rho}{\sqrt{a}} = \left\{\frac{\rho}{\sqrt{a}} = f\right\}\ (3\text{-я})$$

$$= -\frac{\sqrt{8m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\int_{f_0}^{f_{ост}} \sqrt{1-f^2}\,df$$

Пусть $f = \cos\varphi$, тогда:

$$I_1 = -\frac{\sqrt{8m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-f^2}\,f - \arccos f\right)\Big|_{f_0}^{f_{ост}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2m}}{|E_0|^{3/2}}\left(\sqrt{|E_0|(x+b)}\sqrt{a-|E_0|(x+b)} - a\arccos\sqrt{\frac{a-|E_0|(x+b)}{a}}\right)\Big|_0^{\frac{a}{|E_0|}-b} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2m}}{|E_0|^{3/2}}\left(-a\frac{\pi}{2} - \sqrt{|E_0|b}\sqrt{a-|E_0|b} + a\arccos\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{a}}\right)$$

$$I_2 = 2\int_{-x_{ocm}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{a}{b-x} - |E_0|\right)}} = -\sqrt{2m}\int_{-x_{ocm}}^{0} \frac{d(b-x)}{\sqrt{\frac{a}{b-x} - |E_0|}} =$$

$$\{y' = b - x\} \quad = -\sqrt{2m}\int_{-x_{ocm}}^{0} \frac{dy'}{\sqrt{\frac{a}{y'} - |E_0|}} =$$

$$= -\sqrt{2m}\int_{-y_{ocm}'}^{y_0'} \frac{\sqrt{y'}\,dy'}{\sqrt{a - y'|E_0|}} = \qquad \left\{\sqrt{a - |E_0|y'} = p' \quad y' = \frac{a - p'^2}{|E_0|}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{8m}}{|E_0|^{3/2}}\int_{-p_{ocm}'}^{p_0'} \sqrt{a - p'^2}\,dp' = \qquad \left\{\frac{p'}{\sqrt{a}} = f'\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{8m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\int_{-f_{ocm}'}^{f_0'} \sqrt{1 - f'^2}\,df' = \qquad \{f' = \cos y'\}$$

$$= \frac{\sqrt{2m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\left(\sqrt{1 - f'^2}\,f' - \arccos f'\right)\Big|_{-f_{ocm}'}^{f_0'} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{|E_0|^{3/2}}\left(\sqrt{|E_0|(b-x)}\sqrt{a - |E_0|(b-x)} - a\cdot\arccos\sqrt{\frac{a - |E_0|(b-x)}{a}}\right)\Bigg|_{-x_{ocm}}^{0} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{|E_0|^{3/2}}\left(\sqrt{|E_0|b}\sqrt{a - |E_0|b} - a\cdot\arccos\sqrt{\frac{a - |E_0|b}{a}} + a\frac{\pi}{2}\right)$$

Тогда $T = I_1 + I_2$:

$$T = \frac{\sqrt{2m}\,a}{|E_0|^{3/2}}\left(\pi + \frac{2\sqrt{|E_0|b}\sqrt{a - |E_0|b}}{a} - 2\arccos\sqrt{\frac{a - |E_0|b}{a}}\right)$$

$\boxed{\text{Ответ:}}$

$$T = \frac{\sqrt{2m}\, a}{|E_0|^{3/2}} \left(\pi + \frac{2\sqrt{|E_0| b}\sqrt{a - |E_0| b}}{a} - 2\arccos\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{a}} \right)$$

$$\left\{ T = \frac{\sqrt{8m}\, a}{|E_0|^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{|E_0| b}\sqrt{a-|E_0|b}}{a} + \arcsin\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{a}} \right) \right\}$$

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{a}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{a}}}{\sqrt{1-\frac{a-|E_0|b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-|E_0|b}{|E_0|b}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-|E_0|b}{|E_0|b}}\right)$$

$$T = \frac{\sqrt{8m}\, a}{|E_0|^{3/2}} \left(\frac{b}{a}\sqrt{|E_0|(a/b - |E_0|)} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b|E_0|} - 1} \right)$$

$$\frac{a}{b} = |U_0|$$

$$T = \frac{\sqrt{8m}\, a}{|E_0|^{3/2}} \left(\frac{|E_0|}{|U_0|}\sqrt{|E_0|(|U_0| - |E_0|)} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{|U_0|}{|E_0|} - 1} \right)$$

Пример. *Как изменится энергия заряженной частицы e массы m в центральном поле U(r) при медленном включении слабого однородного магнитного поля напряженности H?*

Запишем функцию Гамильтона заряда в сферической системе координат (ось Oz декартовой системы координат параллельна H):

$$\mathrm{H} = \frac{p_r^{\;2}}{2m} + \frac{p_\theta^{\;2}}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^{\;2}}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r) - eHp_\varphi/2mc - e^2H^2r^2\sin^2\theta/8mc^2 \ .$$

Здесь c - скорость света. По условию задачи магнитное поле слабое, поэтому последним членом (квадратичным по H) пренебрегаем.

Уравнение Гамильтона-Якоби с учетом этого приобретает вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 + U(r) - \Omega/2\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right) = E_0 \ , \qquad (74.11)$$

где E_0 - энергия частицы, $\Omega = eH/mc$ -циклотронная частота.

Решение ищем в виде

$$S_0 = S_{0r}(r,\, \alpha_1,\, p_{\varphi 0}) + S_{0\theta}(\theta,\, \alpha_1,\, p_{\varphi 0}) + p_{\varphi 0}\varphi \ .$$

Здесь в качестве постоянной α_3 мы выбрали $p_{\varphi 0}$. Подставляя S_0 в (74.11), получаем

$$\frac{r^2}{2m}\left(\frac{\partial S_{0r}}{\partial r}\right)^2 - \left(E_0 - U(r) - \Omega P_{\varphi 0}/2\right)r^2 = -\alpha_1 \ , \qquad (75.11)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{0\theta}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{p_{\varphi 0}^{\;2}}{2m\sin^2\theta} = \alpha_1 \ . \qquad (76.11)$$

Уравнение (75.11) определяет функцию $p_r(\alpha_1, E_0, p_{\varphi 0}, r)$, которая нужна для вычисления переменной действия J_r:

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr = \frac{1}{2\pi}\oint dr\sqrt{2m\left(E_0 - U(r) - p_{\varphi 0}\Omega(H)/2 - \alpha_1/r^2\right)}$$

Очевидно, J_r будет совпадать с $\widetilde{J}_r$, вычисленным для случая $H = 0$, если в последнем выражении вместо E_0 подставить комбинацию $E_0 - \Omega p_{\varphi 0}/2$. Значит, величина $E_0 + \Omega p_{\varphi 0}/2$. остается постоянной при медленном включении однородного магнитного поля. Кроме нее постоянной будет величина $p_{\varphi 0}$ - компонента обобщенного импульса заряда. По физическому смыслу $p_{\varphi 0}$ - сохраняющаяся проекция момента импульса заряда на вектор *H*.

№121.

Дано: m, e, $U(r)$, одн. вел. H

Найти $E(H)$

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\vec r}|^2 = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta + r^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin\theta\,\dot\varphi^2) - U(r).$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = mr^2\dot\theta \qquad p_\varphi = mr^2\sin\theta\,\dot\varphi$$

$$\dot r = \frac{p_r}{m} \qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin\theta}.$$

$$H = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin\theta}\right) - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin\theta}\right) + U_{eff}(r)$$

$U(r) - \frac{e}{c}\dot r A$

$$\vec H = \operatorname{rot}\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\vec k = \vec k H.$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -H \qquad A_x = A_{x0} - yH = -yH = -r\sin\theta\sin\varphi H.$$

$$U_H = -\frac{e}{c}\dot{\vec r}\vec A \qquad \vec A = (-r\sin\theta\sin\varphi H, 0, 0)$$

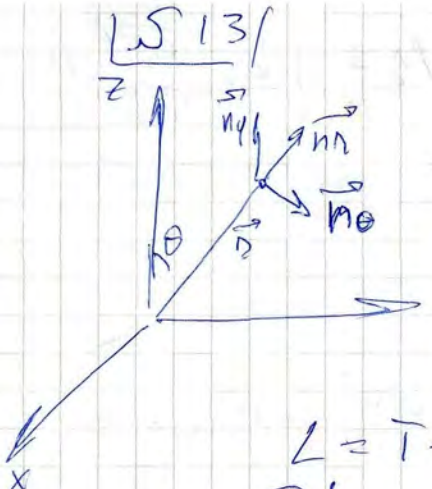
$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \dot x = \dot r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\cdot\dot\theta - r\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot\varphi.$$

$$U_H = +\frac{e}{c}r\sin\theta\sin\varphi\cdot H(\dot r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\cdot\dot\theta - r\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot\varphi).$$

$$\vec H = \vec n_z H = \operatorname{rot}\vec A = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & r\sin\theta e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\vec e_r\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right) + r\vec e_\theta\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right) + r\sin\theta\,\vec e_\varphi\cdot\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\right)$$

|S 13|



$U(\vec r)=a r^2$.

в сферических координатах.

Найти: траектория, закон движения в квадратурах.

$\dot{\vec r} = \dot r \vec n_r + r\dot\theta \vec n_\theta + r\sin\theta\dot\varphi \vec n_\varphi$.

$L = T-U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2) - a r^2$.

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$.

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m r^2\dot\theta$.

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m r^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi$.

$$H = p_r\dot r + p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi - L = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + a r^2 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + a r^2$$

ур-е Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right) + a r^2 = 0$$

$S = -H_0 t + S'(r,\theta,\varphi)$.

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S'}{\partial\varphi}\right)^2\right) + a r^2 = H_0$$

$S' = C_1\cdot\varphi + S''(r,\theta)$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S''}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot C_1^2\right) + ar^2 = H_0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\underbrace{f\left(\frac{\partial S''}{\partial\theta},\theta\right)}_{C_2}\right) + ar^2 = H_0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}C_2 + ar^2 = H_0$$

$S'' = S_r(r) + S_\theta(\theta)$.

$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{C_1^2}{\sin^2\theta} = C_2$. $\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta} = \pm\sqrt{C_2 - \frac{C_1^2}{\sin^2\theta}}$.

$S_\theta = \pm\int\sqrt{C_2-\frac{C_1^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$

$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 = 2m\left(H_0 - \frac{C_2}{2mr^2} - ar^2\right)$.

$S_r = \pm\int\sqrt{2m\left(H_0 - \frac{C_2}{2mr^2} - ar^2\right)}\,dr$

$$S = -H_0 t + C_1\varphi \pm\int\sqrt{2m\left(H_0-\frac{C_2}{2mr^2}-ar^2\right)}\,dr \pm\int\sqrt{C_2-\frac{C_1^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

t_0 $\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial H_0} = -t \pm\int\frac{2m}{2\sqrt{\ }}dr$.

φ_0 $\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = \varphi \pm\int\frac{2C_1}{2\sin^2\theta\sqrt{\ }}d\theta$

$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial C_2} = \mp\int\frac{1}{r^2\cdot 2\sqrt{\ }}dr \pm\int\frac{1}{2\sqrt{\ }}d\theta$

|S 13|

В сферических координатах ф-я Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + ar^2;\ a>0;$$

$U=a(r) \Rightarrow$ разделение переменных возможно:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + ar^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 = E\right.$$

φ - циклическая координата, т.о.:

$$\begin{cases} S_0 = p_{\varphi_0}\varphi + S_1(r) + S_2(\theta), \text{ откуда получаем для } S_1 \text{ и } S_2: \\ \left(\frac{\partial S_2}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta} = \beta, \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + ar^2 + \frac{\beta}{2mr^2} = E; \end{cases}$$

Интегрируя, получим для S_2 и S_1 выр-я в квадратурах:

$$S = -Et + p_{\varphi_0}\varphi + \int d\theta\sqrt{\beta - \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}} + \int dr\sqrt{2m[E-ar^2] - \frac{\beta}{r^2}}$$

$p_r = \frac{\partial S}{\partial r},\ p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial\varphi},\ p_\theta=\frac{\partial S}{\partial\theta};\ \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E},\ \beta_2=\frac{\partial S}{\partial\beta},\ \beta_3 = \frac{\partial S}{\partial p_{\varphi_0}}$;

$\beta_3 = \varphi_0,\ \beta_1 = t_0$,

$t_0 = -t + 2m\int dr/\sqrt{2m[E-ar^2] - \frac{\beta}{r^2}}$,

$\varphi_0 = \varphi - p_{\varphi_0}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\beta - \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}}}$;

$\beta_2 = \int d\theta/\sqrt{\beta - \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}} - \int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m[E-ar^2]-\frac{\beta}{r^2}}}$

Центральное поле → движение в плоскости;

Для нахождения траектории положим $p_{\varphi_0}=0$; $\varphi = \varphi_0$

Пусть $\varphi_0 = 0$, тогда $\varphi=0$ и $\beta_2 = \frac{\theta}{\sqrt\beta} - \int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E-ar^2)-\frac{\beta}{r^2}}}$

$$\beta_2 = \frac{\theta}{\sqrt\beta} - \int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E-ar^2)-\beta/r^2}},$$

$$t + t_0 = 2m\int\frac{dr}{\sqrt{2m(E-ar^2)-\beta/r^2}};$$

$$\varphi - \varphi_0 = p_{\varphi_0}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\beta - \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}}}$$

№3. $U(\vec{r}) = a r^2$, $a > 0$.

Ф-я Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + a r^2$$

Ур-е Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + a r^2 = 0$$

$$F(t, r, \theta, \varphi) = T(t) + R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\varphi)$$

$$\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{=-E} + \frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\Big(\underbrace{\frac{d\Theta}{d\theta}}_{=\alpha_1}\Big)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\Big(\underbrace{\frac{d\Phi}{d\varphi}}_{=\alpha_2}\Big)^2 + a r^2 = 0$$

$$F = -Et + \alpha_1\theta + \alpha_2\varphi + R(r)$$

$$-E + \frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\alpha_2^2 + a r^2 = 0.$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = (E - a r^2)\cdot 2m - \frac{\alpha_1^2}{r^2} - \frac{\alpha_2^2}{r^2\sin^2\theta}$$

$$F = -Et + \alpha_1\theta + \alpha_2\varphi \pm \int \sqrt{2m(E - a r^2) - \frac{\alpha_1^2}{r^2} - \frac{\alpha_2^2}{r^2\sin^2\theta}}\, dr$$

$$\frac{\partial F}{\partial E} = -t \pm m\int \frac{dr}{\sqrt{2m(E - ar^2) - \frac{\alpha_1^2}{r^2} - \frac{\alpha_2^2}{r^2\sin^2\theta}}} = \beta_1$$ — закон движения.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} &= \theta \mp \alpha_1 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E - ar^2) - \frac{\alpha_1^2}{r^2} - \cancel{\frac{\alpha_2^2}{r^2\sin^2\theta}}}} = \beta_2 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} &= \varphi \mp \frac{\alpha_2}{\sin^2\theta}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E - ar^2) - \frac{\alpha_1^2}{r^2} - \frac{\alpha_2^2}{r^2\sin^2\theta}}} = \beta_3\end{aligned}\right\}$$ траектория

Компоненты импульса p_φ, p_θ сохраняются:

$p_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \alpha_1$, $p_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \alpha_2$.

$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = \alpha_1$

Билет №2 11

III $U = \alpha r^2 \quad \alpha > 0$ сф. коор: r, θ, φ

$\mathcal{L} = T - U \qquad T = \frac{mv^2}{2}$

$v = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r\sin\theta\dot{\varphi})$

$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \alpha r^2$

$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta$

$H = T + U = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{m^2r^2\sin^2\theta}\right) + \alpha r^2$

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \alpha r^2\right] = 0$

Поскольку H явно от t не зависит ($\partial_t H = 0$), то можно перейти к укороченному действию $S_0(q)$:

$S = -Et + S_0(q)$

$\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin\theta}\underbrace{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)}_{\text{выделим}} = E - \alpha r^2$

$S_\varphi: \ \tilde{S}: \begin{cases} S_0 = \tilde{S}(r,\theta) + S_\varphi(\varphi) \\ \frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi \\ \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} = 2m\ E - \alpha r^2 \end{cases}$

Далее $\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)}_{\text{выделим}} = 2m\ E - \alpha r^2$

$\tilde{S} = S_\theta(\theta) + S_r(r)$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\,(E - ar^2)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2$$

$$S = -Et + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$$

Полный интеграл:

$$S = -Et + \alpha_\varphi \varphi + \int\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta + \int\sqrt{2m(E - r^2 a) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\,dr$$

Далее

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial E} = -t_0 = -t + \displaystyle\int\frac{2m\,dr}{2\sqrt{2m\,(E - ar^2) - \alpha_\theta^2/r^2}} \quad \Rightarrow r = r(t) \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \beta_\theta = \displaystyle\int\frac{\alpha_\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}} - \int\frac{\alpha_\theta\,dr}{r^2\sqrt{2m\,(E - ar^2) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} \Rightarrow \theta = \theta(t) \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = \beta_\varphi = \varphi - \alpha_\varphi \displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}} \quad \Rightarrow \varphi = \varphi(\theta) \end{cases}$$

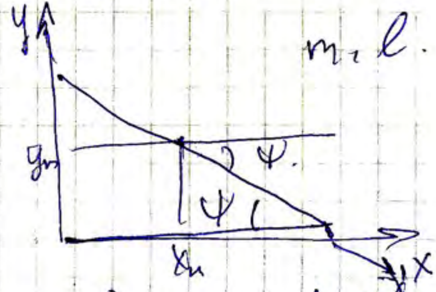
Траектория: центральное поле $\Rightarrow$ движение плоское,

положим $p_\varphi = 0$, тогда $\varphi = 0$ $(\alpha_\varphi = 0)$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \beta_\theta = \int\frac{\alpha_\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2}} - \alpha_\theta\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m\,(E - ar^2) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} =$$

$$= \theta - \alpha_\theta\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m\,(E - ar^2) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}.$$

№ 14.



$m, l.$

одна обобщенная коорд-а ψ

$$T=\frac{1}{2}m v_m^2+\frac{1}{2}I_z\dot{\psi}^2$$

$$x_m=\frac{1}{2}l\cos\psi \qquad y_m=\frac{1}{2}l\sin\psi.$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_z\dot{\psi}^2=$$

$$\dot{x}_m=-\frac{1}{2}l\sin\psi\cdot\dot{\psi} \qquad \dot{y}_m=\frac{1}{2}l\cos\psi\cdot\dot{\psi}.$$

$$T=\frac{1}{8}ml^2\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}I_z\dot{\psi}$$

отн. ц-м

$$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\int_{-l/2}^{l/2}\underbrace{\frac{m}{l}}_{\text{лин. плотность}}x^2dx=\frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right)\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{ml^2}{12}.$$

$$T=\frac{ml^2}{8}\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}\dot{\psi}^2=$$

$$=\frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2$$

$$L=\frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2-U^{=0} \qquad \ddot{\psi}=0.$$

если есть сила тяжести

$$U=mg\frac{l}{2}\sin\psi.$$

$$\boxed{L=\frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2-\frac{mgl}{2}\sin\psi}$$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\psi}+\frac{mgl}{2}\cos\psi=0.$$

L не зависит от времени

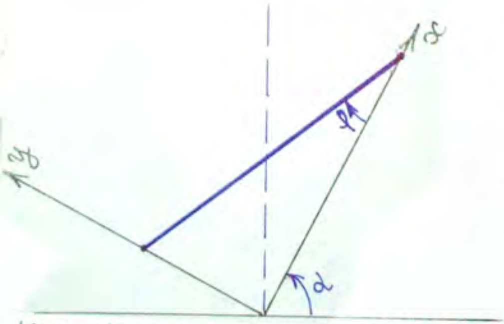
$\rightarrow$ обобщенная энергия - интеграл движения.

$$E_0=\frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2+\frac{mgl}{2}\sin\psi.$$

$$\dot{\psi}=\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E_0-\frac{mgl}{2}\sin\psi\right)}=\frac{d\psi}{dt}.$$

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E_0-\frac{mgl}{2}\sin\psi\right)}}=t-C.$$

3.



Поместим начало координат в вершину угла и направим оси x и y по сторонам угла. Пусть y_1 – координата 1-го конца стержня, x_2 – 2-го. Тогда координаты центра масс

$$x = \frac{x_2}{2} = \frac{l\cos\varphi}{2};$$

$$y = \frac{y_1}{2} = \frac{l\sin\varphi}{2}.$$

Найдём скорость центра масс:

$$\dot{x} = -\frac{l\dot{\varphi}\sin\varphi}{2}; \quad \dot{y} = \frac{l\dot{\varphi}\cos\varphi}{2}. \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$= \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}.$$

Высота поднятия центра масс:

$$h = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2};$$

$$h_1 = y_1\sin(90^\circ - \alpha) = y_1\cos\alpha = l\sin\varphi\cos\alpha;$$

$$h_2 = x_2\sin\alpha = l\cos\varphi\sin\alpha.$$

Т.о. $h = \frac{l}{2}(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) = \frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi).$

Энергия вращательного движения стержня

$$T = \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2,$$

где J – момент инерции стержня относительно оси материальной симметрии.

Т.о. ф-ция Лагранжа стержня

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 - mgh =$$

$$= \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{8} + \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{24} - mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi) =$$

$$= \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{6} - mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Для нахождения закона движения в квадратурах применим метод Гамильтона- Якоби.

Обобщённый импульс $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2\dot{\varphi}}{3}$

Составим гамильтониан. Для этого нужно выразить обобщённую скорость через обобщённый импульс

$$\dot{\varphi} = \frac{3P_\varphi}{ml^2}$$

и в таком виде подставить в ф-лу для гамильтониана

$$H = P_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = P_\varphi \cdot \frac{3P_\varphi}{ml^2} - \frac{ml^2}{6}\left(\frac{3P_\varphi}{ml^2}\right)^2 + mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{P_\varphi^2}{ml^2} + mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Чтобы составить ур-ие Гамильтона- Якоби, нужно вместо обобщённого импульса подставить производную главной ф-ции Гамильтона по обобщённой координате $\left(P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{1}{ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi) = 0.$$

Поскольку гамильтониан явно от времени не зависит, полный интеграл можно сразу искать в виде

$$S = -E_0 t + W(\varphi),$$

где E_0 – произвольная константа, $W(\varphi)$ – укороченное действие. Подставим этот полный интеграл в ур-ие Гамильтона – Якоби:

$$-E_0+\frac{3}{2ml^2}\left(\frac{dW}{d\varphi}\right)^2+mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)=0;$$

$$\left(\frac{dW}{d\varphi}\right)^2=\frac{2ml^2}{3}\left(E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)\right);$$

$$\frac{dW}{d\varphi}=\sqrt{\frac{2ml^2}{3}\left(E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)\right)};$$

(Корень взят со знаком „+", т.к. нам нужен хотя бы один полный интеграл)

$$W(\varphi)=\int\left[\frac{2ml^2}{3}\left(E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi.$$

По теореме Якоби мы должны вычислить частные производные полного интеграла ур-ия Гамильтона – Якоби по всем константам, от которых этот полный интеграл зависит. В данном случае константа только одна (E_0), т.к. система обладает одной степенью свободы.

$$Q_{0E}\equiv-t_0=\frac{\partial S}{\partial E_0}=-t+\frac{\partial W}{\partial E_0}=$$

$$=-t+\sqrt{\frac{2ml^2}{3}}\int\frac{1}{2\sqrt{E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)}}d\varphi;$$

Закон движения в квадратурах:

$$\sqrt{\frac{ml^2}{6}}\int\frac{1}{\sqrt{E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)}}d\varphi=t-t_0.$$

Ответ: ф-ция Лагранжа

$$\mathcal{L}=\frac{m(l\dot{\varphi})^2}{6}-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi);$$

закон движения в квадратурах

$$\sqrt{\frac{ml^2}{6}}\int\frac{1}{\sqrt{E_0-mg\frac{l}{2}\sin(\alpha+\varphi)}}d\varphi=t-t_0.$$

Дано:

$E_0 < 0$

$U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$

$a, b > 0$

$\Delta\varphi$ - ?

Траек. - ?

Решение:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

$$P_{\varphi_0} = M = [r, p] = mr^2\dot{\varphi} = const$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_0^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} - \frac{M_0}{2mr^2}\right)}} - 2\pi \qquad \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{M_0}{m}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r\sqrt{E_0 r^2 + ar - \left(\frac{2mb + M_0}{2m}\right)}} - \frac{2\pi}{2}$$

$\frac{1}{r} = t$, $\quad -\frac{1}{r^2}\,dr = dt$

$$= -\frac{M_0}{\sqrt{2m}}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dt}{\sqrt{at + E_0 - t^2\beta}} - \frac{2\pi}{2} = -\frac{M_0}{\sqrt{2m}}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dt}{\sqrt{E_0 - \beta\left(t - \frac{a}{2\beta}\right)^2 + \frac{a^2}{4\beta^2}}} - 2\pi$$

$$\beta = \frac{2mb + M_0}{2m}$$

$$r = \frac{p + 2\,b/a}{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E_0 b}{a^2}}\cos\sqrt{1 + \frac{2b}{a}\cdot\frac{1}{p}}\,(\varphi - \varphi_0)}$$

$$U_{эфф} = U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2} = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{M_0^2}{2mr^2} = E_0$$

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4E_0\left(b + \frac{M_0^2}{2m}\right)}}{2E_0}$$

$$\varphi = \int \frac{M_0}{mr^2}\left[\frac{2}{m}\left(E_0 - U_{eff}(r)\right)\right]^{-1/2} dr + C$$ — ур-ние траектории

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 2mb/M_0^2}} - 2\pi.$$

$\boxed{№ 15}$

$U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ $\quad m,\ E_0 < 0$

$\frac{dU}{dr} = \frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3} = 0 \quad a \cdot r = 2b \quad r_{min} = \frac{2b}{a}$

$\cancel{T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2)}$

$\cancel{L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho\dot\varphi^2)}$

$\cancel{L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2) + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}}$

$\cancel{\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = E_0}$

$E_0 = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{a}{r} + b/r^2$

$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{a}{r} - b/r^2$

φ - циклическая координата.

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = \text{const} = M$

$E_0 = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$

$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}\right)}$

$t - \text{const} = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} - b/r^2\right)}} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E_0r^2 + ar - \frac{M^2}{2m} - b}}$

$E_0r^2 + ar - \frac{M^2}{2m} - b = (\sqrt{E_0}\,r)^2 + 2ar\cdot\frac{\sqrt{E_0}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{E_0}} + \left(\frac{a}{2\sqrt{E_0}}\right)^2 -$

$- \left(\frac{a}{2\sqrt{E_0}}\right)^2 - \frac{M^2}{2m} - b = \left(\sqrt{E_0}\,r - \frac{a}{2\sqrt{E_0}}\right)^2 - \frac{a^2}{4E_0} - \frac{M^2}{2m} - b.$

$I = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\left(\sqrt{E_0}\,r - \frac{a}{2\sqrt{E_0}}\right)^2 - \frac{a^2}{4E_0} - \frac{M^2}{2m} - b}} = \int \frac{\frac{r}{\sqrt{E_0}\sqrt{E_0}}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\left(r - \frac{a}{2E_0}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{a^2}{4E_0^2} - \frac{M^2}{2mE_0} - \frac{b}{E_0}\right)}_{=\gamma}}}$

$= \sqrt{\frac{mE_0}{2}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\left(r - \frac{a}{2E_0}\right)^2 - \gamma}}$

3) Уравнение траектории найдем из квадратуры для ц/с поля

$$\pm(\varphi-\varphi_0) = \int \frac{\frac{M_0}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0+\frac{a}{r}-\left(b+\frac{M_0^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}\right)}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2m}{M_0^2}E_0+\frac{2ma}{M_0^2 r}-\frac{2mb}{M_0^2 r^2}-\frac{2m}{\cancel{M_0^2}r^2}\cancel{\frac{M_0^2}{2m}}}} = \left|p=\frac{M_0^2}{ma}\right| =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2E_0}{ap}+\frac{2}{pr}-\left(\frac{2b}{pa}+1\right)\frac{1}{r^2}}} = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}\cdot \cancel{2}x=\frac{\cancel{2}}{p} \\ x=\frac{1}{p\sqrt{2\frac{b}{pa}+1}}\end{array}\right\} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2E_0}{ap}+\frac{1}{p^2\left(\frac{2b}{pa}+1\right)}-\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}-\frac{1}{p\sqrt{2\frac{b}{pa}+1}}\right)^2}} =$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}}\int \arccos\frac{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}-\frac{1}{p\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}}}{\sqrt{\frac{2E_0}{ap}+\frac{1}{p^2\left(\frac{2b}{pa}+1\right)}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}}\arccos\frac{\cancel{\frac{1}{p\sqrt{2\frac{b}{pa}+1}}}\left(\frac{p}{r}\left(\frac{2b}{pa}+1\right)-1\right)}{\cancel{\frac{1}{p\sqrt{2\frac{b}{pa}+1}}}\sqrt{\frac{2E_0p}{a}\left(\frac{2b}{pa}+1\right)+1}} \Rightarrow \left\{\varepsilon=\left(1+\frac{2E_0p}{a}\right)^{1/2}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}\cdot(\varphi-\varphi_0) = \left(\frac{p}{r}\left(\frac{2b}{pa}+1\right)-1\right) : \left(\sqrt{\frac{4E_0b}{a^2}+\varepsilon^2}\right) \Rightarrow$$

$$1+\cos\left[\sqrt{1+\frac{2b}{a}\cdot\frac{1}{p}}(\varphi-\varphi_0)\right]\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\frac{4E_0b}{a^2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{2b}{a}+p\right)$$

(*) $$r = \frac{p+2\frac{b}{a}}{1+\sqrt{\varepsilon^2+\frac{4E_0b}{a^2}}\cos\sqrt{1+\frac{2b}{a}\frac{1}{p}}(\varphi-\varphi_0)}$$, где $p=\frac{M_0^2}{ma}$, $\varepsilon=\left(1+\frac{2E_0p}{a}\right)^{1/2}$

Так как $E_0 < 0 \Rightarrow$ движение финитно, а угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек r_{min} будет равно

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 + \frac{a}{r} - \left(b + \frac{M_0^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}\right]}} - 2\pi$$

данный интеграл мы посчитали выше.

Из $(*)$ $\Rightarrow$ что r_{min} будет достигаться при cos от угла равном 1 а r_{max} при $\cos = -1 \Rightarrow$ из (1) и этого условия следует:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2mb}{M_0^2}}} - 2\pi$$

Ответ:

$$r = \frac{p + 2\frac{b}{a}}{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4Eb}{a^2}}\cos\sqrt{1 + \frac{2b}{a^2 p}}(\varphi - \varphi_0)}, \text{ где } p = \frac{M_0^2}{ma}$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2E_0 p}{a}\right)^{1/2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2mb}{M_0^2}}} - 2\pi$$

№3. $E_0 < 0$ $U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$; $a, b > 0$, m (№3.1)

Найти траекторию и угол расст-е между 2-мя последов. прохождениями точек r min

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

Момент имп. $\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{p}]$ – сохр-ся

Т.е. вектор $\vec{r}$ всегда лежит в плоскости $\perp \vec{M}$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

φ – цикл координата

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const$$

$$M_z = M = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const$$

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \Rightarrow$$

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2}dr \Big/ \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}} + const$$

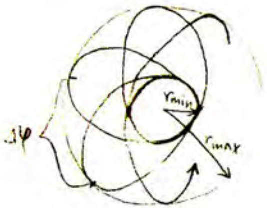
$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{eff}]}} + const$$

где $U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$

Ур-е $U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E$ опред-ет границы обл-ти движения по расстоянию от центра.

За время в теч-е кот. r изм-ся от r_{max} до r_{min} и затем до r_{max}, радиус-вектор повернётся на $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U_{eff}}} - 2\pi$$



В нашей задаче:

$$\varphi-\varphi_0 = \int \frac{\frac{M}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0+\frac{a}{r}-\left(\frac{b}{r^2}+\frac{M^2}{2mr^2}\right)\right]}},$$

Замена $\frac{1}{r}=y$

$$-\frac{dr}{r^2}=dy$$

$$\varphi-\varphi_0 = -\frac{M}{m}\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{E_0+ay-\left(b+\frac{M^2}{2m}\right)y^2}} =$$

$$= -\int\frac{dy}{\left\{\frac{2mE_0}{M^2}+\frac{2ma}{M^2}y-\left(\frac{mb}{M^2}+1\right)y^2\right\}^{1/2}}$$

$$p=\frac{M^2}{ma} \qquad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E_0M^2}{ma^2}}$$

$$\frac{2mE_0}{M^2}+\frac{2}{p}y-\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)y^2=$$

$$= -\left[y^2\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right) - 2\,\frac{1}{p}\,\frac{\sqrt{\frac{2mb}{M^2}+1}}{\sqrt{\frac{2mb}{M^2}+1}} - \frac{2mE_0}{M^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{p^2\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)} - \frac{1}{p^2\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)}\right] =$$

$$= -\left(y\sqrt{\frac{2mb}{M^2}+1} - \frac{1}{\sqrt{\dots}\,p}\right)^2 + \frac{2mE_0}{M^2} + \frac{1}{p^2\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)}$$

$$// \ \frac{2mb}{M^2} = \frac{2b}{pa} \ // \qquad \frac{2mE_0}{M^2} = \frac{\varepsilon^2-1}{p^2}$$

$$= \left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)\left\{-\left(y - \frac{1}{p(\sqrt{\dots})^2}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2-1}{p^2\left(\frac{2b}{pa}+1\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{p^2\left(\frac{2b}{pa}+1\right)^2}\right\}$$

$$\varphi-\varphi_0 = -\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2b}{pa}+1}\left\{\frac{(\varepsilon^2-1)\left(\frac{2b}{pa}+1\right)+1}{p^2\left(\frac{2b}{pa}+1\right)^2} - \left(y - \frac{1}{p(\dots)^2}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$(\varphi-\varphi_0)\cdot\sqrt{\frac{pa+2b}{pa}} = \arccos\frac{\left(y - \frac{1}{p(\sqrt{\dots})^2}\right)p\left(\frac{2b}{pa}+1\right)}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)\left(\frac{2b}{pa}+1\right)+1}}$$

$$// \ \frac{2b}{pa}+1 = x$$

$$\cos(\varphi-\varphi_0)\sqrt{1+\frac{2b}{pa}} = \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p(\sqrt{x})^2}\right)px}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)x+1}}$$

$$(\varepsilon^2-1)x+1 = (\varepsilon^2-1)\left(\frac{2b}{pa}+1\right)+1 = \varepsilon^2\frac{2b}{pa}+\varepsilon^2$$

$$-\frac{2b}{pa} = \varepsilon^2 + \frac{2b}{pa}\cdot\frac{2E_0M^2}{ma^2} = \varepsilon^2 + \frac{4E_0b}{a^2}$$

$$\underbrace{\sqrt{\varepsilon^2+\frac{4E_0b}{a^2}}\,\cos\left[(\varphi-\varphi_0)\sqrt{1+\frac{2b}{ap}}\right]}_{\mathcal{L}}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p^x}\right)p^x$$

$$\frac{\mathcal{L}}{p^x}+\frac{1}{p^x}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{\mathcal{L}+1}{p^x}=\frac{1}{r}\Rightarrow r=\frac{p^x}{1+\mathcal{L}}$$

$$r=\frac{p+\frac{2b}{a}}{1+\sqrt{\varepsilon^2+\frac{4E_0b}{a^2}}\cdot\cos\left\{(\varphi-\varphi_0)\sqrt{1+\frac{2b}{ap}}\right\}}$$

уравнение траектории $r=r(\varphi)$

Найдём теперь $\Delta\varphi$

1) r_{min} и r_{max} $\longrightarrow$ $E_0=U_{eff}=-\frac{a}{r}+\frac{b^2}{r^2}+\frac{M^2}{2mr^2}$

$\frac{1}{r}=y$ $\quad -\left(b+\frac{M^2}{2m}\right)y^2+ay+E_0=0$

$$\left(b+\frac{M^2}{2m}\right)y-ay-E_0=0$$

$$D=a^2+4E_0\left(\frac{mb}{2m}+\frac{M^2}{2m}\right)=$$

$$=a^2+4E_0\frac{(2mb+M^2)}{2m}$$

$$y_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4E_0\left(\frac{2mb+M^2}{2m}\right)}}{2\left(\frac{2mb+M^2}{2m}\right)}$$

$$=\frac{ma}{2mb+M^2}\pm\sqrt{\frac{m^2a^2}{(2mb+M^2)^2}+\frac{2E_0m}{(2mb+M^2)}}$$

$y_{max}\longrightarrow$ с $+$

$y_{min}\longrightarrow$ с $-$

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{x}} \arccos \frac{\left(y - \frac{1}{p_x}\right)p_x}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E_0 b}{a^2}}} \Bigg|_{y_{max}}^{y_{min}} - 2\pi$$

$$\frac{\left(y - \frac{1}{p_x}\right)p_x}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E_0 b}{a^2}}} = \frac{\left(y - \frac{ma\,pa}{M^2(2b+pa)}\right)p_x}{\sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{\left(y - \frac{ma}{2mb + M^2}\right)\frac{M^2}{ma}\left(\frac{2mb}{M^2}+1\right)}{\sqrt{\dots}}$$

$$\arccos(\dots)\Big|_{y_{min}} = \arccos(\dots)\Big|_{y_{max}}$$

$$\arccos(\quad)\Big|_{y_{max}}^{y_{min}} = 2\arccos \frac{\sqrt{\frac{M^4 \varepsilon^2}{(2mb+M^2)^2} + \frac{2E_0 m}{2mb+M^2}}\;\frac{2mb+M^2}{ma}}{\sqrt{\dots}}$$

$$= \arccos \frac{\sqrt{1 + \frac{2E_0(2mb+M^2)}{ma^2}}}{\sqrt{\dots}}$$

$$\sqrt{\dots} = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E_0 b}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2E_0 M^2}{ma^2} + \frac{4E_0 b}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E_0}{ma^2}(M^2 + 2mb)}$$

Значит $\arccos \frac{\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}} = \arccos 1 = \pi$

Тогда $\Delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{x}}\pi - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2mb}{M^2}}} - 1\right)$

Ответ: $r = \dfrac{p + \frac{2b}{a}}{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E_0 b}{a^2}}\cos\left\{(\varphi - \varphi_0)\sqrt{1+\frac{2b}{ap}}\right\}}$

$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2mb}{M^2}}} - \cancel{1}\right)$ где $p = \frac{M^2}{ma}$

(Как в задаче Кеплера) $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 M^2}{ma^2}}$

№16

Дано: e, m, $\vec{A} = (yH, 0, 0)$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Найти: закон движения, ур-е Гамильтона

$T = \frac{mv^2}{2}$

$U_{об} = e\varphi - \frac{e}{c}(A_x \cdot \dot{x} + A_y \cdot \dot{y} + A_z \cdot \dot{z}) = -\frac{e}{c} yH \cdot \dot{x}$

$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} yH \cdot \dot{x} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} yH \cdot \dot{x}$

$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c} yH \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

$\dot{x} = \frac{1}{m}(p_x - e/c\, yH) \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$

$H = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y + \dot{z} p_z - L =$

$= \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{p_x}{m}\frac{e}{c} yH - \frac{1}{2m}\left((p_x - \frac{e}{c}yH)^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{e}{c} yH \cdot \frac{1}{m}(p_x - \frac{e}{c} yH) =$

$= \frac{1}{2m}(2p_x^2 + 2p_y^2 + 2p_z^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2) - p_x \frac{eyH}{mc} + \frac{1}{2m} 2p_x \cdot \frac{e}{c} yH - \frac{1}{2m}\frac{e^2y^2H^2}{c^2} - \frac{eyHp_x}{mc} + \frac{e^2y^2H^2}{mc^2} =$

$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{eyH}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{eyH}{c}\right) p_x\right) =$

$= \frac{1}{2m}\left(\left(p_x - \frac{eyH}{c}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$

$p_x^2 - 2p_x\frac{eyH}{c} + \left(\frac{eyH}{c}\right)^2$

$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$

$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{2m}\left(-2p_x \frac{eH}{c} + 2\frac{eyH}{c}\cdot\frac{eH}{c}\right) =$

$= \frac{eH}{mc}\left(p_x - \frac{eyH}{c}\right)$

$\frac{\varepsilon_0 b^2}{a} + b - \frac{a}{\varepsilon_0} - b$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}\left(p_x - \frac{eyH}{c}\right)$

$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$

интегралы: $p_x = p_{x0}$, $p_z = p_{z0}$ $H = H_0$,

$$\dot{p}_y = \frac{eH}{mc}\left(p_{x0} - \frac{e}{c} y H\right)$$

$$\dot{z} = \frac{p_{z0}}{m} \Rightarrow \boxed{z = \frac{p_{z0}}{m} t + C}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\left(p_{x0} - \frac{e}{c} y H\right)$$

$$\dot{p}_y = \frac{e}{mc} H \left(p_{x0} - \frac{e}{c} y H\right)$$

$$p_y + C = \frac{eH}{mc}\left(p_{x0} t - \frac{e}{c} H \int y\,dt\right).$$

$$I = \int y\,dt.$$

$$\ddot{I} = \frac{e}{m^2 c} H \left(p_{x0} t - \frac{e}{c} H I\right).$$

общее решение

$$I = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad \text{где } \omega_0 = \frac{eH}{mc}$$

частное решение.

$$I = t \cdot p_{x0} \cdot \frac{1}{\omega_0 m} = \frac{t p_{x0}}{\omega_0 m} + C.$$

$$\Rightarrow I = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \frac{p_{x0}}{\omega_0 m} t + C.$$

$$\Rightarrow y = \dot{I} = \omega_0 (A \cos \omega_0 t - B \sin \omega_0 t) + \frac{p_{x0}}{m \omega_0}.$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\left(p_{x0} - \frac{e}{c} y H\right) \Rightarrow x = \frac{1}{m}\left(p_{x0} t - \frac{e}{c} H I\right) + C$$

③ $e, m.\ \vec{H}.\ \vec{A} = (yH, 0, 0).$

$t_0 = 0$
$r(0) = r_0$
$V(0) = V_0.$

Решение:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi = \frac{\left(P_x - \frac{e}{c}yH\right)^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{2\frac{e}{c}H\left(\frac{e}{c}Hy - P_x\right)}{2m}.$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad P_x = P_{x0} \qquad z = \frac{P_{z0}}{m}t + z_0$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \qquad P_z = P_{z0}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{2P_x - 2\frac{e}{c}yH}{2m} = \frac{P_x - \frac{e}{c}yH}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m}$$

Тогда $$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}H\right)^2\left(\frac{P_{x0}c}{eH} - y\right)^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}.$$

$$\frac{eB}{mc} = \omega_0 \qquad \frac{P_{x0}c}{eH} = y_0 \qquad \left(\frac{P_{x0}c}{eH} - y\right)^2 = \left(y - \frac{P_{x0}c}{eH}\right)^2 = Y^2. \qquad Y = y - \frac{P_{x0}c}{eH}$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} \longrightarrow m\ddot{Y} = -m\omega_0^2 Y \rightarrow \ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -m\omega_0^2 Y$$

$$Y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

$$Y\big|_{t=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{Y}\big|_{t=0} = \dot{y}\big|_{t=0} = V_{y0} \rightarrow C_2 = \frac{V_{y0}}{\omega_0}$$

$$\dot{x} = \frac{P_{x0} - \frac{e}{c}yH}{m} = -\omega_0 Y = -\omega_0\frac{V_{y0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

$$Y = \frac{V_{y0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$$x = \frac{V_{y0}}{\omega_0}\cos\omega_0 t + x_0$$

$$y = \frac{V_{y0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t + y_0.$$

$$P_y = m\dot{Y} = mV_{y0}\cos\omega_0 t$$

Т.О.

$$\begin{cases} \vec{P}_x = \vec{P}_{x0} = m\vec{V}_{x0} \\ \vec{P}_y = m\vec{V}_{y0}\cos\omega_0 t \\ \vec{P}_z = \vec{P}_{z0} = m\vec{V}_{z0} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{V_{y0}}{\omega_0}\cos\omega_0 t + x_0 \\ y &= \frac{V_{y0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t + y_0 \\ z &= V_{z0}t + z_0. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H - \text{интеграл движения.}$$

№171

Найти $[L_i, L_j]$, где L_i - декартовы компоненты вектора момента импульса частицы.

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \quad \begin{aligned} M_x &= y p_z - z p_y \\ M_y &= p_x z - x p_z \\ M_z &= x p_y - y p_x. \end{aligned}$$

$$\{M_x, M_y\} = \sum_{i=x}^{z} \left(\frac{\partial M_x}{\partial q_i} \frac{\partial M_y}{\partial p_i} - \frac{\partial M_y}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial p_i} \right) \ominus$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial y} = p_z \qquad \frac{\partial M_x}{\partial z} = -p_y.$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial p_x} = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial p_y} = -z \qquad \frac{\partial M_x}{\partial p_z} = y.$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = -p_z \qquad \frac{\partial M_y}{\partial p_x} = z \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial M_y}{\partial p_y} = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} = p_x \qquad \frac{\partial M_y}{\partial p_z} = -x.$$

$$\ominus \left(\overset{0}{\frac{\partial M_x}{\partial x}} \frac{\partial M_y}{\partial p_x} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \overset{0}{\frac{\partial M_x}{\partial p_x}} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \overset{0}{\frac{\partial M_y}{\partial p_y}} - \overset{0}{\frac{\partial M_y}{\partial y}} \frac{\partial M_x}{\partial p_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial M_y}{\partial p_z} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \right) = -p_y \cdot (-x) - p_x \cdot y = x p_y - y p_x = \underline{M_z}$$

Аналогично $\underline{[M_y, M_z] = M_x}$ $\quad \underline{[M_z, M_x] = M_y}$

№3

Вычислить скобки Пуассона $[L_i, L_j]$

L_i - декартовы компоненты вектора момента импульса частицы.

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(P_z y - P_y z) + \vec{j}\,(P_x z - P_z x) + \vec{k}\,(P_y x - P_x y)$$

$$M_x = P_z y - P_y z$$

$$M_y = P_x z - P_z x$$

$$M_z = P_y x - P_x y$$

$$[M_x\, M_y] = \sum_{i=x}^{z} \left(\frac{\partial M_x}{\partial q_i} \frac{\partial M_y}{\partial P_i} - \frac{\partial M_y}{\partial q_i} \frac{\partial M_x}{\partial P_i} \right) =$$

$$= \overset{=0}{\frac{\partial M_x}{\partial x}} \frac{\partial M_y}{\partial P_x} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \overset{=0}{\frac{\partial M_x}{\partial P_x}} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \overset{=0}{\frac{\partial M_y}{\partial P_y}} -$$

$$- \overset{=0}{\frac{\partial M_x}{\partial y}} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial P_y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial M_y}{\partial P_z} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \frac{\partial M_x}{\partial P_z} \Big) =$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial y} = P_z \qquad \frac{\partial M_x}{\partial z} = -P_y$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_x} = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial P_y} = -z \qquad \frac{\partial M_x}{\partial P_z} = y$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = -P_z \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_x} = z \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_y} = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} = P_x \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_z} = -x$$

$$= \frac{\partial M_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial P_z} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_z} = -P_y(-x) -$$

$$- P_x y = x P_y - y P_x = \underline{M_z = [M_x\, M_y]}$$

$$[M_y\ M_z] = \sum_{i=x}^{z}\left(\frac{\partial M_y}{\partial q_i}\frac{\partial M_z}{\partial p_i} - \frac{\partial M_y}{\partial p_i}\frac{\partial M_z}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x}} - \cancel{\frac{\partial M_z}{\partial x}\frac{\partial M_y}{\partial p_x}} + \cancel{\frac{\partial M_z}{\partial y}\frac{\partial M_y}{\partial p_y}} - \cancel{\frac{\partial M_z}{\partial y}\frac{\partial M_y}{\partial p_y}} + \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z}} - \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z}}$$

$$= \frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\frac{\partial M_y}{\partial p_x} + \frac{\overset{=0}{\partial M_y}}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} - \frac{\partial M_z}{\partial y}\frac{\overset{=0}{\partial M_y}}{\partial p_y} + \frac{\partial M_y}{\partial z}\frac{\overset{=0}{\partial M_z}}{\partial p_z} - \frac{\overset{=0}{\partial M_z}}{\partial z}\frac{\partial M_y}{\partial p_z} =$$

$$= \frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\cdot\frac{\partial M_y}{\partial p_x} =$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = -p_z \qquad \frac{\partial M_y}{\partial p_x} = z$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial p_x} = -y \qquad \frac{\partial M_z}{\partial x} = p_y$$

$$= -p_z(-y) - p_y z = p_z y - p_y z = \underline{M_x = [M_y\ M_z]}$$

$$[M_z\ M_x] = \sum_{i=x}^{z}\left(\frac{\partial M_z}{\partial q_i}\frac{\partial M_x}{\partial p_i} - \frac{\partial M_x}{\partial q_i}\frac{\partial M_z}{\partial p_i}\right) =$$

$$= \frac{\partial M_z}{\partial x}\frac{\overset{=0}{\partial M_x}}{\partial p_x} - \frac{\overset{=0}{\partial M_x}}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} + \frac{\partial M_z}{\partial y}\frac{\partial M_x}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y}$$

$$+ \underset{0}{\frac{\partial M_z}{\partial z}}\frac{\partial M_x}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\overset{=0}{\partial M_z}}{\partial p_z} = \frac{\partial M_z}{\partial y}\frac{\partial M_x}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} =$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} = -p_x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial p_y} = -z, \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} = p_z, \quad \frac{\partial M_z}{\partial p_y} = x$$

$$= (-p_x)(-z) - p_z x = p_x z - p_z x = \underline{M_y = [M_z\ M_x]}$$

Ответ: $[M_x\ M_y] = M_z$

$[M_y\ M_z] = M_x$

$[M_z\ M_x] = M_y$

Скобки Пуассона.

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \right).$$

$\{L_i, L_j\}$ – ?

В декарт. коор-х, т.е а) $\{L_x, L_y\}$ – ?

б) $\{L_x, L_y\}$ – ?

в) $\{L_x, L_z\}$ – ?

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$L_x = yp_z - zp_y.$

$L_y = zp_x - xp_z.$

$L_z = -yp_x + xp_y$

а) $\{L_x, L_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} =$

Св-ва: 1) $\{f_1 + f_2; f_3\} = \{f_1; f_3\} + \{f_2, f_3\}.$

2) $\{f_1\{f_2 f_3\}\} = \{f_3\{f_1 f_2\}\} +$

$+ \{f_2\{f_3 f_1\}\} = 0.$

3) $\{f_1 \cdot f_2, f_3\} = f_1\{f_2, f_3\} + f_2\{f_1, f_3\}.$

a)

1) $\{L_x, L_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} =$

$= \{yp_z, zp_x - xp_z\} - \{zp_y, zp_x - xp_z\} =$

$= \overset{1.}{\{yp_z, zp_x\}} - \overset{2.}{\{yp_z, xp_z\}} - \overset{3.}{\{zp_y, zp_x\}} + \overset{4.}{\{zp_y, xp_z\}}.$

1) $\{yp_z, zp_x\} = y\{p_z, zp_x\} + p_z\{y, zp_x\} =$

$= yz\underbrace{\{p_z, p_x\}}_{0} + yp_x\underbrace{\{p_z, z\}}_{-1} + p_z z\underbrace{\{y, p_x\}}_{0.} + p_z p_x\underbrace{\{y, z\}}_{0.}$

2) $\{yp_z, xp_z\} = 0$

3) $\{zp_y, zp_x\} = 0.$

4) $\{zp_y, xp_z\} = p_y\{z, xp_z\} + z\{p_y, xp_z\} =$

$$= p_y x\underbrace{\{z, p_z\}}_{1} + p_y p_z\underbrace{\{z, x\}}_{0} + zx\underbrace{\{p_y, p_z\}}_{0} + z p_z\underbrace{\{p_y, x\}}_{0}.$$

$$= p_y x.$$

$$\boxed{\{L_x, L_y\} = p_y x - y p_x = L_z}$$

$$\{x_i, x_j\} = 0.$$
$$\{p_i, p_j\} = 0.$$
$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

б) $\{L_x, L_z\} = \{y p_z - z p_y,\ x p_y - y p_x\} =$

$$= \{y p_z,\ x p_y - y p_x\} - \{z p_y,\ x p_y - y p_x\} =$$

$$= \underbrace{\{y p_z, x p_y\}}_{1} - \underbrace{\{y p_z, y p_x\}}_{0} - \underbrace{\{z p_y, x p_y\}}_{0} + \underbrace{\{z p_y, y p_x\}}_{2} =$$

1) $\{y p_z, x p_y\} = y\{p_z, x p_y\} + p_z\{y, x p_y\} =$

$$= yx\underbrace{\{p_z, p_y\}}_{0} + y p_y\underbrace{\{p_z, x\}}_{0} + p_z x\underbrace{\{y, p_y\}}_{+1} + p_z p_y\underbrace{\{y, x\}}_{0} = +p_z x.$$

2) $\{z p_y, y p_x\} = z\{p_y, y p_x\} + p_y\{z, y p_x\} =$

$$= zy\underbrace{\{p_y, p_x\}}_{0} + z p_x\underbrace{\{p_y, y\}}_{-1} + p_y y\underbrace{\{z, p_x\}}_{0} + p_y p_x\underbrace{\{z, y\}}_{0} = -z p_x$$

$$\{L_x, L_z\} = z p_x - p_z x = -L_y.$$

в) $\{L_y, L_z\} = \{z p_x - x p_z, x p_y - y p_x\} =$

$= \{z p_x, x p_y - y p_x\} - \{x p_z, x p_y - y p_x\} =$

$= \{z p_x, x p_y\} - \underbrace{\{z p_x, y p_x\}}_{0} - \underbrace{\{x p_z, x p_y\}}_{0} + \{x p_z, y p_x\} =$

$= \{z p_x, x p_y\} + \{x p_z, y p_x\}.$

1) $\{z p_x, x p_y\} = z\{p_x, x p_y\} + p_x\{z, x p_y\} =$

$= z x \underbrace{\{p_x, p_y\}}_{0} + z p_y \underbrace{\{p_x, x\}}_{-1} +$

$+ p_x x \underbrace{\{z, p_y\}}_{0} + p_x p_y \underbrace{\{z, x\}}_{0} = -z p_y.$

2) $\{x p_z, y p_x\} = x\{p_z, y p_x\} + p_z\{x, y p_x\} =$

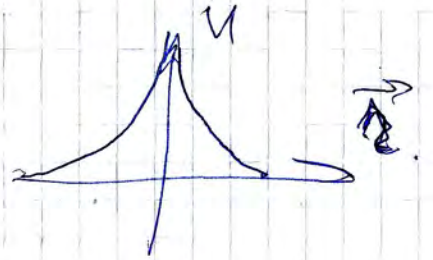
$= x y \underbrace{\{p_z, p_x\}}_{0} + x p_x \{p_z, y\} + p_z y \underbrace{\{x, p_x\}}_{1} +$

$+ p_z p_x \underbrace{\{x, y\}}_{0} = p_z y.$

$\{L_y, L_z\} = p_z y - z p_y = L_x$

|5+8| - стр 139

Дано: $U(r) = \begin{cases} \frac{a}{r} - \frac{a}{R} & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$, m, E_0



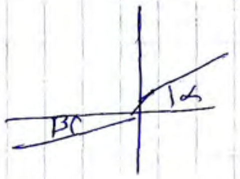
Найти $\frac{d\sigma}{d\theta}$.

Если $\rho > R$, то рассеяния не будет.

$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho$.

СЦМ ≡ ЛСК.

$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega$. $\Rightarrow$ необходимо найти $\rho = \rho(\theta)$



$U = U(r) \Rightarrow v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\left[1 - \frac{2U(r)}{mv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}}$$

r_{min}: $1 - \frac{2U(r)}{mv^2} - \frac{\rho^2}{r^2} = 0$.

$m\rho v = M_0$.

$1 - \frac{2}{mv^2}\left(\frac{a}{r} - \frac{a}{R}\right) - \frac{\rho^2}{r^2} = 0$.

$r^2 - \frac{2}{mv^2} a r + \frac{2a}{mv^2 R} r^2 - \rho^2 = 0$.

$U_{eff} = \frac{a}{r} - \frac{a}{R} + \frac{M_0^2}{2mr^2}$.

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{R} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\left[1 - \frac{2U(r)}{mv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}} \qquad U = \frac{a}{r} - \frac{a}{R}$$

$\xi = \frac{\rho}{r}$ $\quad \theta = \pi + 2\int_{\xi_{max}}^{\rho/R} \frac{d\xi}{\left[1 - 2a\left[\frac{\xi}{\rho m v^2} - \frac{1}{R m v^2}\right] - \xi^2\right]^{1/2}}$

ξ_{max} определяется из условий

$1 - 2a\left[\frac{\xi_{max}}{\rho m v^2} - \frac{1}{R m v^2}\right] - \xi_{max}^2 = 0$.

$$I = \int_{\xi_{max}}^{\rho/R} \frac{d\xi}{\left[1 - \frac{2a}{\rho m v^2}\xi - \xi^2 + 2\frac{a}{R m v^2}\right]^{1/2}} =$$

$1 + 2\frac{a}{Rmv^2} - \frac{2a}{\rho m v^2}\xi - \xi^2 = 1 + 2\frac{a}{Rmv^2} - \left(\frac{a}{\rho m v^2} + \xi\right)^2 + \frac{a^2}{\rho^2 m^2 v^4} =$

$= \left\{1 + 2\frac{a}{Rmv^2} + \left(\frac{a}{\rho m v^2}\right)^2\right\} \left[1 - \frac{\left(\frac{a}{\rho m v^2} + \xi\right)^2}{1 + 2\frac{a}{Rmv^2} + \left(\frac{a}{\rho m v^2}\right)^2}\right]$

$$I = \int_{\xi_{max}}^{\rho/R} \frac{d\left[\left(\frac{Q}{\rho m v^2}+\xi\right) / \left(1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2\right)^{1/2}\right]}{\left[1-\left\{\left(\frac{Q}{\rho m v^2}+\xi\right) / \sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)}\right\}^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \arcsin\left[\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\xi}{\sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2}}\right]\Bigg|_{\xi_{max}}^{\rho/R}$$

$$\theta = \pi + 2I = \pi + 2\arcsin(\dots)\Big|_{\xi_{max}}^{\rho/R} =$$

$$= \pi - 2\arcsin(\dots)\Big|_{\rho/R}^{\xi_{max}}$$

$$\arcsin\left[\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\xi_{max}}{\sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2}}\right] \Rightarrow$$ / из условия на ξ_{max} /

$$2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right) - \left(\frac{Q}{\rho m v^2}+\xi\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \arcsin 1 = \pi/2$$

$$\theta = \pi - 2\left[\pi/2 - \arcsin\left\{\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\frac{\rho}{R}}{\sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2}}\right\}\right] =$$

$$= 2\arcsin\left[\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\frac{\rho}{R}}{\left\{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2\right\}^{1/2}}\right]$$

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho$$

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho\, d\rho}{d\Omega}\, d\Omega \qquad d\Omega = 2\pi\sin\theta\cdot d\theta$$

$$d\sigma = \frac{\rho\, d\rho}{\sin\theta\, d\theta}\, d\Omega = \frac{\rho\, d\rho}{\sin[\theta(\rho)]\, \frac{d\theta(\rho)}{d\rho}\, \cancel{d\rho}}\, d\Omega =$$

$$= \frac{\rho}{\sin[\theta(\rho)]}\cdot \frac{1}{\left|\frac{d\theta(\rho)}{d\rho}\right|}\cdot d\Omega$$

$$\theta(\rho) = 2\arcsin\left[\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\frac{\rho}{R}}{\left\{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2\right\}^{1/2}}\right]$$

$$\theta'(\rho) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left\{\frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\frac{\rho}{R}}{\sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2}}\right\}^2}} \times$$

$$\times\left[\frac{\frac{1}{R}-\frac{Q}{\rho^2 m v^2}}{\sqrt{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2}} - \frac{\frac{Q}{\rho m v^2}+\frac{\rho}{R}}{\left\{1+2\frac{Q}{\rho m v^2}+\left(\frac{Q}{\rho m v^2}\right)^2\right\}^{3/2}}\times(-)\frac{Q^2}{m^2 v^4}\frac{1}{\rho^3}\right]$$

$\boxed{\text{№ 191}}$

$[V_i, V_j] - ?$ Дано: e, m, H.

$\vec{H} = (0, 0, H) = \operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\vec{k} = H\cdot\vec{k}$.

$A_x = -yH + A_0 = -yH$.

$U = -\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\vec{A} = +\frac{e}{c}\dot{x}yH$.

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e}{c}\dot{x}yH$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ $\Rightarrow$ первые интегралы

$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{e}{c}yH = \underline{p_{x0}} = m\dot{x}_0$ $\quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = \underline{p_{z0}}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$. $\quad \dot{x}_0 = \dot{x}_0^* - \frac{eH}{mc}y_0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{e}{c}\dot{x}H$.

$m\ddot{y} + \frac{e}{c}\dot{x}H = 0$. $\quad \dot{x} = \frac{1}{m}\left(p_{x0} + \frac{e}{c}yH\right)$.

$\cancel{m}\ddot{y} + \frac{eH}{cm^2}\left(p_{x0} + \frac{e}{c}yH\right) = 0$.

$\ddot{y} + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2 y + \frac{eH}{m^2c}p_{x0} = 0$.

$$\ddot y + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2 y + \left(\frac{eH}{mc}\right)\dot x_0 = 0 \qquad \ddot y + \omega^2 y + \omega \dot x_0 = 0$$

$$\ddot y_1 + \omega^2 y_1 = 0 \qquad y_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$y_2 = \text{const} \qquad \omega^2 y_2 = -\omega \dot x_0 \qquad y_2 = -\frac{\dot x_0}{\omega}$$

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{\dot x_0}{\omega}$$

$$t = 0 \qquad y_0 = A - \frac{\dot x_0}{\omega} \qquad A = y_0 + \frac{\dot x_0}{\omega}$$

$$\dot y = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) \qquad \omega = \frac{eH}{mc}$$

$$t = 0 \qquad \dot y_0 = \omega B \qquad B = \frac{\dot y_0}{\omega}$$

$$y = \left(y_0 + \frac{\dot x_0^*}{\omega}\right)\cos\omega t + \frac{\dot y_0}{\omega}\sin\omega t - \frac{\dot x_0^*}{\omega} =$$

$$= \frac{\dot x_0}{\omega}\cos\omega t + \frac{\dot y_0}{\omega}\sin\omega t - \frac{\dot x_0}{\omega} + y_0$$

$$\dot x = \dot x_0 + \omega(y - y_0) = \dot x_0 + (\dot x_0\cos\omega t + \dot y_0\sin\omega t - \dot x_0) =$$

$$= \dot x_0\cos\omega t + \dot y_0\sin\omega t$$

$$\dot y = \omega\left(-\frac{\dot x_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{\dot y_0}{\omega}\cos\omega t\right) = -\dot x_0\sin\omega t + \dot y_0\cos\omega t$$

$$\underline{\dot z = \dot z_0 = \text{const}} = \frac{P_z}{m}$$

$$\underline{\dot x = \omega y + \dot x_0 - \omega y_0} = \omega y + \frac{1}{m}P_x$$

$$x - x_0 = \frac{\dot x_0\sin\omega t}{\omega} - \frac{\dot y_0\cos\omega t}{\omega} + \frac{\dot y_0}{\omega}$$

$$x - x_0 = -\frac{\dot y}{\omega} + \frac{\dot y_0}{\omega} \qquad \dot y = \dot y_0 + \omega x_0 - \omega x$$

$$\underline{\dot y = -\omega x + \text{const}}$$

$$[\dot x, \dot z] = \frac{\partial \dot x}{\partial x}\cdot\overset{=0}{\frac{\partial \dot z}{\partial p_x}} - \overset{=0}{\frac{\partial \dot z}{\partial x}}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot x}{\partial y}\cdot\overset{=0}{\frac{\partial \dot z}{\partial p_y}} - \overset{=0}{\frac{\partial \dot z}{\partial y}}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_y} +$$

$$+ \frac{\partial \dot x}{\partial z}\cdot\overset{=\frac{1}{m}}{\frac{\partial \dot z}{\partial p_z}} - \overset{=0}{\frac{\partial \dot z}{\partial z}}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_z} = \frac{1}{m}\frac{\partial \dot x}{\partial z} = 0$$

$$[\dot y \cdot \dot z] = 0$$

$$[\dot x \cdot \dot y] = \frac{\partial \dot x}{\partial x}\cdot\frac{\partial \dot y}{\partial p_x} - \frac{\partial \dot y}{\partial x}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot x}{\partial y}\cdot\frac{\partial \dot y}{\partial p_y} - \frac{\partial \dot y}{\partial y}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_y} +$$

$$+ \frac{\partial \dot x}{\partial z}\cdot\frac{\partial \dot y}{\partial p_z} - \frac{\partial \dot y}{\partial z}\cdot\frac{\partial \dot x}{\partial p_z} = 0 - (-\omega)\frac{1}{m} + 0 - 0 + 0 - 0 = \frac{\omega}{m}$$

3. (3) Вычислить скобки Пуассона $[v_i, v_j]$, где v_i - декартовы компоненты вектора скорости заряда e, массы m в однородном магн. поле $\mathcal{H}$.

Решение:

Ф-я Лагранжа:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A}) - e\Phi =$$

$$\Phi = 0$$

$$= \frac{m}{2}v^2 + \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A}).$$

Направим $\mathcal{H}$ по оси z: $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H})$.

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \vec{k}\,\mathcal{H} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ м/ $\vec{A}$ представить в виде $(0; \mathcal{H}\cdot x, 0)$, тогда

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{e}{c}\dot{y}\cdot\mathcal{H}\cdot x$$

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y &= m\dot{y} + \frac{e}{c}\cdot\mathcal{H}\cdot x \\ p_z &= m\dot{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= \frac{p_x}{m} \\ v_y &= \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{e}{c}\cdot\mathcal{H}\cdot x\right) \\ v_z &= \frac{p_z}{m} \end{aligned}$$

$$[v_k, v_j] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\frac{\partial v_j}{\partial q_i} - \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_j}{\partial p_i}\right)$$

1) $[v_x, v_y] = -[v_y, v_x]$:

$$[v_x, v_y] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial p_i}\frac{\partial v_y}{\partial q_i} - \frac{\partial v_x}{\partial q_i}\frac{\partial v_y}{\partial p_i}\right) =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial p_x}\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\left(-\frac{e}{c}\mathcal{H}\right) = -\frac{e}{m^2c}\mathcal{H}$$

2) $[v_x, v_z] = -[v_z, v_x]$:

$$[v_x, v_z] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial p_i}\frac{\partial v_z}{\partial q_i} - \frac{\partial v_x}{\partial q_i}\frac{\partial v_z}{\partial p_i}\right) = 0.$$

3) $[v_y, v_z] = -[v_z, v_y]$:

$$[v_y, v_z] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_y}{\partial p_i}\frac{\partial v_z}{\partial q_i} - \frac{\partial v_y}{\partial q_i}\frac{\partial v_z}{\partial p_i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial v_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial p_x} = 0.$$

4) $[v_x, v_x] = [v_z, v_z] = [v_y, v_y] = 0.$

Ответ: $[v_k, v_j] = \begin{cases} 0, & k=j \\ 0, & k\neq j, \text{ и } k,j \neq 2 \text{ и } 1 \text{ одновременно} \\ -\frac{e}{m^2c}\mathcal{H}, & k=1,\ j=2 \\ +\frac{e}{m^2c}\mathcal{H}, & k=2,\ j=1 \end{cases}$

③ Как изменится мех эн-ия и параметр финитного движения частицы с массой m в центральном поле $U(r) = -a/r$, $a>0$; при адиабатическом изменении параметра a.

$$T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) + \frac{a}{r}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$H = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$-\frac{a}{r} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{a}{r}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{a}{r} = 0$$

$$S = -H_0 t + S'(r,\theta,\varphi)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{a}{r} = H_0$$

$$S' = c_1\varphi + S''(r,\theta)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_1^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{a}{r} = H_0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2+\frac{c_1^2}{\sin^2\theta}\right]\right)-\frac{a}{r}=H_0$$

$$c_2=\left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2+\frac{c_1^2}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2+\frac{c_2}{2mr^2}-\frac{a}{r}=H_0$$

$$S''(r,\theta)=S_r(r)+S_\theta(\theta)$$

$$c_2=\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{c_1^2}{\sin^2\theta}$$

$$dS_\theta=\sqrt{\left(\frac{c_1^2}{\sin^2\theta}-c_2\right)}\,d\theta$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2+\frac{c_2}{2mr^2}-\frac{a}{r}=H_0$$

$$dS_r=\sqrt{2m\left(H_0-\frac{c_2}{2mr^2}+\frac{a}{r}\right)}\,dr$$

$$S=-H_0t+c_1\varphi+\int\sqrt{\frac{c_1^2}{\sin^2\theta}-c_2}\,d\theta+$$

$$+\int\sqrt{2m\left(H_0-\frac{c_2}{2mr^2}+\frac{a}{r}\right)}\,dr$$

$$H=-\frac{ma(t)}{2(J_r+J_\varphi)^2}$$

$$J_\varphi=\frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi\,d\varphi=\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}=M$$

$$J_r=\frac{1}{2\pi}\oint p_r\,dr=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left(H_0+\frac{a}{r}-\frac{M^2}{r^2}\right)}\,dr$$

двит. функции =>

$$t_{1,2} = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 + 2mEM^2}}{M^2}$$

$$r_{min} = \frac{M^2}{ma + \sqrt{ma^2 + 2mE^2}} = \frac{M^2}{ma}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{2EM^2}{ma^2}}}\right)$$

$$r_{max} = \frac{M^2}{ma}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1+\frac{2EM^2}{ma^2}}}\right)$$

$$y_r = \frac{1}{\hbar}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2mE + \frac{2ma}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\, dr = -M + a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

$$H = -\frac{ma^2(t)}{2(y_r + y_r)^2} \qquad P = \frac{M^2}{a(t)m}.$$

③ Как изменяется механическая энергия и параметр орбиты финитного движения частицы с массой m в центральном поле $U(r) = -\frac{a}{r}$; $a>0$, при адиабатическом изменении параметра a?

Рассмотрим в полярных коор-х (в пл-ти Лапласа):

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{a}{r};$$

перейдём к переменным действие-угол при постоянном a; а затем действия должны сохраняться в среднем за время.

Ур-ние Гам-на-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{a}{r} = 0,$$

ищем решение в виде $S = -E_0 \cdot t + L_0 \cdot \varphi + S_r(r)$,

где $L_0 = p_{\varphi 0} = \mathrm{const}$. (т.к. φ — циклич. коор-та).

Подставив в ур-ние Г.-Я., получим

$$-|E_0| = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{a}{r},$$

$E_0 < 0$ для выполнения условия задачи.

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{-2m|E_0| - \frac{L_0^2}{r^2} + \frac{2ma}{r}};$$

действие $I_r = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\left(-|E|-\frac{L_0^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}\right)}\,dr$;

$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint L_0\cdot d\varphi = L_0$; — точный адиабатический инвариант.

r_1 и r_2 — классические точки поворота.

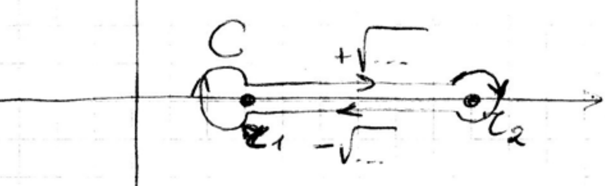
Вычислим интеграл по теории вычетов:

$$f(z) = \left(-2m|E| - \frac{L_0^2}{z^2} + \frac{2m\alpha}{z}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$z = r_1, r_2$ — нули ф-ции $f(z)$.

$f(z)$ — неоднозначная ф-ция, r_1 и r_2 — точки ветвления.

$$\oint\limits_C f(z)\cdot dz = 2\pi i\cdot\sum \mathrm{Res}[f(z); z]$$



1) $z=0$: $f(z) = \frac{1}{z}\left(-2m|E|z^2 - L_0^2 + 2m\alpha\cdot z\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathrm{Res}[f(z), z=0] = \left(-L_0^2\right)^{1/2} = i\cdot L_0$ (т.к. $f(z)$ получит приращение $e^{i\pi/2} = i$ при переходе с верхнего берега на нуль.

2) $z=\infty$: $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$

$$f(z) = \left(-2m|E|\right)^{1/2}\cdot\left(1 - \frac{\alpha}{|E|}\frac{1}{z} + \frac{L_0^2}{2m|E|}\frac{1}{z^2}\right)^{1/2}$$

$$=\left(-2m|E|\right)^{1/2}\left(1-\frac{a}{2|E|}\frac{1}{z}+\frac{L_0^2}{4m|E|}\frac{1}{z^2}\right);$$

$\mathrm{Res}\left[f(z); z=\infty\right]$ — коэф-т при $\frac{1}{z}$, взятый с обратным знаком.

$$\mathrm{Res}\left[f(z);\ z=\infty\right]=-\left(-2m|E|\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{|E|};$$

$f(z)$ приобретёт набег фазы $(-i)$ при переходе на бескон-ть с верхней ветви $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\left[f(z);\ z=\infty\right]=-i\sqrt{\frac{2m}{|E|}}\cdot\frac{1}{2}a=-i\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\cdot a;$$

$$\sum_i \mathrm{Res}\left[f(z_i);\ z=z_i\right]=i\left(L_0-\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,a\right);$$

$$\underline{I_r}=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\cdot\sum \mathrm{Res}=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\cdot a-L_0,$$

$$\boxed{E=-\frac{m\,a^2(t)}{2\left(I_r+L_0\right)^2}};$$

$I_r = \mathrm{const}$. в среднем по времени $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,a-L_0=\sqrt{\frac{m}{2|E(0)|}}\cdot a(0)-L_0$$

L_0 сохраняется неизменным.

Или $E(t)=a^2(t)\cdot\frac{E(0)}{a^2(0)}$. $E(t)<0$ при $\forall t$.

Параметр орбиты $\boxed{p=\frac{L_0^2}{m\cdot a(t)}}$.

При движении по окр-ти $I_r=0$.

$\boxed{\text{№ } 20}$

Дано: $U(r) = -\frac{a}{r}$, $a > 0$. Найти $H(e)$.

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) + \frac{a}{r}.$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}.$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$H = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{m}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - a/r =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{a}{r}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{a}{r} = 0$$

$$S = -H_0 t + S'(r, \theta, \varphi)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{a}{r} = H_0$$

$$S' = c_1\varphi + S''(r, \theta)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_1^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{a}{r} = H_0.$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}\right]\right) - \frac{a}{r} = H_0.$$

$$c_2 = \left(\frac{\partial S''}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S''}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_2}{2mr^2} - \frac{a}{r} = H_0.$$

$$S''(r, \theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta)$$

$$c_2 = \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}. \qquad dS_\theta = \sqrt{\left(\frac{c_1^2}{\sin^2\theta} - c_2\right)}\, d\theta.$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{c_2}{2mr^2} - \frac{a}{r} = H_0.$$

$$dS_r = \sqrt{2m\left(H_0 - \frac{c_2}{2mr^2} + \frac{a}{r}\right)}\, dr.$$

$$S = -H_0 t + c_1\varphi + \int\sqrt{\frac{c_1^2}{\sin^2\theta} - c_2}\, d\theta + \int\sqrt{2m\left(H_0 - \frac{c_2}{2mr^2} + \frac{a}{r}\right)}\, dr.$$

№3. **Задача**: как изменяется мех. энергия и параметр орбиты финитного движения ч-цы с массой m в центральном поле $U(r) = -a/r$, $a>0$ при адиабатическом изменении a.

Решение.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (\dot{\varphi}\, r \sin\theta)^2\right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (\dot{\varphi}\, r\sin\theta)^2\right) + \frac{a}{r}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\;;\quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\;;\quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{a}{r}$$

Будем р-ривать движение взяв $\theta_0 = 0$, тогда $p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = p_{\varphi_0} = 0$. Если же рассмотреть $\forall$ момент времени, т.е. когда $\theta \neq 0$, приходим к выводу, что $\dot{\varphi} = 0$, т.е. движение происходит в плоскости сохраняющей свою ориентацию

т.о. $$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{a}{r}}$$

Составляем ур-ие Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{a}{r} = E$$

Ищем его решение в виде:

$$S = -Et + S_r(r, E, M) + S_\varphi(\varphi, E, M)$$

определяем ф-ции $p_r(r, E, M)$ и $p_\varphi(\varphi, E, M)$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dS_r}{dr}\right)^2 = 2mE + \dfrac{2ma}{r} - \dfrac{M^2}{r^2} \\ \left(\dfrac{dS_\varphi}{d\varphi}\right) = M \end{cases}$$

Далее вычислим переменные действия

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = M.$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2mE + \frac{2ma}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\, dr$$

в силу периодичности движения I_r можно представить в виде удвоенного интеграла от ~~∮~~ r_{min} до r_{max}:

$$t = \frac{1}{r}: \quad 2mE + 2mat - M^2t^2 = 0$$

$$t^2M^2 - 2mat - 2mE = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 + 2mEM^2}}{M^2}$$

далее: $r_{min} = \dfrac{M^2}{ma + \sqrt{m a^2 + 2mEM^2}} = \dfrac{M^2}{ma}\left(\dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}}}\right) = \dfrac{p}{1+\varepsilon}.$

$$r_{max} = \frac{M^2}{ma}\left(\frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}}}\right) = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2mE + \frac{2ma}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\, dr = \frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\sqrt{2mEr^2 + 2mar - M^2}}{r}\, dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\sqrt{\cancel{2m}Er^2 + \cancel{2m}ar - M^2}}{r}\, dr = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\left\{\sqrt{Er^2 + ar - M^2}\,\Big|_{r_{min}}^{r_{max}} + \right.$$

$$+ \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{E}} \ln\left(2\sqrt{Er^2 + Ear - \frac{EM^2}{\sqrt{2m}}}\right)\Big|_{r_{min}}^{r_{max}} +$$

$$+ \left(-\frac{M^2}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M^2/\sqrt{2m}}} \arcsin \frac{a \cdot r - \frac{2M^2}{\sqrt{2m}}}{r\sqrt{a + \frac{4EM^2}{\sqrt{2m}}}}\right)\Big|_{r_{min}}^{r_{max}} =$$

$$= -M + a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Итак. $I_\varphi = M$; $I_r = -I_\varphi + a\sqrt{\dfrac{m}{2E}}$

отсюда $\boxed{H = E = -\dfrac{m a^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}}$

3) для параметра орбиты $p = \dfrac{M^2}{am}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{p = \frac{I_\varphi^2}{am}}$$

$\boxed{\text{№ 211}}$

Дано: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$, $m, k > 0$

$x_1(0) = a \qquad x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Найти: закон движ., собств. частоты.

$U = \frac{k}{2}(2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{k}{2}(4x_1 - x_2) = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{k}{2}(2x_2 - x_1) = 0$

$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$ – положение равновесия.

$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2k \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{k}{2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = k$

$\begin{vmatrix} 2k & -k/2 \\ -k/2 & k \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 2k > 0 \\ 2k^2 - k^2/4 > 0 \end{matrix} \Rightarrow$ устойчивое положение равновесия.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{k}{2}(4x_1 - x_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{k}{2}(2x_2 - x_1)$

$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \frac{k}{2m}(4x_1 - x_2) = 0 \\ \cancel{m}\ddot{x}_2 + \frac{k}{2m}(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \qquad \lambda_\alpha = \pm i\omega_\alpha \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$x_1 = A_1 e^{\lambda t} \qquad x_2 = A_2 e^{\lambda t}$

$\begin{cases} A_1\lambda^2 + \frac{k}{2m}(4A_1 - A_2) = 0 \\ A_2\lambda^2 + \frac{k}{2m}(2A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1(\lambda^2 + \frac{2k}{m}) + A_2(-\frac{k}{2m}) = 0 \\ A_1 \cdot (-\frac{k}{2m}) + A_2(\lambda^2 + \frac{k}{m}) = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{\omega^2}{2} & \lambda^2 + \omega^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 3\lambda^2\omega^2 + 2\omega^4 - \frac{\omega^4}{4} = \lambda^4 + 3\lambda^2\omega^2 + \frac{7}{4}\omega^4$

$D = (3\omega^2)^2 - 4 \cdot \frac{7}{4}\omega^4 = 2\omega^4$

$\lambda^2 = \frac{-3\omega^2 \pm \sqrt{2\omega^4}}{2} = \frac{\omega^2}{2}(-3 \pm \sqrt{2}) = \frac{\omega^2}{2} \cdot i^2 (3 \pm \sqrt{2})$

$\lambda = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2}} i \sqrt{3 \pm \sqrt{2}} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{3+\sqrt{2}}$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{3-\sqrt{2}}$

1) $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{2}(-3+\sqrt{2})$

$A_1^{(2)}\left(\frac{\omega^2}{2}(-3+\sqrt{2}) + 2\omega^2\right) + A_2\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) = 0$

$A_1^{(2)}\left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2\right) = A_2 \frac{\omega^2}{2} \qquad A_1^{(2)} \cdot (1+\sqrt{2}) = A_2^{(2)}$

$A_2^{(1),(2)} = A_1^{(1),(2)} \cancel{(1+\sqrt{2})} (\sqrt{2}+1)$

2) $\lambda^2 = -\frac{\omega^2}{2}(-3-\sqrt{2})$

$A_1^{\xi}\left(-\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2\right) = A_2^{\xi}\frac{\omega^2}{2}$ $\qquad A_2^{\xi} = (-\cancel{1}-\sqrt{2})\cancel{\ } A_1^{\xi}$

$A_2^{(3),(4)} = A_1^{(3),(4)} \cdot \cancel{\sqrt{2}-1}\,(\sqrt{2}-1)$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{3-\sqrt{2}}$

$x_1 = c\cos(\omega_1 t+\alpha) + d\cos(\omega_2 t+\beta)$

$x_2 = (\sqrt{2}-1)\,c\cos(\omega_1 t+\alpha) + (\sqrt{2}+1)\,d\cos(\omega_2 t+\beta)$

$$\begin{cases} x_1(0) = c\cos\alpha + d\cos\beta = a \\ x_2(0) = (\sqrt{2}-1)c\cos\alpha + (\sqrt{2}+1)d\cos\beta = 0 \\ \dot{x}_1(0) = -c\omega_1\sin\alpha - d\omega_2\sin\beta = 0 \\ \dot{x}_2(0) = -(\sqrt{2}-1)c\omega_1\sin\alpha - (\sqrt{2}+1)d\omega_2\sin\beta = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{d}{c} = \frac{\omega_1\sin\alpha}{\omega_2\sin\beta} = \frac{(\sqrt{2}-1)\,\omega_1\sin\alpha}{(\sqrt{2}+1)\,\omega_2\sin\beta}$$

Билет №20

3. Задача

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2); \quad m, k > 0.$$

$x_1(0) = a;\ x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$

Найти собственные частоты и закон движения.

Матрицы кинетической и потенциальной энергии:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} 2k & -\frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & k \end{pmatrix};$$

Вековое уравнение:

$$-\omega^2 \hat{T} + \hat{U} = \begin{vmatrix} -\omega^2 m + 2k & -\frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & -\omega^2 m + k \end{vmatrix} = (-\omega^2 m + 2k)(-\omega^2 m + k) - \frac{1}{4}k^2 =$$

$$= (\omega^4 m^2 - \omega^2 mk - 2\omega^2 mk + 2k^2) - \frac{1}{4}k^2 = \omega^4 m^2 - 3\omega^2 mk + \frac{7}{4}k^2;$$

$$D = 9m^2k^2 - 7m^2k^2 = 2m^2k^2.$$

$$\omega_1^2 = \frac{3mk + mk\sqrt{2}}{2m^2} = \frac{k}{2m}(3 + \sqrt{2});$$

$$\omega_2^2 = \frac{3mk - mk\sqrt{2}}{2m^2} = \frac{k}{2m}(3 - \sqrt{2});$$

1) $\omega_1^2 = \frac{k}{2m}(3 + \sqrt{2});$

$$\begin{vmatrix} -\frac{(3+\sqrt{2})k}{2m}m + 2k & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & -\frac{(3+\sqrt{2})k}{2m}m + k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(1-\sqrt{2})k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{(-1-\sqrt{2})k}{2} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{(-1-\sqrt{2})}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2}a_{11} - \frac{1}{2}a_{21} = 0; \quad a_{21} = (1-\sqrt{2})a_{11};$$

Положим $a_{11}=1$. Тогда $a_{21}=(1-\sqrt{2})$. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

2) $\omega_2^2 = \frac{k}{2m}(3-\sqrt{2})$;

$$\begin{vmatrix} -\frac{(3-\sqrt{2})k}{2m}\cdot m+2k & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & -\frac{(3-\sqrt{2})k}{2m}m+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{(-1+\sqrt{2})k}{2} \end{vmatrix} = \frac{k}{2}\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0; \Rightarrow (1+\sqrt{2})a_{12} - a_{22} = 0; \Rightarrow (1+\sqrt{2})a_{12} = a_{22}.$$

Положим $a_{12}=1$. Тогда $a_{22}=1+\sqrt{2}$. $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

$$\vec{q}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{i\omega_1 t} + C_1^*\begin{pmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-i\omega_1 t} + C_2\begin{pmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{i\omega_2 t} + C_2^*\begin{pmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-i\omega_2 t} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}2\cos\omega_1 t + C_2\begin{pmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}2\cos\omega_2 t;$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 2C_1\cos\omega_1 t + 2C_2\cos\omega_2 t; \\ x_2(t) = 2C_1(1-\sqrt{2})\cos\omega_1 t + 2(1+\sqrt{2})C_2\cos\omega_2 t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2C_1\omega_1\sin\omega_1 t - 2C_2\omega_2\sin\omega_2 t; \\ \dot{x}_2(t) = -2C_1\omega_1(1-\sqrt{2})\cos\omega_1 t - 2C_2\omega_2(1+\sqrt{2})\sin\omega_2 t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 2C_1 + 2C_2 = a; \\ x_2(0) = C_1(1-\sqrt{2}) + C_2(1+\sqrt{2}) = 0; \\ \dot{x}_1(0) = -2C_1\omega_1 - 2C_2\omega_2 = 0; \\ \dot{x}_2(0) = -2C_1\omega_1(1-\sqrt{2}) - 2C_2\omega_2(1+\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

$C_1 = -C_2\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; $C_2\left(2-\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow C_2\left(\frac{2-2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) = C_2\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = C_2 = \frac{a}{2}$;

$C_1 = -\frac{a}{2}\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$;

$$\boxed{\vec{q}(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}2\cos\omega_1 t - \frac{a}{2}\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}2\cos\omega_2 t;}$$

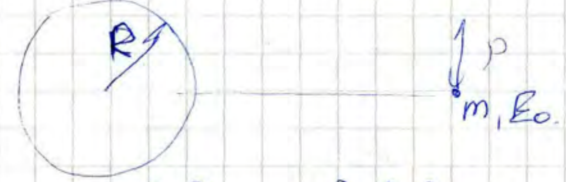
$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{k}{2m}(3+\sqrt{2}) \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{2m}(3-\sqrt{2})\end{aligned}}$$

№22

Дано: $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}$ $a, b > 0$, m, R, E_0

Найти полное сечение захвата.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} = E_0.$$



$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = (\dot\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\cdot\dot\varphi)^2 + (\dot\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2.$$

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} = E_0$$

$mr^2\dot\varphi = M_0$ — закон сохранения момента импульса

$$\dot\varphi = \frac{M_0}{mr^2} \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \frac{M_0^2}{m^2r^2}\right) + \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} = E_0$$

$$\dot r^2 = \frac{2}{m}\cdot\left(E_0 - \left(\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}\right) - \frac{M_0^2}{2mr^2}\right)$$

$$U_{eff} = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} + \frac{M_0^2}{2mr^2} = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} + \frac{m^2v^2\rho^2}{2m r^2} = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} + \frac{E_0\rho^2}{r^2}$$

$$\dot r^2 = \frac{2}{m}(E_0 - U_{eff}).$$

ищем ~~минимум~~ максимум U_{eff}.

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = -\frac{2a}{r^3} + \frac{4b}{r^5} - \frac{2E_0\rho^2}{r^3} = 0 \qquad (2a + 2E_0\rho^2)\cdot r^2 = 4b$$

$$r_m^2 = \frac{2b}{a + E_0\rho^2}$$

$$U_{eff}(r_m) = \frac{a\cdot(a+E_0\rho^2)}{2b} - \frac{b(a+E_0\rho^2)^2}{4b^2} + \frac{E_0\rho^2\cdot(a+E_0\rho^2)}{2b} = \frac{(a+E_0\rho^2)}{2b}\left(2\frac{(a+E_0\rho^2)}{2} - \frac{(a+E_0\rho^2)}{2}\right) = \frac{(a+E_0\rho^2)^2}{4b}$$

захват реализуется при $\rho < \rho_0$, такого, что $U_{eff}(r_m, \rho_0) \le E_0$

$$\frac{(a+E_0\rho_0^2)^2}{4b} = E_0. \qquad a + E_0\rho_0^2 = \sqrt{\frac{E_0}{4b}}$$

$$\rho_0^2 = \frac{1}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right) \qquad \rho_0 = \sqrt{\frac{1}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)}$$

$$r_m^2(\rho_0) = \frac{2b}{a + E_0\rho_0^2} = \frac{2b}{a + \left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)} = \frac{2b}{\sqrt{E_0}}2\sqrt{b} = 4b\sqrt{\frac{b}{E_0}}$$

Если $R < r_m(\rho_0) = \sqrt{4b\sqrt{\frac{b}{E_0}}}$, то

сечение захвата $\sigma = \pi\rho_0^2 = \frac{\pi}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)$.

Если $R > r_m(\rho_0) = \sqrt{4b\sqrt{b/E_0}}$, то будут захвачены все частицы, для которых $\rho < \rho_1$, где ρ_1 такое, что $U_{eff}(R, \rho_1) = E_0$.

$$\frac{a}{R^2} - \frac{b}{R^4} + \frac{E_0\rho_1^2}{R^2} = E_0. \qquad \frac{E_0\rho_1^2}{R^2} = \frac{E_0R^2 - a + \frac{b}{R^2}}{R^2}$$

$$\rho_1^2 = \frac{1}{E_0}\cdot\left(E_0R^2 - a + \frac{b}{R^2}\right).$$

$$\sigma = \pi\rho_1^2 = \frac{\pi}{E_0}\left(E_0R^2 - a + \frac{b}{R^2}\right).$$

N3 $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}$ $a, b > 0$

$$U_{eff} = \frac{E_0\rho^2}{r^2} + \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}$$

$E_0 > U_{eff\,max}$.

$$(U_{eff})' = -\frac{2E_0\rho^2}{r^3} - \frac{2a}{r^3} + \frac{4b}{r^5} = 0$$

$$-\frac{2}{r^3}\left(E_0\rho^2 + \cancel{2}a - \frac{2b}{r^2}\right) = 0.$$

$$E_0\rho^2 + a - 2b/r^2 = 0.$$

$$r^2 = \frac{E_0\rho^2 + a}{2b}.$$

$$U_{eff_m} = 2b - \frac{4b^3}{(E_0\rho^2 + a)^2} < E_0$$

$$\rho^2_{max} = \frac{\sqrt{\frac{4b^3}{2b - E_0}} - a}{E_0} = \sqrt{\frac{4b^3E_0^2}{2b - E_0}} - a/E_0.$$

$$\sigma = \pi\rho^2 = \pi\left(\sqrt{\frac{4b^3E_0^2}{2b - E_0}} - a/E_0\right) \quad \rho > 0; \text{ или } \sigma = 0 \; \rho < 0$$

Если $R > r$

$$\frac{E_0\rho_1^2}{R^2} + \frac{a}{R^2} - \frac{b}{R^4} = E_0 \qquad \rho < \rho_1$$

$$\rho_1^2 = \left(E_0 - \frac{a}{R^2} + \frac{b}{R^4}\right)R^2/E_0$$

$$\sigma_1 = \pi\rho_1^2 = \pi\left(R^2 - \frac{a}{E_0} + \frac{b}{R^2E_0}\right)$$

$\rho < \rho_1$ то при невыполнении данного условия захвата не произойдет $\Rightarrow \sigma = 0$

Дано: $u(r)=\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}$ $\quad a,b>0 \quad m,R,E_0$

Найти полное сечение захвата

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}=E_0$$

$$v^2=\dot x^2+\dot y^2=(\dot\rho\cdot\cos\varphi-\rho\sin\varphi\dot\varphi)^2+(\dot\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2=$$

$$=\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2$$

$$\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi)+\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}=E_0$$

$mr^2\dot\varphi=M_0$ - закон сохранения момента импульса.

$$\dot\varphi=\frac{M_0}{mr^2} \Rightarrow \frac{m}{r}\left(\dot r^2+\frac{M_0^2}{m^2r^2}\right)+\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}=E_0$$

$$\dot r^2=\frac{2}{m}\cdot\left(E_0-\left(\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}\right)-\frac{M_0^2}{2mr^2}\right)$$

$$U_{eff}=\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}+\frac{M_0^2}{2mr^2}=\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}+\frac{m^2v^2\rho^2}{2mr^2}=\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}+\frac{E_0\rho^2}{r^2}$$

$$\dot r^2=\frac{2}{m}(E_0-U_{eff})$$

ищем максимум U_{eff}:

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = -\frac{2a}{r^3} + \frac{4b}{r^5} - \frac{2E_0\rho^2}{r^3} = 0$$

$$(2a + 2E_0\rho^2)r^2 = 4b \qquad r_m^2 = \frac{2b}{a+E_0\rho^2}$$

$$U_{eff}(r_m) = \frac{a\cdot(a+E_0\rho^2)}{2b} - \frac{b(a+E_0\rho^2)^2}{4b^2} + \frac{E_0\rho^2(a+E_0\rho^2)}{2b} = \frac{(a+E_0\rho^2)}{2b}\left(2\left(\frac{a+E_0\rho^2}{2}\right) - \left(\frac{a+E_0\rho^2}{2}\right)\right) = \frac{(a+E_0\rho^2)^2}{4b}$$

захват реализуется при $\rho<\rho_0$, таком что $U_{eff}(r,\rho_0)\le E_0$

$$\frac{(a+E_0\rho_0^2)^2}{4b} = E_0 \qquad a+E_0\rho_0^2 = \sqrt{\frac{E_0}{4b}}$$

$$\rho_0^2 = \frac{1}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)$$

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)}$$

$$r_m^2(\rho_0) = \frac{2b}{a+E_0\rho_0^2} = \frac{2b}{a+\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}}-a\right)} =$$

$$= \frac{2b}{\sqrt{E_0}}\,2\sqrt{b} = 4b\sqrt{\frac{b}{E_0}}$$

Если $R < r_m(\rho_0) = \sqrt{4b\sqrt{\frac{b}{E_0}}}$, то сечение захвата $\sigma = \pi\rho_0^2 = = \frac{\pi}{E_0}\left(\sqrt{\frac{E_0}{4b}} - a\right)$

Если $R > r_m(\rho_0) = \sqrt{4b\sqrt{\frac{b}{E_0}}}$, то будут захвачены все частицы, для которых $\rho < \rho_*$, где ρ_* такое что $U_{eff}(R,\rho_*) = E_0$.

3) Найти полное сечение захвата частиц маленьким шариком радиуса R, находящимся в центре поля $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}$ $a, b > 0$.

Энергия частицы E_0.

$$U_{eff} = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4} + \frac{E_0\rho^2}{r^2} = \frac{\overbrace{a + E_0\rho^2}^{k}}{r^2} - \frac{b}{r^4}$$

условие падения:

$$b \geq r^2 U(r)\Big|_{r=R} + E_0\rho^2$$

$$a + E_0\rho^2 - \frac{b}{R^2} \leq 0 \qquad k \leq \frac{b}{R^2}$$

$$(1) \quad \rho^2 \leq \frac{1}{E_0}\left(\frac{b}{R^2} - a\right)$$

При этом должно выполняться: $U_m < E_0$

$U_{eff}\max$: $\quad U'_{eff} = \frac{-2k}{r_1^3} + \frac{4b}{r_1^5} = 0$

$$r_1^2 k = 2b \qquad r_1 = \sqrt{\frac{2b}{k}} = \sqrt{\frac{2b}{(a + E_0\rho^2)}} > R$$

Экстремальное значение $U_{eff\,max} = U_m$

$$U_m = U_{eff}(r_1) = \frac{k^2}{2b} - \frac{b k^2}{4b^2} = \frac{k^2}{4b} < E_0$$

$$(a + E_0\rho^2)^2 < E_0 4b \qquad a + E_0\rho^2 < 2\sqrt{E_0 b}$$

$$a^2 + 2a E_0\rho^2 + E_0^2\rho^4 < 4E_0 b \qquad \rho^2 < \frac{2\sqrt{E_0 b} - a}{E_0} = \rho_0$$

$$r_1(\rho_0) = \sqrt{\frac{2a}{2\sqrt{E_0 a}}} = \left(\frac{a}{E_0}\right)^{1/4}$$

При $R < \left(\frac{a}{E_0}\right)^{1/4}$ захват происходит при всех ρ ($\rho < \rho_0$)

если $\frac{2\sqrt{E_0 a} - a}{E_0} > 0$, т.е. $E_0 > \frac{a}{4}$, $a < 4E_0$

$$\sigma_{tot} = \pi \rho_0^2 = \pi\left(\frac{4E_{0a} - a}{E_0}\right) \quad \text{из (1)} \; \rho^2 < \sqrt{\frac{E_0}{a}} - \frac{a}{E_0}$$

$a < E_0$

если $E_0 < a$, $a > E_0$, то захвата нет (ρ_0^2 должно быть положительной вел-ной)

$$\sigma_{tot} = 0.$$

При $R > \left(\frac{a}{E_0}\right)^{1/4}$, то происходит захват всех частиц, для которых $\rho < \rho_1$

$$\frac{a}{R^2} - \frac{a}{R^4} + \frac{E_0 \rho_1^2}{R^2} = E_0$$

$$\rho_1^2 = \frac{R^2}{E_0}\left(E_0 - \frac{a}{R^2} + \frac{a}{R^4}\right) = R^2 - \frac{1}{E_0}\left(a - \frac{a}{R^2}\right)$$

$$\sigma_{tot} = 0 \quad \sigma_{tot} = \pi\left(R^2 - \frac{1}{E_0}\left(a - \frac{a}{R^2}\right)\right)$$

При $R^2 - \frac{1}{E_0}\left(a - \frac{a}{R^2}\right) < \frac{1}{E_0}\left(\frac{a}{R^2} - a\right)$

$$R^2 < \frac{2}{E_0}\left(\frac{a}{R^2} - a\right) < \frac{2a}{E_0}\left(\frac{1}{R^2} - 1\right).$$

при невыполнении этого условия захвата не будет

23

$$L = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 - k(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)/2$$

медленное изменение параметра k.

$$x_1 = u_1 + u_2$$

$$x_2 = u_1 - u_2$$

$$L = m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{k}{2}(u_1^2 + 3u_2^2)$$

$$p_{u_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = 2m\dot{u}_1 \qquad p_{u_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = 2m\dot{u}_2$$

$$\dot{u}_1 = \frac{p_1}{2m} \qquad \dot{u}_2 = \frac{p_2}{2m}$$

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - m\left(\left(\frac{p_1}{2m}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{2m}\right)^2\right) + \frac{k}{2}(u_1^2 + 3u_2^2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{4m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial u_2}\right)^2\right] + \frac{k}{2}(u_1^2 + 3u_2^2) = H_0$$

$$\left(\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S'}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{k}{2}u_1^2\right) + \left(\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S'}{\partial u_2}\right) + \frac{3}{2}ku_2^2\right) = H_0$$

$$S' = S_1(u_1) + S_2(u_2)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{k}{2}u_1^2 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = H_0$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S_2}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{3k}{2}u_2^2$$

$$\frac{dS}{du_1} = \sqrt{4m\left(\alpha_1 - \frac{k}{2}u_1^2\right)} \qquad u_1^2 = \frac{2\alpha_1}{k}$$

$$\frac{dS}{du_2} = \sqrt{4m\left(\alpha_2 - \frac{3k}{2}u_2^2\right)} \qquad u_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_1\,du_1 = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dS_1}{du_1}\,du_1$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dS_2}{du_2}\,du_2$$

адиабатические инварианты.

$$I_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\sqrt{\frac{2\alpha_1}{4_1}}}^{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{4_1}}} 2\sqrt{m\left(\alpha_1^2 - \frac{k}{2}u_1^2\right)}\,du_1 = \frac{2\sqrt{m}}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{2\alpha_1}{2k}}\,\times$$

$$\times\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2m\alpha_1}{k}}$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{2m\alpha_2}{3k}}$$

$$H_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = I_1\sqrt{\frac{k}{2m}} + I_2\sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

3. Система описывается лагранжианом $\mathcal{L}=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$, $m, k>0$. Найти, как изменяется энергия при адиабатическом изменении параметра k.

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$\begin{cases} x_1=\xi_1+\xi_2 \\ x_2=\xi_1-\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}=\frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2+\cancel{2\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2}+\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2-\cancel{2\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2}\right)-$$

$$-\frac{k}{2}\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\cancel{2\xi_1\xi_2}+\xi_1^2+\xi_2^2-\cancel{2\xi_1\xi_2}-(\xi_1^2-\xi_2^2)\right)=$$

$$=m(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)-\frac{k}{2}(2\xi_1^2+2\xi_2^2-\xi_1^2+\xi_2^2)=$$

$$=m(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)-\frac{k}{2}(\xi_1^2+3\xi_2^2).$$

$$p_1=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}_1}=2m\dot{\xi}_1 \Rightarrow \dot{\xi}_1=\frac{p_1}{2m};$$

$$p_2=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}_2}=2m\dot{\xi}_2 \Rightarrow \dot{\xi}_2=\frac{p_2}{2m};$$

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}_i}\dot{\xi}_i-\mathcal{L}=2m\dot{\xi}_1^2+2m\dot{\xi}_2^2-m\dot{\xi}_1^2-m\dot{\xi}_2^2+\frac{k}{2}(\xi_1^2+3\xi_2^2)=$$

$$=m\dot{\xi}_1^2+m\dot{\xi}_2^2+\frac{k}{2}(\xi_1^2+3\xi_2^2).$$

Функция Гамильтона:

$$\mathcal{H}=\frac{p_1^2}{4m}+\frac{p_2^2}{4m}+\frac{k}{2}(\xi_1^2+3\xi_2^2).$$

Уравнение Гамильтона - Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi_1}\right)^2+\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi_2}\right)^2+\frac{k}{2}(\xi_1^2+3\xi_2^2)=0;$$

считаем $k=\mathrm{const}$, тогда:

$$S=-E_0t+S_{01}(\xi_1)+S_{02}(\xi_2);$$

$$E_0=\underbrace{\frac{1}{4m}\left(\frac{dS_{01}}{d\xi_1}\right)^2+\frac{1}{2}k\xi_1^2}_{\alpha_1}+\underbrace{\frac{1}{4m}\left(\frac{dS_{02}}{d\xi_2}\right)^2+\frac{3}{2}k\xi_2^2}_{\alpha_2};$$

$$\frac{1}{4m}\left(\frac{dS_1}{d\xi_1}\right)^2+\frac{k}{2}\xi_1^2=\alpha_1;$$

$$E_0=\alpha_1+\alpha_2;$$

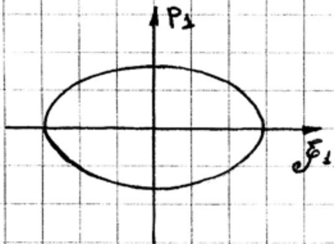
$$\frac{1}{4m}\left(\frac{dS_2}{d\xi_2}\right)^2+\frac{3}{2}k\xi_2^2=\alpha_2;$$

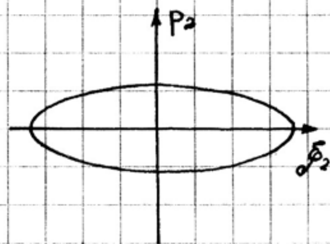
$$J_i=\frac{1}{2\pi}\oint p_i\,d\xi_i$$

$$\frac{1}{4m}p_1^2+\frac{k}{2}\xi_1^2=\alpha_1; \qquad \frac{1}{4m}p_2^2+\frac{3}{2}k\xi_2^2=\alpha_2;$$

$$\frac{p_1^2}{\left(\sqrt{4m\alpha_1}\right)^2}+\frac{\xi_1^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{k}\alpha_1}\right)^2}=1; \qquad \frac{p_2^2}{\left(\sqrt{4m\alpha_2}\right)^2}+\frac{\xi_2^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3k}\alpha_2}\right)^2}=1;$$

уравнение эллипса.





$$J_1=\frac{1}{2\pi}\oint p_1\,d\xi_1=\frac{1}{2\pi}S_{\text{эл.}1}=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{\pi}\cdot\sqrt{4m\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{2}{k}\alpha_1}=\sqrt{\frac{2m}{k}}\alpha_1;$$

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{k}{2m}}J_1;$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi}\oint p_2\,d\xi_2=\frac{1}{2\pi}S_{\text{эл.}2}=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\cancel{\pi}\sqrt{4m\alpha_2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3k}\alpha_2}=\sqrt{\frac{2m}{3k}}\alpha_2;$$

$$\alpha_2=\sqrt{\frac{3k}{2m}}J_2;$$

$$E_0=\sqrt{\frac{k}{2m}}J_1+\sqrt{\frac{3k}{2m}}J_2;$$

при адиабатическом изменении k:

$$E_0(t)=\sqrt{\frac{k(t)}{2m}}J_1+\sqrt{\frac{3k(t)}{2m}}J_2,\ \text{где } J_1 \text{ и } J_2=\text{const}.$$

Ответ:

$$\boxed{E_0(t)=\sqrt{\frac{k(t)}{2m}}J_1+\sqrt{\frac{3k(t)}{2m}}J_2,\ \text{где } J_1 \text{ и } J_2=\text{const}.}$$