$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u, \qquad \operatorname{div} \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\vec{l}, \vec{\nabla}) u, \qquad \operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}],$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}, \vec{\nabla}) \vec{a}.$$

$$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$$

$$\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}] + [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b}] + (\vec{b}, \vec{\nabla}) \vec{a} + (\vec{a}, \vec{\nabla}) \vec{b}$$

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u \operatorname{div} \vec{a}$$

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b})$$

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot} \vec{a}$$

$$\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{b}, \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a}, \vec{\nabla}) \vec{b}$$

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \Delta$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u \Delta v$$

$$\Delta(uv) = v \Delta u + u \Delta v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

Знакопеременные ряды

Рассмотрим ряды:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (I) — знакопеременный и
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (II) — знакопостоянный.
Если ряд (II) сходится, то ряд (I) тоже сходится. В этом случае говорят, что ряд (I) сходится *абсолютно*.
Если ряд (I) сходится, а ряд (II) — расходится, то говорят, что ряд (I) сходится *условно*.
Сумма *абсолютно* сходящегося ряда *не меняется* при *перестановке* членов, *условно* сходящегося — *меняется* (что весьма необычно: с *конечными* суммами такого не бывает).
Для исследования абсолютной сходимости применяются признаки сходимости знакопостоянных рядов. Для исследования обычной сходимости ряда (I) используют специальные признаки сходимости для знакопеременных рядов.

Признак Лейбница. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Если $\{b_n\}$ — *монотонная* последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд сходится.

Признак Дирихле. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть
1) $\exists C: |\sum_{n=1}^{N} a_n| \le C\ \forall N$,
2) $\{b_n\}$ — *монотонная* последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.
Замечание 1. Число C не должно зависеть от N. Оно общее для всех N.
Замечание 2. Признак Лейбница непосредственно следует из признака Дирихле, если положить $a_n = (-1)^n$.
Замечание 3. Признак Дирихле не стоит использовать для знакопостоянных рядов. Для них есть более простые признаки.

Сложение и вычитание рядов. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n),$$

т. е. ряд, стоящий в правой части, тоже сходится, и его сумма выражается через суммы исходных рядов.

Стандартные оценки для исследования рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, где x — параметр.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad x \ne 2\pi k; \qquad \left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad x \ne 2\pi k;$$

$$|\sin nx| \ge \frac{1-\cos 2nx}{2}; \qquad |\cos nx| \ge \frac{1+\cos 2nx}{2}.$$

Докажем оценку для $|\sin nx|$. Поскольку $0 \le |\sin nx| \le 1$, то

$$|\sin nx| \ge |\sin nx| \cdot |\sin nx| = \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}.$$

Оценка для $|\cos nx|$ доказывается аналогично.

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Рассмотрим знакопостоянный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть, для определённости, его члены неотрицательны: $a_n \geq 0$ (начиная с некоторого номера).

Признак сравнения. Рассмотрим два ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (I) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (II).

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$ (т. е. начиная с некоторого номера n_0). Ряд (II) называется *мажорантным* для ряда (I), а ряд (I) называется *минорантным* для ряда (II). Тогда

а) если (II) сходится $\Rightarrow$ (I) сходится,

б) если (I) расходится $\Rightarrow$ (II) расходится.

Признак Коши. Пусть $a_n \geq 0$ (начиная с некоторого номера).

1. Пусть $\exists \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный предел). Тогда
   а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,
   б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
   в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.
2. Пусть $\boxed{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный верхний предел). Тогда
   а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,
   б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
   в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.
3. Пусть
   а) $\exists \boxed{\alpha < 1}$: $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \leq \alpha}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ ряд сходится,
   б) $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \geq 1}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ (начиная с некоторого номера).

1. Пусть $\exists \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный предел). Тогда
   а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,
   б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
   в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.
2. Пусть $\boxed{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный верхний предел). Тогда
   а) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
   б) $q \geq 1 \Rightarrow$ неизвестно.
3. Пусть
   а) $\exists \boxed{\alpha < 1}$: $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ ряд сходится,
   б) $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Интегральный признак.

Пусть $f(x)$ — непрерывная и *монотонная* функция при $\forall x \geq n_0$. Тогда

$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ сходится $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{n_0}^{A} f(x)\,dx$ (*конечный* предел).

Замечание: требование монотонности существенно.

Специальный признак сравнения.

1. Если $\boxed{a_n > 0, b_n > 0}$ (начиная с некоторого номера) и $b_n \sim a_n$ при $n \to \infty$ (последовательности эквивалентны), т. е.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.
2. Если $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ при $n \to \infty$, где $c \neq 0$ (т. е. последовательности a_n и $\frac{1}{n^\alpha}$ имеют одинаковый порядок $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = c \neq 0$, это ещё записывают в виде $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   а) сходится при $\alpha > 1$,
   б) расходится при $\alpha \leq 1$.

Несобственные интегралы

Признаки сравнения.

1. Пусть $|f(x)| \le F(x)$ при всех достаточно больших положительных x ($\forall x > x_0$). Тогда
$$\exists \int_a^{+\infty} F(x)\,dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$
А из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ и $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
2. Пусть $g(x) > 0$ при всех достаточно больших положительных x и
$f(x) = O^*\big(g(x)\big)$ при $x \to +\infty$
($f(x)$ и $g(x)$ — величины одного порядка при $x \to +\infty$),
т. е. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \ne 0$ — конечный предел.
Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
3. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$.
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \le 1$.
4. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-a)^p}\right)$ при $x \to a + 0$.
Тогда $\int_a^{b} f(x)\,dx$ сходится при $p < 1$, расходится при $p \ge 1$.
Аналогично для $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ при $x \to b - 0$.

Оценки

$\lvert\ln x\rvert < \frac{\varepsilon}{x^a}$ при всех достаточно малых положительных x,
$\ln x < \varepsilon x^a$ при всех достаточно больших положительных x.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. Пусть

1) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, т. е. $\exists C\colon |F(x)| \le C\ \forall x > a$;
2) функция $g(x)$ монотонна при всех достаточно больших положительных x и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла). $\exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A > a\colon \forall a_1, a_2 > A\ \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.
Аналогично для несобственного интеграла второго рода.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Рассмотрим несобственные интегралы первого рода:

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (I) и $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$ (II)

Если (II) сходится, то (I) тоже сходится. Тогда говорят, что (I) сходится *абсолютно.*

Если (I) сходится, а (II) — расходится, то говорят, что (I) сходится *условно.*

Аналогично для несобственных интегралов второго рода.

Для исследования абсолютной сходимости используются признаки сравнения. Когда абсолютной сходимости нет, можно использовать признак Дирихле.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. Пусть

1) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, т. е. $\exists C\colon |F(x)| \le C\ \forall x > a$;
2) функция $g(x)$ монотонна при всех достаточно больших положительных x и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Замечание 1. Здесь число C не должно зависеть от x.

Замечание 2. Для несобственных интегралов второго рода аналогичного признака нет. Для доказательства неабсолютной сходимости таких интегралов их надо сводить к несобственным интегралам первого рода с помощью замены переменной.

Замечание 3. Не стоит использовать признак Дирихле для интегралов, сходящихся абсолютно. В этом случае более удобно использовать признаки сравнения.

Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла). $\exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > a\colon \forall a_1, a_2 > A\ \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Аналогично для несобственного интеграла второго рода.

Замечание. Критерий Коши чаще всего используется для доказательства расходимости интеграла, т. к. для доказательства сходимости удобнее использовать признаки сходимости.

Главное значение несобственного интеграла (по Коши)

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx.$$

v. p. — “valeur principale” («главное значение» — франц.)

Например, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ не существует, т. к. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx$, а интегралы $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ и $\int_0^{+\infty} x\,dx$ расходятся. Однако

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{x^2}{2}\bigg|_{-A}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\right) = 0.$$

Аналогично, если $c \in (a, b)$ — особая точка функции $f(x)$, то

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Например, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существует, т. к. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$, а интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходятся. Однако (проверить дома — Демидович № 2390 а):

$$\text{v. p.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Замечание: если интеграл сходится, то он равен своему главному значению.

Несобственные интегралы с параметром

О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) > a\colon\ \forall R > A, \forall p \in P\ \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Здесь число A не должно зависеть от p.

Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла I рода. Рассмотрим интеграл с переменным нижним пределом интегрирования A:

$$J(p,A) = \int\limits_A^{+\infty} f(x,p)\,dx, \qquad A \geq a, \qquad p \in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{p\in P}|J(p,A)| = 0.$

О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon\ \forall\sigma \in (0;\ \delta), \forall p \in P\ \left|\int\limits_a^{a+\sigma} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Здесь число δ не должно зависеть от p.

Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла II рода. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $a+\delta$:

$$J(p,\delta) = \int\limits_a^{a+\delta} f(x,p)\,dx, \qquad 0 < \delta \leq b-a, \qquad p \in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to0+0}\sup\limits_{p\in P}|J(p,\delta)| = 0.$

Признак Вейерштрасса. Если $|f(x,p)| \leq F(x)$ при $p \in P$, $x \geq a$ и мажорантный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве P.

Аналогично признак Вейерштрасса формулируется для несобственных интегралов II рода.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)g(x,p)\,dx$. Пусть

1) $\exists C\colon \left|\int_a^A f(x,p)\,dx\right| \leq C\ \forall A > a, \forall p \in P$;
2) функция $g(x,p)$ *монотонна* по x при всех достаточно больших положительных x (при каждом фиксированном $p \in P$);
3) $g(x,p) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, $p \in P$ (функция $g(x,p)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ *равномерно* относительно параметра $p \in P$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{p\in P}|g(x,p)| = 0$).

Тогда интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве P.

Для несобственных интегралов II рода признака Дирихле нет.

Критерий Коши (равномерной сходимости несобственного интеграла I рода).
Интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) > a\colon \forall R_1 > A, \forall R_2 > A, \forall p \in P\ \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Аналогично критерий Коши формулируется для несобственного интеграла II рода.

Несобственные интегралы

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a, A]$, где $A > a$. Тогда

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ — *несобственный* интеграл *первого рода.*

Если существует *конечный* предел, то интеграл *сходится,* иначе — *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл первого рода по полупрямой $(-\infty, a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)\,dx.$$

Тогда по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

По определению считают, что интеграл, стоящий в левой части, сходится тогда и только тогда, когда сходятся *оба* интеграла, стоящие в правой части.

Замечание. Условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **не является НУС** несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Например, интеграл Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ сходится, как мы докажем на следующем семинаре.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in (a, b]$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a+\varepsilon, b] \subset (a, b]$, но $f(x)$ не ограничена в окрестности точки a (тогда будем говорить, что $x = a$ — *особая* точка функции $f(x)$). Заметим, что неограниченная функция $f(x)$ не интегрируема в обычном смысле (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Введём

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ — *несобственный* интеграл *второго рода.*

Если существует *конечный* предел, то интеграл *сходится,* иначе — *расходится.*

Например: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае, когда $x = b$ — особая точка функции $f(x)$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to0+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.

Например: $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$.

Если у функции $f(x)$ две особые точки: $x = a$ и $x = b$, то по определению

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, где $c \in (a, b)$ — промежуточная точка отрезка $[a, b]$.

По определению считают, что интеграл, стоящий в левой части, сходится тогда и только тогда, когда сходятся *оба* интеграла, стоящие в правой части.

Несобственный интеграл второго рода сводится к несобственному интегралу первого рода заменой переменной. Например, если $x = a$ — особая точка функции $f(x)$, то сделаем замену

Признаки сравнения.

1. Пусть $|f(x)| \leq F(x)$ при всех достаточно больших положительных x ($\forall x > x_0$). Тогда
$$\exists \int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx \;\Rightarrow\; \exists \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$
А из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ и $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
2. Пусть $g(x) > 0$ при всех достаточно больших положительных x и
$f(x) = O^*\big(g(x)\big)$ при $x \to +\infty$
($f(x)$ и $g(x)$ — величины одного порядка при $x \to +\infty$),
т. е. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ — конечный предел.
Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
3. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$.
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.
4. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-a)^p}\right)$ при $x \to a + 0$.
Тогда $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится при $p < 1$, расходится при $p \geq 1$.
Аналогично для $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ при $x \to b - 0$.

Оценки

$\lvert\ln x\rvert < \frac{\varepsilon}{x^a}$ при всех достаточно малых положительных x,
$\ln x < \varepsilon x^a$ при всех достаточно больших положительных x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \;\; \forall a > 0.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon)$: $\forall x > A\ \left|\frac{\ln x}{x^a}\right| < \varepsilon$.

Также мы знаем, что

$$\lim_{x\to0+0} x^a \ln x = 0 \;\; \forall a > 0.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in (0, \delta)\ \ |x^a \ln x| < \varepsilon$.

Таким образом, получаем оценки $\forall a > 0$, $\forall \varepsilon > 0$:

Несобственные интегралы с параметром

1. *Несобственный интеграл I рода.* Пусть для каждого значения параметра p из множества P сходится несобственный интеграл I рода

$$I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx, \qquad p \in P.$$

Тогда $I(p)$ — несобственный интеграл I рода, зависящий от параметра p.

О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) > a\colon \ \forall R > A, \forall p \in P \ \left| \int_R^{+\infty} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Замечание. Здесь число A не должно зависеть от p.

Равномерная сходимость означает, что $I(p)$ сходится одинаково быстро для всех $p \in P$.

Непосредственно из определения равномерной сходимости следует

Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла I рода. Рассмотрим интеграл с переменным нижним пределом интегрирования A:

$$J(p,A) = \int_A^{+\infty} f(x,p)\,dx, \qquad A \geq a, \qquad p \in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} \sup\limits_{p\in P} |J(p,A)| = 0.$

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по p, а затем перейти к пределу при $A \to +\infty$.

2. *Несобственный интеграл II рода.* Пусть для каждого значения параметра p из множества P сходится несобственный интеграл II рода

$$I(p) = \int_a^{b} f(x,p)\,dx, \qquad p \in P,$$

где $x = a$ — единственная особая точка функции $f(x,p)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $I(p)$ — несобственный интеграл II рода, зависящий от параметра p.

О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \ \forall \sigma \in (0;\ \delta), \forall p \in P \ \left| \int_a^{a+\sigma} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Замечание. Здесь число δ не должно зависеть от p.

Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла II рода. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $a + \delta$:

$$J(p,\delta) = \int_a^{a+\delta} f(x,p)\,dx, \qquad 0 < \delta \leq b - a, \qquad p \in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to 0+0} \sup\limits_{p\in P} |J(p,\delta)| = 0.$

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по p, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0 + 0$.

Признак Вейерштрасса. Если $|f(x,p)| \leq F(x)$ при $p \in P$, $x \geq a$ и мажорантный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве P.

Замечание. Здесь функция $F(x)$ не должна зависеть от p.

Аналогично признак Вейерштрасса формулируется для несобственных интегралов II рода.

Замечание. Поскольку признак Вейерштрасса даёт абсолютную сходимость, не получится его использовать для условно сходящихся интегралов. В этом случае нужно использовать признак Дирихле (см. далее) или практический критерий равномерной сходимости.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)g(x,p)\,dx$. Пусть

1) $\exists C\colon \left|\int_a^A f(x,p)\,dx\right| \leq C \ \forall A > a, \forall p \in P$;
2) функция $g(x,p)$ *монотонна* по x при всех достаточно больших положительных x (при каждом фиксированном $p \in P$);
3) $g(x,p) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, $p \in P$ (функция $g(x,p)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ *равномерно* относительно параметра $p \in P$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup\limits_{p\in P} |g(x,p)| = 0$).

Тогда интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве P.

Замечание. Здесь число C не должно зависеть ни от A, ни от p.

В третьем условии сначала надо взять супремум по всем $p \in P$, а затем перейти к пределу при $x \to +\infty$.

Для несобственных интегралов II рода признака Дирихле нет.

Замечание. Не стоит использовать признак Дирихле для абсолютно сходящихся интегралов. В этом случае удобнее использовать признак Вейерштрасса.

Критерий Коши (равномерной сходимости несобственного интеграла I рода).

Интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) > a\colon \forall R_1 > A, \forall R_2 > A, \forall p \in P \ \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Здесь число A не должно зависеть от p.

Как правило, критерий Коши используется, когда надо доказать отсутствие равномерной сходимости.

Аналогично критерий Коши формулируется для несобственного интеграла II рода.

способ задания пов-и / зад-ти	явный	неявный	параметрический
	$z=f(x,y),\ (x,y)\in G$	$F(x,y,z)=0$	$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r}=\varphi(u,v)\vec{i}+\psi(u,v)\vec{j}+\chi(u,v)\vec{k},\ (u,v)\in g$
особые точки		$F_x^2+F_y^2+F_z^2=0$	$\vec{r}_u \parallel \vec{r}_v$
$\vec{N}$	$\{-f_x;-f_y;1\}$	$\{F_x;F_y;F_z\}$	$[\vec{r}_u,\vec{r}_v]\equiv\{A;B;C\}$; $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ – в касат. пл-и $A=\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}$
элемент площади	$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$		$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \equiv \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, cf. $S=\lvert[\vec{a};\vec{b}]\rvert$ $E=(\vec{r}_u)^2,\ G=(\vec{r}_v)^2,\ F=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)$
интеграл I рода	$\iint\limits_{\Phi} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} F(x,y,f(x,y))\times\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$		$\iint\limits_{\Phi} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{g} F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{E(u,v)G(u,v)-(F(u,v))^2}\,du\,dv$
интеграл II рода	Если выбрана верхняя норма: $\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)\,dy\,dz = -\iint\limits_{G} P(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\,dx\,dy$ *), $\iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)\,dx\,dz = -\iint\limits_{G} Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\,dx\,dy$ *),		$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{g} P(\ldots)A(u,v) + Q(\ldots)B(u,v) + R(\ldots)C(u,v)\,du\,dv$ **), Если выбранная сторона радиус

$\boxed{\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,dS}$ — формула Стокса.

$\boxed{\iint_\Phi (\vec{a},\vec{n})\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{a}\,dV}$ — формула Остроградского.

Степенные ряды

Степенным рядом переменной t называется функциональный ряд вида

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots,$$

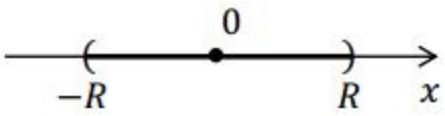
где a_n — коэффициенты степенного ряда — не зависят от t (некоторые числа), t_0 — тоже некоторое число.

Сделав замену $t - t_0 = x$, степенной ряд можно привести к виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты a_n не зависят от x. Заметим, что при $x = 0$ ряд (*) сходится:
$a_0 \cdot 0^0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.

При этом будем считать (для удобства), что $0^0 = 1$ (потому что при $x \neq 0$ первый член ряда равен a_0, и желательно, чтобы он был равен a_0 и при $x = 0$).



Т. (об области сходимости степенного ряда). $\exists R \geq 0$ (допускается $R = +\infty$) — *радиус сходимости* степенного ряда (*):

1) при $|x| < R$ ряд (*) сходится абсолютно,
2) при $|x| > R$ ряд (*) расходится,
3) при $|x| = R$ ряд (*) может как сходиться, так и расходиться,
4) на любом отрезке $[-r, r]$, где $0 < r < R$, ряд (*) сходится равномерно.

Радиус сходимости находится по формуле:

$\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (в *общем* случае) — формула *Коши–Адамара,*

или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (в том случае, когда этот предел *существует* или равен $+\infty$).

Ряд (*) *внутри* области $|x| < R$ можно почленно интегрировать и дифференцировать сколько угодно раз, при этом радиус сходимости не изменяется.

Т. (Абеля). Если степенной ряд сходится при $x = R$ ($x = -R$), то его сумма непрерывна в точке $x = R$ слева (в точке $x = -R$ справа).

Ряды Тейлора

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора, называется *аналитической*.

Функциональные последовательности

поточечная сходимость $\Leftarrow$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость в среднем

Практический критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, где $\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$.

Необходимое условие равномерной сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, то $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Признак Вейерштрасса. Если $|a_n(x)| \le c_n$ $\forall x \in X$ и мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.

Признак Дирихле. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$. Пусть
1) $\exists C$: $|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| \le C$ $\forall N$, $\forall x \in X$,
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X.

Признак Абеля. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$. Пусть
1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X.

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Если $\{b_n\}$ — *монотонная* последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд сходится.

Признак Дирихле. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть
1) $\exists C$: $|\sum_{n=1}^{N} a_n| \le C$ $\forall N$,
2) $\{b_n\}$ — *монотонная* последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Стандартные оценки для исследования рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, где x — параметр.

$\left\lvert\sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx\right\rvert \le \dfrac{1}{\left\lvert\sin\frac{x}{2}\right\rvert}, \quad x \ne 2\pi k;$	$\left\lvert\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx\right\rvert \le \dfrac{1}{\left\lvert\sin\frac{x}{2}\right\rvert}, \quad x \ne 2\pi k;$
$\lvert\sin nx\rvert \ge \dfrac{1-\cos 2nx}{2};$	$\lvert\cos nx\rvert \ge \dfrac{1+\cos 2nx}{2}.$

Ряды Тейлора

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Степенные ряды

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора, называется *аналитической*.

Функциональные последовательности

Рассмотрим последовательность функций: $\{f_n(x)\}$, где $x \in X$. При каждом $x \in X$ это числовая последовательность. Она может иметь предел, который будет зависеть от x.

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *поточечно* на множестве X к функции $f(x)$, если она сходится к ней в каждой точке этого множества:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in X,$

т. е. $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x): \forall n > N \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *равномерно* на множестве X к функции $f(x)$ ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X), если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, \forall x \in X \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$

Т. Если все функции $f_n(x)$ непрерывны (по x) на X и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то и функция $f(x)$ непрерывна на X.

Непосредственно из определения равномерной сходимости следует

Практический критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $X \ \Leftrightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, где $\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$.

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по x, а затем перейти к пределу при $n \to \infty$.

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *в среднем* к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$.

поточечная сходимость $\Leftarrow$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость в среднем

Последовательность может сходиться в среднем на $[a, b]$, но не сходиться ни в одной точке отрезка (см. пример у Ильина, Позняка). Также последовательность может сходиться поточечно на $[a, b]$, но не сходиться в среднем на $[a, b]$ (см. следующий пример).

Функциональные ряды

Рассмотрим ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где $x \in X$ — параметр. При каждом $x \in X$ это числовой ряд.

О. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно* на множестве X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на множестве X, т. е. $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ на X.

Необходимое условие равномерной сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, то $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Признак Вейерштрасса. Если $|a_n(x)| \le c_n \ \forall x \in X$ и мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.

Замечание: числа c_n не должны зависеть от x, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — обязательно *числовой* ряд, а не функциональный.

Замечание: поскольку признак Вейерштрасса даёт абсолютную сходимость, не получится его применить для условно сходящегося ряда. Для условно сходящихся рядов есть признак Дирихле (см. далее).

Признак Дирихле. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Пусть

1) $\exists C: |\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| \le C \ \forall N, \forall x \in X,$
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X.

Замечание 1: число C не должно зависеть ни от N, ни от x.

Замечание 2: не стоит применять признак Дирихле для абсолютно сходящегося ряда. В этом случае более удобен признак Вейерштрасса.

Дополнительный материал

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно ограничена* на множестве X, если

$\exists C: |f_n(x)| \le C \ \forall n, \forall x \in X.$

Замечание: число C не должно зависеть ни от n, ни от x.

Например: $f_n(x) = x^n$ равномерно ограничена на $[0, 1]$: $|x^n| \le 1 \ \forall n, \forall x \in [0, 1]$; не является равномерно ограниченной на $[1, 2]$.

Признак Абеля. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Пусть

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X.

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *равностепенно непрерывна* на множестве X, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \ \forall n.$

Например: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ равностепенно непрерывна на $[0, 1]$. Если взять $\delta = \varepsilon$, то

$|f_n(x') - f_n(x'')| = \left|\frac{x'}{n} - \frac{x''}{n}\right| = \left|\frac{x'-x''}{n}\right| < \frac{\delta}{n} = \frac{\varepsilon}{n} \le \varepsilon \ \forall n.$

$f_n(x) = nx$ не является равностепенно непрерывной на $[0, 1]$:

$|f_n(x') - f_n(x'')| = |n(x' - x'')|$, при $x' \ne x''$ всегда можно подобрать n, такое что $|n(x' - x'')| > \varepsilon$.

Т. (Арцела). Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[a, b]$.

Замечание: теорема также справедлива, если заменить отрезок $[a, b]$ на произвольное замкнутое ограниченное множество.

Эйлеровы Интегралы

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx}, \; p > 0.$$

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}, \; p > 0.$$

$$\boxed{\Gamma(1) = 1.}$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}}, \; 0 < p < 1.$$

$$\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx}, \; p > 0, q > 0.$$

$$\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p).}$$

$$\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}.$$