студенты-
физики

Дифференциальные уравнения
Ответы к экзамену, разделы 1,2

Юлия

Лектор Неделько И.В.

Июнь, 2014

Дифуры. Список примерных задач.

1. Теорема существования решения задачи Коши для ур-ия первого порядка

Пусть $p(x)$ и $f(x) \in C(a,b)$. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы $(a,b) \times R$ проходит одна и только одна интегральная кривая, определенная при всех $x \in (a,b)$

□ $\begin{cases} y' + p(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

В силу линейности $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, где $y_1(x)$ удовл. задаче Коши: $\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 = 0 \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ а y_2 – $\begin{cases} y_2' + p(x)y_2 = f(x) \\ y_2(x_0) = 0 \end{cases}$;

Тогда $y_1(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}$; $y_2(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{\eta} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta =$
$= \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta$

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta}$$

Единственность следует из факта, что задача Коши для однородного ур-ия с нулевыми НУ имеет только тривиальное решение. Пусть y_1 и y_2 – два решения
$h(x) = y_1(x) - y_2(x) \Rightarrow \begin{cases} h' + p(x)h = 0 \\ h(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Пусть $\boxed{K(x,\eta) = e^{-\int_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi}}$ – функция Коши. Тогда $y(x) = CK(x, x_0) + \int_{x_0}^{x} K(x,\eta) f(\eta)d\eta$
частное: $C = y_0$.

2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для $y' = f(x,y)$

$y' = 4x - 4y$

$\boxed{\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$ Функция $f(x,y)$ задана в области G плоскости (x,y), содержащей замкнутый прямоугольник $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $D \subset G$

Пусть выполнены условия
(у1) Пусть $f(x,y)$ непрерывна в D и, следовательно, равномерно ограничена. Тогда $\exists M = \max |f(x,y)|$, т.е. $|f(x,y)| \le M$ в D
(у2) Пусть $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т.е. $\boxed{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|}$, где N – постоянная Липшица.

Тогда на отрезке $x_0 - H \le x \le x_0 + H$, где $H = \min(a, \frac{b}{M})$ существует единственное решение задачи Коши

2: $y' = 4x - 4y$. $x > 0$, $y(0) = 0$

Условие Липшица: $\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \frac{|4x - 4y_1 - 4x + 4y_2|}{|y_1 - y_2|} = 4 = N$
$4x - 4y$ непрерывна. Решение существует и единственно.

1. $\frac{y'}{y} = -4 \Rightarrow \ln y = -4x + C \Rightarrow y = Ce^{-4x} = C(x)e^{-4x}$
$C'(x)e^{-4x} - 4C(x)e^{-4x} = 4x - 4C(x)e^{-4x} \Rightarrow C'(x) = 4xe^{4x} \Rightarrow xe^{4x} - e^{4x}$
$C(x) = xe^{4x} - e^{4x} + C$, $y = x - 1 + Ce^{-4x} \Rightarrow y(0) = -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$.
$y = x - 1 + e^{-4x}$

3: $y' = \sqrt[6]{y}$ Усл-ие Липшица: $\frac{|\sqrt[6]{y_1} - \sqrt[6]{y_2}|}{|y_1 - y_2|} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty \Rightarrow \nexists N \Rightarrow$
условие Липшица не выполнено!

2 ф-ии

4. Теорема напрыгания существования и единственности

Функция $\alpha(x) \in C^1(0,a] \cap C[0,a]$ - нижнее решение, если $\frac{d\alpha}{dx} < f(x, \alpha(x))$, $0 < x \le a$, $\alpha(0) < y_0$.

$\beta(x) \in C^1(0,a) \cap C[0,a]$ - верхнее решение, если $\frac{d\beta}{dx} > f(x, \beta(x))$, $0 < x \le a$, $\beta(0) > y_0$.

Пусть существуют нижнее и верхнее решение задачи, такие что $\alpha(x) < \beta(x)$, $x \in [0,a]$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y, т.е. $\forall x \in [0;a]$
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|$ $y_1, y_2 \in [\alpha(x), \beta(x)]$
Тогда задача Коши имеет единственное решение $y(x)$, причем $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$, $0 \le x \le a$.

□ Пусть $f(x,y)$ непрерывна и удовл. условию Липшица в полосе $\{0 \le x \le a, -\infty < y < +\infty\}$. Рассмотрим задачу $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = h(x,y) & 0 < x < a \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, где

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x, \beta(x)) + (y - \beta(x)), & y \ge \beta \\ f(x,y), & \alpha \le y \le \beta \quad 0 \le x \le a \\ f(x, \alpha(x)) + (y - \alpha(x)), & y \le \alpha \end{cases}$$

h удовлетв. условию Липшица с константой $L = \max(N; 1)$
=> решение задачи существует и единственно. Решение не может покинуть область между α и β в силу теоремы сравнения. => $h(x,y) = f(x,y)$ ■

Теорема сравнения:
Пусть существует решение $y(x)$ и $z(x) \in C^1(0;a] \cap C[0;a]$ $z(0) < y_0$ и $\frac{dz}{dx} < f(x, z(x))$, $x \in (0;a]$
Тогда при всех $x \in [0;a]$ $z(x) < y(x)$
При $x = 0$ выполнено. Пусть нарушено в x_1, т.е. $z(x_1) = y(x_1)$. =>
При $x = x_1$ $y = y(x)$ и $y = z(x)$ пересекаются или касаются.
$$\frac{dz}{dx}(x_1) \ge \frac{dy}{dx}(x_1) = f(x_1, y(x_1)) = f(x_1, z(x_1))$$ - противоречие.

5. ФСР ЛОДУ. Общее решение

Рассмотрим линейное уравнение:
$$Ly = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0$$
Совокупность любых n ЛН решений на $[a, b]$ - ФСР
Определитель Вронского отличен от нуля.
Всякое линейное однородное дифф. уравнение с непр. коэффициентами имеет ФСР.

Пусть $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \ne 0$. Построим n решений:
$Ly = 0$
$y_k = a_{1k}$
$y_k'(x) = a_{2k}$
$W(x_0) = D \ne 0$. => ЛН

Пусть $y_1 \ldots y_n$ - ФСР. Тогда любое решение $z(x)$ представимо в виде $z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$

□ Пусть $z(x)$ - решение $\begin{cases} Lz = 0 \\ z(x_0) = z_1^0 \\ z'(x_0) = z_2^0 \\ \ldots \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = z_1^0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n' = z_2^0 \\ \ldots \end{cases}$ $W(x_0) \ne 0$ =>
система имеет решение $c_1^0 \ldots c_n^0$. Составим $z^0(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 y_i(x)$ - решение
по теореме о единственности решения $z(x) = z^0(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 y_i(x)$ ■

Пример $y'' - y = 0$ ФСР e^x, e^{-x}

6. МВП для решения неоднородного ОДУ 1го порядка

Однородное уравнение: $y'+p(x)y=0$. $y_0(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$$

$$\frac{dC}{dx}=f(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x)=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1.$$

$$y(x)=C_1e^{-\int p(x)dx}+\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример: $(x+y^2)dy=y\,dx$ $\quad y=0!$

$$x'-\frac{x}{y}=y \qquad 1.\ x'-\frac{x}{y}=0 \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\ \ln\frac{x}{y}=C \Rightarrow x=yC$$

$$C'y+C-C=y \Rightarrow C'y=y \Rightarrow C'=1 \Rightarrow C=y+C \Rightarrow$$

$$\boxed{x=y^2+Cy} \quad \underline{y=0.}$$

7. МВП для решения неоднородной системы ОДУ 1го порядка

Пусть матрица $A(t)$ и вектор $\overline{F}(t)$ непрерывны на $[a,b]$ и известна ФСР однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы находится с помощью квадратур

Пусть $\overline{x_1},\dots\overline{x_n}$ - ФСР. $X(t)=(x_1(t)\dots x_n(t))$ - фундамент. матрица в силу линейности $\dot{X}(t)=A(t)X(t)$ $\quad |X(t)|=W(t)\neq 0,\ t\in[a,b]$.

Ищем решение в виде $\overline{x}(t)=X(t)\overline{C}(t)$

$$\underline{\dot{X}(t)\overline{C}(t)}+X(t)\dot{\overline{C}}(t)=\underline{A(t)X(t)\overline{C}(t)}+\overline{F}(t)$$

$$X(t)\dot{\overline{C}}(t)=\overline{F}(t)$$

$$\dot{\overline{C}}(t)=X^{-1}(t)F(t)$$

откуда $\overline{C}(t)=\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau+\overline{C_0}$

$$x(t)=X(t)C_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau$$

т.к. C_0-произвольно, то, выбирая $C_0=0$, получим ЧР

$$x(t)=X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau,$$

$X(t)\overline{C_0}$ - общее решение ОС $\Rightarrow$ $\overline{x}(t)=\overline{x_0}(t)+X(t)C_0$ - принцип суперпозиции выполнен — общее решение НС.

Если задача Коши, то $C_0=X^{-1}(t_0)x_0$ Пример: $\dot{x}=y+tg^2t-1$, $\dot{y}=-x+tg\,t$.

8. Равносильность задачи Коши для ОДУ n-го порядка задаче Коши для нормальной системы 1-го порядка

$Ly=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x)$, $\quad a_i(x)$ и $f(x)$ - непр. на X

делаем замену переменных $y=y_1,\ y'=y_2,\ \dots\ y^{(n-1)}=y_n$.

Получаем систему
$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=y_2\\ \frac{dy_2}{dx}=y_3\\ \frac{dy_n}{dx}=f(x)-a_1(x)y_n-\dots a_n(x)y_1.\end{cases}$$
+НУ

9. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для сист. ур-й первого порядка

Решение задачи Коши для системы $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x} + \overline{F}(t)$, где $A(t)$ - квадратная матрица $(n \times n)$, $\overline{F}(t)$ - вектор-ф-ия, заданное при $t \in [a, b]$, с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x_0}$ существует и единственно на любом отрезке $[t_0 T] \subset [a, b]$
функции $G_i = f_i(t) + a_{i1}(t) x_1 + a_{i2}(t) x_2 + \dots$ непрерывны и имеет ограниченные непрерывные ЧП по x_i и следовательно, удовлетворяют условиям Липшица в полосе $t \subset [a, b)$, $-\infty < x_i < \infty$.

10. Фундаментальная матрица

Фунд. матрица - матрица из столбцов, образующих ФСР $X(t) = (\overline{x}_1(t), \dots \overline{x}_n(t))$ ФСР - совокупность из n решений однородной линейной системы ЛН на $[a, b]$. т.к. каждый столбец этой матрицы - решение однородной системы $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x}$, то справедливо матричное уравнение $\dot{X}(t) = A(t) X(t)$
Общее решение однородной системы имеет вид $\overline{x}(t) = X(t)\overline{C}$

11. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ур-ия n-ного порядка, разрешенного отн. производной

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \dots y^{(n-1)})$
$y(x_0) = y_1^0$
$y'(x_0) = y_2^0$

Пусть $f(x, y, \dots y^{(n-1)})$ непрерывна и удовл. усл. Липшица в параллел. $D = \{0 \le x \le a, |y_i - y_i^0| \le b\}$
Решение задачи Коши существует и единственно на сегменте $[x_0, x_0 + H]$, где $H = \min(a, \min \frac{b}{M})$
$M = \max_D |f(x, y', y^n)|$
Замена $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n \to$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_n' = f(x) \\ + \text{НУ} \end{cases}$$

Выполняются условие для системы

12. Теорема о структуре ФСР однородного ЛДУ с пост. коэффициентами в случае простых корней

$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, $a_i = const$.
Строим решение в виде $y(x) = ce^{\lambda x}$
$L[ce^{\lambda x}] = c[\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n] e^{\lambda x} = cM(\lambda) e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow M(\lambda) = 0$
$M(\lambda)$ - ХМ, а $M(\lambda) = 0$ - ХарУр.

Пусть $M(\lambda) = 0$ имеет n различных простых корней, то ур каждому λ_k соответствует $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$.
Тогда $y_k(x) e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2 \dots n$, образуют ФСР (если все корни - простые
пусть $\exists C_i : \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \ne 0$: $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots c_n e^{\lambda_n x} = 0$ Пусть $\boxed{c_1 \ne 0}$
делим на $e^{\lambda_n x} \ne 0$ и дифф. $c_1(\lambda_1 - \lambda_n) e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + c_2(\lambda_2 - \lambda_n) e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \dots = 0$
делим на $e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} \ne 0$ и дифф. $c_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + \dots = 0$ (повт $n-1$ раз
тогда $c_1(\lambda_1 - \lambda_n) \cdot (\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$. все λ
различные, но противоречие ...

3. Матрица Коши однородной системы линейных ОДУ

Матрица $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ - матрица Коши, импульсная матрица или матрициант. Однозначно определяется как решение задачи Коши: $\frac{d}{dt}K(t,t_0) = A(t)K(t,t_0)$, $K(t_0,t_0) = E$

Тогда т.к. общее решение задачи Коши задаётся ф-лой
$$\overline{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overline{x}_0 + \int_{t_0} X(t)X^{-1}(\tau)\overline{F}(\tau)d\tau, \text{ то}$$

решение задачи Коши имеет вид:
$$\overline{x}(t) = K(t,t_0)\overline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\overline{F}(\tau)d\tau$$

8) Алгоритм решения линейного неоднородного ОДУ с помощью функции Коши с нулевыми НУ

Если известна ФСР однородного уравнения, то можно построить частное решение соотв. неоднородного уравнения, удовл. нулевым НУ.

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(\xi) = 0 \\ y'(\xi) = 0 \ldots \\ y^{(n-1)}(\xi) = 1 \end{cases} \quad a < \xi < x < b$$

Решение существует и непрерывно вместе с n-ми производными зависит от ξ. Пусть $K(x,\xi)$ - решение специальной задачи.

$$\begin{cases} L_x K(x,\xi) = 0 \\ K(\xi,\xi) = 0,\ K_x'(\xi,\xi) = 0, \ldots \end{cases} \quad K(x,\xi) \text{ - ф-ия Коши.}$$

Тогда ф-ия $y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$ - решение задачи Коши для неодн. ур-ия.

Пример: $\begin{cases} y' - ay = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' - ay = 0 \Rightarrow y = ce^{ax} \\ y(\xi) = 1 \Rightarrow ce^{a\xi} = 1 \Rightarrow c = e^{-a\xi} \Rightarrow y = e^{a(x-\xi)} \end{cases}$

$$y = \int_0^x e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi.$$

15. Фундаментальная матрица однородной линейной системы ОДУ.

Пусть $\overline{x}_1(t) \ldots \overline{x}_n(t)$ - ФСР. Составим фундаментальную матрицу, т.е. матрицу из столбцов, образующих ФСР.
т.к. каждый столбец - решение, то $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.
$|X(t)| = W(t) \neq 0$. Общее решение однородной системы:
$\overline{x}(t) = X(t)\overline{c}$, где $\overline{c}$ - произвольный вектор
Зная ФМ $X(t)$ можно однозначно восстановить систему.
$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \Rightarrow A(t) = X^{-1}(t)\dot{X}(t).$$

Пример

16. Определитель Вронского

Опр. Вронского системы n ф-ий $y_1(x) \ldots y_n(x)$ - определитель
$$W(x) = W[y_1 \ldots y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ y_1^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Пусть $y_1 \ldots y_n$ - ЛЗ. Тогда $W(x) \equiv 0$ $x \in [a,b]$
Пусть $y_1 \ldots y_n$ - ЛН. Тогда $W(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

усл-во: 1. $\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots = 0 \end{cases}$ сис-а имеет нетривиальное решение, $\Rightarrow W(x) = 0$.

2. Пусть $W = 0 \Rightarrow \exists c_i \neq 0$ - нетр. решение. дифф. ур-ие $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots$ получим, $y \equiv 0 \Rightarrow$ ф-ии ЛЗ.

Пример:

17. Теорема существования и единственности решения ЗК для норм. системы ОДУ

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(t, \overline{x})$$
$$x(t_0) = x_0$$

Пусть выполнены условия:

у1: $\overline{f}(t, \overline{x}) \in C(G)$, т.е. $\exists M = \max_G |\overline{f}(t, \overline{x})| \Rightarrow |\overline{f}(t, \overline{x})| \leq M$ - равномерно ограничена в G

у2. Пусть $\overline{f}(t, \overline{x})$ в любой замкнутой огр. подобласти $g \subset G$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\exists N > 0: \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{y}) \in g$
$$|\overline{f}(t, \overline{x}) - \overline{f}(t, \overline{y})| \leq N |\overline{x} - \overline{y}|.$$

Тогда $\forall (t_0, \overline{x}_0) \in G$ существует единств. решение задачи Коши, определенное на некотором отрезке $|t - t_0| \leq H$

18. Алгоритм решения задачи Коши для лин. неодн. ОДУ n-го поряд. с помощью ф-ии Коши

Пусть известна ФСР однородного ур-ия и решение $K(x, s)_x$ ур-ия $Ly = 0$, причем $K(s, s) = K'(s, s) \ldots = 0$, $K^{n-1}(s, s) = 1$.

тогда $y(x) = \int_{x_0} K(x, s) f(s) ds$ - ЧР ур-ия $Ly = f(x)$.

1. Ищем ФСР и матрицу Коши (ФСР для y_0)
2. $y_1(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s) ds$
3. $y = y_0 + y_1$

19. Алгоритм решение задачи Коши для системы ОДУ с помощью матрицы Коши

1. Найти матрицу Коши
$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = A(t) \overline{x} \\ \overline{x}(t_0) = \overline{x_0} \end{cases}$$

решение - $\overline{x}(t) = K(t, t_0) \overline{x_0}$

пример: $\dot{x} = x - 2y$
$\dot{y} = -y + 1$.

ФСР: $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, ФМ $= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ $K(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & -2sh(t) \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$

$$y = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & -2sh(t-t_0) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

20. Алгоритм для неодн. систем:

1. Найти матрицу Коши $y' = A(x)y + f(x)$
2. частное решение: $\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} k(x, q) f(q) dq$ $y(x_0) = y_0$.

$k(x, q)$ - решение $W' = A(x) W$, $k(q, q) = E$

3. $y(x) = W(x) c + \bar{y}(x)$

Пример: $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases}$ ФСР $y_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ $y_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

$k = W(t) W^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 0 & e^{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & -2sh(t-\tau) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix}$

$\bar{y} = \begin{pmatrix} e^t(t - t_0) + 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2ch(t - t_0) \\ -e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix}$

21. Задача Коши для ОДУ первого порядка

Ур-ие $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ пусть $f(x, y)$ непрерывна

по совокупности аргументов в прямоугольнике

$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

тогда задача Коши эквивалентна уравнению

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(q, y(q)) dq$ в классе непр.

ф-ий

22. Характ. уравнение ЛОДУ n-го порядка

$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ $a_i = const$.

Решение ищем в виде $y(x) = ce^{\lambda x}$

тогда $c[\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n] e^{\lambda x} = c M(\lambda) e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow M(\lambda) = 0$.

$M(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ - характеристическое уравнение

$y'' + 4y = e^{3x}$: $M(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$.

23. Математические постановки задач Коши для НС ЛОДУ 1-го порядка и ОДУ n-го порядка

Задача Коши для НС ОДУ: $\dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x})$ состоит в отыскании решения $\bar{x} = \bar{x}(t)$ удовлетворяющего начальным условиям $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$.

Для ОДУ n-го порядка: $Ly = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x)$

при условии, что $a_i(x)$ и $f(x)$ - непр. на X

и $y(x_0) = y_1^0$, $y'(x_0) = y_2^0$, … $y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$, $x_0 \in X$

24. Фундаментальная матрица однородной системы

Фундаментальная матрица - матрица, составленная из столбцов, образующих ФСР однородной системы.

общее решение $\bar{x}(t) = X(t) \bar{c}$

$\dot{X}(t) = A(t) X(t)$

25. Матрица Коши одн. системы лин. ОДУ?

Матрица $K(t,\tau) = W(t)W^{-1}(\tau)$ - матрица Коши, импульсная матрица, матрицант.

Определяется как решение $\begin{cases} \frac{d}{dt} K(t,t_0) = A(t)K(t,t_0) \\ K(t_0,t_0) = E \end{cases}$

Решение задачи Коши для одн. системы: $x(t) = K(t,t_0)\overline{x_0}$

26. Теорема Ляпунова об устойчивости по I приближению

Пусть имеется нормальная система уравнений
$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + \overline{F}(t,\overline{x}),\quad (\overline{F}(t,\overline{0}) = \overline{0})$$
где A - постоянная матрица все СЗ которой имеют отрицательные действительные части.
Пусть при всех $t \ge t_0$ и достаточно малом $|\overline{x}|$
$$|\overline{F}(t,\overline{x})| \le M|\overline{x}|^{1+\alpha}\quad \alpha, M > 0.$$
Тогда положение равновесия $\overline{x} = \overline{0}$ асимптотически устойчиво.

27. Устойчивое решение

Решение $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ устойчиво, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:
$\forall \overline{x_0}: |\overline{\varphi}(t_0) - \overline{x_0}| < \delta$ $\overline{x} = \overline{\psi}(t): \overline{\psi}(t_0) = \overline{x_0}$ определено при $t \ge t_0$
и $|\overline{\psi}(t) - \overline{\varphi}(t)| < \varepsilon$, $t \ge t_0$.

Пример $\dot{x} = \sin x - x$. $x = 0$ - устойчиво.
$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2x^3 \end{cases}$

28. Асимптотически устойчивое решение:

$\varphi(t)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall \overline{x_0}: |\overline{\varphi}(t_0) - \overline{x_0}| < \delta$ $\overline{x} = \overline{\psi}(t)$: $\overline{\psi}(t_0) = \overline{x_0}$ опр. при $t \ge t_0$ и $|\overline{\psi}(t) - \overline{\varphi}(t)| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} |\overline{\psi}(t) - \overline{\varphi}(t)| = 0$

Пример: $\dot{x} = -x\sin^2 x$, 0 - АУ. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$

29. Неустойчивое решение:

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta(\varepsilon) > 0\ \exists \overline{x_0}: |\overline{\varphi}(t_0) - \overline{x_0}| < \delta$ $\overline{x} = \overline{\psi}(t): \overline{\psi}(t_0) = \overline{x_0}$ $|\overline{\psi}(t) - \overline{\varphi}(t)| \ge \varepsilon$ $t \ge t_0$

Пример $\dot{x} = -x^2$ 0 - не уст.
$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

30. Критерий устойчивости

Для того, чтобы положение равновесия $\overline{x} = \overline{0}$ системы ур-ий $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$ было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все СЗ матрицы A имели отриц. действ. части ?

$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ - АУ

$\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ - неуст.

31. ФУ устойчивости системы линейных ДУ

Пусть $F(t,\overline{x})$ определена на $D: |\overline{x}| \le r$, $t \ge t_0$, выполнены условие существ. и единственности и при $|\overline{x}| \le r$ определен
$V(\overline{x}) \ge 0$ ...

... $(grad\, V, f) \le 0$. тогда $x=0$ – устойчиво
если $(grad\, V, f) \le -W(x)$ – асимпт. устойчиво ?

32. устойчивый узел.

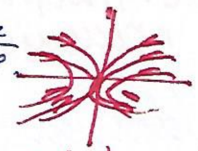
Рассмотрим систему: $\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y$, $\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$.

Пример: $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$.

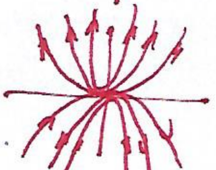
точка покоя – $x=y=0$. $\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A = 0$

Пусть λ – вещественные, различные, ненулевые

$x = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y = c_2 e^{\lambda_2 t}$ $t = \frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{x}{c_1}\right) \Rightarrow y = c_2\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$



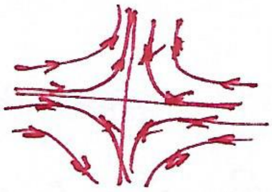
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. тогда $x = c_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$, $y = c_2 e^{\lambda_2 t} \to 0$ $t \to \infty$ –
устойчивый узел, асимптотически устойчива.



$0 < \lambda_2 < \lambda_1$ $x = c_1 e^{\lambda_1 t} \to \infty$, $y = c_2 e^{\lambda_2 t} \to \infty$ – неустойчивый узел.

34. Седло.

Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. тогда $x = c_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$, $y = c_2 e^{\lambda_2 t} \to \infty$ – седло – неустойчиво.



$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$

33. Фокус

Пусть λ – комплексно-сопряженные. $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$x = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t$ $y = c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \Rightarrow \frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2} = e^{2\alpha t}$.

пусть $\alpha < 0$. – устойчивый фокус – асимпт. устойчиво
$\alpha > 0$. – неустойчивый фокус – неустойчиво

$y' = \frac{y-2x}{y}$

35. Центр

$\alpha = 0$. центр устойчив, но не асимптотически

$y' = \frac{2x-y}{x-y}$

36. Теорема единственности решения краевой задачи и теорема о доп. условиях существ. тривиального решения

$L[y] = 0$ $a < x < b$
$N_0[y](a) = 0$ $N_1[y](b) = 0$

Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая ей неодн. задача имеет не более одного решения

Пусть в операторе $L[u]$ $q(x) \ge 0$. Тогда однородная краевая задача в случае гр. усл. 1-го рода имеет только тривиальное решение.

37. Теорема Нагумо

Функции $\alpha(x), \beta(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ - нижнее и верхнее решение, если выполняются следующие неравенства:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x), x) \geq 0 \geq \frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta(x), x), \quad x \in D$$

$$\alpha(0) \leq u^0 \leq \beta(0)$$

$$\alpha(l) \leq u^1 \leq \beta(l)$$

Пусть существуют $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нижнее $\alpha(x) \leq \beta(x)$ $x \in [0, l]$, а $f(u, x)$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной u при $u \in [\alpha, \beta]$ $x \in [0, l]$

Тогда существует решение задачи $u(x)$, удовлет. нер-вам $\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x)$, $x \in [0, l]$

38. Теорема о представлении решение краевой задачи с помощью функции Грина

Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда существует единственное решение неоднородной краевой задачи, которое может быть выражено через функцию Грина.

$$y(x) = \int_0 G(x, s) f(s) ds$$

39. Функция Грина

Функцию Грина называется функция 2-х переменных $G(x, s)$:

1. $G(x, s)$ определена и непрерывна в квадрате $[0, l] \times [0, l]$
2. $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению $L[G] = 0$ при
3. $G(x, s)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям $0 \leq x, s \leq l$
4. в точке $x = s$ первая производная имеет разрыв 1 рода.

$$\left.\frac{dG(x, s)}{dx}\right|_{x=s-0}^{s+0} = \frac{dG}{dx}(s+0, s) - \frac{dG}{dx}(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$$

40. Алгоритм построение функции Грина

1. Выбираем два решение, каждое из которых удовлетворяет одному из граничных условий.

$$y_1(x) \text{ и } y_2(x).$$

2. $C = p(s) W(s)$

3. $$G(x, s) = \frac{1}{p(s) W(s)} \begin{cases} y_1(x) y_2(s) & 0 \leq x \leq s \\ y_2(x) y_1(s) & s \leq x \leq l. \end{cases}$$

// $p(s) W(s) = C$ из формулы Лиувилля-Остроградского $\Rightarrow$

$$p(s) W(s) = p(a) W(a) = \underline{C}$$

41. 39 + 40

42. 39

$$+ \frac{dG}{dx}(x+0, x) - \frac{dG}{dx}(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}$$

$$\frac{dG}{dx}(x, x-0) = \frac{dG}{dx}(x+0, x)$$

$$\frac{dG}{dx}(x, x+0) = \frac{dG}{dx}(x-0, x)$$

Краевые задачи.

$y''(x) = f(x, y, y')$ $x \in [a, b]$.

I рода (задача Дирихле) $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$

II рода (задача Неймана) $y'(a) = y_a$, $y'(b) = y_b$

III рода $y'(a) + \alpha y(a) = y_a$, $y'(b) + \beta y(b) = y_b$ (ш-п для всех)

Периодические граничные условия $y(a) = y(b)$
$y'(a) = y'(b)$

Нелинейные задачи. $\rho \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x)$, если ф-ия не линейна по u

$u(0) = u^0$, $u(1) = u^1$.

$x \in D = [0, 1]$

. Уравнения в частных производных

Общее уравнение в частных производных

$F(x_1 \dots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$. $F(\overline{x}, z, grad\, z) = 0$.

Линейное уравнение: $\sum_{i=1}^{n} X_i(\overline{x}) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$ или $(\overline{X}(\overline{x}) grad\, z(\overline{x})) = 0$.

где $X_i \in C^1(D)$, $\sum_{i=1} X_i^2(\overline{x}) \neq 0$ $\forall x \in D$

Общее решение — дифференцируемая ф-ия $n-1$ независимых первых интегралов.

Для решения нужно записать характеристическую систему и найти $n-1$ интеграл.

$z = \Phi(\psi_1 \dots \psi_{n-1})$, где ψ — интеграл

. Характ. система

Характеристическая система, соответствующая $X_i(\overline{x}) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$ ~~на~~ система из $n-1$ уравнений

$$\frac{dx_i}{X_1(\overline{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\overline{x})} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(\overline{x})}$$

Характеристики — решения системы

Первый интеграл

Функция $\psi(x_1, x_2 \dots x_n)$ принимающая постоянное значение, когда точка $(x_1 x_2 \dots x_n)$ пробегает интегральную кривую характ. системы. $\psi(x_1, x_2 \dots x_n) = C$ — I интеграл.

. Теорема о решении квазилинейного уравнения в ЧП.

Уравнение вида $X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X$ — квазилинейное.

Сопоставим ему линейное ур-ие: $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + a \frac{\partial v}{\partial u} = 0$.

Пусть $v = V(x, \dots x_n, u)$ — решение линейного ур-ие.

$V = 0$ определяет неявную диф. ф-ию $u = \varphi$ и $\frac{dV}{du}\Big|_{\varphi} \neq 0$

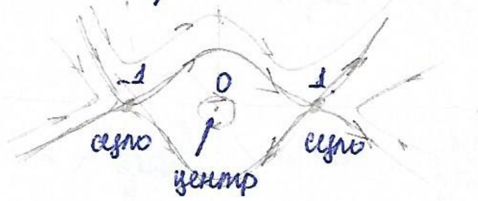
Тогда $u = \varphi(x, \dots x_n)$ — решение квазилинейного уравнения.

Задачи

48. $\begin{cases} y'' = y(y^2-1) & x\in[0,\infty) \\ y(0)=y^0 \\ y(\infty)=1. \end{cases}$

т. покоя $y=0, \pm 1$.

$\frac{z^2}{2} = \int_1^y f(y')dy = \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + C$ - четная, симметричн? портрет



Разрешима при $y_0 \in (-1, 1)$

49. $y''+\sin y = 0$.

$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin y \end{cases}$ $\qquad \frac{dy}{dz} = \frac{-z}{\sin y} \Rightarrow -\sin y\, dy = z\,dz$

$\cos y = \frac{z^2}{2} + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{2\cos y + C}$

$x - x_0 = \pm \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\cos y + C}}$.

т. покоя: $\sin y = 0$, $y = \pi n$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \cos\pi n & -\lambda \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \cos\pi n = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{\cos\pi n}$

$\pi(2k+1)$ $\lambda = \pm i$ - центр.

$\pi 2k$ $\lambda = \pm 1$ - седло неуст.

50. $y' = \sin y$ $\qquad \int \frac{dy}{\sin y} = x + C$

т. покоя - πn

автон. ур-ие.

$V_y = \cos y$

если n четное, то неустойчив.

n - нечетное - устойчив.

51. $y'' = \sin y$

$\begin{cases} y' = z \\ z' = \sin y \end{cases}$ $\qquad \frac{dy}{dz} = \frac{z}{\sin y} \Rightarrow -\cos y = \frac{z^2}{2} + C$

$z = \pm\sqrt{-2\cos y + C}$ $\quad$ сеп. $z = \pm\sqrt{2 - 2\cos y}$.

т. покоя $\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi n$

52. $y' = y(y+1)(y-2)$ $\qquad \frac{dy}{y(y+1)(y-2)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y+1)(y-2)} = x + C$

т. покоя: $y = 0, -1, 2$. $\qquad (y^2+y)(y-2) = y^3 + y^2 - 2y^2 - 2y = y^3 - y^2 - 2y$

$y = 0 \quad V_y = 3y^2 - 2y - 2 < 0$ уст.

$y = -1 \quad V_y = 3 + 1 - 2 > 0$ неуст

$y = 2 \quad V_y = 12 - 4 - 2 > 0$ неуст

53. $y' = \cos y$ $\qquad \frac{dy}{\cos y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos y} = x + C$

$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

$V_y = -\sin y$.

n неч. $V_y > 0$ неуст.

n четное $V_y < 0$ уст.

54. $y'' = y(1-y)$

$\begin{cases} y' = z \\ z' = y(1-y) \end{cases}$ т. покоя $y = 0,\ y = 1$.

$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y(1-y)} \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{z^2}{2} + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) + C} \to$

$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) + C}} = x - x_0$.

55. $y'' = y(y-1)$

$\begin{cases} y' = z \\ y' = y(y-1) \end{cases}$ т. покоя $y = 0,\ y = 1$.

$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C \to z = \pm\sqrt{2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right) + C} \Rightarrow x - x_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right) + C}}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ - седло. $\qquad$ решений нет ни при каком y_0

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ - центр.

56. $y''+y=0.$

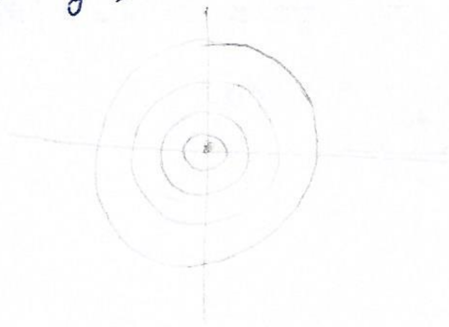
$\lambda^2+1=0$

$\lambda=\pm i \Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\sin x$

$y'=z$ $\quad \frac{dy}{dz}=\frac{-z}{y}\Rightarrow \quad y^2+z^2=\bar{C}. \Rightarrow z=\pm\sqrt{C-y^2}.$ окружности

$z'=-y$

ТП $=(0,0)$ $\quad$ 0,0 – центр.



57. $y''=y(1-y)$ $\quad$ т. покоя 0, a

$y'=z$

$z'=y(1-y)$

$\frac{dy}{dz}=\frac{z}{y(1-y)}\Rightarrow \frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C\Rightarrow \quad z=\pm\sqrt{2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)+C}. \Rightarrow x-x_0=\pm\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\ldots}$ квадратура

0 – седло, a – центр.

58. 0, 0. $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow \lambda^2-1=0\Rightarrow \lambda=\pm1$ – седло.

$a=1.$ $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1-2a & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2a-1=0.$ $\quad \lambda=\pm i$ – центр

59. $\begin{cases}\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y\\ \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$ $\quad$ т. покоя (0,0) $\quad \begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0.$

пусть λ вещ.

а) $\lambda_1<\lambda_2<0$ – уст (асс) узел

б) $\lambda_2\geq\lambda_1\geq0$ – неуст узел

в) $\lambda_1<0<\lambda_2$ – седло

к-е

а) $a<0$ – уст (асс) фокус

б) $a>0$ – неуст. фокус

в) $a=0$ – центр

кратные

простые:

$\lambda<0$ уст. дикритич. узел

$\lambda>0$ неуст. дикр. узел

непростые $\lambda<0$ уст. вырожд. узел

$\lambda>0$ – неуст. вырожд. узел.

60 = 57, 58

61. $y'' = y(1-y^2)$ $\quad x \in (0,1)$

$y(0) = y^0$

$y(1) = y^1$ $\quad 0 < y^0, y^1 < 1$

$\begin{cases}\dot y = z\\ \dot z = y(1-y^2)\end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dz} = \frac{z}{y(1-y^2)} \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{z^2}{2} + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) + C} \Rightarrow$

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) + C}} = x - x_0.$$

62. $y'' - y = 0.$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$

т. покоя — $y = 0$.

$\begin{cases}\dot y = z\\ \dot z = y\end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} = \quad y^2 - z^2 = C$

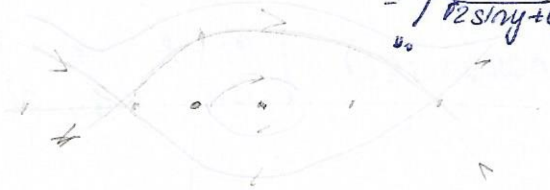
— седло.

63.
64. $y'' = \cos y$

$\begin{cases}\dot y = z\\ \dot z = \cos y\end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dz} = \frac{z}{\cos y}$ $\quad \sin y = \frac{z^2}{2} + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{2\sin y + C}$

$\pm\int_{y_0} \frac{dy}{\sqrt{2\sin y + C}} = x + x_0$

т. покоя $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$



$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\sin y & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + \sin y = 0.$

$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \lambda = \pm i$ — центр.

$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda = \pm 1$ — седло.

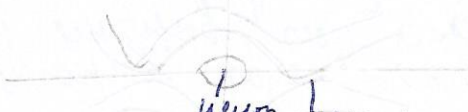
65. $y'' + \sin y$
66.

$\begin{cases}\dot y = z\\ \dot z = -\sin y\end{cases}$ $\quad y = \pi n$ — т. покоя.

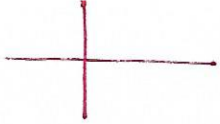
$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\cos\pi n & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\cos\pi n$ $\quad n$ — ч. $\Rightarrow \lambda = \pm i$ — центр

n — неч $\Rightarrow \lambda = \pm 1$ седло.

$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{-\sin y} \Rightarrow \frac{z^2}{2} = \cos y + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{2\cos y + C}$



67. $\dot{y}_1 = -y_1 - y_2$
$\dot{y}_2 = y_1 - y_2.$



$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{-y_1-y_2}{y_1-y_2}$ $\quad dy_1 y_1 - dy_1 y_2 = -dy_2 \cdot y_1 - dy_2 y_2$
$(y_1+y_2)' = -y_2.$
$(y_1-y_2)' = -y_2$

матрица: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow 1+\lambda = \pm i$

$\lambda = -1 \pm i$ - кс, $a > 0$.
- уст. фокус.

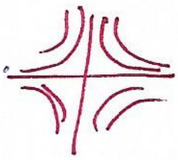
68. $\dot{y}_1 = -y_2$
$\dot{y}_2 = y_1$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ - кс, $a = 0$ - центр
устойчив, но не асимптотич.
$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = c$ - окружност

69. $\dot{y}_1 = -y_1$
$\dot{y}_2 = -2y_2$ $\quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) = 0.$ $\quad \lambda = -1$ вещ., < 0.
$\lambda = -2$
устойчивый узел, асимпт. устойчива

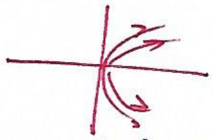
$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1}{2y_2} \Rightarrow \ln y_1^2 = \ln y_2 + c \Rightarrow y_1^2 = c y_2$

70. $\dot{y}_1 = y_1$
$\dot{y}_2 = -2y_2$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ - седло, неуст.
$\lambda = -2$



$\ln y_1^2 = -\ln y_2 + c \Rightarrow y_1^2 = \frac{c}{y_2}$

71. $\dot{y}_1 = y_1$
$\dot{y}_2 = 2y_2$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = 2.$ вещ. > 0.
неустойчивый узел



$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1}{2y_2} \Rightarrow \ln y_1^2 = \ln y_2 + c \Rightarrow y_1^2 = c y_2$

72. $\dot{y}_1 = -y_2 - y_1^3$
$\dot{y}_2 = y_1 - y_2^3$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{00} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ - центр. устойчив но не асимпт.

73. $y_1 = -y_1 - y_1^3$
$y_2 = -2y_2 - y_2^3$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow$
$\lambda = -1$ уст. узел
$\lambda = -2.$ асимпт. устойчив.