Тема 1.Компексные числа и функции.

Определения и понятия.

- Определение комплексного числа, алгебраическая форма комплексного числа.
- Вещественная и мнимая части комплексного числа.
- Операции сложения и умножения комплексных чисел. Их геометрическая интерпретация.
- Операция деления комплексных чисел.
- Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая
- интерпретация.
- Модуль и аргумент комплексного числа. Их геометрическая интерпретация.
- Тригонометрическая форма комплексного числа.
- Показательная форма комплексного числа.
- Возведение комплексного числа в целую степень.
- Корень n -ой степени из комплексного числа.
- Возведение комплексного числа в рациональную степень.
- Понятие комплексной плоскости
- Понятие бесконечно удаленной точки и расширенной комплексной плоскости.
- Определение функции комплексной переменной.
- Однолистная функция, многолистная функция. Примеры.
- Однозначная функция, многозначная функция. Примеры.
- Понятие однозначной ветви многозначной функции. Понятие точки ветвления многозначной функции. Примеры
- Дробно-линейная функция.
- Функция Жуковского.
- Возведение комплексного числа в комплексную степень.

Вопросы и задачи.

- Запишите неравенство треугольника для комплексной плоскости.
- Как связаны модуль и аргумент произведения комплексных чисел с модулями и аргументами множителей?
- Как связаны модуль и аргумент частного комплексных чисел с модулями и аргументами делимого и делителя?
- Как связаны модули и аргументы комплексно сопряженных чисел? Вещественные и мнимые части комплексно сопряженных чисел?
- Как меняются модуль и аргумент при возведении комплексного числа в целую степень?
- Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня n -ой степени? Как располагаются значения корня *n-ой* степени на комплексной плоскости?
- Изобразите на комплексной плоскости множество точек $|z-z_0|>a$, $|z-z_0|<a$, $a<|z-z_0|<b$, $|z-z_0|=a$, $\arg(z-z_0)=\alpha$, $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$, $\operatorname{Re} z=a$, $\operatorname{Re} z<a$, $\operatorname{Re} z>a$, $a<\operatorname{Re} z<b$, $\operatorname{Im} z=a$, $\operatorname{Im} z<a$, $\operatorname{Im} z>a$, $a<\operatorname{Im} z<b$
- Как выразить вещественную и мнимую части комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел?
- Вычислите (представьте решение в виде $z=x+iy$):

- $\cos(2+i)$; $\sin 2i$; $1^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$; i^{π}; π^{i}; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{i}$; $\cos\pi i$; $\operatorname{tg}(2-i)$; $\operatorname{Ln}2$; $\ln 2$; $\operatorname{Ln}i$; $\operatorname{Ln}(2-3i)$; $\ln\left(i^{i}\right)$; $\ln\left(1^{i}\right)$.
- Найдите все решения уравнения: а) $z^3-8=0$; б) $z^4-1=0$; в) $z^4+1=0$; г) $z^2+z+1=0$; д) $z^2-4z+13=0$; е) $|z|=z^2$; ж) $z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$; з) $z^{i}=i$; и) $z^{\frac{1}{i}}=1$; к) $z^{\frac{1}{i}}=i$.
- Найдите все решения уравнения: а) $\sin z=2$; б) $\cos z=i$; в) $\operatorname{tg}z=2+i$; г) $\sin z+\cos z=2$; д) $\sin z-\cos z=3$; е) $e^{2z}+e^{z}-3=0$; ж); $\operatorname{ch}z=i$; з) $\operatorname{sh}z-\operatorname{ch}z=2i$ и) $c\operatorname{h}z-s\operatorname{h}z=1$ к) $e^{z}+i=0$.
- Запишите функции $f(z)=z^2$, $f(z)=\frac{1}{z}$, $f(z)=e^{z}$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=\operatorname{sh}z$, $f(z)=\operatorname{ch}z$, $f(z)=\ln z$, $f(z)=\operatorname{Ln}z$, где $z=x+iy$, в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Теоремы и формулы с доказательством

- Выведите формулу для произведения комплексных чисел в тригонометрической форме, показательной форме.
- Выведите формулу для отношения комплексных чисел в тригонометрической форме, показательной форме.
- Выведите формулу Муавра.
- Сформулируйте и докажите основные свойства комплексной экспоненты $e^{i\varphi}$.
- Исходя из определений, выведите формулу: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$, $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$.
- Докажите формулу:

  $\operatorname{Arc}\cos z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$; $\operatorname{Arc}\sin z=-i\operatorname{Ln}i\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$;

  $\operatorname{Arctg}z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}$.

Тема 2. Дифференцирование функций комплексной переменной (ФКП).

Определения и понятия.

- Определение производной функции комплексной переменной. Отличие производной функции комплексной переменной от производной функции действительной переменной.
- Определение аналитической функции.
- Определение функции, аналитической в замкнутой области.
- В чем геометрический смысл аргумента производной аналитической функции?
- Что такое нуль аналитической функции? Что такое нуль n –того порядка аналитической функции?
- Определение правильной точки. Определение особой точки. Примеры.

Вопросы и задачи.

- Запишите интегральную формулу для n –той производной аналитической функции.
- Как связаны аналитичность функции и гармоничность ее вещественной и мнимой частей?
- Сформулируйте основные свойства аналитических функций.

- Приведите примеры аналитической функции. Обоснуйте ответ.
- Приведите пример функции, не являющейся аналитической. Обоснуйте ответ.
- Опишите поведение аналитической функции в окрестности нуля n −того порядка.
- Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции.
- Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции в полярных координатах.
- Запишите условия Коши-Римана для модуля и аргумента аналитической функции.

38 Проверьте, выполняются ли условия Коши-Римана для функций

а) $f(z)=\frac{i}{z}$, б) $f(z)=z^2$, в) $f(z)=\left(z+2i\right)^3$;

а) $f(z)=e^{iz}$, б) $f(z)=\sin 2z$, в) $f(z)=\operatorname{ch} z$;

а) $f(z)=\operatorname{Ln} z$, б) $f(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)$, в) $f(z)=z^n$.

а) $f(z)=\overline{z}$, б) $f(z)=z\cdot|z|$, в) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z$;

- Докажите, что линейная комбинация гармонических функций есть гармоническая функция.
- Будет ли гармонической функция u^2, если u -- гармоническая функция?
- Докажите, что $w(z)=z\operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z=0$ и найдите $w'(0)$.

Теоремы и формулы с доказательством.

- Теорема об условиях Коши-Римана.
- Теорема о нулях аналитической функции.
- Следствия теоремы о нулях аналитической функции.
- Теорема единственности определенной аналитической функции.
- Теорема о нулях аналитической функции.
- Следствия теоремы о нулях аналитической функции.

ТЕМА 3. Интегрирование функций комплексной переменной.

Определения и понятия.

- Определение интеграла от ФКП по кривой на комплексной плоскости.
- Определение интеграла Коши.
- Определение несобственного интеграла.
- Определение первообразной.
- Определение интеграла типа Коши.

Вопросы и задачи.

- Перечислите свойства интеграла от комплексной переменной.
- Запишите Интегральную формулу Коши; формулу среднего значения.
- Вычислите интегралы по указанным кривым на комплексной плоскости

$\int_C z\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;

б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;

в) по кривой, состоящей из двух прямолинейных отрезков, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.

$\int_C \bar{z}\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;

б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;

в) по кривой, состоящей из двух прямолинейных отрезков, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.

$\int_C |z|^2\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;

б) по дуге окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ соединяющей точки $z=-2i$ и $z=2i$.

$\int_C z^2\,dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;

б) по дуге окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ соединяющей точки $z=-2i$ и $z=2i$.

$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении)

$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{\bar{z}}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении)

- Вычислить интегралы, используя интегральную формулу Коши

$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ (C – замкнутая спрямляемая кривая, <u>не</u> проходящая через точки $z=0$, $z=1$ и $z=-1$). Найти все возможные значения указанного интеграла при различных положениях контура C.

- Вычислите:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3} \qquad \oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z dz}{z(1-z)^2} \qquad \oint_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z dz}{z^2+2z}$$

$$\oint_{|z-3|=3} \frac{z\,dz}{z^4-1} \qquad \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$$

Теоремы и формулы с доказательством.

- Интегральная теорема Коши.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Теорема об интегральной формуле Коши-Адамара.
- Теорема о формуле среднего значения.
- Теорема о принципе максимума модуля аналитической функции.
- Теорема Морера.
- Теорема Лиувилля.