

студенты-
физики

Введение в квантовую физику

Ответы к экзамену

Юлия

Лектор Авакянц Л.П.

Июнь, 2014

Введение в квантовую физику

Билет №1:

1. Электромагнитные волны. Свойства плоских волн. Энергетические характеристики.

Модулированные волны. Фазовая и групповая скорости

Электромагнитные волны:

Пусть $\rho=0$, $\vec{j}=0$. Тогда:

$$\operatorname{div} D = 0, \operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Delta E = \operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} H = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Delta E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{— волновое}$$

уравнение

Одно из решений — плоская монохроматическая

волна $E = E_0 \cos(kr - \omega t + \varphi)$

k — волновой вектор — волна распространяется

вдоль направления k

$\varphi = kr - \omega t + \varphi$ — фаза. Поверхности постоянной

фаза - волновой фронт.

Скорость распространения волнового фронта - фазовая скорость. Плоские электромагнитные волны поперечны.

Соотношение амплитуд $E = BV_{\phi} \Rightarrow$

в плоскости волны E и B колеблются в одинаковых фазах.

$$W = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2} - \text{плотность энергии}$$

$$\text{плоск. } ED = BH \Rightarrow W_{\text{электр}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \frac{D_{\text{маг}}}{2\epsilon_0}$$

Плотность потока энергии -

вектор Пойнтинга S :

$$|S| = v_{\text{фаз}} \cdot W_{\text{электр}} \\ \frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt} \left(\frac{ED}{2} + \frac{BH}{2} \right) = E \frac{dD}{dt} + H \frac{dB}{dt} = (E \text{ rot } H) \rightarrow$$

$$(H \text{ rot } E) \Rightarrow \frac{d}{dt} W = -\text{div} [E \times H] = -\text{div} S$$

$$S = [E \times H] \quad \frac{D_{\text{маг}}}{\text{м}^2 \text{с}}$$

Среднее значение плотности -

$$\text{интенсивность: } I = \langle |S| \rangle = v_{\phi} \langle W \rangle = \frac{1}{2} v_{\phi} \epsilon_0 \epsilon E_0^2 \frac{2\pi}{\lambda}$$

Стоячая волна возникает при наложении

двух волн навстречу друг другу

$$c = \frac{\lambda \nu}{T}, \quad c = \frac{W}{k}$$

Величины одинаковы частота, амплитуда и
полюса. $E = \omega A \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$B = 2B \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Эта волна не переносит энергию.

Вектор мощности импульса:

$$\vec{S} = \frac{W}{V} = \frac{S}{V^2} \frac{D_{me}}{m^4}$$

Световой импульс - волна, модулированная
в пространстве с масштабом модуляции
существенно превышающим длину волны.

Световой импульс - волна, модулированная
во времени с масштабом $\gg T$

Параметры модулированных колебаний?

Изменяются во времени или пространстве.

Амплитуда: пусть $z=0$. $E_x = A \cos \omega t$

фаза: $E = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Групповая скорость - скорость распро-
странения энергии. И она направлена в

векторе \vec{s} . Экспериментально

наблюдается именно пульс.

наблюдается именно пульс.

$$|u| = \frac{|v|}{\cos \alpha} = \frac{|v|}{(\mathbf{n}, \mathbf{s})}$$

Фазовая скорость $V = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

$$V = \frac{\omega}{k}$$

Групповая скорость $V_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$ (угловая)

// $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ - поток или мощность

$S = \int_0^{\infty} j(\omega) d\omega$, $j(\omega)$ спектральная плотность интенсивности

$U = \int_0^{\infty} p(\omega) d\omega$ $p(\omega)$ сп. плотность энергии

Типы химических связей

электронная, ковалентная, ионная, водородная, дисперсионная.

Химическая связь - взаимодействие атомов обуславливающее устойчивость молекул или в целом вещества в конденсированном состоянии. Коллективное взаимодействие ядер и электронов, обеспечивающее существование связанного состояния.

При сближении двух атомов на расстоянии порядка суммы атомных радиусов начинается перекрытие валентных функций валентных электронов. Тогда в поле обоих атомов, электроны обобществляются. Тогда же обобществленные электроны описываются новой обобщенной функцией - молекулярной орбиталью.

Это ведет к перераспределению электронной плотности и изменению энергии.

Если $E < E_a + E_b$, то атомы притягиваются.

- энергия химической связи (сродства сульфидов)

Радиусе действия равен сумме радиусов атомов $1\text{Å} < R < 3\text{Å}$

Равновесному состоянию соответствует состояние с минимальной энергией E_{\min} .

Энергия химической связи: $(E_A + E_B) - E_{\min}$

ковалентная связь - возникает за счет обобществления электронной пары посредством обменного механизма или донорно-акцепторного.

⊗⊗ Молекула образуется в состоянии с противоположными спинами

ионная связь - обобществленная электронная пара принадлежит

более электроотрицательному атому. Основана на электростатическом притяжении.

Металлическая связь возникает

в результате частичной дelokализации валентных электронов.

Атомы превращаются в ионы, электроны

свободные и свободно перемещающиеся
в кристалле

ков	металлы	ион
общие электроны	основное ионное ядро	
орбитал атомов	электроны принадлежат всем атомам	взаимное притяжение

ван-дер-Ваальсова - межмолекулярная
связь. обусловлена дисперсионными
(инд. диполь - инд. диполь), индукционными
(пост. диполь - инд. диполь) и ориентационными
(пост. диполь - пост. диполь) взаимодействиями.

Двухатомные молекулы:

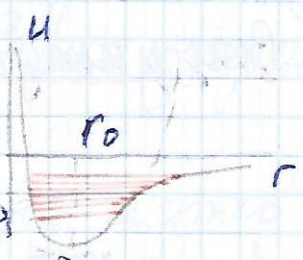
m_1, m_2 $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2$



колебательной электр

$E_n = (v \pm \frac{h}{2}) \hbar \omega$, $\omega = (\frac{k}{\mu})^{1/2}$

// $E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$ - энергии вращения ротора



Наличие колебательных уровней
приводит к появлению в межмолекулярных
спектрах линий переходов.

Вращательного спектра:

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2 \text{ - момент инерции}$$

$$E_{rot} = \frac{J^2}{2J}$$

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2J} J(J+1) \quad J \text{ - вращательное квантовое число.}$$

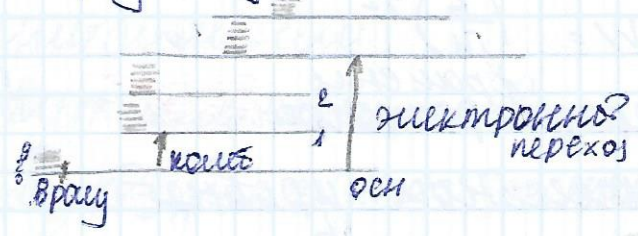
Правило отбора: $\Delta J \pm 1 \Rightarrow \Delta E = \hbar \omega_r (J+1)$

В спектре также наблюдаются переходные линии.

Электронная энергия - сумма кин. энергии электронов, средн. потенциальной энергии притяжения и отталкивания.

Полная электронная энергия равна сумме значений энергий электронов на всех занятых молекулярных орбиталях.

Структура энергетических уровней:



$$\omega_e : \omega_v : \omega_r = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}$$

Билет №2

Тепловое излучение. Фридрих Планк.

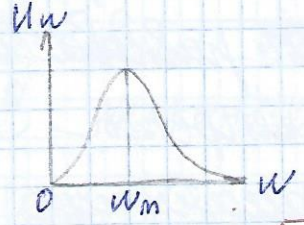
Постоянная Планка

Тепловое излучение обусловлено переходом к теплу темноты. ТИ - единственный вид излучения, которое может находиться в термодинамическом равновесии с телами. Пусть несколько тел нагреты до различных T и помещены в замкнутую полость, стенки которой полностью отражают падающее излучение. Система придет в состояние равновесия, при котором T всех тел одинакова! даже если в полости вакуум) Истощаемая энергия становится равной поглощаемой, плотность энергии достигает определенной величины. - равновесное излучение или черное.

Плотность энергии и спектральный состав не зависят от размеров и формы полости и от ее объема. Излучение зависит только от температуры. Равновесное

излучение диффузно, изотропно и неполяризовано.
 Распределение энергии характеризуют спектральной плотностью I_λ или I_ω .

$I_\lambda d\lambda$ - энергия единицы объема излучения с длиной волны $(\lambda, \lambda+d\lambda)$
 $I_\omega d\omega$ — " — " — " с ω в инт. $(\omega, \omega+d\omega)$



Спектральная плотность энергии излучения АЧТ описывается формулой Планка:

$$I_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar \omega}{kT}) - 1}$$

Плотность энергии равновесного излучения зависит от температуры. $I_\omega = \sigma_0 T^4$ - закон Стефана-Больцмана. $\sigma_0 = 7,64 \cdot 10^{-16} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$

ω_m - максимум спектральной плотности - увеличивается с ростом температуры

$$\omega_m = 0,5 \cdot 10^{11} \cdot T \text{ рад/с} - \text{закон смещения Вина}$$

Для Вывода формулы Планка предположим, что энергия осциллятора может принимать только дискретное ϵ_n , пропорциональное кванту энергии ϵ_0 (порция) излучения и поглощения излучения осциллятором

осуществляется дискретно квантами,
величина которых пропорциональна частоте

$\mathcal{E}_0 = h\nu$, где h - постоянная Планка

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \quad \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 9659 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$$

Постоянная Планка - квант действия;

коэффициент пропорциональности между

$$\mathcal{E}_0 \text{ и } \nu: \mathcal{E}_0 = h\nu. \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \mathcal{E}_0 = \hbar\omega$$

Значение было определено экспериментально

Значение, определенные из разных опытов,

хорошо совпадают друг с другом

Экспериментальные подтверждения волновых свойств частиц. Опыт Дэвисона - Джермера. Дифракция. Волны де Бройля. Амплитуда. Волны. Непрерывности Гейзенберга.

Луи де-Бройль (1923): материальные частицы должны обладать волновыми свойствами. Если в частице, обладающей массой покоя, связана волна, можно ожидать, что она распространяется со скоростью V частицы.

Для всех частиц $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi h}{p}$ - формула де-Бройля.

λ - дебройлевская длина волны.

Де-Бройль предположил, что частицы должны интерферировать на схеме Юнга.

$$E = \hbar \omega.$$

Связь частоты с энергией:

$$\nu_{\text{фр}} = \frac{\omega}{k} \quad \text{и} \quad \hbar \nu_{\text{фр}} = \frac{\partial W}{\partial k}$$

$$\hbar \omega = E$$

$$\hbar k = 2\pi \hbar / \lambda = p.$$

$$E = \frac{p^2}{2m}: \quad \nu_{\text{фр}} = \frac{E}{p} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = v$$

$$\nu_{\text{фр}} = \frac{E}{\hbar m v} = \frac{E}{\hbar m v} = \frac{E}{\hbar m v}, \text{ значим,}$$

дебройлевские волны обладают дисперсией

// Попытки рассматривать газетца
как волновой пакет провалились, т.к.
пакет расширяется из-за дисперсии //

Для макроскопического объекта $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{12m\hbar} = 7 \cdot 10^{-20}$
т.е. волновые свойства не проявляются.
 $\lambda \approx 8 \text{ нм}$, что позволяет дифрагировать
на крист. решетке.

Эксперимент Дэвиссона и Джермера

Отражение от кристалла пучка e-будет
иметь такой же интерференционный
характер, как у рентгеновских лучей.

Для обнаружения максимумов измерялись

U и θ (детектор)



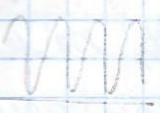
Детектор перемещают
по окружности радиуса R

При $\theta = 50^\circ$ и $U = 54 \text{ В}$ наблюдается отчетливый
максимум. — $d \sin \theta = \lambda$. $\lambda = 0,167 \text{ нм}$,

что соответствует гипотезе де-Бройля.

Другая серия опытов — измерения I отраж.
пучка при различных U . (фиксируя положение
максимума)

Векторы интерферируют, если $2d \sin \alpha = m \lambda$



максимум равноудален $\Gamma_m \sim m$

Показатель преломления средоуловски

Вектор: $n = \frac{v_e}{v_v}$

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{k_e}{k_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_e}$$

Показатель из вакуума в кристалле, электроны взаимодействуют в потену. $\lambda \sim \frac{1}{\mu}$, тогда $n = \frac{\sqrt{\mu + \mu_0}}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{\mu_0}{\mu}}$

$$2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} = m \lambda$$

$$\sqrt{\frac{v_0}{v} + \sin^2 \alpha} = \frac{m}{2d} \frac{1,226}{\Gamma} - \text{описывает}$$

положение интенсив. максимумов. Кроме того, справедливость гипотезы де Бройля подтверждают интерференция и дифракция частиц.

Неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$$
$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Устанавливает пределы измерения

классической физики, и накладывает
ограничение на точность одновременного
измерения p и x или E и t .

В квантовой механике неопределенно
можно найти угол дифракции частицы
а ширины

$$\text{ширина щели } \Delta x = \delta \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{\delta} \Rightarrow \Delta k = \frac{1}{\delta}$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta k}{k} = \frac{1/\delta}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\delta}$$

но
м
а
1
пер
вету.
двигая

Амплитуда волны имеет статистич.
характер: квадрат амплитуды равен
плотности вероятности обнаружения
частицы в области пространства
в момент времени t .

$$\psi = a e^{i s}$$
$$|\psi|^2 = a^2 = \rho$$

$j \cdot a^2 v s$ - плотность потока
вероятности.

траект.
с
1070ку.

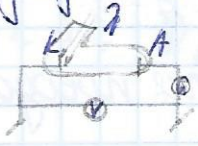
Билет № 3.

квантовые свойства электромагнитного излучения. Фотоэффект. Фотона. Энергия и импульс фотона. Эффект Комптона. Регистрация одиночных фотонов.

В 1905 г. Альберт Эйнштейн выдвинул гипотезу световых квантов: дискретный характер энергии не только ϵ , но и самому свету. Каждый фотон несет квант энергии и движется со скоростью света. $\epsilon = \frac{h\nu}{\text{Вольтер}}$

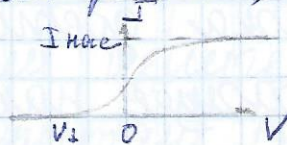
$$E_{\text{ф}} = h\nu, \quad p_{\text{ф}} = \frac{h\nu}{c}$$

Фотоэффект - испускание электронов под действием света.



При освещении катода монохроматическим светом через кварцевое окошко

из катода вырываются электроны, возникает фототок.



1. Фототок насыщения пропорционален падающему световому потоку. (Столетов, 1889)

2. Для каждого металла существует максимальная длина волны λ_k - красная граница фотоэффекта. Если $\lambda > \lambda_k$ испускаемые e^- отсутствуют.

3. K_{max} линейно зависит от ω и не зависит от интенсивности света.

Если рассматривать фотоэф. с классической точки зрения, возникает резкое затруднение (нет запаздывания).

С квантовой т.з. затруднений нет.

Формула Эйнштейна: $\hbar\omega = A + K_{max}$

A - работа выхода - минимальная ϵ , необходимая для освобождения электрона.

1. $K_{max} \sim \omega$

2. ω_0 - порог фотоэффекта. $\hbar\omega_0 = A$.

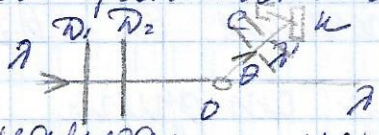
Если $\omega < \omega_0$, то $\hbar\omega$ не хватает для преодоления барьера. (ω_0 соответствует λ_k)

Если ток достигает нуля при $U = U_s < 0$ - запирающее напряжение.

$$dN_e = n_{\phi} e (\Sigma \cos \theta) dt$$

$$I_{\text{факт}} = \frac{dq}{dt} = \frac{e dN_e}{dt} = e n_{\phi} e \Sigma \cos \theta = \frac{e}{\hbar\omega} (I \cdot \Sigma \cos \theta)$$

Комптон исследовал рассеяние рентгеновского излучения на атомах

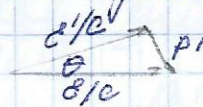


В рассеянном излучении наряду с иск. λ появляется смещенная линия $\lambda' > \lambda$.

Комптовское смещение не зависит от λ и материала, а зависит только от θ

Пусть на покоившийся свободный e^- упал фотон.

$$\mathcal{E} + mc^2 = \mathcal{E}' + E' \quad | \cdot c$$



$$p'^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}\right)^2 - 2 \left(\frac{\mathcal{E}\mathcal{E}'}{c^2}\right) \cos \theta \quad | \cdot c^2$$

$$E'^2 - p'^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E'^2 - \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}'^2 + m^2 c^4 - 2\mathcal{E}\mathcal{E}' + 2\mathcal{E}mc^2 + 2\mathcal{E}'mc^2$$

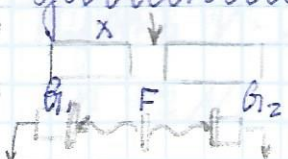
$$(p'c)^2 = \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}'^2 - 2\mathcal{E}\mathcal{E}' \cos \theta$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}'}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_e (1 - \cos \theta) \quad \lambda_e - \text{комптовская длина волны.}$$

$$\lambda_e = 2\pi \hbar / mc = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Корпускулярные свойства подтверждаются моноволновым рентгеновским излучением, давлением света и опытами Боте.



Фольгу F освещали слабым пучком излучения λ , по действию

которого она становится источником излучения
света ν_1 и ν_2 взаимодействуют независимо
друг от друга. - экспериментальное
доказательство существования фотонов

Модель газа свободных электронов в металле
распределены в по энергетическим
уровням при $T=0$. Энергия, скорость и
поверхность Ферми

Жриетам можно рассматривать
как потенциально ящик для электронов
в некотором постоянном потенциале внутри.

Могут дискретные допустимые значения

$$k: k_{xn} = \frac{2\pi n_x}{L_x}, k_{yn} = \frac{2\pi n_y}{L_y}, k_{zn} = \frac{2\pi n_z}{L_z} \quad n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \dots$$

каждое разрешенное состояние занимает
элементарный кубический объем в пространстве

$$k: \Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_z = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V}$$

$$p: \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}$$

Могут для энергии получаем выражение

$$E = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \frac{1}{V^{2/3}} n^2 \Rightarrow \text{одно и то же значение}$$

кинетической энергии может осуществляться
несколькими комбинациями n_x, n_y, n_z

$$\text{// } n^2 = 6 \Rightarrow n_x n_y n_z = 211, 121, 112 \text{ — трикратно вырожден}$$

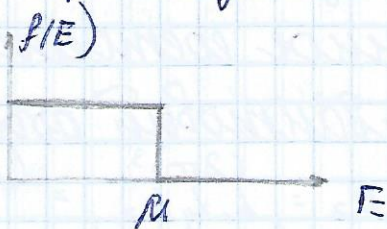
Пусть $V=1$: концентрация электронов

$$n = 2N \quad (2 - \text{валентность, } N - \text{число атомов})$$

Согласно принципу Паули в каждом состоянии, занимаемом в р-пр-ве объемом $(2\pi\hbar)^3$ могут находиться два электрона $\uparrow\downarrow$. При $T=0$ электроны занимают самые низкие энергетические состояния.

Электроны описываются распределением Ферми-Дирака: $f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) + 1}$.

При $T=0$ ф-ция распределения имеет вид ступеньки.



Все состояния с $E < \mu$ заняты, а с $E > \mu$ - свободны.

Таким образом, при $T=0$ e^- занимают в р-пространстве сферу, радиус которой $R_F = \hbar k_F$. Определяется из условия

$$\begin{array}{l} \text{число } e^- \\ \text{число ячеек} \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ \approx \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4/3\pi R_F^3}{(2\pi\hbar)^3} \\ \text{число ячеек} \end{array}$$

Максимально возможное значение
импульса p_F и соответствующая ему
 E_F при $T=0$ и - импульс и энергия
Ферми.

Изотермическая поверхность $E=E_F$
в пространстве импульсов, внутри
которой все состояния заняты
при $T=0$ - поверхность Ферми.

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3} = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3} / n\text{-концентрация.}$$
$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Энергия Ферми растет с увеличением
концентрации коллективизированных
электронов в металле.

Плотность состояний $g(E)$ - число
разрешенных состояний электронов
в единичном интервале энергии -

для кристалла единичного объема

$$g(E) = \frac{dn_s}{dE} = \frac{12 m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$$

Модель электронного газа:

Паули Вуде 1900г.

Электроны в металле рассматриваются как электронный газ, к которому можно применить кинетическую теорию газов. Предполагается, что e^- представляют собой одинаковые твердые сферы, движущиеся независимо между столкновениями. Между ними нет никаких взаимодействий, кроме столкновений. Для компенсации кулоновского заряда в узлах решетки размещены положительные ионы.

1. Отсутствие внешних полей
2. Столкновение - мгновенное событие
3. $\rho = \frac{1}{\tau}$, τ - время релаксации / сред. пролет
4. Максимальное равновесие.

Бишт №4

Фазовое пространство квантовой статистики
газцы. Плотность квантовых состояний.

Распределение.

Фазовое пространство (x, y, z, p_x, p_y, p_z)

$$\text{Объем фазового объема } \delta\varphi = \delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z = h^3$$
$$dZ = g \frac{d\varphi}{\delta\varphi} = g \frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$$

где $g = 2s+1$ - кратность вырождения, s - спин

Ферми-газцы - газцы с полуцелыми
спинами. Они подчиняются принципу
запрета Паули и статистике
Ферми-Дирака.

Бозе-газцы - газцы с целыми
спинами, подчиняются статистике

Бозе-Эйнштейна.

Ф и Б различаются выбором
всех функций.

Б: симметричная всемогущая функция. Итоговая вероянность максимална, когда частица находится в центре

Ф: антисимметричная. Запрет Паули. Итоговая вероянность максимална с краями.

Распределение Ферми-Дирака

Число частиц могут находиться в состоянии E_1 с g_1 или E_2 с g_2 . $n \gg 1$.

$$\frac{d \ln \Gamma}{dE} = \frac{1}{kT}, \quad \Gamma - \text{тот же вероятностный}$$

$$\Gamma_1 = \frac{g_1!}{n_1! p_1!}, \quad \Gamma_2 = \frac{g_2!}{n_2! p_2!}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{g_1! g_2!}{n_1! p_1! n_2! p_2!}$$

$$dE = (E_1 - E_2) dn_1, \quad |dn_1 = -dn_2, \quad dg_1 = dg_2 = 0$$

$$d \ln \Gamma = d \ln \left(\frac{g_1!}{n_1! p_1!} \right) + d \ln \left(\frac{g_2!}{n_2! p_2!} \right) = d \ln \left(\frac{g_1! g_2!}{n_1! p_1! n_2! p_2!} \right) =$$

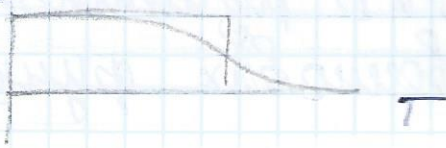
$$d \ln \left(\frac{g_1! g_2!}{n_1! p_1! n_2! p_2!} \right) = \ln \left(\frac{n_2 p_1}{n_1 p_2} \right) dn_1$$

$$\frac{d \ln \Gamma}{dE} = \frac{1}{E_1 - E_2} \ln \frac{n_2 p_1}{n_1 p_2}$$

$$E_1 + kT \ln \frac{n_1}{p_1} = E_2 + kT \ln \frac{n_2}{p_2} = \mu$$

$$n = g f(E), \quad p = g(1 - f(E)) = \bar{g}$$

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}$$



Бозе-Эйнштейновская

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{закон Уидера: } W_n = A \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

$$= A \exp\left(-\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}{kT}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1$$

$$A = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$W_n = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right] \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)$$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n W_n = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-n \frac{\hbar\omega}{kT}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-d}{d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = \frac{-d}{d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)^2}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

при $T = 0$

T

Если имеются N независимых бозе-частиц, то вероятность того, что еще одна частица придет в то же состояние, увеличивается в $(N+1)$

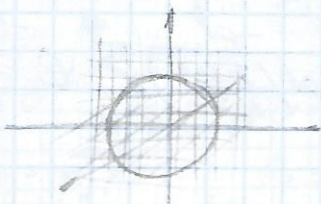
раз. Этот эффект имеет в основе бозе-конденсации - частица находится на самой низкой энергетической уровне

Плотность квантовых состояний

$$\psi(x) = \psi(x+a)$$

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi = A e^{i k x} + A_2 e^{-i k x} \quad k a = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$p = \frac{2\pi \hbar k}{a}, n \in \mathbb{Z}; \quad v_{gr} = \frac{2\pi \hbar}{m a}$$



$$dN = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi \hbar)^3}$$

$$N = \frac{\frac{4}{3} \pi p^3}{(2\pi \hbar)^3} \quad p = \sqrt{2mE}$$

$$N = \frac{4\pi a^3 m^{3/2} E^{3/2} \sqrt{2}}{3 \pi^2 \hbar^3}$$

$$n = \frac{N}{a^3} = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2} E^{3/2}}{3 \pi^2 \hbar^3}$$

$$g = \frac{dN}{dE} = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{E}}{\pi^2 \hbar^3} \quad N \sqrt{E}$$

Порядки физических величин. Соответствие
непрерывности. Проблема стабильности.
Критерии применимости.

Порядки величин:



Момент импульса

$$M = \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$r_1 = r_2 = 953 \cdot 10^{-10} \text{ м} - \text{Боровский радиус}$$

$$E_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r_1} = -13,6 \text{ эВ}$$

$$R_{\text{эпра}} \approx r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \quad \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m = 9,91 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$M = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

$$\dot{c} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$B_1 = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \quad \text{гаусс} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$kT = 40 \text{ эВ}$$

$$m_e c^2 = 511 \text{ МэВ}$$

состоянием неопределенности.

Свободная частица, имеющая точное значение импульса и энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} \text{ с одинаковой вероятностью}$$

вероятности может быть обнаружена в любой точке пространства.

Локализированная частица описывается

$$\Delta p_x \neq 0.$$

Локализация в области $x_0 - \frac{\Delta x}{2} < x < x_0 + \frac{\Delta x}{2}$

в области наблюдается эффект возрастания

амплитуды, что возникает при

суперпозиции волн с амплитудами $\frac{A}{\Delta \omega}$

и частотами $\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}$

Напряженность: $E = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}} \frac{A}{\Delta \omega} \cos(\omega t - kx) d\omega$

$$k = k_0 + \frac{dk}{d\omega} (\omega - \omega_0) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v}, \quad \phi = \omega t - \frac{x}{v} + x \left(\frac{d\omega}{v} - k_0 \right)$$

$$E(x, t) = A \frac{\sin \left(\frac{\Delta \omega}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right)}{\Delta \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) / 2} \cos \left(\omega_0 t - k_0 x \right)$$

амплитуда $A \frac{\sin \eta}{\eta}$, $\eta = \frac{\Delta \omega}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right)$

в момент $t=0$ $\eta = -\frac{x \Delta \omega}{2} \Rightarrow$

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi$$

$$\Delta p \Delta x = 2\pi \hbar$$

Соотношения: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$
 $\Delta E \Delta t \geq \hbar$

В природе объективно не существует
 постоянной частицы и только определенные
 значения всех переменных

В процессе прибором атомной частицы
 приписываются не собственные или
 классические переменные / описывает
 опыт со целью)

Пусть частица заперта в области
 размера L . Пусть $E > E_{min}$, $p = \langle p \rangle + \Delta p$.

$E \downarrow$, $\langle p \rangle \downarrow$, но $\Delta p = const \Rightarrow \hbar$

$E = E_{min}$, $p = \Delta p = \frac{\hbar}{L}$. В атоме Бора

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{\hbar^2}{me^2}, \text{ это}$$

совпадает с боровским радиусом.

$$E_{min} = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ эВ}$$

Поэтому атомной электроны не падают
 на ядро. Соотношение неопределенности

проявляет себя порою силой
отталкивания на модели настольной.

Фронтальный эксперимент

Вам в данно системе значение
некоторо характерно всеггено

и с размерностью действия сравнимо
с \hbar , то поведение может быть описано
только в рамках квантовой теории.

Всем $\hbar \gg \hbar$, то поведение системы
с высокой точностью описывается
законом классическо физики - макромир

Визит №5

Модели атома. Опыт Резерфорда.

Модель атома Резерфорда-Бора

Модели:

3. Томсоновит: кусочки материи

2. Модель атома Томсона "Пудинг с изюмом". Атом - положительно заряженное тело с заключенными внутри него электронами.

3. Планетарная модель: Нагрузка вокруг положительного ядра (+) по орбитам вращаются e^- , обобщенное в кольцо.

4. Планетарная модель Резерфорда-Бора электрона движутся по орбитам вокруг точечного положительного ядра.

(в дальнейшем установилось, что траектория неопределена)

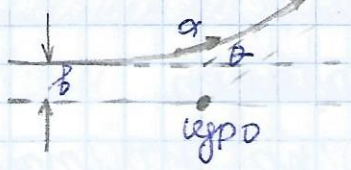
ядро $\sim 10^{-12}$ см, атом 10^{-8} см.

Экспериментальное доказательство было дано Резерфордом с помощью

рассеяние α -частиц тонкой металлической фольгой?

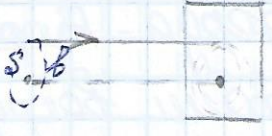
Подавляющее число α -частиц рассеиваются на небольшие углы. Отдельные α -частицы рассеиваются на большие углы.

Взаимодействие α -частицы кулоновское, α -заряд и масса локализованы в очень малой области атома



$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 k b v^2}$$

Формула Резерфорда (рассеяние $\theta, \theta + d\theta$)



$$b = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 k} \cot \frac{\theta}{2} \quad \text{— радиальный параметр}$$

$$db = - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 k} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta / 2}$$

число ядер рассеивающего шло $n \cdot S$

$$\frac{dN}{N} = \frac{dS}{S} = \frac{n \cdot S \cdot 2\pi b db}{S} = n \cdot 2\pi b db$$

dN - поток частиц, рассеянных в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$, N - поток падающих частиц.

$$\frac{dN}{N} = n \left(\frac{q q_0}{4k} \right)^2 \frac{2\pi \cos(\theta/2) d\theta}{4 \sin^3(\theta/2)} \quad / \cdot \frac{\sin \theta/2}{\sin \theta/2}$$

$$\frac{dN}{N} = n \left(\frac{q q_0}{4k} \right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4 \sin^4(\theta/2)}$$

$2\pi \sin \theta d\theta$ — телесный угол $d\Omega$, в пределах которого заключены углы рассеяния $(\theta, \theta + d\theta)$

$$\frac{dN}{N} = n \left(\frac{q q_0}{4k} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \quad - \text{формула Резерфорда}$$

- эмпирическое соотношение, полученное в телесном угле $d\Omega$ под углом θ к первоначальному направлению. (n — число ядер на ед. пути, для малых углов не применима)

дифф. сечение $d\sigma = 2\pi b db$


$$\frac{dN}{N} = n d\sigma, \quad \text{где } d\sigma = \left(\frac{q q_0}{4k} \right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

формула была подтверждена экспериментом

Простейшие модели. Потенциально-нулевой барьера. Коэффициенты отражения и пропускания

Потенциально нулевой барьер - область пространства, разделяющая области с другим потенциалом

Пусть $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$



Пусть слева на границу барьера налетает волна: $\psi = A e^{i(kx - \omega t)}$

Чтобы удовлетворить граничным условиям волна существует как-прямая волна, так и отраженная.

Задача! найти амплитуду отраженной и падающей волн, а затем $\frac{U_{отр}}{U_{пад}}$ отражения R и пропускания D .

Ищем из уравнения Шредингера:

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \quad k^2 = 2m(E - U_0) / \hbar^2$$

1. $E > U_0$: $\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \quad k_1 = \sqrt{2mE} / \hbar$

$$\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \quad k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)} / \hbar$$

В области $x > 0$ имеется только прошедшая волна, значит, $B_2 = 0$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) & a_1 + b_1 &= a_2 \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0) & a_1 k_1 + b_1 k_1 &= a_2 k_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} b_1 &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} a_1 \\ a_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} a_1 \end{aligned}$$

квадрат модуля $|\psi|^2$ определяет плотность вероятности.

плотность потока вероятности.

Из уравнения непрерывности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U \right) \psi + \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U \right) \psi = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \psi^* \psi - \psi^* \nabla^2 \psi) = \\ &= \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} (\nabla \cdot \nabla \psi^* \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi + \psi^* \nabla^2 \psi - \psi^* \nabla^2 \psi) = \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right)^* \psi + \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right)^* \nabla \psi = \frac{1}{2m} \nabla \cdot \left(\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi \right) \end{aligned}$$

$$j = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi)$$

Скорость распространения вероятности совпадает со скоростью v частицы

$$v = p/m = \frac{\hbar k}{m} \quad \rho \sim k \psi \psi^* \Rightarrow$$

$$\rho \sim k_1 a_1^2 \quad \rho' \sim k_1 b_1^2 \quad \rho'' \sim k_2 a_2^2$$

$$R = \frac{\rho'}{\rho} = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$D = \frac{\rho''}{\rho} = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R + D = 1$$

В случае $E < U_0$ формулы остаются

введем k_1 и k_2 , но k_2 - чисто мнимое

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \Rightarrow R = 1 - \text{полное отражение}$$

но $\psi(x > 0) \neq 0$. Это есть ψ -функция

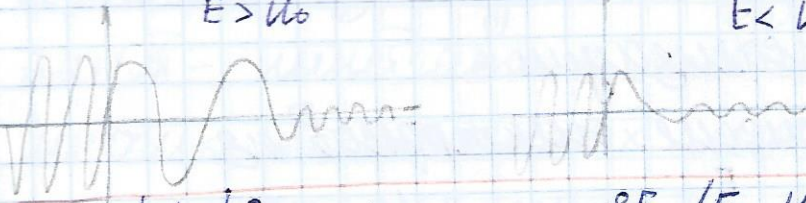
проникает в область $x > 0$, кесслонпр

на то, что кажущаяся величина отражения
меньше 1.

Барьер конечной ширины

$$E > U_0$$

$$E < U_0$$



$$D = \left| \frac{A_5}{A_1} \right|^2 = \frac{8E_1(E_1 - U_0)}{8E_1^2 - 8U_0E_1 + U_0^2 - U_0^2 \cos[2k \sqrt{2m(E_1 - U_0)}/\hbar]}$$

$$R = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = 1 - \frac{8E_1(E_1 - U_0)}{8E_1^2 - 8U_0E_1 + U_0^2 - U_0^2 \cos[2k \sqrt{2m(E_1 - U_0)}/\hbar]}$$

Локальной максимумы $D = 1$ если

$$\cos[2k \sqrt{2m(E_1 - U_0)}/\hbar] = 1 \quad E = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2 U_0}{m} \right)^2$$

Минимумы: $E = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2 U_0}{m} \right)^2$

$$\cos[2k \sqrt{2m(E_1 - U_0)}/\hbar] = -1 \quad D_n = \frac{8E_1(E_1 - U_0)}{8E_1^2 - 8U_0E_1 + 2U_0^2}$$



Для подбарьерного туннеля $e\phi \rightarrow eV$

Всё $U_0 \gg E$ и используем разложение

$$eV: D = \frac{-8EV}{U_0^2 - U_0^2 \sin^2 \left(\frac{2k}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right)}$$

$$D = \frac{8E}{U_0} \exp \left[- \frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} \sqrt{2m(U_0 - E)} dx \right]$$

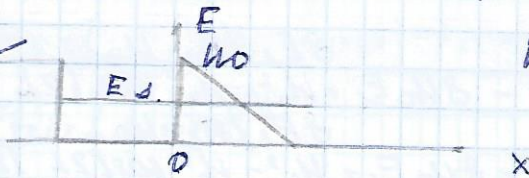
$$D = D_0 \exp \left[- \frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} \sqrt{2m(U_0 - E)} dx \right] -$$

коэффициент прохождения сквозь α барьер произвольной формы.

Физические реализации:

1. Холодная эмиссия электронов из

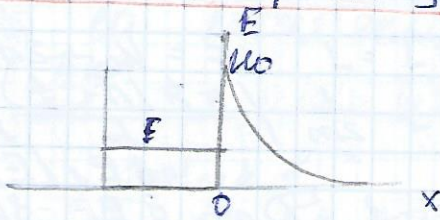
металла



$$U = U_0 - eUx$$

$$D \approx D_0 \exp(-\alpha)$$

2. Радиоактивный распад



$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qZe^2}{r}$$

$$D = D_0 \exp \left[- \frac{2e^2}{\hbar E} \frac{1}{v} \right]$$

Дискретность атомных спектральных линий. Основные спектральные закономерности. Постулаты Бора.

Эксперименты Франка и Герца

Спектры, обусловленные излучением взаимодействующих друг с другом атомов, состоит из отдельных узких спектральных линий - линейчатые спектры. Наличие многих спектральных линий свидетельствует о сложном строении атома. Было замечено, что спектральные линии расположены не беспорядочно, а образуют серии.

Бальмер, 1885:
$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), n=3, 4, 5 \dots$$

R - постоянная Ридберга $R = 1,097 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$.

Соответствующая серия - серия Бальмера

Обобщенная формула Бальмера

$$\omega = R \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

• $n_0 = 1$ - серия Лаймана,

- $n_0 = \infty$ - серия Бальмера, $n = 3, 4, 5$
- $n_0 = 3$ - серия Пашена, $n = 4, 5, 6$

Брэкета и Пфунда

Максимальная длина волны серии Лаймана отвечает $n = \infty$, это $\lambda_{\text{Лаймана}} = 121,6 \text{ нм}$ - резонансная линия Водорода.

С ростом n частота стремится к предельному значению $\frac{R}{n_0^2}$ - граница серии. За границей спектр становится спиральным.

Постулаты Бора: (1913)

1. Атом может существовать в стационарных состояниях, которые характеризуются дискретными значениями энергии. В этих состояниях атом не излучает

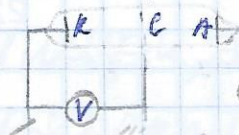
2. При переходе атома из стационарного состояния с E_2 в сост. с E_1 происходит излучение/поглощение фотона с энергией $h\nu = E_2 - E_1$ - правило частот

атомы переходят скачками.

Опыт Франка и Герца

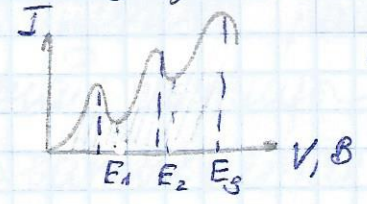
При нулевых электродвижущих e^- атомы переходят между e^- от e^- к атому.

Если внутренняя энергия атома изменена непрерывно, то может быть передана любая порция энергии. Если дискретна, то изменение тоже дискретно. Измеряемое переизлучаемое порции энергии можно определить значения внутренних энергий стационарных состояний атома.



G - сетка
Вакуум с парами ртути $p \approx 130 \text{ мм}$
 $U \approx 0,5 \text{ В}$
ТОРМ

Если какой-то e^- проходит через сетку с $U < 4,9 \text{ В}$, то он не дойдет до анода.



$$E_2 = 4,9 \text{ В}, E_2 = 2E_1, \\ E_3 = 3E_1, \dots$$

Вид кривой объясняется тем, что атомы могут поглотить дискретные порции энергии равные $4,9 \text{ В}$.
Когда $V = 4,9 \text{ В}$ e^- начинают испытывать

Вблизи стенки нулевого стоякновеня, отдавая атомом всю энергию. На атомы попадают лишь те, которые не испытали квант. стоякновеня. \Rightarrow Т ушеняетоя.

Поэтому опыты были проведены с другими газами. Характерные разности потенциалов - резонансные потенциалы - первые потенциалы возбуждения.

Опыты подтверждают дискретность стационарных состояний и правило

частот : $E_2 - E_1 = \frac{2\pi c h}{\lambda} = \boxed{4,97 \text{ В}}$

// Правило квантования - третий постулат

$M = [r p] \quad \boxed{M_n = n \cdot \hbar}$

Электрон в периодическом потенциале
крист. решетки. Зона Бриллюэна. Матричные
элементы. Проводники,
полупроводники и диэлектрики

Электрон в металле находится
в кубовидном потенциальном поле
ионов крист. решетки. Наличие отрицательной
зарядки ищности в металле приводит
к ослаблению э. поля. Поэтому область,
в которой потенциальная энергия e^-
имет глубокий минимум, отсутствует.
В остальных частях и практически всегда
в области постоянного потенциала
движение e^- можно рассматривать
как движение свободной частицы. Попав в потенц.
яму, e^- захватывается ионами и описывается
осциллирующими функциями связанных
состояний.

Пусть ψ_{eff} можно считать постоянным.
 $\Delta \psi_{eff} = -e\psi_{eff}$. Тогда движение e^- описывается

плоскими волнами в поле малого периода.
потенциала

1. Периодичность амплитуды волновой функции

$S = j_1 a_1 e_x + j_2 a_2 e_y + j_3 a_3 e_z$ - вектор трансляции
 a - периода, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\varphi(r) = \varphi(r+S)$ - трансляционная инвариантность

$\psi_k(r) = c_k(r) e^{-ikr}$. М.к. r нахождения e^{-} в плоскости
отмеченных на S , должна быть одинаковой,
то $c_k(r) = c_k(r+S)$ (модулирующую амплитудную
инвариантность)

2. Неоднозначность определения импульса

$$\psi_k(x \pm a_j) = c_k(x \pm a_j) e^{-ik(x \pm a_j)} = \psi_k(x) e^{\pm ika_j}$$

Волновая функция, которая при трансляции
на S приобретает фазовый множитель
 e^{ikS} и удовлетворяет условию периодичности
волна Блоха.

3. Состояния, соответствующие

$$k \text{ и } k' = \pm k \pm \frac{2\pi}{a} j e_x \text{ физически}$$

неразличимы \Rightarrow соответствуют одной
энергии

Множество волновых функций в узелной

уплотне можно сопоставить приведенно-
Бриллюэ вектор - вектор с наименьшим
абсолютным значением k : $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$

Область значений Бриллюэ вектора
 $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ - первая зона Бриллюэ.

$\frac{\pi}{a} \leq |k| \leq \frac{2\pi}{a}$ - вторая зона Бриллюэ.

Закон дисперсии в приведенной зоне:

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m_0} \quad \text{со сдвигом на} \quad E = j \frac{2\pi}{a} E_x$$

трансляционная инвариантность решетки
приводит к многозначности энергии E и энергии.

Методика: 207 +

энергетический спектр электронов
разделяется на зоны разрешенных
значений энергии и области запрещенных
значений - энергетические щели.

Величина энергетических щелей
связана с потенциальной энергией
взаимодействия электронов с ионами
и зависит от величины эффективной

потенциалов ионов решетки.

Возникновение разрыва означает, что невозможно никакое состояние в энергиями, соответствующим энергии иона.

Зонная структура

(T=0)



Все уровни вещного зона заполнены. Большая E_g . Изменит E не переходит в зону пробуждено

e^- в зоне пробуждено проводим.

E_g мала, e^- переходит по действиям T на проводим.

Эффективная масса - динамическая масса, прояв. при движении электрона в потенциале кристалла. e^- реагируют на электрическое поле в нек-м мери, которая определяется из II з-на Ньютона. $m^* = \hbar^2 \cdot \left(\frac{d^2 E}{d k^2} \right)^{-1}$

Бишет № 7

Модель атома Бора. Правило квантования Бора. Боновский радиус. Энергия электрона в спектральной серии водородоподобных систем

Бор предполагает, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых момент импульса $M = n\hbar$, $n = 1, 2, 3, \dots$ n-квантовое число. - правило квантования Бора.

Для водородоподобных систем:

II закон Кюльтона: $\frac{mv^2}{r} = \frac{ze^2}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$

$$K = \frac{ze^2}{2r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

Полная энергия: $E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{ze^2}{r} = -\frac{ze^2}{2r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$

Согласно правилу квантования $rmv = n\hbar$

$$v = \frac{n\hbar}{rm}$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{n^2}{z} \cdot 4\pi\epsilon_0$$

Радиус первой стационарной орбиты -

$$r_B = \frac{\hbar^2}{me^2} \cdot 4\pi\epsilon_0 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ м} - \text{Боровский радиус}$$

$E_n = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m e^4}{\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}$ - уровни энергии стационарных состояний электрона
При $n \rightarrow \infty$ $E_n = 0$.


Состояние с наименьшей энергией ($n=1$) - основное. / и: $E_1 = -13,63 \text{ эВ}$

$E_{\infty} = E_n = E_{\text{ион}}$ - энергия ионизации.

Максимальную энергию нужно сообщить, чтобы вытащить e^- из атома водорода.

Для круговой орбиты условие Бора приводит к:

1. на длине круговой орбиты укладывается целое число длин волн $2\pi r_n = n\lambda$

2. Номер фазы за один оборот: 

$k \cdot (2\pi r_n) = n \cdot 2\pi \Rightarrow$ Вращение не вышает на вид стоячей функции и она стационарна.

Для периодического движения в потенциальной яме

правило квантования Бора - Зоммерфельда:

$$\oint p dq = 2\pi \hbar n - \text{постулат Бора-Зоммерф.$$

pq - обобщенные импульсы и координаты

Величина энергии, равная первому потенциальному кванту энергии - единица измерения энергии - ридберг

$$R_y = J = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ.}$$

Первый потенциальный квант энергии

$$R_{\infty} = \frac{R_y}{2\pi\hbar c} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

$$E_n = -\frac{R_{\infty}}{n^2}, \quad \Gamma_n = A_0 \cdot n^2$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{n}$$

$$E_n = \frac{mv^2}{2}$$

$$V_1 = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$$W_n = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{z^2 me^4}{\hbar^3 n^3}$$

$$E_n = \hbar\omega, \quad W_1 = 6,610^{15} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Модель Бора - полуклассическая, т.к. использует и классическое описание движения, и квантовые постулаты

Спектральные серии:

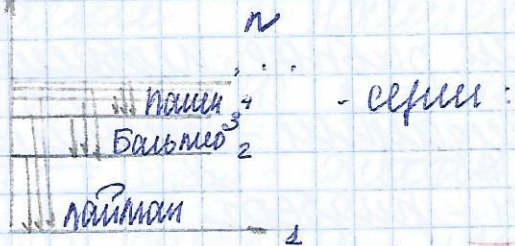
$$\hbar\omega = E_2 - E_1 = \frac{me^4 z^2}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\omega = \frac{me^4 z^2}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$R_{\infty} = \frac{m e^4}{2 \pi^3 \hbar^3} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0^2} - \text{постоянная Ридберга}$$

(масса ядра велика и оно неподвижно)

$$R = \frac{R_{\infty}}{1 + m/M}$$

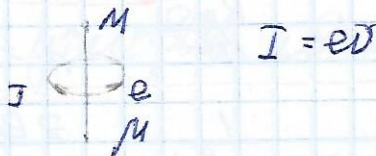


система уровней - система термов:

$$T_n = \frac{R}{n^2} = \frac{E_n}{\hbar}; \quad W_{12} = T_2 - T_1 = \frac{R}{n_2^2} - \frac{R}{n_1^2}$$

$$E_{св} = E_{ион} = \hbar R Z^2$$

Магнитный момент



$$\mu = I S / e; \quad \mu = \frac{e v \pi r^2}{c}$$

$$2 \pi r v = v \Rightarrow \mu = \frac{e r v}{2 c} = \frac{e m}{2 m c} \quad (\mu - \text{орбитальный момент})$$

$$\frac{\mu}{m} = \frac{e}{2 m c} - \text{гиромагнитное соотношение}$$

$$\mu = \mu_B n; \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m c} = 9.27 \cdot 10^{-24} \frac{20 \text{ эрг}}{\text{Гс}} - \text{Бора}$$

Боровская орбита

$$\psi = A \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right) \quad f = ? : \int \psi^2 dV = 1 = \int \psi^2 4 \pi r^2 dr = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} \quad f = \psi^2 4 \pi r^2 = \frac{4}{a_B^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right)$$

$$\frac{df}{dr} = 0: \quad r_m = a_B \Rightarrow f_m = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3} \quad \text{пусть } f(a_B, \delta r) = 2 f(a_B) \delta$$

$$\frac{2\delta}{a_B} = \ln 2 + 2 \ln\left(1 + \frac{\delta}{a_B}\right) \Rightarrow \delta = 0.8 a_B \Rightarrow A = 1.6 a_B^{-3/2}$$

из графика $\delta = 0.8 a_B$

Простейшие модели квантовой механики
и их физические реализации. Свободная
частица. Частица в прямоугольной потенциальной яме

Собственные значения энергии E_n
могут быть дискретными или
непрерывными. Решение уравнения
Шредингера для энергии E позволяет
найти распределение вероятностей
местонахождения частицы и физических
величин.

Одномерная прямоугольная
потенциальная яма:



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

граничные условия:

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\psi(l) = A \sin kl = 0$$

$$kl = \pm \pi n$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3$$

Дискретный спектр энергии

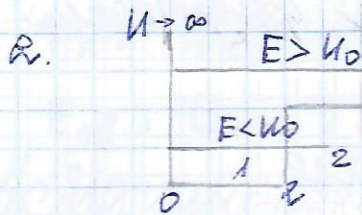
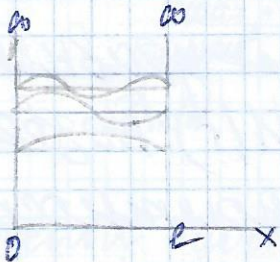
$$\psi(x) = A \sin(n\pi x/l)$$

Условие нормировки

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$$

$$A^2 \cdot \frac{l}{2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n=1, 2, 3$$



Если $E < U_0$ - частица в потенциальной яме (в связанном состоянии)

$$\psi_1'' + k^2 \psi_1 = 0 \quad k^2 = 2mE/\hbar^2$$

$$\psi_2'' + \kappa^2 \psi_2 = 0 \quad \kappa^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2$$

$$\psi_1(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

$$\psi_2(x) = B e^{-\kappa x} + C e^{\kappa x}$$

Граничные условия:

$$\psi_1(l) = \psi_2(l)$$

$$\psi_1'(l) = \psi_2'(l)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1(l) = \psi_2(l) \\ \psi_1'(l) = \psi_2'(l) \end{array} \right\} \text{tg } k l = -\frac{k}{\kappa}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin k l = \pm \frac{k}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}} \quad (\text{корни графически})$$

0 e x

При $E < U_0$ спектр собственных значений складывается дискретными. Эти значения соответствуют связанным состояниям. Такая яма может не содержать ни одного уровня, и движение будет инфинитно.

Свободная частица - частица,

не взаимодействующая с другими телами и имеющая только кинетическую энергию.

Частица в потенциальной яме рассматривается как свободная в $E < U_0$, возникают колебания при отражении частицы от края ямы.

В яме частица может находиться в квантовом состоянии, но даже

несмотря на недостаток энергии
она с определенной вероятностью
может покинуть потенциальную
яму - туннелировать

В качестве частицы в потенциальной
яме рассматриваются электроны
в кристаллической решетке

Для описания произвольной формы
 α -распад
эмиссия электронов

Бишет №8.

Уравнение Шредингера. Стационарные состояния
Принцип суперпозиции. Статист. смысл
волновой ф-ции. Операторы. E_V и E_Z . Проблема
дновременного измерения.

В соответствии с корпускулярно-
волновым дуализмом в квантовой
теории состояние частицы задается
волновой функцией $\psi(r, t)$, которая
считается комплексной величиной
и формально обладает волновыми
свойствами.

Вероятность нахождения частицы
в объеме dV определяется как

$$dP = |\psi|^2 dV = \psi \psi^* dV$$

Плотность вероятности $\rho = \psi \psi^*$ —

экспериментально наблюдаемая величина.

ψ определяется с точностью до множителя.

$$\int |\psi|^2 dV = \int \psi \psi^* dV = 1$$

Интеграл берется по той области,

В которой Ψ отлична от нуля.

Принцип суперпозиции:

(аналогично принципу суперпозиции
векторных полей в электродинамике)

Если у некоторой системы возможно
состояние Ψ_1 и Ψ_2 , то для нее существуют
такие состояния $\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$.

Принцип суперпозиции согласуется
с экспериментальными наблюдениями.

Уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi$$

Стационарные состояния - состояния,

в которых все наблюдаемые величины
не меняются с течением времени.

В стационарном состоянии

$$\Psi(r, t) = \psi(r) e^{-i\omega t}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$P = \Psi \Psi^* = \psi(r) \cdot \psi^*(r)$ - плотность вероятности
от времени не зависит

$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi = E\psi$ - уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

В теории Шредингера квантование возникает автоматически. $\psi(r)$ должна быть конечно, однозначна, непрерывна и гладка во всем пространстве.

Решения существуют только при некоторых значениях E -

собственные значения, а ψ - собств. ф-ции.

Собственное значение: $\hat{A} \psi(r, t) = a \psi(r, t)$

Собственные функции: $\hat{A} \psi_n(r, t) = a_n \psi_n(r, t)$

Собственные функции ψ_n стационарных состояний являются собственными функциями оператора Гамильтона:

$$\hat{H} \psi_n(r) = E_n \psi_n(r)$$

Частица имеет дискретный спектр, если ее движение финитно-связанное состояние.

Операторы: т.к. $|\psi|^2$ - плотность вероятности

$$\langle x \rangle = \int x \psi \psi^* dx$$

импульс: $\hat{p} = -i\hbar \nabla = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$

$$\hat{p}_x \psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} C \exp[i(\omega t - kx)] = \hbar k C \exp[i(\omega t - kx)] = p \psi$$

энергия: $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = \frac{p^2}{2m} \psi$ - кинетич.

и: $U(r) \psi(t)$ - потенциальная

полная энергия $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$ - Гамильтон

координата $\hat{x} \psi = x \psi$

Момент импульса $M = r \times p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle$$

Проблема одновременного определения
В природе объективно не существует
восточный гасица с точно определенными
значениями x и p и E и t . Макроск. измерения
применяют или неответственное класс
перешагивает. Все положение известно
с неопределенностью Δx , то p можно
измерить только с $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$. Кроме того,
измерения выдают нам состояние системы.

- Линейная кристаллическая решетка
на примере двухатомной цепочки. Фононы.
Многомерность решетки классической
модель. Модель Фантёбна.

Спектр колебаний кристалла и канцого
атомов определяется все вместе связанных
атомов.

Переход энергии атомов решетки в
возбужденное состояние - возбуждение
квантов нормальных колебаний -
элементарных волн ($\hbar\omega = 0$) $\omega = v_s q$ -

раскладывая элементарную волну на две
бегущие в противоположных векторах q .

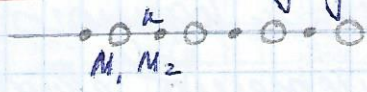
Можно представить как совокупность
квантов, каждый из которых имеет
энергию $E = \hbar\omega$ и импульс $p = \hbar q$ —
фотон (квант света, квант звука)
фонон - бозе-частица.

Полное число различных значений q равно
числу связей между нормальными колебаниями,

определяемое значением ν .

$$\frac{(4/3) \pi q^3}{(2\pi/\lambda)^3} = \nu \quad \nu_{\max} = \left[\frac{3\pi^2 \nu}{h^3} \right]^{1/3}$$

состояний ν $q > \nu_{\max}$ не существует.
 Фононы в двухатомной цепочке:



Пусть атомы связаны пружинами с жесткостью k :

$$M_1 \ddot{x}_{2n} = k(x_{2n+1} + x_{2n-1} - 2x_{2n})$$

$$M_2 \ddot{x}_{2n+1} = k(x_{2n+2} + x_{2n} - 2x_{2n+1})$$

Решение будем искать в виде колебаний

$$x_{2n} = C_1 e^{i(\omega t + 2nqa)}$$

$$x_{2n+1} = C_2 e^{i(\omega t + (2n+1)qa)}$$

$$- \omega^2 M_1 C_1 = k C_2 (e^{iqa} + e^{-iqa}) - 2k C_1$$

$$- \omega^2 M_2 C_2 = k C_1 (e^{iqa} + e^{-iqa}) - 2k C_2$$

$$\det = 0 : \omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 qa}{M_1 M_2}}$$

Ваш $qa \ll 1$ $\omega_+ \approx \sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}$ $\omega_- = \sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}} \cos qa$

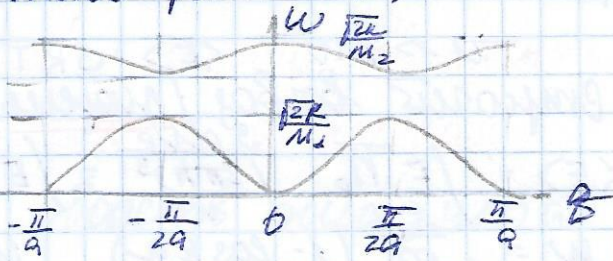
закон дисперсии для акустической ветви.

В первой ветви ω_- - одинаковая амплитуда

и смещение.

Во второй ветви ω_+ - в противофазе и

в направлении симметрии. Симметрия
 относительно центра масс равна 0. —
 оптическая ветвь.



Температура решетки:

$$c = - \frac{d(E)}{dT}$$

3. $T \ll T_D$

$$w = v_{gr} q$$

$$kT = \hbar w_T = \hbar v_{gr} q_T \Rightarrow q_T = \frac{kT}{\hbar v_{gr}}$$

$$N_T = \frac{4/3 \cdot \pi q_T^3}{(2\pi/L)^3} = \frac{(kT)^3 L^3}{6 \cdot \pi^2 (\hbar v_{gr})^3}$$

$$E = 3 N_T \cdot kT = 3 \pi^2 \frac{(kT)^4 L^3}{(\hbar v_{gr})^3}$$

$$c = \frac{dE}{dT} = \frac{4 k^4 L^3}{3 \pi^2 (\hbar v_{gr})^3} T^3$$

$c \propto T^3$ - закон Дебая ($T \leq T_D / 10$)

4. $T \gg T_D$, $E = N_T kT = 3 \frac{\hbar^3 kT}{a^3} \quad c_0 = \frac{3kL^3}{a^3}$

$c = 3R$ - закон Дюлонга и Пти

Модель Эйнштейна

кристалл - совокупность независимых
 осцилляторов с частотой ω_0 .

$$\langle E \rangle = 3 N_A \hbar \omega_0 \langle n_{\omega_0} \rangle = 3 N_A \hbar \omega_0 \left[\exp \frac{\hbar \omega_0}{kT} - 1 \right]$$

$$e = \frac{\partial E}{\partial T} = 3R \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right)^2 \exp \left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right) \left(\exp \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right) - 1 \right)^{-2}$$

Мал $kT \ll \hbar \omega_0$ $e = 3R \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right)^2 \exp \left(-\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right)$

$kT \gg \hbar \omega_0$ $\langle E \rangle = 3RT$ $e = 3R$

Смпоуи? Вывод (модель Дебая)

$$\langle E \rangle = \int E \bar{n}_p \frac{3 dV_p}{(2\pi\hbar)^3} = \int E \frac{1}{\exp \frac{E-p}{kT} - 1} \frac{3V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi p^2 dp$$

$$W = \frac{p^2}{m} (1 - \cos ka) \quad W \approx ka \frac{p}{m}$$

$$\langle E \rangle = \int E \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) \frac{3V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4\pi E^3 dE}{v_{gr}^3}$$

$$\langle E \rangle = \frac{3V \cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{v_{gr}^3} (kT)^4 \int_0^{x_{max}} x^3 \exp(-x) dx = \dots$$

// $x = \frac{E}{kT}$ //


$$e = \left(\frac{2\pi^2}{5} \right) \cdot \frac{k^4 a^3 N_A T^3}{(\hbar v_{gr})^3} = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3$$

Бшст 19

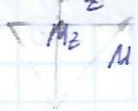
Атом. Момент импульса и моменты
момента электронов и атомов. Спонтан.
Итерна и герлаха. Спин электрона.

Атом - носитель свойств элемента
состоит из ядра и электронов.

Временная модель - развитие
планетарной модели Бора-Резерфорда.

 Свойства определяются конфигурацией
электронной оболочки

Момент импульса. Направлен M
перпендикулярно, т.к. задается только
только одно проекцией. Вектор M
размазан по образующим конуса,
ось которого совпадает с осью z .



$$\hat{M}^2 \psi = M^2 \psi$$

$M^2 = l(l+1)\hbar^2$, где l - орбитальное квантовое число.

$M = \hbar \Gamma(l+1)$ - дискретная величина. Классический момент $[r \times p]$ зависит от точки O . Оператор момента импульса не зависит от выбора точки, а зависит только от направления оси.

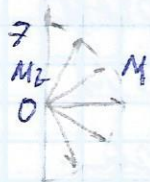
Для проекции: $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi = M_z \psi$ | $\psi = c e^{i m \varphi}$

$$\psi = c e^{i m \varphi}, \quad m = \frac{M_z}{\hbar}$$

Угловая, значит $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi) \Rightarrow$

$$M_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

z произвольна, значит, проекция на любое направление квантуется. m - магнитное квантовое число.



Каждому соответствует $2l+1$ - суперпозиция состояний, отличающихся m . \Leftrightarrow

Состояния в заданном l вырожденные по m , причем кратность вырождения

$$2l+1$$

Аналогично орбитальному моменту спин
электрона: $M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$, $s = \frac{1}{2}$ s-спиновое
квант. число.

Полный момент импульса: $M_j = M_l + M_s$

$M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}$ $j = l + s = l \pm \frac{1}{2}$ - квантовое
число полного
момента.

Для атома как системы частиц

$M_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ - суммарный орбитальный
момент, l - орбитальное кв. число.

Суммарный спиновый момент системы

$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$ s-спиновое число

В многоэлектронном атоме можно
можно характеризовать орбитальным
и спиновым моментами.

Наиболее распространено явление
связь Рессея - Саундера: орбитальные
момента взаимодействуют между собой
сильнее, чем со спиновыми моментами.

Орбитальные складываются в M_l ,
спиновые - в M_s . $M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}$
 j - квантовое число полного момента.

такой вид связи присущ и жемчужинам и
и естественным магнетитовым атомам.

Другой вид связи - спин-орбитальная.

$M_j = \sum m_j$ - характер магнетитов, но дост.
близкая.

Магнитный момент.

$$J = e\omega; \mu = JS/e = \frac{e\omega \pi r^2}{e}$$

$$2\pi r D = v \Rightarrow \mu = \frac{e r v}{2e} \quad M = \gamma m \vec{v} - \text{момент импульса}$$

$\mu = -\frac{eM}{2m_e}$ - гиромагнитное соотношение

$\mu = \mu_B N$, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ - магнетон Бора

$$\hat{M}_z = -\frac{e}{2m_e} M_z$$

В стационарном состоянии определенное

значение могут иметь только модуль

магн. момента μ_z и одна из его проекций

$$\mu_z = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_{lz} = -\mu_B m_l \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Опыт Штерна и Герлаха

Пучок атомов пропускается сквозь неоднородное магн. поле. После прохождения пучок попадает на фотопластинку и оставляет след.



$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

При выполнении поле наблюдалось расщепление пучка, что свидетельствует о квантовании проекции магнитного момента μ_z .

Четное число компонент - у атомов, обладающих только орбитальным M_L . Если момент является суммой орбитального и спинного, то число компонент может быть как четным, так и нечетным.

Спинный магнитный момент проекция μ на направление поле равна μ_B , что приводит к гиромагнетному отношению, в 2 раза превышающее исходное.

спин обладает удвоенным магнитным
моментом еще одним доп. вол-
новым у электрона спина.
Квант магнитной энергии:

$$M = -\mu_B g \sqrt{S(S+1)}$$

$$M_z = -\mu_B g m_s$$

где g - фактор Ланде $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2S(S+1)}$

$$\underline{g.2 = g.1.}$$

Эмит №10

Спин электрона. Принцип Паули.
Структура и спектры сложных
атомов. Система единиц, об,
Характеристические спектры

Гаунгсмит и Шмидт 1925.

гипотеза о наличии у электрона
собственного момента, названного спином.
Спин характеризует внутреннее свойство
электрона порою массе или заряду.

$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$ $s = \frac{1}{2}$, s -спиновое
квантовое число.

$$M_{sz} = \hbar m_s, \quad m_s = \pm s$$

Экспериментально установлено, что
число возможных значений проекции $= 2 \Rightarrow \pm \frac{1}{2}$
электрона в атомах могут
находиться в различных состояниях s_x ,
которым соответствуют разные
наборы квантовых чисел n, l, m_l, m_s или
 n, l, j, m_j . По мере увеличения

номер а атома происходит определение
 заполнения электронных уровней атома
 принцип Паули: в любом квантовом
 состоянии может находиться не более
 одного электрона.

данному значению n соответствует $4n^2$ орбит.

n	1	2	3	4	5	6
об	k	L	M	N	O	P

Оболочки подразделяют на подоболочки:

число состояний $2(2l+1)$ 1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d;

Полностью заполненные оболочки и
 подоболочки имеют $l=0, S=0, J=0$.

Периодическая система:

Качество следующей атомной орбитали
 из предыдущего добавлением заряда ядра
 на единицу и добавлением одного
 электрона

	$1s$	$2s$	$2p$
H	1		
He	2		
Li	2	1	
Be	2	2	
B	2	2	1

1. Распределение электронов по восточным электронная конфигурация
2. Заполненная оболочка - замкнутая электронная подсистема эквивалентна ^{какой} до к заполнение идеальное. В к происходит обр.

4. Возможность объяснения поведения внешних валентных электронов.

Правила Хунда.

3. Минимально энергия обладает терм с

наибольшим S и наибольшим L

Р. $J = \begin{cases} |L - S|, & \text{если заполнена менее, чем } \frac{1}{2} \\ L + S, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Характеристические спектры.

Рентгеновские спектры, возникающие

при бомбардировке электродами

анода трубки, являются характ. и

интегральными.

Спонтанные возникают при торможении

быстрых электронов в веществе

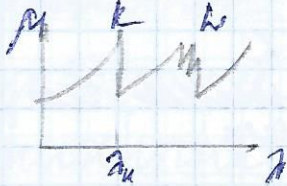
анода - сплошное тормозное излучение.

При повышении U появляется
интенсивный спектр, зависящий от
материала анода.

1. с ростом z смещаются в коротковолн. сторону
2. Одиночные, возникают при переходах
во внутренних частях атома.
3. Составляет из нескольких спектров.

Можно установить закон, согласно
которому $w = \frac{3}{4} R (z - \sigma)^2$, $\sigma \approx 1$

Особенности спектра поглощения



лучь возбуждается k -уровню.

Интенсивность уменьшится.

с λ_k энергии не хватает,

чтобы возбудить k -уровень. - k -край

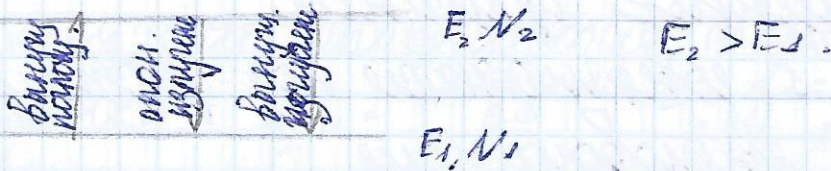
полюса поглощения. $E_k = h w_k = \frac{1,24}{\lambda_k} \text{ кэВ}$

Расщепление происходит из-за кон-волн

системы в каждой оболочке.

представили о квантовой теории излучения света атомами. Типа переходов. К-ты Эйнштейна. ТД равновесие. Формула Планка.

Рассмотрим упрощенную модель атомной системы.



Между двумя уровнями происходит переход, характеризующийся частотой

$$\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

1. Резонансное поглощение фотонов частотой ω_{12} , при котором атом переходит с нижнего уровня на верхний. скорость переходов:

$\frac{dN_2}{dt} = B_{12} N_1 \rho_\nu$, где B_{12} - к-т Эйнштейна для поглощения, $[Юм^{-2} м^3 е^{-2}]$, $B_{12} \rho_\nu$ - вероятность на единицу времени

2. Спонтанное излучение, атом переходит из состояния 2 в 1.

$\frac{dN_{2en}}{dt} = [A_{21}N_2, A_{21}\Gamma_0^{-1}]$ - к-т Эйнштейна для спонтанных переходов - вероятностей переходов в единицу времени.
Спонтанное излучение некогерентно

3. вынужденное излучение

Переход 2-1 совершается под действием внешнего светового поля

$$\frac{dN_{2вон}}{dt} = [B_{21}N_2\rho_\nu]$$

B_{21} [$\text{см}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-1}$] - к-т Эйнштейна для вын. излучения.

Излучающей квант полностью когерентен с внешним полем.

балансные уравнения:

$$dN_1 = dN_{2en} + dN_{2вон} - dN_{1por}$$

$$dN_2 = dN_{1por} - dN_{2en} - dN_{2вон}$$

популярные кинетические уравнения

$$dN_1 = \{ (A_{21} + \rho_\nu B_{21})N_2 - B_{12}\rho_\nu N_1 \} dt$$

$$dN_2 = \{ B_{12}\rho_\nu N_1 - (A_{21} + \rho_\nu B_{21})N_2 \} dt$$

и-ты Янштейна не являются независимыми:

1) $dN_1 = 0$ и $dN_2 = 0 \Rightarrow A_{21} + \rho_\nu B_{21} N_2 = B_{12} \rho_\nu N_1$

2) В-н Больцмана: $\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$

3) Энергетическая плотность равновесного излучения определяется формулой Планка $\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} = \frac{8\pi h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

Термодинамическое равновесие может быть установлено при любой температуре. При термодинам. равновесии количество переходов $2 \rightarrow 1$ будет равно количеству переходов $1 \rightarrow 2$, т.е. Потенциальная энергия будет равна кинетической. Такое состояние описывается равновесным излучением черного тела и формулой Планка.

Решая 1 и 2, получим $\rho_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{B_{12}/B_{21} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$. Сравнивая с формулой Планка,

можно установить, что

$$B_{12} = B_{21}$$
$$A_{21} = \frac{8\pi h \omega^3}{e^3} B_{21}$$

существует также спектральный к-т
Эйнштейна B_{12} [$\text{Дж}^{-1} \text{м}^3 \text{с}^{-2}$]

коэфф. усиления $g(\omega) = \left(\frac{h\omega}{e}\right) B_{21}(N_2 - N_1)$

Домашн. 11

$$11.1 = 7.2.$$

Представим о квантовой теории излучения атомами. Связь времени жизни с шириной спектральной линии. Механизм уширения. Мошши естественные

Вопросо квантовой теории атома — может существовать шире в определенных состояниях с энергиями E_1, E_2 .

При переходе из одного состояния в другое, атом излучает шире пошощает квант света с частотой

$$\nu_{k\bar{n}} = \frac{E_k - E_n}{h}$$

Для атома с одним электроном на внешней оболочке $E_n = -\frac{Rz^2}{n^2}$

$$\nu_{k\bar{n}} = \frac{Rz^2}{h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

В основном состоянии с наименьшей энергией изолированной атом может находиться бесконечно долго. Внешне шире ν в возбужденном состоянии

конечно, поэтому уровень энергии, соответствующий
этой энергии естественно имеет конечную
ширину $\Delta E = h\Delta\nu$, где $\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$.

В результате спектральная линия
будет иметь ширину $\Delta\nu$. конечность
 τ обусловлена радиационными потерями
излучающего электрона при движении
вокруг ядра. Но есть еще случаи,
когда на атом не действуют никакие
силы, спектральная линия имеет
естественную ширину.

Дополнительное уширение возможно:

- при столкновениях (Дор) ↓
 - при тепловом движении (Доплер)
- Люминесценция - свечение, представляющее
собой излучение под тепловыми излучениями
и преобладающее в течение времени
превосходящее период колебаний.
(свечение минералов, минералов
и люминофоров)

Люминесценцию называют хемилюминесценцией.

По длительности свечения различают флуоресценцию ($\tau \sim 10^{-8} - 10^{-9} \text{ с}$) и

фосфоресценцию ($\tau \sim 10^{-2} - \text{часы}$)

При воздействии внешнего излучения атом переходит в возбужденное состояние, затем может безызлучательно перейти на другой энерг. уровень и только после этого излучить квант.

Как правило, безызл. переход происходит на более низкие уровни, поэтому спектр свечения в области низкой частоты (стоксова люминесценция) (всегда λ -возрастает - антистоксова)

Тушение - уменьшение люминесценции при увеличении вероятности безызлучательных переходов. Происходит при повышении T , n , при смешивании

// Пусть дипольный момент изменяется
по закону $p(t) = \frac{\omega_0^4 \cdot p_0^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$ - мощность
 $p(t) = p_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t$

Постоянная радиационного затухания
 $\tau = \frac{12\pi m^3 \omega_0^3 c^3}{e^2 \omega_0^2} \Rightarrow$ Любая зарядящаяся
частица излучает энергию в течение
времени τ . Спектр излучения
затухающего тока - порому. Радиационная
затухание определяет естественную
ширину спектральной линии.

Билет 12.

Простейшие модели квантовой механики,
гармонический осциллятор

Квантовый гармонический осциллятор -

поведение частицы массы m в потенци

энергии $U(x)$ таково же, как у классич

осциллятора $U = \frac{\mu x^2}{2}$ $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

полная энергия $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Ур-ие Шредингера:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi$$

Состояние гармоник осциллятора дискретно

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

$\psi_0 = A_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$ удовлетворяет

уравнению $\hat{a} \psi_0(x) = 0$

$$\hat{a} \psi_0 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) = 0$$

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0 \Rightarrow E = \hbar\omega/2$$

$E_0 = \hbar\omega/2$ - основное состояние осциллятора
 Меньшие значения энергии осциллятора
 невозможны в соответствии

с соотношением неопределенности
 Гейзенберга

$$E_{\max} = \frac{p^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \hbar\omega/2 \quad \Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{m\hbar\omega} \frac{\sqrt{\hbar\omega}}{\beta} = \hbar\omega \frac{\sqrt{m}}{\beta} = \hbar$$

$$\psi_n = \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \dots}_n \psi = (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x)$$

Для $n=1$: $\psi_1 = \hat{a}^\dagger \psi_0$ - $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$$\frac{1}{\hbar\omega} \hat{H}\psi = [\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}]\psi = [\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}]\hat{a}^\dagger\psi_0 =$$

$$= (\hat{a}^\dagger |1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger)\psi_0 = \frac{3}{2}\hat{a}^\dagger\psi_0 = \frac{3}{2}\psi_1$$

По индукции: пусть $\frac{1}{\hbar\omega} \hat{H}\psi_n = (n + \frac{1}{2})\psi_n$

$$\frac{1}{\hbar\omega} \hat{H}\psi_{n+1} = (n+1 + \frac{1}{2})\psi_{n+1}$$

$$\frac{1}{\hbar\omega} \hat{H}\psi_{n+1} = (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\hat{a}^\dagger\psi_n =$$

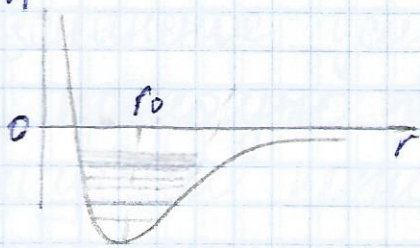
$$= (\hat{a}^\dagger |1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger)\psi_n = [\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \hat{a}^{\dagger 2}]\psi_n =$$

$$= \hat{a}^\dagger(n + \frac{1}{2})\psi_n + \hat{a}^{\dagger 2}\psi_n = (n+1 + \frac{1}{2})\psi_{n+1}$$

Поэтому, что $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

Минимальная энергия $E = \frac{\hbar \omega}{2}$ — нулевая энергия частица не может "изничтожить" в квантовой точке потенциальной ямы.

к осциллятору вводится возмущение — колебательная молекула.



Атомы в молекуле совершают колебания относительно

равновесного расстояния r_0 .

Низкие колебательные уровни выглядят так, как уровни гармонического осциллятора.

Наличие дискретных уровней приводит к появлению колебательно-вращательного спектра.

Ангармоничность проявляется при увеличении интенсивности колебаний. Энергетические уровни сдвигаются.

Визит 13.

13.1 = 4.2

Резонансное усиление света. Уинберская
замкнутость. Лазер. Резонатор. Условия
генерации. Меры. Характ. излучения

Резонансное усиление света достигается
с помощью вынужденного
излучения, которое поперечно к
вынуждающему. Для усиления поперечно
излучения лазера необходимо добиться,
чтобы вынужденное излучение
преобладало над спонтанным
излучением. Для этого необходимо
создать в активной среде лазера
высокую плотность излучения на
частоте излучения лазера. Это
достигается путем помещения
активной среды в оптический
резонатор, состоящий из двух параллельных

зеркал. Одно из них - зеркальное, имеет $R \sim 99\%$. Второе - полупрозрачное - $R \sim 50-97\%$. - через него выводится излучение.

2. Помощники света. Для этого необходимо создать в активной среде инверсную населенность, т.е. $N_2 > N_1$. Для этого используют механизмы накачки: оптическое излучение, электрический разряд, ток, химическая реакция.

Работа лазера:

Источник накачки создает инверсную населенность, возникает спонтанное излучение, излучение, распространяющееся вдоль оси резонатора. В результате многократного отражения от зеркал порождает выходящее излучение, которое когерентно усиливается при прохождении среды с инверсной

намагниченностью.

Условие стационарной генерации

$$dN = dN_{21} - dN_{12} = (N_2 B_{21} - N_1 B_{12}) U \omega dt =$$
$$= (N_2 - N_1) B_{21} U \omega dt$$

Пусть $\Delta \omega \ll \omega$: $U \omega = \frac{U}{\Delta \omega}$

$$dU = dN \cdot \hbar \omega$$

$$dI = dU \cdot e = dN \cdot \hbar \omega \cdot e$$

$$dI = (N_2 - N_1) B_{21} \cdot U \omega \cdot \hbar \omega \cdot e dt = (N_2 - N_1) B_{21} \frac{U}{\hbar \omega \cdot e} \frac{dI}{e} =$$
$$= \frac{\hbar \omega}{c \Delta \omega} (N_2 - N_1) B_{21} \cdot I dz \Rightarrow I(z) = I_0 e^{\theta z},$$

$$B = \frac{\hbar \omega}{c \Delta \omega} (N_2 - N_1) B_{21}$$

Если длина элемента L , то

$$k = \frac{I(L)}{I_0} = e^{B L}$$

При $B > 0$ асимптотическое усиление

генерации: $k^2 R_1 R_2 \geq 1$

фазовое условие: $k = n \frac{\pi}{z}$ или

$\nu_n = n \Delta \nu$, где ν_n - номер резонатора,

$\Delta \nu$ - шестиподовой интервал.

$\Delta \nu_{раз} \gg \Delta \nu$, может одновременно

генерироваться несколько продольных мод.

существуют поперечные шоты,
находящиеся в поперечной плоскости
в виде отдельных точек. Для
устойчивых генераторов поперечных шот
используют сферические зеркала,
установленные конфокально.



Решим синхронизацию шот.

Если в какой-то момент фазы всех
шот одинаковы ($\pm n\pi$), то в результате
сложения амплитуд $I = N^2 I_0$.
через время $\tau = \frac{L}{\Delta v} = \frac{2L}{c}$ вновь
все шоты окажутся в фазе

Для уменьшения потерь выходное
окно лазера располагается под углом
Бристера. Р-компонента проходит,
З-отражается. Излучение ЛП, пространственно
и временно когерентно, монохроматично и направлено.

$$14.1 = 1.2 \quad 14.2 = 10.2$$

Бином 15

$$15.1 = 5.2$$

Динамика решетки. Фонона. Мембранный
решетки. Модель Дебая. Температура

Дебая

Фонон - квант звука, бозе-частица
возбуждение атомов рассматривается
как возникновение квазичастиц, описывающих
коллективные колебания.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$$M_1 \ddot{X}_{2n} = k (X_{2n+2} + X_{2n-1} - 2X_{2n})$$

$$M_2 \ddot{X}_{2n+1} = k (X_{2n+2} + X_{2n} - 2X_{2n+1})$$

$$X_{2n} = C_1 e^{i(\omega t + 2na)}$$

$$X_{2n+1} = C_2 e^{i(\omega t + (2n+1)a)}$$

$$-\omega^2 M_1 C_1 = k C_2 (e^{i2a} + e^{-i2a} - 2) - k C_1$$

$$-\omega^2 M_2 C_2 = k C_1 (e^{ia} + e^{-ia}) - k C_2$$

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right)^2 + \frac{4 \sin^2 a}{M_1 M_2}}$$

ω_+ - акустическая ветвь: конденсат
переходит в однородное амплитудное

ω практически линейно

$\omega \propto$ — оптическая ось, колебание в направлении

ω в различных амплитудами. Положение центра масс равно 0.

Модель Дебая рассматривает колебания кристаллической решетки как газ фотонов.

$$\langle E \rangle = \sum \langle n_k \rangle \hbar \omega_k = \int \omega(\omega) \hbar \omega d\omega$$

$$\langle E \rangle = \int E \pi \frac{dV p}{(2\pi \hbar)^3}$$

степень поперизации

$$\langle E \rangle = \int E \frac{1}{\exp\left(\frac{E-M}{kT}\right) + 1} \frac{3V}{(2\pi \hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

Приближения: фотонов много

энергии много

можно

$$\omega \approx \frac{\hbar \omega}{m} \frac{ka}{2} = \frac{\hbar \omega}{m} ka$$

$$p = \frac{E}{v_{3B}}$$

$$\langle E \rangle = \int E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{3V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{4\pi E^2 dE}{v_{3B}^3} =$$

$$= \frac{3V 4\pi}{(2\pi \hbar)^3} \frac{1}{v_{3B}^3} (kT)^4 \int_0^{x_{max}} x^3 \exp(-x) dx \Rightarrow$$

$$\langle E \rangle \propto T^4$$

$$C = \frac{dE}{dT} \propto T^3$$

При низких температурах

Эйнштейн - закон Дебая

В пределе высоких температур

С → 3R - закон Дюлонга - Пти

При $T \neq 0$ K кристалл находится

в возбужденном состоянии. При повышении

температуры возбуждаются колебания

($\omega_{min} \sim 10^4 - 10^5$ Гц при $T \sim 10^0$ K)

При дальнейшем повышении температуры

происходит два процесса:

з. Увеличивается число возбужденных

мог нормальных колебаний решетки

я. Увеличивается число квантов энергии

и у квантов мода

При $T_0 = \frac{\hbar \omega_{max}}{k}$, определено

максимальной частотой осциллятора

($\omega_{min} = 2\omega$) возбуждаются колебания

со всеми возможными частотами

- температура Дебая

При дальнейшем повышении T число
мез не изменяется, а увеличивается
только энергия.

$$T_D \sim (100 - 500) \text{ K}$$

T_D разделяет шкалу на две области
условно.

$$T = 0 \text{ K}$$

$$T > 0$$

$$T_D$$

нулевые
колебания

тепловые
возмущения

число \uparrow

Вышит 16

$$16.1 = 3.1.$$

Динамика кристаллической решетки
на примере одноатомной цепочки. Фононы.
Теплоемкость. Класс модели. Модель
Эйнштейна.

Переход системы атомов решетки
в возбужденное состояние - возбужден
квантов нормальных колебаний - стоячих
волн с $\nu_{gr} = 0$. Чтобы представить
возбужденным импульс, заведем
каждую стоячую волну двумя
бегущими навстречу и удовлетворяющими
граничным условиям Борна-Кармана
 $\psi(x+L) = \psi(x)$

В соответствии с принципом
корпускулярно-волнового дуализма,
бегущую волну можно представить
как совокупность частиц - квантов
с $E = \hbar \omega$ и $p = \hbar q$ - фононы.

Феноны - квазичастицы, описывающие коллективные возмущения кристаллической решетки

В одномерном случае все возможные значения волнового числа находятся

в интервале $-\frac{\pi}{a} \leq q \leq \frac{\pi}{a}$ - 1 зона

Бриллюэна. (на границе максимального значения волнового вектора указывает дискретность крист. структура)

~~.....~~

Модель одномерного кристалла:

цепочка состоит из периодически расположенных атомов массы m , связанных пружинами с жесткостью k .

$$m\ddot{x} = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1})$$

Ищем решение в виде бегущей волны $x_n = A e^{i(\omega t + qna)}$

x_n должна удовлетворять условию Борна-Кармана: $x(x) = x(x+L)$

$$\text{Мода } q_1 = \frac{2\pi}{\lambda a} = \frac{2\pi}{L}$$

L - длина ячейки

$$w = \pm 2\sqrt{\frac{\kappa}{M}} \sin \frac{qa}{2} = a \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \sin \frac{qa}{2} = w_{\max} \sin \frac{qa}{2}$$

$$w_{\max} = a \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

$$\| -w^2 M = \kappa (e^{iqa} - e^{-iqa}) \|$$

Частота колебаний атома не зависит от его порядкового номера, значит, все атомы колеблются с одинаковой частотой ω амплитудой - бегущая волна $w \propto (a \sqrt{\frac{\kappa}{M}}) \sin qa$ - звуковые волны, распространяющиеся в непрерывной

цилиндрической среде.

$$v_{\text{ф}} = \frac{d\omega}{dq} = a \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

Решеточная теплоемкость

$$C = \frac{d\langle E \rangle}{dT}$$

$\langle E \rangle$ - в фоновой модели - сумма средних энергий фононов в каждой моде.

Классическая модель: ?

$$T \ll T_D : \omega = v_{\text{ф}} q, \quad kT = \hbar \omega = \hbar v_{\text{ф}} q T$$

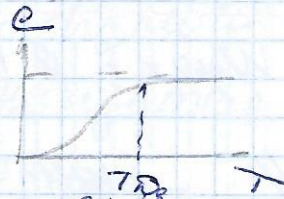
$$q_T = \frac{kT}{\pi V_{cp}} \quad \text{— площадь сечения}$$

$$N_T = \frac{\frac{4/3 \pi q_T^3}{(2\pi/L)^3} = \frac{(kT)^3 L^3}{8\pi^2/\pi V_{cp}} \quad \text{— число осцилляторов}$$

$$E = 3NkT = \frac{3(kT)^4 L^3}{8\pi^2/\pi V_{cp}}$$

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{4k^4 L^3}{8\pi^2/\pi V_{cp}} T^3$$

$$C = \frac{C}{V} = \left(\frac{4}{3\pi^2}\right) \frac{k^4 q^3 N_0}{(\hbar V_{cp})^3} T^3$$



$$T \gg T_0: E = N_T kT = 3 \frac{\hbar^3 k T^4}{a^3} \quad C = \frac{3k^4}{a^3} \rightarrow 3R$$

Модель Эйнштейна

кристалл — совокупность идентичных осцилляторов.

$$\langle E \rangle = 3N_0 \hbar \omega_0 \langle n \rangle = 3N_0 \hbar \omega_0 \frac{1}{\exp \frac{\hbar \omega_0}{kT} - 1}$$

$$C = \frac{dE}{dT} = 3R \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right)^2 \exp \left(- \frac{\hbar \omega_0}{kT} \right) \frac{1}{\left(\exp \frac{\hbar \omega_0}{kT} - 1 \right)^2}$$

При низких температурах $kT \ll \hbar \omega$

$$\langle E \rangle = 3N_0 \hbar \omega \exp \left(- \frac{\hbar \omega}{kT} \right)$$

$$C = 3R \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 \exp \left(- \frac{\hbar \omega}{kT} \right)$$

При высоких температурах $kT \gg \hbar \omega$

$$\langle E \rangle = 3RT$$

$$C = 3R$$

Бишет №17

17.1 = 2.2

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. p-n-переход

Валентная зона - самая высокая из разрешенных энергетических зон электронов твердого тела, в которой при $T=0K$ все энерг. состояния заняты. Зона проводимости - самая низшая зона, которая содержит свободные уровни в основном состоянии электронов валентной зоны

Электроны валентной зоны не участвуют в электропроводности, т.к. электроны не могут изменить энергию. Требуется конечная энергия возмущения $E > E_g$ для перевода e^- вверх через энергетическую щель в зону проводимости. Если E_g велика, то при температуре T в результате тепловых флуктуаций некоторое число

и перемещает из валентной зоны в зону проводимости. e^- и дырки будут носителями тока. С ростом T число e^- растет экспоненциально.

Такие вещества называются полупроводниками.
 $10^{-8} < \rho < 10^8 \frac{\text{Ом}\cdot\text{м}}{\text{м}}$

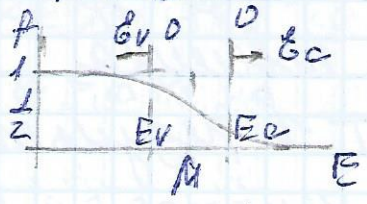
|| Существуют бесцветные полупроводники ||

Собственная проводимость:

Под воздействием T один из возбужденных электронов может оторваться и перейти в зону проводимости. На освободившееся место (дырку) может переместиться e^- из другой связи - дырка перемещается по полупроводнику. (дырки в валентной зоне)

Собственная полупроводника - идеальное тело?

при $T=0\text{K}$ зона проводимости свободна



концентрации электронов и дырок.

$$n_e = \int_0^{\infty} f(E_e + \epsilon_e) g_e(\epsilon_e) d\epsilon_e \quad n_v = \int_0^{\infty} [1 - f(E_v - \epsilon_v)] g_v(\epsilon_v) d\epsilon_v$$

$$f - f(\mu - \delta) = f(\mu + \delta) \Rightarrow 1 - f(E_v - \epsilon_v) = 1 - f(\mu - (E_v - E_v + \mu)) =$$

$$= f(\epsilon_v + 2\mu - E_v) \Rightarrow n_v = \int_0^{\infty} f(\epsilon_v + 2\mu - E_v) g_v(\epsilon_v) d\epsilon_v$$

При $k_B T \ll E_g = E_c - E_v$ электронный газ не вырожден.

$$f(E) = \exp\left[-\frac{(E - \mu)}{kT}\right] \quad D = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$$

$$n_e = \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\epsilon_e + E_c - \mu}{kT}\right] \sqrt{\epsilon_e} d\epsilon_e = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{\mu - E_c}{kT}\right] \int_0^{\infty} \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{\mu - E_c}{kT}\right] \quad n_v = 2 \left(\frac{m_v kT}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{\mu - E_v}{kT}\right]$$

$$n_e n_v = 4 \left(\frac{kT}{2\pi \hbar}\right)^3 (m_e m_v)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{kT}\right] \quad \text{Вместо}$$

полупроводника $n_e = n_v = n_i \left(\frac{kT}{2\pi \hbar}\right)^{3/2} (m_e m_v)^{3/4} \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right]$

$$\mu = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_v}{m_e} \Rightarrow \text{При } T=0 \quad \mu = \frac{E_c + E_v}{2}$$

При $T \neq 0$ электроны насыты и в зоне проводимости появляются e^- , в валентной зоне дырки.

При наших процессах электропроводность

$$\sigma = \sigma_a \exp\left[-\frac{E_a}{2kT}\right] + \sigma_0 \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right]$$

ишесная собственная

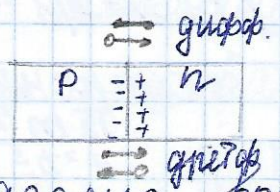
E_a - энергия активации ишески донор-ишес валентных электронов на единицу больше. Один электрон не захватывается связью и при комнатной температуре может оторваться

- проводник n-типа

аккумуляторная кристалл - захватывает в связи
электрон валентной зона, образуется дырка

- p-типа

p-n-переход



На границе раздела возникает диффузионный ток: e^- из n в p и дырки из p в n

Область на границе становится заряженной

Электрическое поле вызывает дрейфовый ток в противоположном направлении. Устанавливается

динамическое равновесие



равновесие

прямое напряжение

обратное напряжение

При прямом напряжении прямого напряжения потенциальный барьер снижается, диффузионный ток преобладает, быстро нарастает.

При обратном - область заряда увеличивается и ток через p-n переход не идет

Вит №13

18.1 = 5.1.

Модель газа свободных электронов
в металле. Среднее поле и давление.
Электронная теплоемкость.

Модель свободных электронов: свободная часть атомных электронов может свободно перемещаться по всему проводнику. При образовании кристаллической решетки от атомов отщепляются слабые связанные электроны. Именно они обеспечивают электропроводность. В первом приближении взаимодействия с ионами можно пренебречь и рассматривать электроны как идеальный газ, для которых решетка является потенциально жесткой.

$$N_s = \frac{4 \pi p_0^3}{3} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi\hbar)^3} E^{3/2} \frac{p_0}{2} = 12mE$$

$$N_s = \frac{4 \pi p_0^3}{3} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi\hbar)^3} E^{3/2} \frac{p_0}{2}$$

$$N_e = \frac{4 \pi p_0^3}{3} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi\hbar)^3} E^{3/2}$$

$$n = \int_0^{\infty} n_e \cdot f_e dE = \int_0^{E_F} \frac{\sqrt{2} m_0^{3/2}}{\hbar^2 \pi^3} \sqrt{E} dE = \frac{2\sqrt{2} m_0^{3/2} E_F^{3/2}}{3 \hbar^2 \pi^3}$$

Если исходить из плотности
квантовых состояний $g = \frac{\sqrt{2} m_0^{3/2} V \sqrt{E}}{\hbar^2 \pi^3}$
и $n = \int g f_e dE$.

Получаем: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}$ $P_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar$
 $k_{TF} = E_F$ или $T_F = \frac{E_F}{k}$ - температура Ферми

$$\langle E \rangle = \int_0^{P_F} \frac{1}{\Omega} \cdot v \cdot dV_p = \frac{8\pi}{\hbar (2\pi\hbar)^3} \int_0^{P_F} \frac{1}{\Omega} \cdot p^2 dp =$$

$$= \frac{8\pi}{2m_0 \hbar^3} \int_0^{P_F} p^4 dp = \frac{4\pi}{m_0} \frac{P_F^5}{5 \hbar^3 (2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi}{5} \frac{P_F^5}{m_0 \hbar^3 (2\pi\hbar)^3} =$$

$$= \frac{4\pi}{5m_0} \frac{1}{\hbar (2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3}{3\pi^2 \hbar^3} \right)^{2/3} \hbar^2 =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{P_F^2}{2m_0} = \frac{3}{5} E_F$$

Давление, которое оказывает газ
на стенку, определяется $\langle E \rangle$

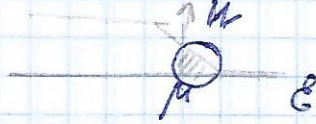
$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$$

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

$$p = \frac{2}{5} n \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{5m_0} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}$$

Электронная теплоемкость

$$C = \frac{dU}{dT}$$



$$\begin{aligned}
 U &= \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + 2kT} \frac{1}{V} (\epsilon - \epsilon_F) \left[1 - \frac{\epsilon - \epsilon_F}{2kT} \right] \rho(\epsilon_F) d\epsilon = \\
 &= \frac{1}{V} \rho(\epsilon_F) \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + 2kT} \left[\frac{(\epsilon - \epsilon_F)^2}{2} - \frac{(\epsilon - \epsilon_F)^3}{3kT} \right] d\epsilon = \\
 &= \frac{1}{V} \rho(\epsilon_F) \left[\frac{(2kT)^2}{2} - \frac{(2kT)^3}{3} \right] = \frac{1}{V} \rho(\epsilon_F) \frac{(2kT)^2}{8} = \\
 &= \frac{1}{12} \rho(\epsilon_F) (2kT)^2 = \frac{1}{3} \rho(\epsilon_F) k^2 T^2
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{2}{3} \rho(\epsilon_F) k^2 T - \text{теплоемкость}$$

$$\rho(\epsilon) = \frac{8\pi \sqrt{2m^3}}{h^3} \sqrt{\epsilon} - \text{плотность состояний}$$

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{dN}{dP} \frac{dP}{d\epsilon} & \epsilon &= \frac{V \cdot \frac{4}{3}\pi P^3}{(2\pi\hbar)^3} \\
 \rho &= \frac{4\pi P^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{dP}{d\epsilon} = \frac{8\pi P^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\sqrt{2m}}{2\epsilon} = \\
 &= \frac{V \sqrt{2} m^{3/2} \cdot (2m)}{\pi^2 \hbar^3 \epsilon} = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} V \sqrt{\epsilon}}{\pi^2 \hbar^3}
 \end{aligned}$$

$$\text{для единичного объема } \rho = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{\epsilon}}{\pi^2 \hbar^3}$$

$$19.1 = 6.1$$

$$19.2 = 6.2$$

$$20.1 = 7.1$$

$$20.2 = 13.2$$

$$21.1 = 8.1$$

$$21.2 = 8.2$$

$$22.1 = 9.1$$

$$22.2 = 4.1$$

$$23.1 = 10.1$$

$$23.2 = 1.2$$