Глава 15. Скалярные и векторные поля

15.1 Основные понятия и формулы

1. Скалярное поле. Пусть G — область в трёхмерном пространстве или на плоскости. Если каждой точке M области G поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$, то говорят, что в области G задано скалярное поле.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле плотности зарядов на какой-либо поверхности. Физические векторные поле не зависит от выбора системы координат: величина $u(M)$ зависит только от точки M и, быть может, от времени (нестационарное поле).

Если ~~...~~ ввести в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$, то скалярное поле будет описываться функцией трёх переменных: $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$. Поверхность, заданная уравнением $u(x, y, z) = C = \text{const}$ (т.е. поверхность, на которой функция $u(x, y, z)$ принимает постоянное значение), называется поверхностью уровня данного скалярного поля.

2. Векторное поле. Если каждой точке M области G поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле, создаваемое системой ~~...~~ электрических зарядов, характеризуется в каждой точке M вектором напряжённости $\vec{E}(M)$; магнитное поле, создаваемое электрическим током, характеризуется в каждой точке M вектором магнитной индукции

$\vec{B}(M)$; поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризуется в каждой точке M вектором силы $\vec{F}(M)$, которая действует на помещённую в точку M единичную массу; поле скоростей потока жидкости характеризуется в каждой точке M вектором скорости $\vec{v}(M)$.

При фиксированной системе координат $Oxyz$ векторное поле задаётся вектор-функцией трёх переменных $\vec{a}(x,y,z)$ или тремя скалярными функциями — её координатами:

$$\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}.$$

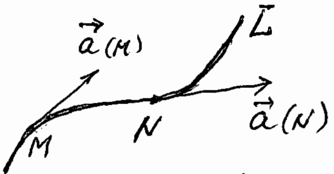


Рис. 15.1

Кривая L называется <u>векторной линией</u> векторного поля $\vec{a}(M)$, если в каждой точке M кривой L вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к этой кривой (рис. 16.1). Для электрического и магнитного полей, а также для поля тяготения векторные линии называются <u>силовыми линиями</u>, для поля скоростей — <u>линиями тока</u>.

В дальнейшем, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что функции, задающие скалярное или векторное поле, имеют непрерывные частные производные первого (а если нужно, то и второго) порядка.

<u>3. Производная по направлению и градиент скалярного поля.</u> Для скалярного поля (скалярной функции) $u(x,y,z)$ в главе 9 были введены понятия производной по направлению и градиента в данной точке M:

$$\operatorname{grad} u(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right\} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M) = (\operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{\ell}) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma,$$

где $\vec{\ell} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор заданного направления.

Данное определение градиента связано с выбором системы координат. Однако было показано, что на самом деле вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора системы координат, поскольку его направление (в данной точке) есть направление наибольшего роста функции в этой точке, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста поля $u(M)$ в этой точке. Если ввести другую систему координат, то координаты вектора $\operatorname{grad} u$ изменятся, но сам вектор, т.е. его длина и направление, останутся без изменений.

4. Дивергенция. Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Это определение связано с выбором системы координат. Ниже мы покажем, что на самом деле $\operatorname{div} \vec{a}$ не зависит от выбора системы координат, т.е. её величина для данной точки M не зависит от того, в какой системе координат рассматривается точка M.

Пример 1. Рассмотрим электрическое поле точечного заряда e, помещённого в начале координат (рис. 15.2):

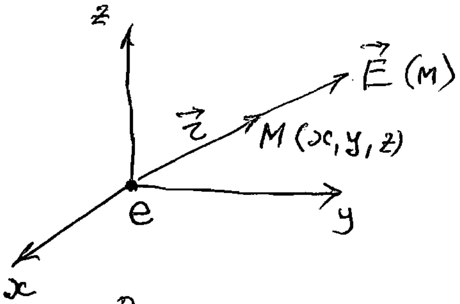


Рис. 15.2

$$\vec{E}(M)=\frac{ke}{r^3}\vec{r},\ \text{где}\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Вычислив частные производные, получим: $\operatorname{div}\vec{E}=0$ при $r\neq 0$, $\operatorname{div}\vec{E}=\infty$ при $r=0$.

Ниже мы покажем, что $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ характеризует плотность источников векторного поля $\vec{a}(M)$ в данной точке M. Этому вполне соответствует полученный результат для $\operatorname{div}\vec{E}$.

5. Ротор. Ротором (или вихрем) векторного поля $\vec{a}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ называется вектор-функция

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ниже будет показано, что: 1) $\operatorname{rot}\vec{a}$ также не зависит от выбора системы координат; 2) $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M.

Задание: вычислить $\operatorname{rot}\vec{E}$, где $\vec{E}(M)$ – напряженность электрического поля точечного заряда.

Рассмотренные функции $\operatorname{grad} u$ (для скалярного поля $u(M)$), $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{rot}\vec{a}$ (для векторного поля $\vec{a}(M)$) характеризуют соответствующее поле в каждой точке M, т.е. являются локальными характеристиками. Рассмотрим теперь две интегральные характеристики векторных полей, и инвариантное определение дивергенции.

6. Поток векторного поля. Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и пусть Φ - гладкая двусторонняя поверхность, лежащая в области G. Выберем одну из сторон поверхности, зафиксировав непрерывное векторное поле единичных нормалей $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности Φ

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности Φ. Так как векторы $\vec{a}(M)$ и $\vec{n}(M)$, а также поверхность Φ, не зависят от выбора системы координат, то и поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности не зависит от выбора системы координат.

Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ - скорость движущейся жидкости в точке M, то $\iint\limits_{\Phi}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds$ представляет собой количество (объём) жидкости, протекающей через поверхность Φ за единицу времени в выбранном направлении. Эта величина называется в физике потоком жидкости через поверхность Φ, поэтому название "поток" используется и в случае произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$.

Пример 2. Вычислим поток векторного поля $\vec{E}(M)$ через внешнюю сторону сферы Φ радиуса R с центром в начале координат (точке O), где $\vec{E}(M)$ – напряжённость электрического поля точечного заряда e, помещённого в точке O (рис. 15.3).

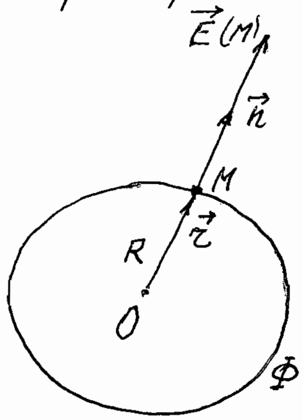


Рис. 15.3

Пусть $e>0$, тогда вектор $\vec{E}(M)$ направлен так, как показано на рис. 15.3,

$$|\vec{r}| = |\vec{OM}| = R, \quad \vec{E}(M) = \frac{ke}{R^3}\vec{r}, \quad (\vec{r}\cdot\vec{n}) = R,$$

поэтому

$$\iint_\Phi (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_\Phi \frac{ke}{R^3}(\vec{r}\cdot\vec{n})\,ds = \frac{ke}{R^2}\iint_\Phi ds = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

Пусть Φ – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область G, в которой задано векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, и пусть $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ в точке M. Запишем формулу Остроградского-Гаусса

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_\Phi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

в компактной векторной форме

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV = \iint_\Phi (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds. \qquad (15.1)$$

Формула (15.1) означает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали к поверхности равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области, ограниченной этой поверхностью.

Применим к тройному интегралу в левой

части равенства (15.1) формулу среднего значения:

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\cdot\iiint\limits_{G} dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\cdot V(G),$$

где M^* — некоторая точка области G, $V(G)$ — объём области G. Равенство (15.1) можно теперь записать в виде

$$\operatorname{div}\vec{a}(M^*) = \frac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}. \qquad (15.2)$$

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G и будем стягивать область G к точке M так, чтобы точка M оставалась точкой сжимающейся области G, а (стягивающаяся) поверхность Φ оставалась гладкой. Тогда $V(G)\to 0$, $M^*\to M$, а так как $\operatorname{div}\vec{a}$ — непрерывная функция, то $\operatorname{div}\vec{a}(M_*)\to\operatorname{div}\vec{a}(M)$. Поэтому из равенства (15.2) получим:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in G}} \frac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}. \qquad (15.3)$$

Так как поток векторного поля и объем области не зависит от выбора системы координат, то правая часть равенства (15.3) и, следовательно, $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат. Таким образом, формула (15.3) даёт инвариантное определение

Дивергенция векторного поля.

Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ - скорость течения жидкости, то дробь $\dfrac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{v}\cdot\vec{n})ds}{V(G)}$ даёт среднее количество (объём) жидкости, вытекающей (либо втекающей) за единицу времени из единицы объёма области G. Естественно назвать эту величину средней плотностью источников жидкости в области G. По аналогии, в случае произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$ дробь $\dfrac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{V(G)}$ можно назвать средней плотностью источников векторного поля $\vec{a}(M)$ в области G, а предел этой средней плотности при стягивании области G к точке M, т.е. $div\,\vec{a}(M)$, есть плотность источников поля $\vec{a}(M)$ в точке M.

Указанный физический смысл дивергенции векторного поля особенно ярко проявляется в известных уравнениях Максвелла, имеющих (в системе СИ) вид:

$$div\,\vec{D} = \rho, \quad div\,\vec{B} = 0.$$

Здесь $\vec{D}$ и $\vec{B}$ - векторы электрической и магнитной индукции, ρ - плотность электрических зарядов. Второе уравнение выражает факт отсутствия магнитных зарядов.

7. Циркуляция векторного поля и инвариантное определение ротора. Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ и пусть AB — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G (если кривая замкнутая, т.е. точки A и B совпадают, то нужно указать направление обхода кривой).

Криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой AB.

Введём вектор $\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$. Тогда циркуляцию можно записать в виде $\int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{dl})$.

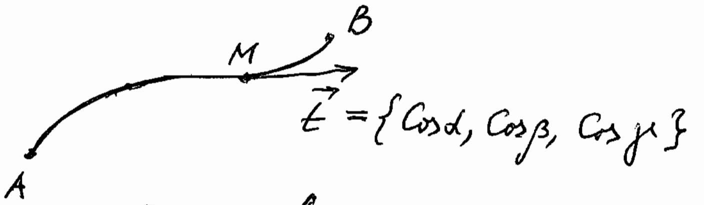


Рис. 15.4

Вектор $\vec{dl}$ направлен по касательной к кривой. Пусть $\vec{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направленной касательной (рис. 15.4). Тогда вектор $\vec{dl}$ можно представить в виде $\vec{dl} = \vec{t}\cdot dl$, где $dl = |\vec{dl}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ — элемент длины кривой. Теперь циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{dl}) = \int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{t})\,dl = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl.$$

Если $\vec{a}(M) = \vec{F}(M)$ — силовое векторное поле, то (циркуляция) $\int\limits_{AB} (\vec{F}\cdot\vec{dl})$ есть работа силового поля вдоль пути AB.

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{t}$, (а также кривая AB,) не зависят от выбора системы координат, то и циркуляция векторного поля вдоль кривой AB не зависит от выбора системы координат.

Пусть L — замкнутый контур, являющийся границей поверхности Φ, лежащей в области G. Запишем формулу Стокса применительно к поверхности Φ в векторной форме

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint_{\Phi} (\mathrm{rot}\,\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS. \qquad (15.4)$$

Здесь $\vec{n} = \vec{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности Φ в точке M на выбранной стороне поверхности, а направление обхода контура L согласовано с выбором стороны поверхности. Формула (15.4) означает, что циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура равна потоку ротора векторного поля через поверхность, границей которой является этот контур.

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G, проведём через неё произвольную плоскость и рассмотрим гладкий замкнутый контур L, лежащий в этой плоскости и ограничивающий плоскую область Φ, такую, что точка M — точка этой области (рис. 15.5). Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор нормали

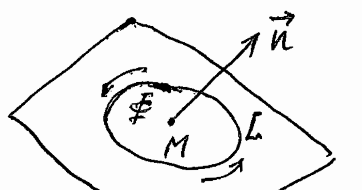


Рис. 15.5

к плоскости и выбрано направление обхода контура L, соответствующее этому вектору нормали. Запишем формулу (15.4) для области Φ и применим к поверхностному интегралу в правой части равенства (15.4) формулу среднего значения:

$$\iint\limits_{\Phi} (\text{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = (\text{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{n})_{M^*}\cdot\iint\limits_{\Phi} ds = (\text{rot}\,\vec{a}(M^*)\cdot\vec{n})\cdot S(\Phi),$$

где M^* — некоторая точка области Φ, $S(\Phi)$ — площадь области Φ. Равенство (15.4) можно теперь записать в виде

$$(\text{rot}\,\vec{a}(M^*)\cdot\vec{n}) = \frac{\oint\limits_L (\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}. \qquad (15.5)$$

Будем стягивать область Φ к точке M так, чтобы точка M оставалась ~~(внутренней)~~ точкой стягивающейся области Φ, а стягивающийся контур L оставался гладким. Тогда $S(\Phi)\to 0$, $M^*\to M$, а так как $\text{rot}\,\vec{a}$ — непрерывная функция, то $\text{rot}\,\vec{a}(M^*)\to\text{rot}\,\vec{a}(M)$. Поэтому из равенства (15.5) получим:

$$(\text{rot}\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n}) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint\limits_L (\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}. \qquad (15.6)$$

Так как циркуляция векторного поля и площадь области не зависят от выбора системы координат, то правая часть равенства (15.6) а, значит, и левая часть, которая представляет собой проекцию вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ на направление, заданное вектором $\vec{n}$, не зависит от выбора системы координат. Таким образом, формула (15.6) даёт инвариантное определение проекции ротора векторного поля на произвольное направление: $\text{Пр}_{\vec{n}}\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)=\lim\limits_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}}\dfrac{\oint_L(\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}$. (15.7)

Итак, проекция ротора векторного поля $\vec{a}(M)$ на произвольное направление, а потому и сам $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, зависит только от векторного поля $\vec{a}(M)$ и не зависит от выбора системы координат.

Чтобы определить вектор $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$, пользуясь формулой (15.7), достаточно рассмотреть в точке M проекции $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ на три некомпланарных направления. Эти три проекции однозначно определяют вектор $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$.

Формулы (15.5) и (15.7) позволяют понять, какое свойство векторного поля $\vec{a}(M)$ характеризует ротор этого векторного поля. Ясно, что интеграл $\oint\limits_L(\vec{a}\cdot d\vec{l})$ будет иметь наибольшее значение в том случае, когда в каждой точке контура L вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{dl}$, т.е. вектор $\vec{a}$ направлен по касательной к контуру L (рис. 15.б). В этом

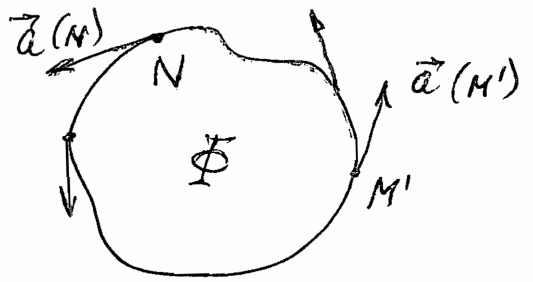


Рис. 15.б

случае вектор $\vec{a}$ поворачивается при движении по контуру L, т.е. возникает завихрённость векторного поля. Величина в правой части формулы (15.5) характеризует "среднюю завихрённость" векторного поля $\vec{a}$ в плоской области $Ф$, а предел этой "средней завихрённости", т.е. $Пр_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ на плоскости $Ф$ в точке M. Таким образом, $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ в данной точке M.

Рассмотрим ещё два уравнения Максвелла, которые записываются с помощью ротора векторного поля:

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — это уравнение является обобщением закона Био-Савара и выражает тот факт, что магнитное поле $\vec{H}$ порождается токами проводимости ($\vec{j}$ — плотность тока) и токами смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ($\vec{D}$ — электрическая индукция);

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — это уравнение выражает закон электромагнитной индукции Фарадея и показывает, что одним из источников электрического поля является изменяющееся во времени магнитное поле.

15.2. Потенциальные векторные поля

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется <u>потенциальным</u> в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Функция $u(M)$ называется <u>скалярным потенциалом</u> векторного поля $\vec{a}(M)$.

Если векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ потенциально в области G, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad} u = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$, то $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Следовательно, выражение

$$P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

является полным дифференциалом функции $u(x,y,z)$ в области G. Тем самым выполнено условие 3 теоремы об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве (теорема 5 гл. 13). Из условия 3 следует выполнение условий 1, 2 и 4 этой теоремы. Поэтому потенциальное в области G векторное поле $\vec{a}(M)$ обладает следующими свойствами.

① Циркуляция потенциального поля $\vec{a}(M)$ вдоль любого замкнутого контура L, лежащего в области G, равна нулю:

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{\ell}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Иногда это свойство применяют в качестве определения потенциального поля.

② Для любых фиксированных точек A и B области G циркуляция потенциального поля $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой AB и равна разности значений потенциала $u(M)$ в точках B и A:

$$\int_{AB} (\vec{a} \cdot d\vec{\ell}) = u(B) - u(A).$$

③ Для потенциального поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (15.8)$$

Из этих равенств следует, что $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$, т.е. потенциальное поле является безвихревым.

Поставим вопрос: верно ли обратное, т.е. следует ли из условия $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$, что векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ является потенциальным?

Ответ зависит от вида области. Если область G,

в которой $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, является поверхностно односвязной, то, согласно теореме 5 гл. 13, существует функция $u(x,y,z)$, такая, что $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$, $R=\frac{\partial u}{\partial z}$, и, следовательно, $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+$
$+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\operatorname{grad}u$, т.е. векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным.

Если же область G не является поверхностно односвязной, то условие $\operatorname{rot}\vec{a}=0$ может быть выполнено во всех точках области G, а векторное поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным в области G.

<u>Пример</u>: $\vec{a}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$, где $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$,

$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, $R=0$, $x^2+y^2\neq 0$.

В качестве области G возьмём всё пространство с выброшенной осью Oz. (Эта область не является поверхностно односвязной.) Элементарно проверяется, что в любой точке области G выполнены равенства (15.8), откуда следует, что $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ в области G.

Рассмотрим замкнутый контур

$$L=\{(x,y,z):\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0;\ 0\le t\le 2\pi\}\ -$$

это окружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в плоскости Oxy. Очевидно, $L\subset G$.

Для этого контура L имеем:

$$\oint\limits_L(\vec{a}\cdot d\vec{l})=\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint\limits_L\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d\cos t + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d\sin t \right) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Итак, $\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{e}) \neq 0$. Следовательно, данное векторное поле не является потенциальным в области G. Отметим, что в любой поверхностно односвязной области, например, в шаре, не пересекающемся с осью Oz, данное векторное поле является потенциальным.

__Физические примеры.__ 1) Электрическое поле $\vec{E}(M)$ точечного заряда e, помещённого в начале координат, выражается формулой

$$\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}, \text{ где } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Это поле является потенциальным: $\vec{E}(M) = -\operatorname{grad} u$, где $u = \frac{ke}{r}$ - электрический потенциал.

2) Поле тяготения $\vec{F}(M)$ точечной массы m, помещённой в начале координат, выражается формулой $\vec{F}(M) = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r}$. Это векторное поле также является потенциальным:

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u, \text{ где } u = \frac{\mu m}{r} \text{ - ньютонов потенциал.}$$

В силовом потенциальном поле циркуляция (т.е. работа поля) вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой, а зависит только от начальной и конечной точек A и B. Так, в поле тяготения точечной массы

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}\cdot d\vec{\ell}) = u(B) - u(A) = \gamma m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

15.3 Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным в области G, если во (всех точках) этой области $\operatorname{div}\vec{a} = 0$. Поскольку $\operatorname{div}\vec{a}$ характеризует плотность источников векторного поля $\vec{a}(M)$, то в области соленоидальности векторного поля $\vec{a}(M)$ нет источников этого поля.

Пример. $\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ — электрическое поле точечного заряда. В любой области, не содержащей заряда, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, поэтому в такой области поле $\vec{E}(M)$ является соленоидальным.

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить (в области G) в виде ротора другого векторного поля:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{rot}\vec{b}(M). \qquad (15.9)$$

В этом случае вектор-функция $\vec{b}(M)$ называется векторным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$. Такое векторное поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным, поскольку (проверьте это)

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = 0.$$

Верно и обратное: если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидально в области G, т.е. $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в этой области, то это векторное поле можно представить в виде (15.9). Как найти в этом случае векторный потенциал $\vec{b}(M)$ – см. [МАВ3, стр. 397].

Пусть область G является <u>объемно односвязной</u>. Это означает, что если кусочно гладкая замкнутая поверхность Φ лежит в области G, то и область, ограниченная поверхностью Φ, целиком принадлежит области G. Примерами объемно односвязных областей являются шар, параллелепипед, тор. Отметим, что тор не является поверхностно односвязной областью. Если из шара удалить какую-нибудь внутреннюю точку, то получится область, не являющаяся объемно односвязной (но являющаяся, как и шар, поверхностно односвязной).

Соленоидальное поле в объемно односвязной области обладает следующим свойством: <u>поток соленоидального поля через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность, расположенную в этой области, равен нулю.</u>

Действительно, пусть кусочно гладкая замкнутая поверхность Φ, расположенная в объемно односвязной области G, ограничивает область G_1. По формуле Остроградского-Гаусса имеем:

$$\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=\iiint\limits_{G_1}\operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$ в области G и, следовательно, в области G_1, то правая часть равенства равна нулю, поэтому

$$\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=0,$$

что и требовалось доказать.

Иногда это свойство принимают в качестве определения соленоидального поля.

Условие объёмной односвязности области здесь очень существенно. Без этого условия указанное свойство не имеет места.

<u>Пример.</u> Электрическое поле $\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ точечного заряда e, помещённого в точку O, является соленоидальным в любой области, не содержащей точку O, так как $\operatorname{div}\vec{E}(M) = 0$ во всех точках, кроме точки O (см. пример 1 в §15.1). В частности, во всём пространстве с выброшенной точкой O поле $\vec{E}(M)$ соленоидально, однако поток поля $\vec{E}(M)$ через поверхность, окружающую точку O, не равен нулю. В самом деле, поток через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром в точке O равен $4\pi ke \neq 0$ (см. пример 2 в §15.1). Это связано с тем, что всё пространство с выброшенной одной точкой не является объёмно односвязной областью.

Рассмотренное свойство соленоидального поля показывает, что векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и оканчиваться внутри области соленоидальности. Они либо начинаются и заканчиваются на границе области, либо являются замкнутыми линиями.

<u>Примеры.</u> 1) Векторные (силовые) линии электрического поля точечного заряда представляют собой лучи. В любой области G, где это поле соленоидально, векторные линии начинаются и заканчиваются на границе области G (рис. 15.7).

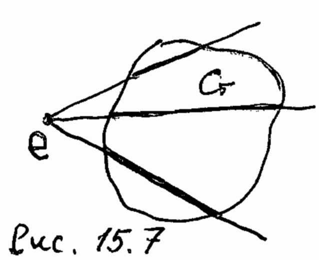


Рис. 15.7

2) Магнитное поле $\vec{B}(M)$, создаваемое электрическим током, имеет замкнутые векторные (силовые) линии. Для прямого проводника с током векторные линии поля $\vec{B}(M)$ — окружности (рис. 15.8).

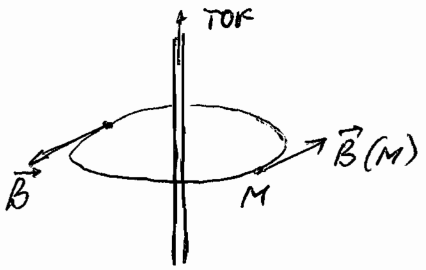
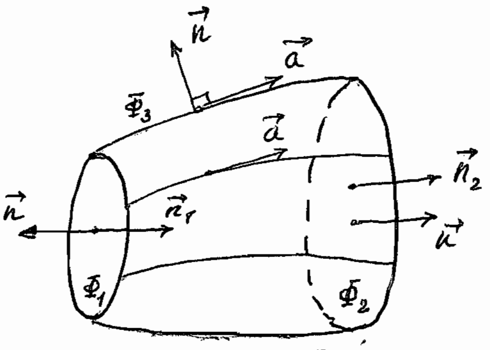


Рис. 15.8

Слово "соленоидальное" означает "трубчатое". Для соленоидального поля имеет место закон сохранения интенсивности векторной трубки. Он состоит в следующем.

Пусть $\vec{a}(M)$ — соленоидальное поле в области G. Рассмотрим в области G "отрезок векторной трубки", т.е. такую подобласть области G, которая ограничена двумя сечениями (Φ_1 и Φ_2) и боковой поверхностью Φ_3, состоящей из векторных линий (рис. 15.9).



$\vec{n}_1 = -\vec{n}$, $\vec{n}_2 = \vec{n}$

Рис. 15.9

Поток соленоидального поля $\vec{a}(M)$ через поверхность $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, ограничивающую отрезок векторной трубки, равен нулю:

$$\iiint_{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали. На боковой поверхности Φ_3 имеем $\vec{a} \perp \vec{n}$, поэтому

$$\iint_{\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0,$$ и, следовательно,

$$\iint_{\Phi_1+\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = \iint_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds + \iint_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0.$$

Изменим на сечении Φ_1 направление нормали на противоположное, т.е. вектор $\vec{n}$ заменим на $\vec{n}_1$. Тогда получим

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n}_1)\,dS = \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n}_2)\,dS,$$

где оба потока через сечения Φ_1 и Φ_2 вычисляются в направлении векторных линий.

Таким образом, поток соленоидального векторного поля через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Это и есть закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Замечание. Нетрудно доказать (см. [МАВ 3, стр. 403]), что любое векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M) + \operatorname{rot} \vec{b}(M),$$

причём такое представление не единственно.

15.4. Оператор Гамильтона.

Символом $\frac{\partial}{\partial x}$ мы обозначали оператор частной производной по переменной x. Результатом действия этого оператора на функцию $u(x,y,z)$ является частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ — операторы частных производных по y и z.

Введём векторный оператор "набла" или оператор Гамильтона:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

С помощью этого оператора удобно записывать и выполнять операции векторного анализа:

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z},$$

т.е. градиент функции u получается в результате умножения векторного оператора ∇ на скалярную функцию $u(x,y,z)$;

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = (\nabla\cdot\vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

т.е. дивергенция векторного поля $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ получается как результат скалярного умножения векторного оператора ∇ на вектор-функцию $\vec{a}(x,y,z)$;

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = [\nabla\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

т.е. ротор векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ представляет собой векторное произведение векторного оператора ∇ и вектор-функции $\vec{a}(x,y,z)$.

<u>Повторные дифференциальные операции</u>:

1) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, u = [\nabla\cdot\nabla u] = \vec{0}$

(потенциальное векторное поле $\mathrm{grad}\, u$ является безвихревым);

2) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = (\nabla\cdot[\nabla\cdot\vec{a}]) = 0$

(векторное поле $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ является соленоидальным);

3) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u = (\nabla\cdot\nabla u) = \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \Delta u$,

оператор $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ называется <u>оператором Лапласа</u>, а уравнение $\Delta u = 0$ — <u>уравнением Лапласа</u> (это одно из важнейших уравнений математической физики);

1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec a = [\nabla\cdot[\nabla\vec a]] = \nabla(\vec\nabla\cdot\vec a) - (\nabla\cdot\nabla)\vec a =$

$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec a - \Delta\vec a,$

где $\Delta\vec a = \Delta(P\vec i + Q\vec j + R\vec k) = \Delta P\cdot\vec i + \Delta Q\cdot\vec j + \Delta R\cdot\vec k$ (вывод формулы см. в [МАВ3, стр. 404]).

Вернёмся к оператору и уравнению Лапласа. Функция $u(x,y,z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в некоторой области, называется гармонической функцией в этой области. (Рассмотрим примеры.) 1) Простейшим примером гармонической функции (в любой области) является линейная функция $u(x,y,z) = Ax + By + Cz$.

2) Потенциал ($u = \frac{ke}{r}$) электрического поля точечного заряда (и также потенциал ($u = \frac{km}{r}$) поля тяготения точечной массы), где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, является гармонической функцией в любой области, не содержащей начала координат, т.е. при $r \neq 0$ функция $u = \frac{ke}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:
$\Delta\left(\frac{ke}{r}\right) = ke\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ (проверьте это).

3) Пусть векторное поле $\vec a(x,y,z)$ является (в некоторой области) потенциальным и соленоидальным. Тогда $\vec a = \operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\vec a = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$, т.е. $\Delta u = 0$. Таким образом, скалярный потенциал (функция $u(x,y,z)$) векторного поля, являющегося потенциальным и соленоидальным, есть гармоническая функция.

4) Пусть векторное поле $\vec a = \{P, Q, R\}$ является (в некоторой области) соленоидальным и безвихревым (в частности, оно может быть потенциальным), т.е. $\operatorname{div}\vec a$ и $\operatorname{rot}\vec a = \vec 0$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Отсюда получаем (путём дифференцирования по x первого равенства, по y — второго равенства и по z — последнего равенства):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta P = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\Delta Q = 0$ и $\Delta R = 0$.

Таким образом, координаты P, Q, R соленоидального безвихревого поля являются гармоническими функциями.

5) Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$, которое является (в некоторой области) соленоидальным и безвихревым, т.е. $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Эти два равенства являются условиями Коши-Римана для функции комплексной переменной

$$f(z) = f(x+iy) = Q(x,y) + i\,P(x,y).$$

Выполнение этих равенств означает, что $f(z)$ — аналитическая функция.

15.5. Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах.

Градиент скалярного поля и также дивергенцию и ротор векторного поля были введены в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Во многих задачах математической физики удобнее пользоваться выражениями для этих операций в других системах координат, например, в цилиндрической или сферической. Мы выведем выражения для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \vec{a}$ и $\operatorname{rot} \vec{a}$ в так называемых криволинейных ортогональных координатах, частными случаями которых являются цилиндрические и сферические координаты.

1. Криволинейные ортогональные координаты. Пусть (x, y, z) — прямоугольные координаты точки M. Положение точки M, как уже отмечалось в главе 11, можно задать также с помощью криволинейных координат. Будем обозначать их q_1, q_2, q_3; а формулы, связывающие криволинейные координаты с прямоугольными, запишем в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\ y = y(q_1, q_2, q_3),\ z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (15.10)$$

При изменении q_1 и фиксированных значениях q_2 и q_3 точка с координатами (x, y, z), определяемыми формулами (15.10) описывает в пространстве некоторую кривую, называемую координатной (линией q_1 (или q_1 — линией). Аналогично определяются координатные q_2 — линия и q_3 — линия. Через каждую точку пространства проходят три координатные q_i — линии $(i = 1, 2, 3)$.

Криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) называются ортогональными, если в любой точке пространства три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны (т.е. касательные к координатным линиям в этой точке попарно перпендикулярны).

Примерами криволинейных ортогональных координат являются (см. § 11.):

а) цилиндрические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$;

формулы (15.10) для цилиндрических координат имеют вид:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$
$$(r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$$

б) сферические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$; формулы (15.10) для сферических координат имеют вид:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$(r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

2. Параметры Ламэ. Рассмотрим элемент dl_1 длины дуги координатной q_1-линии. Криволинейные координаты концов этой дуги обозначим так, как показано на рисунке 15.10.

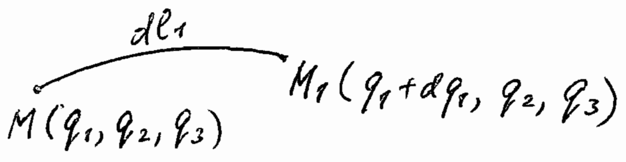


Рис. 15.10

Величину dq_1 будем считать положительной и сколь угодно малой. Прямоугольные координаты точки M обозначим (x, y, z), а точки M_1 — $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Тогда, используя формулы (1), получаем равенства

$$dx = x(q_1+dq_1, q_2, q_3) - x(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot dq_1,$$

$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1$, $dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot dq_1$, в которых производные вычисляются в некоторых промежуточных точках между точками M и M_1. Равенства останутся верными с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dq_i, если производные взять в точке M, что мы и сделаем здесь и в других аналогичных случаях. С помощью полученных равенств находим:

$$dl_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\, dq_1 .$$

Введём обозначение: $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$.

Тогда $dl_1 = H_1 \cdot dq_1$ и аналогичные равенства имеют место для элементов dl_2 и dl_3 длин дуг координатных q_2-линии и q_3-линии:

$$dl_2 = H_2\, dq_2 , \quad dl_3 = H_3\, dq_3 ,$$

где $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$, $H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$,
причём величины H_i вычисляются в точке $M(q_1, q_2, q_3)$.

Величины H_1, H_2, H_3 называются <u>параметрами Ламэ</u> (<u>или масштабными множителями</u>) криволинейных координат q_1, q_2, q_3. Они характеризуют в каждой точке пространства изменение длины dl_i координатной q_i-линии в зависимости от изменения соответствующей криволинейной координаты q_i.

(с.м.н.с.) - вставка на следующей странице.

<u>Примеры.</u> а) Параметры Ламэ цилиндрических координат: $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$,

$H_2 = r$, $H_3 = 1$.

б) Параметры Ламэ сферических координат:

$H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\theta$.

3. <u>Градиент скалярного поля в криволинейных ортогональных координатах.</u>

Пусть (q_1, q_2, q_3) — криволинейные ортогональные координаты точки M. Введём в точке M ортогональный базис, состоящий из трёх единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, вставка к странице 28

Заметим, что $dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 \, dq_1 dq_2 dq_3$, т.е.

$dV_{xyz} = H_1 H_2 H_3 \cdot dV_{q_1 q_2 q_3}$, где dV – элемент объёма в соответствующих координатах. С другой стороны,

$$dV_{xyz} = \frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)} dV_{q_1 q_2 q_3},$$ поэтому

$$\underbrace{\frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)} = H_1 H_2 H_3}$$ – коэффициент растяжения объёма.

касательных к координатным линиям в точке M и направленных в сторону возрастания q_1, q_2, q_3. Отметим, что при переходе от точки к точке направление векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ изменяется (в отличие от векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), т.е. базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ зависит от точки M (или, что то же самое, от q_1, q_2, q_3).

Пусть $u(M)$ – заданное дифференцируемое скалярное поле. Вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M будем раскладывать по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в этой точке:

$$\operatorname{grad} u = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3; \quad c_1, c_2, c_3 \text{ – некоторые числа.}$$

Умножив это равенство скалярно на $\vec{e}_1$ и учитывая, что $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 1$, $(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) = 0$, получим:

$$c_1 = (\operatorname{grad} u \cdot \vec{e}_1) = \frac{\partial u}{\partial e_1}$$ – производная функции $u(M)$ по направлению $\vec{e}_1$ в точке M (рис. 15.11), т.е.

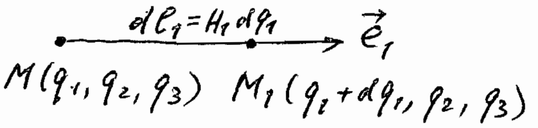


Рис. 15.11

$$c_1 = \frac{\partial u}{\partial e_1}(M) = \lim_{dl_1 \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{dl_1} =$$

$$= \frac{1}{H_1} \lim_{dq_1 \to 0} \frac{u(q_1+dq_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{dq_1} =$$

$$= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}(M).$$

Аналогично получаются равенства

$$c_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}(M), \quad c_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}(M),$$

причём величины H_i в этих равенствах вычисляются в точке $M(q_1, q_2, q_3)$.

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{grad} u(M) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}(M)\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}(M)\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}(M)\vec{e}_3.}$$

Пример. Ортогональный базис в точке M, связанный с цилиндрическими координатами (r, φ, z), обозначим $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ (рис. 15.12).

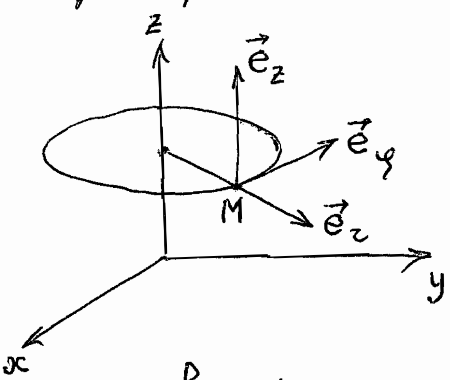


Рис. 15.12

Градиент скалярного поля $u(M)$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z .$$

Задание: записать выражение для $\operatorname{grad} u$ в сферических координатах.

4. Дивергенция векторного поля в криволинейных ортогональных координатах. Пусть $\vec{a}(M)$ — заданное дифференцируемое векторное поле. Чтобы получить выражение для $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ в криволинейных ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3), воспользуемся инвариантным определением дивергенции (см. п. 6 § 15.1):

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in V(G)}} \frac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)} . \qquad (15.11)$$

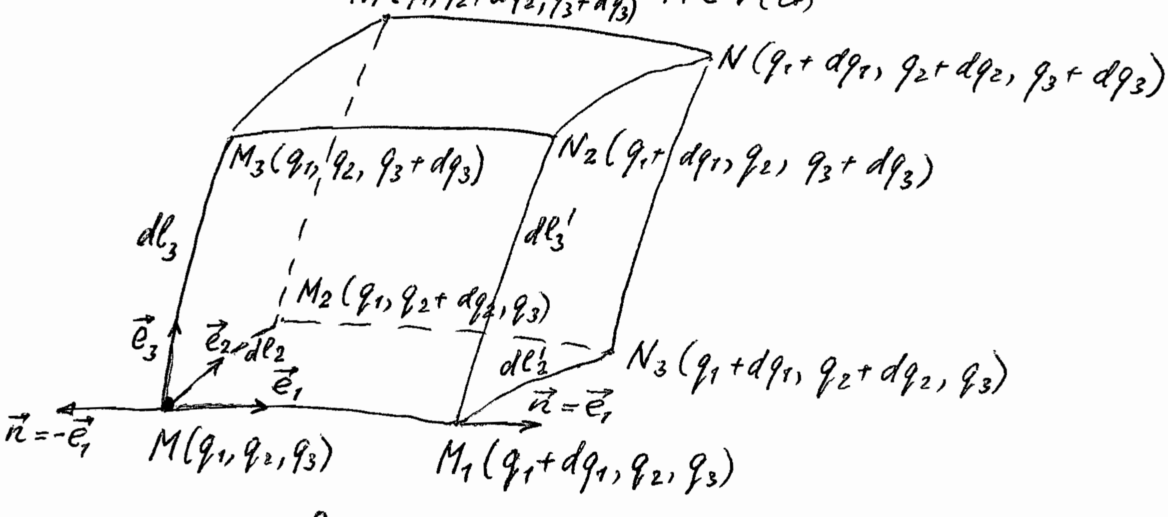


Рис. 15.13

В качестве области G возьмём криволинейный параллелепипед, рёбрами которого являются элементы (сколь угодно малые отрезки) координатных линий. На каждом ребре две криволинейные координаты постоянны, а третья изменяется, а на каждой грани параллелепипеда одна из криволинейных координат постоянна, а две другие изменяются (рис. 15.13). Величины dq_1, dq_2, dq_3 будем считать положительными и сколь угодно малыми. Тогда криволинейный параллелепипед сколь угодно мало отличается от прямоугольного, поскольку элементы координатных линий, являющиеся рёбрами параллелепипеда, попарно ортогональны.

Наши последующие рассуждения будут не строгими, но весьма наглядными. Разложим вектор $\vec{a}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в точке M: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, и вычислим поток векторного поля $\vec{a}$ в направлении внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности Φ, ограничивающей параллелепипед G.

Обозначим через Φ_1 и Φ_1' те грани параллелепипеда, которые перпендикулярны к вектору $\vec{e}_1$. На первой из них $q_1 = const$, на второй — $q_1 + dq_1 = const$. Для грани Φ_1 имеем: $\vec{n} = -\vec{e}_1$ (см. рис. 15.13), $dl_2 = H_2(M)\,dq_2$, $dl_3 = H_3(M)\,dq_3$, площадь $S(\Phi_1) = dl_2 \cdot dl_3 = H_2(M)H_3(M)\,dq_2\,dq_3$, поэтому $(\vec{a}\cdot\vec{n}) = \left((a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1)\right) = -a_1(M)$,

$$\iint_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = -a_1(M)\,S(\Phi_1) = -(a_1H_2H_3)_M \cdot dq_2\,dq_3 .$$

Для грани Φ_1' аналогично получаем:

$\vec{n} = \vec{e}_1$, $dl_2' = H_2(M_1)\,dq_2$, $dl_3' = H_3(M_1)\,dq_3$, $S(\Phi_1') = H_2(M_1)H_3(M_1)\cdot dq_2\,dq_3$,

$$(\vec{a}\cdot\vec{n}) = a_1(M_1),$$

$$\iint\limits_{\Phi_1'} (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = (a_1 H_2 H_3)_{M_1} \cdot dq_2\, dq_3 .$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Phi_1+\Phi_1'} (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = \left[(a_1 H_2 H_3)_{M_1(q_1+dq_1,\, q_2,\, q_3)} - (a_1 H_2 H_3)_{M(q_1,\, q_2,\, q_3)}\right] \cdot dq_2\, dq_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3)\Big|_M \cdot dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Аналогичные выражения получаются для потока векторного поля $\vec{a}$ через две другие пары противоположных граней:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_3 H_1)\Big|_M \cdot dq_1\, dq_2\, dq_3 \quad и \quad \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\Big|_M \cdot dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Суммируя потоки через три пары граней и разделив полученную сумму на $V(G) = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3 =$
$= H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$, по формуле (15.11) получим

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{a}\,(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\right]}$$

(Отметим, что) все величины в правой части равенства вычисляются в точке M.

<u>Пример</u>. Пусть разложение вектора $\vec{a}$ по базису, связанному с цилиндрическими координатами (см. рис. 15.12) имеет вид $\vec{a} = a_r \cdot \vec{e}_r + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + a_z \cdot \vec{e}_z$. Так как $H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = 1$, то

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Задание: записать выражение для $\mathrm{div}\,\vec a$ в сферических координатах.

5. Ротор векторного поля в криволинейных ортогональных координатах. Чтобы получить выражение для $\mathrm{rot}\,\vec a(M)$ в криволинейных ортогональных координатах, воспользуемся инвариантным определением ротора (см. п. 7 § 15.1):

$$\text{Пр}_{\vec n}\,\mathrm{rot}\,\vec a(M) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint\limits_L(\vec a\cdot d\vec l)}{S(\Phi)}. \qquad (15.12)$$

В качестве вектора $\vec n$ возьмем сначала вектор $\vec e_1$ (см. рис. 15.13) и тогда в качестве поверхности Φ можно взять грань Φ_1 параллелепипеда G, границей L которой является контур $MM_2N_1M_3M$.

Разложим вектор $\vec a$ по базису $\{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ в точке M: $\vec a = a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3$, и вычислим циркуляцию векторного поля $\vec a$ вдоль контура $MM_2N_1M_3M$.

На отрезке MM_2 имеем: $\vec{dl} = dl\cdot\vec e_2$, поэтому $(\vec a\cdot\vec{dl}) = a_2\,dl$ и $\int\limits_{MM_2}(\vec a\cdot\vec{dl}) = \int\limits_{MM_2} a_2\,dl = a_2\cdot dl_2 = (a_2H_2)_M\cdot dq_2$ (написанные равенства, как и последующие, справедливы с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dq_i).

Аналогично, на отрезке M_3N_1 $\vec{dl} = dl\cdot\vec e_2$, поэтому $\int\limits_{M_3N_1}(\vec a\cdot\vec{dl}) = (a_2H_2)\big|_{M_3}\cdot dq_2$, а $\int\limits_{N_1M_3}(\vec a\cdot\vec{dl}) = -(a_2H_2)_{M_3}\cdot dq_2$.

Складывая циркуляции вдоль отрезков MM_2 и N_1M_3 и учитывая, что $(a_2H_2)_{M(q_1,q_2,q_3)} - (a_2H_2)_{M_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)} = -\frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)_M\cdot dq_3$, приходим к равенству

$$\int\limits_{MM_2}(\vec{a}\cdot d\vec{l}) + \int\limits_{N_1M_3}(\vec{a}\,d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\Big|_M \cdot dq_2\,dq_3.$$

Аналогично получаем равенство

$$\int\limits_{M_2N_1}(\vec{a}\,d\vec{l}) + \int\limits_{M_3M}(\vec{a}\,d\vec{l}) = \frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3)\Big|_M \cdot dq_2\,dq_3.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура L, ограничивающего поверхность Φ_1, выражается формулой

$$\oint\limits_L(\vec{a}\,d\vec{l}) = \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]_M \cdot dq_2\,dq_3.$$

Разделив эту величину на площадь $S(\Phi_1) = H_2(M)\cdot H_3(M)\cdot dq_2\,dq_3$, по формуле (15.12) получим:

$$\text{Пр}_{\vec{e}_1}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}(M) = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right].$$

Отметим, что все величины в правой части равенства вычисляются в точке M.

Аналогичные выражения получаются для проекций вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ на направления $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Найденные проекции являются координатами вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, относящемся к точке M, т.е. справедливо равенство

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}(M) = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]\cdot\vec{e}_1 + \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3H_3)\right]\vec{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1H_1)\right]\vec{e}_3.$$

Это равенство можно записать (с помощью определителя третьего порядка) в компактном виде

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}}$$

Пример. В цилиндрических координатах с базисом $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ ротор векторного поля $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$ имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z .$$

Задание: записать выражение для $\operatorname{rot} \vec{a}$ в сферических координатах.

§4. Понятие числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда.

Под словом "ряд"в математическом анализе понимают сумму бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и образуем формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Назовем это выражение *числовым рядом*, а числа a_k —*членами ряда*. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *частичной суммой* (n-ой частичной суммой) ряда.

Определение: числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм. При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *суммой ряда*. Если же последовательность частичных сумм ряда расходится, то такой ряд называется *расходящимся*.

Примеры:

1) ряд

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots,$$

где $|q| < 1$, сходится:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q} = S \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

2) ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

расходится, поскольку

$$S_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty;$$

3) т.н. *гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots.$$

Сумма дробей в каждой такой скобке больше 1/2, откуда вытекает, что $\{S_n\}$ —бесконечно-большая последовательность, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

и, значит, ряд расходится.

Теорема 5 (критерий Коши сходимости числового ряда).
Для того, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon.$$

Доказательство:

Сходимость числового ряда —это сходимость последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм, а для сходимости последовательности $\{S_n\}$, как было доказано в теореме 4, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда): если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство:

Поскольку ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
сходится, то выполнено условие
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$
Возьмем $p = 1$: $|a_{n+1}| < \varepsilon \ \forall n > N$. Это и означает, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим, что данное условие является необходимым, но не достаточным условием сходимости (пример —гармонический ряд, который расходится, хотя $a_n = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$).

Следствие 2: если ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
сходится, то
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Здесь r_n —это так называемый *остаток ряда.*

Доказательство:

Если
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$
то $S = S_n + r_n$, а поскольку $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 6. Если ряды
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
сходятся и их суммы равны соответственно S^A и S^B, то для любых чисел α и β ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$
сходится и его сумма S выражается формулой $S = \alpha S^A + \beta S^B$.

Доказательство:

Для любого n имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Первое слагаемое стремится к αS^A, а второе —к βS^B при $n \to \infty$. Таким образом, предельный переход при $n \to \infty$ дает $S = \alpha S^A + \beta S^B$, что и требовалось доказать.

§5. Ряды с положительными членами.

Если все $a_k \geq 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *рядом с положительными членами.* Члены такого ряда часто обозначают p_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (p_k \geq 0).$$

Последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм в таком случае будет, очевидно, неубывающей и поэтому *для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

Признак сравнения.

Теорема 7. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k$$

(обозначим их как ряд P и ряд Q соответственно), и пусть $\forall k$: $p_k \leq q_k$.

Тогда: 1) из сходимости ряда Q следует сходимость ряда P; 2) из расходимости ряда P следует расходимость ряда Q.

Доказательство:

Утверждение теоремы следует из неравенства

$$S_n^P = \sum_{k=1}^{n} p_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k = S_n^Q.$$

Пример: рассмотрим т.н. *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

Из сравнения с гармоническим рядом следует, что обобщенный гармонический ряд при $\alpha < 1$ расходится.

Замечания:

1) теорема 7 остается в силе, если неравенство $p_k \leq q_k$ выполнено, начиная не с $k = 1$, а с некоторого $k = k_0$.

2) теорема 7 остается в силе, если вместо неравенства $p_k \leq q_k$ выполнено неравенство $p_k \leq c \cdot q_k$, где $c > 0$ —некоторое число.

Задания на дом:

1) Доказать, что если существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = a > 0,$$

то ряды P и Q сходятся или расходятся одновременно.

2) Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = 0.$$

Сформулировать и доказать утверждение о связи между сходимостью или расходимостью рядов P и Q.

Признаки Даламбера и Коши.

Теорема 8 (признак Даламбера). Если

$$\forall k: \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right),$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

сходится (расходится).

Доказательство:

Воспользуемся признаком сравнения (теорема 7). Из цепочки неравенств $p_{k+1} \leq q \cdot p_k \leq q \cdot q \cdot p_{k-1} \leq \ldots \leq q^k p_1$ и сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k p_1$$

заключаем, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится.

Если
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1,$$
то $p_{k+1} \geq p_k \geq \ldots \geq p_1 > 0$ и тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Теорема 8 доказана.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме): если существует
$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q < 1 \quad (> 1),$$
то ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится (расходится). Доказательство провести самостоятельно.

Замечание 1: условие
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$$
в теореме 8 нельзя заменить условием
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1,$$
которое выполняется, например, для рассмотренного выше расходящегося гармонического ряда.

Замечание 2: признак Даламбера в предельной форме не позволяет судить о сходимости и расходимости рядов в случае, когда
$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1.$$
В качестве примера приведем ряды
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$
первый из которых расходится, а второй —сходится (это будет доказано позднее).

Теорема 9 (признак Коши). Если $\forall k : \sqrt[k]{p_k} \le q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \ge 1)$, то ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится (расходится).

Доказательство:

Воспользуемся теоремой 7. Из неравенства $p_k \le q^k$ и сходимости ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$
вытекает, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
также сходится.

Если $\sqrt[k]{p_k} \ge 1$, то $p_k \ge 1$ и тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Теорема 9 доказана.

Следствие (признак Коши в предельной форме): если существует
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q < 1 \quad (> 1),$$
то ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится (расходится). Доказательство провести самостоятельно.

Замечание 1: условие
$$\sqrt[k]{p_k} \le q < 1$$
в теореме 9 нельзя заменить условием
$$\sqrt[k]{p_k} < 1.$$
Пример: гармонический ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Замечание 2: если
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = 1,$$

то ряд может сходиться, а может и расходиться. Примеры:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Признак Коши имеет более широкую область применимости. Нетрудно доказать, что если

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$$

(т.е. "работает"признак Даламбера), то, начиная с некоторого номера

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q_1 < 1$$

(т.е. "работает"и признак Коши). Обратное не верно. Пример:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{2^k}.$$

Лекция 15

Числовые последовательности и ряды (продолжение).

Интегральный признак Коши-Маклорена.

Теорема 10. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

является рядом с положительными членами и пусть существует функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$ и удовлетворяющая условиям:

1) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$;
2) $f(x)$ не возрастает при $x \geq 1$;
3) $\forall k$: $f(k) = p_k$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

сходится тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_n = \int_1^n f(x)dx.$$

Доказательство:

Очевидно, что

$$p_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq p_{k-1}.$$

Просуммируем это неравенство по k от 2 до n:

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_n \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots +$$

$$+ \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1},$$

или

$$S_n - p_1 \leq a_n \leq S_{n-1}, \quad \text{где} \quad a_n = \int_1^n f(x)dx \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Так как $f(x) \geq 0$, то $\{a_n\}$ —неубывающая последовательность. Для ее сходимости, т.е. для существования предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена. Для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм была ограничена. Из полученного выше неравенства

$$S_n - p_1 \leq a_n \leq S_{n-1}$$

следует, что $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена $\{a_n\}$. Следовательно, $\{S_n\}$ сходится (а значит, сходится и наш ряд) тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Теорема 10 полностью доказана.

Пример: рассмотрим при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Введем функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Она будет положительной и убывающей при $x \geq 1$, причем $f(k) = 1/k^\alpha$. Поскольку

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то, согласно теореме 10, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

сходится ($\alpha > 1$).

Еще один полезный признак сходимости для рядов с положительными членами —*признак Гаусса* —работает на сравнении рядов с обобщенным гармоническим рядом. Сформулируем его.

Пусть члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

удовлетворяют при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению

$$\frac{p_k}{p_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Тогда:

1) если $\alpha > 1$ ($\alpha < 1$), то ряд сходится (расходится);
2) если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$ ($\beta < 1$), то ряд сходится (расходится);
3) если $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

§6. Знакопеременные ряды.

Рассмотрим ряд A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Будем считать, что в нем имеется бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. В таком случае ряд A назовем *знакопеременным.*

Определение: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{ряд} \quad A)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (\text{ряд} \quad |A|).$$

Отметим, что при этом ряд A также сходится (это легко доказывается с помощью критерия Коши).

Пример: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

является абсолютно сходящимся, т.к. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Определение: ряд A называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $|A|$ расходится.

Пример: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

является условно сходящимся. Докажем это.

Имеем:

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) > 0,$$

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} < 1.$$

Итак, последовательность $\{S_{2n}\}$ —ограниченная, поскольку для любого n выполнено неравенство $0 < S_{2n} < 1$. Кроме того, $\{S_{2n}\}$ —возрастающая последовательность. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

а поскольку

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

т.е. ряд сходится. Ряд из модулей членов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

расходится (это гармонический ряд). Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится условно, что и требовалось доказать.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{ряд} \quad A)$$

является знакопеременным. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ положительные члены, выписанные в том порядке, в котором они стоят в ряде A, а через $-q_1, -q_2, \ldots, -q_n, \ldots$ —отрицательные члены ряда A. Образуем два ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (\text{ряд} \quad P) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \quad (\text{ряд} \quad Q).$$

Теорема 11. 1) Если ряд A сходится абсолютно, то ряды P и Q сходятся, причем $S^A = S^P - S^Q$. 2) Если ряд A сходится условно, то ряды P и Q расходятся.

Доказательство:

1) Пусть ряд A сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Тогда для любого n справедливо неравенство:

$$S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S^{|A|}.$$

Рассмотрим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Обозначим через $S_{n_1}^P$ сумму членов ряда P, входящую в S_n^A, а через $S_{n_2}^Q$ — сумму членов ряда Q, входящую в S_n^A со знаком "минус":

$$S_{n_1}^P = \sum_{k=1}^{n_1} p_k, \quad S_{n_2}^Q = \sum_{k=1}^{n_2} q_k, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Очевидно,что

$$S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q,$$

$$S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q.$$

Из последнего неравенства и из неравенства $S_n^{|A|} \leq S^{|A|}$ получаем $S_{n_1}^P \leq S^{|A|}$, $S_{n_2}^Q \leq S^{|A|}$, откуда вытекает сходимость рядов P и Q: $S_{n_1}^P \to S^P$ и $S_{n_2}^Q \to S^Q$ при $n_1, n_2 \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$, получим $S^A = S^P - S^Q$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть ряд A сходится условно. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

расходится. Докажем, что ряды P и Q также расходятся. В самом деле, если бы они сходились, т.е. существовали бы пределы

$$\lim_{n_1 \to \infty} S_{n_1}^P \quad \text{и} \quad \lim_{n_2 \to \infty} S_{n_2}^Q,$$

то в силу равенства $S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q$ существовал бы и предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{|A|},$$

т.е. сходился бы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере один из рядов P и Q расходится. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то в силу равенства $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$ расходился бы ряд A, а он по условию сходится. Итак, ряды P и Q расходятся. Теорема 11 полностью доказана.

Замечание: если ряд A сходится условно, то его положительная часть (ряд P) и отрицательная часть (ряд Q со знаком "минус") являются бесконечно большими. Другими словами, получается как бы "неопределенность типа $\infty - \infty$". Любой условно сходящийся ряд обладает тем свойством, что для любого наперед заданного числа S можно переставить члены ряда так, что новый ряд (полученный после перестановки членов) будет иметь сумму, равную S. Об этом —подробнее ниже.

Признак Дирихле-Абеля.

Этот признак относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Теорема 12 (признак Дирихле-Абеля). Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательность $\{b_n\}$ —невозрастающая и бесконечно малая, т.е. $b_n \to 0$ при $n \to \infty$;

2) последовательность $\{S_n\}$ ограничена, т.е. существует число $M > 0$ такое, что для любого n выполнено неравенство $|S_n| \le M$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится.

Доказательство:

Для доказательства сходимости данного ряда воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим "отрезок"ряда от $k = n+1$ до $k = n+p$ (именно этот "отрезок"фигурирует в критерии Коши):

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \big(S_k - S_{k-1}\big) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{n+p+1} b_{k-1} S_{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_{k-1} S_{k-1} - b_n S_n -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}\big(b_{k-1} - b_k\big).$$

Отметим, что в силу условия 1) $b_k \ge 0$, $b_{k-1} - b_k \ge 0$.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists N, \quad \forall n > N: \quad 0 \le b_n < \frac{\varepsilon}{2M},$$

где M —число из условия 2) теоремы. Тем самым $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, используя равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}\big(b_{k-1} - b_k\big),$$

получаем

$$\Bigg| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \Bigg| \le b_{n+p} M + b_n M + M\big(b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots + b_{n+p-1} - b_{n+p}\big) =$$

$$= 2b_n \cdot M < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится. Теорема 12 доказана.

Пример: исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha},$$

где x —любое фиксированное число и $\alpha > 0$ (если $\alpha \le 0$, то общий член ряда не стремится к нулю и ряд заведомо расходится).

Положим $a_k = \sin kx$, $b_k = 1/k^\alpha$ и применим признак Дирихле-Абеля. Последовательность $\{b_k\}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 12. Проверим выполнение условия 2):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x\right) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = M \quad (\text{если} \quad x \ne 2\pi m, m \in \mathbb{Z}).$$

По признаку Дирихле-Абеля ряд сходится при $x \ne 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Но если $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, то все члены ряда равны нулю и ряд также сходится. Таким образом, можно заключить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

сходится при любом x.

Если $\alpha > 1$, то ряд сходится абсолютно, т.к.

$$\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \le \frac{1}{k^\alpha},$$

а ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$
сходится при $\alpha>1$.

Если же $0<\alpha\le 1$, то ряд сходится условно, поскольку ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right|$$
расходится при $0<\alpha\le 1$. В самом деле,
$$\frac{|\sin kx|}{k^\alpha}\ge\frac{\sin^2 kx}{k^\alpha}=\frac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha}.$$
Но при $0<\alpha\le 1$ ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha}$$
расходится, т.к. его частичная сумма
$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2kx}{k^\alpha}\to\infty\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$
Здесь мы воспользовались тем, что при $0<\alpha\le 1$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\to\infty\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$
а последовательность
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2kx}{k^\alpha}$$
сходится к некоторому числу при $n\to\infty$ (доказательство этого факта аналогично доказательству сходимости ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^\alpha}\quad(\alpha>0),$$
которое мы провели выше.)

Следствие из теоремы 12: рассмотрим ряд
$$p_1-p_2+p_3-p_4+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k,$$
где $p_k>0$. Он называется *знакочередующимся*. Пусть $\{p_k\}\downarrow 0$ (это означает, что $p_{k+1}\le p_k$ и $p_k\to 0$ при $k\to\infty$). Тогда данный ряд называется *рядом Лейбница* .

Утверждение: ряд Лейбница сходится.

Доказательство:

Положим $a_k = (-1)^{k-1}$, $b_k = p_k$. Тогда $\{b_n\} \downarrow 0$ и последовательность

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} = 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

является ограниченной. По теореме 12 ряд сходится, что и требовалось доказать.

Пример: рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Он является рядом Лейбница, и, следовательно, сходится (ранее мы доказали это, не опираясь на теорему 12). Позднее мы покажем, что его сумма равна $\ln 2$.

Задание на дом: пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k = S$$

является рядом Лейбница. Доказать следующие неравенства:

1)
$$S \le p_1;$$

2)
$$|S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k| \le p_{n+1};$$

3)
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad S_2 \le S_4 \le \ldots \le S_{2n} \le S \le S_{2n-1} \le \ldots \le S_3 \le S_1.$$

О сочетательном и перестановочном свойствах рядов.

Конечные суммы обладают сочетательным и перестановочным свойствами. Обладают ли этими свойствами сходящиеся ряды?

Рассмотрим сначала сочетательное свойство. Пусть дан некоторый ряд A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots$$

Введем обозначения $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) = b_1$, $(a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) = b_2$, $\ldots, (\ldots + \ldots + a_{n_k}) = b_k$ и рассмотрим ряд B:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

<u>Теорема 13.</u> Если ряд A сходится, то ряд B также сходится и их суммы равны.

Доказательство:

Частичная сумма ряда B является также частичной суммой ряда A:

$$S_k^B = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_i = S_{n_k}^A.$$

Поэтому последовательность $\{S_k^B\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{S_n^A\}$ и, следовательно, $\{S_k^B\}$ сходится к тому же числу, что и $\{S_n^A\}$, т.е. сумма ряда B равна сумме ряда A. Теорема доказана.

Лекция 16

Числовые последовательности и ряды (продолжение).

Перестановочное свойство.

Рассмотрим ряд A
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
После перестановки его членов получается новый ряд A':
$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k.$$
Ясно, что $a'_k = a_{n_k}$ и также $a_k = a'_{m_k}$, где n_k и m_k —какие-то номера.

Теорема 14. Если ряд A сходится абсолютно, то ряд A' также сходится абсолютно и их суммы равны: $S^A = S^{A'}$.

Доказательство:

а) сначала разберем случай, когда члены A неотрицательны: $a_k \geq 0$. Тогда
$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S^A.$$
Рассмотрим частичную сумму ряда A':
$$S_k^{A'} = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \leq S^A.$$
Итак, последовательность частичных сумм ряда A' ограничена, поэтому этот ряд сходится. При этом
$$S^{A'} = \lim_{k\to\infty} S_k^{A'} \leq S^A.$$
Поскольку ряд A можно рассматривать как ряд, полученный перестановкой членов ряда A', то $S^A \leq S^{A'}$. Отсюда $S^A = S^{A'}$.

б) теперь обратимся к общему случаю, когда члены ряда A являются числами произвольного знака. По условию ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

сходится. По доказанному в пункте а) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|,$$

полученный из ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

перестановкой членов, также сходится. Это означает, что ряд A', полученный из ряда A перестановкой членов, сходится абсолютно.

По теореме 11 лекции 15 имеем: $S^A = S^P - S^Q$, $S^{A'} = S^{P'} - S^{Q'}$ (смысл обозначений такой же, как и в теореме 11). Так как ряд P' получается перестановкой членов ряда P, а ряд Q' —перестановкой членов ряда Q, то, по доказанному в пункте а), $S^{P'} = S^P$ и $S^{Q'} = S^Q$. Поэтому $S^{A'} = S^A$. Теорема 14 полностью доказана.

Если ряд A сходится условно, то перестановочное свойство не имеет места. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 15 (Римана). Если ряд A сходится условно, то для любого числа S можно так переставить члены ряда A, что сумма полученного ряда A' будет равна S.

Доказательство:

Ряду A соответствуют два ряда (см. теорему 11 лекции 15) —ряд P

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

и ряд Q

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

причем, как было показано, эти ряды являются расходящимися. Пусть (для определенности) $S > 0$. Покажем, как можно переставить члены ряда A так, чтобы сумма полученного ряда A' равнялась S.

Сначала будем брать члены ряда P (в порядке их следования) до тех пор, пока не получится сумма, большая S:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1-1} + p_{n_1} > S, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1-1} \leq S.$$

Затем будем добавлять члены ряда Q (со знаком "минус") до тех пор, пока не получится сумма, меньшая S:

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2-1} - q_{n_2} < S, \quad p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2-1} \geq S.$$

Потом снова будем добавлять члены ряда P, и так далее. В результате получится ряд A', частичные суммы S'_n которого "колеблются"около числа S, причем "амплитуда"этих "колебаний"стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $p_n \to 0$ и $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд A' сходится к числу S. Теорема Римана доказана.

§7. Второе определение предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на X и a —предельная точка множества X, т.е. в любой ε-окрестности точки a содержатся точки из X, отличные от a.

Отметим, что понятия *предельной точки числового множества* и *предельной точки числовой последовательности* —различные понятия. Поясняющий пример: рассмотрим множество $X = \{1; 2\}$ и последовательность $\{x_n\} = 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$. У множества X, состоящего из двух чисел, нет предельных точек, тогда как у последовательности $\{x_n\}$, очевидно, их две: $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$.

Определение 1 (по Коши): число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2 (по Гейне): число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Задание: сформулировать отрицание определения предела функции по Гейне, т.е. сформулировать определение того, что

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b.$$

Теорема 16. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство:

1) пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \underline{\text{по Коши}}.$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \underline{\text{по Гейне}},$$

то есть

$$\forall \{x_n\} \to a (x_n \neq a) : \{f(x_n)\} \to b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N : |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

16.4 Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве X, то говорят, что на множестве X задана <u>функциональная последовательность</u>

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots .$$

Подчеркнём, что все функции $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, определены на одном и том же множестве X.

Зафиксируем какое-нибудь значение x_0 аргумента x. Получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится (расходится), то говорят, что <u>функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится (расходится) в точке x_0</u>, а точка x_0 называется <u>точкой сходимости (расходимости)</u> последовательности $\{f_n(x)\}$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке x множества X, то говорят, что она <u>сходится на множестве X</u>. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ зависит, вообще говоря, от x, т.е. является функцией (обозначим её $f(x)$), определённой на множестве X. Функция $f(x)$ называется <u>пределом</u> или <u>предельной функцией</u> последовательности $\{f_n(x)\}$, что обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \to f(x) \text{ при } n\to\infty \text{ на множестве } X.$$

<u>Пример.</u> Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in X = (-\infty, +\infty)$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1<x<1, \\ 1, & \text{если } x=1, \\ \text{не существует}, & \text{если } x \notin (-1,1]. \end{cases}$$

Отметим, что на полуинтервале $(-1 < x \le 1]$ последовательность $\{x^n\}$ непрерывных функций сходится к разрывной (в точке $x=1$) функции $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1<x<1, \\ 1, & \text{если } x=1. \end{cases}$

Рассмотрим теперь ряд, членами которого являются не числа, а функции $(u_k(x),\ k=1,2,\dots)$, определенные на некотором множестве X:

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x).$$

Такой ряд называется *функциональным рядом.*

Если зафиксировать какое-нибудь значение x_0 аргумента x, то получим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$.

Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$ сходится (расходится), то говорят, что *функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится (расходится) в точке x_0.*

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится в каждой точке x множества X, то говорят, что он *сходится на множестве X.* При этом его сумма зависит от x. Будем обозначать её $S(x)$.

Чтобы установить, сходится ли функциональный ряд в данной точке, можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k\right]$ на всей числовой прямой $(-\infty,+\infty)$. [Члены этого ряда $u_k(x)=x^k$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным x. Поэтому данный ряд сходится на интервале $X=(-1<x<1)$ и имеет сумму $S(x)=\frac{x}{1-x}$. Во всех остальных точках числовой прямой данный ряд расходится.

Отметим, что члены ряда $u_k(x)=x^k$ и его сумма $S(x)$ являются непрерывными функциями на интервале $(-1<x<1)$.

2) Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)x^k.$$

Его члены $u_k(x)=(1-x)x^k$ — непрерывные функции на всей числовой прямой. Ряд сходится на полуинтервале

$X = (-1 \le x < 1]$, причём $S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

Таким образом, сумма ряда является разрывной функцией в точке $x=1$.

Этот пример показывает, что, в отличие от конечных сумм, сумма бесконечного ряда непрерывных функций может оказаться разрывной функцией.

Поставим вопрос: в каком случае сумма (сходящегося) ряда, членами которого являются непрерывные функции, будет непрерывной функцией?

И аналогичный вопрос для функциональных последовательностей: в каком случае предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией?

Ответы на эти вопросы связаны с понятием равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X к функции $f(x)$.

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (16.11)$$

Главным моментом в этом определении является то, что для любого ε найдётся "нужный" номер N, один и тот же для всех x из множества X. Термин "равномерно сходится" означает равномерность (одинаковость) по отношению к переменной x — неравенство (выполимеет для всех x из множества X, начиная с номера (одного и того же для всех x).

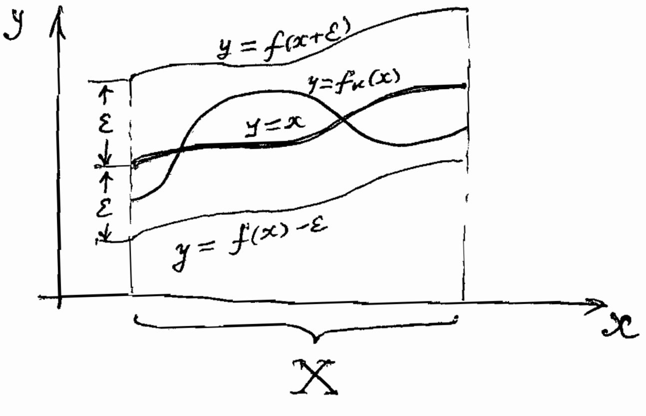


Рис. 16.2

С геометрической точки зрения неравенство (1) означает, что при $n > N$ график функции $y = f_n(x)$ лежит в ε-окрестности графика предельной функции $y = f(x)$, т.е. между кривыми $y = f(x) - \varepsilon$ и $y = f(x) + \varepsilon$ (рис. 16.2).

Обозначение равномерной сходимости: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X.

Сформулируем другое (эквивалентное) определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

<u>Определение 2</u>. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве X, если числовая последовательность $\{\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|\}$ является бесконечно малой, т.е.

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (16.1.2)$$

Эквивалентность определений 1 и 2 следует из того, что если $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x из множества X, то $\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, и обратно: если $\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$.

<u>Примеры.</u> Пусть $f_n(x) = x^n$.

1) Рассмотрим эту последовательность на сегменте $[0 \le x \le \frac{1}{2}]$. На этом сегменте

$$\lim_{n \to \infty} x^n = f(x) = 0. \quad (16.1.3)$$

Так как $\sup\limits_{[0;\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, то функциональная последовательность

$\{x^n\}$ сходится к $f(x)=0$ равномерно на сегменте $[0;\frac{1}{2}]$.

2) Рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на полуинтервале $[0\le x<1)$. На этом множестве снова выполняется равенство (16.13). Но при этом

$\sup\limits_{[0;1)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{[0;1)}|x^n|=1$ для любого n.

Таким образом, условие (16.12) равномерной сходимости не выполнено, и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к $f(x)=0$ на полуинтервале $[0;1)$ неравномерно.

<u>Задание</u>. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=\frac{n}{x+n}$ на множестве:

1) $0\le x\le a$, где a – заданное положительное число;

2) $0\le x<+\infty$.

Введём теперь понятие равномерной сходимости функционального ряда, сходящегося в каждой точке множества X.

<u>Определение</u>. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится к своей сумме $S(x)$ <u>равномерно на множестве</u> X, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на множестве X.

Это означает, ~~...~~ (в соответствии с определением 1), что $\forall\varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in X$ выполняется неравенство

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon,$$

или (в соответствии с определением 2), что

$$\sup_X \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Примеры. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$.

1) Пусть $X = [0 \leq x \leq \frac{1}{2}]$.

Тогда $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$, $|S(x) - S_n(x)| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$,

$$\sup_{[0;\frac{1}{2}]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{[0;\frac{1}{2}]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится к своей сумме $S(x) = \frac{x}{1-x}$ равномерно на сегменте $[0; \frac{1}{2}]$.

2) Пусть $X = [0 \leq x < 1]$.

Тогда снова $S(x) = \frac{x}{1-x}$, $|S(x) - S_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$,

но теперь $\sup\limits_{[0;1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$ для любого n (поскольку $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to \infty$ при $x \to 1-0$ для любого n).

Следовательно, на полуинтервале $[0; 1)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится к своей сумме $S(x) = \frac{x}{1-x}$ неравномерно.

16.5 Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема 12 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности).

Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \qquad (16.14)$$

<u>Доказательство.</u> 1) Необходимость. Докажем сначала, что условие (16.14) является необходимым условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X.

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. Тогда (по определению 1 равномерной сходимости)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а так как $n+p > n$, то $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$ также выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих двух неравенств следует, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$ справедливо неравенство (16.14). Таким образом, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X, то выполнено условие (16.14). Утверждение теоремы о необходимости условия (16.14) доказано.

2) Достаточность. Докажем теперь, что выполнение условия (16.14) является достаточным для равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X.

Пусть условие (16.14) выполнено. Тогда для любого фиксированного значения x из множества X числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится. Предел последовательности $\{f_n(x)\}$ ~~[illegible]~~ обозначим $f(x)$.

Итак, $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ на множестве X.

Отсюда следует, что при любом фиксированном n $f_{n+p}(x) \to f(x)$ при $p \to \infty$ на множестве X.

Перейдём к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (1). Получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in X.$$

Но это и означает (согласно определению 1 равномерной сходимости), что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. Утверждение теоремы о достаточности условия (16.14) доказано.

<u>Замечание</u>. Как уже было отмечено, выполнение условия (16.14) означает, что для любого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной. Поскольку в условии (16.14) номер N — один и тот же для всех $x \in X$, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, удовлетворяющую условию (16.14), можно назвать <u>равномерно фундаментальной</u> на множестве X, а теорему о критерии Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ можно сформулировать так:

для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно фундаментальной на этом множестве.

<u>Примеры</u>. Последовательность $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ является равномерно фундаментальной на сегменте $[0; \frac{1}{2}]$ (и также на любом сегменте $[0; a]$, где $a < 1$), но не является равномерно фундаментальной

на полуинтервале $[0; 1)$.

Теорема 12' (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Для того, чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad (16.15)$$

Утверждение теоремы 12' непосредственно следует из теоремы 12, поскольку равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ — это равномерная сходимость последовательности его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, а для равномерной сходимости последовательности $\{S_n(x)\}$ необходимо и достаточно (в силу теоремы 12), чтобы было выполнено условие (16.15), так как $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$.

Перейдем к достаточным условиям (признакам) равномерной сходимости функциональных рядов.

Определение. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ с положительными членами называется *мажорантным* (или *мажорирующим*) для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X, если $\forall k$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|u_k(x)| \le p_k.$$

<u>Пример.</u> Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ является мажорантным для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ на всей числовой прямой R, поскольку $\forall k$ и $\forall x \in R$ выполнено неравенство $\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \le \frac{1}{k^\alpha}$.

<u>Теорема 13</u> (признак Вейерштрасса). Если для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

<u>Доказательство.</u> Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши для числовых рядов, $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall$ натурального числа p будет выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} p_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon. \qquad (16.16)$$

Так как (в силу условия теоремы) $\forall k$ и $\forall x \in X$ справедливо неравенство $|u_k(x)| \le p_k$, то $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$, используя неравенство (16.16), получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon.$$

Таким образом, для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ~~на множестве X~~ выполнено условие (16.15) из теоремы 12, и, следовательно, этот ряд сходится равномерно на множестве X. Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> Отметим, что при условии теоремы 13 функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно

на множестве X, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

<u>Замечание 2.</u> Поставим вопрос: верно ли утверждение, обратное теореме 13? Иначе говоря, следует ли из равномерной сходимости на множестве X функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ существование сходящегося мажорантного ряда для этого функционального ряда?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Приведём пример.

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. На произвольном множестве X рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, у которого $u_k(x) = a_k = const$ на множестве X.

Так как (числовой) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ~~введённый~~ рассматриваемый функциональный ряд сходится равномерно (на множестве X) (по заданному $\varepsilon > 0$ найдётся "нужный" номер N, один и тот же для всех x из множества X, поскольку члены этого функционального ряда не зависят от x).

Так как $|u_k(x)| = |a_k|$, то "наименьшим" мажорантным рядом для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ является числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ("наименьшим" в том смысле, что ни один член этого мажорантного ряда нельзя уменьшить — если для какого-то ~~[illegible]~~ номера k взять $p_k < |a_k|$, то неравенство $|u_k(x)| \leq p_k$ не будет выполнено, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ не будет мажорантным (для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$). Но "наименьший" мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Таким образом, для сходящегося равномерно на множестве X функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не существует сходящегося мажорантного ряда.

<u>Пример.</u> Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \qquad (16.17)$$

где $\alpha>1$. Так как $\left|\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{k^{\alpha}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, и так как числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$, то (по признаку Вейерштрасса) ~~данный~~ функциональный ряд (4) при $\alpha>1$ сходится равномерно на всей числовой прямой.

Отметим, что если $0<\alpha\le 1$, то ~~этот~~ функциональный ряд (16.17) сходится во всех точках числовой прямой (это было показано в § 16.3), но вопрос о равномерной сходимости ряда остаётся открытым, поскольку признак Вейерштрасса и его обобщение в этом случае "не работают". В самом деле, "наименьшим" мажорантным рядом для ряда является функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^{\alpha}}$, но он расходится при $0<\alpha\le 1$ (это также было показано в § 16.3). Мы вернёмся к вопросу о равномерной сходимости ряда (16.17) при $0<\alpha\le 1$ после рассмотрения ещё одного признака равномерной сходимости рядов — признака Дирихле-Абеля. Предварительно введём ещё одно понятие.

<u>Определение</u>. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется <u>равномерно ограниченной</u> на множестве X, если $\exists$ число $M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x)| \le M.$$

<u>Примеры</u>. 1) Функциональная последовательность $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ является равномерно ограниченной на всей числовой прямой, так как $\forall n$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le 1.$$

Таким образом, ~~число~~ для данной последовательности в качестве числа M можно взять $M=1$ (а также, разумеется, любое число, большее 1).

2) Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{xn}{x+n}\right\}$ на полупрямой $X=\{x: x\ge 0\}$.

Отметим, что: 1) при каждом фиксированном $x\in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, поскольку

$$\forall n: |f_n(x)| = \left|\frac{xn}{x+n}\right| \le x;$$

2) $\forall n$ функция $f_n(x)=\frac{xn}{x+n}$ — ограниченная функция на полупрямой X, так как $\forall x \in X$: $|f_n(x)|\le n$.

Вместе с тем, данная функциональная последовательность не является равномерно ограниченной на полупрямой X. В самом деле,

$$f_n(n)=\frac{n\cdot n}{n+n}=\frac{n}{2}\to\infty \text{ при } n\to\infty,$$

и, следовательно, не существует такого числа M, для которого неравенство $|f_n(x)| \le M$ выполнялось бы $\forall n$ и $\forall x \in X$.

Признак Дирихле-Абеля относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x), \quad x \in X. \qquad (16.18)$$

Введём для таких рядов обозначение:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

<u>Теорема 14</u> (признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости ряда (16.18)).

Пусть выполнены условия:

2) последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X (т.е. $\exists$ число $M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|S_n(x)| \le M$);

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in X$ является невозрастающей (т.е. $\forall n$: $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$), и $b_n(x) \rightrightarrows f(x) = 0$ на множестве X;

Тогда ряд (16.18) сходится равномерно на множестве X.

Доказательство этой теоремы проводится в точности так же, как доказательство теоремы 8 о признаке Дирихле-Абеля для числовых рядов, но только теперь нужно использовать критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Пример. Снова рассмотрим ряд (16.17):
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \text{ где } 0<\alpha\le 1.$$
Введём обозначения: $a_k(x) = \sin kx$, $b_k(x) = \frac{1}{k^{\alpha}}$.
Последовательность $\{b_n(x)\} = \{\frac{1}{n^{\alpha}}\}$ является, очевидно, убывающей, и так как b_n не зависит от x, то $b_n \rightrightarrows 0$ на любом множестве X. Таким образом, условие 1) теоремы 14 выполнено на любом множестве X.
Для $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ в § 16.3 было получено неравенство
$$|S_n(x)| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \text{ если } x \ne 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad (16.19)$$
Возьмём сегмент $X = [\delta \le x \le 2\pi - \delta]$, где δ - любое число из интервала $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ (в этом случае $\delta < 2\pi-\delta$).
Тогда $\forall n$ и $\forall x \in X$ справедливо неравенство
$|S_n(x)| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Это означает, что последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на сегменте X, т.е. выполнено условие 2) теоремы 14.
Следовательно, по признаку Дирихле - Абеля ряд (16.17) при $0<\alpha\le 1$ сходится равномерно на сегменте $X = [\delta; 2\pi-\delta]$.
Так как $\forall$ (положительное) число δ можно взять сколь угодно малым, то справедливо следующее утверждение: <u>ряд (16.17) при $0<\alpha\le 1$ сходится равномерно на любом сегменте, принадлежащем интервалу $(0; 2\pi)$</u>, а поскольку все члены ряда — периодические функции с периодом 2π, то такое же утверждение справедливо для любого интервала

$(2\pi m;\ 2\pi m + 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Как было уже (отмечено, при $\alpha > 0$) ряд (16.17) сходится во всех точках ~~от~~ сегмента $[0, 2\pi]$ (в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ все члены ряда и, следовательно, его сумма равны нулю). Естественно поставить вопрос: сходится ли ряд (16.17) при $0 < \alpha \le 1$ равномерно на всём сегменте $[0; 2\pi]$? Для этого сегмента (и также для любого сегмента $[2\pi m, 2\pi m + 2\pi]$, $m \in \mathbb{Z}$) мы не можем воспользоваться признаком Дирихле-Абеля, поскольку из неравенства (16.19) не следует равномерная ограниченность последовательности $S_n(x)$ на сегменте $[0, 2\pi]$ ($\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \to \infty$ при $x \to +0$). Поэтому вопрос о равномерной сходимости ряда (16.17) при $0 < \alpha \le 1$ на всём сегменте $[0, 2\pi]$ остаётся открытым. Забегая вперёд, отметим, что для $\alpha = 1$ мы получим ответ на этот вопрос в главе 19 при изучении рядов Фурье. Будет ~~показано~~ найдена сумма ряда (16.17) при $\alpha = 1$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \text{ при } 0 < x < 2\pi,$$

а так как $S(0) = S(2\pi) = 0$, то функция $S(x)$ разрывна в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$. Таким образом, ряд, членами которого являются непрерывные функции $\frac{\sin kx}{k}$, ~~сходящийся~~ имеет на сегменте $[0, 2\pi]$ разрывную сумму $S(x)$. Отсюда следует, что данный ряд сходится на сегменте $[0, 2\pi]$ неравномерно, поскольку ~~[illegible]~~ имеет место такая теорема (она будет доказана в следующем параграфе): если членами ряда являются функции, непрерывные на промежутке X, и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма – непрерывная функция на промежутке X.

16.6 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

П.1. Равномерная сходимость и непрерывность.

Теорема 15. Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ являются непрерывными функциями на промежутке X, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом промежутке. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 множества X. По определению непрерывности (функции) нужно доказать, что $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$, такое, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x\in X$, то

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на множестве X, то $\exists N$, такой, что

$$\forall n>N \text{ и } \forall x\in X:\ \left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (16.20)$$

в частности,

$$\forall n>N:\ \left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.21)$$

Возьмём какую-нибудь функцию $f_n(x)$ с номером $n>N$. Для неё выполнены неравенства (16.20) и (16.21), а поскольку $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 (по условию теоремы), то для заданного ε найдётся $\delta>0$, такое, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x\in X$, то

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.22)$$

Из (16.20)–(16.22) следует, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x\in X$, то

$$|f(x)-f(x_0)|\le \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{<\varepsilon/3}<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

<u>Замечание</u>. Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является только достаточным (но не необходимым) условием непрерывности предельной функции. Приведём соответствующий пример.

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{n}{x+n}\right\}$ на полупрямой $X=\{x: x\ge 0\}$. Очевидно, что все функции $f_n(x)$ и также предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=1$ непрерывны на полупрямой X. Но при этом последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=1$ на полупрямой X неравномерно (докажите это).

<u>Теорема 15'.</u> Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ являются непрерывными функциями на промежутке X, и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ — непрерывная функция на промежутке X.

<u>Доказательство.</u> Так как все функции $u_k(x)$

непрерывны на промежутке X, то $\forall n$ частичная сумма $S_n(x)$ является непрерывной функцией на промежутке X. По условию теоремы $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на промежутке X. Поэтому, согласно теореме 15, $S(x)$ – непрерывная функция на промежутке X. Теорема доказана.

П.2. Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X, и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на любом сегменте, принадлежащем промежутку X. Возьмём две точки на этом промежутке – точку x_0 (зафиксируем её) и точку x (она может пробегать весь промежуток X) и рассмотрим интегралы $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ и $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\ ? \tag{16.23}$$

Его можно записать в виде $\left[\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt\right]$.

Если это равенство справедливо, то говорят, что можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$.

Приведём пример, показывающий, что равенство (16.23) может не выполняться.

Пусть $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in X = \{x : x \geq 0\}$.

Очевидно, что $\forall x \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, т.е. предельная функция $f(x)=0$ на полупрямой X.

Возьмём $x_0=0$ и любое $x>0$. Тогда

$$\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x nte^{-nt^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-nt^2}\Big|_0^x=\frac{1}{2}\left(1-e^{-nx^2}\right).$$

Отсюда следует, что $\forall x>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt=\frac{1}{2}$.

Но $\int_0^x f(t)dt=0$ (поскольку $f(t)=0$) и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt\neq\int_0^x\left(\lim_{n\to\infty}f_n(t)\right)dt.$$

Аналогичный вопрос поставим для сходящегося на промежутке X ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, у которого все члены $u_k(x)$ и сумма ряда интегрируемы на любом сегменте, принадлежащем промежутку X: верно ли равенство

$$\int_{x_0}^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\right)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_k(t)dt\,? \qquad (16.24)$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ можно интегрировать почленно на сегменте $[x_0,x]$.

Отметим, что для суммы конечного числа интегрируемых функций такое равенство всегда верно. Для ряда (т.е. для суммы бесконечного числа интегрируемых функций) это равенство может не выполняться, даже если сумма ряда является интегрируемой функцией.

В качестве примера, когда равенство (16.24) не выполняется, можно взять ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, у которого

$u_1(x) = f_1(x)$, $u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$, $k = 2, 3, \ldots$,

где $f_k(x)$ – функции из предыдущего примера: $f_k(x) = kxe^{-kx^2}$, $x \in X = \{x : x \geq 0\}$. Для этого ряда $S_n(x) = f_n(x)$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$, поэтому левая часть равенства (16.24) равна 0, а правая часть равна $\frac{1}{2}$, и, таким образом, это равенство не выполняется.

Оказывается, что равенства (16.23) и (16.24) будут верными, если последовательность $\{f_n(x)\}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходятся равномерно. Более точные формулировки утверждений о справедливости равенств (16.23) и (16.24) содержатся в следующих двух теоремах.

<u>Теорема 16.</u> Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ являются непрерывными функциями на сегменте $[a, b]$, и пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте. Тогда для любых x_0 и x из сегмента $[a, b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad (16.25)$$

причём

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a, b]. \qquad (16.26)$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего отметим, что в силу теоремы 15 предельная функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Чтобы доказать утверждение (16.26) воспользуемся определением 1 равномерной сходимости функциональной последовательности (см. § 15.4). Согласно этому определению нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ будет выполнено неравенство

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| < \varepsilon . \qquad (16.27)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Используя это неравенство, получаем $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [f_n(t) - f(t)]dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \varepsilon \frac{|x-x_0|}{|b-a|} \leq \varepsilon .$$

Итак, условие (16.27) выполнено, что и требовалось доказать.

Теорема 16! Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ являются непрерывными функциями на сегменте $[a,b]$, и ряд сходится равномерно на этом сегменте, то для любых x_0 и x из сегмента ($[a,b]$ справедливо) равенство (16.24):

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно на любом сегменте $[x_0, x]$, принадлежащем сегменту $[a,b]$), причём функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

Доказательство. Так как все функции $u_k(x)$ непрерывны на сегменте $[a,b]$, то (любая) частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ также непрерывна на сегменте $[a,b]$.

По условию теоремы $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на сегменте $[a,b]$, поэтому, согласно теореме 16,

$$\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]. \quad (16.28)$$

Так как $\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ и $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt$, то утверждение (16.28) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Это означает, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt$, т.е. справедливо равенство (16.24). Теорема доказана.

П. 3. Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X, и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ дифференцируемы на промежутке X.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)?$$

Его можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'. \quad (16.29)$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что <u>можно переходить к пределу под знаком производной.</u>

Приведём пример, показывающий, что равенство (16.29) может не выполняться.

Пусть $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Очевидно, что $\forall x \in (-\infty, +\infty)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, т.е. предельная функция $f(x) = 0$ на всей числовой прямой. Все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ дифференцируемы во всех точках числовой прямой:

$$f_n'(x) = \cos nx, \quad f'(x) = 0.$$

Последовательность $\{\cos nx\}$ сходится в точках $x = 2\pi m$, $m \in Z$ (при этом её предел равен 1) и расходится в остальных точках числовой прямой. Следовательно, равенство (16.29) не выполнено ни в одной точке.

Аналогичный вопрос поставим для сходящегося на промежутке X ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, у которого все члены $u_k(x)$ и сумма ряда $S(x)$ — дифференцируемые функции: верно ли равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \ ? \qquad (16.30)$$

Если это равенство верно, то говорят, что <u>ряд</u> $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ <u>можно дифференцировать почленно</u>.

Отметим, что для суммы конечного числа дифференцируемых функций такое равенство всегда верно, а для ряда (т.е. для суммы бесконечного числа дифференцируемых функций) равенство (16.30) может не выполняться, даже если сумма ряда является дифференцируемой функцией.

Оказывается, что равномерная сходимость играет важную роль при рассмотрении вопроса о справедливости равенств (16.29) и (16.30).

Теорема 17. Пусть выполнены условия:

1) все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на сегменте $[a,b]$;

3) $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Тогда функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b]. \qquad (16.31)$$

Доказательство. Так как $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$, то по теореме 15 функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, а по теореме 16 для любых x и x_0 из сегмента $[a,b]$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt. \qquad (16.32)$$

Поскольку $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(x_0)] = f(x) - f(x_0)$, то равенство (16.32) можно записать в виде $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ или

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

При фиксированной точке x_0 $f(x_0) = const$, а интеграл $\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ представляет собой интеграл с переменным верхним пределом. Так как $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то интеграл с переменным верхним пределом является дифференцируемой функцией на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\left(\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt\right)' = \varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

Следовательно, функция $f(x)$ также дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и выполняется равенство (16.31): $f'(x) = \varphi(x)$. Теорема доказана.

Теорема 17! Пусть выполнены условия:

1) все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеют непрерывные производные $u_k'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $S(x)$;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\varphi(x)$.

Тогда функция $S(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$S'(x) = \varphi(x). \qquad (16.33)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, т.е. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Из условий теоремы следует, что:

1) все члены этой последовательности имеют непрерывные производные $S_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) $\{S_n(x)\} \to S(x)$ на сегменте $[a,b]$;

3) $\{S_n'(x)\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x)\right\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Таким образом, для последовательности $\{S_n(x)\}$

выполнены все условия теоремы 17. По теореме 17 функция $S(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство $S'(x)=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$.
Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство (16.33) можно записать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x),$$

Таким образом, при условиях теоремы 17' ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно дифференцировать почленно на сегменте $[a,b]$.

Замечание 2. Утверждение теоремы 17' остается в силе, если условие 2) заменить условием 2') ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a,b]$.

Задание. Докажите, что из условий 2') и 3) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на сегменте $[a,b]$.

16.7 Сходимость в среднем

В m-мерном координатном пространстве R^m расстояние между точками $M_1(x_1,x_2,\dots,x_m)$ и $M_2(y_1,y_2,\dots,y_m)$ было определено формулой (см. §):

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_m-y_m)^2}. \quad (16.34)$$

Если на каком-то множестве введено расстояние между элементами множества, то говорят, что в этом множестве введена метрика, а само множество с введённым расстоянием между элементами называют метрическим пространством. При этом расстояние между элементами (будем называть их также точками) должно удовлетворять (для ~~любых~~ точек x, y, z) следующим условиям:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причём $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда точки x и y совпадают $(x=y)$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

Примером метрического пространства является координатное пространство R^m с введённым по формуле (16.34) расстоянием между точками.

Сходимость последовательности точек $\{M_n\}$ в пространстве R^m определялась с помощью расстояния между точками: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$, если $\rho(M_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$.

Говорят также, что это — сходимость в метрике данного пространства.

В математике нередко рассматривают метрические пространства, элементами (точками) которых являются функции. Приведём примеры таких пространств.

1) Рассмотрим множество всевозможных ограниченных функций на сегменте $[a,b]$. Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ этого множества определим расстояние между ними по формуле

$$\rho(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Задание. Проверьте, что все три условия, которым должно удовлетворять расстояние, выполнены.

Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ в заданной метрике означает, что

$\rho(f_n, f) = \sup\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. это — равномерная сходимость на сегменте $[a,b]$ (см. определение 2 в § 16.4).

2) Рассмотрим множество всех кусочно-непрерывных функций на сегменте $[a,b]$, (где $a<b$) удовлетворяющих условию: если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0-0) + f(x_0+0)\right], \qquad (16.35)$$

где $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого множества определим расстояние между ними по формуле

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}. \qquad (16.36)$$

Условия 1) - 3), которым должно удовлетворять расстояние, при этом выполнены (проверьте это). Тот факт, что в точках разрыва функция имеет значение, определенное формулой (16.35) важен потому, что без этого условия $\rho(f,g)$ может быть равно нулю для неравных функций f и g, и, тем самым, не будет выполнено условие 1).

Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ в метрике, заданной формулой (16.36), означает, что

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \to 0 \text{ при } n\to\infty. \qquad (16.37)$$

Такая сходимость и называется <u>сходимостью в среднем</u>.

Итак, мы вводим следующее <u>определение</u>.

Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и также функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ <u>сходится в среднем</u> к функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, если выполнено условие (16.37).

Нам известны теперь три вида сходимости функциональной последовательности на сегменте $[a,b]$:

1) сходимость в каждой точке сегмента $[a,b]$ (поточечная сходимость);

2) равномерная сходимость на сегменте $[a,b]$;

3) сходимость в среднем на сегменте $[a,b]$.

Поставим вопрос: какова связь между этими видами сходимости?

Очевидно, что из равномерной сходимости функциональной последовательности на сегменте $[a,b]$ следует поточечная сходимость, т.е. сходимость этой функциональной последовательности в каждой точке сегмента $[a,b]$. Обратное, как мы знаем, неверно.

Такого же типа связь существует между равномерной сходимостью и сходимостью в среднем.

<u>Теорема 18.</u> Если все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ (т.е. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем).

<u>Доказательство.</u> Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}.$$

Используя это неравенство, получаем $\forall n>N$:

$$\rho^2(f_n,f)=\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Итак, $\forall n>N$ выполнено неравенство $\rho^2(f_n,f)<\varepsilon$, а это означает, что $\rho^2(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Теорема 18 доказана.

Замечание. В условии теоремы мы потребовали, чтобы функция $f(x)$ (как и все функции $f_n(x)$) была интегрируемой на сегменте $[a,b]$. Можно доказать, что если все функции $f_n(x)$ интегрируемы и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то предельная функция $f(x)$ также будет интегрируемой на сегменте $[a,b]$ (см. [ ]).

Обратное по отношению к теореме 18 утверждение не верно. Более того, из сходимости функциональной последовательности в среднем на сегменте $[a,b]$ не следует даже поточечная сходимость этой последовательности.

Пример 1. Для любого натурального числа k и любого натурального числа i, такого, что $1 \le i \le k$, определим функцию $f_{ki}(x)$ на сегменте $0 \le x \le 1$ следующим образом:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{i-1}{k} \le x \le \frac{i}{k}, \\ 0 & \text{в остальных точках сегмента } [0;1]. \end{cases}$$

График функции $y = f_{ki}(x)$ представлен на рисунке 16.3. Составим функциональную последовательность

$$\{f_n(x)\} = f_{11}(x), f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{k1}(x), f_{k2}(x), \dots$$
$$\dots f_{kk}(x), \dots$$

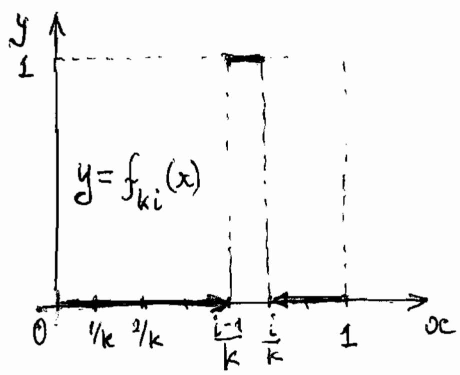


Рис. 16.3

Эта последовательность сходится в среднем к функции $f(x) = 0$ на сегменте $[0;1]$, поскольку

$$\rho^2(f_{ki}, f) = \int\limits_0^1 (f_{ki}(x) - f(x))^2 dx = \int\limits_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1 \cdot dx = \frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Вместе с тем, последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится ни в одной точке x из сегмента $[0;1]$, так как $\forall x \in [0;1]$ эта последовательность содержит бесконечно много членов, равных 0, и бесконечно много членов, равных 1.

Таким образом, из сходимости в среднем не следует поточечная сходимость.

Пример 2. Рассмотрим (на сегменте $[0 \le x \le \pi]$) функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin nx, & \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{в остальных точках сегмента } [0; \pi]. \end{cases}$$

Так как $\frac{\pi}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\forall x \in (0;1]$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ выполнено неравенство $\frac{\pi}{n} < x$ и, следовательно, $f_n(x) = 0$ $\forall n > N$. Отсюда следует, что

$$\forall x \in (0; 1] : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Для $x = 0$ это предельное равенство также верно, поскольку $\forall n : f_n(0) = \sqrt{n} \cdot \sin 0 = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Итак, $\forall x \in [0,1] : \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, т.е. $f_n(x) \to f(x) = 0$ на сегменте $[0; 1]$. Это наглядно видно на рисунке 16.4, где представлены графики некоторых членов последовательности.

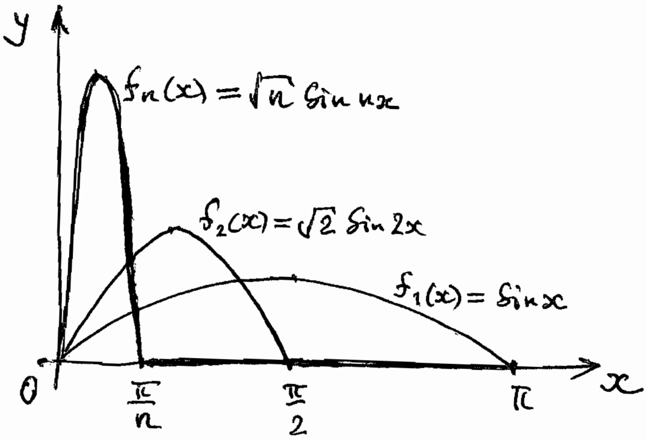


Рис. 16.4

Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем к $\overset{\text{функции}}{f(x)}=0$ на сегменте $[0;\pi]$.

В самом деле, $\forall n$:

$$\rho^2(f_n,f)=\int_0^{\pi} f_n^2(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{n}} n\sin^2 nx\,dx=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx=$$

$$=\left(\frac{n}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2nx\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\forall n:\ \rho^2(f_n,f)=\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, условие $\rho^2(f_n,f)\to 0$ при $n\to\infty$ не выполнено. А это и означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем к функции $f(x)=0$ на сегменте $[0;\pi]$.

Таким образом, из поточечной сходимости не следует сходимость в среднем.

1.9 Введём теперь понятие сходимости в среднем для функционального ряда.

<u>Определение</u>. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, т.е. если

$$\int_a^b\left[S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отметим, что ряд, сходящийся в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, может не сходиться поточечно, и тогда функция $S(x)$ не будет суммой этого ряда.

Оказывается, что сходимость функционального ряда в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этого ряда, а сходимость в среднем функциональной последовательности обеспечивает возможность перехода к пределу под знаком интеграла. Рассмотрим соответствующие теоремы.

Теорема 19.

Если все члены функциональной (последовательности $\{f_n(x)\}$) и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на этом сегменте, то $\forall\, x_0$ и x из сегмента $[a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(т.е. можно переходить к пределу под знаком интеграла), причём

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Доказательство. По условию

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx \to 0 \text{ при } n\to\infty, \qquad (16.38)$$

а нужно доказать, что для любого фиксированного x_0

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]$$

или, что то же самое,

$$\int_{x_0}^{x} [f_n(t)-f(t)]\,dt \rightrightarrows 0 \text{ на сегменте } [a,b].$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

применительно к интегралу $\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\,dt$. Получим

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\cdot 1\,dt\right| \leq \sqrt{\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]^2 dt \cdot \int_{x_0}^{x} 1^2 dt} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b [f_n(t)-f(t)]^2 dt \cdot (b-a)}\,. \qquad (16.39)$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$. Из условия (16.38) дует, что $\exists N$, такой, что $\forall n>N$ правая часть в неравенстве (16.39) будет меньше ε. Следовательно, $\forall n>N$ и $\forall x\in[a,b]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\,dt\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ на сегменте $[a,b]$. Теорема 19 доказана.

<u>Теорема 19'</u> Если все члены функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и функция $S(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\forall\, x_0$ и x из сегмента $[a,b]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \qquad (16.40)$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно), причём функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится к функции $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt$ равномерно на сегменте $[a,b]$.

<u>Доказательство.</u> По условию последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\} = \{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\}$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$. Поэтому, согласно теореме 19,

$$\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Это и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится к функции $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt$ равномерно на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство (16.40). Теорема 19' доказана.

16.8 Теорема Арцéла.

Мы знаем, что из ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}$ (и также из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ точек m-мерного евклидова пространства) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано — Вейерштрасса). А верно ли аналогичное утверждение для функциональной последовательности? Теорема Арцела даёт (при определённых условиях) положительный ответ на этот вопрос. Более того, в этой теореме речь пойдёт о выделении ~~[illegible]~~ подпоследовательности, равномерно сходящейся на заданном сегменте.

Чтобы сформулировать теорему Арцела,

нам понадобится ещё одно понятие.

<u>Определение</u>. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, заданная на промежутке X, называется <u>равностепенно непрерывной</u> на этом этом промежутке, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x'$ и x'' из промежутка X, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Главным моментом в этом определении является то, что для любого заданного ε найдётся "нужное" δ, одно и то же для всех функций $f_n(x)$.

Из данного определения следует, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на промежутке X, то каждая функция $f_n(x)$ является равномерно непрерывной на этом промежутке. Обратное не верно.

<u>Пример</u>. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}=\{\sin nx\}$ на сегменте $[0\le x\le 1]$.

Каждая функция $f_n(x)=\sin nx$ непрерывна на сегменте $[0;1]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом сегменте (по теореме Кантора).

Вместе с тем данная последовательность не является равностепенно непрерывной. В самом деле, возьмём $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и положим $x'=\frac{\pi}{2n}$, $x''=\frac{\pi}{n}$.

Тогда $\forall \delta>0\ \exists n$, такое, что $|x'-x''|=\frac{\pi}{2n}<\delta$, но при этом

$$|f_n(x')-f_n(x'')|=|\sin nx'-\sin nx''|=|\sin\tfrac{\pi}{2}-\sin\pi|=1>\varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{\sin nx\}$ не является равностепенно непрерывной на сегменте $[0;1]$.

<u>Задание</u>. Докажите, что если все функции $f_n(x)$ дифференцируемы на промежутке X и последовательность $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на этом промежутке (т.е. $\exists M>0$, такие, что $\forall n$ и $\forall x\in X$: $|f_n'(x)|\le M$), то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на промежутке X.

<u>Теорема 20 (Арцела)</u>. Если функциональная последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте, то из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом сегменте.

<u>Доказательство.</u> Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте $[a,b]$. Доказательство теоремы проведём в два этапа:

1) на первом этапе из последовательности $\{f_n(x)\}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся во всех рациональных точках сегмента $[a,b]$.

2) на втором этапе докажем, что эта подпоследовательность сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

1-й этап. Множество всех рациональных точек сегмента $[a,b]$ счётно, т.е. все рациональные числа этого сегмента можно занумеровать с помощью натуральных чисел. Пусть $\{x_n\} = (= x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность, составленная из всех натуральных чисел сегмента $[a,b]$. Рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена и, следовательно, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую обозначим так:

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots\ ;$$

каждый член подпоследовательности снабжён двумя индексами, причём первый индекс у всех членов один и тот же — он совпадает с номером точки x_1.

Итак, функциональная подпоследовательность

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots$$

сходится в точке x_1. Выделим из неё подпоследовательность, сходящуюся в точке x_2, и занумеруем её так:

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots$$

(первый индекс совпадает с номером точки x_2).

Эта подпоследовательность сходится в двух точках — x_1 и x_2. Из неё выделим подпоследовательность, сходящуюся в точке x_3, и так далее. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность подпоследовательностей:

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \\ \text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \\ \text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \end{array}$$

При этом последовательность, стоящая в n-й строке, сходится в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому диагональная подпоследовательность

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots \qquad (16.41)$$

сходится во всех точках $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. В самом деле, в любой точке x_n диагональная подпоследовательность, начиная с номера n, т.е. последовательность

$$f_{nn}(x_n),\ f_{n+1,n+1}(x_n), \dots, \qquad (16.42)$$

является подпоследовательностью последовательности

$f_{n1}(x_n), f_{n2}(x_n), \dots, f_{nn}(x_n), \dots$, стоящей в n-й строке, а эта последовательность сходится. Поэтому и её подпоследовательность (16.42) сходится, откуда следует, что последовательность (16.41) сходится в точке x_n.

Итак, диагональная подпоследовательность (16.41) сходится во всех рациональных точках сегмента $[a,b]$.

2-й этап. Докажем теперь, что подпоследовательность (16.41) сходится равномерно на сегменте $[a,b]$. Для этого достаточно доказать, что она является равномерно фундаментальной на сегменте $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall m > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$\left| f_{nn}(x) - f_{mm}(x) \right| < \varepsilon. \qquad (16.43)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a,b]$, то $\exists\, \delta > 0$, такое, что $\forall n$ и $\forall\, x'$ и x'' из сегмента $[a,b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon/3 . \qquad (16.44)$$

Для указанного δ можно выбрать из последовательности $\{x_n\}$ конечное число (рациональных) точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_p}$ так, что они разобьют сегмент $[a, b]$ на частичные сегменты, длины которых меньше δ (считаем, что число таких точек равно p). Тогда $\forall x \in [a, b]\ \exists x_{n_i}$, такое, что $|x - x_{n_i}| < \delta$, и, следовательно, в силу неравенства (16.44) $\forall n$ выполняется неравенство

$$|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3} . \qquad (16.45)$$

Подпоследовательность (16.41) сходится во всех рациональных точках (сегмента $[a,b]$), в том числе и в точках $x_{n_1}, \dots, x_{n_p}$. Поэтому, согласно критерию Коши для числовых последовательностей, для заданного $\varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall m > N$ будет выполнено неравенство

$$|f_{nn}(x_{n_i}) - f_{mm}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3} , \qquad (16.46)$$

причём существует общий номер N для всех точек $x_{n_1}, \dots, x_{n_p}$, поскольку этих точек — конечное число (p точек).

~~[illegible]~~

Так как $\forall x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| \le |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| +$$

$$+ |f_{nn}(x_{n_i}) - f_{mm}(x_{n_i})| + |f_{mm}(x_{n_i}) - f_{mm}(x)| ,$$

и так как первое и третье слагаемые в правой части меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу (16.45), а второе слагаемое $\forall n >$ и $\forall m > N$

меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу (16.46), то мы приходим к выводу: для ~~заданного~~ произвольно $\varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall m > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство (16.43):

$$| f_{nn}(x) - f_{mm}(x) | < \varepsilon .$$

Это означает, что подпоследовательность $\{f_{nn}(x)\}$ является равномерно фундаментальной на сегменте $[a,b]$, и, следовательно, она сходится равномерно на этом сегменте. Теорема Арцела доказана.

<u>Замечание</u>. Вместо условия равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ можно потребовать её ограниченность хотя бы в одной точке сегмента. Из ограниченности в какой-то одной точке и равностепенной непрерывности следует равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте.

Глава 17. Несобственные интегралы

В главе 5 было введено понятие определённого интеграла от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$. При введении этого понятия (и изучении его свойств) существенными были два момента: 1) промежуток интегрирования (сегмент $[a,b]$) — ограниченное множество (для неограниченного промежутка введённое определение интеграла не пригодно); 2) функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a,b]$ (определённый интеграл от неограниченной на сегменте функции не существует). Различные задачи в математике и её приложениях приводят к необходимости обобщить понятие определенного интеграла на случаи, когда либо промежуток интегрирования неограниченный, либо подынтегральная функция является неограниченной. В результате появляются понятия несобственных интегралов первого и второго рода.

17.1 Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < +\infty$ и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$. Очевидно, он является функцией переменной A. Рассмотрим

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем обозначать его так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

и называть несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ по полупрямой $[a,+\infty)$.

Если указанный предел существует (~~не~~ существует), то говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится).

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty, a]$: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{a} f(x)dx$ и несобственный интеграл по всей числовой прямой: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_{B}^{A} f(x)dx$.

Примеры.

1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{A} \right) = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$.

2) $\int_{0}^{+\infty} \sin x\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \sin x\, dx = \lim_{A\to+\infty} (1-\cos A)$ — не существует, т.е. $\int_{0}^{+\infty} \sin x dx$ расходится.

3) $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, где $a>0$, α — произвольное число.

Если $\alpha \neq 1$, то $\int_{a}^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{a}^{A} = \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right)$.

(Отсюда следует, что) если $\alpha>1$, то $\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$, а если $\alpha<1$, то $\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = +\infty$, т.е. при $\alpha<1$ этот предел не существует.

Если $\alpha=1$, то $\int_{a}^{A} \frac{dx}{x} = \ln A - \ln a \to +\infty$ при $A\to+\infty$ и, следовательно, $\lim_{A\to+\infty} \int_{a}^{A} \frac{dx}{x}$ не существует.

Таким образом, данный интеграл сходится, если $\alpha>1$ (при этом $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$), и расходится, если $\alpha \leq 1$.

В рассмотренных примерах первообразная для подынтегральной функции выражалась через элементарные функции, и это помогло установить сходимость (или расходимость) несобственного интеграла. Однако первообразная для подынтегральной функции может не быть элементарной функцией. Например, рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ является непрерывной на полупрямой $[0,+\infty)$ (можно считать, что в точке $x=0$ функция доопределена по непрерывности, т.е. её значение при $x=0$ равно 1), поэтому она имеет первообразную, которую обозначим $F(x)$. Согласно определению несобственного интеграла первого рода

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} [F(A)-F(0)].$$

Но поскольку мы не знаем выражение для первообразной $F(x)$ (она не является элементарной функцией), то вопрос о существовании предела $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ (т.е. вопрос о сходимости данного несобственного интеграла) остаётся пока открытым. Для ответа на этот вопрос нужны признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

17.2 Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода).

Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ число A, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$:

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

<u>Доказательство.</u> Введём обозначение

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx.$$

По определению сходимость несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ означает существование предела $\lim\limits_{A\to\infty} \Phi(A)$. В свою очередь, для того чтобы существовал этот предел, необходимо и достаточно (согласно критерию Коши существования предела функции $\Phi(A)$ при $A\to\infty$), чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists A$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(A'') - \Phi(A')| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

<u>Пример.</u> Рассмотрим снова несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ и чтобы установить, сходится он или расходится, воспользуемся критерием Коши. С этой целью получим оценку для интеграла $\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}dx$. Так как

$$\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}dx = \int_{A'}^{A''} \frac{d(-\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{A'}^{A''} - \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

(здесь мы воспользовались формулой интегрирования по частям), то

$$\left|\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{1}{A''} + \frac{1}{A'} + \left|\int_{A'}^{A''} \frac{dx}{x^2}\right| = \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} + \left| -\frac{1}{x}\Big|_{A'}^{A''}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и возьмем $A = \frac{4}{\varepsilon}$. Тогда $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ получим:

$$\left|\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''} < \frac{4}{A} = \varepsilon.$$

Откуда следует (в силу критерия Коши), что несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

<u>Замечание</u>. Мы ещё вернёмся к этому интегралу и сможем его вычислить (в следующей главе). Оказывается, что он равен $\frac{\pi}{2}$.

<u>Признак сравнения</u>

Пусть $f(x) \geq 0$ на полупрямой $[a, +\infty)$ и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx = \Phi(A)$. Функция $\Phi(A)$ (интеграл с переменным верхним пределом) является, очевидно, неубывающей функцией переменной A (поскольку $f(x) \geq 0$). Поэтому для существования предела $\lim\limits_{A\to\infty} \Phi(A)$ (т.е. для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$) необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(A)$ была ограниченной на полупрямой $[a, +\infty)$. Это позволяет сформулировать следующий признак сравнения.

<u>Теорема 2</u>. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $[a, +\infty)$, интегрируемы на любом сегменте $[a, A]$, где $A > a$, и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, +\infty).$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx \tag{17.1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx\,, \tag{17.2}$$

а из расходимости интеграла (17.2) следует расходимость интеграла (17.1).

<u>Доказательство.</u> Введём обозначение:

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)\,dx,\quad G(A)=\int_a^A g(x)\,dx.$$

Из условий теоремы следует, что $\forall A \geq a$ выполняются неравенства

$$0 \leq \Phi(A) \leq G(A). \qquad (17.3)$$

Если интеграл (17.1) сходится, то функция $G(A)$ ограничена на $[a,+\infty)$, поэтому в силу (17.3) функция $\Phi(A)$ также ограничена и, значит, интеграл (17.2) сходится.

А если интеграл (17.2) расходится, то функция $\Phi(A)$ будет неограниченной на $[a,+\infty)$, поэтому в силу (17.3) функция $G(A)$ также будет неограниченной и, следовательно, интеграл (17.1) расходится.

Теорема 2 доказана.

<u>Следствие 1.</u> (признак сравнения в предельной форме.)

(со стр. 7)

<u>Следствие.</u> Пусть $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ на полупрямой $[a,+\infty)$; $\forall A>a$ существуют определенные интегралы $\int_a^A f(x)\,dx$ и $\int_a^A g(x)\,dx$ и существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Тогда: 1) если $k>0$, то интегралы (17.1) и (17.2) сходятся или расходятся одновременно;

2) если $k=0$, то из сходимости интеграла (17.1) следует сходимость интеграла (17.2), а из расходимости интеграла (17.2) следует расходимость интеграла (17.1).

Докажите это следствие.

<u>Следствие 1.</u> Если на полупрямой $[a, +\infty)$, где $a>0$, функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам

$0 \le f(x) \le \frac{c}{x^\alpha}$, где c — положительное число, $\alpha > 1$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится;

если же $f(x) \ge \frac{c}{x^\alpha}$, где $c>0$, $\alpha \le 1$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Утверждение следует из теоремы 2 и того факта, что $\int\limits_a^\infty \frac{c}{x^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

На стр. 6

<u>Примеры.</u> 1) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\frac{1}{x}\,dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x} > 0$ на полупрямой $[1, +\infty)$. Так как $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, то для применения признака сравнения возьмём $g(x) = x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$.

Интеграл $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится, если $1-\alpha>1$, т.е. $\alpha<0$, и расходится, если $1-\alpha \le 1$, т.е. $\alpha \ge 0$, а поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

то, согласно следствию 2, интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\frac{1}{x}\,dx$ сходится, если $\alpha<0$, и расходится, если $\alpha \ge 0$.

2) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^\alpha e^{-x} > 0$ на $[1, +\infty)$.

Для применения признака сравнения возьмём $g(x) = \frac{1}{x^2}$, для которой $\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+2}e^{-x} = 0$ для любого α, то интеграл $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$ сходится для любого α.

3) Интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (он называется интегралом Пуассона) сходится. Докажите это, взяв в качестве функции сравнения $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Признак Дирихле-Абеля

Признак сравнения (теорема 2) относится к неотрицательным (подынтегральным) функциям. В этом отношении он аналогичен признаку сравнения для (числовых) рядов с положительными членами. Для исследования сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций бывает полезен (при определенных условиях) признак Дирихле-Абеля (аналогичный признаку Дирихле-Абеля для числовых рядов). Он относится к несобственным интегралам вида

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx.$$

Теорема 3 (признак Дирихле-Абеля).

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a,+\infty)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$ $(F'(x) = f(x))$;

2) функция $g(x)$ не возрастает на полупрямой $[a,+\infty)$, стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся критерием Коши (теорема 1). С этой целью рассмотрим интеграл $\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx$, где $A' > a$ и $A'' > a$. Преобразуем его по формуле интегрирования по частям, учитывая, что $f(x)dx = dF(x)$:

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} F(x)g'(x)dx. \qquad (17.4)$$

Так как функция $F(x)$ ограничена (по условию), то $\exists M>0$, такое, что $\forall x \in [a,+\infty): |F(x)| \le M$, а поскольку $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $g'(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$ на полупрямой $[a,+\infty)$.

Пусть (для определённости) $A'' \ge A'$. Тогда из (17.4) получим:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx \right| \le \left| g(A'')F(A'')\right| + \left| g(A')\cdot F(A')\right| - M\int\limits_{A'}^{A''} g'(x)dx \le M\left(g(A'')+g(A')\right) - M\left(g(A'')-g(A')\right) = 2Mg(A').$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как

$g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, то $\exists A>a$, такое, что $\forall A'>A$ выполняется неравенство $g(A')<\frac{\varepsilon}{2M}$.

Следовательно, $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ получаем неравенство

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2Mg(A')<\varepsilon,$$

а это и означает, согласно критерию Коши, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Теорема 3 доказана.

<u>Примеры.</u> 1) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

Положим $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^{\alpha}$.

Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна на полупрямой $[1,+\infty)$ и имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$. Тем самым, условие 1) теоремы 3 выполнено.

Если $\alpha>0$, то функция $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ убывает на полупрямой $[1,+\infty)$, стремится к нулю при $x\to+\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x)=-\alpha x^{-\alpha-1}$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 также выполнено.

По теореме 3 интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится, если $\alpha>0$.

Отметим, что для $\alpha=1$ сходимость этого интеграла уже была доказана (с помощью критерия Коши).

Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что для $\alpha \le 0$ данный интеграл расходится (для $\alpha = 0$ это уже было доказано в § 17.1).

2) Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ (он называется интегралом Френеля). Представим его в виде

$$\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int\limits_0^1 \sin(x^2)\,dx + \int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части равенства — это определённый интеграл от непрерывной функции (он существует), а во втором слагаемом сделаем замену переменной $x = \sqrt{t}$, $1 \le t < \infty$. Тогда $x^2 = t$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ и для второго слагаемого получаем:

$$\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Интеграл в правой части равенства сходится (см. пример 1, здесь $\alpha = \frac{1}{2} > 0$). Следовательно, сходится и интеграл Френеля.

Но нужно сделать одну оговорку. Мы произвели замену переменных в несобственном интеграле. Правомерно ли это? Ответ таков: при определённых условиях имеет место теорема о замене переменной в несобственном интеграле (см. [Ильин, Позняк]). Мы не будем рассматривать эту теорему, отметим только, что к интегралу Френеля она применима.

Замечание. Как мы знаем, необходимым условием сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ является условие: $[a_n \to 0$ при $n \to \infty.]$ Можно подумать (проводя аналогию между числовыми рядами и несобственными интегралами), что необходимым условием сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ должно быть условие

$$f(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Однако это не так, и контрпримером служит интеграл Френеля. Этот интеграл сходится, но при этом $f(x) = \sin(x^2)$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

17.3 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ расходится.

Отметим, что если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться критерием Коши сходимости несобственных интегралов первого рода и неравенством $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{A'}^{A''} |f(x)|\,dx\right|$ (если правая часть неравенства меньше ε, то и левая часть меньше ε).

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

В § 17.2 было доказано, что этот интеграл сходится при $\alpha>0$ и расходится при $\alpha\le 0$.

Если $\alpha>1$, то интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится абсолютно, т.е. сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$. Для доказательства этого можно воспользоваться признаком сравнения: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha>1$.

Докажем, что для $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно. Для этого нужно доказать, что $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ расходится, если $0<\alpha\le 1$.

Так как $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, то для доказательства расходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ достаточно доказать (в силу признака сравнения), что расходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ сходится (для $0<\alpha\le 1$) (это нетрудно доказать с помощью признака Дирихле – Абеля, сделайте это), а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{2x^\alpha}$ расходится, если $0<\alpha\le 1$. Поэтому интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ также расходится, если $0<\alpha\le 1$.

Итак, несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно, если $0<\alpha\le 1$; сходится абсолютно, если $\alpha>1$; расходится, если $\alpha\le 0$.

17.4 Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a,b]$, где $a<b$, не ограничена на этом полусегменте, но ограничена на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$ (здесь δ – произвольное положительное число, такое, что $a+\delta<b$). Точку a назовём особой точкой функции $f(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha>0$, на полусегменте $(0;1]$. Она неограничена на этом полусегменте (так как $\frac{1}{x^\alpha}\to\infty$ при $x\to 0$), но ограничена на любом сегменте вида $[\delta, 1]$, где $0<\delta<1$ (на этом сегменте $0<f(x)\le\frac{1}{\delta^\alpha}$). Точка $x=0$ является особой точкой этой функции.

Вернёмся к функции $f(x)$, неограниченной на полусегменте $(a,b]$ и ограниченной на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $\delta>0$ и $a+\delta<b$. (Отметим, что на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ не интегрируема в силу неограниченности, т.е. определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует). Интеграл $\int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx$ является функцией переменной δ. Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Он может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть этот предел несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$

по полусегменту $(a, b]$ и будем обозначать его так же, как определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если указанный предел существует (не существует), то говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится).

Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту $[a, b)$, где b – особая точка $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$, и несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по интервалу (a, b), где a и b – особые точки $f(x)$ (и других особых точек на сегменте $[a, b]$ у функции $f(x)$ нет): $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx$.

Если ~~точка~~ внутренняя точка c сегмента $[a, b]$ является особой точкой функции $f(x)$ как на сегменте $[a, c]$, так и на сегменте $[c, b]$, и других особых точек на сегменте $[a, b]$ у функции $f(x)$ нет, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется как сумма двух пределов: $\lim_{\delta_1\to+0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2\to+0} \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$. Если оба предела существуют, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если хотя бы один из пределов не существует, то — расходится.

Примеры. 1) Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Особой точкой функции $\frac{1}{x^\alpha}$ является точка $x=0$. Поэтому, согласно определению,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\delta^1, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_\delta^1, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1-\delta^{1-\alpha}), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ -\ln \delta, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $0 < \alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geq 1$.

2) Аналогично доказывается, что несобственные интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, где $a < b$, сходятся, если $0<\alpha<1$, и расходятся, если $\alpha \geq 1$.

Для несобственных интегралов второго рода имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим некоторые из них для несобственных интегралов по полусегменту $(a, b]$, где a — особая точка функции.

<u>Теорема 4 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода).</u>

Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по полусегменту $(a, b]$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, такое, что $\forall \delta'$ и δ'', удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$, $0<\delta''<\delta$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

По определению сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ означает существование предела $\lim\limits_{\delta\to+0}\Phi(\delta)$.

В свою очередь, для того чтобы существовал этот предел, (согласно критерию Коши существования одностороннего предела функции) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, такое, что $\forall \delta'$ и δ'', удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$, $0<\delta''<\delta$, выполнялось неравенство

$$|\Phi(\delta')-\Phi(\delta'')|<\varepsilon, \text{ т.е. } \left|\int\limits_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5 (признак сравнения).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$: 1) определены на полусегменте $(a,b]$, где a - особая точка этих функций, интегрируемы на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $a<a+\delta<b$, и 2) удовлетворяют неравенствам

$$0\le f(x)\le g(x), \quad x\in(a,b]. \qquad (17.5)$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int\limits_a^b g(x)dx \qquad (17.6)$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad (17.7)$$

а из расходимости интеграла (17.7) следует расходимость интеграла (17.6).

Следствие. Если вместо условия (17.5) выполнены условия

$$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ на полусегменте } (a, b]$$

$$\text{и } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0,$$

то интегралы (17.6) и (17.7) сходятся или расходятся одновременно.

Докажите теорему 5 и её следствие самостоятельно.

Примеры. 1) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} > 0$ и имеет особую точку $x = 1$. Возьмём $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Эта функция также положительная и имеет ту же особую точку $x = 1$.

Так как $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}} = \frac{1}{2} > 0$

и интеграл $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится (здесь $\alpha = \frac{1}{2} < 1$),

то, согласно следствию из теоремы 5, интеграл

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ сходится.

2) Рассмотрим (несобственный) интеграл $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$.

Представим его в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$, $I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$.

Интеграл I_1 является несобственным интегралом второго рода, поскольку $x = 0$ — особая точка функции $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ $\left(\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty\right)$. Возьмём в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1>0$ и интеграл $\int\limits_0^1 g(x)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то, согласно следствию из теоремы 5, интеграл I_1 сходится.

Интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода. Он сходится — это было установлено в § 17.2. Таким образом, несобственный интеграл $I=I_1+I_2$ сходится.

3) Исследовать, при каких значениях α сходится интеграл $I=\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx$.

Представим его в виде

$$I=I_1+I_2,$$

где $I_1=\int\limits_0^1 x^\alpha e^{-x}dx$, $I_2=\int\limits_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$.

Если $\alpha\geq 0$, то интеграл I_1 является определённым интегралом от непрерывной функции, а если $\alpha<0$, то I_1 — несобственный интеграл второго рода, поскольку $x=0$ является особой точкой функции $f(x)=x^\alpha e^{-x}$ ($\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha e^{-x}=\infty$ при $\alpha<0$). В качестве функции сравнения при $\alpha<0$ возьмём $g(x)=x^\alpha$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+0}e^{-x}=1>0$, то, согласно следствию из теоремы 5, интегралы I_1 и $\int\limits_0^1 x^\alpha dx$ при $\alpha<0$ сходятся или расходятся одновременно.

Поскольку $\int\limits_0^1 x^\alpha dx \left(=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{-\alpha}}\right)$ сходится, если $-\alpha<1$, т.е. $-1<\alpha<0$, и расходится, если $\alpha\leq-1$, то и интеграл I_1 сходится, если $-1<\alpha<0$, и расходится, если $\alpha\leq-1$.

Интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода. Он сходится для любого α — это было установлено в 217.2. Таким образом, несобственный интеграл $I=I_1+I_2$ сходится, если $\alpha>-1$, и расходится, если $\alpha\leq-1$.

17.5. Главное значение несобственного интеграла.

Рассмотрим пример: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$. По определению этот несобственный интеграл сходится (расходится), если существует (не существует) предел $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}} \int\limits_B^A x\,dx$, т.е. $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}} \frac{1}{2}(A^2-B^2)$.

Поскольку этот предел не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ расходится. Но если взять $B=-A$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} x\,dx$ существует и равен нулю. Этот предел и называется главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$. Сформулируем общее определение.

Определение. Если существует $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$, то он называется *главным значением* несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (в смысле Коши) и обозначается так:

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(**V.p.** – начальные буквы французских слов "Valeur principal", означающих "Главное значение").

Если несобственный интеграл $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)$ сходится, то его значение равно, очевидно, главному значению этого интеграла. Но может быть так, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, т.е. не существует $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}}\int\limits_B^A f(x)dx$, но имеет конечное главное значение.

Именно к такому случаю относится рассмотренный пример: $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$, причём особой точкой функции $f(x)$ является внутренняя точка c сегмента $[a, b]$.

По определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left[\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx\right]. \qquad (17.8)$$

Рассмотрим этот предел при условии, что $\delta_1 = \delta_2$.

Определение. Если существует

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right],$$

то он называется главным значением несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (в смысле Коши) и обозначается так: $V.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Отметим, что при этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть расходящимся, т.е. может не существовать предел (17.8).

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}.$$

Особой точкой функции $\frac{1}{x}$ является точка $x = 0$. Этот несобственный интеграл расходится, поскольку

$$\int\limits_{-1}^{-\delta_1}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta_2}^{2}\frac{dx}{x} = \ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \ln 2,$$ а предел $\lim\limits_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left(\ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \ln 2\right)$

не существует. Если же $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то

$$\lim_{\delta \to +0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{2} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\delta \to +0} \ln 2 = \ln 2.$$

Таким образом, $V.p. \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \ln 2.$

17.6. Кратные несобственные интегралы.

Как и в случае одномерных интегралов, несобственный кратный интеграл — это либо интеграл от неограниченной функции, либо интеграл по неограниченной области, либо одновременно и то, и другое.

Пусть G — ограниченная квадрируемая область на плоскости (x, y) и пусть в области G (за исключением, быть может, точки $M_0(x_0, y_0)$) определена функция $f(x,y)$, неограниченная в любой окрестности точки M_0. Точка M_0 называется в этом случае особой точкой функции $f(x,y)$.

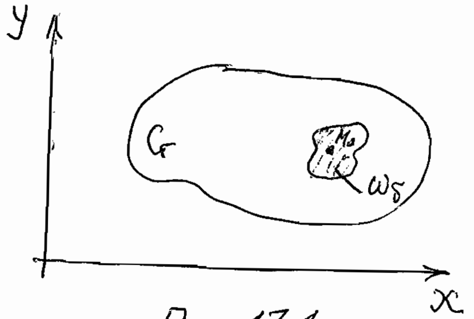


Рис. 17.1

Обозначим через ω_δ произвольную (квадрируемую) окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ. (рис. 17.1). Пусть для любой окрестности ω_δ функция $f(x,y)$ интегрируема в области $G - \omega_\delta$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{G - \omega_\delta} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Можно сказать, что при $\delta \to 0$ окрестность ω_δ стягивается к точке M_0.
Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть его несобственным интегралом от функции $f(x,y)$ по области G.

(Для кратных несобственных интегралов обычно не вводят разделение на несобственные интегралы первого и второго рода, хотя по аналогии с одномерными интегралами данный несобственный интеграл следует отнести к несобственным интегралам второго рода).

Если указанный предел существует и не зависит от способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае — *расходится*.

В любом случае несобственный интеграл обозначается так же, как и двойной интеграл:

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Наряду с произвольным стягиванием окрестности ω_δ к точке M_0 важную роль в ряде задач математической физики играет рассмотрение случая, когда ω_δ — круг радиуса δ с центром M_0.

Если существует $\lim\limits_{\delta\to 0} \iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)\,dx\,dy$ при условии, что ω_δ — круг радиуса δ с центром M_0, то этот предел называется *главным значением* несобственного интеграла $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ и обозначается так:

$$V.p. \iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Если несобственный интеграл сходится, то его главное значение равно значению этого интеграла, но может быть так, что несобственный интеграл расходится, но имеет конечное главное значение (придумайте соответствующий пример).

Пусть теперь функция $f(x,y)$ определена в неограниченной области G и пусть последовательность $\{G_n\}$

ограниченных (квадрируемых) областей монотонно исчерпывает область G. Это означает, что $G_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$.

Пример. Последовательность концентрических кругов с радиусами, равными n, монотонно исчерпывает всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в любой ограниченной квадрируемой области, содержащейся в области G. Рассмотрим числовую последовательность $\{I_n\}$, где

$$I_n = \iint\limits_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy,$$

а последовательность $\{G_n\}$ монотонно исчерпывает область G.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности $\{G_n\}$, то говорят, что несобственный интеграл от функции $f(x,y)$ по области G сходится, в противном случае — расходится.

Обозначается несобственный интеграл по неограниченной области G обычным образом: $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$.

Пример 1. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

В качестве последовательности ограниченных квадрируемых областей G_n, монотонно исчерпывающей всю плоскость $\mathbb{R}^2$, возьмем сначала последовательность (концентрических) кругов $G_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \le n^2\}$. Для вычисления интеграла

$$I_n = \iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le n$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Получим

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r\,dr = \pi(1-e^{-n^2}).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \pi$

Докажем, что для любой другой последовательности $\{\tilde{G}_n\}$ ограниченных квадрируемых областей, монотонно исчерпывающей плоскость R^2, соответствующая числовая последовательность $\{\tilde{I}_n\} = \{\iint\limits_{\tilde{G}_n} f(x,y)\,dx\,dy\}$ сходится и её предел также равен π.

Очевидно, что $\forall \tilde{G}_n\ \exists G_k$ (круг радиуса k с центром в начале координат), такой, что $\tilde{G}_n \subset G_k$. Поэтому

$$\tilde{I}_n = \iint\limits_{\tilde{G}_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy \le \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = I_k = \pi(1-e^{-k^2}) \le \pi.$$

Таким образом, $\{\tilde{I}_n\}$ – возрастающая ограниченная последовательность. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \le \pi$.

С другой стороны, $\forall G_n\ \exists \tilde{G}_{k_n}$, такая, что $G_n \subset \tilde{G}_{k_n}$, откуда следует, что $\tilde{I}_{k_n} \ge I_n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_{k_n} \ge \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \pi$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \le \pi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \ge \pi$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n = \pi$, что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение позволяет сделать вывод: несобственный интеграл $\iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$ сходится и равен π.

Возьмём теперь в качестве последовательности $\{G_n\}$ последовательность $\{G_n'\}$ квадратов $G_n' = \{(x,y),\ -n\le x\le n,\ -n\le y\le n\}$. Тогда

$$I_n' = \iint\limits_{G_n'} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy = K_n^2,$$

где $K_n = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = \pi$ (согласно доказанному), а $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, получим: $K^2 = \pi$, т.е.

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Этот несобственный интеграл называется интегралом Пуассона.

Так как e^{-x^2} – чётная функция, то $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$ и, следовательно,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (17.9)$$

В математической физике важную роль играет функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt.$$

Она носит название "интеграл ошибок." Из равенства (17.9) следует, что $\Phi(\infty) = 1$.

Кратные несобственные интегралы обладают удивительным (на первый взгляд) свойством, отличающим их от одномерных несобственных интегралов, а именно: для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны, т.е. если несобственный интеграл $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$ сходится, то несобственный интеграл $\iint\limits_{G} |f(x,y)|\,dx\,dy$ также сходится, и обратно.

Доказательство этого утверждения имеется в [Ильин, Позняк].

Возникает вопрос: почему для кратных несобственных интегралов это свойство имеет место, а у одномерных несобственных интегралов этого свойства нет?

Ответ таков: это свойство кратных несобственных интегралов обусловлено тем, что в определение их сходимости заложено <u>произвольное</u> стягивание окрестности ω_δ к точке M_0 в случае, когда M_0 — особая точка функции, и <u>произвольное</u> (монотонное) исчерпывание области G последовательностью $\{G_n\}$ в случае, когда G — неограниченная область. Для сравнения с определением сходимости одномерного несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ заметим, что в этом определении ($\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$) полупрямая $[a,+\infty)$ монотонно исчерпывается расширяющимися сегментами вида $[a, A]$ при $A\to\infty$, и не допускается какой-то другой способ монотонного исчерпывания этой полупрямой. Укажем один из таких (недопустимых) способов. Разобьем полупрямую $[a,+\infty)$ на сегменты:

$A_1 = [a, a+1]$, $A_2 = [a+1, a+2]$, $A_3 = [a+2, a+3]$, ..., $A_n = [a+n-1, a+n]$, ...

и образуем последовательность $\{X_n\}$ множеств следующим образом:

X_1 содержит два сегмента (в порядке следования) с нечётными номерами (т.е. A_1 и A_3) и один сегмент с чётным номером (т.е. A_2);

X_2 содержит $2\cdot 2^2 = 8$ сегментов (в порядке следования) с нечётными номерами и два сегмента с чётными номерами (т.е. A_2 и A_4);

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

для любого n X_n содержит $n\cdot 2^n$ сегментов с нечётными номерами и n сегментов с чётными номерами (т.е. $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$).

Очевидно, что $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = [a, \infty)$, т.е. последовательность множеств X_n монотонно исчерпывает полупрямую $[a, +\infty)$. Введём обозначение:

$I_n = \int\limits_{X_n} f(x)\,dx$. Может случиться так, что $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ (т.е. несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится,) существует, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ не существует.

В качестве примера такого случая рассмотрим несобственный интеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$. Как было установлено в § 17.2, это интеграл сходится, т.е. существует $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A \frac{\sin x}{x} dx$. Но если разбить полупрямую $[0, \infty)$ на сегменты $A_n = [(n-1)\pi, n\pi]$, $n = 1, 2, \ldots$ и образовать последовательность множеств $\{X_n\}$ так, как указано выше, то окажется, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{\sin x}{x} dx$ не существует (докажите это).

Если в определении сходимости одномерных несобственных интегралов вида $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ допустить произвольное исчерпывание полупрямой $[a, \infty)$, то множество сходящихся интегралов станет более узким, но зато понятия сходимости и абсолютной сходимости станут эквивалентными.

Рассмотрим два важных примера несобственных кратных интегралов.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy,$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая ~~точка~~ внутренняя точка ограниченной квадрируемой области G, $M(x,y)$ — произвольная точка этой области, $r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ —

расстояние между точками M_0 и M, $\alpha > 0$ — фиксированное число. Так как $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}} \to \infty$ при $M \to M_0$, то M_0 — особая точка подынтегральной функции. Выясним, для каких значений α этот интеграл сходится.

Возьмём число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы ε-окрестность точки M_0 (т.е. открытый круг радиуса ε с центром M_0) целиком содержалась в области G (рис. 17.2). В

Рис. 17.2

области $G - \omega_\varepsilon$ функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ является непрерывной и ограниченной: $0 < \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}} \le \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}$.

Поэтому двойной интеграл

$$\iint\limits_{G-\omega_\varepsilon} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy$$

существует. Интеграл $I_\varepsilon = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy$ является несобственным интегралом. Очевидно, что сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла I_ε. Для исследования вопроса о сходимости несобственного интеграла I_ε нужно рассмотреть предел

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{\omega_\varepsilon - \omega_\delta} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy\,, \qquad (17.10)$$

где ω_δ — произвольная окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ и которая содержится в круге ω_ε.

Отметим, что подынтегральная функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ — положительная. Оказывается, что если функция $f(x,y) \geqslant 0$ в области G, то для сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to 0} \iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)\,dx\,dy$ существовал хотя бы для какого-нибудь одного способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0 (доказательство этого утверждения можно провести аналогично тому, как в примере 1 была доказана независимость предела $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$ от выбора последовательности $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей плоскость $\mathbb{R}^2$).

Воспользуемся этим утверждением и возьмём в (17.10) в качестве ω_δ круг радиуса δ с центром M_0 (рис. 17.3). Для вычисления интеграла $\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy$

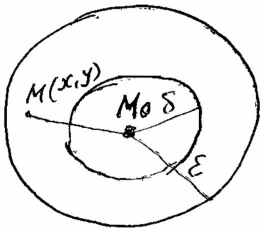


Рис. 17.3

перейдём к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \delta \le r = r_{M_0M} \le \varepsilon,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Тогда $\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\delta^\varepsilon \frac{1}{r^\alpha}\,r\,dr =$

$$= 2\pi \begin{cases} \left.\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_\delta^\varepsilon, & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \left.\ln r\right|_\delta^\varepsilon, & \text{если } \alpha = 2 \end{cases} = 2\pi \begin{cases} \dfrac{1}{2-\alpha}\left(\varepsilon^{2-\alpha} - \delta^{2-\alpha}\right), & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \ln\dfrac{\varepsilon}{\delta}, & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy$ существует и равен $\frac{2\pi\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}$, если $0<\alpha<2$, и этот предел не существует, если $\alpha \ge 2$.

Итак, несобственный интеграл

$$\iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy$$

сходится, если $0<\alpha<2$, и расходится, если $\alpha \ge 2$.

Замечание 1. Мы рассмотрели двойные несобственные интегралы. Аналогично вводятся тройные и, вообще, n-кратные несобственные интегралы. Как и для двойного интеграла можно доказать, что n-кратный несобственный интеграл $\int\limits_{G}\cdots\int \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx_1\cdots dx_n$ (где $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ — некоторая внутренняя точка (ограниченной кубируемой) области G, а $M(x_1,\dots,x_n)$ — произвольная точка этой области) сходится, если $0<\alpha<n$, и расходится, если $\alpha \geq n$, в частности, тройной несобственный интеграл указанного вида сходится, если $0<\alpha<3$, и расходится, если $\alpha>3$.

Пример 3. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\iint\limits_{R^2-\omega_a} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy\,,$$

где R^2 — плоскость (x,y), ω_a — круг радиуса a с центром M_0, $M_0(x_0,y_0)$ — некоторая фиксированная точка плоскости, $M(x,y)$ — произвольная точка области $R^2-\omega_a$,

$r_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ — расстояние между точками M_0 и M, $\alpha>0$ — фиксированное число. Выясним, при каких значениях α этот интеграл сходится.

Отметим, что подынтегральная функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ является непрерывной, положительной и ограниченной в области $(R^2-\omega_a)$: $0<\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\leq\frac{1}{a^{\alpha}}$.

В качестве последовательности квадрируемых областей G_n, монотонно исчерпывающей область $R^2-\omega_a$, возьмём последовательность колец, ограниченных окружностями радиусов a и n с центром M_0 (рис. 17.4).

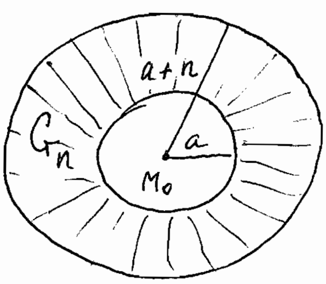


Рис. 17.4

Для вычисления двойного интеграла

$$I_n = \iint\limits_{G_n} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy$$

перейдем к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ a \le r = r_{M_0M} \le a+n,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Тогда $I_n = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^{n} \frac{1}{r^\alpha}\, r\,dr =$

$$= 2\pi \begin{cases} \left.\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_a^{a+n}, & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \ln r\Big|_a^{a+n}, & \text{если } \alpha = 2 \end{cases} = 2\pi \begin{cases} \dfrac{1}{2-\alpha}\left((a+n)^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}\right), & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \ln\dfrac{a+n}{a}, & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует и равен $\dfrac{2\pi a^{2-\alpha}}{\alpha-2}$, если $\alpha > 2$, и этот предел не существует, если $0 < \alpha \le 2$.

Как и в примере 1, можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ не зависит от выбора последовательности $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей область $R^2-\omega_a$.

Таким образом, несобственный интеграл

$$\iint\limits_{R^2-\omega_a} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy$$

сходится, если $\alpha > 2$, и расходится, если $0 < \alpha \le 2$.

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что n-кратный несобственный интеграл

$$\int\limits_{R^n-\omega_a}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx_1 \cdots dx_n$$

(где R^n – n-мерное евклидово пространство, ω_a – n-мерный шар радиуса a с центром M_0) сходится, если $\alpha > n$, и расходится, если $0 < \alpha \le n$.

Замечание 3. При исследовании на сходимость кратных несобственных интегралов часто используют признак сравнения и сравнивают подынтегральную функцию с функцией $\frac{c}{r^\alpha}$.

Глава 18. Интегралы, зависящие от параметров

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Подынтегральная функция зависит от x и y. Пусть при каждом значении y из некоторого множества Y этот интеграл существует. Тогда он является функцией аргумента y, определённой на множестве Y. Обозначим эту функцию $F(y)$:

$$F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Функция $F(y)$ называется интегралом, зависящим от параметра y.

Если a и b — какие-то числа, т.е. промежуток интегрирования — сегмент $[a,b]$, и функция $f(x,y)$ ограничена на сегменте $[a,b]$ при каждом y из множества Y, то данный интеграл представляет собой определённый интеграл и называется собственным интегралом, зависящим от параметра y. Если же промежуток интегрирования бесконечный (т.е. либо $a=-\infty$, либо $b=\infty$, либо $a=-\infty$ и $b=\infty$) или $f(x,y)$ — неограниченная функция, то данный интеграл называется несобственным интегралом, зависящим от параметра y.

Если подынтегральная функция зависит не от одного параметра y, а от нескольких: $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то и интеграл $\int\limits_a^b f(x,y_1,\ldots,y_m)\,dx$ будет функцией m переменных $y_1,\ldots,y_m$.

Аналогично вводятся кратные интегралы,

зависящие от параметров:

$$F(y_1, \ldots, y_m) = \int\limits_{G} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Итак, интегралы, зависящие от параметров, — это функции этих параметров, заданные специальным образом — с помощью интегралов. Мы рассмотрим вопросы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости таких функций. Ясно, что ответы на эти вопросы зависят от подынтегральной функции. Исследование указанных свойств несобственных интегралов, зависящих от параметров, потребует введения новых понятий.

Отметим, что интегралы, зависящие от параметров, играют важную роль в математической физике. С одним физическим примером — ньютоновым потенциалом — мы познакомимся в конце главы.

18.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и интегрируема по x на сегменте $[a, b]$ при каждом y из сегмента $[c,d]$. Тогда

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

является функцией аргумента y, определённой на сегменте $[c, d]$. Функцию $F(y)$ мы назовем собственным интегралом, зависящим от параметра y.

Займёмся исследованием свойств этой функции.

Теорема 1 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, то функция $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Q.

Поэтому $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall$ точек $M'(x',y')$ и $M''(x'',y'')$ из прямоугольника Q, удовлетворяющих условию $\rho(M',M'')<\delta$, выполняется неравенство $|f(x',y')-f(x'',y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. В частности, $\forall x\in[a,b]$ и $\forall y'$ и y'' из сегмента $[c,d]$, удовлетворяющих условию $|y'-y''|<\delta$, будет выполнено неравенство

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно, если $|y'-y''|<\delta$, то

$$|F(y')-F(y'')|=\left|\int_a^b f(x,y')\,dx-\int_a^b f(x,y'')\,dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b |f(x,y')-f(x,y'')|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что если $|y'-y''|<\delta$, то $|F(y')-F(y'')|<\varepsilon$. Это означает, что функция $F(y)$ равномерно непрерывна (а, значит, и просто непрерывна) на сегменте $[c,d]$. Теорема 1 доказана.

Обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 1'. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ и пусть непрерывные функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ определены на сегменте $[c,d]$

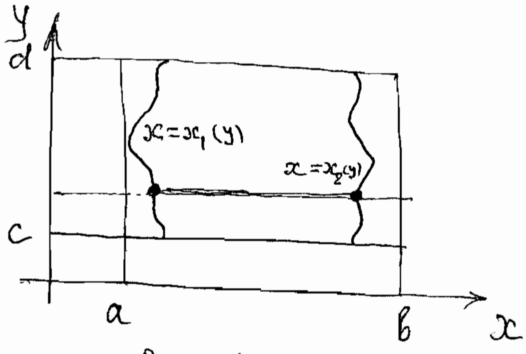


Рис. 18.1

и удовлетворяют неравенствам

$$a\le x_1(y)\le x_2(y)\le b \quad \text{при } c\le y\le d$$

(рис. 18.1).

Тогда функция

$$g(y)=\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

непрерывна на сегменте $[c,d]$.

(Докажите эту теорему самостоятельно).

Теорема 2 (об интегрировании по параметру).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d F(y)dy=\int\limits_c^d\Big[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx. \quad (18.1)$$

(в таком случае говорят, что можно изменить порядок интегрирования).

Доказательство. По теореме 1 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, поэтому существует двойной интеграл $\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$ и существуют внутренние интегралы в повторных интегралах, входящих в равенство (18.1). Следовательно (см. главу 11), существуют повторные интегралы и каждый из них равен двойному интегралу, а, значит, эти повторные интегралы равны друг другу, т.е. выполняется равенство (18.1). Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (о дифференцировании по параметру)

Пусть функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. Тогда функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ имеет на сегменте $[c,d]$ непрерывную производную $F'(y)$ и справедливо равенство

$$F'(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

(В таком случае говорят, что интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла).

Доказательство. Введём функцию

$$G(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

По теореме 1 функция $G(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$. Нам нужно доказать, что функция $F(y)$ имеет (непрерывную) производную и $F'(y)=G(y)$.

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt=\int\limits_c^y\Big[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\Big]dt.$$

В силу теоремы 2 в повторном интеграле можно изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\Big]dx.$$

Внутренний интеграл в правой части равенства вычислим по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt = f(x,t)\Big|_c^y = f(x,y) - f(x,c).$$

Таким образом,

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_a^b \left[f(x,y) - f(x,c)\right]dx = F(y) - F(c),$$

откуда получаем:

$$F(y) = \int\limits_c^y G(t)\,dt + F(c).$$

Так как $G(t)$ – непрерывная функция, то $\frac{d}{dy}\left[\int\limits_c^y G(t)\,dt\right] = G(y)$ (производная интеграла с переменным верхним пределом).

Следовательно,

$$F'(y) = G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Теорема 3 доказана.

Обобщением теоремы 3 является следующая теорема.

<u>Теорема 3'.</u> Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть $x_1(y)$ и $x_2(y)$ – дифференцируемые на сегменте $[c,d]$ функции, удовлетворяющие неравенствам

$$a \le x_1(y) \le x_2(y) \le b \quad \text{при} \quad c \le y \le d \quad (\text{см. рис. } 18.1).$$

Тогда функция

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$g'(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(x_2(y),y)\cdot x_2'(y) - f(x_1(y),y)\,x_1'(y). \quad (18.2)$$

Доказательство. Введём функцию

$$\Phi(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)\,dx, \quad c\le y\le d,\ a\le u\le b,\ a\le v\le b.$$

Вычислим её частные производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (\text{в силу теоремы } 3),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=-f(u,y),\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}=f(v,y).$$

Заметим, что эти частные производные являются непрерывными функциями аргументов y,u,v. Поэтому $\Phi(y,u,v)$ — дифференцируемая функция.

Положив $u=x_1(y)$, $v=x_2(y)$, получим сложную функцию аргумента y:

$$\Phi(y,x_1(y),x_2(y))=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx=g(y), \quad c\le y\le d.$$

Эта функция дифференцируема (по теореме о дифференцируемости сложной функции), и её производная вычисляется по формуле:

$$g'(y)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot x_1'(y)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot x_2'(y)\right]_{\substack{u=x_1(y)\\ v=x_2(y)}}=$$

$$=\left[\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx-f(u,y)\,x_1'(y)+f(v,y)\,x_2'(y)\right]_{\substack{u=x_1(y)\\ v=x_2(y)}}=$$

$$=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx+f(x_2(y),y)\,x_2'(y)-f(x_1(y),y)\,x_1'(y).$$

Полученное равенство для $g'(y)$ совпадает с (18.2). Теорема 3' доказана.

18.2 Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости

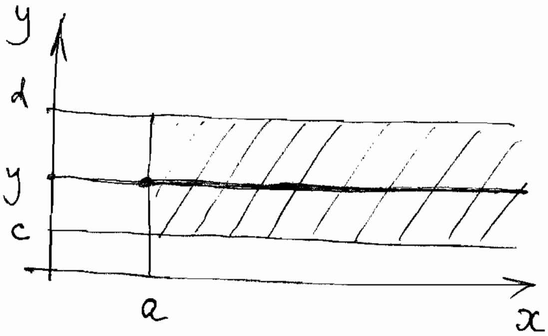


Рис. 18.2

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе $\{(x,y): x \ge a,\ c \le y \le d\}$ (рис. 18.2) и пусть для каждого значения y из сегмента $[c,d]$ сходится несобственный интеграл первого рода $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$. Тогда на сегменте $[c,d]$ определена функция

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx,$$

которая называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y.

Замечание. Параметр y может изменяться не на сегменте, а на полупрямой ($y \ge c$ или $y \le c$), или на всей числовой прямой ($-\infty < y < \infty$), или на каком-то другом множестве.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\,dx$$

на полупрямой $y \ge 0$. Если $y=0$, то $F(0)=0$, а если $y>0$, то $F(y) = \lim\limits_{A\to\infty} \int_0^A y e^{-xy}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}(1-e^{-Ay}) = 1$.

Итак, данный несобственный интеграл сходится $\forall y \ge 0$, причём

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ 1, & \text{если } y>0. \end{cases}$$

Обратим внимание на тот факт, что подынтегральная функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в квадранте

$\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0\}$, а функция $F(y)=\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$ разрывна в точке $y=0$. В связи с этим отметим, что:

1) для собственного интеграла $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывность $f(x,y)$ гарантировала непрерывность функции $F(y)$ (теорема 1);

2) с аналогичной ситуацией мы встречались при изучении функциональных рядов: сумма ряда, членами которого являются непрерывные функции, может быть разрывной функцией.

В теории функциональных рядов и последовательностей важную роль играло понятие равномерной сходимости. Например (как мы знаем), если члены ряда — непрерывные функции и ряд сходится равномерно на некотором промежутке, то и сумма ряда — непрерывная функция на этом промежутке.

Введём понятие равномерной сходимости для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Вставка (стр. 9а).

<u>Определение.</u> Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на промежутке Y, если он сходится $\forall y\in Y$ и если $\forall\varepsilon>0\ \exists A\ (A\geq a)$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in Y$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon. \tag{18.3}$$

Главным моментом в этом определении является то, что по заданному ε найдётся "нужное" A, одно и то же для всех y из промежутка Y. Неравенство (18.3) означает, что "остаток" несобственного интеграла, т.е. $\int\limits_a^\infty - \int\limits_a^{A'} = \int\limits_{A'}^\infty f(x,y)dx$, Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится для любого y из промежутка Y. Это означает, что $\forall y \in Y$ существует предел

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x,y)\,dx,$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a$, такое, что $\forall A' > A$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\left| \int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

При этом число A может зависеть не только от ε, но и от y, и может случиться так, что не существует общего числа A для всех y из промежутка Y. Если же найдётся общее для всех y число A, то мы будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

можно сделать меньше (по абсолютной величине) любого наперёд заданного положительного числа ε сразу для всех $y \in Y$, если взять A' достаточно большим.

Вернёмся к рассмотренному примеру:

$$F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\,dx, \quad y \geq 0,$$

и исследуем этот несобственный интеграл на равномерную сходимость. С этой целью рассмотрим для этого интеграла неравенство (18.3) при $y > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$:

$$\left| \int_{A'}^\infty y e^{-xy}\,dx \right| = e^{-A'y} < \varepsilon. \tag{18.4}$$

Это неравенство выполняется, если $A' > -\frac{\ln\varepsilon}{y}$. Так как $-\frac{\ln\varepsilon}{y} \to +\infty$ при $y \to +0$, то для заданного ε ($0<\varepsilon<1$) не существует числа A (одного и того же для всех $y > 0$), такого, чтобы $\forall A' > A$ и $\forall y > 0$ выполнялось неравенство (18.4). Это означает, что данный несобственный интеграл сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $(0, \infty)$ (и также на полупрямой $[0, \infty)$).

<u>Задание.</u> 1. Сформулируйте определение неравномерной сходимости по параметру y несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ (т.е. отрицание равномерной сходимости) и примените его для установления неравномерной сходимости при $y > 0$ рассмотренного несобственного интеграла.

2. Докажите (на основе определения равномерной сходимости), что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на любой полупрямой $[\delta, \infty)$, где $\delta > 0$.

Перейдём к признакам равномерной сходимости несобственных интегралов.

Теорема 4 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра).

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из промежутка Y. Для того чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру y на промежутке Y, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \geq a$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon. \qquad (18.5)$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y. Тогда (согласно определению равномерной сходимости) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A$, такое, что если $A' > A$ и $A'' > A$, то $\forall y \in Y$ будут выполнены неравенства

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя эти неравенства, получаем:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists A$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall'' > A$ и $\forall y \in Y$ выполнено неравенство (18.5). Тем самым утверждение о необходимости (условия (18.5)) доказано.

2) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$, такое, что $\forall A' > A$, $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство (18.5). Перейдем в этом неравенстве к пределу при $A'' \to \infty$. Получим, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq \varepsilon,$$

а это и означает, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y. Теорема 4 доказана.

Теорема 5 (мажорантный признак Вейерштрасса).

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $G = \{(x,y): x \geq a, y \in Y$, где Y — некоторый промежуток$\}$; $\forall y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на любом сегменте вида $[a, A]$; в области G выполняется неравенство $|f(x,y)| \leq g(x)$, где $g(x)$ — такая функция, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ и $\int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши для несобственных интегралов первого рода $\exists A > a$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а так как $|f(x,y)| \le g(x)$, то $\forall y \in Y$ будут выполнены неравенства

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x,y)|\,dx\right| \le \left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что несобственные интегралы $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty |f(x,y)|\,dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y. Теорема 5 доказана.

<u>Задание</u>. Докажите, используя признак Вейерштрасса, что несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty y e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[\delta \le y < \infty)$, где $\delta > 0$.

Следующий признак равномерной сходимости относится к (несобственным) интегралам вида

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx. \qquad (18.6).$$

<u>Теорема 6 (признак Дирихле – Абеля).</u>

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G = \{(x,y):\ x \ge a,\ y \in Y$, где Y – некоторый промежуток$\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной x $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y),\ |F(x,y)| \le M,\ (x,y) \in G\right)$;

2) функция $g(x,y)$ при каждом значении y из промежутка Y является невозрастающей функцией аргумента x

на полупрямой $[a,\infty)$; $g(x,y)$ стремится к нулю при $x\to\infty$ равномерно относительно переменной $y\in Y$ (т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists A>a$, такое, что $\forall x>A$ и $\forall y\in Y$: $|g(x,y)|<\varepsilon$); $g(x,y)$ имеет непрерывную в области G частную производную $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$.

Тогда несобственный интеграл (18.6) сходится равномерно по параметру y на промежутке Y.

<u>Доказательство</u> теоремы проводится в точности так же, как и доказательство теоремы о признаке Дирихле - Абеля для несобственного интеграла вида $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ (теорема 3 в § 17.2), но только теперь нужно воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (теорема 4 данного параграфа).

<u>Задание.</u> Проведите доказательство теоремы 6.

<u>Пример.</u> Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx.$$

Он сходится $\forall y\in(-\infty,\infty)$: при $y=0$ он равен нулю, при $y\neq0$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (теорема 3 из § 17.2). Докажем, что этот интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0,\infty)$, где $y_0>0$.

Положим $f(x,y)=\sin xy$, $g(x,y)=\frac{1}{x}$.

Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 6: она непрерывна в области $G=\{(x,y): x\geq1,\ y\geq y_0\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной x: $F(x,y)=-\frac{\cos xy}{y}$, $|F(x,y)|\leq\frac{1}{y_0}$.

Функция $g(x,y)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 6: $g(x,y)=\frac{1}{x}$ — убывающая функция на полупрямой $[1,\infty)$; $g(x,y)\to0$ при $x\to\infty$, причём это стремление равномерно по y, поскольку $g(x,y)$ не зависит от y; $g(x,y)$

имеет непрерывную производную $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$.

Следовательно, по признаку Дирихле - Абеля данный несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0, \infty)$.

Задание. Докажите (с помощью критерия Коши), что этот интеграл сходится неравномерно по y на всей прямой!

18.3 О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра

Обратимся ещё раз к примеру, рассмотренному в § 18.2:

$$F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ 1, & \text{если } y>0. \end{cases}$$

В этом примере подынтегральная функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в квадранте $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, а функция $F(y)$ (несобственный интеграл, зависящий от параметра y) разрывна в точке $y=0$. Как мы установим, это обусловлено неравномерной сходимостью несобственного интеграла по параметру y.

Теорема 7 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $\{(x,y) : x \geq a,\ c \leq y \leq d\}$, и пусть несобственный интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y) dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$. Тогда функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Доказательство. Для каждого натурального числа n введём функцию

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y) dx.$$

Для каждого n функция $F_n(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. По теореме 1 каждая функция $F_n(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{F_n(y)\}$ и докажем, что $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$.

Отсюда последует (в силу теоремы 15 из § 16.6), что функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

По условию несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$ такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c,d]$ выполняется неравенство $\left|\int_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. Возьмём номер N такой, что $a+N \geq A$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall y \in [c,d]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (18.7)$$

Поскольку $\int_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx$ можно представить в виде

$$\int_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f(x,y)\,dx - \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx = F(y) - F_n(y),$$

то неравенство (18.7) можно записать так:

$$|F_n(y) - F(y)| < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ и } \forall y \in [c,d].$$

Это и означает, что $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$, что и требовалось доказать.

Теорема 8 (об интегрировании (несобственного интеграла) по параметру)

Если выполнены условия теоремы 7, то функция $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \quad (18.8).$$

(т.е. можно изменять порядок интегрирования).

Доказательство. По теореме 7 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте. Несобственный интеграл в правой части равенства (18.8) – это предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$ (по определению несобственного интеграла первого рода), а так как в повторном интеграле, стоящем под знаком предела, можно изменить порядок интегрирования (в силу теоремы 2), то для доказательства равенства (18.8) нужно доказать, что

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\left[\int_a^A f(x,y)\,dx\right]dy = \int_c^d\left[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy$$

или, что то же самое,

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\left[\int_a^A f(x,y)\,dx - \int_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy = 0,$$

т.е.

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\left[\int_A^\infty f(x,y)\,dx\right]dy = 0. \qquad (18.9)$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по (параметру) y на сегменте $[c,d]$, то $\exists A$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall y\in[c,d]$ будет выполнено неравенство $\left|\int_{A'}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$.

Используя это неравенство, получаем, что $\forall A'>A$:

$$\left|\int_c^d\left[\int_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\right]dy\right| \le \frac{\varepsilon}{d-c}\int_c^d dy = \varepsilon,$$

а это и означает справедливость равенства (18.9), что и требовалось доказать.

Замечание. Если параметр y изменяется на полупрямой $y \geq c$, то можно поставить вопрос об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_c^\infty \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy$, т.е. вопрос о том, при каких условиях справедливо равенство

$$\int\limits_c^\infty \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right]dy = \int\limits_a^\infty \left[\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy\right]dx.$$

В этом равенстве все четыре интеграла – несобственные.

Чтобы это равенство выполнялось, нужно на функцию $f(x,y)$ наложить более сильные требования, чем в теореме 8 (см. [Ильин, Позняк]).

Теорема 9 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру)

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y): x \geq a,\ c \leq y \leq d\}$;

2) несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$.

Тогда функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$F'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

т.е. $\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$

Это равенство означает, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$, зависящий от параметра y, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функциональную последовательность $\{F_n(y)\}$, где

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx .$$

В силу условия 2) $\{F_n(y)\} \to F(y)$ при $n\to\infty$ на сегменте $[c,d]$, а по теореме 3 каждая функция $F_n(y)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[c,d]$, причём $F_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

В силу условия 3) $F_n'(y) \rightrightarrows \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ на сегменте $[c,d]$ (это доказывается так же, как была доказана равномерная сходимость последовательности $\{F_n(y)\}$ к $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ в теореме 7).

Итак, для функциональной последовательности $\{F_n(y)\}$ выполнены все условия теоремы 17 из § 16.6. Согласно этой теореме, функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и имеет место равенство $F'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$. Теорема 9 доказана.

Замечание (о несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра).

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\{(x,y): a \le x \le b,\ y \in Y$, где Y - некоторый промежуток$\}$; при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ не ограничена в окрестности точки $x = a$, но ограничена на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $a < a+\delta < b$.

Пример такой функции: $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{(x-a)^\alpha}$, где $g(x,y)$ удовлетворяет неравенствам $0 < c_1 \le g(x,y) \le c_2$, $\alpha > 0$.

При указанном условии $\forall y \in Y$ интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ является несобственным интегралом второго рода. Если $\forall y \in Y$ этот несобственный интеграл сходится, то на промежутке Y определена функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, которая называется несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на промежутке Y, если он сходится для любого $y \in Y$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta' \in (0, \delta)$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int_a^{a+\delta'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon .$$

Главным моментом в этом определении является то, что δ - одно и то же для всех $y \in Y$.

Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы, аналогичные теоремам для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметров.

18.4 Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

Рассмотрим конкретный пример: вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (в точке $x=0$ считаем подынтегральную функцию 0 равной 1).

Мы знаем, что этот интеграл сходится, и задача теперь состоит в том, чтобы найти его значение.

С этой целью рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра y:

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx,\quad y\geq 0.$$

Заметим, что интересующий нас интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ равен $F(0)$. Забегая вперёд, отметим, что с помощью дифференцирования по параметру y нам удастся получить более удобное выражение для $F(y)$, из которого мы и найдём $F(0)$.

Разобьём наше вычисление на несколько пунктов.

а) Прежде всего докажем, что $F(y)$ — непрерывная функция при $y\geq 0$.

Представим $F(y)$ в виде

$$F(y)=F_1(y)+F_2(y),$$

где $F_1(y)=\int_0^1 e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $F_2(y)=\int_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Функция $F_1(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. Так как подынтегральная функция

$$f(x,y)=e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$$

непрерывна в любом прямоугольнике $Q=\{(x,y): 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq y_0\}$, то по теореме 1 функция $F_1(y)$ непрерывна на любом сегменте $[0;y_0]$ и, следовательно, непрерывна на полупрямой $y\geq 0$.

Для доказательства непрерывности по параметру y несобственного интеграла $F_2(y)$ достаточно (согласно теореме 7) доказать, что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$. Воспользуемся признаком Дирихле-Абеля (теорема 6). С этой целью положим $\tilde{f}(x,y) = \sin x$, $g(x,y) = \frac{e^{-yx}}{x}$. Функция $\tilde{f}(x,y)$ - непрерывная и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$; функция $g(x,y)$ при каждом $y \geq 0$ является убывающей функцией аргумента x на полупрямой $x \geq 1$, $g(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно относительно y из промежутка $[0 \leq y < \infty)$ (это следует из неравенства $g(x,y) \leq \frac{1}{x}$), и, наконец, $g(x,y)$ имеет непрерывную в области $\{x \geq 1, y \geq 0\}$ частную производную $\frac{\partial g}{\partial x} = -e^{-yx}\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ (отметим, что разбиение $F(y)$ на два слагаемых $F_1(y)$ и $F_2(y)$ было сделано именно для того, чтобы обеспечить непрерывность частной производной $\frac{\partial g}{\partial x}$: в области $\{x \geq 1, y \geq 0\}$, связанной с несобственным интегралом $F_2(y)$, частная производная $\frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывна, а в исходной области $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ $\frac{\partial g}{\partial x}$ разрывна при $x = 0$).

Итак, функции $\tilde{f}(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 и, следовательно, по признаку Дирихле-Абеля несобственный интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$, что обеспечивает непрерывность $F_2(y)$, а, значит, и $F(y)$ при $y \geq 0$.

б) Докажем теперь, что функция $F(y)$ является дифференцируемой при $y>0$, и её производную $F'(y)$ можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла.

Возьмём произвольный сегмент $y_0 \le y \le y_1$, где $y_0>0$, и рассмотрим функцию $F(y)$ на сегменте $[y_0, y_1]$. Для неё выполнены все условия теоремы 9:

1) $f(x,y)=e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-e^{-yx}\sin x$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y): x\geq 0,\ y_0\le y\le y_1\}$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y\in[y_0,y_1]$ (это доказано в п. а));

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx=-\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[y_0, y_1]$ (это легко доказывается с помощью признака Вейерштрасса: $|e^{-yx}\sin x|\le e^{-y_0x}:=g(x)$, а несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ сходится — он равен $\frac{1}{y_0}$).

По теореме 9 функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[y_0, y_1]$, причём

$$F'(y)=\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx=-\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx. \quad (18.10)$$

Так как $\forall y>0$ можно указать сегмент $[y_0,y_1]$, такой, что $y_0>0$ и $y\in[y_0,y_1]$, то равенство (18.10) справедливо для любого $y>0$.

в) Вычислим несобственный интеграл (18.10). По определению $\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-xy}\sin x\,dx.$

Функция $\dfrac{-e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}$ является первообразной для функции $e^{-xy}\sin x$ по переменной x для любого $y>0$.

Поэтому, применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-xy}\sin x\,dx=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{-e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\right|_{x=0}^{x=A}=\frac{1}{1+y^2},$$

и, следовательно,

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2}\quad\text{при } y>0. \qquad (18.11)$$

2) Итак, мы вычислили несобственный интеграл (18.10). В этом и состоит суть метода: несобственный интеграл $F(y)$ не вычисляется непосредственно, но, как оказалось, нетрудно вычислить несобственный интеграл $F'(y)$.

Из (18.11) следует, что $F(y)=-\operatorname{arctg} y+C$ при $y>0$. (18.12)

Для определения неизвестной пока постоянной C найдём $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)$, для чего воспользуемся оценкой $|f(x,y)|\le$ $\le e^{-yx}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le e^{-yx}$, в силу которой

$$|F(y)|\le\int_0^\infty e^{-yx}dx=\frac{1}{y}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=0$. Переходя к пределу при $y\to+\infty$ в равенстве (18.12), получаем $0=-\frac{\pi}{2}+C$, откуда $C=\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx=-\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{2}\ \text{при } y>0,$$

а поскольку функция $F(y)$ непрерывна при $y\ge0$ (это доказано в п. а)), то $F(0)=\lim\limits_{y\to0}F(y)=\frac{\pi}{2}$.

Итак, $\boxed{F(0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.}$

Рассмотрим теперь функцию

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Если $\alpha=0$, то $I(0)=0$.

Если $\alpha>0$, то, сделав замену переменной $\alpha x=t$, получим:

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

Так как $I(\alpha)$ – нечётная функция $(I(-\alpha)=-I(\alpha))$, то $I(\alpha)=-\frac{\pi}{2}$, если $\alpha<0$.

Таким образом,

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha>0,\\ 0, & \text{если } \alpha=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

Функция $I(\alpha)$ называется <u>разрывным множителем Дирихле</u>. Через эту функцию можно выразить известную функцию $\operatorname{Sign}\alpha$:

$$\operatorname{Sign}\alpha=\frac{2}{\pi}I(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha>0,\\ 0, & \text{если } \alpha=0,\\ -1, & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

18.5 Эйлеровы интегралы

Под этим названием в математическом анализе выступают две функции:

$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx$ – "гамма-функция" аргумента p, (18.13)

это несобственный интеграл, зависящий от параметра p;

$B(p,q)=\int\limits_0^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ – "бета-функция" аргументов p и q, (18.14)

это интеграл, зависящий от параметров p и q.

Мы рассмотрим некоторые свойства этих функций.

Свойства Γ-функции.

1) Область определения. Представим функцию $\Gamma(p)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\Gamma(p) = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p),$$

где [$\Gamma_1(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$, $\Gamma_2(p) = \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.]

Если $p \geq 1$, то $\Gamma_1(p)$ является собственным интегралом. Если же $p < 1$, то $\Gamma_1(p)$ – несобственный интеграл второго рода по полусегменту $(0; 1]$, точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1-p<1$, т.е. $p>0$.

Функция $\Gamma_2(p)$ является несобственным интегралом первого рода, этот интеграл сходится для любого p (см. раздел 17.1).

Таким образом, функция $\Gamma(p)$, заданная формулой (18.13), определена на полупрямой $p>0$.

2) Непрерывность. Возьмём произвольный сегмент $[p_1 \leq p \leq p_2]$, где $p_1 > 0$, и рассмотрим сначала функцию $\Gamma_2(p)$. Подынтегральная функция $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$ непрерывна в полуполосе $\{(x,p): x \geq 1, p_1 \leq p \leq p_2\}$, а несобственный интеграл $\Gamma_2(p)$ сходится равномерно по параметру p на сегменте $[p_1, p_2]$ по признаку Вейерштрасса.

(В качестве мажорантной функции можно взять функцию $g(x) = x^{p_2-1}e^{-x}$, для которой несобственный интеграл $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ сходится). Следовательно, по теореме 7 функция $\Gamma_2(p)$ непрерывна на сегменте $[p_1, p_2]$.

Если $p_1 \geq 1$, то функция $\Gamma_1(p)$ является собственным интегралом от непрерывной функции $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$, поэтому $\Gamma_1(p)$ непрерывна на сегменте $[p_1, p_2]$ по теореме 1. Если же $p_1 < 1$, то для $p \in [p_1, 1)$ функция $\Gamma(p)$ является несобственным интегралом второго рода. Этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру p на промежутке $p_1 \leq p < 1$ (это можно доказать с помощью признака Вейерштрасса для несобственных интегралов второго рода, взяв в качестве мажорантной функцию $g(x) = x^{p_1-1}e^{-x}$, для которой интеграл $\int_0^1 g(x)\,dx$ сходится), поэтому $\Gamma_1(p)$ — непрерывная функция на любом сегменте $[p_1, p_2]$, где $p_1 > 0$.

Итак, функция $\Gamma(p) \, {=\Gamma_1(p)+\Gamma_2(p)}$ непрерывна на любом сегменте $[p_1, p_2]$, где $p_1 > 0$, а поскольку для любого $p > 0$ можно взять сегмент $[p_1, p_2]$ такой, что $0 < p_1 < p < p_2$, то функция $\Gamma(p)$ непрерывна $\forall p > 0$, т.е. непрерывна на полупрямой $p > 0$.

3) Дифференцируемость. С помощью теоремы 9 и аналогичной теоремы для несобственных интегралов второго рода нетрудно доказать, что функции $\Gamma_2(p)$ и $\Gamma_1(p)$ дифференцируемы любое число раз по параметру p на полупрямой $p>0$ и их производные можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла. Для производной n-го порядка функции $\Gamma(p)$ получается формула

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\,dx .$$

Задание. Опираясь на теорему 9, докажите дифференцируемость функции $\Gamma_2(p)$.

4) Рекуррентная формула. Запишем выражение для $\Gamma(p+1)$ и применим к интегралу формулу интегрирования по частям, считая, что $p>0$ (можно доказать, что в данном случае эта формула применима):

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x^p\,de^{-x} = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x}\,dx = p\,\Gamma(p).$$

Итак, для $p>0$ справедливо равенство

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p).$$

Это равенство называется формулой приведения. Если $n-1<p\le n$, где n - натуральное число, то, применяя формулу приведения несколько раз, получим:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \dots = p(p-1)\cdots(p-n+1)\Gamma(p-n+1) \qquad (18.15)$$

Так как $0<p-n+1\le 1$, то равенство (18.15) даёт возможность свести вычисление $\Gamma(p)$ для любого $p>1$ к вычислению $\Gamma(p)$ для $0<p\le 1$.

Полагая в равенстве (18.15) $p = n$, где n - натуральное число, и учитывая, что $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, приходим к замечательной формуле

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

5) <u>График функции $\Gamma(p)$.</u> Запишем формулу приведения в виде $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$. Если $p \to +0$, то $\Gamma(p+1) \to \Gamma(1) = 1$ и, следовательно, $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +0$, причём функция $\Gamma(p)$ ведёт себя при $p \to +0$ так же, как функция $\frac{1}{p}$. Более детальные исследования показывают, что график функции $\Gamma(p)$ имеет вид, представленный на рис. 18.3.

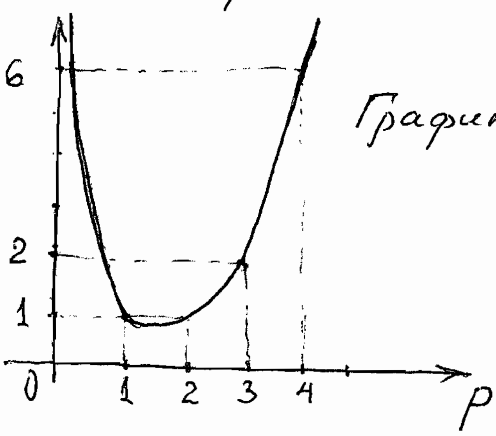


График функции $\Gamma(p)$.

Рис. 18.3

6) <u>Функция $\Gamma(p)$ при $p<0$.</u> Как уже было отмечено, при $p \le 0$ несобственный интеграл (18.13) расходится и поэтому формула (18.13) не может служить определением функции $\Gamma(p)$ для $p<0$. Но можно определить $\Gamma(p)$ для $p<0$ иначе, а именно, используя рекуррентную формулу

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (18.16)$$

Пусть $-1<p<0$. Тогда $0<p+1<1$ и, следовательно, правая часть в (18.16) имеет смысл. Определим функцию $\Gamma(p)$ для значений p из интервала $(-1;0)$ формулой (18.16).

Если $-2<p<-1$, то $-1<p+1<0$, и так как функция $\Gamma(p)$ уже определена для значений p из интервала $(-1;0)$, то правая часть в (18.16) имеет смысл и, следовательно, формула (18.16) позволяет определить функцию $\Gamma(p)$ для значений p из интервала $(-2;-1)$.

Продолжая этот процесс, мы определим функцию $\Gamma(p)$ с помощью формулы (18.16) на любом интервале $(-n,-(n-1))$, где n - натуральное число.

<u>Задание</u>. Изобразите (качественно) график функции $\Gamma(p)$ для $p<0$.

7) <u>Некоторые другие соотношения для функции $\Gamma(p)$.</u>

Можно доказать, что для $0<p<1$ справедливо равенство (<u>формула дополнения</u>) (см. [Будак, Фомин]).

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Отметим также, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$ (для вычисления интеграла сделайте замену переменной $x=t^2$; тот же результат можно получить по формуле дополнения, положив $p=\frac{1}{2}$).

Свойства B-функции.

1) Область определения. Представим функцию $B(p,q)$ в виде суммы двух слагаемых

$$B(p,q) = B_1(p,q) + B_2(p,q),$$

где

$$B_1(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad B_2(p,q) = \int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Если $p \geq 1$ и $q \geq 1$, то $B_1(p,q)$ и $B_2(p,q)$ являются собственными интегралами — непрерывными функциями параметров p и q. Если же $p<1$, то $B_1(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $(0, \frac{1}{2}]$, точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1-p<1$, т.е. $p>0$. Аналогично, если $q<1$, то $B_2(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $[\frac{1}{2}, 1)$, $x=1$ — особая точка подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $q>0$. Таким образом, функция $B(p,q)$ определена в квадранте $\{p>0, q>0\}$.

2) Симметрия. Справедливо равенство

$$B(p,q) = B(q,p).$$

Оно получается с помощью замены переменной $x=1-t$:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(q,p).$$

3) Связь функций $B(p,q)$ и $\Gamma(p)$.

Можно доказать (см. [Ильин Позняк]), что имеет место равенство

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (18.17)$$

Из этой формулы следует, что функция $B(p,q)$

имеет в квадранте $\{p>0, q>0\}$ непрерывные частные производные любого порядка.

4) <u>Другая формула для $B(p,q)$.</u> В интеграле $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сделаем замену переменной $x=\frac{1}{1+t}$, $0\le t\le\infty$. Тогда $dx=-\frac{dt}{(1+t)^2}$, $1-x=\frac{t}{1+t}$ и для $B(p,q)$ получается выражение $B(p,q)=\int_0^\infty t^{q-1}(1+t)^{-p-q}dt$. Заменив p на q, а q — на p (свойство симметрии), и обозначив переменную интегрирования снова буквой x, получаем для $B(p,q)$ следующее выражение:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \qquad (18.18).$$

Γ-функция и B-функция используются при вычислении интегралов (собственных и несобственных). Хотя функция $\Gamma(p)$ (и также $B(p,q)$) не относится к классу элементарных функций, она хорошо изучена, для неё составлены таблицы значений, поэтому если удаётся выразить какой-то интеграл через $\Gamma(p)$, то задача считается решённой.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^3}dx$.

Запишем интеграл I в виде

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{4/3-1}}{(1+x)^{4/3+5/3}}dx.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (18.18), приходим к выводу, что интеграл I равен значению функции $B(p,q)$ при $p=\frac{4}{3}$, $q=\frac{5}{3}$. Применяя формулу (18.17), а затем формулу приведения и формулу дополнения для Г-функции, получаем:

$$I = B\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3}+\frac{5}{3})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

18.6 Кратные интегралы, зависящие от параметров

Кратные интегралы, зависящие от параметров, — это функции следующего вида:

$$u(y_1, \dots, y_m) = \int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов, имеющих вид

$$u(M) = \iiint_G f(M, P)\, g(P)\, dV_P,$$

где G — ~~к~~убируемая область, точка $P(x, y, z)$ пробегает область G, $dV_P = dx\,dy\,dz$, $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, от координат которой, как от параметров, зависит функция $u(M)$, $g(P)$ — ограниченная интегрируемая в области G функция, а $f(M, P)$ — функция, зависящая от шести переменных (x_0, y_0, z_0, x, y, z), причем $f(M, P)$ непрерывна при $M \neq P$ и имеет особенность (стремится к бесконечности), если $P \to M$.

Важным примером интегралов такого типа является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ телом G с плотностью массы $\rho(P)$ в точке $P(x, y, z)$. Этот потенциал называется объёмным потенциалом или ньютоновым потенциалом и имеет вид

$$u(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, dV_P ,$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $M(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$ (рис. 18.4).

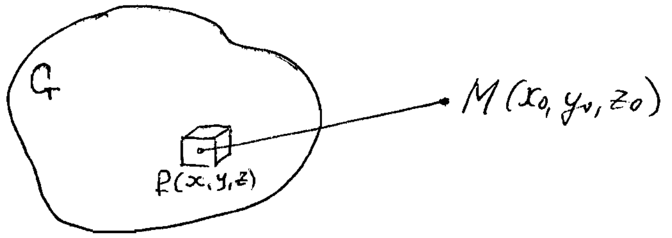


Рис. 18.4

Выражение для $u(M)$ следует из того, что $\frac{\rho(P)\,dV_P}{r_{MP}}$ — потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ элементом объема $dV_P = dx\,dy\,dz$ с массой $\rho(P)\,dV_P$

Если точка M лежит вне области G, то $r_{MP} \neq 0\ \forall P \in G$, поэтому $f(M,P) = \frac{1}{r_{MP}}$ является непрерывной (и также любое число раз дифференцируемой) функцией, а $u(M)$ представляет собой собственный тройной интеграл, зависящий от параметров x_0, y_0, z_0 — координат точки M. Если при этом $\rho(P)$ - интегрируемая (например, непрерывная) функция, то функция $u(M)$ дифференцируема любое число раз в точке M и её частные производные любого порядка можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(P)\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dV_P = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,\frac{x-x_0}{r^3_{MP}}\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$.

Отметим, что частные производные первого порядка функции $u(M)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} u(M)$, представляющего собой силу $\vec{F}(M)$, с которой единичная точечная масса, помещенная в точку M, притягивается телом G_T:

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0}(M), \frac{\partial u}{\partial y_0}(M), \frac{\partial u}{\partial z_0}(M) \right\}.$$

Вычисление производных второго порядка функции $u(M)$ даёт формулу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) = \iiint\limits_{G_T} \rho(P) \left[-\frac{1}{r_{MP}^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r_{MP}^5} \right] dV_P$$

и аналогичные формулы для $\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M)$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M)$.

Складывая эти вторые производные, получаем:

$$\Delta u(M) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M) = \iiint\limits_{G_T} \rho(P) \left\{ -\frac{3}{r_{MP}^3} + \frac{3\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]}{r_{MP}^5} \right\} dV_P = 0,$$

поскольку выражение в фигурных скобках равно нулю.

Таким образом,

$$\Delta u(M) = 0,$$

т.е. <u>в точках M, не лежащих в области G_T, ньютонов потенциал $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.</u>

Если же точка $M(x_0, y_0, z_0) \in G_T$, то функция $f(M,P) = \frac{1}{r_{MP}}$ имеет особенность при $P = M$ ($\frac{1}{r_{MP}} \to \infty$ при $P \to M$), поэтому $u(M)$ является <u>несобственным</u> тройным интегралом, зависящим от параметров x_0, y_0, z_0. Вопрос о непрерывности и дифференцируемости функции $u(M)$ становится более сложным.

Для решения этого вопроса нам понадобятся новые понятия и утверждения.

Обратимся к несобственному интегралу вида

$$u(M) = \iiint\limits_{G} f(M,P)\,g(P)\,dV_P\,, \qquad (18.19)$$

где G — замкнутая кубируемая область, $g(P)$ — ограниченная функция, интегрируемая в области G, $f(M,P)$ — непрерывная функция своих аргументов при $P \neq M$, $f(M,P) \to \infty$ при $P \to M$. Введём понятие равномерной сходимости этого несобственного интеграла относительно параметра M.

Пусть $M_0 \in G$. Обозначим через $\Omega_{M_0}^{\delta}$ шар радиуса δ с центром M_0.

<u>Определение</u>. Несобственный интеграл (18.19) называется сходящимся равномерно относительно M (по параметру M) в точке M_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что шар $\Omega_{M_0}^{\delta} \subset G$ и $\forall$ кубируемой области $\omega \subset \Omega_{M_0}^{\delta}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega_{M_0}^{\delta}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)\,g(P)\,dV_P \right| < \varepsilon.$$

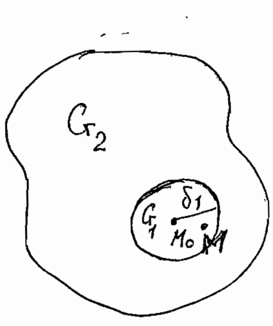
Иначе говоря, интеграл (18.19) сходится равномерно относительно параметра M в точке M_0, если величина $\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)dV_P \right|$ сколь угодно мала для любой области ω и любой точки M, расположенных в достаточно малом шаре $\Omega_{M_0}^{\delta}$ (в том числе и для $\omega = \Omega_{M_0}^{\delta}$).

<u>Теорема 10.</u> Если несобственный интеграл (18.19) сходится равномерно относительно M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.

<u>Доказательство.</u> Согласно определению непрерывности нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что

$$|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon, \quad \text{если } \rho(M, M_0) < \delta.$$

Разобьём область G_T на две части: $G_{T_1}=\Omega_{M_0}^{\delta_1}$ и $G_{T_2}=G_T-G_{T_1}$ (рис. 18.5, выбор числа $\delta_1>0$ уточним ниже) и представим функцию $u(M)$ в виде суммы двух слагаемых:



$$u(M)=u_1(M)+u_2(M),$$

где $u_1(M)=\iiint\limits_{G_{T_1}} f(M,P)g(P)dV_P$, $u_2(M)=\iiint\limits_{G_{T_2}} f(M,P)g(P)dV_P$.

Рис. 18.5

Отметим, что если точка M лежит внутри области G_1, то точка P, пробегающая область G_{T_2}, не может совпасть с точкой M, т.е. для точек M, лежащих внутри G_{T_1}, функция $u_2(M)$ является собственным интегралом и потому непрерывной функцией. В частности, функция $u_2(M)$ непрерывна в точке M_0.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как несобственный интеграл $u(M)$ сходится равномерно относительно M в точке M_0, то $\exists\,\delta_1$, такое, что $\forall M\in\Omega_{M_0}^{\delta_1}$ выполняется неравенство

$$|u_1(M)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ в частности, } |u_1(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (18.20)$$

Функция $u_2(M)$, как уже было отмечено, непрерывна в точке M_0. Поэтому $\exists\,\delta_2>0$, такое, что

$$|u_2(M)-u_2(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ если } \rho(M,M_0)<\delta_2. \qquad (18.21)$$

Возьмём $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда, если $\rho(M,M_0)<\delta$, то $M\in G_{T_1}$ и, следовательно, выполнены неравенства (18.20), а также неравенство (18.21), используя которые, получаем:

$$|u(M)-u(M_0)|=\left|\left(u_1(M)+u_2(M)\right)-\left(u_1(M_0)+u_2(M_0)\right)\right|\le$$

$$\le|u_1(M)|+|u_1(M_0)|+|u_2(M)-u_2(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Итак, $|u(M)-u(M_0)|<\varepsilon$, если $\rho(M,M_0)<\delta$, что и требовалось доказать. Теорема 10 доказана.

Следующая теорема даёт достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла (18.19).

Теорема 11. Если $|f(M,P)| \le \frac{c}{r_{MP}^{\alpha}}$, где $c = const > 0$, $0 < \alpha < 3$, то несобственный интеграл $u(M) = \iiint f(M,P) g(P) dV_P$ сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G.

Доказательство. Пусть M_0 — внутренняя точка области G. Согласно определению равномерной сходимости относительно M в точке M_0 нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall \omega \subset \Omega^{\delta}_{M_0}$ и $\forall$ точки $M \in \Omega^{\delta}_{M_0}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint_{\omega} f(M,P) g(P)\, dV_P \right| < \varepsilon. \qquad (18.22)$$

Так как $|f(M,P)| \le \frac{c}{r_{MP}^{\alpha}}$ и так как $g(P)$ — ограниченная функция ($|g(P)| \le A$, где A — некоторое число), то

$$\left| \iiint_{\omega} f(M,P) g(P)\, dV_P \right| \le cA \iiint_{\omega} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}} dV_P. \qquad (18.23)$$

Зафиксируем какую-нибудь точку M, лежащую внутри шара $\Omega^{\delta}_{M_0}$ (величину δ уточним ниже). Очевидно, что $\Omega^{\delta}_{M_0} \subset \Omega^{2\delta}_{M}$, и поэтому для любой области $\omega \in \Omega^{\delta}_{M_0}$ будет выполнено неравенство

$$\iiint_{\omega} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}} dV_P \le \iiint_{\Omega^{2\delta}_{M}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}} dV_P.$$

Интеграл, стоящий в правой части неравенства, вычислим, перейдя к сферическим координатам с центром в точке M: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $0 \le r = r_{MP} \le 2\delta$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\iiint\limits_{\Omega_M^{2\delta}} \frac{1}{r_{MP}^{\alpha}}\, dV_P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\delta} \frac{r^2 \sin\theta}{r^{\alpha}}\, dr = 4\pi \int_0^{2\delta} r^{2-\alpha}\, dr = \frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 3$, то $3-\alpha > 0$, и поэтому величину $\frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно малое δ. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что правая часть в неравенстве (18.23) будет меньше ε, т.е. будет выполнено неравенство (18.22), Теорема доказана.

Теоремы 10 и 11 применим к ньютонову потенциалу

$$u(M) = \iiint\limits_{G} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, dV_P \qquad (18.24)$$

в том случае, когда точка M – внутренняя точка области G. Так как подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $\left|\frac{\rho(P)}{r_{MP}}\right| \leq \frac{C}{r_{MP}}$ (здесь $\alpha = 1 < 3$), то (по теореме 11) несобственный интеграл (18.24) сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, по теореме 10 функция $u(M)$ – непрерывная функция внутри области G.

Можно доказать, что частные производные первого порядка функции $u(M)$ и в этом случае (т.е. когда M – внутренняя точка области G) можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла, например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_{G} \frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{MP}^3}\, dV_P.$$

Так как $\left|\frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{MP}^3}\right| \leq \frac{C}{r_{MP}^2}$ (здесь $\alpha = 2 < 3$), то несобственный интеграл $\frac{\partial u}{\partial x_0}(M)$ (и также несобственные интегралы $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$) сходятся равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, частные производные первого порядка функции $u(M)$ непрерывны внутри области G.

Оказывается, что частные производные второго порядка функции $u(M)$ уже нельзя вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Если потребовать, чтобы функция $\rho(P)$ имела в области G непрерывные частные производные первого порядка, то функция $u(M)$ будет иметь внутри области G непрерывные частные производные второго порядка и $u(M)$ будет удовлетворять внутри области G уравнению Пуассона

$$\Delta u(M) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M) = -4\pi\rho(M).$$

Глава 19. Ряды и интегралы Фурье

19.1 Тригонометрический ряд Фурье

Во многих областях науки и техники (важную роль играют периодические процессы). Такие процессы описываются периодическими функциями.

Определение. Функция $f(x)$, определённая на всей числовой прямой, называется периодической, если $\exists$ число $T>0$, такое, что $\forall x: f(x+T)=f(x)$. Число T наз-ся периодом функции $f(x)$.

Заметим, что если число T - период ф-ии, то числа $2T, 3T, \ldots$ - также периоды этой функции. Обычно под периодом функции понимают наименьший период.

Простейшие примеры периодических функций (известные ещё из школьного курса математики) - это $\sin x$ и $\cos x$. Их период (наименьший) равен 2π.

В математике и её приложениях важную роль играет последовательность периодических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

Она наз-ся тригонометрической системой. Любая линейная комбинация функций тригоном. системы, в том числе и бесконечная (т.е. ряд, если он сходится) является периодической функцией с периодом 2π.

Мы будем в дальнейшем рассматривать тригонометрическую систему на сегменте $[-\pi,\pi]$. Она обладает на этом сегменте свойством ортогональности, которое состоит в следующем: для любых двух функций тригон. системы интеграл от их произведения по сегменту $[-\pi,\pi]$ равен нулю.

Например, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = 0$ для любых натуральных чисел n и m (убедитесь в этом, вычислив интеграл)

Такое название — ортогональность тригонометрической системы — связано с тем, что в пространстве функций, заданных и интегрируемых на (сегменте) $[-\pi, \pi]$, можно ввести скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ по формуле

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Если $(f, g) = 0$, то функции f и g называются ортогональными.

Пусть $f(x)$ — данная периодическая функция с периодом 2π. Один из основных вопросов, которым мы будем заниматься в этой главе, — это вопрос о представлении функции $f(x)$ в виде линейной комбинации функций тригонометрической системы. Будут установлены достаточные условия, при выполнении которых функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (19.1)$$

где a_i, b_i — числа. Они называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. [Выведем формулы для вычисления коэффициентов Фурье, считая, что равенство (19.1) имеет место, и ряд в правой части р-ва можно интегрировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Интегрируя от $-\pi$ до π, получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx}_{=0} = a_0 \cdot \pi,$$

откуда находим a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \qquad (19.2_0).$$

Умножим теперь равенство (19.1) на $\cos kx$, (где k — произвольное натуральное число,) и снова проинтегрируем по сегменту $[-\pi, \pi]$. В силу ортогональности тригонометрической системы в правой части равенства останется только одно слагаемое:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}\, dx = a_k \cdot \pi.$$

Отсюда находим a_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (19.2_k).$$

Заметим, что при $k=0$ формула (19.2_k) переходит в формулу (19.2_0).

Аналогично, умножая равенство (19.1) на $\sin kx$ и интегрируя по сегменту $[-\pi, \pi]$, приходим к равенству

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (19.3_k).$$

Итак, если функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье (19.1), то коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (19.2_k) и (19.3_k).

1.16

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а не на всей прямой) и интегрируема на этом сегменте. Тогда по полученным формулам можно вычислить числа a_k, b_k и составить ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Возникают вопросы: 1) при каких условиях этот ряд сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$? 2) будет ли его сумма равна $f(x)$? Ответы на эти вопросы будут даны в следующих параграфах.

Рассмотрим примеры вычисления коэф. в Фурье для конкретных функций.

1) $f(x) = x, \quad -\pi \le x \le \pi.$

По формулам (19.2_k) и (19.3_k) находим:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$ (интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю);

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} x\,d(\cos nx) = -\frac{2}{\pi n}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\pi\cos\pi n = -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Итак, ряд Фурье для функции $f(x)=x$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ имеет вид

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx. \qquad (19.4)$$

Знак $\sim$ означает, что найденный ряд Фурье соответствует на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$, но пока мы не можем ответить на вопрос: сходится ли этот ряд к $f(x)=x$ на $[-\pi,\pi]$? То, что он сходится, доказать не трудно: $\forall x\in(-\pi,\pi)$ это можно сделать с помощью признака Дирихле – Абеля (сделайте это), а для $x=-\pi$ и для $x=\pi$ все члены ряда равны нулю, поэтому и сумма ряда равна нулю. Вопрос состоит в том, будет ли сумма ряда равна x? Очевидно, что для $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда не равна x. Позднее будет доказано, что $\forall x\in(-\pi,\pi)$ сумма ряда равна x (т.е. $\forall x\in(-\pi,\pi)$ знак $\sim$ можно заменить на знак $=$).

2) $f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi.$

Вычислим для этой функции коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x\,d\sin nx = \frac{2}{\pi n}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n = 2k-1,\ k=1,2,\dots \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases};$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx = 0$ (интеграл от нечётной функции в симметричных пределах).

Итак, на сегменте $[-\pi,\pi]$:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \qquad (19.5)$$

Найденный ред сходится (равномерно на) сегменте $[-\pi,\pi]$ — это легко доказать с помощью признака Вейерштрасса (сделайте это). Но будет ли его сумма равна $|x|$? Позднее мы докажем, что знак $\sim$ можно заменить на знак равенства $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

Замечание 1. При $x=0$ из равенства (19.5) получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\dots=\frac{\pi^2}{8},$$

а из (19.4) при $x=\frac{\pi}{2}$ получается равенство

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4}.$$

Замечание 2. При $0\le x<\pi$ функция $f(x)=x$ раскладывается как в ред (19.4). (по синусам), так и в ред (19.5) (по косинусам).

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство периодических функций:

если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, то $\forall a$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx,$$

т.е. интеграл от периодической функции по любому сегменту длиной в период имеет одно и то же значение.

Чтобы это доказать, представим интеграл $\int_a^{a+T}f(x)dx$ в виде

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$$

и в последнем слагаемом сделаем замену переменной $x=t+T$. Тогда $\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=-\int_a^0 f(t)dt$ (поскольку $f(t+T)=f(t)$), и, следовательно, мы приходим к искомому равенству $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

19.2 Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции.

В теории тригонометрических рядов Фурье большую роль играют два класса функций: кусочно-непрерывные функции и кусочно-гладкие функции.

Напомним, что функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на сегменте $[a,b]$, если она определена и непрерывна во всех точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

В свою очередь, точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют левый и правый пределы этой функции в точке x_0 (они обозначаются $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$), но при этом $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

Кусочно-непрерывную на сегменте $[a,b]$ функцию $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой на этом сегменте, если её производная $f'(x)$ существует и непрерывна во всех точках сегмента $[a,b]$, за исключением, быть может конечного числа точек, а в этих точках (где $f'(x)$ не существует или разрывна) существуют левый и правый пределы $f'(x)$; т.е. существуют $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$.

Отметим, что левый и правый пределы $f'(x)$ в точке x_0 следует отличать от левой и правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 ($f'(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ - левый предел $f'(x)$ в точке x_0, $f'_{лев}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - левая производная функции $f(x)$ в точке x_0).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие введённые понятия.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Эта функция непрерывна и имеет производную в любой точке x, при этом

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В точке $x=0$ производная $f'(x)$ не является непрерывной — в этой точке не существуют левый и правый пределы $f'(x)$. Следовательно, согласно нашему определению, функция не является кусочно-гладкой на любом сегменте, содержащем точку $x=0$. Отметим попутно, что левая и правая производные функции $f(x)$ в точке $x=0$ существуют: $f'_{лев}(0) = f'_{пр}(0) = f'(0) = 0$.

2) $f(x) = \operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Эта функция имеет одну точку разрыва первого рода ($x=0$), в остальных точках она непрерывна и имеет непрерывную производную: $f'(x) = 0$ при $x \neq 0$. В точке $x=0$ существуют левый и правый пределы $f'(x)$, равные нулю. Следовательно, эта функция является кусочно-гладкой на любом сегменте, содержащем точку $x=0$. В точке $x=0$ функция не имеет ни левой, ни правой производной.

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Эта функция непрерывна во всех точках и имеет производную во всех точках, кроме точки $x=0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ непрерывна во всех точках, где она существует, в точке $x=0$ существует левый предел $f'(x)$, равный нулю, но не существует правый предел $f'(x)$:

$\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$ (т.е. этот предел не существует). Следовательно, данная функция не является кусочно-гладкой на любом сегменте, у которого $x=0$ — внутренняя точка. Отметим, что в точке $x=0$ эта функция имеет левую производную ($f'_{лев}(0)=0$), но не имеет правой производной.

В 2011г. леммы 1–3 без док-ва

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ определена (и дифференцируема) в правой полуокрестности точки x_0, и пусть в точке x_0 существует правый предел производной:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0). \qquad (19.6)$$

Тогда (в точке x_0) существует правый предел (самой функции:) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, а также существует предел

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi} \qquad (19.7)$$

и он равен $f'(x_0+0)$.

Смысл этой леммы состоит в следующем: если доопределить $f(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0)=f(x_0+0)$, то предел (19.7) станет правой производной функции $f(x)$ в точке x_0, и тогда утверждение леммы можно сформулировать так: если в точке x_0 существует правый предел производной, то в этой точке существует правая производная функции, и они равны: $f'_{пр}(x_0)=f'(x_0+0)$.

Доказательство. Докажем сначала, что существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Так как существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, то найдётся такая правая полуокрестность точки x_0, в которой $f'(x)$ ограничена: $|f'(x)|\le A$, где A — некоторое число. Поэтому для любых x_1 и x_2 из этой полуокрестности будет выполнено неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|\cdot|x_2-x_1|\le A\cdot|x_2-x_1|$. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ (достаточно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$), такое, что если $|x_2-x_1|<\delta$, то $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$, а это означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0 справа. Следовательно, существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Положим $f(x_0) = f(x_0+0)$. Тогда функция $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0 справа, а поскольку она дифференцируема в правой полуокрестности точки x_0, то можно указать сегмент $[x_0, x_0+\xi]$ такой, что $f(x)$ непрерывна на этом сегменте и дифференцируема в интервале $(x_0, x_0+\xi)$ (рис. 19.1).

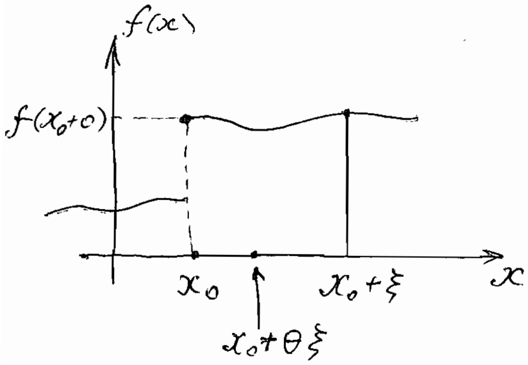


Рис. 19.1

По формуле Лагранжа

$$f(x_0+\xi) - f(x_0+0) = f'(x_0+\theta\xi)\cdot\xi,$$

где θ — некоторое число из интервала $(0<\theta<1)$. Используя это равенство и условие (19.6), получаем

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi} = \lim_{\xi\to+0} f'(x_0+\theta\xi) = f'(x_0+0),$$

что и требовалось доказать.
Аналогичная лемма имеет место в отношении левой производной функции.

Рассмотрим ещё два утверждения, связанные с кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими функциями.

Лемма 2 (об апроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ непрерывная кусочно-гладкая функция $l(x)$, такая, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - l(x)| < \varepsilon$$

и, кроме того, $l(a) = f(a)$, $l(b) = f(b)$.

Доказательство. Так как $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$ (по теореме Кантора), то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, такое, что $\forall x'$ и x'' из сегмента $[a,b]$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\dots,n$, такие, что $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, и построим ломаную, состоящую из n звеньев, причём i-е звено ломаной соединяет точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$, $i=1,2,\dots,n$ (рис. 19.2).

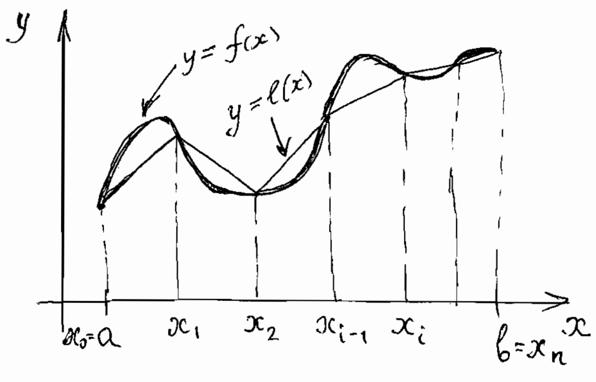


Рис. 19.2

Уравнение ломаной будем записывать в виде $y=\ell(x)$, $a\le x\le b$. Тогда $\ell(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$. Возьмём любое $x\in[a,b]$. Пусть $x\in[x_{i-1},x_i]$. Так как

$$|f(x)-\ell(x)| = |f(x)-f(x_i)+\ell(x_i)-\ell(x)| \le$$

$$\le |f(x)-f(x_i)| + |\ell(x_i)-\ell(x)|,$$

и так как $|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (поскольку $|x-x_i|<\delta$), и $|\ell(x_i)-\ell(x)|\le$ $\le|\ell(x_i)-\ell(x_{i-1})| = |f(x_i)-f(x_{i-1})|<\frac{\varepsilon}{2}$ (в силу неравенства $|x_i-x_{i-1}|<\delta$), то $|f(x)-\ell(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, причём это неравенство выполняется для любого $x\in[a,b]$.

Заметим также, что $\ell(a)=\ell(x_0)=f(x_0)=f(a)$ и $\ell(b)=f(b)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, то

$$J_1=\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0 \quad \text{при } \lambda\to\infty, \qquad (19.8_1)$$

$$J_2=\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\to 0 \quad \text{при } \lambda\to\infty. \qquad (19.8_2).$$

Доказательство. 1) Докажем сначала, что (19.8_1) выполняется, если $f(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на сегменте $[a,b]$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ на конечное число (частичных) сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна. Это можно сделать, поскольку производная кусочно-гладкой функции $f(x)$ имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода. Пусть число таких (частичных) сегментов равно n, и пусть $[a_i, b_i]$ — один из этих сегментов. В граничных точках a_i и b_i производная $f'(x)$ равна соответствующим предельным значениям: $f'(a_i) = f'(a_i+0)$, $f'(b_i) = f'(b_i - 0)$ (рис. 19.3).

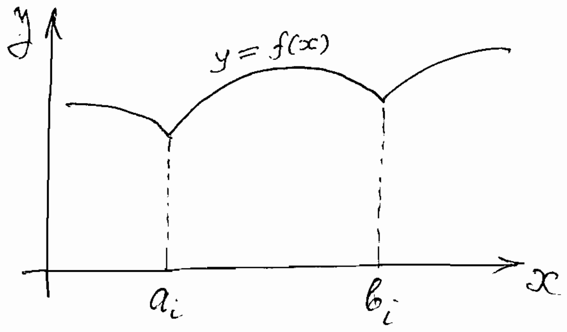


Рис. 19.3

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda} f(x)\sin\lambda x \Big|_{a_i}^{b_i} - \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i} f'(x)\sin\lambda x\,dx,$$

откуда следует неравенство

$$\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\left(|f(b_i)| + |f(a_i)|\right) + \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i} |f'(x)|\,dx = \frac{M_i}{\lambda},$$

где $M_i = |f(b_i)| + |f(a_i)| + \int_{a_i}^{b_i} |f'(x)|\,dx$ — некоторое число.

Следовательно,

$$|J_1(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Правая часть в полученном неравенстве стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Поэтому и $J_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Таким образом, справедливость (19.8_1) для непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$ доказана.

2) Пусть теперь $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. Разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число (частичных) сегментов $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна. Пусть $[a_i, b_i]$ — один из этих частичных сегментов.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2, существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$, такая, что $\forall x \in [a_i, b_i]$ выполнено неравенство

$|f(x) - \ell(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b_i - a_i)}$. Представим интеграл $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x) \cos\lambda x\,dx$

в виде суммы $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{a_i}^{b_i} [f(x) - \ell(x)] \cos\lambda x\,dx, \quad I_2 = \int\limits_{a_i}^{b_i} \ell(x) \cos\lambda x\,dx.$$

Для интеграла I_1 имеем оценку:

$$|I_1| \leq \left| \int\limits_{a_i}^{b_i} |f(x) - \ell(x)|\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left(\text{т.к. } |f(x) - \ell(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b_i - a_i)} \right),$$

а поскольку $\ell(x)$ – непрерывная кусочно-гладкая функция, то, согласно доказанному в п. 1), $I_2 \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ $\exists \lambda_0$, такое, что если $\lambda > \lambda_0$, то $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda_0$, такое, что если $\lambda > \lambda_0$, то

$$\left| \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x) \cos\lambda x \right| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x) \cos\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda \to \infty$, и поэтому

$$\int\limits_a^b f(x) \cos\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x) \cos\lambda x\,dx \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что (19.8₂) также выполняется. Лемма 3 доказана.

Она понадобится нам в следующем параграфе (и также лемма 1).

19.3 Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

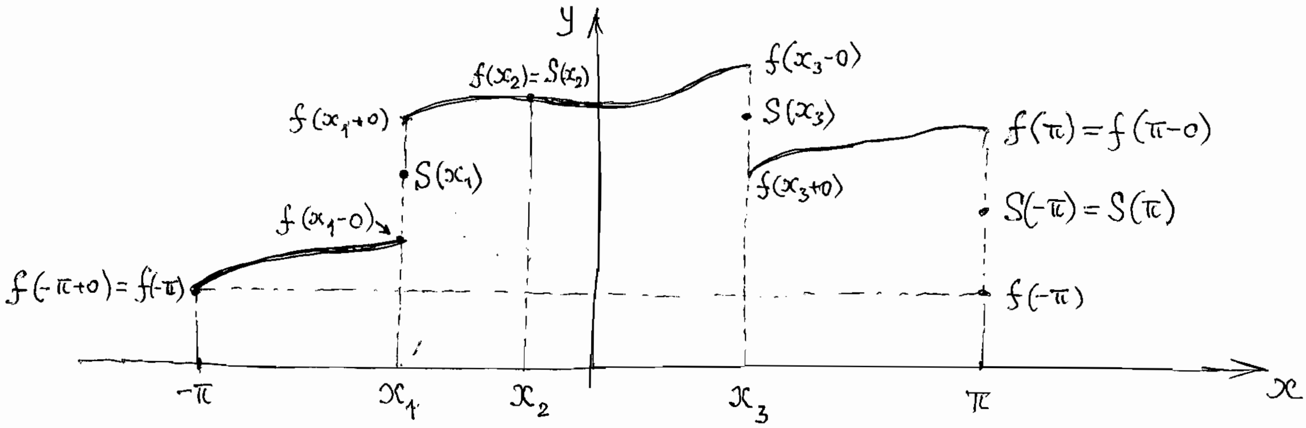
коэффициенты которого определяются формулами (19.2_k) и (19.3_k), сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, и для его суммы $S(x)$ справедливы равенства

$$(1)\ \forall x \in (-\pi, \pi):\ S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big); \qquad (19.9)$$

в частности, $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;

$$(2)\ S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big).$$

Рисунок 19.4, (на котором изображён график функции $y = f(x)$), даёт наглядное представление о сумме ряда Фурье этой функции.



Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ на всю числовую прямую периодически с периодом 2π и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье в произвольной точке $x \in [-\pi, \pi]$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Для доказательства справедливости равенства (19.9)

нужно доказать, что $S_n(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$ при $n\to\infty$.
Используя формулы для коэффициентов Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,$$

преобразуем выражение для $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx\right]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)\,dt := \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\,f(t)\,dt,$$

где

$$D_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right]. \qquad (19.10)$$

Функция $D_n(\xi)$ называется ядром Дирихле порядка n.
Сделав в интеграле замену переменной $t = x+\xi$, получим:

$$S_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(\xi)\,f(x+\xi)\,d\xi.$$

Так как $D_n(\xi)$ и $f(x+\xi)$ — периодические функции аргумента ξ с периодом 2π, то, согласно утверждению, доказанному в конце § 19.1, пределы интегрирования можно заменить на $-\pi$ и π:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,f(x+\xi)\,d\xi.$$

Разобьём это выражение на сумму двух слагаемых:

$$S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x),$$

где

$$S_n^-(x) = \int_{-\pi}^{0} D_n(\xi)\,f(x+\xi)\,d\xi, \quad S_n^+(x) = \int_{0}^{\pi} D_n(\xi)\,f(x+\xi)\,d\xi. \qquad (19.11)$$

Вычислив интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi$ (он равен $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right]d\xi = 1$)
и учитывая, что $D_n(\xi)$ — чётная функция, приходим к равенствам

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}.$$

Умножив второе из этих равенств на $f(x+0)$ и вычтя из второго равенства (19.11), получим:

1.17 $$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) = \int_0^{\pi} [f(x+\xi) - f(x+0)]\, D_n(\xi)\, d\xi. \quad (19.12)$$

Преобразуем выражение (19.10) для $D_n(\xi)$. С этой целью умножим равенство (19.10) на $\sin\frac{\xi}{2}$ и воспользуемся формулой $\sin\frac{\xi}{2}\cdot\cos k\xi = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k\xi+\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(k\xi - \frac{\xi}{2}\right)\right]$. Используя эту формулу, получаем:

$$D_n(\xi)\sin\frac{\xi}{2} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{2}\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\xi}{2} - \sin\frac{3\xi}{2}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi - \sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\xi\right) = \frac{1}{2\pi}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi.$$

Следовательно,

$$D_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\sin \xi/2} \quad \text{при } \xi \neq 0,$$

а при $\xi = 0$ из (19.10) имеем: $D_n(0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+n\right) = \lim\limits_{\xi\to 0} D_n(\xi)$.

Подставляя полученное выражение для $D_n(\xi)$ в (19.12), приходим к равенствам

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+\xi) - f(x+0)]\, \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2\sin\xi/2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\cdot\frac{\xi/2}{\sin\xi/2}\right\}\cdot\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi\, d\xi := J(x,n).$$

Функция, стоящая в фигурных скобках под знаком интеграла, является, очевидно, кусочно-гладкой на полусегменте $(0<\xi\le\frac{\pi}{2})$, а поскольку предел $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ существует... (и равен $f'(x+0)$ в силу леммы 1) и также существует $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{\xi/2}{\sin\xi/2} = 1$ (первый замечательный предел), то заключенная в фигурные скобки функция является кусочно-непрерывной на сегменте $[0\le\xi\le\frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, согласно лемме 3, $J(x,n) \to 0$ при $n \to \infty$ (роль параметра λ играет здесь $n+\frac{1}{2}$).

Итак,

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В точности также доказывается, что $S_n^-(x) - \frac{1}{2} f(x-0) \to 0$ при $n \to \infty$, а так как $S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x)$, то

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$.

Тем самым доказана справедливость равенства (17.9).

В частности, если x - точка непрерывности $f(x)$, то $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ и $S(x) = f(x)$.

Для точек $x = -\pi$ и $x = \pi$, учитывая периодическое продолжение функции $f(x)$, имеем:

$$f(-\pi+0) = f(\pi+0), \quad f(-\pi-0) = f(\pi-0),$$

поэтому

$$S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi-0) + f(-\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right),$$

$$S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0) + f(\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right).$$

Теорема 1 доказана.

<u>Замечания.</u>

1. Теорема 1 показывает, что кусочная гладкость функции (на сегменте $[-\pi,\pi]$) является достаточным условием сходимости ряда Фурье в каждой точке этого сегмента. Является ли это условие необходимым? Оказывается, что нет, это условие может быть ослаблено.

Однако, одной ~~лишь~~ кусочной непрерывности и даже непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ не достаточно для сходимости ряда......

Фурье в каждой точке этого сегмента. Ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на бесконечном множестве точек (всюду плотном на сегменте $[-\pi, \pi]$).

Более подробная информация об условиях сходимости ряда Фурье имеется в [Ильин Позняк]. Там же можно прочитать о принципе локализации для рядов Фурье. Суть его состоит в том, что сходимость или расходимость в данной точке x_0 тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ определяется лишь поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки x_0 и не зависит от того, какова эта функция вне сколь угодно малой окрестности точки x_0. Это свойство представляется удивительным, поскольку коэффициенты Фурье выражаются через интегралы от $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ по всему сегменту $[-\pi, \pi]$.

2. Мы доказали, что тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции сходится в каждой точке этого сегмента. Но поскольку члены ряда Фурье — периодические функции с периодом 2π, то этот ряд сходится в любой точке числовой прямой. Его суммой на всей прямой является периодическое продолжение (на всю прямую) функции $S(x)$ — суммы ряда на сегменте $[-\pi, \pi]$.

3. Если (кусочно-гладкая) функция $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[-\pi, \pi]$ и также если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то ряд Фурье этой функции сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ неравномерно.

4. Если $f(x)$ — нечётная функция на сегменте $[-\pi, \pi]$, то её разложение в ряд Фурье содержит только синусы, а если — чётная функция, то — только косинусы.

Если $f(x)$ задана на сегменте $[0, \pi]$, то её можно продолжить на сегмент $[-\pi, 0]$ как чётным, так и нечётным образом, и в результате получатся два разложения $f(x)$ на сегменте $[0, \pi]$ — одно по косинусам, а другое — по синусам. Мы уже встречались с такой ситуацией (см. формулы (19.4) и (19.5) в § 19.1):

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad 0 \le x < \pi$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Отметим, что первый из этих рядов сходится неравномерно на полусегменте $[0, \pi)$, а второй ряд сходится равномерно на сегменте $[0, \pi]$ (это легко доказать с помощью признака Вейерштрасса: $\left|\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{1}{(2n-1)^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ сходится).

5. Мы рассмотрели вопрос о разложении в ряд Фурье функций, заданных на сегменте $[-\pi, \pi]$. В некоторых случаях приходится рассматривать функции, заданные на сегменте $[-l, l]$, где l — какое-то число, и их периодические продолжения с периодом $2l$. Ортогональную тригонометрическую систему на сегменте $[-l, l]$ образуют функции

$$1, \ \cos\frac{\pi n x}{l}, \ \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При $l=\pi$ эта система функций совпадает с рассмотренной ранее тригонометрической системой.

Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе функций имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n=0,1,2,\dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n=1,2,\dots .$$

19.4 Комплексная форма ряда Фурье

Используя выражения для коэффициентов (тригонометрического) ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\pi,\pi]$, запишем ряд Фурье этой функции следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt.$$

Так как $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)$, где i - мнимая единица, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[e^{in(t-x)}+e^{-in(t-x)}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt\right)e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}.$$

Введём обозначения:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,\quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt,\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt,\quad n=1,2,\dots$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$ можно записать в (комплексной) форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (19.13)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Представление функции $f(x)$ в виде (19.13) является разложением $f(x)$ по системе функций $\{e^{inx},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$. Отметим, что эта система функций — ортогональная на сегменте $[-\pi,\pi]$, если скалярное произведение комплексно-значных функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ определить так: $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)\,dx$, где $\bar{g}(x)$ — комплексно сопряжённая функция по отношению к $g(x)$. В таком случае

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n\neq m,\\ 2\pi, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

т.е. при $n\neq m$ функции e^{inx} и e^{imx} ортогональны.

19.5 Понятие общего ряда Фурье

Понятие общего ряда Фурье связано с разложением элементов бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе элементов.

Напомним, что линейное пространство называется <u>бесконечномерным</u>, если в нём имеется любое (как угодно большое) число линейно независимых элементов; линейное пространство называется <u>евклидовым</u>, если в нём введено скалярное произведение элементов. Скалярное произведение элементов f и g будем обозначать так: (f, g).

<u>Пример</u>. Рассмотрим множество всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций, таких, что значение любой функции $f(x)$ в точке x_0 разрыва равно $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$. Это множество становится линейным пространством, если ввести обычным образом операции сложения двух функций и умножения функции на вещественное число. Это линейное пространство — бесконечномерное ($\forall n$ функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ — линейно независимы).

Скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ введём по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Нетрудно проверить, что все требования, предъявляемые к скалярному произведению, при этом выполнены.

Описанное бесконечномерное евклидово пространство обозначим $Q[a, b]$.

Напомним понятие нормированного пространства.

Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу f этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число (оно называется *нормой* элемента f и обозначается $\|f\|$) так, что при этом выполнены условия:

1) $\|f\| > 0$, если $f \neq \Theta$ (Θ – нулевой элемент пространства),
$\|f\| = 0$, если $f = \Theta$;

2) $\forall$ элемента f и $\forall$ числа α: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\forall$ элементов f и g: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$
(это неравенство называется *неравенством треугольника* или *неравенством Минковского*).

Отметим, что в любом нормированном пространстве можно ввести *расстояние между элементами* (или, как говорят, ввести *метрику*) посредством формулы

$$\rho(f,g) = \|f-g\|.$$

В результате нормированное пространство станет метрическим.

Во всяком евклидовом пространстве можно ввести норму элементов с помощью скалярного произведения:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

Задание. Проверьте, что все условия из определения нормы будут выполнены.

Пример. В пространстве $Q[a,b]$ введённая таким образом норма элемента $f(x)$ имеет вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Пусть $\{f_n\}$ $(= f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ — последовательность элементов нормированного пространства.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\| f_n - f \| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

(другими словами, если числовая последовательность $\{\| f_n - f \|\}$ является бесконечно малой).

Норма разности элементов f_n и f называется также отклонением элемента f_n от элемента f по норме данного пространства.

Пример. Сходимость последовательности (функций) $\{f_n(x)\}$ ~~функций~~ к функции $f(x)$ по норме пространства $Q[a,b]$ означает, что

$$\| f_n - f \| = \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Очевидно, что это есть сходимость в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Напомним, что элементы f и g евклидова пространства называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

Определение. Последовательность $\{\psi_n\}$ $(= \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots)$ элементов евклидова пространства называется ортогональной системой, если её элементы попарно ортогональные (т.е. $(\psi_i, \psi_j) = 0$ при $i \neq j$).

Ортогональная система $\{\varphi_n\}$ называется ортонормированной, если норма каждого её элемента равна 1.

Таким образом, элементы ортонормированной системы удовлетворяют условию

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Заметим, что если $\{\varphi_n\}$ — ортогональная система, состоящая из ненулевых элементов, то, умножив каждый элемент на число $\frac{1}{\|\varphi_n\|}$, получим ортонормированную систему $\left\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}$.

Примеры. 1) В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, \ n = 1, 2, \dots\}$ является ортогональной, а соответствующей ортонормированной системой является последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots .$$

2) Ортогональной системой в пространстве $Q[-1, 1]$ является последовательность полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Каждая функция $P_n(x)$ является многочленом n-й степени. Эта система используется в ряде задач математической физики.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортогональная система в бесконечномерном евклидовом пространстве, f — какой-то элемент этого пространства. Составим (формально) ряд

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \dots + f_n\varphi_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n, \qquad (19.14)$$

где f_n — числа, определяемые равенством

$$f_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \dots . \qquad (19.15)$$

Ряд (19.14) называется *рядом Фурье* элемента f по ортогональной системе $\{\psi_n\}$, а числа f_n называются *коэффициентами Фурье* элемента f.

Укажем формальный способ получения формулы (19.15) (формальный потому, что будем производить действия с рядами без каких бы то ни было обоснований). Напишем формальное равенство

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k,$$

в котором f_k — неизвестные пока числа, и умножим скалярно обе его части на элемент ψ_n. Получим равенство

$$(f, \psi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\psi_k, \psi_n).$$

Так как $(\psi_k, \psi_n) = 0$ при $k \neq n$, а $(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2$, то в правой части равенства остаётся только одно слагаемое $f_n \|\psi_n\|^2$ и, следовательно, $f_n = \dfrac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$, т.е. мы получили формулу (19.15).

Отметим, что если система $\{\psi_n\}$ — ортонормированная, то формула (19.15) принимает более простой вид: $f_n = (f, \psi_n)$.

Из курса линейной алгебры известно, что во всяком конечномерном евклидовом пространстве размерности N система $\{\psi_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ попарно ортогональных элементов, норма каждого из которых равна 1, образует *ортонормированный базис* этого пространства. Любой элемент f можно разложить по этому базису:

$$f=\sum_{n=1}^{N} f_n \psi_n, \quad \text{где} \quad f_n=(f,\psi_n). \qquad (19.16)$$

Разложение (19.16) и есть в данном случае ряд Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_n\}$, но только этот "ряд" содержит конечное число слагаемых.

В случае бесконечномерного евклидова пространства встаёт вопрос о сходимости ряда Фурье элемента f по норме данного пространства к элементу f.

<u>Определение</u>. Говорят, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\| S_n - f \| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где $S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье.

Наряду с частичной суммой S_n ряда Фурье элемента f (по ортогональной системе $\{\psi_n\}$) будем рассматривать различные линейные комбинации вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, где c_k — произвольные числа. Оказывается, что среди этих линейных комбинаций n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f обладает следующим <u>экстремальным свойством</u>.

<u>Теорема 2.</u> При фиксированном n из всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ наименьшее отклонение от элемента f по норме данного (евклидова) пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье этого элемента,

т.е. сумма $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$, где f_k – коэффициенты Фурье элемента f.

<u>Доказательство.</u> Используя ортогональность системы $\{\psi_n\}$, получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f , \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f, f) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\psi_k\|^2 -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (19.17)$$

Из вида правой части равенства следует, что норма $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|$ имеет наименьшее значение, если $c_k = f_k$, т.е. наименьшее отклонение от элемента f по норме данного пространства даёт $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ – n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Теорема 2 доказана.

<u>Следствия.</u> 1. Если $\{\psi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – ортонормированная система, то $\forall$ элемента f и $\forall n$ выполняется равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 .$$

Это равенство называется <u>тождеством Бесселя</u> в честь немецкого астронома и математика Ф. Бесселя (1784–1846). Оно следует из (19.17), если положить $c_k = f_k$ и учесть, что $\|\psi_k\| = 1$.

2. Если $\{\psi_n,\ n=1,2,\dots\}$ — ортонормированная система, то $\forall$ элемента f числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ (где $f_k=(f,\psi_k)$ — коэффициенты Фурье элемента f) сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что $\forall n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2$. Оно показывает, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$, члены которого — неотрицательные числа, ограничена числом $\|f\|^2$. Поэтому этот ряд сходится, и его сумма также не превосходит числа $\|f\|^2$.

Пример. В пространстве $Q[-\pi,\pi]$ рассмотрим ряд Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ по ортонормированной тригонометрической системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\dots\right\}$:

$$f(x) \sim \bar{a}_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) + \bar{b}_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right).$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ поставлен в соответствие её ряд Фурье. Он может и не сходиться к $f(x)$, поскольку $f(x)$ — только кусочно-непрерывная функция, а не кусочно-гладкая.

Если ввести обозначение $\frac{\bar{a}_0}{\sqrt{2\pi}}=\frac{a_0}{2}$, $\frac{\bar{a}_n}{\sqrt{\pi}}=a_n$, $\frac{\bar{b}_n}{\sqrt{\pi}}=b_n$, то этот ряд запишется так, как мы ранее записывали ряд Фурье. (см. (19.1) в § 19.1). В силу следствия 2

$$\bar{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{a}_n^2+\bar{b}_n^2\right) \le \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Разделив это неравенство на π и используя введённые обозначения, получаем неравенство для коэффициентов

a_n, b_n тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (19.18)$$

Из сходимости ряда, стоящего в левой части неравенства (19.18), следует, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ коэффициенты a_n и b_n её тригонометрического ряда Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$ (необходимое условие сходимости числового ряда). Это утверждение можно обосновать и иначе: оно непосредственно следует из вида коэффициентов a_k и b_k (формулы (19.2_k) и (19.3_k)) в силу леммы 3.

19.6 Замкнутые и полные ортонормированные системы

Определение. Ортогональная система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется замкнутой, если любой элемент этого пространства можно приблизить с произвольной точностью по норме данного пространства с помощью конечной линейной комбинации элементов системы $\{\psi_n\}$, т.е. $\forall$ элемента f и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, такая, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Отметим, что это неравенство в силу теоремы 2 обеспечивает выполнение неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon,$$

где f_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Теорема 3 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы)

Для того чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall$ элемента f выполнялось равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2} = \|f\|^2, \qquad (19.19)$$

где $f_k = (f, \psi_k)$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Равенство (19.19) называется равенством Парсеваля в честь французского математика М. Парсеваля (умер в 1836 г.).

Доказательство. Воспользуемся тождеством Бесселя

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2}.$$

1. Необходимость.

Пусть система $\{\psi_n\}$ — замкнутая. Тогда, согласно определению замкнутости, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что левая часть тождества будет меньше ε при $n = N$. Отсюда следует, что правая часть тождества будет меньше ε при $n \geq N$: $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} < \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2} \leq \varepsilon$, а так как левая часть этого неравенства неотрицательна (в силу неравенства Бесселя) и ε — любое положительное число, то $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2} = 0$, т.е. выполняется равенство Парсеваля.

2. Достаточность. Пусть равенство Парсеваля выполнено, т.е. сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2}$ равна $\|f\|^2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n$, такое, что n-я частичная сумма ряда будет отличаться от суммы ряда меньше, чем на ε:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon.$$

Следовательно, и левая часть тождества Бесселя меньше ε, а это и означает, что система $\{\psi_n\}$ — замкнутая.

Теорема 3 доказана.

Следствие. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то $\forall$ элемента f его ряд Фурье по системе $\{\psi_n\}$ сходится к этому элементу по норме данного пространства, т.е.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f\right\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то $\forall$ элемента f выполняется равенство Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, а это означает, что $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу тождества Бесселя следует, что

$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл равенства Парсеваля. Для вектора $\vec{f} = f_1 \cdot \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3$, где $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис из трёх попарно ортогональных единичных векторов, справедливо равенство $\|\vec{f}\|^2 := (\vec{f}, \vec{f}) = |\vec{f}|^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \sum_{k=1}^{3} f_k^2$. Это и есть равенство Парсеваля в данном трёхмерном случае, его можно назвать трёхмерной теоремой Пифагора.

Аналогично, равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ можно назвать теоремой Пифагора в бесконечномерном евклидовом пространстве, а замкнутую систему можно назвать базисом в этом пространстве, поскольку любой элемент пространства можно разложить в ряд по замкнутой системе (ряд Фурье), сходящийся к этому элементу по норме пространства.

Докажем единственность такого разложения.

Допустим, что какой-то элемент f имеет два разложения в ряд по замкнутой (ортонормированной) системе $\{\psi_n\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \text{ (ряд Фурье) и } \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \psi_k \text{ (второе разложение)},$$

причём оба ряда сходятся к элементу f по норме пространства. Тогда, согласно определению сходимости ряда,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k - f \right\|$$

(неравенство треугольника для нормы), то

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k \right\| \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k') \psi_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k')^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\forall k : (f_k - f_k')^2 = 0$, т.е. $f_k = f_k'$, что и доказывает единственность разложения.

Замечание 1. Забегая вперёд, отметим, что в § 19.3 мы докажем замкнутость тригонометрической системы в пространстве $Q[-\pi, \pi]$, и тем самым (в силу следствия из теоремы 3) будет доказано, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$, т.е. сходится к $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Замечание 2. Для ортогональной (но не ортонормированной) замкнутой системы $\{\psi_n\}$ равенство Парсеваля имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2 = \|f\|^2$, где $f_k = \frac{(f, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Введём теперь понятие полной системы.

Определение. Ортогональная (в частности, ортонормированная) система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется полной, если единственным элементом, ортогональным ко всем элементам ψ_n данной системы, является нулевой элемент.

Теорема 4. Любая замкнутая система является полной.

Доказательство. Пусть $\{\psi_n\}$ — замкнутая система и пусть элемент f ортогонален всем элементам системы $\{\psi_n\}$. Согласно определению полной системы требуется доказать, что f — нулевой элемент.

Так как $(f, \psi_n) = 0$ для любого n, то все коэффициенты Фурье элемента f, т.е. числа $f_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$ равны нулю. Отсюда в силу равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2$ следует, что $\|f\| = 0$, поэтому (согласно свойству нормы) f — нулевой элемент. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим ещё одно свойство полных систем.

Теорема 5. Если система $\{\psi_n\}$ — полная, то два различных элемента не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.

Доказательство. Допустим, что элементы f и g имеют одинаковые ряды Фурье по полной системе $\{\psi_n\}$, т.е. для любого k коэффициенты Фурье элементов f и g одинаковые: $f_k = g_k$. Докажем, что тогда $f = g$.

Рассмотрим разность $f - g$. Её коэффициенты Фурье равны $f_k - g_k$ и, следовательно, они равны нулю для любого k. Это означает, что элемент $f - g$ ортогонален всем элементам полной системы $\{\psi_n\}$. Отсюда в силу полноты системы $\{\psi_n\}$ следует, что $f - g = \theta$ — нулевой элемент, поэтому $f = g$, что и требовалось доказать.

Замечание. Понятия замкнутой и полной систем можно ввести и для конечномерных евклидовых пространств (с помощью таких же определений, как и для бесконечномерных пространств).

Мы доказали, что в любом (бесконечномерном) евклидовом пространстве замкнутая система является полной (теорема 1). Это утверждение верно и для конечномерных евклидовых пространств (доказательство такое же). Более того, для конечномерных евклидовых пространств верно и обратное утверждение: любая полная система является замкнутой. Но для бесконечномерных пространств это не так: можно привести пример полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой (см. [Ильин, Позняк, ч. II, с. 389]).

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают гильбертовы пространства. Гильбертово пространство – это линейное бесконечномерное евклидово полное сепарабельное пространство. Эпитеты "линейное", "бесконечномерное", "евклидово" нам известны – мы знаем, что они означают.

Полное нормированное пространство – это такое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность элементов сходится по норме пространства к некоторому элементу этого пространства.

Сепарабельность нормированного пространства означает, что в этом пространстве существует счётное всюду плотное (в смысле нормы пространства) множество элементов.

Множество называется всюду плотным в данном нормированном пространстве, если любой элемент пространства можно представить как предел (по норме пространства) последовательности элементов этого множества. Например, множество рациональных чисел является счётным всюду плотным множеством на числовой прямой.

В отношении гильбертовых пространств справедливы следующие утверждения.

1. В гильбертовом пространстве понятия замкнутости и полноты ортогональной системы эквивалентны.

2. В гильбертовом пространстве существуют замкнутые системы.

19.7 Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье

От общих рядов Фурье вернёмся к тригонометрическому ряду Фурье. Напомним то, что было уже доказано для тригонометрических рядов Фурье.

1. В § 19.3 мы доказали (теорема 1), что тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого сегмента, и его сумма $S(x)$ равна $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ в любой внутренней точке x сегмента $[-\pi,\pi]$, в частности, $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$, а на концах сегмента $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$.

2. В § 19.5 мы доказали, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$, а ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \text{ сходится.}$$

В данном параграфе мы установим, какие условия на функцию $f(x)$ обеспечивают равномерную сходимость её ряда Фурье на сегменте $[-\pi,\pi]$ и какие условия позволяют дифференцировать ряд Фурье почленно.

<u>Теорема 6 (о равномерной сходимости ряда Фурье).</u>

Пусть $f(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi,\pi]$ и пусть $f(-\pi)=f(\pi)$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi,\pi]$.

<u>Доказательство.</u> Согласно признаку Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости (на сегменте $[-\pi,\pi]$) ряда Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (19.20)$$

достаточно доказать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \qquad (19.21)$$

Одновременно отсюда последует, что ряд (19.20) сходится абсолютно.

Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, которая в силу условия теоремы является кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Непрерывная (кусочно-гладкая) функция $f(x)$ является первообразной для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$. Учитывая это и применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot df(x) = \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$, а второе слагаемое равно $n b_n$, где b_n – коэффициент Фурье функции $f(x)$. Итак,

$\alpha_n = n \cdot b_n$, откуда следует, что $|b_n| = \frac{1}{n}|\alpha_n|$.

Аналогично получается равенство $|a_n| = \frac{1}{n}|\beta_n|$, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$. Таким образом, ряд (19.21) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right). \qquad (19.22)$$

Воспользуемся известным неравенством $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, в силу которого $\frac{1}{n}|\alpha_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \alpha_n^2\right)$, $\frac{1}{n}|\beta_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \beta_n^2\right)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{n}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right) \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ тоже сходится (поскольку его члены – квадраты коэффициентов Фурье кусочно-непрерывной функции $f'(x)$), то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right]$ сходится, а, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится ряд (19.22), т.е. сходится ряд (19.21), что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

Замечание. Отметим, что при условиях теоремы 6 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ именно к функции $f(x)$ (это следует из теоремы 1), а на всей числовой прямой – к периодическому продолжению функции $f(x)$, которое является непрерывной функцией во всех точках прямой, что обеспечивается непрерывностью $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ и условием $f(-\pi)=f(\pi)$.

Теорема 7 (о почленном дифференцировании ряда Фурье).

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ и её производные до m-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi,\pi]$;

2) производная $(m+1)$-го порядка $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$;

3) $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, …, $f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (19.23)$$

можно m раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall k=1,2,\dots,m$ и $\forall x\in[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n^k\cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n\cdot n^k\sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство. Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx,\quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx.$$

Интегрируя по частям $(m+1)$ раз и учитывая условие 3) теоремы, получаем равенство (аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6):

$$|\alpha_n|+|\beta_n| = n^{m+1}\left(|a_n|+|b_n|\right), \qquad (19.24)$$

где a_n и b_n — коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$.

Из этого равенства следует, что

$$n^m\left(|a_n|+|b_n|\right) = \frac{1}{n}\left(|\alpha_n|+|\beta_n|\right),$$

и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(|\alpha_n|+|\beta_n|\right)$ сходится (это доказывается так же, как была доказана сходимость ряда (19.22)), то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m\left(|a_n|+|b_n|\right). \qquad (19.25)$$

Обратимся теперь к ряду Фурье функции $f(x)$, т.е. ряду (19.23). Если этот ряд продифференцировать почленно k раз, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^k\left(a_n \cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n \sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Для любого $k=0,1,\dots,m$ этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом (19.25), поэтому ($\forall k=0,1,2,\dots,m$) он сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ (по признаку Вейерштрасса).

Отсюда следует, согласно теореме 17 главы 16, что ряд (19.23) можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ m раз. Теорема 7 доказана.

<u>Следствие.</u> Если выполнены условия теоремы 7, то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеет место оценка

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Эта оценка следует из равенства (19.24), если учесть, что $\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Л.20 Примеры. 1) Пусть $f(x) = (x^2-\pi^2)^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

Тогда $f'(x) = 4x(x^2-\pi^2)$, $f''(x) = 4(x^2-\pi^2)+8x^2$, $f'''(x) = 24x$, откуда получаются равенства $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, $f''(-\pi) = f''(\pi)$ и неравенство $f'''(-\pi) \neq f'''(\pi)$. Эти соотношения показывают, что для данной функции $f(x)$ выполнены условия теоремы 7 для $m=2$. Следовательно, ряд Фурье этой функции можно два раза дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Если вычислить коэффициенты Фурье данной функции, то окажется, что $a_n = O(\frac{1}{n^4})$ и $b_n = O(\frac{1}{n^4})$ при $n \to \infty$, что даёт возможность дифференцировать почленно ряд Фурье во внутренних точках сегмента $[-\pi, \pi]$ три раза.

Задание. Вычислите коэффициенты Фурье функции $f(x) = (x^2-\pi^2)^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

2) Пусть $f(x) = \sin(\cos x)$, $-\pi \le x \le \pi$.

Так как $\sin x$ и $\cos x$, а также их производные любого порядка являются периодическими функциями с периодом 2π, то для данной функции условие теоремы 7 выполнены для любого m, и поэтому ряд Фурье этой функции можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$ любое число раз. Коэффициенты Фурье этой функции убывают при $n \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{n^m}$, где m – любое положительное число: $a_n = o(\frac{1}{n^m})$ и $b_n = o(\frac{1}{n^m})$ при $n \to \infty$.

19.8 Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами

С понятием алгебраического многочлена мы давно знакомы – это функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_0,$$

где n - натуральное число, a_i $(i=0,1,\dots,n)$ — какие-то числа (коэффициенты многочлена).

Тригонометрическим многочленом на сегменте $[-\pi,\pi]$ назовём любую линейную комбинацию конечного числа функций тригонометрической системы:

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx.$$

Теорема 8 (её часто называют теоремой Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ тригонометрическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x\in[-\pi,\pi]$ выполняется неравенство

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно лемме 2 (см. § 19.2) существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$, такая, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |f(x)-\ell(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (19.26)$$

и, кроме того, $\ell(-\pi)=\ell(\pi)$.

По теореме 6 ряд Фурье функции $\ell(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$. Поэтому для заданного ε $\exists$ номер n, такой, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |\ell(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (19.27)$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $\ell(x)$ и, тем самым, $S_n(x)$ — тригонометрический многочлен.

Из неравенств (19.26) и (19.27) следует, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |f(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\ell,\ell]$ и $f(-\ell)=f(\ell)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\ell,\ell]$ тригонометрическим многочленом вида

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos\frac{\pi k x}{\ell} + B_k \sin\frac{\pi k x}{\ell}. \qquad (19.28)$$

Теорема 9 (её также называют теоремой Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$, то её можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала произвольную функцию $f(x)$, непрерывную на сегменте $[-\ell,\ell]$ и удовлетворяющую условию $f(-\ell)=f(\ell)$, где $\ell>0$ - какое-то число.

Согласно замечанию к теореме 8 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ тригонометрический многочлен вида (19.28), такой, что

$$\forall x\in[-\ell,\ell]: \quad |f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19.29)$$

Разложим каждую из функций $A_k\cos\frac{\pi k x}{\ell}$ и $B_k\sin\frac{\pi k x}{\ell}$, входящих в (19.28), по формуле Маклорена и возьмём в разложении каждой функции многочлен Тейлора такой степени, чтобы остаточный член формулы Тейлора был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$ на всём сегменте $[-\ell,\ell]$.

Объединяя все эти многочлены Тейлора (и прибавляя слагаемое A_0, входящее в $T(x)$), получим многочлен $P_n(x)$, такой, что

$$\forall x\in[-\ell,\ell]: \quad |T(x)-P_n(x)|<2m\cdot\frac{\varepsilon}{4m}=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19.30)$$

Из (19.29) и (19.30) следует, что

$$\forall x \in [-l, l] : \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

2) Пусть теперь функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Возьмём такое число l, что $[a,b] \subset [-l, l]$, и продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[-l, l]$ непрерывным образом. Получим функцию $F(x)$, непрерывную на сегменте $[-l, l]$ и совпадающую с $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Очевидно, функцию $F(x)$ можно выбрать так, что будет выполнено равенство $F(-l) = F(l)$.

Согласно доказанному в п. 1), $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [-l, l]$ выполняется неравенство $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. На сегменте $[a, b]$ это неравенство принимает вид $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

19.9 Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 10. Тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}$ является замкнутой в пространстве $Q[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Согласно определению замкнутой системы нужно доказать, что любую кусочно-непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с произвольной точностью по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$ с помощью конечной линейной комбинации функций тригонометрической системы, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что

$$\| f(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \varepsilon.$$

Прежде всего заметим, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно построить такую непрерывную функцию $F(x)$, которая совпадает с $f(x)$ всюду, кроме малых окрестностей точек разрыва $f(x)$ и, возможно, малой окрестности точки $x=\pi$, а в этих окрестностях функция $F(x)$ является линейной функцией и, кроме того, она удовлетворяет условию $F(-\pi)=F(\pi)$ (рис. 19.5).

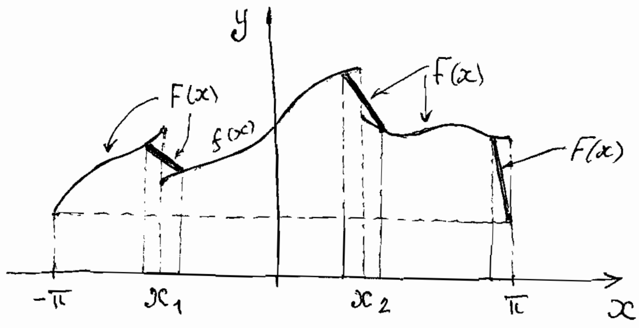


Рис. 19.5

В малых окрестностях точек x_1 и x_2 (это точки разрыва $f(x)$) и также в малой полуокрестности точки $x=\pi$ функция $f(x)$ заменена на линейную функцию $F(x)$.

Очевидно, что $\forall \varepsilon>0$ указанные окрестности точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x=\pi$ можно выбрать столь малыми, что будет выполнено неравенство

$$\| f(x)-F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19.31)$$

Согласно теореме 8 для построенной непрерывной функции $F(x)$ по заданному ε найдётся тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x\in[-\pi,\pi]$ будет выполнено неравенство $|F(x)-T(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, и поэтому

$$\| F(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-T(x)]^2dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19.32)$$

Из (19.31) и (19.32) следует, что

$$\| f(x)-T(x)\| \leq \| f(x)-F(x)\| + \| F(x)-T(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что и требовалось доказать.

Следствия. 1) Так как тригонометрическая система является замкнутой в пространстве $Q[-\pi,\pi]$, то для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ выполняется равенство Парсеваля

$$\bar{a}_0^{\,2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{a}_n^{\,2}+\bar{b}_n^{\,2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx,$$

где $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной тригонометрической системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\dots\right\}$.

Для коэффициентов Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{1, \cos nx, \sin nx,\ n=1,2,\dots\}$ равенство Парсеваля имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

2) Согласно следствию из теоремы 3 для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$. Это означает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

3) Для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно на этом сегменте, т.е. $\forall x_0$ и x из сегмента $[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)dt.$$

Это следует из сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi,\pi]$ и теоремы 19' главы 16.

19.10 Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Возьмём произвольный сегмент $[-\ell,\ell]$ и разложим функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на этом сегменте:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n x}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi n x}{\ell}, \qquad (19.33)$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{\pi n t}{\ell}\,dt,\quad b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{\pi n t}{\ell}\,dt. \qquad (19.34)$$

В физике функции $\cos\frac{\pi n x}{\ell}$ и $\sin\frac{\pi n x}{\ell}$ называют гармониками, а ряд (19.33) – разложением функции $f(x)$ по гармоникам. Амплитуды гармоник равны a_n и b_n. Частоты гармоник ($\lambda_n=\frac{\pi n}{\ell}$), по которым раскладывается функция $f(x)$, образуют бесконечно большую последовательность. При этом разность двух соседних частот $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\frac{\pi}{\ell}$ тем меньше, чем больше ℓ, т.е. с увеличением ℓ соседние частоты становятся всё ближе друг к другу. В пределе при $\ell\to\infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до $+\infty$, а ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

Сначала с помощью эвристических (не строгих) рассуждений получим выражение для интеграла Фурье. Подставляя выражения (19.34) для коэффициентов Фурье в равенство (19.33) и учитывая, что $\lambda_n=\frac{\pi n}{\ell}$, $\Delta\lambda_n=\frac{\pi}{\ell}$, получаем:

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{\pi n}{\ell}(t-x)\,dt=$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)\,dt\right]\Delta\lambda_n.$$

1.21. Перейдём в этом равенстве к пределу при $l\to+\infty$, считая, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. считая, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится. Тогда предел при $l\to+\infty$ первого слагаемого в правой части равенства равен нулю, а второе слагаемое переходит в интеграл $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda$.

Таким образом, приходим к равенству

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (19.35)$$

Интеграл в правой части равенства (19.35) называется интегралом Фурье функции $f(x)$, а само равенство (19.35) называется представлением функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье.

Записывая $\cos\lambda(t-x)$ в виде $\cos\lambda t\cos\lambda x+\sin\lambda t\sin\lambda x$, перепишем формулу (19.35) в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda, \qquad (19.36)$$

где $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$, $\quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$.

Формула (19.36) представляет собой разложение функции $f(x)$ по гармоникам $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, и амплитудами $a(\lambda)d\lambda$ и $b(\lambda)d\lambda$.

Перейдем теперь к строгому обоснованию справедливости равенства (19.35).

Теорема 11. Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой (т.е. несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится), то для любого x справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right], \qquad (19.37)$$

в частности, в точках непрерывности $f(x)$ правая часть равенства (19.37) равна $f(x)$, т.е. справедливо равенство (19.35).

Доказательство. Несобственный интеграл в левой части равенства (19.37) — это (по определению) предел

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^A \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right] d\lambda .$$

Введём обозначение

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^A \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right] d\lambda .$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{A\to\infty} S_A(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right].$$

Внутренний интеграл в выражении для $S_A(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \qquad (19.38)$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметра $\lambda\in[0,A]$. Так как $\left|f(t)\cos\lambda(t-x)\right| \le |f(t)|$ и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится (по условию теоремы), то по признаку Вейерштрасса несобственный интеграл (19.38) сходится равномерно по параметру λ на сегменте $[0,A]$. Отсюда в силу теоремы 8 главы 18 следует, что в выражении для $S_A(x)$ можно изменить порядок интегрирования, т.е.

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int\limits_0^A \cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right]dt.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется:

$$\int\limits_0^A \cos\lambda(t-x)\,d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\sin A(t-x)}{t-x}, & \text{если } t\neq x, \\ A, & \text{если } t=x. \end{cases}$$

Для упрощения записи будем записывать эту функцию в виде $\frac{\sin A(t-x)}{t-x}$, подразумевая, что при $t=x$ она равна A. Сделав в несобственном интеграле замену переменной $t=x+\xi$, приходим к равенству

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi = S_A^-(x) + S_A^+(x),$$

где

$$S_A^-(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi, \quad S_A^+(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Воспользуемся равенством, полученным в § 18.4: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}$ при $A>0$. Умножив его на $\frac{1}{\pi}f(x+0)$ и внеся $f(x+0)$ под знак интеграла, получим:

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x+0)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Вычитая это равенство из равенства, определяющего $S_A^+(x)$, приходим к равенству

$$S_A^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin(A\xi)\,d\xi := \mathcal{I}(x,A).$$

Заметим, что функция $\mathcal{I}(x,A)$ аналогична функции $\mathcal{I}(x,n)$, фигурировавшей в доказательстве теоремы 1.

Там мы доказали, что $J(x,n) \to 0$ при $n \to \infty$, опираясь на лемму 3 и тот факт, что функция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ является кусочно-непрерывной. Теперь мы хотим доказать, что $J(x,A) \to 0$ при $A \to +\infty$. В нашем случае функция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ также кусочно-непрерывная (в силу того, функция $f(x)$ — кусочно-гладкая по условию теоремы), однако принципиальное отличие функции $J(x,A)$ от $J(x,n)$ состоит в том, что $J(x,n)$ - собственный интеграл, а $J(x,A)$ — несобственный интеграл, и поэтому к нему нельзя применить непосредственно лемму 3.

Чтобы преодолеть указанную трудность, представим $J(x,A)$ в виде суммы трёх слагаемых:

$$J(x,A) = J_1 + J_2 + J_3 ,$$

где $J_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^B \frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin(A\xi)\,d\xi$, $J_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi$,

$J_3 = -\frac{1}{\pi} f(x+0)\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi$, $B>0$ — число, которое выберем ниже.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и возьмём число B столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{и} \quad |J_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty} |f(x+\xi)| \cdot \left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right| d\xi < \frac{\varepsilon}{3}$$

Такой выбор числа B возможен, поскольку $\left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right| \le 1$, если $\xi \ge B \ge 1$, и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(x+\xi)|\,d\xi$ сходится по условию теоремы.

Зафиксируем выбранное значение числа B. В силу леммы 3 для этого значения B интеграл $J_1 \to 0$

при $A \to +\infty$, поэтому $\exists A_1$, такое, что

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } A > A_1.$$

Обратимся к интегралу J_3. Сделав замену переменной $\xi = \frac{t}{A}$, получим

$$|J_3| \le \frac{1}{\pi} |f(x+0)| \left| \int\limits_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right|.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сходится, то $\exists A_2$, такое, что

$$|J_3| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } A > A_2.$$

Итак, если $A > \max(A_1, A_2)$, то

$$|J(x, A)| \le |J_1| + |J_2| + |J_3| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $J(x, A) \to 0$ при $A \to +\infty$.

Отсюда следует, что $S_A^+(x) \to \frac{1}{2} f(x+0)$ при $A \to +\infty$. Аналогично доказывается, что $S_A^-(x) \to \frac{1}{2} f(x-0)$ при $A \to +\infty$. Таким образом,

$$S_A(x) = S_A^-(x) + S_A^+(x) \to \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \text{ при } A \to +\infty,$$

что и требовалось доказать.

19.11 Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 11. Представим её в виде интеграла Фурье (будем считать, что в точках разрыва $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt. \qquad (19.39)$$

Заметим, что внутренний интеграл (обозначим его $F_1(\lambda, x)$) является чётной функцией λ, поэтому $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F_1(\lambda, x) d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda, x) d\lambda$, и равенство (19.39) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt. \qquad (19.40)$$

Функция $F_2(\lambda, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\lambda(x-t)\,dt$ является нечётной функцией λ, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt = 0, \qquad (19.41)$$

(понимать) если этот интеграл в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda)\,d\lambda = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} F_2(\lambda)\,d\lambda.$$

Умножая равенство (19.41) на i (мнимую единицу), складывая с равенством (19.40) и учитывая, что $\cos\lambda(x-t) + i\sin\lambda(x-t) = e^{i\lambda(x-t)}$, приходим к комплексной форме интеграла Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\lambda(x-t)}\,dt. \qquad (19.42)$$

Отметим ещё раз, что внешний интеграл (по переменной λ) понимается в смысле главного значения.

Перепишем равенство (19.42) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right] e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Введём обозначение для интеграла в квадратных скобках:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt. \qquad (19.43)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \qquad (19.44)$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется образом Фурье функции $f(x)$, а переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\lambda)$ по формуле (19.43) называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Функция $f(x)$

по отношению к своему образу $\hat{f}(\lambda)$ называется <u>оригиналом</u>, а переход от образа $\hat{f}(\lambda)$ к оригиналу $f(x)$ по формуле (19.44) называется <u>обратным преобразованием Фурье</u> или <u>восстановлением оригинала по его образу</u> (ещё раз отметим, что несобственный интеграл в обратном преобразовании Фурье понимается в смысле главного значения, а в преобразовании Фурье — как обычный несобственный интеграл, т.е.
$$\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_1}^{A_2} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt).$$

Вернёмся к вещественной форме интеграла Фурье (формула (19.36))
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda, \qquad (19.45)$$
где
$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \qquad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt,$$
и рассмотрим два случая.

1) <u>$f(x)$ — чётная функция</u>, т.е. $\forall x: f(-x)=f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ — чётная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ — нечётная функция аргумента t, поэтому
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad b(\lambda)=0,$$
и формулу (19.45) можно записать в виде
$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt\right)\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Введём обозначение

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt. \qquad (19.46)$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda. \qquad (19.47)$$

Формула (19.46) называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула (19.47) — обратным косинус-преобразованием Фурье.

2) $f(x)$ — нечётная функция, т.е. $\forall x:\ f(-x) = -f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ — нечётная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ — чётная функция аргумента t, поэтому

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt,$$

и формулу (19.45) можно записать в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt \right) \sin \lambda x \, d\lambda.$$

Формула

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda$$

— обратным синус-преобразованием Фурье.

Если функция $f(x)$ задана на полупрямой $0 \le x < +\infty$, то её можно продолжать на полупрямую $-\infty < x < 0$ как чётным, так и нечётным образом, и в соответствии с этим использовать либо косинус-преобразование Фурье, либо синус-преобразование Фурье.

<u>Примеры.</u> 1) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| < 1, \\ 0, \text{ если } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } |x| = 1. \end{cases}$

Эта функция — чётная, найдём её косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Обратное косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda. \qquad (19.48)$$

Вычислим этот интеграл при $x = \pm 1$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda \, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} = f(\pm 1).$$

<u>Задание.</u> Вычислите интеграл (19.48) при $|x| < 1$ и при $|x| > 1$.

$$2) \; f(x) = e^{-ax}, \quad 0 \le x < +\infty; \quad a > 0. \qquad (19.49)$$

а) Продолжим эту функцию на полупрямую $(-\infty, 0)$ сначала чётным образом и найдём её косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \operatorname{Re} e^{i\lambda t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \frac{1}{-a+i\lambda} e^{(-a+i\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \frac{-1}{-a+i\lambda} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Re\, \frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

Обратное косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{a}{a^2+\lambda^2}\cos\lambda x\, d\lambda = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ e^{ax}, & x<0 \end{cases} = e^{-a|x|}.$$

б) Продолжим теперь функцию (19.49) на полупрямую $(-\infty < x < 0)$ нечётным образом и найдем её синус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin\lambda t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Im\int_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

Обратное синус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}\sin\lambda x\, d\lambda = \begin{cases} e^{-ax}, & x>0, \\ -e^{ax}, & x<0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

3) Преобразование Фурье часто используется при решении задач математической физики. Это делается по следующей схеме:

а) уравнение для искомой функции f подвергают преобразованию Фурье и получают уравнение для образа $\hat{f}$;

б) уравнение для $\hat{f}$ часто оказывается проще исходного уравнения для f, из него находят $\hat{f}$;

в) по образу $\hat{f}$ с помощью обратного преобразования Фурье находят искомую функцию f.

Применим эту схему к начальной задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \ -\infty < x < +\infty,$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x).$$

Обозначим через $\hat{u}(\lambda, t)$ образ Фурье искомой функции $u(x,t)$:

$$\hat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx.$$

Чтобы получить уравнение для $\hat{u}(\lambda,t)$, умножим обе части исходного уравнения на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, считая, что функция $u(x,t)$ и её производные стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. В левой части уравнения получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx \right) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda, t),$$

а в правой части дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)(-i\lambda) e^{-i\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ i\lambda u(x,t) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \right.$$

$$\left. - i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)(-i\lambda) e^{-i\lambda x} dx \right] = -\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,t).$$

Таким образом, для $\hat{u}(\lambda,t)$ получилось уравнение

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\lambda^2 \hat{u}. \qquad (19.50)$$

Умножая также обе части начального условия $u(x,0) = \varphi(x)$ на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$ и интегрируя по x

от $-\infty$ до $+\infty$, получаем начальное условие для функции $\hat{u}(\lambda, t)$:

$$\hat{u}(\lambda,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x}\, dx := \hat{\varphi}(\lambda).$$

Решая уравнение (19.50) с начальным условием $\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda)$, находим образ Фурье $\hat{u}(\lambda, t)$:

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t}.$$

Чтобы найти искомую функцию $u(x,t)$ используем обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\lambda,t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda.$$

Подставив сюда выражение для $\hat{\varphi}(\lambda)$, записанное в виде $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi$, получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda.$$

Чтобы вычислить внутренний интеграл, запишем его подынтегральную функцию в виде

$$e^{-\left[\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2\sqrt{t}}\right]^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

и сделаем замену переменной $\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2\sqrt{t}} = s$. Это приводит к равенству

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

а искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Глава 20. Обобщённые функции

Понятие обобщённой функции является обобщением классического понятия функции. Впервые обобщённые функции были введены П. Дираком в 20-е годы прошлого столетия при исследовании задач квантовой механики. Математические основы теории обобщённых функций были заложены советским математиком академиком С.Л. Соболевым (в 30-е годы прошлого века) и французским математиком Л. Шварцем (в начале 50-х годов прошлого века). В настоящее время обобщённые функции находят широкое применение в математике и физике. Они позволяют выразить в математической форме такие идеализированные физические понятия, как плотность массы материальной точки, плотность точечного электрического заряда, интенсивность мгновенного точечного источника, которые не могут быть выражены с помощью обычных функций.

20.1 Понятие обобщённой функции. Пространство обобщённых функций

Будем рассматривать множество всевозможных функций $\varphi(x)$, определённых на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и обладающих следующими свойствами:

1) каждая функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема (т.е. имеет производные всех порядков (на всей числовой прямой)); это обозначают так: $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;

2) каждая функция $\varphi(x)$ является *финитной*, т.е. для каждой функции $\varphi(x)$ существует интервал, вне которого она равна нулю.

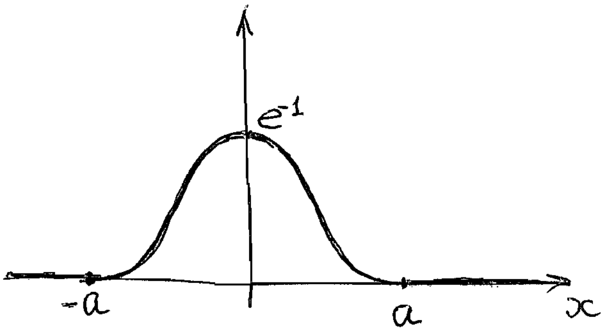
Обозначим через X_{φ} множество всех точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а через $\overline{X}_{\varphi}$ — замыкание множества X_{φ}, т.е. $\overline{X}_{\varphi}$ является объединением множества X_{φ} и всех его предельных точек.

Множество $\overline{X}_{\varphi}$ называется *носителем* функции $\varphi(x)$ и обозначается так: $\operatorname{supp}\varphi(x)$ (от французского support). Очевидно, что функция $\varphi(x)$ является финитной тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\varphi(x)$ — ограниченное множество.

Множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций назовём *множеством основных функций* и обозначим буквой $\mathcal{D}$.

Примером функции из множества $\mathcal{D}$ является так называемая "шапочка" (рис. 20.1):

$$\omega_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$



Очевидно, что

$\operatorname{Supp} \omega_a(x) = [-a, a]$.

Рис. 20.1

Задание. Докажите, что $\forall n: \omega^{(n)}(\pm a) = 0$.

Введём понятие сходимости последовательности основных функций.

1.22 Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций сходится к функции $\varphi(x)$ из множества D, если:

1) существует интервал $(-a, a)$, такой, что $\forall n$: $\operatorname{Supp} \varphi_n(x) \in (-a, a)$;

2) $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi^{(k)}(x)$ на всей прямой R. (Заметим, что равномерная сходимость на всей прямой равносильна равномерной сходимости на интервале $(-a,a)$).

Обозначение: $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве D.

Пример. Пусть $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\omega_a(x)$, где $\omega_a(x)$ – "шапочка". Докажем, что

$\varphi_n(x) \to \varphi(x) = 0$ при $n \to \infty$ в D.

В самом деле, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\sup_R |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = \frac{1}{n}\sup_{[-a,a]} |\omega_a^{(k)}(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а это означает, что $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x) \equiv 0$ на R.

Следовательно, $\varphi_n(x) \to \varphi(x) = 0$ при $n \to \infty$ в D.

Множество D основных функций с введённым понятием сходимости называется <u>пространством основных функций</u>. Будем обозначать его той же буквой D.

Отметим, что D — линейное пространство с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на вещественное число (при этом D не является метрическим пространством и введённая сходимость — это сходимость не в метрике пространства).

Введём теперь понятие функционала, лежащее в основе определения обобщённых функций.

Определение. Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi(x) \in D$ ставится в соответствие определённое число $u(\varphi)$.

Функционал также будем обозначать $u(\varphi)$.

Определение. Функционал $u(\varphi)$ называется линейным, если для $\forall\, \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из пространства D и любых чисел α и β выполняется равенство

$$u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\, u(\varphi_1) + \beta\, u(\varphi_2).$$

Примеры. 1) Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом сегменте. В таком случае будем называть функцию $f(x)$ локально интегрируемой. С помощью функции $f(x)$ определим на пространстве D функционал следующим образом: каждой функции $\varphi(x) \in D$ поставим в соответствие число

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (20.1)$$

Отметим, что хотя этот интеграл имеет бесконечные пределы интегрирования (и тем самым является несобственным), на самом деле для каждой функции $\varphi(x)$ это обычный определённый интеграл, поскольку любая функция $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ является финитной и, следовательно, равна нулю вне некоторого интервала.

Данный функционал является линейным, так как

$$u(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)\right]dx=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx+$$

$$+\beta\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx=\alpha u(\varphi_1)+\beta u(\varphi_2).$$

Этот функционал в дальнейшем будем обозначать символом $\hat{f}$, а значение функционала $\hat{f}$ на элементе $\varphi(x)$ пространства $\mathcal{D}$ обозначим так: $(\hat{f},\varphi)$, т.е.

$$(\hat{f},\varphi):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (20.2)$$

Аналогичное обозначение будем использовать в дальнейшем и в том случае, когда линейный функционал не является интегралом вида (20.1). Символ (f,φ) будет обозначать значение функционала f на элементе $\varphi(x)$ пространства $\mathcal{D}$.

2) Рассмотрим множество всех функций, определённых на сегменте $[a,b]$ и имеющих на этом сегменте непрерывную первую производную. Это множество обозначим $C^1[a,b]$. Каждой функции $\varphi(x)$ из этого множества поставим в соответствие число $l(\varphi)$, равное длине кривой, являющейся графиком функции $y=\varphi(x)$, $a\le x\le b$, т.е.

$$l(\varphi)=\int_a^b\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx.$$

Тем самым на множестве $C^1[a,b]$ задан функционал. Очевидно, он не является линейным.

Введём теперь понятие непрерывного функционала, определённого на пространстве D основных функций.

Определение. Функционал f, определённый на пространстве D основных функций, называется непрерывным, если для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность (f, φ_n) сходится к (f, φ).

Пример. Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция, то функционал $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ является непрерывным (докажите это).

Введённые понятия дают возможность сформулировать определение обобщённой функции.

Определение. Обобщённой функцией называется любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций.

Значение функционала f на элементе $\varphi(x)$, как и было оговорено, будем обозначать (f, φ).

Введём операции сложения двух обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число.

Суммой двух обобщённых функций f и g назовём функционал (обозначаем его $f+g$), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Произведением обобщенной функции f на число α назовём функционал (обозначим его αf), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\alpha f, \varphi) = \alpha (f, \varphi).$$

Нетрудно доказать (сделайте это), что сумма двух обобщенных функций и также произведение обобщенной функции на число являются линейными непрерывными функционалами, т.е. обобщёнными функциями. Таким образом, введенные операции сложение двух обобщенных функций и умножение обобщенной функции на число не выводят за пределы множества обобщённых функций. Нетрудно проверить, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, в частности, роль нулевого элемента играет функционал, ставящий в соответствие каждой функции из пространства $\mathcal{D}$ число нуль. Следовательно, множество обобщенных функций становится линейным пространством.

Введём понятие сходимости последовательности обобщенных функций.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций сходится к обобщённой функции f, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ числовая последовательность (f_n, φ) сходится к (f, φ).

Линейное пространство обобщённых функций с введённым понятием сходимости обозначается $\mathcal{D}'$ и называется пространством обобщённых функций.

Сходимость последовательности $\{f_n\}$ обобщённых функций к обобщённой функции f называется слабой сходимостью. Говорят также, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ слабо сходится к функционалу f.

Обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{D}'$.

20.2 Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция. Она порождает линейный непрерывный функционал $\hat{f}$ на пространстве $\mathcal{D}$, т.е. порождает обобщённую функцию, определённую формулой (20.2). Такая обобщенная функция называется регулярной.

Пример: Рассмотрим функцию Хевисайда (она используется в математической физике)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Она является локально интегрируемой и, следовательно, порождает регулярную обобщенную функцию $\hat{\theta}$:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \quad (\hat{\theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Обобщённые функции, не являющиеся регулярными, называются сингулярными.

Важным примером сингулярной обобщенной функции является δ-функция, которая определяется следующим образом:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Из самого определения ещё не следует, что δ-функция является линейным непрерывным функционалом, т.е. является обобщённой функцией. Это предстоит нам доказать.

Теорема 1. δ-функция является обобщенной функцией.

Доказательство. Докажем сначала, что δ-функция — линейный функционал. В самом деле, $\forall \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ и $\forall$ чисел α и β имеем (согласно определению δ-функции):

$$(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha(\delta, \varphi_1) + \beta(\delta, \varphi_2),$$

а это и означает, что δ-функция — линейный функционал.

Докажем теперь, что δ-функция — непрерывный функционал. Для этого, согласно определению непрерывного функционала, нужно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в $\mathcal{D}$ к функции $\varphi(x)$, соответствующая числовая последовательность (δ, φ_n) сходится к (δ, φ). Но $(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0)$, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ (по определению δ-функции), поэтому нужно доказать, что если

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathcal{D}, \qquad (20.3)$$

то

$$\varphi_n(0) \to \varphi(0) \text{ при } n \to \infty. \qquad (20.4)$$

Из (20.3) по определению сходимости в пространстве $\mathcal{D}$ следует, что $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на всей числовой прямой, в частности, $\varphi_n(0) \to \varphi(0)$, т.е. выполнено условие (20.4).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. δ-функция является сингулярной обобщённой функцией.

Доказательство. Предположим, что δ-функция является регулярной обобщённой функцией. Тогда существует локально интегрируемая функция $f(x)$, такая, что

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Возьмём в качестве $\varphi(x)$ "шапочку" $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$

Для неё выполнены соотношения

$$0 \leq \omega_\varepsilon(x) \leq e^{-1}, \quad \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}.$$

По определению δ-функции $(\delta, \omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}$, а согласно нашему предположению

$$(\delta, \omega_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ должно выполняться равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}. \qquad (20.5)$$

Так как функция $f(x)$ локально интегрируема, то она ограничена на любом отрезке, поэтому

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Но это противоречит равенству (20.5) и, следовательно, наше предположение неверно, а, значит, δ-функция является сингулярной обобщенной функцией. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. δ-функцию можно представить как предел в пространстве $\mathcal{D}'$ последовательности регулярных обобщённых функций.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$\delta_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \cdot \omega_\varepsilon(x),$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ – "шапочка", а C_ε – такое число, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}\,dx = 1. \qquad (20.6)$$

Сделав замену переменной $x = \varepsilon t$, получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}\,dx = \varepsilon \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt.$$

Определённый интеграл в правой части равенства равен некоторому положительному числу, которое обозначим буквой k и положим $m = \frac{1}{k}$. Отметим, что число m не зависит от ε. Из второго равенства в (20.6) получаем: $C_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{m}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \qquad (20.7)$$

Регулярную обобщенную функцию, порождаемую функцией $\delta_\varepsilon(x)$, обозначим $\hat{\delta}_\varepsilon$ и докажем, что семейство обобщенных функций $\hat{\delta}_\varepsilon(x)$, зависящих от непрерывно изменяющегося положительного параметра ε, стремится к δ-функции при $\varepsilon \to +0$, т.е.

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \quad (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to +0. \quad (20.8)$$

Из (20.8), очевидно, следует утверждение теоремы.

Для доказательства утверждения (20.8) нужно доказать, что $\forall \mu > 0 \ \exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\left| (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) - (\delta, \varphi) \right| < \mu \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \qquad (20.9)$$

Так как $\varphi(x)$ – непрерывная функция во всех точках и, в частности, в точке $x = 0$, то $\forall \mu > 0 \ \exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \mu \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon_0.$$

Следовательно, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то, учитывая равенства (20.6) и (20.7), получаем:

$$\left| (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) - (\delta, \varphi) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx \right| \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| dx <$$

$$< \mu \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx = \mu.$$

Тем самым (20.9) и теорема 3 доказаны.

Замечания. 1) На рисунке 20.2 изображены графики функции $y = \delta_\varepsilon(x)$ для нескольких значений ε ($\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$). Обратим внимание на поточечный (при каждом x) предел $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$:

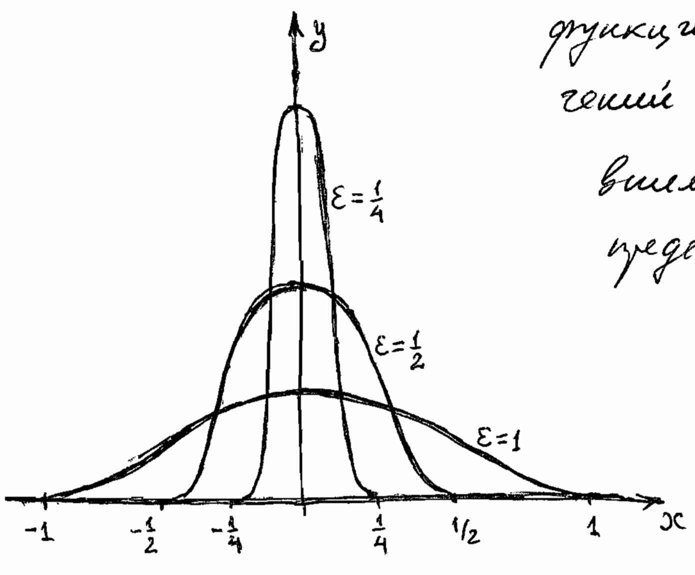


Рис. 20.2

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что этот предел не является функцией в обычном смысле.

2) Оказывается, что утверждение, аналогичное теореме 3, имеет место для любой сингулярной обобщённой функции: любую сингулярную обобщенную функцию можно представить как предел в пространстве $\mathcal{D}'$ последовательности регулярных обобщённых функций.

Иначе говоря, пространство обобщенных функций является пополнением пространства классических локально интегрируемых функций, т.е. получается путём добавления к пространству локально интегрируемых функций всех предельных элементов в смысле слабой сходимости.

Это аналогично тому, как множество всех вещественных чисел можно получить путём добавления ко множеству рациональных чисел всех пределов последовательностей рациональных чисел (поскольку любое иррациональное число можно представить как предел последовательности рациональных чисел).

3) δ-функцию можно представить как предел в $\mathcal{D}'$ других (отличных от $\hat{\delta}_\varepsilon$) семейств регулярных обобщённых функций, зависящих от параметра ε. Рассмотрим функции

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \quad g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Порождаемые ими регулярные обобщенные функции обозначаем $\hat{f}_\varepsilon$, $\hat{g}_\varepsilon$, $\hat{h}_\varepsilon$.

Докажите, что $\hat{f}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$,

$\hat{g}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$,

$\hat{h}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +$, в $\mathcal{D}'$.

Локальные свойства обобщенных функций.

Обобщённые функции, в отличие от обычных функций, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции на каком-то интервале.

<u>Определение.</u> Говорят, что обобщённая функция f равна нулю на интервале I, если $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$, носитель которой $\operatorname{Supp} \varphi(x) \in I$, выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$.

Это записывают так: $f = 0$ на интервале I или $f(x) = 0$ при $x \in I$. Нужно только понимать условность последней записи — $f(x)$ не имеет значений в отдельных точках x из интервала I, а равенство $f(x) = 0$ при $x \in I$ понимается в смысле данного определения.

<u>Определение.</u> Обобщённые функции f и g называются равными на интервале I, если $f(x) - g(x) = 0$ при $x \in I$.

Объединение всех интервалов, на которых обобщённая функция f равна нулю, называется нулевым множеством обобщённой функции f. Обозначим его O_f. Дополнение O_f до всей числовой прямой называется носителем обобщенной функции f (обозначение: $\operatorname{Supp} f$). Очевидно, что $\operatorname{Supp} f = R - O_f$.

Если $\operatorname{Supp} f$ — ограниченное множество, то обобщённая функция f называется финитной.

<u>Примеры.</u> 1) δ-функция (будем её обозначать также $\delta(x)$) равна нулю на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$. В самом деле, если точка $x = 0$ не принадлежит

интервалу I, а $Supp\,\varphi(x) \subset I$, то $\varphi(0)=0$ и поэтому $(\delta,\varphi)=\varphi(0)=0$.

$Supp\,\delta(x)$ состоит из одной точки $x=0$, и, следовательно, δ-функция – финитная функция.

2) Функция $f(x)=c=const\neq 0$, $x\in R$ порождает регулярную обобщенную функцию $\hat{f}$, такую, что $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}$: $(\hat{f},\varphi)=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$. Так как для любого интервала I $\exists\varphi(x)\in\mathcal{D}$, такая, что $Supp\,\varphi(x)\in I$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\neq 0$, то данная обобщённая функция $\hat{f}$ не равна нулю ни на каком интервале и, следовательно, $O_{\hat{f}}=\Theta$, а $Supp\,\hat{f}=R$.

20.3 Действия над обобщёнными функциями

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция, $\hat{f}$ – порождаемая функцией $f(x)$ регулярная обобщенная функция, $a(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой R (т.е. $a(x)\in C^{\infty}(R)$). Тогда $a(x)f(x)$ – локально интегрируемая функция и $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}$ функция $a(x)\varphi(x)\in\mathcal{D}$. Поэтому для обобщенной функции $\widehat{af}$, порождаемой функцией $a(x)f(x)$, получаем равенство

$$(\widehat{af},\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(\hat{f},a\varphi). \qquad (20.10)$$

Итак, для любой регулярной обобщённой функции

$\hat{f}$ и для любой функции $a(x)\in C^\infty(R)$ справедливо равенство
$$(a\hat{f},\varphi)=(\hat{f},a\varphi),\quad \varphi(x)\in \mathcal{D}.$$

Для сингулярных обобщённых функций мы примем это равенство в качестве определения произведения обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Произведением обобщённой функции f на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ называется обобщённая функция (обозначим её af), действующая по правилу:
$$\forall \varphi(x)\in \mathcal{D}:\ (af,\varphi)=(f,a\varphi).$$

Подчеркнём, что для регулярных обобщённых функций это равенство было обосновано (см. (20.10)), а для сингулярных обобщённых функций оно принимается по определению.

Пример. $a(x)\delta(x)$ – это такая (по определению) обобщённая функция, что $(a\delta,\varphi)=(\delta,a\varphi)=a(0)\varphi(0)=$ $=a(0)(\delta,\varphi)$, т.е. умножение δ-функции на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ равносильно умножению δ-функции на число $a(0)$: $a(x)\delta(x)=a(0)\,\delta(x)$.

Отметим, что произведение двух обобщённых функций не определяется.

2. Линейная замена переменных в обобщённых функциях.

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, a и b — произвольные числа, $a \neq 0$. Рассмотрим функцию $f(ax+b)$ и порождаемую ею регулярную обобщенную функцию, которую обозначим $\hat{f}(ax+b)$. Для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем равенство:

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx. \qquad (20.11)$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t = ax+b$. Тогда $dx = \frac{1}{a}dt$, $x = \frac{t-b}{a}$ и мы приходим к равенствам

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right). \qquad (20.12)$$

Отметим, что если $a>0$, то после замены переменной получается интеграл $\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$, а если $a<0$, то — интеграл $\frac{1}{a}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$, оба эти случая укладываются в единую запись $\frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$.
Из (20.11) и (20.12) следует, что для любой регулярной обобщенной функции $\hat{f}(x)$ и любых чисел $a \neq 0$ и b справедливо равенство

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

Для сингулярных обобщенных функций примем это равенство в качестве определения линейной замены переменных. Таким образом, мы вводим следующее определение.

<u>Определение.</u> Обобщенная функция $f(ax+b)$ – это функционал, действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \quad \left(f(ax+b), \varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

В частности, при $a=1$, $b=-c$, получаем <u>формулу сдвига аргумента обобщенной функции</u>:

$$\left(f(x-c), \varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi(x+c)\right),$$

а при $b=0$, $a\neq 0$ – <u>формулу растяжения аргумента обобщённой функции</u>:

$$\left(f(ax), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

<u>Примеры.</u> 1) $\left(\delta(x-c), \varphi(x)\right) = \left(\delta(x), \varphi(x+c)\right) = \varphi(x+c)\Big|_{x=0} = \varphi(c)$;

2) $\left(\delta(ax), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|}\left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\left(\delta(x), \varphi(x)\right)$,

т.е. растяжение аргумента обобщенной функции $\delta(x)$ с коэффициентом a равносильно умножению $\delta(x)$ на число $\frac{1}{|a|}$: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

В частности, при $a=-1$ получаем равенство

$$\delta(-x) = \delta(x). \text{ ("чётность } \delta\text{-функции").}$$

3. Дифференцирование обобщённых функций.

Пусть $f(x) \in C^\infty(R)$. Операцию дифференцирования будем обозначать либо штрихом (как это делалось раньше), либо буквой D (так принято в теории обобщенных функций):

$$f'(x) = Df(x), \; f''(x) = (f'(x))' = D(Df(x)) = D^2 f(x),$$
$$\ldots, \; f^{(k)}(x) = D^k f(x).$$

Функция $Df(x)$ порождает регулярную обобщённую функцию $\widehat{Df}$, действие которой на произвольную функцию $\varphi(x)$ из пространства D выражается равенством

$$(\widehat{Df}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Применяя к интегралу формулу интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

и учитывая, что первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция, а второе слагаемое можно записать в виде $-(\hat{f}, D\varphi)$, приходим к равенству

$$(\widehat{Df}, \varphi) = -(\hat{f}, D\varphi). \qquad (20.13)$$

Аналогично получается равенство (путём k-кратного применения формулы интегрирования по частям)

$$(\widehat{D^k f}, \varphi) = (-1)^k (\hat{f}, D^k\varphi), \; k = 2, 3, \ldots \qquad (20.14)$$

Равенства (20.13) и (20.14) получены для регулярной обобщенной функции $\hat{f}$, порождённой бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$. Для произвольных обобщенных функций примем эти равенства в качестве определения её производных.

<u>Определение.</u> Производной k-го порядка обобщённой функции f называется обобщенная функция (она обозначается $\mathcal{D}^k f$), действующая по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\mathcal{D}^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \mathcal{D}^k \varphi), \ k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что для любой обобщенной функции f правая часть равенства определена для любого $k = 1, 2, \ldots$, Это означает, что <u>любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема</u>, т.е. имеет производные всех порядков.

<u>Примеры.</u> 1) Найдём производную обобщённой функции Хевисайда.

$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\hat{\theta}, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, поэтому, согласно определению производной обобщённой функции,

$$(\mathcal{D}\hat{\theta}, \varphi) = -(\hat{\theta}, \mathcal{D}\varphi) = -(\hat{\theta}, \varphi') = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Следовательно, $\mathcal{D}\hat{\theta} = \delta(x)$, т.е. производная обобщённой функции Хевисайда равна δ-функции.

2) Рассмотрим обобщенные функции $\widehat{\sin x}$ и $\widehat{\cos x}$, порождённые функциями $\sin x$ и $\cos x$:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\widehat{\sin x}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x)\,dx, \ (\widehat{\cos x}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi(x)\,dx.$$

Найдём производную $D\widehat{\sin x}$ обобщенной функции $\widehat{\sin x}$. Согласно определению производной,

$$\forall \varphi(x)\in D: \quad (D\widehat{\sin x},\varphi) = -(\widehat{\sin x}, D\varphi) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\sin x\cdot\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x\cdot\varphi(x)\,dx = (\widehat{\cos x},\varphi).$$

Отсюда следует, что $D\widehat{\sin x}=\widehat{\cos x}$.

Аналогично доказывается, что $D\widehat{\cos x} = -\widehat{\sin x}$.

3) Найдём производную δ-функции.

$$\forall\varphi(x)\in D: \quad (D\delta(x),\varphi(x)) = -(\delta(x), D\varphi(x)) =$$

$$= -(\delta(x),\varphi'(x)) = -\varphi'(0).$$

Таким образом, производная δ-функции ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ из пространства D число $-\varphi'(0)$. Аналогичным образом получаем:

$$\forall k\in N \text{ и } \forall\varphi(x)\in D: \quad (D^k\delta(x),\varphi(x)) = (-1)^k(\delta(x),D^k\varphi(x)) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0).$$

Замечание. В теории обобщенных функций доказывается, что если носитель обобщённой функции состоит из одной точки $x=0$, то эту обобщенную функцию можно представить (и притом единственным способом) в виде линейной комбинации δ-функции и её производных.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является кусочно-гладкой на любом сегменте. Рассмотрим случай, когда она имеет единственную точку разрыва — точку x_0. Как и ранее, обозначим регулярную обобщенную функцию, порождённую функцией $f(x)$, через $\hat{f}$, а регулярную обобщённую функцию, порождённую производной $f'(x)$, обозначим $\widehat{f'}$. Кроме того, введём обозначение для скачка функции $f(x)$ в точке x_0:

$$[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0).$$

Теорема 4. Справедливо равенство

$$\mathcal{D}\hat{f} = \widehat{f'} + [f]_{x_0}\cdot\delta(x-x_0), \qquad (20.15)$$

где $\delta(x-x_0)$ — δ-функция со сдвигом аргумента на x_0.

Доказательство. Для доказательства справедливости равенства (20.15) нужно доказать, что

$$\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}:\ (\mathcal{D}\hat{f},\varphi) = (\widehat{f'},\varphi) + [f]_{x_0}(\delta(x-x_0),\varphi(x)),$$

т.е.

$$(\mathcal{D}\hat{f},\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + [f]_{x_0}\cdot\varphi(x_0). \qquad (20.16)$$

По определению производной $\mathcal{D}\hat{f}$ имеем:

$$(\mathcal{D}\hat{f},\varphi) = -(\hat{f},\mathcal{D}\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Представим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}$ в виде суммы двух интегралов: $\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}$ и к каждому из слагаемых применим метод интегрирования по частям. Получим:

$$(\mathcal{D}\hat{f},\varphi) = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,d\varphi(x) - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,d\varphi(x) = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0-0} +$$

$$+\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + \left[f(x_0+0) - f(x_0-0)\right]\cdot\varphi(x_0) =$$

$$= (\widehat{f'},\varphi) + [f(x)]_{x_0}\cdot\varphi(x_0).$$

Таким образом, мы получили равенство (20.16), что и требовалось доказать. Теорема 4 доказана.

Примеры. 1) Функция Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, причём $x_0 = 0$, $[\theta]_{x=0} = 1$. Так как $\theta'(x) = 0$ при $x \neq 0$, то $\forall \varphi(x)$: $(\hat{\theta'}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\varphi(x)dx = 0$, т.е. $\hat{\theta'} = 0$. По формуле (20.15) получаем:

$$\mathcal{D}\hat{\theta} = \hat{\theta'} + [\theta]_{x=0} \cdot \delta(x), \quad \text{т.е. } \mathcal{D}\hat{\theta} = \delta(x).$$

Отметим, что это равенство уже было получено ранее.

2) Аналогичным образом для функции $\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ следует равенство (обоснуйте его)

$$\mathcal{D}(\widehat{\operatorname{Sgn}}\, x) = 2\delta(x).$$

4. Разложение δ-функции в ряд Фурье.

Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — ортонормированная замкнутая система функций в пространстве $Q[a,b]$ кусочно-непрерывных функций. Обозначим через $\mathcal{D}[a,b]$ множество всех таких основных функций из пространства $\mathcal{D}$, носитель которых $\operatorname{Supp} \varphi(x) \in [a,b]$. Регулярную обобщённую функцию, порождаемую функцией $\psi_n(x)$ и действующую на множестве $\mathcal{D}[a,b]$, обозначим $\hat{\psi}_n(x)$. Тогда $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$: $(\hat{\psi}_n, \varphi) = \int\limits_a^b \psi_n(x)\varphi(x)dx = \varphi_n$,

где φ_n — коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$.

Пусть $x_0 \in (a;b)$. Напишем формальное разложение обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ по системе обобщённых функций $\{\hat{\psi}_n(x)\}$:

$$\delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cdot \hat{\psi}_n(x). \tag{20.17}$$

Используя это равенство, получаем:

$$(\delta(x-x_0), \psi_k(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n (\hat{\psi}_n(x), \psi_k(x)).$$

Левая часть равенства равна $\psi_k(x_0)$, а в правой части

$$(\hat{\psi}_n(x), \psi_k(x)) = \int_a^b \psi_n(x)\psi_k(x)\,dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

и, следовательно, правая часть равна δ_k. Итак, $\delta_k = \psi_k(x_0)$, и равенство (20.17) принимает вид

$$\delta(x-x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_n(x_0)\hat{\psi}_n(x). \qquad (20.18)$$

Это и есть разложение обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ в ряд Фурье по системе обобщённых функций $\{\hat{\psi}_n(x)\}$.

Равенство (20.18) нужно понимать так: обобщённая функция $\delta(x-x_0)$ есть предел (в смысле слабой сходимости) последовательности частичных сумм ряда (20.18).

Более точно, имеет место следующее утверждение: Если $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$ ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n(x)$ сходится в точке x_0 к $\varphi(x_0)$ $\left(\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n\psi_n(x_0) = \varphi(x_0)\right)$, то $\hat{\delta}_n(x,x_0) \to \delta(x-x_0)$ при $n\to\infty$ в пространстве $\mathcal{D}'[a,b]$, где $\hat{\delta}_n(x,x_0) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\hat{\psi}_k(x)$ — частичная сумма ряда (20.18), т.е. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$ числовая последовательность $(\hat{\delta}_n(x,x_0), \varphi(x))$ сходится к $(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$.

В самом деле,

$$(\hat{\delta}_n(x,x_0), \varphi(x)) = \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\hat{\psi}_k(x), \varphi(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)(\hat{\psi}_k, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \psi_k(x_0) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \psi_k(x_0) = \varphi(x_0),$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

В частности, если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная тригонометрическая система на сегменте $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$\{\varphi_n(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ n = 1, 2, \dots\right\}, \text{ то}$$

$$\forall x_0 \in (-\pi, \pi): \ \delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx_0 \cdot \widehat{\cos nx} + \sin nx_0 \cdot \widehat{\sin nx}).$$

Иногда знак $\wedge$ опускают и пишут так:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x - x_0)\right).$$

Такая запись используется, например, в учебнике А.Н. Тихонова и А.А. Самарского "Уравнения математической физики".

5. Преобразование Фурье обобщённых функций.

В § 11 гл. 19 образ Фурье функции $f(x)$ мы обозначали символом $\hat{f}(\lambda)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Поскольку в данной главе мы используем символ $\hat{f}$ (или $\hat{f}(x)$) для регулярной обобщённой функции, порождаемой локально интегрируемой функцией $f(x)$, то для образа Фурье функции $f(x)$ будем использовать другое обозначение: $F_f(\lambda)$ вместо $\hat{f}(\lambda)$, т.е.

$$F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

В теории обобщённых функций вводится ещё одно пространство основных функций. Оно обозначается буквой S и содержит все функции из пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, убывающие вместе с производными всех порядков при $|x| \to \infty$ быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|x|}$. Очевидно, что любая функция $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ принадлежит пространству S, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция.

Образ Фурье $F_f(\lambda)$ функции $f(x)$ порождает линейный непрерывный функционал $\hat{F}_f$ на пространстве S основных функций:

$$\forall \varphi(x) \in S : \ (\hat{F}_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) \varphi(\lambda) d\lambda .$$

Изменив порядок интегрирования в правой части равенства, получим

$$(\hat{F}_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda \right) dt .$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda = F_\varphi(t)$ — образ Фурье функции $\varphi(\lambda)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) F_\varphi(t) dt = (\hat{f}, F_\varphi)$, то мы приходим к равенству:

$$\forall \varphi(x) \in S : \ (\hat{F}_f, \varphi) = (\hat{f}, F_\varphi) . \qquad (20.19)$$

Любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве S основных функций, называется обобщённой функцией медленного роста, а пространство обобщённых функций медленного роста обозначается S'.

Равенство (20.19) примем в качестве определения преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста:

Обобщённая функция $\widehat{F_\varphi}$, действующая по правилу, выраженному равенством (20.19), является образом Фурье обобщённой функции $\widehat{f}$, определённой на пространстве S.

Для обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ по формуле (20.19) получаем (в качестве f берём $\delta(x-x_0)$) $\forall \varphi(x) \in S$:

$$\left(\widehat{F}_{\delta(x-x_0)}, \varphi\right) = \left(\delta(x-x_0), F_\varphi(x)\right) = F_\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-ix_0 t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}\right) \varphi(t)\, dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}, \varphi(t)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{F}_{\delta(x-x_0)}(t) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}}$$ — образ Фурье обобщённой функции $\delta(x-x_0)$.

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$\widehat{F}_{\delta(x)} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}.$$