

*В. Р. Халилов,
Г. А. Чижев*

ДИНАМИКА КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рекомендовано Комитетом по высшей школе
Миннауки России в качестве учебника для сту-
дентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению «Физика».

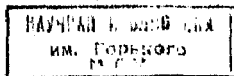
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1993

ББК 22.213
X17
УДК 516

Рецензенты:

кафедра квантовой теории поля Томского государственного
университета,
академик В. П. Маслов

11.12 - 4 - 93



Халилов В. Р., Чижов Г. А.

X17 Динамика классических систем: Учеб. пособие. — М.:
Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.
ISBN 5—211—02297—1.

Учебное пособие посвящено динамике систем небольшого числа частиц. Рассматриваются основы динамики, отражающие современное состояние проблем с учетом достижений последнего десятилетия. Обсуждаются задачи устойчивости простейших систем и качественного анализа, проблемы интегрирования систем, неустойчивых по Ляпунову, динамический хаос. Отражены также достижения в теории возмущений. Уделено внимание новым методам исследования проблем динамики, в частности вычислительному эксперименту. Изложение материала иллюстрируется большим количеством примеров.

Для студентов физических специальностей университетов.

X 1603030000(4309000000) — 125 88—92
077(092)—93

ББК 22.213

ISBN 5—211—02297—1

© Издательство Московского
университета, 1993

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Основные понятия и разделы теоретической механики	8
Глава 1. Кинематика материальной точки	10
1.1. Кинематические меры движения	10
1.2. Декартова (правая) система координат	11
1.3. Цилиндрическая система координат	12
1.4. Естественные координаты	17
Глава 2. Законы Ньютона в инерциальных системах отсчета. Преобразования Галилея	22
2.1. Законы Ньютона	22
2.2. Инерциальные системы отсчета	24
2.3. Прямая и обратная (основная) задачи механики	29
2.4. Интегралы движения	30
2.5. Импульс, момент импульса. Механическая энергия материальной точки. Законы изменения. Теоремы сохранения	33
Глава 3. Интегрирование уравнений движения	37
3.1. Одномерное движение. Общие свойства	37
3.2. Области движения. Точки остановки	38
3.3. Качественное исследование движения вблизи точек остановки	40
Глава 4. Движение в центральном поле	45
4.1. Общие закономерности	45
4.2. Классификация траекторий	49
4.3. Падение на центр поля	51
4.4. Аттракторы	53
4.5. Задача Кеплера	55
4.6. Вектор-интеграл Лапласа	58
Глава 5. Система материальных точек. Законы изменения и сохранения полного импульса, кинетического момента и энергии для системы материальных точек	63
5.1. Полный импульс системы	63
5.2. Полный (кинетический) момент импульса системы	64
5.3. Полная механическая энергия системы материальных точек	66
5.4. Механическое подобие. Теорема вириала	68
5.5. Задача двух тел	71

Глава 6. Упругое рассеяние частиц	75
6.1. Общая постановка задачи	75
6.2. Диаграммы скоростей и импульсов	78
6.3. Эффективное поперечное сечение рассеяния	80
6.4. Эффективное сечение рассеяния частиц с электростатическим взаимодействием. Формула Резерфорда	82
6.5. Захват частиц. Полное сечение захвата	84
Глава 7. Уравнения Лагранжа	86
7.1. Движение тел при наложенных связях	86
7.2. Виртуальные и возможные перемещения	87
7.3. Принципы виртуальных работ для обратимых перемещений. Принцип Д'Аламбера. Общее уравнение механики	88
7.4. Уравнения Лагранжа I-го рода	90
7.5. Уравнения Лагранжа в переменных координатах	91
7.6. Структура функции Лагранжа. Обобщенный потенциал	97
7.7. Обобщенный импульс, обобщенная энергия	100
7.8. Принцип Гамильтона — Остроградского	106
Глава 8. Малые колебания динамических систем с s степенями свободы	112
8.1. Положения равновесия. Устойчивость	112
8.2. Собственные линейные колебания механических систем	116
8.3. Колебания линейных цепочек	122
8.4. Колебания двух связанных математических маятников	124
8.5. Линейные колебания консервативных систем с одной степенью свободы	128
8.6. Вынужденные колебания	130
8.7. Затухающие колебания	132
Глава 9. Линейные колебания систем	136
9.1. Системы с гироскопическими силами	136
9.2. Влияние диссипативных сил	145
Глава 10. Гамильтонова динамика	150
10.1. Канонические уравнения	150
10.2. Вывод канонических уравнений из вариационного принципа	153
10.3. Интегралы канонических уравнений. Скобки Пуассона. Теорема Пуассона	154
10.4. Канонические преобразования	158
10.5. Скобки Пуассона — инварианты канонических преобразований	165
10.6. Интегральные инварианты Пуанкаре	166
10.7. Бесконечно малые канонические преобразования	168
10.8. Теорема Лиувилля	169
10.9. Первые интегралы движения и свойства симметрии	171
Глава 11. Метод Гамильтона — Якоби	173
11.1. Групповые свойства канонических преобразований	173
11.2. Уравнение Гамильтона — Якоби	174
11.3. Теорема Якоби	176
11.4. Консервативная система	178
11.5. Метод разделения переменных	178
11.6. Перемешные «действие — угол»	181
11.7. Адиабатические инварианты	186
11.8. Теорема Петер	190

Глава 12. Кинематика твердого тела	195
12.1. Модели твердого тела	195
12.2. Матрицы поворотов	195
12.3. Углы Эйлера	200
12.4. Угловая скорость твердого тела	201
12.5. Полевой подход к описанию движения твердого тела	205
12.6. Относительное движение	207
Глава 13. Динамика твердого тела	211
13.1. Общие теоремы динамики	211
13.2. Тензор инерции и его свойства	216
13.3. Динамические уравнения Эйлера	221
13.4. Свободное движение. Случай Эйлера	224
13.5. Геометрическая интерпретация Пуансо	232
13.6. Твердое тело во внешнем поле. Случай Лагранжа	233
Глава 14. Нелинейные колебания консервативных систем	237
14.1. Элементы теории возмущений	237
14.2. Движение системы вблизи положения неустойчивого равновесия	248
14.3. Локальная линеаризация и переменные «действие — угол»	253
Глава 15. Общие свойства движения	257
15.1. Фазовое пространство динамической системы	258
15.2. Автономные системы	261
15.3. Понятие о структурной устойчивости	269
15.4. Исследование неавтономных систем	279
Глава 16. Элементы теории возмущений	299
16.1. Основные понятия теории возмущений	299
16.2. Прямое разделение движений	302
16.3. Резонанс в слабонелинейной системе	308
16.4. Интегрирование уравнений с помощью рядов	314
16.5. Метод Крылова — Боголюбова	318
16.6. Линеарные уравнения и метод ВКБ	323
Дополнение. Элементы релятивистской механики	326
Уравнения Лагранжа	326
Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби	334
Движение заряда в кулоновском поле	334
Приложение	339

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время по курсу «Теоретическая механика» для физиков имеется ряд прекрасных книг, таких, как «Механика» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, «Курс теоретической механики для физиков» И. И. Ольховского, «Классическая механика» И. Голдстейна, «Курс теоретической механики» В. Г. Невзглядова, «Теоретическая механика» В. В. Петкевича и др. Предлагаемое вниманию читателя пособие представляет собой расширенный курс лекций, читаемый одним из авторов (В. Р. Халиловым) на протяжении ряда лет на физическом факультете МГУ. Книга написана в соответствии с программой «Теоретическая механика и основы механики сплошной среды», рекомендованной Госкомитетом СССР по народному образованию для физических факультетов и специальностей университетов.

Кроме традиционно излагаемых в учебных пособиях вопросов здесь более подробно рассмотрены одномерное движение, падение частицы на центр поля, теорема Нетер. В пособии излагаются такие важные для физиков вопросы, как связь между симметриями системы и интегралами движения, а также связь между симметриями системы и проблемой разделения переменных в методе интегрирования Гамильтона — Якоби. Даны элементы качественного исследования динамических систем, понятие устойчивости движения и структурной устойчивости динамических систем. На модельном примере описывается сценарий перехода к хаосу через бифуркации удвоения цикла.

Значительное внимание уделяется основам теории возмущений, описаны наиболее распространенные методы анализа слабо-нелинейных систем. В дополнении кратко изложены элементы релятивистской динамики.

Кроме книг, о которых было сказано выше, нам хотелось бы особо выделить прекрасную работу Г. Л. Коткина и В. Г. Сербо «Сборник задач по классической механике». Изложение ряда вопросов в этой работе настолько точно и совершенно, что вряд ли возможно его как-то улучшить. В таких случаях мы старались следовать подходам, принятым в этой работе, как, впрочем, и в других книгах.

Материал книги обсуждался авторами совместно. Непосредственная работа по написанию текста распределилась так: введение, главы 1—8, 10, 11, дополнение и приложение написаны В. Р. Халиловым, главы 9, 12—16 — Г. А. Чижовым.

Авторы выражают глубокую благодарность В. П. Маслову за ряд полезных замечаний и предложений. Авторы искренне благодарны В. Г. Багрову, Н. В. Кудрявцевой, А. С. Вшивцеву за ценные советы и критические замечания, а также А. В. Борису и П. В. Елютину за обсуждение отдельных вопросов книги.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАЗДЕЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механика представляет собой раздел науки о механических движениях материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Под механическим движением понимают изменение взаимного положения тел или частей тел в пространстве с течением времени.

За годы своего становления и развития механика выработала ряд абстрактных понятий, которые отражают существенные при изучении механических движений свойства реальных тел. В их числе понятие о материальной точке — объекте пренебрежимо малых размеров, имеющем массу; это понятие, очевидно, применимо в случае поступательного движения тела или когда в изучаемом движении можно пренебречь вращением тела относительно, скажем, его центра масс. Совокупность материальных тел, каждое из которых является материальной точкой, будем называть системой материальных точек. Мы будем также пользоваться понятием «механическая система», которая может состоять из одной материальной точки.

Под абсолютно твердым телом понимается система материальных точек, расстояния между любыми точками в которой всегда остаются неизменными при произвольных перемещениях этой системы; это понятие применимо, когда можно пренебречь деформацией твердого тела.

Важным понятием является также понятие сплошной изменяемой среды, однако здесь вопросы механики сплошной среды мы затрагивать не будем.

Содержание теоретической механики составляет изучение основных законов и принципов, которым подчиняется механическое движение тел, а также изучение общих теорем и уравнений движения, которые вытекают из основных законов и принципов.

К основным этапам развития механики можно отнести следующие:

1) механику Ньютона (Ньютон, Галилей, Гук, Гюйгенс и др.);

2) аналитическую механику Лагранжа — Эйлера (Эйлер, Бернулли, Фурье, Лагранж, Гамильтон, Якоби и др.);

3) теорию устойчивости движения (Ляпунов, Пуанкаре), на основе которой в настоящее время развиваются новые области

науки — теория нелинейных колебаний, механика тел переменной массы.

К современным научным проблемам механики, на наш взгляд, относятся проблемы теории колебаний, особенно исследование нелинейных колебаний механических систем с использованием ЭВМ, проблемы устойчивости движения нелинейных систем, задачи, требующие вероятностных методов расчета, проблемы возникновения стохастичности в нелинейных механических системах.

Механику разделяют на механику материальной точки, механику системы материальных точек, механику абсолютно твердого тела и механику сплошной среды.

В каждом из этих разделов обычно выделяют темы: 1) кинематику, в задачу которой входит изучение геометрических свойств движения тел; 2) статику, изучающую равновесие тел под действием сил; 3) динамику, включающую и статику, задачей которой является изучение механического движения тел под действием сил.

Поскольку кинематические соотношения необходимы для записи динамических уравнений, а интегрирование уравнений приводит к понятиям, вводимым в кинематике, представляется необходимым вкратце затронуть здесь некоторые вопросы кинематики.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ
ТОЧКИ

1.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ

Основными кинематическими мерами движения в механике материальной точки и системы материальных точек являются скорости и ускорения поступательного движения. Механические движения в кинематике изучаются на основе их геометрических свойств, т. е. без учета масс тел и действующих на них сил. Методы кинематики и установленные в ней зависимости используются при исследовании задач кинематики, а также в задачах динамики.

Движение любого объекта в кинематике изучается по отношению к некоторому выделенному телу (телу отсчета), с которым связывается система отсчета (СО), позволяющая определить положение движущегося объекта в разные моменты времени относительно тела отсчета. Важно, что выбор СО в кинематике произволен и зависит от целей исследования. Задачей кинематики является установление (с помощью математических методов) способа задания движения материальных точек и определение соответствующих кинематических характеристик движения (траектории, скорости, ускорения движущихся точек).

Положение материальной точки относительно системы отсчета S может быть задано с помощью радиуса-вектора точки как функции времени $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Конец этого радиуса-вектора описывает в пространстве кривую (считаем, непрерывную), которая называется годографом вектора \mathbf{r} и является траекторией точки. Радиусы-векторы точек, их скорости и ускорения можно задавать в различных координатах. Это и есть различные способы задания движения тел. Заметим, что векторное уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ параметрически задает траекторию в пространстве. Годограф вектора $\mathbf{r}(t)$ есть геометрическое место концов векторов $\mathbf{r}(t)$, откладываемых от общего начала O . Исключив из векторного уравнения $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ переменную t , найдем уравнение траектории в виде линии пересечения двух поверхностей, например $y=f_1(x)$, $z=f_2(x)$. Если разрешенные относительно y и z уравнения записать нельзя, то траекторию можно представить в виде пересечения двух поверхностей общего вида: $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$.

Скорость точки относительно S определяется как произвольная от радиуса-вектора по времени. Обозначим ее как $\dot{\mathbf{r}}$.

Производная от вектора скорости точки $\dot{\mathbf{r}}$ по времени называется ускорением точки относительно S ; ускорение будем обозначать вектором $\ddot{\mathbf{r}}$. Очевидно, скорость точки направлена по касательной к годографу радиуса-вектора, а ускорение направлено по касательной к годографу вектора скорости точки.

Кроме этих кинематических характеристик движения в механике материальной точки вводится и используется понятие секторной скорости точки σ , которая определяется как векторное произведение двух полярных векторов \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ и является, таким образом, аксиальным вектором (псевдовектором)*):

$$\sigma = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]. \quad (1.1)$$

Представим σ в виде

$$\sigma = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\mathbf{r} d\mathbf{r}] = \frac{dS}{dt}, \quad (2.1)$$

где $d\mathbf{r}$ — вектор, характеризующий элементарное перемещение точки, а модуль аксиального вектора dS равен площади, описанной радиусом-вектором \mathbf{r} при перемещении точки на $d\mathbf{r}$. Поэтому модуль секторной скорости характеризует площадь, очерчиваемую радиусом-вектором в единицу времени (см. рис. 1.1).

Запишем выражения $\mathbf{r}(t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\sigma(t)$ в различных координатах.

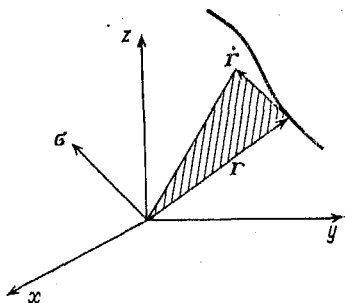


Рис. 1.1

1.2. ДЕКАРТОВА (ПРАВАЯ) СИСТЕМА КООРДИНАТ

Напомним, что в правой системе за положительное принимается направление отсчета углов (поворотов) против часовой стрелки. Радиус-вектор точки как функция времени задается тремя координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющимися также функциями времени. Вводя единичные векторы

*) При инверсии координатных осей (x , y , z) все компоненты полярного вектора изменяют знак, в то время как компоненты аксиального вектора при такой операции знака не меняют. Примеры полярных векторов: радиус-вектор \mathbf{r} , скорость $\dot{\mathbf{r}}$ и т. д. Аксиальные векторы — секторная скорость $\sigma = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]$, момент импульса $\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]$. Вообще, вектор, построенный как векторное произведение двух полярных векторов, является аксиальным вектором. Аксиальный вектор называют также псевдовектором.

n_x, n_y, n_z вдоль осей Ox, Oy, Oz соответственно, представим $\mathbf{r}(t)$ в виде

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{n}_x + y(t) \mathbf{n}_y + z(t) \mathbf{n}_z. \quad (3.1)$$

Функции $x(t), y(t), z(t)$ — компоненты радиуса-вектора, т. е. декартовы координаты точки.

Дифференцируя (3.1) по времени с учетом равенств $\dot{\mathbf{n}}_x = \dot{\mathbf{n}}_y = \dot{\mathbf{n}}_z = 0$, получим разложение вектора скорости точки по ортам декартовой системы координат:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{n}_x + \dot{y}(t) \mathbf{n}_y + \dot{z}(t) \mathbf{n}_z = \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

И аналогично получим вектор ускорения точки:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{n}_x + \ddot{y}(t) \mathbf{n}_y + \ddot{z}(t) \mathbf{n}_z = \mathbf{w}. \quad (5.1)$$

Для справочных целей напомним следующее представление вектора σ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{yz - zy}{2} \mathbf{n}_x + \frac{zx - xz}{2} \mathbf{n}_y + \frac{xy - yx}{2} \mathbf{n}_z = \\ &= \sigma_x \mathbf{n}_x + \sigma_y \mathbf{n}_y + \sigma_z \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — компоненты секторной скорости вдоль декартовых осей.

1.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Положение точки в пространстве в момент времени t можно определить тройкой величин $\rho(t), \varphi(t), z(t)$, которые являются цилиндрическими координатами точки

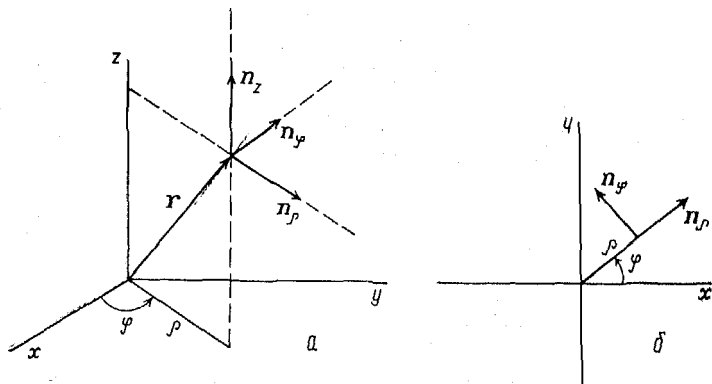


Рис. 2.1

(рис. 2.1). Формулы преобразования от декартовых координат к цилиндрическим и обратно имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (7.1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (8.1)$$

Это так называемые точечные преобразования, так как формулы этих преобразований содержат только координаты («старые» и «новые»), но не содержат явным образом временной переменной. Последнее означает, что обе системы координат описывают движение точки в одной и той же (неподвижной) системе отсчета. Области изменения цилиндрических координат: $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \varphi < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Координатные поверхности в цилиндрической системе*): $\rho = c_1$ — семейство цилиндров кругового сечения радиуса ρ с осью Oz ; $\varphi = c_2$ — семейство полуплоскостей, исходящих из оси Oz , в которых лежат радиус-вектор точки $r(t)$ и ось Oz ; $z = c_3$ — семейство плоскостей, перпендикулярных Oz . Линия пересечения двух каких-либо координатных поверхностей различных семейств называется координатной линией. Так как вдоль каждой координатной линии меняется только одна координата, то ее и называют соответствующей координатой. Очевидно, координатные линии φ — это концентрические окружности, координатные линии ρ — это полупрямые (лучи), исходящие из начала координат O (см. рис. 2.1), координатные линии z — прямые, параллельные оси Oz . Так как координатные линии φ не являются прямыми, цилиндрические координаты относятся к криволинейным. Очевидно, что три координатные линии, которые определяют точку пространства ρ , φ , z , пересекают друг друга под прямыми углами, т. е. цилиндрические координаты являются ортогональными координатами.

Касательная, проведенная к данной точке координатной линии, называется координатной осью. Все три оси цилиндрической системы координат ортогональны друг другу. Отложим по этим осям единичные векторы n_ρ , n_φ , n_z в направлении возрастания координат и разложим радиус-вектор точки по ортам цилиндрических координат:

$$r(t) = \rho(t) n_\rho + z(t) n_z. \quad (9.1)$$

Из рис. 2.1 видно, что орты цилиндрических координат связаны с ортами декартовых координат соотношениями

$$\begin{aligned} n_\rho &= n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi, \\ n_\varphi &= -n_x \sin \varphi + n_y \cos \varphi, \\ n_z &= n_z. \end{aligned} \quad (10.1)$$

* Координатными поверхностями в декартовой системе называют плоскости, перпендикулярные осям Ox , Oy , Oz и образующие три семейства взаимно перпендикулярных плоскостей.

Отсюда видно, что при перемещении точки относительно S положение ортов \mathbf{n}_ρ , \mathbf{n}_φ изменяется вследствие изменения угла φ . Действительно, вычислим $\dot{\mathbf{n}}_\rho$ и $\dot{\mathbf{n}}_\varphi$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}}_\rho &= -\dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi \sin \varphi + \dot{\varphi} \mathbf{n}_\rho \cos \varphi = \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{n}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \mathbf{n}_\rho \cos \varphi - \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi \sin \varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{n}_\rho.\end{aligned}\quad (11.1)$$

Дифференцируя (9.1) по t и учитывая (11.1), находим разложение вектора скорости точки по ортам цилиндрической системы координат:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi + \dot{z} \mathbf{n}_z. \quad (12.1)$$

Аналогично, дифференцируя $\dot{\mathbf{r}}$ по t и учитывая (11.1), получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) \mathbf{n}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{n}_z. \quad (13.1)$$

Таким образом, проекции скорости и ускорения точки на координатные оси (ρ) , (φ) , (z) имеют вид

$$\begin{aligned}v_\rho &= \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \\ \omega_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad \omega_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \quad \omega_z = \ddot{z}.\end{aligned}\quad (14.1)$$

Приведем также разложение вектора секторной скорости точки по ортам цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_\rho & \mathbf{n}_\varphi & \mathbf{n}_z \\ \dot{\rho} & 0 & \dot{z} \\ \dot{\rho} & \rho \dot{\varphi} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{-z \rho \dot{\varphi}}{2} \mathbf{n}_\rho + \frac{\dot{\rho} z - z \dot{\rho}}{2} \mathbf{n}_\varphi + \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{2} \mathbf{n}_z = \\ &= \sigma_\rho \mathbf{n}_\rho + \sigma_\varphi \mathbf{n}_\varphi + \sigma_z \mathbf{n}_z.\end{aligned}\quad (15.1)$$

Из (14.1) и (15.1) следует, что

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma_z}{dt}. \quad (16.1)$$

Рассмотрим далее важный случай движения, при котором секторная скорость точки остается постоянной, т. е. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$. Введем цилиндрическую систему координат с осью Oz , направленной по вектору $\boldsymbol{\sigma}_0$. Так как $\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]$, то и радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ и скорость точки $\dot{\mathbf{r}}(t)$ в любой момент времени лежат в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\sigma}_0$. В этом случае проекции скоростей v_ρ , v_φ и ускорений ω_ρ , ω_φ можно непосредственно выразить как функции ρ и φ , а не $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\rho}$, $\ddot{\varphi}$, а также через производные

по φ функции $\rho(\varphi)$. Действительно, в выбранной системе координат имеем

$$\sigma_z = \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{2} = \sigma_0,$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho^2 \dot{\varphi} = -2\sigma_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (17.1)$$

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho}. \quad (18.1)$$

Значит,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = 2\sigma_0 \left\{ -\mathbf{n}_\rho \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \mathbf{n}_\varphi \frac{1}{\rho} \right\}. \quad (19.1)$$

Далее из (16.1) имеем $\omega_\varphi = 0$, а

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \dot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (20.1)$$

$$\rho \dot{\varphi}^2 = 4\sigma_0^2 / \rho^3,$$

так что

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{w} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right\} \mathbf{n}_\rho. \quad (21.1)$$

Формулы (19.1) и (21.1) называют первой и второй формулами Бине соответственно. Они оказываются полезными при исследовании различных случаев движения материальной точки в центрально-симметричном силовом поле.

П р и м е р. Траектории точек являются плоскими и определяются уравнениями

$$а) \rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad б) \rho = \frac{p'}{1 + \varepsilon' \cos \gamma(\varphi - \varphi_0)},$$

p — параметр, ε — эксцентриситет эллипса, секторная скорость σ_0 . Начало цилиндрических координат помещено в фокусе эллипса. Определить ускорения точек.

Прежде всего заметим, что траектории точек различны. Так, в случае а) точка движется по эллипсу (рис. 3.1, а), в то время как в случае б) траектория не обязательно является замкнутой кривой (рис. 3.1, б) и может представлять собой розетку.

По второй формуле Бине, дважды дифференцируя ρ^{-1} по φ , находим $\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}$ и $\omega_\rho = -4\sigma_0^2 / \rho^2$ в случае а),

а $\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\varepsilon' \gamma^2}{\rho} \cos(\varphi - \varphi_0) \gamma = \gamma^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \right)$ и $\omega_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \times \left(\frac{1 - \gamma^2}{\rho} + \frac{\gamma^2}{\rho} \right)$ в случае б).

Отличие в ускорениях точек согласно уравнениям движения $m\dot{w} = F$ означает, что действующие на точки в случаях а) и б) силы имеют разные законы убывания с расстоянием от центра силы до точки. В частности, в случае б) сила $F \sim n_p \left(\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho^3} \right)$. Если речь идет о движении планет в гравитационном поле Солнца, то мы видим, что в случае б) перигелий планеты при каждом обороте смещается на величину $\Delta\varphi = 2\pi/\gamma$.

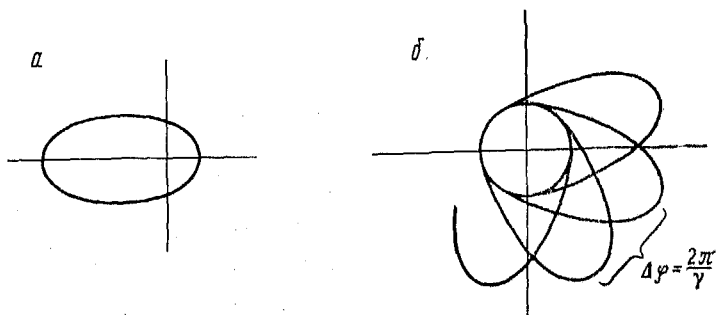


Рис. 3.1

Пример. *Определение радиуса-вектора точки по скорости.* Определить закон движения, траекторию и ускорение точки, движущейся по плоской траектории с постоянной секторной скоростью, если $|v| = \frac{v_0 \rho_0}{\rho}$, где ρ — расстояние от точки до некоторого центра, $\rho_0 = \rho(0)$, $v_0 = |v(0)|$, причем угол между векторами $r(0)$ и $v(0)$ равен α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Направим полярную ось от центра к точке так, чтобы при $t=0$ $\varphi(0) = 0$, тогда $\rho^2 \dot{\varphi} = 2\sigma_z = \rho_0 v_0 \sin \alpha$, $v = \frac{v_0 \rho_0}{\rho}$, а $\dot{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{\rho^2} = \frac{v_0^2 \rho_0^2}{\rho^2}$. Отсюда $\frac{d\rho}{dt} = + \frac{v_0 \rho_0}{\rho} \cos \alpha$, так как если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\dot{\rho}_0 > 0$. Разделяя переменные

$$\rho d\rho = v_0 \rho_0 \cos \alpha dt$$

и интегрируя, получим

$$\frac{\rho^2}{2} = v_0 \rho_0 \cos \alpha t + \frac{\rho_0^2}{2}, \quad \rho^2 = \rho_0^2 \left(1 + \frac{2v_0 \cos \alpha t}{\rho_0} \right).$$

Далее найдем φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\rho_0 \left(1 + \frac{2v_0 \cos \alpha}{\rho_0} t \right)}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{2v_0 \cos \alpha}{\rho_0} t \right),$$

или

$$\varphi = \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0 e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Ускорение точки найдем по формуле Бине

$$\mathbf{w} = -\frac{\rho_0 v_0^2}{\rho^3} \mathbf{n}_\rho.$$

1.4. ЕСТЕСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим в качестве аргумента радиуса-вектора точки длину дуги траектории s , отсчитывая ее от начальной точки, соответствующей моменту времени $t=t_0$, в направлении движения точки. Сама длина дуги задается, таким образом, как функция времени. Движение точки описывается векторной и скалярной функциями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s = s(t). \quad (22.1)$$

Описание вполне однозначно: каждому t соответствует только одно определенное значение s , так как s является монотонно возрастающей (положительной) функцией t .

Векторная функция $\mathbf{r}(s)$ позволяет определить в каждой точке траектории так называемые естественные координаты, орты которых образуют естественный трехгранник. Построим эти орты. Касательный вектор $\mathbf{n}_\tau(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$ в данной точке траектории, очевидно, является единичным вектором, так как $|d\mathbf{r}| = ds + O(ds^2)$, где ds — элемент дуги, $d\mathbf{r}$ — приращение радиуса-вектора, т. е. стягивающая ds хорда. Поэтому имеем

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1, \quad (23.1)$$

$$\mathbf{n}_\tau^2 = 1, \quad |\mathbf{n}_\tau| = 1. \quad (24.1)$$

Дифференцируя (24.1) по s , получим

$$2 \left(\mathbf{n}_\tau \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} \right) = 0, \quad (25.1)$$

откуда следует, что вектор $\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds}$ ортогонален вектору \mathbf{n}_τ (см. рис. 4.1). Но $\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}_\tau(s + \Delta s) - \mathbf{n}_\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{n}_\tau}{\Delta s}$. Из рисунка видно, что

$$\left| \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} \right| = \lim \left| \frac{\Delta \mathbf{n}_\tau}{\Delta s} \right| = \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

так как \mathbf{n}_τ — единичный вектор. Представим вектор $\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds}$ в виде

$$\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} \right| \mathbf{n} = k_1(s) \mathbf{n}, \quad (26.1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направление которого совпадает с вектором $d\mathbf{n}_\tau$, а функция $k_1(s) = da/ds$ называется кривизной кривой в данной точке. Вектор $\mathbf{n}(s)$ называется вектором главной нормали, а угол $\Delta\alpha$, равный углу между двумя соседними касательными к траектории, называется углом смежности. Кривизна характеризует меру отклонения кривой от прямой в данной точке. Через векторы \mathbf{n}_τ и \mathbf{n} проведем плоскость, которую назовем соприкасающейся плоскостью. В этой плоскости в направлении вектора \mathbf{n} отложим отрезок длины $R(s) = 1/k_1(s)$ (рис. 4.1). Если теперь в соприкасающейся плоскости построить

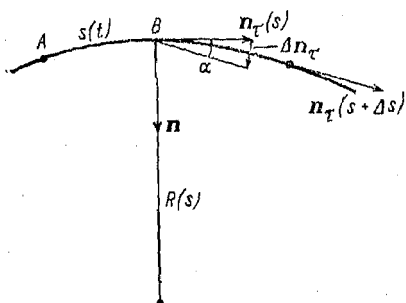


Рис. 4.1

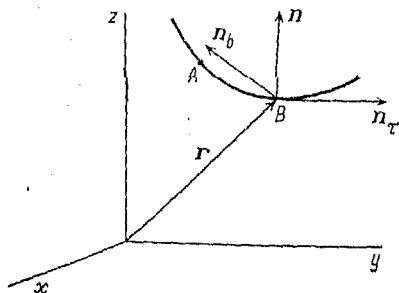


Рис. 5.1

окружность радиуса $R(s)$ с центром в точке C , то она будет иметь касание второго порядка с траекторией*) в точке B . Эту окружность называют кругом кривизны, а ее радиус — радиусом кривизны.

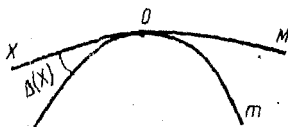
Третий единичный орт построим с помощью векторного произведения \mathbf{n}_τ и \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}_b = [\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}]. \quad (27.1)$$

*) Понятие касания просто дать на языке множеств: пусть M и m — два множества с общей точкой O . Множество M имеет в m в точке O касание порядка $\nu \geq 1$, если

$$\frac{\Delta(X)}{(XO)^\nu} \Big|_{X \rightarrow O} \rightarrow 0,$$

где $\Delta(X)$ — расстояние точки X множества M от m :



Это вектор бинормали. Векторы \mathbf{n}_τ , \mathbf{n} , \mathbf{n}_b , очевидно, образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов, которыми определяются направления естественных (натуральных) координатных осей в том месте траектории, где в данный момент времени находится движущаяся точка (рис. 5.1).

Проекции векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}_b на декартовы оси имеют вид

$$\mathbf{n} = R(x'', y'', z''), \quad \mathbf{n}_b = R(y'z'' - z'y'')\mathbf{n}_x + \\ + R(z'x'' - x'z'')\mathbf{n}_y + R(x'y'' - y'x'')\mathbf{n}_z,$$

где $R = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} \right|} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$. Штрихом мы обозначили производную по s .

Парами векторов определяются плоскости: соприкасающаяся (\mathbf{n}_τ , \mathbf{n}), нормальная (\mathbf{n} , \mathbf{n}_b) и спрямляющая (\mathbf{n}_b , \mathbf{n}_τ). Эти плоскости образуют так называемый естественный трехгранник Френе.

Изучение изменения направления касательного вектора \mathbf{n}_τ привело нас к понятию кривизны кривой. Новое понятие можно ввести, если рассмотреть изменение направления соприкасающейся плоскости или, что то же самое, бинормали. Так мы приходим к понятию кручения кривой. Для этого найдем

$$\frac{d\mathbf{n}_b}{ds} = \frac{d}{ds} [\mathbf{n}_\tau \mathbf{n}] = \left[\mathbf{n}_\tau \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]. \quad (28.1)$$

С другой стороны, так как $\mathbf{n}_b^2 = 1$, то

$$\left(\mathbf{n}_b \frac{d\mathbf{n}_b}{ds} \right) = 0, \quad (29.1)$$

поэтому из (28.1), (29.1) заключаем, что $\frac{d\mathbf{n}_b}{ds}$ ортогонален векторам \mathbf{n}_τ и \mathbf{n}_b .

Следовательно, $\frac{d\mathbf{n}_b}{ds}$ коллинеарен с \mathbf{n} :

$$\frac{d\mathbf{n}_b}{ds} = k_2(s) \mathbf{n}. \quad (30.1)$$

Здесь $k_2(s) = -\frac{1}{T(s)}$ называют кручением кривой, а $T(s)$ — радиусом кручения кривой в некоторой точке кривой. Так как \mathbf{n} — единичный вектор, то

$$\left| \frac{1}{T(s)} \right| = \left| \frac{d\mathbf{n}_b}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}, \quad (31.1)$$

где $\Delta \psi$ — угол между двумя соседними бинормальями. Из (30.1) видно, что если $k_2(s) = 0$ всюду, то бинормаль не меняет своего направления, а кривая является плоской. Иными словами, кру-

чение является мерой отклонения кривой от плоской кривой. Нетрудно показать, что T является псевдоскаляром.

Найдем $\frac{dn}{ds}$. Так как $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_b \mathbf{n}_\tau]$, то

$$\frac{dn}{ds} = \left[\frac{dn_b}{ds} \mathbf{n}_\tau \right] + \left[\mathbf{n}_b \frac{dn_\tau}{ds} \right] = \frac{n_b}{T} - \frac{n_\tau}{R}, \quad (32.1)$$

где мы учли (26.1) и (30.1), а также соотношения $[\mathbf{n} \mathbf{n}_\tau] = -n_b$, $[\mathbf{n}_b \mathbf{n}] = -n_\tau$. Следовательно, единичные векторы естественных координатных осей изменяются вдоль траектории согласно формулам

$$\frac{dn_\tau}{ds} = \frac{n}{R}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{n_\tau}{R} + \frac{n_b}{T}, \quad \frac{dn_b}{ds} = -\frac{n}{T}. \quad (33.1)$$

Это формулы Френе.

Найдем теперь проекции скорости и ускорения на оси естественных координат:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} = \dot{s} \mathbf{n}_\tau, \quad (34.1)$$

$$\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \dot{s} \mathbf{n}_\tau = \ddot{s} \mathbf{n}_\tau + \dot{s}^2 \frac{dn_\tau}{ds} = \ddot{s} \mathbf{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}. \quad (35.1)$$

Мы видим, что проекция скорости на касательную к траектории равна *)

$$v_\tau = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_\tau) = \dot{s}.$$

Вектор ускорения имеет две проекции: проекцию на касательную, равную $\ddot{s} \equiv \dot{v}$, и проекцию на главную нормаль v^2/R , где R — радиус кривизны в рассматриваемой точке. Заметим, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости: его проекция на бинормаль всегда равна нулю.

В заключение приведем без вывода формулу для кручения кривой. Ее нетрудно получить, умножая скалярно правую и левую части (30.1) на вектор \mathbf{n} . После несложных преобразований получим

$$k_2(s) = -R^2 (\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \mathbf{r}''']),$$

откуда видно, что $k_2(s)$ является псевдоскалярной величиной, так как $k_2(s)$ пропорциональна скалярному произведению полярного вектора \mathbf{r}' и аксиального (псевдовектора) вектора $[\mathbf{r}'', \mathbf{r}''']$.

*) Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} мы обозначаем как $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ или просто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$.

Упражнения

1. Показать, что если $k_1(s) = 0$, то кривая есть прямая.

Так как $k_1(s) = 0$, то $\frac{dn_\tau}{ds} = 0$ и $n_\tau = c_0$, причем c_0 — постоянный вектор. Значит, $\frac{dr}{ds} = c_0$, $r = c_0s + c_1$, а это есть уравнение прямой.

2. Показать, что если $k_2(s) = 0$, то кривая является плоской.

Из условия $k_2(s) = 0$ следует, что $\frac{dn_b}{ds} = 0$, $n_b = c$. Заметим, что $|c| = 1$, а $\frac{dn_b}{ds}$ ортогонален n_b . Так как n_b ортогонален n_τ , то $(n_b \cdot n_\tau) = 0$, т. е. $(c \cdot \frac{dr}{ds}) = 0$. Отсюда, интегрируя, получим $(c \cdot r) = a$. Последнее уравнение есть уравнение плоскости, в которой и должна лежать кривая.

Глава 2

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА В ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

2.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Принцип инерции, открытый Галилеем, в дальнейшем сыграл большую роль в правильном понимании самого движения. Первый закон Ньютона по существу просто повторяет принцип инерции Галилея и часто его называют законом инерции Галилея—Ньютона. Его можно сформулировать так: *«Тело, предоставленное самому себе, если на него не действует никакая сила, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, как двигалось до этого (т. е. до момента наблюдения), или остается в покое, если оно до этого покоилось».*

Физическое содержание этого закона, очевидно, сводится к утверждению, что существует такая система отсчета, в которой тело, не подверженное действию сил, будет двигаться равномерно и прямолинейно. Мы хорошо знаем, что существуют неинерциальные системы отсчета, относительно которых тело, предоставленное самому себе, будет двигаться с ускорением, так что конструктивным содержанием закона инерции является утверждение существования инерциальных систем отсчета.

Второй закон Ньютона говорит об изменении импульса (или скорости) тела, испытывающего действие сил. Поэтому этот закон составляет основное физическое содержание динамики материальной точки в механике Ньютона. Его математическая формулировка имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (1.2)$$

т. е. скорость изменения со временем импульса точки (количества движения) p равна действующей силе. Импульс точки $p = m\dot{r}$, но так как инерционная масса точки m предполагается не зависящей от скорости \dot{r} и равна постоянной, то

$$\frac{dp}{dt} = m\ddot{r} = F. \quad (2.2)$$

При формулировке второго закона Ньютона могут возникнуть известные трудности, связанные с тем, что мы не в состоянии до проведения измерений решить, подвержено ли рас-

смаатриваемое нами тело силовому воздействию. Ведь силы могут быть дальнедействующими. Мы сталкиваемся с необходимостью найти такую систему отсчета, относительно которой можно было бы измерять ускорения тел. Такая система отсчета, очевидно, должна двигаться без ускорения. Следуя первому закону, мы видим, что способ нахождения такой системы отсчета основан на предположении, что мы имеем какую-то независимую (от второго закона) возможность узнать, что на тело отсчета не действуют никакие силы. Нетрудно понять, однако, что такой возможности мы не имеем, так как критерий, по которому ускорения нет, если сила равна нулю, приводит к требованию существования какой-то системы отсчета, относительно которой следует измерять ускорения. И так далее.

Вместе с этим из опытных данных известно, что величина любой силы $*$), действующей между двумя телами, быстро уменьшается с увеличением расстояния между телами (силы гравитационного и электромагнитного взаимодействий $\sim r^{-2}$, сильного $\frac{\sim e^{-r/r_0}}{r}$, где $r_0 \sim 10^{-13}$ см = 1 ферми). Если бы тако-

го убывания сил с расстоянием не было, то, скажем, задача о взаимодействии двух тел (безотносительно к остальным телам Вселенной) была бы лишена всякого смысла просто потому, что нельзя было бы изолировать эти два тела так, чтобы они не взаимодействовали бы со всеми остальными телами Вселенной. Мы же, находясь на Земле, испытываем притяжение главным образом к ее центру и в значительно меньшей степени к какой-нибудь далекой (от нас) части Вселенной.

Несколько слов о глобальных инерциальных системах отсчета. Можно выделить, в соответствии с нашими рассуждениями, «иерархию» этих СО. Поставим вопрос о том, в какой степени известные системы отсчета являются инерциальными. Так, геоцентрическая система отсчета (с началом O в центре Земли и осями, направленными на определенные звезды) совершает эллиптическое движение вокруг Солнца с периодом обращения $T=1$ год $\approx 3 \cdot 10^7$ с. Так как радиус орбиты $R \approx 1,5 \cdot 10^{13}$ см, то центростремительное ускорение движения Земли по орбите вокруг Солнца по порядку величины равно $\omega_s = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \approx \approx 0,6$ см/с². Напомним, что ускорение тела у поверхности Земли $g=980$ см/с².

Ускорение гелиоцентрической системы отсчета (с началом в центре инерции Солнца и с осями, направленными на определенные звезды), движущейся вокруг центра нашей Галактики, нетрудно оценить, используя опытные данные: $\omega \sim 10^{-15}$ с⁻¹, $R \sim \sim 3 \cdot 10^{22}$ см, откуда $\omega_G \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см/с².

$*$) Здесь мы имеем в виду силы, которые возникают в результате фундаментальных взаимодействий: ядерных (сильных), электромагнитных или гравитационных.

В 1981 г. английский физик Берч сообщил, что, исходя из обработки данных наблюдения за крупномасштабными областями Вселенной (это области, размер которых по порядку величины совпадает с размером видимой части Вселенной), эти области участвуют во вращательном движении с частотой $\omega \sim \frac{1}{3} \cdot 10^{-20} \text{ с}^{-1}$. Поскольку R в этом случае $\sim 10^{28}$ см, то $\omega \sim 10^{-12} \text{ см/с}^2$.

Эти примеры наглядно демонстрируют сделанные выше замечания о силах взаимодействия. Кроме того, следует подчеркнуть, что ответ на вопрос: «нужно ли учитывать «неинерциальность» систем отсчета в уравнениях движения?» зависит от того, какая точность решения данной динамической задачи нас устраивает.

Третий закон Ньютона (о равенстве сил действия и противодействия): силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Формулировка четвертого закона Ньютона (закона всемирного тяготения) по существу дает нам ответ на вопрос, что такое сила как независимая физическая величина, входящая в правую часть уравнения (2.2). Сила гравитационного взаимодействия (притяжения) двух материальных точек пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки.

На этом мы закончим краткое рассмотрение законов Ньютона классической механики, заметив, что подробное их обсуждение можно найти в курсах общей физики.

2.2. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Выше говорилось, что первый закон Ньютона фактически утверждает, что существуют инерциальные системы отсчета (ИСО). Второй закон Ньютона в форме (2.2) справедлив также в ИСО. Мы видели, что в ИСО все силы, действием которых объясняется движение галактик, звезд, атомов, электронов и т. д., обладают важным общим свойством: величина силы, действующей на тело, обязательно уменьшается по мере того, как это тело удаляется от соседних тел. Рассмотрение движения тел относительно неинерциальных систем отсчета показывает, что в них появляются кажущиеся силы, которые, не будучи обусловлены присутствием других тел вблизи данного тела, не обладают свойством убывания.

Уравнения движения механики, записанные относительно ИСО, имеют очень простой вид, но кроме этого интерес к ИСО вызван и более глубокими физическими причинами.

Прекрасное изложение темы ИСО можно найти в книгах: Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975; Ло-

гунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1985. Здесь мы во многом следуем этим работам.

Рассмотрим в некоторой системе отсчета S движение N гравитирующих свободных материальных точек и запишем для этой системы N уравнений движения (второй закон Ньютона):

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = -G \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{m_\alpha m_\beta (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^3}, \quad (3.2)$$

где индексы α, β пробегают значения $1, 2, \dots, N$, а гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \text{ с}^{-2}$.

Перейдем к описанию этой системы в новых пространственно-временных координатах \mathbf{r}' , связанных со старыми координатами следующими формулами преобразования:

$$\mathbf{r}'_\alpha = (A) \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{V}t' + \mathbf{d}, \quad (4.2)$$

$$t' = t + \tau. \quad (5.2)$$

Здесь (A) — произвольная действительная ортогональная матрица, \mathbf{V}, \mathbf{d} — постоянные действительные трехмерные векторы, τ — действительная постоянная. Поясним, как действует матрица (A) на любой из векторов \mathbf{r}_α . Если x_i — декартовы компоненты вектора \mathbf{r} (индекс α для краткости опускаем), то при преобразовании, задаваемом матрицей (A) , компоненты всех векторов преобразуются по закону

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad x_i = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z). \quad (6.2)$$

Здесь и далее латинскими индексами перечисляются компоненты трехмерных векторов, тензоров и т. д. Нетрудно видеть, что из условий ортогональности преобразования и сохранения квадрата длины вектора \mathbf{r} следует, что *)

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (7.2)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера со значениями $\delta_{jk} = 1, j=k, \delta_{jk} = 0, j \neq k$; (7.2) представляет фактически шесть соотношений. Сле-

*) Пространства, в которых квадрат расстояния между точками, характеризуемыми радиусами-векторами $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta$, определяется формулой

$$|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_{i\alpha} - x_{i\beta})^2 \equiv (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2,$$

называют евклидовыми.

довательно, из девяти величин a_{ij} лишь три будут независимыми. Поэтому матрица (A) определена тремя действительными постоянными величинами. Формулы (4.2), (5.2) можно рассматривать как формулы преобразования радиусов-векторов точек r_α и времени t при переходе от одной ИСО (S) к другой ИСО (S'). Если в каждый ИСО имеются наблюдатели (скажем, в началах СО O и O'), то наблюдатель, находящийся в ИСО S , видит ИСО S' , декартовы оси которой повернуты с помощью матрицы (A) , движущейся со скоростью V и смещенной при $t=0$ на вектор d ; часы наблюдателя в S' отстают от часов наблюдателя в S на величину τ . Преобразования (4.2), (5.2) являются фактически группой преобразований, так как параметры, определяющие их, могут принимать произвольные значения. Эту 10-параметрическую группу (три угловых параметра, характеризующие матрицу поворотов (A) , по три компоненты векторов V и d и параметр τ) называют группой (движений) Галилея. Поставим вопрос: какой вид примут уравнения (3.2) в ИСО S' ? Подставив (4.2), (5.2) в (3.2), получим

$$m_\alpha \ddot{r}'_\alpha = -G \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{m_\alpha m_\beta (r'_\alpha - r'_\beta)}{|r'_\alpha - r'_\beta|^3}, \quad (8.2)$$

т. е. уравнения движения (3.2) сохраняют свою форму при преобразованиях группы Галилея. Форм-инвариантность уравнений движения (т. е. сохранение функциональной зависимости преобразованных уравнений от координат) относительно таких преобразований называют галилеевской инвариантностью, или *принципом относительности Галилея*. Уравнения Ньютона (3.2) инвариантны относительно преобразований группы Галилея.

Развитие механики Ньютона способствовало развитию наших представлений о пространстве и времени. Действительно, евклидовость пространства (т. е. то, что в пространстве действуют правила евклидовой геометрии пространства), заложенная в механику Ньютона а priori, могла быть проверена путем сравнения предсказаний механики с результатами экспериментов. Так было доказано, что с большой точностью пространство является евклидовым. Для лучшего уяснения связи механики Ньютона с евклидовостью пространства рассмотрим преобразования группы Галилея при некоторых фиксированных значениях параметров.

1. Пусть все параметры, кроме d , равны нулю, т. е. мы совершаем только преобразование координат вида

$$r'_\alpha = r_\alpha + d, \quad t' = t.$$

Очевидно, это преобразование можно осуществить, или смещая начало системы S на вектор d (преобразование системы отсчета), или перенося каждую материальную точку нашей механи-

ческой системы в точки пространства, отстоящие от прежних на постоянный вектор \mathbf{d} . Согласно (3.2) и (8.2) механические процессы при этом будут протекать одинаковым образом. Это означает, что в пространстве нет выделенных точек, а значит оно однородно.

2. Пусть $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha$, $t' = t + \tau$. Форм-инвариантность уравнений (3.2) относительно этого преобразования (переносе начала отсчета всех часов) означает, что все моменты времени равноправны (если изображать эти моменты на оси времени), т. е. один и тот же механический процесс при одинаковых начальных условиях будет протекать одинаково независимо от начального момента t_0 .

3. Пусть $\mathbf{r}'_\alpha = (A)\mathbf{r}_\alpha$, $t' = t$. Нетрудно понять, что инвариантность уравнений Ньютона относительно этих преобразований доказывает отсутствие выделенных направлений в пространстве, т. е. его изотропность.

Итак, на основании механических уравнений можно дать некоторые заключения о свойствах пространства и времени: однородности и изотропности пространства, однородности времени.

4. Пусть $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{V}t$, $t' = t$. Если смотреть на эти преобразования как на точечные, то согласно данному выше определению эти преобразования характеризуют переход из одной ИСО к другой ИСО. Нелишнее подчеркнуть, что в уравнения (8.2) не входит вектор \mathbf{V} , который согласно (4.2) является вектором скорости системы S относительно S' . Это означает, что, во-первых, механические процессы в разных ИСО протекают одинаково, и, во-вторых, наблюдая механические процессы, мы не сможем сказать, находимся мы в неподвижной или в движущейся с постоянной скоростью \mathbf{V} системе отсчета. Из этих преобразований также следует, что расстояния между любыми точками являются инвариантными для всех ИСО, т. е.

$$(\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}'_\beta)^2 = (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)^2,$$

т. е. пространство евклидово во всех ИСО.

Пример. Кинематическая «задача преследования» в движущейся системе отсчета.

В плоскости xOy движутся две точки с постоянными по модулю скоростями, причем $\mathbf{v}_1 = (v, 0)$, а вектор \mathbf{v}_2 все время направлен на точку 1. Найти траекторию точки 2 в системе осей x_1y_1 , движущихся вместе с точкой 1 (рис. 1.2), и интервал времени T , через который произойдет встреча, считая, что $|\mathbf{v}_2| = 2v$ и что при $t = t_0 = 0$ $\mathbf{r}_1(0) = (0, H)$, $\mathbf{r}_2(0) = (0, 0)$.

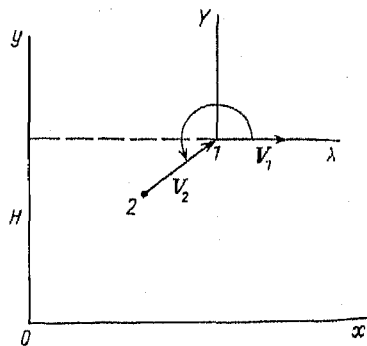


Рис. 1.2

В (движущейся) системе отсчета $x1y$ введем полярные координаты точки 2 r, φ согласно $X = -r \cos \varphi, Y = -r \sin \varphi$. Кинематическое условие

$$\dot{X} = v_2 \cos \varphi - v_1, \quad \dot{Y} = v_2 \sin \varphi.$$

С другой стороны,

$$\dot{X} = -\dot{r} \cos \varphi + r\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\dot{Y} = -\dot{r} \sin \varphi - r\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

Поэтому

$$\frac{\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi}{\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi} = -\frac{v_1}{v_2 \sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Переходя в этом равенстве к дифференцированию по φ , получим

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{d\varphi} = r \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right).$$

Разделяя переменные

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right) d\varphi$$

и интегрируя, получаем

$$\frac{v_1}{v_2} (\ln r + C) = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{v_1}{v_2} \ln \sin \varphi.$$

Определив константу C из условия, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $r = H$, находим уравнение траектории в полярных координатах в системе $x1y$

$$\left(\frac{r}{H} \right)^{\frac{v_1}{v_2}} = \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) / (\sin \varphi)^{\frac{v_1}{v_2}}.$$

Если $|v_2| = 2v, |v_1| = v$, то

$$r = H \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Для нахождения интервала времени T воспользуемся равенством

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_2 v_1 \cos \varphi = (5 - 4 \cos \varphi) v^2$$

и учтем, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{2}{\sin \varphi} (2 - \cos \varphi) \dot{\varphi}.$$

Из последних двух соотношений получим

$$\frac{H}{(1 + \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = \pm v,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{v}{H} (t - t_0).$$

Интеграл слева с помощью замены переменной $x = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ приводится к виду

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) dx.$$

Учитывая, что $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi(t) = 0$, найдем

$$\Delta t = \frac{2}{3} \frac{H}{v}.$$

2.3. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ (ОСНОВНАЯ) ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Второй закон Ньютона (2.2), или, что то же самое, векторное уравнение движения, представляет собой три дифференциальных уравнения второго порядка по времени. Например, проектируя обе части на (2.2) на оси декартовой системы координат, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Различают две задачи динамики: 1) по заданному закону движения точки, т. е. по известному как функция t векторному соотношению $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ находят силу \mathbf{F} , действующую на точку; это прямая задача динамики; 2) по заданной силе \mathbf{F} находят закон движения точки $\mathbf{r}(t)$; это обратная (основная) задача динамики. Поговорим об основной задаче динамики более подробно. Для ее решения недостаточно знать только силу. Следует задать также механическое состояние в некоторый момент времени t_0 , т. е. начальные условия $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Механическое состояние точки в момент t (т. е. $\mathbf{r}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t)$) однозначно определяется ее начальным механическим состоянием и условиями ее движения (уравнениями движения). Это следует из однозначности и единственности решения дифференциальных

уравнений (2.2), удовлетворяющих данным начальным условиям. Сформулированное предложение о предсказуемости эволюции механической системы во времени при заданных начальном состоянии и условиях движения называется принципом механической причинности, или принципом механического детерминизма. Его суть наиболее точно и полно выразил Лаплас: «Разумное существо, которое в каждый момент знало бы все движущие силы природы и имело бы полную картину состояния, в котором природа находится, могло бы (если бы только его ум был в состоянии проанализировать эти данные) выразить одним уравнением как движение мельчайших атомов, так и движение самых больших тел мира. Ничто не осталось бы для него неизвестным, и оно могло бы обзреть одним взглядом как будущее, так и прошлое», т. е. по начальным состояниям и взаимодействиям состояние системы в любой момент времени в будущем определялось бы однозначно. Со времен Лапласа появились новые важные идеи. Вот одна из них.

Хотя уравнения, описывающие эволюцию механической системы во времени, вполне детерминированы, ее развитие во времени может различаться своими маршрутами. Это связано с чувствительностью некоторых систем к начальным условиям, а точнее, к даже малому изменению начального состояния. В классической динамике в качестве примера можно привести шарик, падающий на острие лезвия бритвы, траектория которого после соприкосновения существенно зависит от положения шарика относительно острия в момент времени t перед тем, как он касается лезвия.

Решение уравнения (2.2), которое удовлетворяет какому-либо конкретному начальному условию, называют частным решением. Более важно найти решение, удовлетворяющее произвольным условиям; это так называемое общее решение.

2.4. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В теории дифференциальных уравнений есть понятие первых интегралов. Первыми интегралами уравнений движения (9.2) будем называть такие функции $f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ координат, скоростей и времени, которые обращаются в постоянные C_i в силу этой системы дифференциальных уравнений

$$f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.2)$$

Это означает, что система (9.2) может быть сведена к эквивалентной

$$\frac{df_i}{dt} = 0. \quad (11.2)$$

Условие функциональной независимости трех первых интегралов (рассматриваемых как функции скоростей) записывает-

ся в виде неравенства нулю (функционального) определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial \dot{x} & \partial f_2 / \partial \dot{x} & \partial f_3 / \partial \dot{x} \\ \partial f_1 / \partial \dot{y} & \partial f_2 / \partial \dot{y} & \partial f_3 / \partial \dot{y} \\ \partial f_1 / \partial \dot{z} & \partial f_2 / \partial \dot{z} & \partial f_3 / \partial \dot{z} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12.2)$$

Если (12.2) выполнено, то три первых интеграла движения будут независимыми в смысле разрешимости системы конечных уравнений (10.2) относительно \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . Условие (12.2) является необходимым и достаточным условием независимости первых интегралов движения.

Далее, система (10.2) представляет собой систему дифференциальных уравнений 1-го порядка. Предположим, что мы свели ее к эквивалентной системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \Phi_i(x, y, z, C_1, C_2, C_3, t) = 0, \quad (13.2)$$

т. е. мы нашли Φ_i такие, что

$$\Phi_i(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3) = \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14.2)$$

Φ_i называют вторыми интегралами движения. Они являются независимыми, если уравнения (14.2) разрешимы относительно координат x , y , z . Условие независимости — неравенство нулю функционального определителя

$$\det \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \partial \Phi_1 / \partial x & \partial \Phi_2 / \partial x & \partial \Phi_3 / \partial x \\ \partial \Phi_1 / \partial y & \partial \Phi_2 / \partial y & \partial \Phi_3 / \partial y \\ \partial \Phi_1 / \partial z & \partial \Phi_2 / \partial z & \partial \Phi_3 / \partial z \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.2)$$

Решение системы (14.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Найденные таким образом функции (16.2), являющиеся решениями системы уравнений (9.2) и содержащие шесть произвольных постоянных интегрирования, называют общим решением, так как, придавая определенные значения постоянным C_i , \tilde{C}_i , можно получить функции (10.2) при любых начальных условиях. Выражение постоянных C_i , \tilde{C}_i через начальные значения x_0 , y_0 , z_0 , \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 проводится элементарно в два приема.

1. Из системы (10.2) при $t=t_0$ имеем

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0) = C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.2)$$

2. Подставляя в систему (14.2), взятую при $t=t_0$, C_i и (17.2), находим

$$\tilde{C}_i = \Phi_i(x_0, y_0, z_0, t_0, C_1(t_0), C_2(t_0), C_3(t_0)), \quad i=1, 2, 3. \quad (18.1)$$

Найти общее решение уравнений движения — это значит полностью решить обратную задачу динамики.

Пример. Найти общее решение векторного уравнения движения (1.2), если сила зависит только от времени $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$.

Интегрируя (1.2) один раз, получаем три первых независимых интеграла движения

$$\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t') dt' = \mathbf{C},$$

где постоянный вектор \mathbf{C} — это начальная скорость $\dot{\mathbf{r}}(t_0)=\dot{\mathbf{r}}_0$. Интегрируя последнее уравнение, получаем три независимых вторых интеграла движения t'

$$\mathbf{r} - \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{F}(t'') - \mathbf{C}(t-t_0) = \tilde{\mathbf{C}}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{C}}=\tilde{\mathbf{r}}_0$. Общее решение имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{F}(t'') + \dot{\mathbf{r}}_0(t-t_0) + \mathbf{r}_0.$$

Пример. Пусть проекции силы в уравнениях (9.2) зависят только от соответствующих координат. Найти все первые интегралы движения в этом случае и общее решение (в квадратурах).

Введем обозначения $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$. Тогда (9.2) можно переписать в виде $m\ddot{x}_i=F_i(x_i)$. Последние уравнения, очевидно, имеют три первых интеграла

$$f_i \equiv \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - \int_{x_{i0}}^{x_i} F_i(x'_i) dx'_i = C_i, \quad i=1, 2, 3.$$

Откуда находим

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(C_i + \int_{x_{i0}}^{x_i} F_i(x'_i) dx'_i \right)} \equiv \pm B(x_i).$$

Знак перед корнем нужно выбирать в соответствии с начальным состоянием. Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$t = t_0 \pm \int_{x_{i0}}^{x_i} \frac{dx_i}{B(x_i)}.$$

**2.5. ИМПУЛЬС, МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.
МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ
ТОЧКИ. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ.
ТЕОРЕМЫ СОХРАНЕНИЯ**

Уравнения движения (1.2), (2.2) определяют закон изменения импульса материальной точки, из которых следует, что если $\mathbf{F}=0$, то вектор импульса точки $\mathbf{p} = m\mathbf{r} = \mathbf{p}(t_0)$, где $\mathbf{p}(t_0)$ — постоянный вектор. Это утверждение носит характер теоремы. Так как \mathbf{p} — трехмерный вектор, то в случае равенства нулю всех трех компонент силы остаются неизменными во время движения все три проекции импульса на неподвижные оси. Однако из (1.2) следует также, что в случае равенства нулю какой-либо проекции силы на неподвижную ось соответствующая проекция импульса сохраняется. Функции

$$f_i = m\dot{x}_i = p_i(t_0), \quad (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z) \quad (19.2)$$

являются тремя первыми независимыми интегралами движения.

Найдем векторное произведение $[\mathbf{r}\mathbf{p}]$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки. Из (1.2) получим

$$[\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}], \quad (20.2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (21.2)$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ — момент импульса точки, а $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$ — момент силы. Уравнение (21.2) определяет закон изменения момента импульса точки со временем. Из (21.2) следует теорема: если вектор момента силы в любой момент времени равен нулю ($\mathbf{M}=0$), то момент импульса точки не изменяется во время движения, т. е. $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$, или по компонентам $L_x = L_{x0}$, $L_y = L_{y0}$, $L_z = L_{z0}$. В случае равенства нулю какой-либо проекции момента силы соответствующая проекция момента импульса будет оставаться постоянной. Компоненты вектора \mathbf{L} по декартовым осям

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= n_x m (\dot{y}z - z\dot{y}) + n_y m (z\dot{x} - x\dot{z}) + n_z m (x\dot{y} - y\dot{x}) = \\ &= n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Из (6.1) и (22.2) видно, что $\mathbf{L} = 2m\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — секторная скорость точки.

Поставим общий вопрос: в каких случаях $\mathbf{M}=0$, т. е. когда \mathbf{L} является интегралом движения? Оказывается, это будет в двух случаях: 1) $\mathbf{F}=0$; 2) $\mathbf{F}=f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$. Первый случай тривиален, так как на точку не действуют силы. Во втором случае линия действия параллельна (или антипараллельна) радиусу-вектору частицы и проходит через некоторую неподвижную точку — центр силы. Очевидно, центр силы находится в начале координат. Тогда $\mathbf{M}=[\mathbf{r}\mathbf{F}]=\frac{f}{r}[\mathbf{r}\mathbf{r}]=0$. Силы вида $\mathbf{F}=\frac{f(r)\mathbf{r}}{r}$

называются центральными. Мы будем рассматривать только так называемые потенциальные центральные силы; тогда скалярная функция f зависит только от $|\mathbf{r}|$.

Таким образом, момент импульса точки относительно центра силы сохраняется. Однако между тремя проекциями момента импульса имеется зависимость, так как

$$(\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = (m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 0, \quad \text{имеет вид } \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (23.2)$$

$$L_x \dot{x} + L_y \dot{y} + L_z \dot{z} = 0. \quad (24.2)$$

Аналогично

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}) = (m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad \text{аналогично} \quad (25.2)$$

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0.$$

Но если $\mathbf{F}=f\frac{\mathbf{r}}{r}$, то $\mathbf{L}=\mathbf{L}_0$ и, следовательно,

$$(\mathbf{L}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 0, \quad (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{r}) = 0. \quad (26.2)$$

Из (26.2) видим, что под действием центральной силы точка движется по плоской траектории, плоскость которой проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному моменту импульса точки \mathbf{L}_0 .

Заметим, что существование зависимостей (24.2), (25.2) связано с невозможностью решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} L_x &= m(\dot{z}y - y\dot{z}), \\ L_y &= m(-x\dot{z} + \dot{x}z), \\ L_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \quad (27.2)$$

как относительно \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} (при фиксированных x , y , z), так и относительно x , y , z (при фиксированных \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}). Легко проверить, что функциональный определитель этой системы равен нулю.

Вычислим скалярное произведение векторов $\dot{\mathbf{r}}$ и $m\ddot{\mathbf{r}}$, умножая (2.2) скалярно на вектор $\dot{\mathbf{r}}$:

$$m(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}). \quad (28.2)$$

Левая часть (28.2) равна полной производной по t от кинетической энергии точки

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (29.2)$$

Правая часть (28.2) равна мощности силы. Рассмотрим важный случай потенциальной силы. Силу называют потенциальной, если она зависит только от координат и времени и удовлетворяет векторному уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = [\nabla \mathbf{F}] = 0. \quad (30.2)$$

Если (30.2) выполняется, то \mathbf{F} можно представить в виде

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right). \quad (31.2)$$

Скалярную функцию U называют потенциальной энергией точки. Пусть \mathbf{F} и U не зависят от t явно. Используя (31.2), представим $(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ в виде

$$(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = -\frac{dU}{dt}. \quad (32.2)$$

Выражая $m(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})$ из (29.2) и подставляя полученное, а также (32.2) в (28.2), находим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} = \frac{dA}{dt}. \quad (33.2)$$

Здесь dA — элементарная работа потенциальной силы, т. е. $dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})$. Так как dT и dA являются в данном случае полными дифференциалами, то

$$d(T + U) \equiv dE = 0, \quad (34.2)$$

т. е.

$$T + U|_{t_0} = T + U|_t, \quad E(t_0) = E(t). \quad (35.2)$$

Мы получили закон сохранения полной механической энергии точки E , которая определяется как сумма кинетической и потенциальной энергии точки. Если \mathbf{F} и U зависят явно от t , то

$$\frac{dU}{dt} = \left(\nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial t} = -\left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (36.2)$$

Выражая отсюда $(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ и подставляя в (28.2), получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (37.2)$$

Это закон изменения полной механической энергии точки, движущейся в поле потенциальной силы.

В задачах механики помимо потенциальных сил рассматривают также диссипативные и гироскопические силы. Диссипативная сила \mathbf{F}^d направлена всегда противоположно скорости тела относительно среды, вызывающей торможение тела:

$$\mathbf{F}^d = -\beta \dot{\mathbf{r}}, \quad (38.2)$$

причем β в общем случае является положительной скалярной функцией координат и скорости точки.

Гироскопическая сила представима в виде

$$\mathbf{F}^g = \alpha [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}], \quad (39.2)$$

где $\dot{\mathbf{r}}$ — скорость точки. Из (39.2) следует, что вектор \mathbf{F}^g ортогонален вектору скорости $\dot{\mathbf{r}}$, т. е. $(\mathbf{F}^g \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 0$. Если $\mathbf{F}^d \neq 0$ и $\mathbf{F}^g \neq 0$, то эти силы нужно учитывать в уравнениях движения. В частности, закон изменения полной энергии точки при наличии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{F}^d \cdot \dot{\mathbf{r}}). \quad (40.2)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

3.1. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Далее мы увидим, что в механике рассматриваются некоторые модельные системы, движение которых можно описать одним уравнением

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Здесь x не обязательно декартова координата точки, а параметр m не всегда обозначает массу точки. Примерами таких систем могут быть: гармонический осциллятор, математический маятник, бусинка на неподвижном гладком кольце и т. п.

Если U является только функцией координаты x , то уравнение движения интегрируется в общем виде, т. е. основная задача динамики решается при произвольной функции U . Для этого найдем первый интеграл уравнения движения (1.3). Умножая (1.3) на \dot{x} , получим

$$\dot{x}m\ddot{x} = -\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)\right) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = E_0. \quad (3.3)$$

Уравнение (2.3) выражает закон сохранения полной энергии (3.3). Из (3.3) можно найти $\dot{x}(x)$, не отыскивая закона движения точки $x(t)$. Кроме того, (3.3) есть дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно проинтегрировать в общем виде методом разделения переменных. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}, \quad (4.3)$$

откуда

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} + C. \quad (5.3)$$

Решение (5.3), зависящее от двух постоянных E_0 , C , является вторым интегралом движения.

3.2. ОБЛАСТИ ДВИЖЕНИЯ. ТОЧКИ ОСТАНОВКИ

Запишем (3.3) в виде

$$\frac{mv^2}{2} = E_0 - U(x). \quad (6.3)$$

Так как $\frac{mv^2}{2} = T > 0$, то отсюда следует, что движение может происходить только в тех областях пространства, где $E_0 > U(x)$. Если $U(x)$ задана графически, то классически допустимые области движения (для определенной E_0) можно найти, проведя на графике $U(x)$ горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению E_0 (рис. 1.3). Действительные корни уравнения $U(x) - E_0 = 0$ определяют границы областей движения.

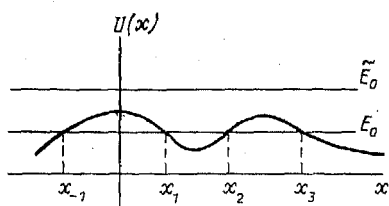


Рис. 1.3

В этих точках потенциальная энергия равна полной, а кинетическая энергия (и скорость точки) обращается в нуль. Поэтому эти точки являются точками остановки частицы; они зависят от E_0 . Если полная энергия частицы равна E_0 , как на рис. 1.3, то в зависимости от начального значения x_0 движение может либо происходить в ограниченной области пространства (если

$x_1 < x_0 < x_2$) между точками x_1, x_2 , либо в области пространства, ограниченной лишь с одной стороны (если $x_0 < x_{-1}$ или $x_0 > x_3$). Движение в ограниченной области пространства называют финитным; в ограниченной с одной стороны или неограниченной вообще (движение с \tilde{E}_0) — инфинитным. При инфинитном движении частица уходит на бесконечность. Частица с энергией E_0 в заштрихованных областях находиться не может, как и не может пройти через эти области. Последнее утверждение справедливо только в классической механике. Если система квантовомеханическая, то вероятность просачивания частицы через классически недоступную область (т. е. через потенциальный барьер) отлична от нуля. Поэтому даже если мы приготовили состояние с $x_1 < x_0 < x_2$ и энергией E_0 , то вероятность обнаружения частицы в области $x > x_3$ можно оценить по формуле

$$\omega \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{2m(u-E_0)} dx}$$

а в области $x < x_{-1}$

$$\omega \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_{-1}}^{x_1} \sqrt{2m(u-E_0)} dx}$$

где \hbar — постоянная Планка.

В квантовой физике явление прохождения частицы через потенциальный барьер называют квантовым туннелированием или туннельным эффектом. Он будет иметь место при конечных высоте и ширине барьера. Заметим, что формальный переход к классической теории соответствует пределу $\hbar \rightarrow 0$, что влечет за собой $\omega \rightarrow 0$.

Если x лежит в области $x_1 < x < x_2$, т. е. частица находится в потенциальной яме, то движение является колебательным. Из (1.3) и вообще из уравнений движения следует, что если силы, действующие на частицу, являются потенциальными и U не зависит от t явно, то замена в уравнениях движения t на $-t$ не меняет уравнений движения. Это свойство обратимости движений, происходящих по законам классической механики *). В частности, это означает, что время движения $t_{x_1 x_2}$ от x_1 до x_2 равно времени обратного движения $t_{x_2 x_1}$ от x_2 до x_1 , т. е. $t_{x_1 x_2} = t_{x_2 x_1}$. Но период полного колебания T равен

$$T = t_{x_1 x_2} + t_{x_2 x_1} = 2t_{x_1 x_2}, \quad (7.3)$$

и согласно (5.3) получим

$$T(E_0) = 2 \int_{x_1(E_0)}^{x_2(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}}. \quad (8.3)$$

Этой формулой определяется период колебаний частицы в зависимости от ее полной механической энергии.

Пример. Найти закон движения и период колебаний одномерного гармонического осциллятора.

Гармоническим осциллятором называют механическую систему с потенциальной энергией $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, x — координата точки. Классически доступная область движения есть при любой положительной полной энергии (рис. 2.3). Заметим, если $E_0 = 0$, то решение тривиально: $x(t) = 0$. Вместе с x обращаются в нуль все производные закона движения: $\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{\ddot{x}}(t) = 0, \dots$ При $E_0 > 0$ закон движения получим, используя (5.3):

$$\begin{aligned} t &= t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = t_0 \pm \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} = \\ &= t_0 \pm \frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{x}{\beta} - \alpha \right), \quad \beta = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{x_0}{\beta}. \end{aligned}$$

*) Свойство обратимости при замене t на $-t$ имеет место и в общем случае движения в трехмерном пространстве. Эту так называемую t -инвариантность уравнений механики можно продемонстрировать, сняв на киноплёнку какой-то механический процесс, развивающийся в направлении возрастания t , и прокручивая ее в обратном направлении.

Обращая полученную формулу, найдем

$$x = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \sin [\omega(t-t_0) + \alpha].$$

Отсюда видно, что точка совершает гармонические колебания с периодом $T=2\pi/\omega$.

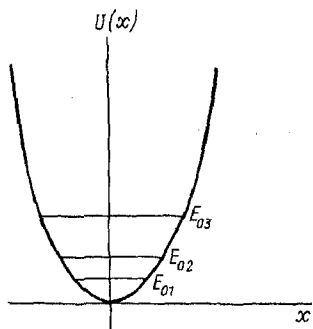


Рис. 2.3

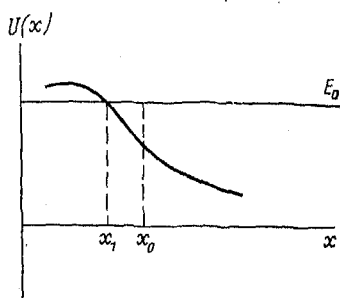


Рис. 3.3

Период колебаний T можно найти непосредственно из (8.3), не отыскивая закон движения. Точки остановки в случае гармонического осциллятора $x_{1,2} = \pm \beta$, поэтому

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} = \frac{4}{\omega} \arcsin 1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

3.3. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ТОЧЕК ОСТАНОВКИ

Рассмотрим движение частицы, энергия которой равна E_0 вблизи точки x_1 (рис. 3.3), т. е. считаем, что $x_0 - x_1 \ll x_1$ и $x - x_1 \ll x_1$. Разложим $U(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_1 , ограничиваясь членом первого порядка малости по разности $x - x_1$:

$$U(x) = U(x_1) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_1} (x - x_1) = U(x_1) - F(x - x_1). \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в формулу (6.3), получим

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2F}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{2m}{F}} (\sqrt{x - x_1} - \sqrt{x_0 - x_1}). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Обращая (10.3), найдем

$$\sqrt{x-x_1}-\sqrt{x_0-x_1}=\pm\sqrt{\frac{F}{2m}}(t-t_0). \quad (11.3)$$

Очевидно, знак $+$ в правой части (11.3) нужно поставить, если $\dot{x}_0 > 0$, а знак $-$, если $\dot{x}_0 < 0$. Пусть $x_0 = x_1$, т. е. частица в начальный момент времени t_0 находится в точке остановки. Тогда закон движения вблизи x_1 имеет вид

$$x(t)-x_1=\frac{F}{2m}(t-t_0)^2, \quad (12.3)$$

т. е. частица движется с постоянным ускорением, что и должно быть, так как движение происходит под действием постоянной силы. Напомним, что формула (12.3) — приближенная; ее точность убывает, при удалении от x_1 . Сравним отрезки времени, которые затрачивает частица на прохождение малого отрезка пути s вблизи и вдали от точки остановки x_1 . Из (12.3) следует, что если отрезок пути s примыкает к точке остановки, то для его прохождения необходимо затратить отрезок времени

$$\Delta t \sim \sqrt{\frac{2m}{F}}s, \quad \text{т. е. } \Delta t \sim s^{1/2}. \quad \text{Малый отрезок пути } s \text{ вдали от}$$

точки остановки частица проходит за время $\Delta t \sim s$, так как в этом случае можно считать силу F равной нулю, а движение равномерным. Таким образом, вблизи точки остановки частица затрачивает большее время на прохождение малого отрезка пути s , чем вдали от нее. Это вполне естественно, так как скорость частицы вблизи точки остановки стремится к нулю.

Рассмотрим теперь движение частицы с энергией E_0 в окрестности точки x_1 (рис. 4.3), т. е. вблизи максимума потенциального барьера.

Как и ранее, раскладываем $U(x)$ в окрестности x_1 . Теперь, однако,

$$U(x)=E_0+\frac{U''(x_1)}{2}(x-x_1)^2, \quad (13.3)$$

так как $U'(x)|_{x=x_1}=0$. Поскольку в точке x_1 $U(x)$ имеет максимум, то $U''(x_1) < 0$. Из (5.3) с учетом (13.3) получим

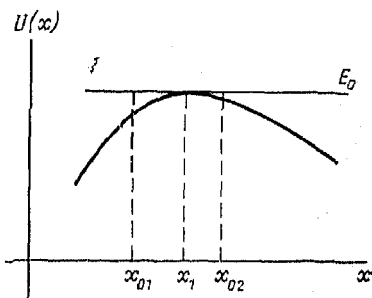


Рис. 4.3

$$\begin{aligned}
 t-t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{-\frac{U''(x_1)(x-x_1)^2}{2}}} = \\
 &= \pm \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x-x_1} = \pm \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \quad (14.3)
 \end{aligned}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{-U''(x_1)}{m}} > 0$.

Из (14.3) находим закон движения частицы в виде

$$x(t) - x_1 = (x_0 - x_1) e^{\pm \alpha(t-t_0)}. \quad (15.3)$$

Знак в показателе экспоненты определяется направлением скорости частицы в начальный момент времени t_0 в точке x_0 , так как

$$\dot{x}(t_0) = \pm \alpha (x_0 - x_1). \quad (16.3)$$

Поэтому закон движения частицы в окрестности точки x_1 при приближении к ней

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (17.3)$$

при удалении от x

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) e^{\alpha(t-t_0)}. \quad (18.3)$$

Мы видим, что для прохождения участка пути до точки остановки x_1 , находящейся в точке максимума потенциального барьера, частице необходимо бесконечно большой отрезок времени, т. е. частица может приблизиться к x_1 лишь асимптотически.

Некоторые интересные замечания о решениях можно сделать, опираясь на полученные выше результаты о характере движения частицы в окрестности точек остановок, в которых потенциальная энергия частицы имеет максимум. Будем считать, что максимумы потенциальной энергии во всех точках остановок одинаковы. Это так называемый вырожденный случай. Рассмотрим движение частицы в полях $U(x)$, графики которых изображены на рис. 5.3, а, б. Для дальнейшего удобно полагать $t_0 = -\infty$, т. е. считать, что начальный момент времени бесконечно удален в прошлое. Рассмотрим движение частицы в поле $U(x)$, изображенном на рис. 5.3, а, полагая $x(-\infty) = x_1$, $\dot{x}(-\infty) = 0$. Из уравнения движения $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$ и первого интеграла (полной энергии)

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E(-\infty) \quad (19.3)$$

С учетом начальных условий следует, что $E(-\infty)=0$, так как $\dot{x}(-\infty)=0$ и $U(x_1)=0$. Зададимся вопросом: каков вид решений уравнения движения, удовлетворяющего условиям $x(-\infty)=x(\infty)=x_1$? Возможно ли нетривиальное движение, удовлетворяющее этим начальным условиям? Очевидно, нет. Действительно. Если частица сдвинется (случайно) с точки $x=x_1$ в любом направлении, то назад она не возвратится. Ее кинетическая энергия никогда не будет равна нулю, так как $E_0=0$ и $E_0 > U(x)$ при любом $x \neq x_1$. Следовательно, частица ни-

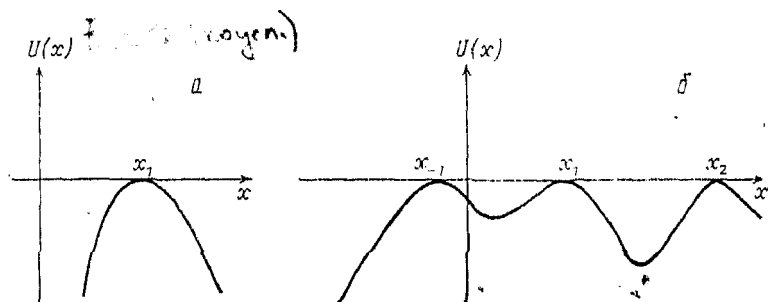


Рис. 5.3

когда не сможет остановиться и повернуть назад. Это видно из рисунка 5.3, а, так как в таком поле при $E_0=0$ нет другой точки остановки, кроме x_1 . Итак, не вдаваясь в детали поведения $U(x)$ и не решая уравнение движения, можно прийти к заключению, что если $U(x)$ имеет единственный абсолютный максимум, то нетривиальных возвращающихся в точку $x(-\infty)$ (при $x(-\infty)=0$) движений нет. Допускаются только тривиальные решения $x(t)=x_1$ для всех t .

В случае поля $U(x)$, изображенного на рис. 5.3, б, движение может начинаться при $t=-\infty$ с любой из точек x_{-1}, x_1, x_2 при соответствующих начальных условиях, а при $t=\infty$ частица должна приходиться в любую из точек x_{-1}, x_1, x_2 . Такое движение возможно. Например, частица может стартовать с вершины x_{-1} при $t=-\infty$ и подойти к вершине x_1 асимптотически при $t=\infty$. Или же если при $t=-\infty$ $x(-\infty)=x_1$, то это движение может иметь начало в точке x_1 , а конец в x_2 (или x_{-1}). Процесс может идти в двух направлениях. Тем не менее существуют только четыре нетривиальные возможности. Например, не могут осуществляться циклические движения типа $x_{-1} \rightarrow x_1 \rightarrow x_{-1}$ или $x_{-1} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$. Действительно, при $x=x_1$ обращаются в нуль $U(x_1), U'(x_1)$. Следовательно, из уравнений

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = -U(x), \quad m\ddot{x} = -U'(x) \quad (20.3)$$

видим, что $\dot{x}=\ddot{x}=0$. Но вместе с ними

$$\ddot{x} = -\frac{(U')'}{m} \dot{x} = -\frac{U''x}{m} = 0,$$

$$\dddot{x} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{U'' \dot{x}}{m} \right) = -\frac{U''' \dot{x}^2}{m} - \frac{U'' \ddot{x}}{m} = 0 \quad (21.3)$$

и т. д. Таким образом, все производные $\left. \frac{d^n x}{dt^n} \right|_{x=x_1} = 0$. Частица, покинув вершину x_{-1} , может только подойти к точке x_1 при $t = \infty$, где все производные движения исчезают. Она не может вернуться назад в точку x_{-1} или пройти дальше к точке x_2 .

Резюмируя, можно сказать, что если $U(x)$ имеет только единственный максимум, тогда есть только тривиальные ($x(t) = x_1$) «возвращающиеся траектории», если $U(x)$ имеет l вырожденных (т. е. одинаковых по величине максимумов $U(x_1) = U(x_2) = \dots = U(x_l)$), то можно получить $2(l-1)$ типов решений, соединяющих при изменении t от $-\infty$ до ∞ любые два соседних максимума. При этом есть и тривиальные (не зависящие от t) решения.

Рассмотренная чисто механическая задача в дальнейшем может оказаться полезной при исследовании статических полевых конфигураций в так называемой двумерной теории поля. В самом деле, статическое (т. е. не зависящее от времени) уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\Phi''(z) = \frac{\partial U}{\partial \Phi},$$

т. е. оно аналогично уравнению Ньютона, в котором роль координаты $x(t)$ играет полевая переменная $\Phi(z)$, а роль времени t — пространственная координата z , а $U(x) = -U(\Phi)$. Рассмотренным выше начальным условиям в теории поля соответствуют определенные граничные условия, а решениям $x(t)$ соответствуют решения, описывающие некоторые полевые конфигурации $\Phi(z)$. Среди этих решений при некоторых потенциалах $U(\Phi)$ будут решения с локализованной плотностью энергии поля Φ и с конечной полной энергией. Решения, зависящие от времени, удовлетворяют уравнению поля

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial U}{\partial \Phi},$$

причем если полная энергия статических решений для некоторого заданного потенциала $U(\Phi)$ конечна, то соответствующие $\Phi(t, z)$ называются «уединенными волнами».

Глава 4

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

4.1. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

В центрально-симметричном поле сила, действующая на частицу, по абсолютной величине зависит только от $|r|$:

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.4)$$

и направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} . Выше было показано, что в центральном поле сохраняется момент импульса частицы относительно центра поля $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$. Траектория частицы либо проходит через центр поля, если $\mathbf{L}_0 = 0$ (так как тогда $\mathbf{r} \parallel \dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\varphi} = 0$, $L_z = 0$ и, следовательно, траектория является прямой, проходящей через точку $x=y=z=0$), либо лежит целиком в одной плоскости, проходящей через центр поля и перпендикулярной постоянному вектору $\mathbf{L}_0 \neq 0$. Действительно, так как

$$\mathbf{L} = m [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}], \quad (2.4)$$

то $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{L}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 0$. Учитывая, что $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$, получим уравнение плоскости, в которой лежит траектория, в явном виде:

$$(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{r}) = 0. \quad (3.4)$$

Как было показано в 2.3, общее решение динамической задачи должно зависеть от шести независимых постоянных интегрирования, которыми определяются шесть интегралов движения (три первых и три вторых интеграла) *). В качестве трех независимых первых интегралов движения можно выбрать полную энергию частицы (4)

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r) = E_0 \quad (4.4)$$

и любые две проекции момента импульса \mathbf{L}_0 . Три первых интеграла $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$ не являются независимыми, поэтому мы берем

*) Общее решение задачи динамики материальной точки должно определяться функциями вида (16.2), зависящими от времени и от шести независимых произвольных постоянных интегрирования, выбором которых можно удовлетворить любым начальным условиям.

только два из трех. Одним из вторых интегралов движения является соотношение (3.4), так как оно не содержит скоростей частицы и следует из уравнений движения.

Направим ось Oz декартовой системы координат по вектору L_0 и далее будем определять положение точки в плоскости орбиты полярными координатами ρ и φ (рис. 1.4). В цилиндри-

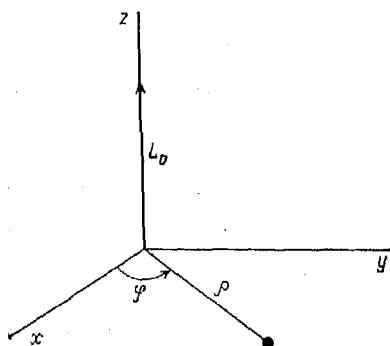


Рис. 1.4

ческой системе координат интегралы энергии и момента импульса запишем в виде

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E_0, \quad (5.4)$$

$$m\rho^2 \dot{\varphi} = L_0, \quad (6.4)$$

где $L_0 = \sqrt{L_{0x}^2 + L_{0y}^2 + L_{0z}^2}$.

Выражая $\dot{\varphi}$ через L_0 из (6.4) и подставляя в (5.4), получим

$$\frac{m \dot{\rho}^2}{2} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} + U(\rho) = E_0. \quad (7.4)$$

Отсюда

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}, \quad (8.4)$$

или, разделяя переменные и интегрируя, находим

$$t = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}} + C_5. \quad (9.4)$$

Здесь C_5 — постоянная интегрирования, а само соотношение (9.4) есть еще один второй интеграл.

Последний второй интеграл найдем, исключив t из (6.4), (8.4):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \pm \frac{m\rho^2}{L_0} \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}. \quad (10.4)$$

Разделяя в (10.4) переменные и интегрируя, получим

$$\varphi = \pm \int \frac{L_0}{\rho^2 m} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}} + C_0. \quad (11.4)$$

Это соотношение является вторым интегралом движения; оно определяет связь ρ и φ , т. е. представляет уравнение траектории. Формулой (9.4) определяется в неявном виде функция $\rho(t)$. Если эта функция найдена, то, подставляя ее в (6.4) и интегрируя (6.4) по времени, получим t

$$\varphi = \int_0^t \frac{L_0}{m\rho^2(t)} dt + \varphi(t_0). \quad (12.4)$$

Из (7.4) видно, что радиальную часть движения в центральном поле можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}} = U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \quad (13.4)$$

в области $\rho > 0$. Величину $\frac{L_0^2}{2m\rho^2} = \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2}$ называют центробежной энергией. Границы области движения частицы в радиальном направлении определяются действительными корнями уравнения

$$E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2 = 0. \quad (14.4)$$

В этих точках $\dot{\rho} = 0$, но $\dot{\varphi} \neq 0$, так что частица не останавливается (как при настоящем одномерном движении), а продолжает движение со скоростью $\rho\dot{\varphi}$. Это точки поворота траектории. В них функция $\rho(t)$ меняет знак, а $\rho(t)$ переходит от уменьшения к увеличению и наоборот.

Если уравнение (14.4) имеет корень $\rho_{\min}(E_0)$, а область допустимого движения ограничена лишь условием $\rho > \rho_{\min}$ (рис. 2.4), то движение частицы инфинитно — она приходит из бесконечности и уходит на бесконечность. В случае, когда начальное состояние $\rho(t_0)$ удовлетворяет условию $\rho_{\max} > \rho(t_0) > \rho_{\min}$ (рис. 3.4), область изменения координаты ρ частицы с энергией

E_0 имеет две границы. Движение финитно, а траектория в общем случае целиком находится внутри кольца, ограниченного окружностями $\rho = \rho_{\min}$ и $\rho = \rho_{\max}$ (рис. 4.4).

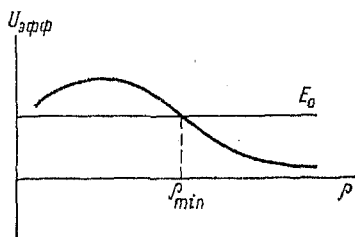


Рис. 2.4

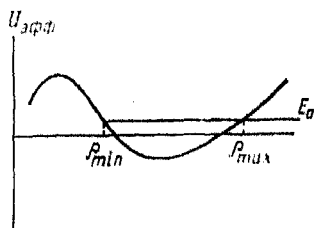


Рис. 3.4

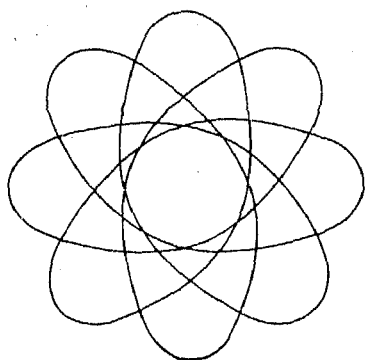


Рис. 4.4

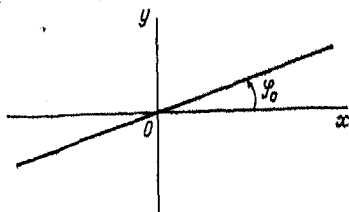


Рис. 5.4

Угол поворота радиуса-вектора $\Delta\varphi$ за время, в течение которого ρ меняется от ρ_{\max} до ρ_{\min} и затем до ρ_{\max} , равен

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{L_0}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2m(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}}. \quad (15.4)$$

Если $\Delta\varphi \neq 2\pi \frac{k}{n}$, где k, n — целые числа, то траектория незамкнута, хотя движение финитно. За бесконечное время траектория бесконечное число раз пройдет через точки ρ_{\min} и ρ_{\max} и заполнит все кольцо. Траектория будет замкнутой, если $\Delta\varphi = 2\pi \frac{k}{n}$. Ее замыкание произойдет через n повторений периода времени, при котором ρ меняется от ρ_{\min} до ρ_{\max} и затем до ρ_{\min} . Радиус-вектор частицы сделает при этом k полных оборотов. Из (15.4) видно, что $\Delta\varphi$, как и условие замкнутости траектории, зависит от начальных условий (E_0 и L_0). Только

в двух типах центральных полей, независимо от начальных условий, траектории всех финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы равна либо $-a/r$ ($a > 0$), либо ar^2 ($a > 0$).

Резюмируя, сформулируем следующие из нашего рассмотрения общие свойства движения, справедливые для любого центрального поля:

1) траектория лежит в неподвижной плоскости, проходящей через центр поля, а радиус-вектор частицы описывает равные площади за равные промежутки времени (постоянство L или σ);

2) угол φ меняется монотонно со временем;

3) траектория точки симметрична относительно апсидальных векторов (прямых, проходящих через центр силы и «точку поворота»).

4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае при графическом задании потенциальной энергии частицы $U(x)$, классификацию классически допустимых траекторий частицы, движущейся в центральном поле, можно провести на графике эффективной потенциальной энергии $U_{эф}$. Рассмотрим для этого несколько примеров.

В первом примере изучим движение частицы в цилиндрической системе координат, когда на частицу не действуют никакие силы. Это тривиальный частный случай движения в центральном поле. Выбирая систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости xOy , имеем

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - L_0^2/2m\rho^2, \quad \dot{\varphi} = L_0/m\rho^2,$$

откуда следует, что если $L_0 = 0$, то $\varphi = \varphi_0$ и $\rho = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m}} t + \rho_0 > 0$, где $\varphi_0 = \varphi(0)$ и $\rho_0 = \rho(0)$, т. е. траектория частицы представляет собой прямую (рис. 5.4), проходящую через начало координат. Пусть $L_0 \neq 0$ (рис. 6.4), тогда $\rho_{\min} = \sqrt{L_0^2/2mE_0}$. Траектория, как можно убедиться, является любой прямой, проходящей от начала координат на расстоянии ρ_{\min} (это минимальное расстояние от «центра поля») и касающейся окружности радиуса ρ_{\min} .

Найдем $\rho(\varphi)$ в явном виде:

$$\varphi = \int \frac{L_0}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - L_0^2/2m\rho^2)}} + C = \arccos(\rho_{\min}/\rho) + C. \quad (16.4)$$

Направим полярную ось из начала координат к ρ_{\min} , т. е. угол будем отсчитывать от этого направления. Из (16.4) следует,

что $C=0$ и уравнение траектории $\rho = \rho_{\min} / \cos \varphi$ есть уравнение прямой (рис. 7.4), параллельной оси Oy . Движение как при $L_0=0$, так и при $L_0 \neq 0$ происходит в неограниченной области, т. е. является инфинитным.

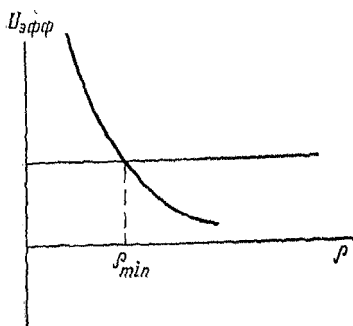


Рис. 6.4

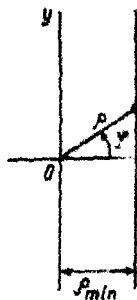


Рис. 7.4

2) В качестве второго примера рассмотрим движение частицы массы m в поле $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ (так называемый трехмерный изотропный гармонический осциллятор), $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Очевидно, что если $L_0=0$, то задача сводится к задаче одномерного гармонического осциллятора, рассмотренной выше. В этом случае частица будет совершать простое прямолинейное гармоническое колебание. Область движения ограничена, и траектория проходит через начало системы координат (центр поля). Если $L_0 \neq 0$, то $U_{эфф} = \frac{kr^2}{2} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$ (рис. 8.4) и движение классически допустимо, если только энергия частицы $E_0 \geq U_{эфф \min}$, где $U_{эфф \min} = U_{эфф}(\rho_m) = (L_0^2 k/m)^{1/2}$ — минимальное значение эффективной энергии. Здесь ρ_m определяется условием

$$\frac{dU_{эфф}}{d\rho} = k\rho - \frac{L_0^2}{m\rho^3} = 0, \quad \rho_m^2 = (L_0^2/km)^{1/2}.$$

Движение частицы с полной энергией E_0 заключено в области $\rho_1^2 \leq \rho^2 \leq \rho_2^2$, где $\rho_{1,2}^2 = E_0/k \pm \sqrt{E_0^2/k^2 - L_0^2/mk}$ — «точки поворота» траектории. Нетрудно показать, что траектория в неявном виде задается интегралом

$$\varphi = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^4}} + \tilde{C}, \quad x = \frac{l}{\rho^2},$$

где $c=-1$, $b=2mE_0/L_0^2$, $a=-km/L_0^2$. Вычисляя интеграл и затем обращая формулу, получим

$$\rho^2 = 2/(b + \sqrt{b^2 - 4ac} \cos 2(\varphi - \varphi_0)).$$

Если полярную ось направить к ρ_{\min} , то $\varphi_0=0$,

$$\rho_1^2 = \frac{2}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \rho_2^2 = \frac{2}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

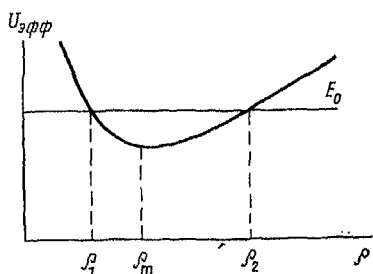


Рис. 8.4

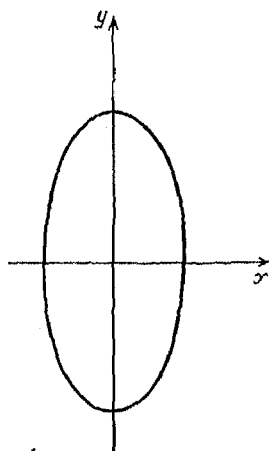


Рис. 9.4

Траекторией частицы является эллипс, центр которого находится в центре силы. Траектория дважды касается окружностей с радиусами ρ_1 и ρ_2 соответственно. На рис. 9.4 изображен случай, когда полярная ось направлена к ρ_{\min} , т. е. $\varphi_0=0$.

4.3. ПАДЕНИЕ НА ЦЕНТР ПОЛЯ

Принципиально новая ситуация возникает, если, например, центральное поле имеет вид

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}, \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Пусть $L_0 \neq 0$, тогда $U_{эфф}$ имеет вид, как на рис. 10.4. В точке $\rho_1 = (L_0^2 - \sqrt{L_0^4 - 12\gamma\alpha m^2})/2m\alpha$ $U_{эфф}$ имеет абсолютный максимум, а в точке $\rho_2 = (L_0^2 + \sqrt{L_0^4 - 12\gamma\alpha m^2})/2m\alpha$ — относительный минимум. Будем считать, что момент импульса частицы удовлетворяет неравенству $L_0^4 > 12\gamma\alpha m^2$. Если это так, то $U_{эфф}$ имеет два экстремума, как на рис. 10.4. Заметим, что если $L_0^4 = 12\gamma\alpha m^2$, то $\rho_{1,2} = \rho_0 = L_0^2/2m\alpha$ и $U'_{эфф}(\rho_0) = U''_{эфф}(\rho_0) = 0$, $U'''_{эфф}(\rho_0) > 0$, а если $L_0^4 < 12\gamma\alpha m^2$, то $U_{эфф}$ вообще не имеет экстремумов. Из графика видно, что если $E_0 > U_{эфф, \max}$, то движение происходит в неограниченной области пространства и, в частности, частица может достичь центра поля (ее радиальная координата может стать равной нулю). Такую ситуацию называют падением на

центр поля. Следует заметить, что падение на центр поля возможно при любой энергии, если частица в начальный момент времени находится левее точки ρ_1 (разумеется, в классически доступной области).

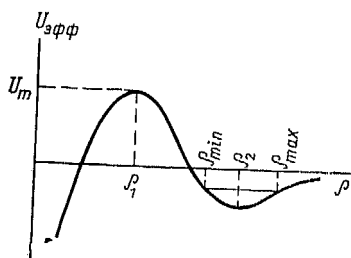


Рис. 10.4

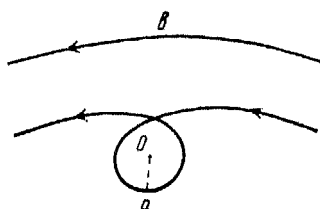


Рис. 11.4

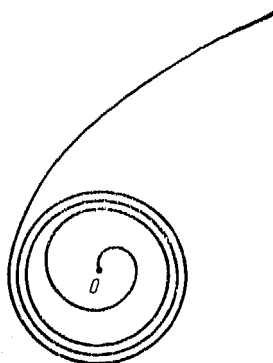
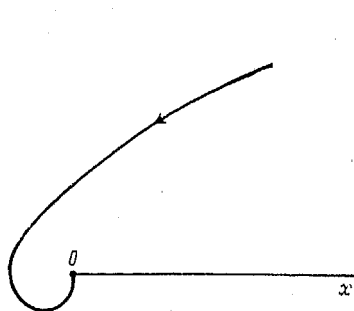


Рис. 12.4

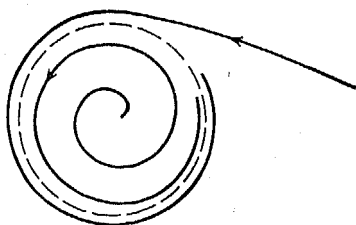


Рис. 13.4

Получим условие падения частицы на центр поля в общем случае. Из (14.4) следует, что в классически доступной области движения должно выполняться неравенство

$$\rho^2 E_0 \geq \rho^2 U(\rho) + L_0^2 / 2m. \quad (17.4)$$

При падении на центр поля $\rho \rightarrow 0$ и, значит, так как E_0 ограничена, то

$$0 \geq \rho^2 U(\rho) - L_0^2/2m. \quad (18.4)$$

Очевидно, если потенциальная энергия при малых ρ ведет себя подобно степенной функции $U(\rho) = -\frac{\beta}{\rho^n}$, то это условие выполняется при $n=2$, если $\beta > L_0^2/2m$; при $n > 2$, если $\beta > 0$.

Вернемся к нашей задаче. Если энергия частицы равна E_1 , то качественно траектория имеет вид, как на рис. 11.4, где изображен случай $E_1 < U_{эфф\ max}$. Вообще, чем ближе E_1 к нулю при фиксированном L_0 , тем меньше искривлена траектория (тем дальше от центра проходит частица и, следовательно, тем меньше она взаимодействует с центром). Если энергия частицы E равна $U_{эфф\ max} + \delta$, где $0 < \delta \ll U_{эфф\ max}$, то скорость частицы в радиальном направлении вблизи ρ_1 уменьшается, и в этом направлении она движется очень медленно. При этом поскольку $\rho_1 \neq \infty$, то $\varphi = L_0/m\rho_1^2$ есть конечная величина и радиус-вектор вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Поэтому частица может достаточно долго вращаться вокруг центра, прежде чем она пройдет интервал значений $\rho \sim \rho_1$ (рис. 12.4). При E , точно равной $U_{эфф\ max}$, траектория частицы представляет собой либо спираль, приближающуюся к окружности радиуса ρ_1 с центром в центре поля (извне, если $\rho_0 > \rho_1$, или изнутри, если $\rho_0 < \rho_1$), либо окружность радиуса ρ_1 (если $\rho_0 = \rho_1$).

Движение по окружности неустойчиво, так как сколь угодно малое изменение начальных условий (т. е. E_0 или L_0) приводит к траектории, удаляющейся от этой окружности при больших t (рис. 13.4).

Наконец, при $U_{эфф\ min} < E < 0$, $\rho_{min} < \rho_0 < \rho_{max}$ частица совершает финитное движение в области $\rho_{min} < \rho < \rho_{max}$. Траектория в общем случае (т. е. при произвольных начальных условиях) незамкнута. При $E = U_{эфф\ min}$ частица движется по устойчивой орбите — окружности радиуса ρ_2 ; при этом $\dot{\rho} = 0$.

4.4. АТТРАКТОРЫ *

Границы области движения частицы и вид траектории существенно зависят от начальных условий. Выбирая разные начальные условия, мы можем получить целый пучок траекторий. Эти траектории похожи на линии тока в жидкости, что дало основание иногда называть их «линиями тока», а их совокупность — «потоками».

Выше мы показали, что в наших примерах траектории на плоскости не обязательно приходят из ∞ и заканчиваются на

*) Более подробно об этом рекомендуем прочесть в книге: Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.

∞ ; они могут по-разному заканчиваться при конечных значениях координат. Эти свойства являются достаточно общими. Точки, в которых траектории заканчиваются, являются как бы точками притяжения для линий тока; сами конечные точки называются аттракторами. На плоскости траектории могут не только заканчиваться в точках (как на рис. 14.4, *a*), но и на-

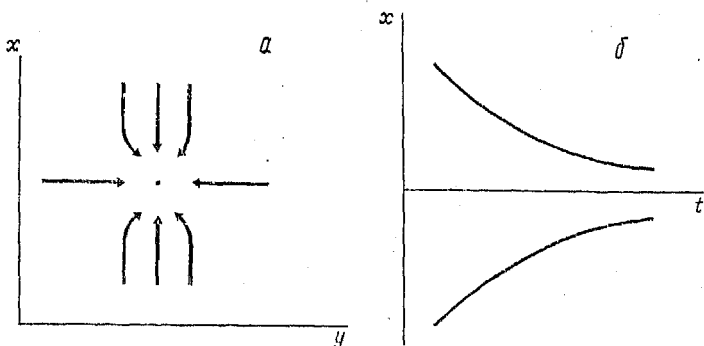


Рис. 14.4

зависать на так называемый предельный цикл (см. рис. 13.4). Предельный цикл будет устойчивым, если к нему притягиваются соседние траектории. Он также принадлежит к классу аттракторов.

Аттракторы — точки на плоскости — бывают двух типов: узлы и фокусы; они отличаются видом зависимости координат от времени. На рис. 14.4, *a* изображены траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) узле. Если обратить время, т. е. заменить t на $-t$, то траектории будут выходить из узла. Такой узел будет уже неустойчивым. На рис. 14.4, *б* приведена временная зависимость координаты $x(t)$ в случае узла.

Понятия узла, фокуса и предельного цикла, как видно, здесь не геометрические. Они скорее определяют тип расположения траекторий автономной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y).$$

Автономной называют систему уравнений, в которой функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ явно от времени не зависят.

На рис. 15.4, *a* изображены траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) фокусе. Они примыкают к точке A , наматываясь на нее подобно логарифмическим спиральям. В случае узла траектории подходят как бы по нормали к окружности радиуса $r \rightarrow 0$ с центром в узле. При замене t на $-t$ траектории, изображенные на рис. 15.4, *a*, будут выходить из фокуса, который станет неустойчивым. На рис. 15.4, *б* дана зависимость координаты

наты $x(t)$ от времени t в случае фокуса. Заметим, что x, y не обязательно декартовы координаты.

Следует иметь в виду, что классификацию особых точек (линий) проводят на основе системы уравнений 1-го порядка по времени. Можно дать достаточно строгое математическое определение устойчивого многообразия (особой точки). Под устой-

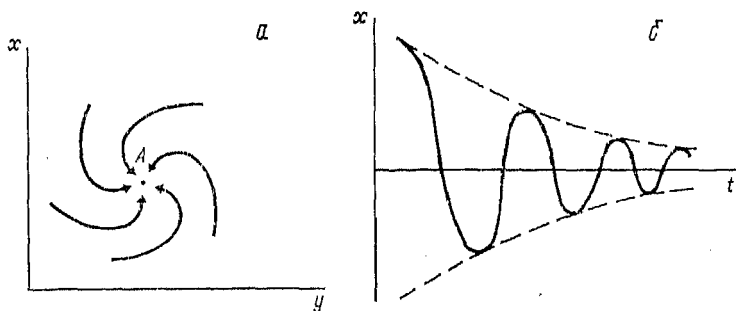


Рис. 15.4

чивым многообразием (особой точки) понимается множество всех точек, которые являются начальными точками траекторий, заканчивающихся при $t = \infty$ в данной особой точке. Под неустойчивым многообразием (особой точки) понимается множество начальных траекторий, заканчивающихся в пределе $t = -\infty$ в данной особой точке.

4.5. ЗАДАЧА КЕПЛера

Замкнутая траектория независимо от начальных условий получается при движении частицы в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (19.4)$$

Рассмотрим задачу о движении частицы массы m в этом поле более подробно, не ограничиваясь случаем $\alpha > 0$. Если $\alpha > 0$, то сила $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$, с которой поле действует на частицу, является силой притяжения (она направлена по радиусу-вектору \mathbf{r} к центру поля), если $\alpha < 0$, то на частицу действует сила отталкивания. Эффективная энергия частицы в том и другом случае изображена на рис. 16.4.

Из анализа графика $U_{\text{эфф}}$ следует, что движение частицы в поле притяжения будет инфинитным, если $E_0 \geq 0$ (в области $\rho > \rho_{\text{min}}$), и финитным, если $0 > E_0 > U_{\text{эфф min}}$ (в области $\rho_2 \geq \rho \geq \rho_1$). При $E_0 = U_{\text{эфф min}}$ частица будет двигаться по

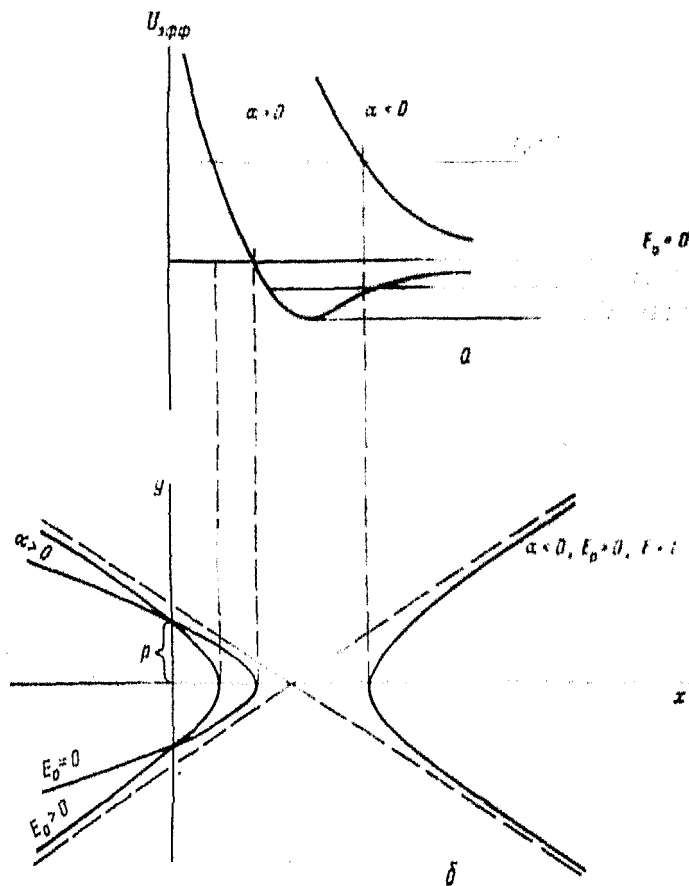


Рис. 16.4

окружности. В поле отталкивания полная энергия частицы всегда положительна, а движение инфинитно (в области $r > r_m$).

Траектория частицы, ее орбита определяется интегралом

$$\varphi = \pm \int \frac{L_0}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 \pm \frac{|\alpha|}{r} - \frac{L_0^2}{2mr^2} \right)}} + C =$$

$$= \pm (-) \int \frac{d\left(u \mp \frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{E_0}{r^2} - \left(u \mp \frac{1}{r}\right)^2}} + C, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Здесь верхние знаки в подынтегральном выражении соответствуют случаю $\alpha > 0$, а нижние — случаю $\alpha < 0$; введены следующие

щие обозначения: $p = \frac{L_0^2}{m|\alpha|}$ — параметр, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}$ — эксцентриситет орбиты. Вычисляя интеграл, получим

$$\varphi - C = \pm \arccos \frac{u \mp \frac{1}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}. \quad (20.4)$$

Опуская знак перед функцией справа ввиду четности косинуса и обращая формулу, найдем уравнение орбиты в явном виде:

$$\rho = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - C)}. \quad (21.4)$$

Удобно полярную ось направить на ближайшую к центру силы точку траектории. Тогда $C=0$.

Уравнением (21.4) описывается кривая второго порядка, в фокусе которой находится начало координат*). Из аналитической геометрии известно, что в зависимости от величины ε траектории вида (21.4) представляют собой гиперболу (при $\varepsilon > 1$), параболу (при $\varepsilon = 1$), эллипс ($\varepsilon < 1$) или окружность ($\varepsilon = 0$). Учитывая зависимость ε от полной механической энергии частицы, получим, что в потенциальном поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, траекторией частицы будет гипербола, если $E_0 > 0$ — парабола, если $E_0 = 0$ — эллипс, если $0 > E_0 > U_{\text{эфф min}}$ — окружность, если $E_0 = U_{\text{эфф min}}$; в случае отталкивания траекторией частицы всегда будет гипербола, так как в этом случае $\varepsilon > 1$ (а $E_0 > 0$) всегда.

Рассмотрим финитное движение частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, когда орбита является эллипсом. По известным формулам аналитической геометрии можно найти большую и малую полуоси эллипса в виде

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E_0} = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{L_0^2}{2m|E_0|}}.$$

Отсюда видно, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. В квантовой механике именно это свойство приводит к правилу квантования по Бору.

* Это уравнение конического сечения с фокусом в начале координат. Фокус — это точка F , лежащая в плоскости кривой второго порядка и такая, что отношение расстояния любой точки кривой до F к расстоянию до заданной прямой (директрисы) равно постоянному числу (эксцентриситету). Конические сечения — линии, которые получаются сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину.

Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), \quad \rho_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon). \quad (22.4)$$

Заметим, что эти значения можно получить и как корни уравнения $U_{\text{эфф}} - E_0 = 0$.

Период движения T определим с помощью закона сохранения момента импульса, записанного в форме

$$L_0 = 2m \frac{dS}{dt}, \quad (23.4)$$

где dS — площадь, очерчиваемая радиус-вектором частицы за время dt . Интегрируя это равенство по времени от нуля до T , получим

$$L_0 T = 2mS = 2\pi ab. \quad (24.4)$$

Здесь мы учли, что $S = \pi ab$, так как орбитой является эллипс. Отсюда находим

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{ma^3}{\alpha} = \frac{\pi^2 ma^2}{2|E_0|^3}, \quad (25.4)$$

т. е. квадрат периода обращения пропорционален кубу линейных размеров орбиты (третий закон Кеплера) и зависит только от полной энергии частицы.

При $E \geq 0$ движение инфинитно. В поле притяжения при $E_0 > 0$ траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус). Наименьшее расстояние, на которое частица подходит к центру поля, равно

$$\rho_{\min} = \frac{p}{(1+\varepsilon)} = a(\varepsilon - 1),$$

где $a = p/(\varepsilon^2 - 1) = \alpha/2E_0$ — полуось гиперболы.

В случае $E_0 = 0$ частица движется по параболе; при этом наименьшее расстояние $\rho_{\min} = p/2$. Этот случай осуществляется, если при $r = \infty$ частица покоится.

В поле отталкивания траектория, как уже говорилось выше, является гиперболой (см. рис. 16.4). Наименьшее расстояние от орбиты до центра поля в этом случае равно

$$\rho_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1} = a(\varepsilon + 1),$$

где $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{|\alpha|}{2E_0}$ — полуось гиперболы.

4.6. ВЕКТОР-ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА

Поле $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ допускает существование векторного интеграла движения, специфического именно для

этого поля. Этот вектор был построен еще Лапласом. Мы будем называть его вектором Лапласа, хотя в квантовой механике аналогичный векторный оператор принято называть вектором Рунге—Ленца. Докажем, что вектор

$$\mathbf{J} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{L}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$$

является интегралом движения. Для этого вычислим $\dot{\mathbf{J}}$:

$$\dot{\mathbf{J}} = [\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{L}] - [\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{L}}] - \frac{\alpha\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3}. \quad (26.4)$$

Подставив в (26.4) выражение

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]$$

и используя уравнения движения частицы в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$ в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3},$$

нетрудно показать, что $\dot{\mathbf{J}} = 0$, т. е.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0.$$

Из равенства нулю скалярного произведения $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{J})$ следует, что вектор \mathbf{J} перпендикулярен \mathbf{L} и лежит в плоскости орбиты.

Направление вектора \mathbf{J}_0 найдем, воспользовавшись законом сохранения $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$. Вычислим \mathbf{J} в момент нахождения частицы в точке ρ_{\min} . Полярную ось направим из фокуса к ρ_{\min} . В декартовой системе координат с осью Ox , направленной по полярной оси, и Oz — по \mathbf{L}_0 , получим

$$[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{L}] = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ 0 & x\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix} = n_x x \dot{\varphi} L, \quad -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = -\alpha n_x.$$

Следовательно, $\mathbf{J} = (x\dot{\varphi}L - \alpha)n_x = (J, 0, 0)$, т. е. \mathbf{J} направлен от фокуса (центра силы) в ближайшую точку траектории. Модуль вектора \mathbf{J} равен

$$J = \rho_{\min} \frac{L_0^2}{m\rho_{\min}^2} - \alpha = \frac{L_0^2}{m\rho_{\min}} - \alpha = \alpha e.$$

Заметим, что интеграл движения \mathbf{J} является однозначной функцией механического состояния частицы. Мы знаем, что в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$ такими однозначными функциями положения и скорости частицы являются (кроме \mathbf{J}) интегралы движения

E_0 и L_0 . Появление такого дополнительного однозначного интеграла связано с так называемым вырождением движения: возможностью решения динамической задачи в различных координатах.

Пример. Найти закон движения частицы с энергией E_0 и моментом импульса L_0 в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ в параметрическом виде. Рассмотреть случаи: 1) $\alpha > 0$, $E_0 < 0$, $E_0 = 0$, $E_0 > 0$; 2) $\alpha < 0$, $E_0 > 0$.

Пример. Исследовать движение частицы массы m в центральном поле

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$$

при различных значениях энергии и момента импульса частицы. Поле $U(r)$, которое называют «сферической прямоугольной потенциальной ямой», изображено на рис. 17.4, график эффективной энергии дан на рис. 18.4.

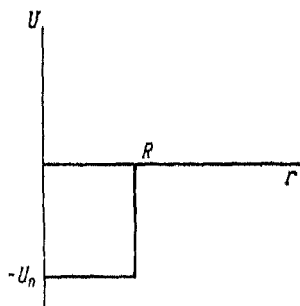


Рис. 17.4

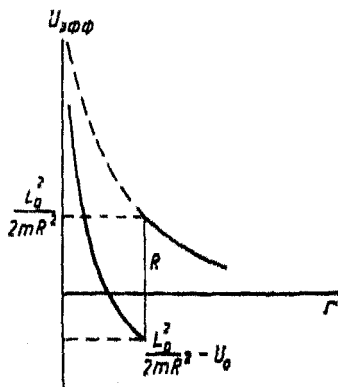


Рис. 18.4

Эффективная энергия частицы имеет вид

$$U_{\text{эфф}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} \text{ при } r > R, \quad U_{\text{эфф}} = -U_0 + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

при $r < R$. Поэтому в области $r > R$ траектория частицы определяется интегралом (16.4). Это прямая, отстоящая от центра поля на расстоянии $L_0/\sqrt{2mE_0}$. Из рис. 18.4 видно, что если $E_0 < L_0^2/2mR^2$ и $r(t_0) > R$, то траекторией частицы всегда будет прямая.

При $r < R$ и энергии, заключенной в интервале

$$\frac{L_0^2}{2mR^2} - U_0 < E_0 < \frac{L_0^2}{2mR^2},$$

частица движется внутри сферы, испытывая отражения на границе при $r=R$. Скорость частицы постоянна и определяется из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = E_0 + U_0, \quad v = \sqrt{\frac{2(E_0 + U_0)}{m}}.$$

Записав его в виде

$$\frac{mr^2}{2} = E_0 + U_0 - \frac{L_0^2}{2mr^2},$$

находим точку поворота:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{L_0^2}{2m(E_0 + U_0)}}.$$

Второй точкой поворота является точка R . Для частицы с энергией $\frac{L_0^2}{2mR^2} - U_0 < E < \frac{L_0^2}{2mR^2}$ точка R представляет собой непроницаемый барьер, от которого она отражается. Между

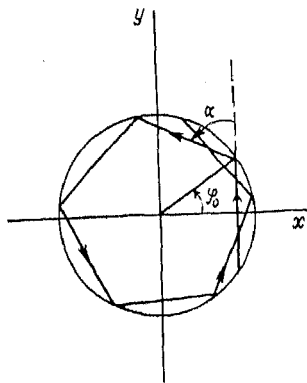


Рис. 19.4

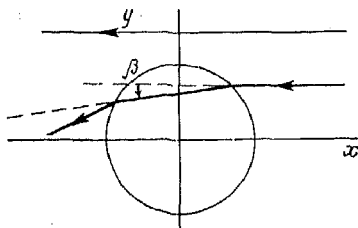


Рис. 20.4

двумя точками отражения частица движется по отрезку прямой (рис. 19.4)

$$r = \frac{r_{\min}}{\cos(\varphi + C)}.$$

На сфере $r=R$ происходит отражение частицы, так что ее скорость меняет направление на угол, равный $\alpha = 2\varphi_0$, где

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^R \frac{L_0}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + U_0 - \frac{L_0^2}{2mr^2} \right)}} = \arccos \frac{r_{\min}}{R}.$$

Условие замкнутости траектории $\varphi = \pi l$, или

$$\arcsin \frac{L_0}{R \sqrt{2m(E + U_0)}} = \frac{k\pi}{2}.$$

При выполнении этого условия траекторией частицы является замкнутая ломаная линия.

При $E > \frac{L_0^2}{2mR^2}$ частица движется в инфинитной области.

Вне сферы радиуса R частица движется по прямой

$$r = \frac{\sqrt{L_0^2/2mE}}{\cos(\varphi + C)},$$

а внутри сферы — также по прямой (рис. 20.4)

$$r = \frac{\sqrt{L_0^2/2m(E + U_0)}}{\cos(\varphi + C)}.$$

Следовательно, имеет место преломление траектории частицы на угол

$$\arcsin \frac{L_0}{R \sqrt{2m(E + U_0)}} - \arcsin \frac{L_0}{R \sqrt{2mE}}.$$

Для определения угла преломления удобно выбрать $C = -\frac{\pi}{2}$.

Глава 5

СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА, КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

5.1. ПОЛНЫЙ ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ

Будем предполагать, что на систему из N материальных точек действуют внешние силы F_i^{ext} и что силы взаимодействия между точками системы подчиняются третьему закону Ньютона. Силы взаимодействия между точками системы называют внутренними. По предположению внутренние силы между двумя точками системы, скажем i -й и j -й, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки: $F_{ji} = -F_{ij}$, $F_{ij} = (r_i - r_j) f$. Полагаем также, что $F_{ii} = 0$.

Запишем уравнения движения i -й точки:

$$\dot{p}_i = F_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N F_{ji} \quad (1.5)$$

и просуммируем (1.5) по всем точкам:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j,i=1 \\ i < j}}^N (F_{ji} + F_{ij}). \quad (2.5)$$

Определим полный импульс системы точек как сумму

$$P = \sum_{i=1}^N p_i. \quad (3.5)$$

Учитывая, что второй член в правой части (2.5) равен нулю, получаем закон изменения полного импульса системы точек в виде

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}}. \quad (4.5)$$

Вектор P можно записать и в другом виде:

$$P = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = M \dot{R}. \quad (5.5)$$

Здесь мы ввели обозначения $M = \sum_{i=1}^N m_i$ для полной массы системы материальных точек и

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.5)$$

для радиуса-вектора центра масс (или центра инерции) системы. С учетом (6.5) уравнения (4.5) можно переписать в виде

$$M\ddot{R} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}}. \quad (7.5)$$

Систему называют замкнутой, или изолированной, если на нее не действуют внешние силы: $F_i^{\text{ext}} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Из (7.5) видим, что внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс замкнутой системы. Они также не будут влиять на движение центра масс системы, если внешние силы не зависят от координат, т. е. являются однородными.

Эти утверждения можно сформулировать в виде теоремы: *Если сумма внешних сил, действующих на систему частиц, равна нулю, то полный импульс P не изменяется во время движения.* Полный импульс есть трехмерный вектор *). Поэтому если

проекция силы $F^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}}$ на какое-то направление равна нулю, то сохраняется P_n , соответствующая проекция полного импульса системы точек. Пусть, например, $(F^{\text{ext}} \cdot n) = 0$, тогда $P_n = (P \cdot n) = P_{n0}$.

5.2. ПОЛНЫЙ (КИНЕТИЧЕСКИЙ) МОМЕНТ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ

Под полным кинетическим моментом (моментом импульса) системы материальных точек понимается сумма

$$L = \sum_{i=1}^N [r_i p_i].$$

*) А. Эйнштейн определил 4-импульс механической системы p_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, как величину, обладающую следующими свойствами: 1) p_μ — 4-вектор Лоренца; 2) p_μ — величина аддитивная, т. е. для системы, состоящей из нескольких (скажем, l) подсистем $p_\mu = \sum_{i=1}^l p_{\mu(i)}$; 3) p_μ — сохраняющийся 4-вектор. Тем же свойствам удовлетворяет трехмерный вектор p в трехмерном пространстве.

Найдем $\dot{\mathbf{L}}$:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N [\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{p}}_i] = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}] + \sum_{i,j=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}]. \quad (8.5)$$

Мы учли, что каждый вектор $[\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i]$ равен нулю, и использовали уравнения движения (1.5). Преобразуем сумму

$$\sum_{i,j=1; i \neq j}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}] = \sum_{i,j=1; i < j}^N [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{F}_{ji}] = 0.$$

Здесь мы приняли во внимание, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$. Поэтому

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}]. \quad (9.5)$$

Производная по времени кинетического момента равна полному моменту внешних сил относительно данной точки.

Теорема. Если полный момент внешних сил (проекция на какое-либо направление), действующих на систему материальных точек, равен нулю, то полный кинетический момент (соответствующая его проекция) остается неизменным во времени. Подчеркнем, что по предположению внутренние силы, действующие в системе, подчиняются третьему закону Ньютона.

Получим удобное представление полного кинетического момента системы частиц относительно точки O (рис. 1.5). Согласно правилу сложения векторов имеем

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{V},$$

где $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ — скорость центра масс системы частиц относительно (неподвижной) системы отсчета с центром O , $\dot{\mathbf{r}}'_i$ — скорость i -й точки относительно системы отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс системы частиц. Последняя система отсчета называется системой центра масс. Преобразуем \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}'_i] + \left[\mathbf{R} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right] + \\ &+ \left[\left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right) \mathbf{V} \right] + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{R} \mathbf{V}] = \mathbf{L}' + [\mathbf{R} \mathbf{P}]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

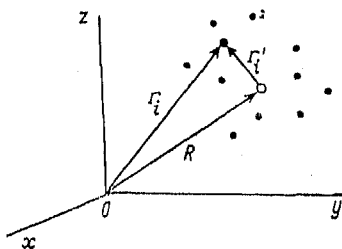


Рис. 1.5

Мы учли, что $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}''_i = 0$, так как начало движущейся системы отсчета совпадает с центром масс системы частиц и, значит, радиус-вектор центра масс в этой системе отсчета

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i / M \text{ равен нулю.}$$

Таким образом, полный кинетический момент равен сумме кинетического момента, возникающего вследствие движения этой системы материальных точек относительно центра масс и момента импульса в предположении, что вся масса системы материальных точек сосредоточена в центре масс. Подчеркнем, что \mathbf{L} зависит от выбора точки O , так как в \mathbf{L} явно входит \mathbf{R} . Только в том случае, когда центр масс неподвижен относительно O (тогда $\mathbf{P}=0$), кинетический момент не зависит от выбора этой точки и \mathbf{L} сводится к \mathbf{L}' .

5.3. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Умножим скалярно (1.5) на $d\mathbf{r}_i$ и просуммируем результат по всем точкам системы:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i) + \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i). \quad (11.5)$$

Слева стоит дифференциал кинетической энергии системы точек

$$dT = d \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i \right) = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i). \quad (12.5)$$

Кинетическую энергию

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}, \quad (13.5)$$

используя систему отсчета с началом в центре масс (будем называть ее ЦСО), удобно представить в виде

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \\ &+ \left(\mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i' \right) + \frac{M\mathbf{V}^2}{2} = T' + \frac{M\mathbf{V}^2}{2}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии системы частиц в их движении относительно ЦСО и кинетической энергии в предположении, что вся масса системы точек сосредоточена в центре масс.

Предположим, что внешние и внутренние силы потенциальны и консервативны *). Тогда выражение

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U^{\text{ex}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot d\mathbf{r}_i \right) = -dU^{\text{ex}} +$$

является полным дифференциалом скалярной функции U^{ex} , очевидно имеющей смысл потенциальной энергии системы частиц во внешнем поле. Если, кроме того, \mathbf{F}_{ji} удовлетворяют третьему закону Ньютона, то они могут быть построены с помощью некоторой функции

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (15.5)$$

как

$$\mathbf{F}_{ji} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V_{ij}, \quad \mathbf{F}_{ij} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} V_{ij}. \quad (16.5)$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ и $\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)f = -\mathbf{r}_{ji}f$, где f — скалярная функция аргумента r_{ji} , преобразуем двойную сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i) &= \sum_{i,j=1; i < j}^N \{(\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i) + (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j)\} = \\ &= \sum_{i,j=1; i < j}^N (\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_{ij}) = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ij}} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \right) = - \frac{1}{2} d \sum_{i,j=1; i \neq j}^N V_{ij}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Здесь мы использовали очевидное соотношение

$$\mathbf{F}_{ji} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V_{ij} = - \frac{\partial}{\partial (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} V_{ij}.$$

Коэффициент 1/2 появился в (17.5), так как при суммировании по i, j каждый индекс данной пары появляется дважды: при суммировании по i и по j .

*) Системы, в которых действующие на материальные точки силы потенциальны и не зависят явно от времени, называют консервативными. Также называют и силы. Потенциальная энергия консервативной системы зависит только от координат точек системы, а полная механическая энергия сохраняется.

Мы видим, что можно определить потенциальную энергию системы точек как

$$U = U^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^N V_{ij},$$

и если внешние и внутренние силы консервативны, то, собирая все члены вместе, получим

$$dT = -dU, \quad d(T + U) = 0, \quad E = T + U = E_0. \quad (18.5)$$

Эти равенства выражают собой закон сохранения полной механической энергии системы материальных точек. На их основе можно сформулировать теорему: *Полная механическая энергия консервативной системы материальных точек не изменяется во время движения.*

Кратко рассмотрим общий случай, когда внешние силы явно зависят от времени и в системе точек действуют диссипативные силы. Вывод формулы, определяющей скорость изменения полной механической энергии системы точек, подобен выводу аналогичной формулы для одной точки. В результате получим

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{\text{d(ext)}} \cdot \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{\text{d(int)}} \cdot \mathbf{r}_i) = \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial t} + W^{\text{d}}, \quad (19.5)$$

где E определяется формулой (18.5), а $\mathbf{F}_i^{\text{d(ext)}}$, $\mathbf{F}_i^{\text{d(int)}}$ — внешние и внутренние диссипативные силы соответственно.

Из формулы (19.5) следует, что полная механическая энергия системы материальных точек сохраняется, если $\partial U^{\text{ext}}/\partial t = 0$ и $W^{\text{d}} = 0$, а также если $\frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial t} = -W^{\text{d}}$, т. е. если убыль энергии за счет диссипативных сил компенсируется поступлением энергии в систему за счет зависящих от времени потенциальных сил*).

Для замкнутой системы (в отсутствие также внутренних диссипативных сил) имеем 10 интегралов движения: семь первых ($E = E_0$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$) и три вторых ($\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0$).

5.4. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ.

ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

Рассмотрим движение в поле консервативных сил системы точек, потенциальная энергия которой является однородной функцией координат, т. е. функцией, удовлетворяющей условию

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N) = \alpha^{\nu} U(r_1, r_2, \dots, r_N),$$

* Во избежание недоразумений подчеркнем, что, если это не оговорено особо, под потенциальными силами мы подразумеваем силы, зависящие только от координат частиц, но не от времени.

где α — некоторая постоянная, а число ν — степень однородности функции. Запишем уравнения движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20.5)$$

и произведем в них преобразование, при котором наряду с изменением всех радиус-векторов в α раз одновременно изменится в β раз время:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \alpha \mathbf{r}_i, \quad t \rightarrow \beta t. \quad (21.5)$$

Уравнения движения в результате этого преобразования, очевидно, приобретают вид

$$\frac{\alpha}{\beta^2} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \alpha^{\nu-1} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (22.5)$$

Пусть постоянная β связана с α соотношением

$$\beta = \alpha^{1-\nu/2}. \quad (23.5)$$

Тогда уравнения движения останутся неизменными. Но радиус-векторы всех частиц мы изменили в α раз, т. е. мы сделали переход к геометрически подобным траекториям, которые отличаются от исходных лишь своими линейными размерами. При этом отношение всех времен движения (между соответствующими точками траекторий) равно

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{1-\nu/2}. \quad (24.5)$$

Здесь l'/l — отношение линейных размеров двух траекторий.

Рассмотренный переход возможен только в том случае, когда потенциальная энергия системы является однородной функцией ν -й степени от декартовых координат. Соотношения типа (24.5) для времен можно получить также и для любых механических величин в соответственных точках траекторий в соответственные моменты времени. Так, для импульсов получим,

$$\frac{p'}{p} = \frac{l'}{l} / \frac{t'}{t} = \frac{l'}{l} \left(\frac{l'}{l} \right)^{\nu/2-1} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{\nu/2}.$$

Из формулы (24.5) нетрудно вывести свойство изохронности колебаний математического маятника ($\nu=2$) или третий закон Кеплера ($\nu=-1$).

Докажем теперь теорему вириала для системы материальных точек. Обратим внимание на то, что эта теорема имеет статистический характер. Рассмотрим величину $G = \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i)$

и вычислим

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i). \quad (25.5)$$

Преобразуем правую часть (25.5):

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = 2T,$$

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i).$$

С учетом этих преобразований имеем

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i). \quad (26.5)$$

Усредним (26.5) по времени согласно формуле

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau. \quad (27.5)$$

В результате усреднения получим

$$2\bar{T} + \overline{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i)} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Для периодического движения справа стоит нуль, так как τ можно выбрать равным периоду. Аналогично правая сторона обращается в нуль, если координаты и скорость точек системы остаются ограниченными (т. е. не обращаются в бесконечность). Поэтому в любом случае

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i)}. \quad (28.5)$$

Правая часть этого равенства называется вириалом Клаузиуса, а само равенство выражает так называемую теорему вириала. В таком виде теорема вириала полезна в кинетической теории газов.

Можно показать, что если в силы \mathbf{F}_i будут входить силы трения \mathbf{F}_i^d , пропорциональные первым степеням скоростей точек, то вириал системы от них зависеть не будет. При этом, разумеется, нужно предположить, что движение системы не прекращается вследствие трения, т. е. в систему поступает энергия на поддержание движения (в противном случае все средние значения будут стремиться при $\tau \rightarrow \infty$ к нулю и равенство (28.5) потеряет смысл).

Рассмотрим случай, когда все силы \mathbf{F}_i являются потенциальными. Тогда вместо (28.5) получим

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right)}. \quad (29.5)$$

Если к тому же потенциальная энергия является однородной функцией n -й степени от всех радиусов-векторов \mathbf{r}_i , то согласно теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$\bar{T} = \frac{n}{2} \bar{U}. \quad (30.5)$$

Теорема вириала. *Кинетическая энергия системы материальных точек, усредненная по бесконечному интервалу времени, равна усредненному по тому же интервалу времени вириалу сил.*

Так как $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E_0$, соотношение (30.5) можно представить в формах, полезных для приложений:

$$\bar{U} = \frac{2}{n+2} E_0, \quad \bar{T} = \frac{n}{n+2} E_0.$$

Из (30.5) следует, что для гармонического осциллятора ($n=2$)

$$\bar{T} = \bar{U}, \text{ для ньютоновского взаимодействия } (n=-1) \quad \bar{T} = -\frac{\bar{U}}{2}$$

и $\bar{T} = -E_0$ и т. д.

Теорема вириала используется в классической механике, атомной физике и статистической механике. Ее модификация применяется в квантовой механике.

5.5. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Задача двух тел представляет собой наиболее простую задачу системы материальных точек, решить которую можно полностью в общем виде, если сила взаимодействия между частицами подчиняется третьему закону Ньютона. Это точно решаемая задача. Она может быть упрощена путем разложения движения системы (состоящей из двух частиц) на движение центра масс и движение точек относительно ЦСО.

Запишем уравнения движения относительно неподвижной системы отсчета с началом в точке O :

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F_{21}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (31.5)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = F_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial \mathbf{r}_2},$$

причем

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0. \quad (32.5)$$

Так как внешние силы на точки не действуют, то согласно (7.5) имеем закон движения центра масс системы двух точек в виде

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0, \quad (33.5)$$

где $\mathbf{V} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_{10} + m_2 \dot{\mathbf{r}}_{20}}{m_1 + m_2}$ — скорость, а $\mathbf{R}_0 = (m_1 \mathbf{r}_{10} + m_2 \mathbf{r}_{20}) / (m_1 + m_2)$ — радиус-вектор центра масс в начальный момент времени.

Введем систему отсчета S' с началом O' в центре масс. Тогда

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{V} + \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad i = 1, 2, \quad (34.5)$$

где $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{V}_0$, \mathbf{r}'_i — радиус-вектор i -й точки относительно S' .

Согласно принципу относительности Галилея уравнения движения (31.5) сохраняют свою форму в системе отсчета S' :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 &= \mathbf{F}_{21} (|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 &= \mathbf{F}_{12} (|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|). \end{aligned} \quad (35.5)$$

Но в системе S' радиус-вектор центра масс $\mathbf{R}' = 0$. Значит,

$$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0. \quad (36.5)$$

Вводя вектор взаимного расстояния

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1, \quad (37.5)$$

из двух последних равенств находим

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (38.5)$$

Дифференцируя (38.5) по времени, получим

$$\dot{\mathbf{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}. \quad (39.5)$$

И далее

$$\ddot{\mathbf{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}, \quad \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (40.5)$$

Подставляя (37.5) и (40.5) в (35.5) и учитывая (38.5), убеждаемся, что уравнения движения для каждой точки записываются одинаково:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{21} (|\mathbf{r}|). \quad (41.5)$$

Величина $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ называется приведенной массой.

Заметим, что, используя (38.5), (40.5), можно получить уравнения движения для каждой из точек в виде

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = \mathbf{F}_{21} \left(\frac{m}{m_2} |\mathbf{r}'_1| \right), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12} \left(\frac{m}{m_1} |\mathbf{r}'_2| \right), \quad m = m_1 + m_2. \quad (42.5)$$

Векторное уравнение движения (41.5) формально совпадает с уравнением движения материальной точки массы μ , движущейся во внешнем центральном поле, центр силы которого находится в центре масс. Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к задаче о движении одной (воображаемой) точки массы μ в заданном центральном поле. По решению $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ этой задачи законы движения каждой из частиц можно найти в системе S' по формулам (38.5), а в системе S по формулам (34.5).

Приведем формулы, описывающие движение μ -точки, используя результаты задачи о движении точки в центральном поле. Энергия и момент импульса μ -точки:

$$E' = \frac{\mu r'^2}{2} + U(r) = E'_0, \quad L' = \mu [\mathbf{r}'\mathbf{r}'] = L'_0.$$

Уравнение плоскости, в которой целиком лежит траектория μ -точки, $(\mathbf{L}'_0 \cdot \mathbf{r}) = 0$. Уравнение траектории μ -точки в перпендикулярной вектору \mathbf{L}'_0 плоскости:

$$\varphi = \pm \int \frac{L'_0}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{эфф}})}} + C_1,$$

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + L'^2_0 / 2\mu r^2.$$

Уравнение, неявно определяющее радиальную координату μ -точки r как функцию времени:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{эфф}})}} + C_2.$$

Резюмируя, можно сказать, что относительно S центр масс движется равномерно и прямолинейно, а обе точки относительно S' совершают движение в плоскости, проходящей через центр масс и сохраняющей свою ориентацию относительно S ; траектории обеих точек относительно S' подобны, причем центр подобия находится в центре масс, а соотношения подобия равны отношению масс точек.

Нетрудно показать, что $L' = L_1' + L_2'$, а $E' = E_1' + E_2'$, где L_i' — момент импульса, E_i' — энергия i -й точки в системе S' :

$$L' = m_1 [\mathbf{r}_1' \dot{\mathbf{r}}_1'] + m_2 [\mathbf{r}_2' \dot{\mathbf{r}}_2'] = \mu [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}],$$

$$E' = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2}{2} + U(r) = \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r).$$

Итак, механическое состояние системы, состоящей из двух взаимодействующих точек, относительно системы отсчета S определяется формулами

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{m} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{m} \mathbf{r}(t),$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{V}_0 - \frac{m_2}{m} \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{V}_0 + \frac{m_1}{m} \dot{\mathbf{r}}(t), \quad m = m_1 + m_2.$$

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ

6.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теоретической механике в рамках задачи двух тел решают в основном две задачи: задачу определения значений энергии системы, траекторий частиц, движущихся в ограниченной области пространства, и задачу рассеяния частиц, которая включает в себя исследование упругого рассеяния. Рассеяние двух частиц называют упругим, если в этом процессе не происходит изменения внутреннего состояния взаимодействующих частиц.

Постановка задачи рассеяния состоит в следующем. Прежде всего удобно считать начальным моментом времени $t_0 = -\infty$. При этом предполагается, что при $t = -\infty$ частицы являются свободными, так как они бесконечно далеки друг от друга и вследствие этого энергия их взаимодействия, являющаяся функцией расстояния между ними, равна нулю. Далее частицы взаимодействуют между собой, однако при $t \rightarrow \infty$ они расходятся, их энергия взаимодействия снова обращается в нуль и они становятся свободными в указанном смысле.

Задача заключается в том, чтобы определить механическое состояние системы частиц при $t = \infty$, задав их состояние при $t = -\infty$. В квантовой механике состояния частиц при $t = -\infty$ называют In-состояниями, а при $t = \infty$ — Out-состояниями. Удобно придерживаться этой терминологии и в теоретической механике. Легко видеть, что механическое состояние системы, состоящей из двух частиц, при $t = -\infty$ и $t = \infty$ определяется полностью их скоростями (или импульсами), поэтому векторы $\mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_1(-\infty)$, $\mathbf{v}_2^- = \mathbf{v}_2(-\infty)$ характеризуют In-состояния, а векторы $\mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_2(\infty)$, $\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_1(\infty)$ — Out-состояния системы. Кроме того, нужно также задать массы частиц m_1 , m_2 , энергию их взаимодействия $U(r)$ и параметр ρ , называемый прицельным расстоянием.

Скорости частиц задаются относительно некоторой инерциальной системы отсчета, которую в теории рассеяния обычно называют лабораторной системой или L -системой. Если рассматривается задача о рассеянии двух пучков частиц (в таком случае предполагается, что в одном из пучков все частицы имеют одинаковые массы, скажем m_1 , и скорости \mathbf{v}_1^- , а во втором — m_2 и \mathbf{v}_2^-), то, как будет видно из дальнейшего, нужно

также задать угол ψ , определяющий ориентацию плоскости движения каждой из пар сталкивающихся частиц относительно системы отсчета, связанной с центром масс какой-либо пары (эту систему называют μ -системой).

Задачу рассеяния двух частиц можно решить в общем виде, используя полученное выше решение задачи двух тел. В самом деле, задачу двух тел сведем к задаче о движении μ -точки и далее, учитывая сохранение скорости центра масс системы в процессе рассеяния (вследствие того, что система изолированная), находим

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{V} - \frac{m_2}{m} \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{V} + \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^+, \quad m = m_1 + m_2, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-}{m}$ — скорость центра масс, а $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_1^+$ — скорость μ -точки после рассеяния. Величину \mathbf{v}^+ найдем из закона сохранения энергии для μ -точки (закон сохранения энергии в задаче двух тел относительно μ -системы):

$$\frac{\mu v^{+2}}{2} + U|_{t=\infty} = \frac{\mu v^{-2}}{2} + U|_{t=-\infty}. \quad (2.6)$$

Но так как $U|_{t=\infty} = U|_{t=-\infty} = 0$, $v^+ = v^-$. Поэтому $\mathbf{v}^+ = v^- \mathbf{n}_0$, где $\mathbf{v}^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$ а единичный вектор \mathbf{n}_0 направлен по \mathbf{v}^+ или \mathbf{v}_2^+ .

Процесс рассеяния в μ -системе можно изобразить графиче-

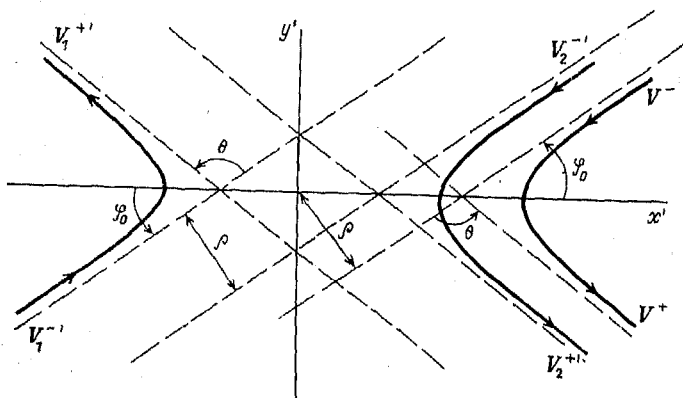


Рис. 1.6

ски (рис. 1.6) на плоскости $x'Oy'$, являющейся плоскостью движения взаимодействующих частиц. Напомним, что если $m_1 = m_2$, как на рис. 1.6, то согласно (38.5).

$$\mathbf{r}'_1 = -\mathbf{r}/2, \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}/2,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор μ -точки.

Так как в ζ -системе в любой момент времени $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$ (и, значит, $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$ и $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$), то угол между \mathbf{v}'_1 и \mathbf{v}'_2 равен углу между \mathbf{v}^{+} и \mathbf{v}^{-} и, следовательно, скорости частиц в любой момент t направлены противоположно. Таким образом, результат упругого рассеяния частиц сводится в ζ -системе к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Но так как вектор \mathbf{v}'_2 параллелен \mathbf{v}^{+} , этот угол равен углу отклонения μ -точки. Обозначим угол отклонения буквой θ . Учтем, что полярный угол φ_0 выражается через определенный интеграл:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L'_0}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_0 - U(r) - L_0'^2 / 2\mu r^2)}}, \quad (3.6)$$

где точка поворота r_{\min} является корнем уравнения

$$E_0 - U(r) - L_0'^2 / 2\mu r^2 = 0.$$

В подынтегральное выражение (3.6) входят параметры, характеризующие μ -точку. Очевидно, что

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (4.6)$$

Мы здесь воспользовались общим свойством симметричности траектории по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру поля точку орбиты. Поэтому обе асимптоты орбиты, скажем, μ -точки, пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Угол θ называют углом рассеяния в системе центра масс; он равен углу между двумя асимптотами к траектории μ -точки, а φ_0 — угол между асимптотой траектории и асимптотическим вектором.

Прицельное расстояние — это расстояние между асимптотами траекторий частиц в ζ -системе, по которым частицы движутся до рассеяния; его также можно определить как минимальное расстояние, на котором частицы пролетели бы друг от друга в отсутствие взаимодействия между ними.

В задаче рассеяния сохраняющиеся величины E_0 и L_0 принято записывать через скорость v^- и прицельное расстояние ρ :

$$E_0 = \frac{\mu v^{-2}}{2}, \quad L_0 = \mu r v^- \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}^-) = \mu \rho v^-,$$

так как $\rho = r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}^-)$. Отсюда видно, что ρ равно длине перпендикуляра, опущенного из центра поля на асимптоту траектории μ -точки, или, эквивалентно, это минимальное расстояние, на котором μ -точка прошла бы от центра силы, если бы взаимодействие между ней и полем отсутствовало вообще.

Формулами (1.6), (4.6) дается решение задачи об упругом рассеянии двух частиц. Мы видим, что эта задача является частным случаем задачи двух тел, когда нужно знать лишь скорости частиц после рассеяния. Угол рассеяния θ зависит от ρ , U , а также от вида взаимодействия частиц и параметров, которые его характеризуют, т. е. от $U(r)$:

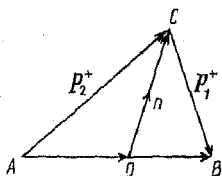
$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (5.6)$$

6.2. ДИАГРАММЫ СКОРОСТЕЙ И ИМПУЛЬСОВ

Общим результатам, полученным выше на основании законов сохранения энергии и импульса, можно дать геометрическую интерпретацию, изображая на графике импульсы частиц в l -системе. Для этого умножим формулы (1.6) на m_1 и m_2 соответственно:

$$p_1^+ = \frac{m_1}{m} (p_1^- + p_2^-) - \mu v^- n_0, \quad (6.6)$$

$$p_2^+ = \frac{m_2}{m} (p_1^- + p_2^-) + \mu v^- n_0. \quad (7.6)$$



$$\begin{aligned} OC &= \mu v^-, \\ AO &= \frac{m_2}{m} (p_1^- + p_2^-), \\ OB &= \frac{m_1}{m} (p_1^- + p_2^-), \\ AC &= p_2^+, \quad CB = p_1^+. \end{aligned}$$

Рис. 2.6

Построим окружность радиуса μv^- и далее векторы (6.6), (7.6) (рис. 2.6). При заданных p_1^- и p_2^- радиус окружности и положение точек A и B неизменны, а точка C может иметь любое положение на окружности. Рассмотрим случай, когда одна из частиц (для определенности массы m_1) при $t = -\infty$ покоится, т. е. $v_1^- = 0$. В этом случае $v^- = v_2^-$, $\vec{AO} = \frac{m_2}{m} p_2^-$, $\vec{AB} = p_2^-$,

$\vec{OB} = \frac{m_1}{m} p_2^- = \mu v^-$, и, в зависимости от соотношения масс m_1 и m_2 , получим диаграммы, изображенные на рис. 3.6. Указанные на рис. 3.6 углы θ_1 и θ_2 представляют собой углы отклонения (рассеяния) частиц после столкновения по отношению к направлению

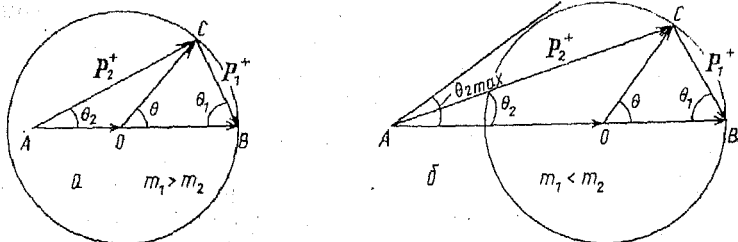


Рис. 3.6

нию движения налетающей частицы импульса p_2^- (направление удара).

Углом θ задается направление вектора \mathbf{n}_0 , и, значит, этот угол представляет собой угол поворота частицы массы m_2 в системе центра масс. Из элементарной геометрии находим связи

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1 \cos \theta}, \quad (8.6)$$

Абсолютные величины скоростей обеих частиц как функции θ можно найти из формул (1.6):

$$v_1^+ = 2 \frac{m_2}{m} v^- \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.6)$$

$$v_2^+ = \frac{v^-}{m} \sqrt{m_2^2 + m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}. \quad (10.6)$$

Суммарный угол

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta + \frac{m_2 - m_1}{m_1}}$$

есть угол разлета частиц после столкновения. Видно, что $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ при $m_1 > m_2$ и $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ при $m_2 > m_1$. Напомним, что m_2 — масса налетающей частицы.

Заметим, что при $m_1 > m_2$ скорость налетающей частицы после столкновения может иметь любое направление, но если $m_2 > m_1$, то угол отклонения первоначально движущейся частицы ограничен значением, соответствующим такому положению точки C , при котором прямая AC касается окружности. При этом

$$\sin \theta_{2 \max} = \frac{OC}{AO} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Если $m_1 = m_2$ и, кроме того, $v_1^- = 0$, то диаграмма импульсов становится совсем простой (рис. 4.6). Существенно упрощаются и формулы, выражающие связи θ_1 , θ_2 v_1^+ , v_2^+ с углом θ :

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\theta}{2},$$

$$v_1^+ = v^- \sin \frac{\theta}{2}, \quad v_2^+ = v^- \cos \frac{\theta}{2}.$$

Очевидно, в этом случае угол разлета

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

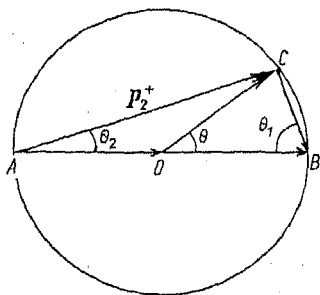


Рис. 4.6

Рассмотрим теперь случай так называемого лобового удара, когда обе частицы после столкновения движутся по одной прямой: $\theta = \pi$, \mathbf{p}_1^+ , \mathbf{p}_2^+ , или взаимно противоположны (если $m_1 > m_2$), или направлены в одну сторону (если $m_2 > m_1$). Скорости частиц после столкновения получим прямо из (1.6) в виде

$$v_1^+ = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^-, \quad v_2^+ = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^-. \quad (11.6)$$

Из (11.6) видно, что при лобовом ударе первоначально покоившаяся частица приобретает после столкновения максимальную возможную энергию

$$E_1^+ = \frac{m_1 v_1^{+2}}{2} = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_2^-,$$

где $E_2^- = \frac{m_2 v_2^{-2}}{2}$ — энергия движущейся до столкновения частицы.

6.3. ЭФФЕКТИВНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Физическая задача о рассеянии заключается в определении характеристик пучка частиц массы m_1 , имеющих до рассеяния одинаковые скорости v_1^- , на пучке частиц массы m_2 , скорости которых до рассеяния также одинаковы и равны v_2^- . При этом предполагается, что оба пучка однородны по своим сечениям и что каждый из пучков разрежен настолько, что взаимодействие между частицами внутри самого пучка можно не учитывать. Так как оба пучка являются разреженными, процесс рассеяния каждой частицы одного пучка на частице другого пучка можно считать однократным.

Основные характеристики процесса рассеяния получим в μ -системе для μ -точки. Различные пары частиц, т. е. различные μ -точки, обладают разными прицельными расстояниями и соответственно им рассеиваются под разными углами (рис. 5.6).

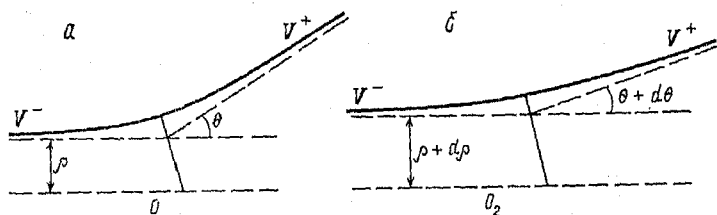


Рис. 5.6

Нетрудно понять, что центры масс всех μ -точек покоятся относительно друг друга, поэтому угол θ для каждой данной пары взаимодействующих частиц будет одним и тем же отно-

сительно системы отсчета с началом в центре масс любой пары. Можно выбрать одну из таких систем отсчета, назвав ее условно ζ -системой. Именно относительно такой системы отсчета рассматривается процесс рассеяния.

Точка, имеющая прицельное расстояние ρ , отклоняется на угол θ в ζ -системе, а точка (имеются в виду μ -точки) с прицельным расстоянием $\rho+d\rho$ рассеивается на угол $\theta+d\theta$ (см. рис. 5.6). Соответственно μ -точки, прицельные расстояния которых лежат внутри интервала $\rho, \rho+d\rho$, рассеиваются на углы от θ до $\theta+d\theta$.

Обозначим через dN число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие между θ и $\theta+d\theta$. Это число будет зависеть от плотности падающего пучка частиц n , и поэтому оно неудобно для характеристики процесса рассеяния. Введем

$$d\sigma = dN/n, \quad (12.6)$$

где n — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка, т. е. плотность потока частиц. Тогда $d\sigma$ будет иметь размерность площади. Это отношение называют эффективным (дифференциальным) сечением рассеяния. Как видно, оно определяется исключительно видом рассеивающего поля (т. е. видом взаимодействия) и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

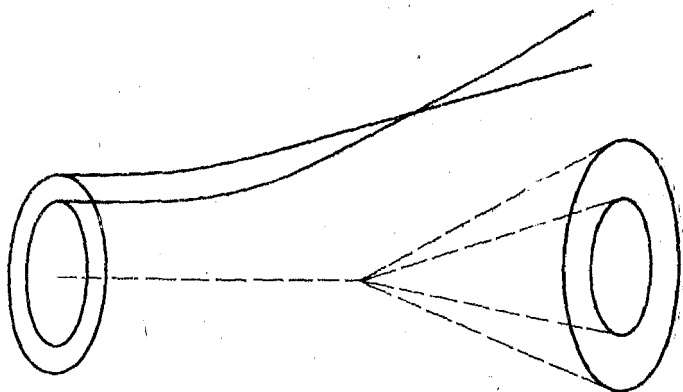


Рис. 6.6

Если связь между θ и ρ взаимно однозначна (что будет в случае, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния), то в заданный интервал углов между θ и $\theta+d\theta$ будут рассеиваться лишь те частицы, которые пролетают внутри кольца между окружностями радиусов $\rho(\theta)$ и $\rho(\theta)+d\rho(\theta)$. Тогда $dN = n2\pi\rho(\theta)d\rho$, а эффективное сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)d\rho(\theta). \quad (13.6)$$

Зависимость эффективного сечения рассеяния от угла рассеяния дается этой же формулой, которую нужно переписать в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (14.6)$$

В (14.6) входит модуль производной $\frac{d\rho}{d\theta}$ так как она чаще всего бывает отрицательной (почему?). Если $\rho(\theta)$ — многозначная функция угла θ , то, как это видно, следует взять сумму по всем ветвям этой функции.

Эффективное сечение $d\sigma$ можно отнести к элементу телесного угла $d\Omega$. Телесный угол между конусами с углами растворов θ и $\theta + d\theta$ есть $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Поэтому

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin(\theta)} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (15.6)$$

Заметим, что значение угла ψ , фиксирующего плоскость рассеяния какой-нибудь μ -точки, изменяется в пределах от 0 до 2π .

Для нахождения эффективных сечений в зависимости от углов θ_1 и θ_2 в λ -системе надо выразить в формуле (15.6) θ через θ_1 и θ_2 согласно формулам (8.6). При этом получаются формулы как для сечения рассеяния падающего пучка частиц $d\sigma(\theta_1)$, так и для частиц первоначально покоившихся $d\sigma(\theta_2)$.

6.4. ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА

Применим полученные формулы к одному из важных физических примеров — рассеянию электрически заряженных частиц. Положив в (3.6) $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, получим

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha x}{\mu v^{-2} \rho^2} - x^2}}, \quad x = \frac{\rho}{r},$$

здесь μ — приведенная масса, $v^- = |v_2^- - v_1^-|$ — относительная скорость частиц до рассеяния, а x_{\max} является положительным корнем уравнения

$$x^2 - \frac{2\alpha x}{\mu v^{-2} \rho^2} - 1 = 0, \quad x_{\max} = \frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho^2}\right)^2 + 1}.$$

Вычисляя интеграл, для угла рассеяния в ζ -системе получаем

$$\theta = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho^2}. \quad (16.6)$$

В случае сил притяжения ($\alpha > 0$) угол рассеяния отрицательный, $\theta < 0$, а если взаимодействие носит характер отталкивания ($\alpha < 0$), то $\theta > 0$. Обращая формулу (16.6), получим

$$\rho = -\frac{\alpha}{\mu v^{-2}} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (17.6)$$

Дифференцируя это выражение по θ и подставляя результат в (13.6) или (15.6), находим

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2}} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

или

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^{-2}} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (18.6)$$

Это формула Резерфорда. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния не зависит от знака α , так что формулой Резерфорда описывается как случай притяжения, так и случай отталкивания.

В ряде задач теории рассеяния можно ввести понятие полного эффективного сечения рассеяния как величины, равной отношению числа частиц, рассеиваемых за единицу времени под всеми углами θ , к плотности потока падающих частиц:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_{(\Omega)} d\sigma(\Omega). \quad (19.6)$$

Из этой формулы следует, что если радиус действия сил ограничен, т. е. потенциальная энергия взаимодействия имеет вид $U(r)$ при $r < R$, $U(r) = 0$ при $r > R$, то σ_{tot} будет равно площади круга радиуса R :

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2. \quad (20.6)$$

Если ввести полное сечение для процесса рассеяния заряженных частиц, то нетрудно показать, что оно обращается в бесконечность. Говорят в этом случае, что полное сечение расходится. Эта расходимость связана с существованием взаимодействия между частицами при сколь угодно больших прицельных расстояниях, т. е. фактически возникает из-за бесконечно большого «радиуса действия» кулоновских сил. Дело в том, что при вычислении σ_{tot} мы учитываем вклад всех рассеянных частиц, включая частицы с прицельным расстоянием $\rho \rightarrow \infty$ и соответственно $\theta \rightarrow 0$. Легко видеть, что при $\theta \rightarrow 0$ расходится и $d\sigma$, так как

$$d\sigma|_{\theta \rightarrow 0} \cong 8\pi \left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2}} \right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3} \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Следует отметить, что эта расходимость присутствует и в формулах $d\sigma^{кв}|_{0 \rightarrow 0}$, полученных методами квантовой теории. Ее причина также связана с дальнедействующим характером кулоновских сил.

6.5. ЗАХВАТ ЧАСТИЦ. ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ ЗАХВАТА

Рассмотрим графики эффективных энергий, представленные на рис. 7.6, и поставим вопрос: в чем они существенно различны? Ответ, очевидно, заключается в следующем: на рис. 7.6, а изображен случай, когда для всех (любых) In-состояний существуют Out-состояния, в то время как в случае рис. 7.6, б некоторые In-состояния не имеют Out-состояний. Легко видеть, что частицы, находящиеся при $t \rightarrow -\infty$ в In-состояниях с энергиями $E > U_m$, будут падать на центр поля.

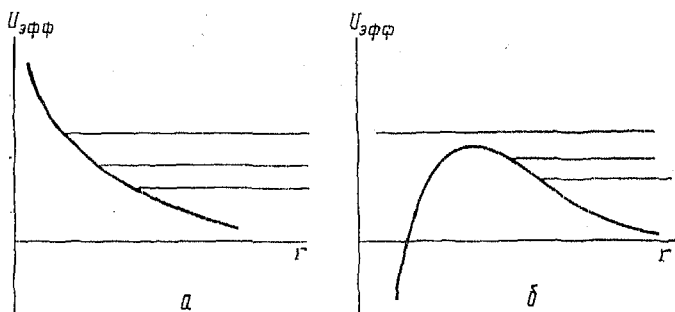


Рис. 7.6

Подобно тому как это было сделано для задачи рассеяния, здесь также можно ввести некоторую физическую величину, которой удобно характеризовать процесс. Если речь идет о взаимодействии пучков частиц, то отсутствие Out-состояний в такой задаче, очевидно, означает, что обе частицы при $t = \infty$ совершают движение в ограниченной области пространства. В таком случае говорят о захвате частиц. Процесс характеризуют полным сечением захвата, которое определяют как отношение числа частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния. Как и ранее, задача захвата двух частиц приводится к задаче о движении μ -точки.

Условия падения на центр поля μ -точки запишем, используя параметры задачи рассеяния v и ρ :

$$\frac{\mu v^2}{2} \geq U(r) + \frac{\mu v^2}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \quad (21.6)$$

и далее

$$0 \geq r^2 U(r) |_{r \rightarrow 0} + \frac{\mu \omega^2 \rho^2}{2}. \quad (22.6)$$

Этой формулой и определяются условия падения на центр поля.

Поставим вопрос: при каких значениях ρ неравенство удовлетворяется? Очевидно, если $U(r) > 0$, т. е. если взаимодействие носит характер отталкивания, то неравенство не удовлетворяется ни при каких значениях ρ . В случае же притяжения, по крайней мере, если силы притяжения быстро убывают при $r \rightarrow 0$, падение становится возможным хотя бы для некоторых ρ : $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$. Значит, в этом случае при $\rho < \rho_{\max}$ происходит захват частиц. Полное сечение захвата, согласно данному выше определению, вычисляется по формуле

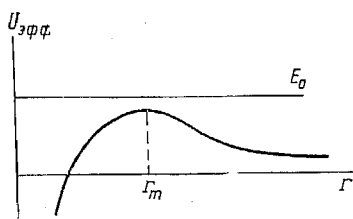


Рис. 8.6

$$\tilde{\sigma}_{\text{tot}} = \pi \rho_{\max}^2. \quad (23.6)$$

Пример. Найти полное сечение захвата частиц с энергией E_0 в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$.

Эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эфф}} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\tilde{\beta}}{r^2}$, где $\tilde{\beta} = \beta - E_0 \rho^2$. Падение на центр поля возможно, только если $\tilde{\beta} > 0$, т. е. при $\beta > E_0 \rho^2$. При этом должно выполняться $E_0 > U_m$, где $U_m = U_{\text{эфф max}}$ (рис. 8.6). Найдём U_m . $U'_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\tilde{\beta}}{r^3} = 0$. Отсюда $r_m = \frac{2\tilde{\beta}}{\alpha} > 0$ и $U_m = \frac{\alpha}{r_m} - \frac{\beta}{r_m^2} = \frac{\alpha^2}{4\tilde{\beta}}$.

Из условия $E_0 > U_m$ получим

$$E_0 > \frac{\alpha^2}{4(\beta - E_0 \rho^2)}, \quad \beta - E_0 \rho^2 > \frac{\alpha^2}{4E_0}$$

и $\rho^2 < \frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2}$. Значит, $\rho_{\max}^2 = \frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2}$. Так как величина ρ^2 должна быть положительной, то окончательно найдем

$$\tilde{\sigma}_{\text{tot}} = \pi \left(\frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2} \right), \quad E_0 > \frac{\alpha^2}{4\beta};$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{tot}} = 0, \quad E_0 < \frac{\alpha^2}{4\beta}.$$

Глава 7

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

7.1. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛОЖЕННЫХ СВЯЗЯХ

Под связями понимают не вытекающие из уравнений движения ограничения, налагаемые на положения (радиусы-векторы) и скорости точек системы. Связи можно представить себе реализуемыми поверхностями, стержнями, нитями и т. п.; аналитически связи выражаются уравнениями связей, т. е. соотношениями между r_i , \dot{r}_i . Начальные условия теперь не произвольны, точка не свободна, так как в произвольный момент времени должны выполняться соотношения

$$f_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (1.7)$$

Это голономные связи. Функционально они зависят только от координат и времени. Точнее, если все уравнения связей можно представить в виде (1.7) до интегрирования уравнений движения, т. е. если можно проинтегрировать уравнения связей (которые, как было сказано выше, могут зависеть от скоростей) независимо от уравнений движения, то связи называются голономными. Если в функции f_α входят скорости, то связи называют неголономными.

Различают связи, когда ни в одно из соотношений (1.7) время явно не входит (стационарные, или склерономные) и когда (1.7) явно зависят от времени (нестационарные, или реономные связи). Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точки механической системы, называют реакциями связей.

Связи вносят в задачи механики две трудности. Во-первых, не все r_i являются независимыми, так как они связаны определенными соотношениями. Следовательно, не все уравнения движения являются независимыми. Во-вторых, силы, возникающие в результате действия связей (силы реакции связей), априори не заданы. Они являются неизвестными величинами решаемой задачи и подлежат определению. Наложить на систему связи — это значит просто указать, что в системе действуют силы, которые прямо не заданы, но которые определенным образом влияют на движение системы.

Основная задача механики системы N точек, на которую наложены голономные связи, формулируется как задача наход-

дения законов движения точек системы и реакций связей по заданным силам F_i ($i=1, 2, \dots, N$) и заданным уравнениям голономных связей. Если задано k соотношений вида (1.7), то она сводится к нахождению совместного решения уравнений движения и уравнений связей:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, k)$$

с начальными условиями, заданными в соответствии с уравнениями связей. Это система $3N+k$ скалярных уравнений, содержащих $6N$ неизвестных функций ($3N$ функций \mathbf{r}_i и $3N-k$ \mathbf{R}_i). В тривиальном случае ($k=3N$) связи полностью определяют движение системы. Если $k < 3N$, то рассматриваемая задача является определенной только в том случае, когда известно $6N - (3N+k) = 3N-k = s$ независимых соотношений между положениями точек и реакциями связей.

7.2. ВИРТУАЛЬНЫЕ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Виртуальным перемещением системы называют бесконечно малое изменение ее конфигурации, согласующееся со связями (наложенными на нее) в данный момент времени. Иными словами, если

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (2.7)$$

то и

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (3.7)$$

т. е. уравнения (2.7), (3.7) должны удовлетворяться в один и тот же момент времени. Виртуальные перемещения являются геометрическими понятиями, не связанными с движением. Это вариации функций $\delta\mathbf{r}_i(t)$ при неизменном значении аргумента, т. е. малые изменения вида функций. Это не перемещения точек системы во времени, а элементарные отрезки, которые по определению должны удовлетворять уравнениям связей в тот же момент времени t , что и $\mathbf{r}_i(t)$.

Раскладывая f_α из (3.7) и ограничиваясь линейными членами, получим

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i(t) \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4.7)$$

или, так как f_α удовлетворяют (2.7),

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i \right) \equiv \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (5.7)$$

Так как число уравнений $k < 3N$, то в выборе δr_i имеется произвол. Из общего числа после удовлетворения условий (5.7) произвольными останутся $s = 3N - k$.

Действительным перемещением i -й точки dr_i называют бесконечно малое перемещение этой точки, происходящее под действием как заданных сил F_i , так и сил реакций связей *); оно происходит за время dt .

Можно также ввести понятие возможных перемещений, удовлетворяющих только уравнениям связей. Действительные перемещения как одни из возможных удовлетворяют уравнениям

$$f_\alpha(r_1 + dr_1, \dots, r_N + dr_N, t + dt) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

или

$$\sum_{i=1}^N (\nabla f_\alpha \cdot dr_i) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (6.7)$$

К классу виртуальных возможные перемещения относятся только тогда, когда связи стационарны.

Понятие о виртуальных перемещениях позволяет ввести важный класс связей, называемых идеальными. Пусть сумма работ всех реакций связей на любых виртуальных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N (R_i \cdot \delta r_i) = 0. \quad (7.7)$$

Связи, удовлетворяющие этому условию, называют идеальными. В дальнейшем мы будем рассматривать только те системы, на которые наложены идеальные связи.

7.3. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ ОБРАТИМЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНИКИ

Принципом или началом механики называют такое общее математически формулируемое предложение, из которого механика как физическая теория может быть выведена дедуктивно (т. е. идя от общего положения к частному), т. е. могут быть получены уравнения движения для механических систем общего типа или для систем некоторого ограниченного класса. Эти принципы используют понятие виртуальных перемещений, т. е. по существу понятие вариации функции. Они формулируют условия существования обобщенного состоя-

*) Заданные силы F_i часто называют активными силами; силы же реакций связей R_i называют пассивными силами.

ния равновесия некоторых систем, которое в свою очередь находится как решение задачи на экстремум некоторой функции.

Рассмотрим несвободную систему материальных точек в равновесии. Тогда $\Phi_i=0$, где $\Phi_i=F_i+R_i$. Вычислим $\sum_{i=1}^N (\Phi_i \cdot \delta r_i)$,

получаем $\sum_{i=1}^N (\Phi_i \cdot \delta r_i) = 0$. Полученное равенство тривиально.

Чтобы наполнить его новым физическим содержанием, представим его в виде

$$\sum_{i=1}^N (\Phi_i \cdot \delta r_i) = \sum_{i=1}^N (F_i \cdot \delta r_i) + \sum_{i=1}^N (R_i \cdot \delta r_i) = 0,$$

и если связи идеальны, т. е. если $\sum_{i=1}^N (R_i \cdot \delta r_i) = 0$, то и

$$\sum_{i=1}^N (F_i \cdot \delta r_i) = 0.$$

Виртуальная работа активных (внешних) сил, приложенных к уравновешенной системе, равна нулю. Это принцип виртуальных работ (перемещений). Он эквивалентен постулату: *Виртуальная работа сил реакции всегда равна нулю на любом виртуальном перемещении, не нарушающем заданных кинематических условий:*

$$0 = \sum_{i=1}^N (F_i \cdot \delta r_i) = - \sum_{i=1}^N (R_i \cdot \delta r_i).$$

Заметим, что $F_i \neq 0$, так как не все δr_i независимы. Чтобы приравнять коэффициенты нулю, нужно перейти к независимым вариациям координат.

Принцип виртуальных перемещений был обобщен Д'Аламбером на динамические системы. Все другие основные принципы механики (Эйлера, Лагранжа, Якоби, Гамильтона—Остроградского) являются, по-видимому, различными математическими формулировками принципа Д'Аламбера. Поэтому в некотором смысле постулат о виртуальной работе сил реакций есть по существу единственный постулат аналитической механики.

Включим $m_i \ddot{r}_i$ в Φ_i и далее применим принцип виртуальных перемещений к «механической системе», на которую действуют силы Φ_i . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^N ((m_i \ddot{r}_i - F_i) \cdot \delta r_i) = 0. \quad (8.7)$$

Это соотношение называют принципом Д'Аламбера, а также общим уравнением механики Д'Аламбера—Лагранжа.

Из общего уравнения механики получаются как уравнения Лагранжа с неопределенными множителями (1-го рода), так и уравнения Лагранжа в независимых (обобщенных) координатах (2-го рода).

7.4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 1-ГО РОДА

Умножим каждое из соотношений (5.7) на некоторый множитель $-\lambda_\alpha(t)$ и сложим их:

$$-\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i) = -\sum_{i=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) = 0. \quad (9.7)$$

Складывая (9.7) и общее уравнение механики, получим

$$\sum_{i=1}^N \left\{ (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r}_i \right\} = 0. \quad (10.7)$$

Мы должны получить уравнения движения. Для этого подберем k еще не определенных множителей λ_α так, чтобы коэффициенты при k зависимых вариациях $\delta \mathbf{r}_i$ обратились бы в нуль. Это можно сделать единственным образом (т. е. выразить k зависимых вариаций через $3N - k$ независимых вариаций), так как мы предполагаем независимость уравнений связей и вытекающее из этого неравенство нулю детерминанта из коэффициентов при зависимых вариациях в соотношениях (5.7). Коэффициенты при независимых вариациях в (10.7) должны быть равны нулю вследствие независимости этих вариаций. Следовательно, чтобы соотношение (10.7) удовлетворялось, необходимо положить коэффициенты при всех $\delta \mathbf{r}_i$ равными нулю:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.7)$$

Кроме этого мы имеем еще k уравнений

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0. \quad (12.7)$$

Уравнения (11.7) называют уравнениями Лагранжа 1-го рода. Силы реакции связей, как видно из сравнения (7.7) с (9.7), выражаются через производные от функций f_α :

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha. \quad (13.7)$$

Можно сказать, что уравнения (9.7) представляют собой необходимые и достаточные условия обращения в нуль виртуаль-

ной работы сил реакций, т. е. условие идеальности связей здесь использовано. По существу к (8.7) мы прибавили нуль, так как виртуальные перемещения удовлетворяют соотношениям (5.7).

Законы изменения полного импульса, момента импульса и механической энергии несвободной системы материальных точек модифицируются, так как в правых частях соответствующих уравнений теперь нужно учитывать внешние силы реакции. Это нетрудно сделать, и в итоге мы получим

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{R}^{\text{ext}}, \quad (14.7)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^{\text{ext}} + \mathbf{M}_R^{\text{ext}}, \quad (15.7)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^d \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}, \quad (16.7)$$

где $\mathbf{R}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^{\text{ext}}$, $\mathbf{M}_R^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i^{\text{ext}}]$, и при выводе (16.7) мы использовали (6.7), из которого следует, что

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}.$$

Заметим, что полная механическая энергия несвободной системы сохраняется лишь при условии стационарности внешних потенциальных сил, отсутствии диссипативных сил и стационарности всех связей. Нестационарные связи способны совершать работу, в результате которой механическая энергия системы будет изменяться со временем.

7.5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В НЕЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТАХ (2-ГО РОДА)

Для получения уравнений Лагранжа 2-го рода нужно переписать принцип Д'Аламбера в независимых (или, как их чаще называют, обобщенных) координатах. Выбор этих координат неоднозначен, однако при любом выборе следует удовлетворить двум условиям. Подберем s обобщенных координат q_i так, чтобы все \mathbf{r}_i были бы однозначными функциями этих s координат q_1, q_2, \dots, q_s :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t). \quad (17.7)$$

Число независимых координат $s = 3N - k$ для систем, на которые наложены голономные связи, называют числом степеней свободы системы. Итак, независимыми (обобщенными) координатами могут быть s величин, которыми конфигурация си-

системы определяется однозначно. Если перенумеровать декартовы координаты материальных точек системы (x_i, y_i, z_i) в определенном порядке, то условие независимости q_j , означает, что из $3N$ функций x_j 9 функций должны быть независимыми, что можно обеспечить требованием

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_s}{\partial q_1} & \frac{\partial x_s}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (18.7)$$

Второе условие накладывается на связи: при подстановке (17.7) в уравнения связей (1.7) они должны обращаться в тождества

$$f_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_N, t) \Big|_{\substack{r_1=r_1(q_1, \dots, q_s, t) \\ \vdots \\ r_N=r_N(q_1, \dots, q_s, t)}} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (19.7)$$

Мы увидим, что в динамические уравнения, записанные в независимых координатах, силы реакции связей вообще не входят; по существу они исключены из динамики системы условиями (7.7).

Теперь мы можем записать принцип Д'Аламбера в независимых координатах. Для этого получим связи между вариациями δr_i и δq_j , исходя из (17.7):

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (20.7)$$

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (21.7)$$

и также

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_i}. \quad (22.7)$$

Полные производные по времени от обобщенных координат q_j называются обобщенными скоростями. Подставим (20.7) в (8.7) и преобразуем результат:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j &= \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (23.7) \end{aligned}$$

Под знаком производной $\frac{d}{dt}$ заменим $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ на $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$ и введем кинетическую энергию системы точек как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{r}}_N = \dot{\mathbf{r}}_N(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \end{array} \right. \equiv T((q), (\dot{q}), t), \quad (24.7)$$

а также обобщенные силы

$$Q_j((q)) = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (25.7)$$

С учетом (24.7) и (25.7) принцип Д'Аламбера можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (26.7)$$

Подчеркнем, что размерность обобщенной силы есть энергия, деленная на обобщенную координату, поэтому ее размерность не совпадает в общем случае с размерностью обычной силы. Совпадут они лишь в случае, если q_j имеет размерность

длины. Размерность суммы $\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i)$ есть размерность работы или энергии.

Выражение (26.7) представляет собой принцип Д'Аламбера в независимых координатах. В случае голономных связей все δq_j являются независимыми, и для удовлетворения (26.7) мы должны положить коэффициенты при каждой вариации δq_j равными нулю:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (27.7)$$

Уравнениями (27.7) описывается динамика механической системы в независимых координатах под действием заданных внешних сил; силы реакции в (27.7) не входят. Незвестными в этих уравнениях являются обобщенные координаты как функции времени. Число неизвестных и число уравнений совпадают и в данном случае равны числу степеней свободы. Если внешние силы имеют потенциал $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, то

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad Q_j = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial U((\mathbf{r}))}{\partial q_j} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}((q), t)}, \quad (28.7)$$

причем $Q_i(q_1, \dots, q_s)$ не зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$.
 Введем функцию *)

$$\mathcal{L}((q), (\dot{q}), t) = T((q), (\dot{q}), t) - U((q)), \quad (29.7)$$

которая называется функцией Лагранжа, или лагранжианом системы. Учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$ для всех $j=1, 2, \dots, s$, (27.7) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (30.7)$$

Уравнения (30.7) называют уравнениями Лагранжа в независимых координатах (2-го рода).

Замечательно, что вся динамика системы материальных точек управляется одной скалярной функцией, зависящей от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, — функцией Лагранжа. В общем случае уравнения Лагранжа (27.7) представляют собой систему s дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Решение основной задачи динамики несвободной системы может быть проведено следующим образом. Решая систему уравнений Лагранжа, получим

$$q_j = q_j(t, C_1, \dots, C_{2s}), \quad j=1, \dots, s. \quad (31.7)$$

Далее, если нам нужно знать положения точек в любой момент времени t , необходимо подставить (31.7) в (17.7). В результате находим

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, q_1, \dots, q_s), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (32.7)$$

Силы реакции связей можно определить из уравнений

$$\mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i. \quad (33.7)$$

При этом $\ddot{\mathbf{r}}_i$ находятся из (32.7) путем двукратного дифференцирования по времени. Таким образом, основная задача механики полностью решается.

Заметим, что если рассматривать радиус-вектор \mathbf{r} точки пространства как функцию трех независимых вещественных переменных q_1, q_2, q_3 в отсутствие связей, то точечные преобразования

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3),$$

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

*) Буква, взятая в круглые скобки, обозначает всю совокупность соответствующих переменных, например $(q) = q_1, q_2, \dots, q_s$. Иногда с целью упрощения записи, там, где это понятно, круглые скобки не ставятся.

описывают переход к произвольным криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 . Из (23.7), (26.7) видно, что проекции ускорения материальной точки на единичные орты криволинейных координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ можно записать в виде

$$\omega_j = \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial q_j} \right\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\dot{\mathbf{r}}$ как функция q_j, \dot{q}_j определяется формулой (21.7) с $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$, а $h_j = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right|$ являются функциями криволинейных координат $h_j = h_j(q_1, q_2, q_3)$. Единичные векторы определяются как

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}.$$

Параметры $h_j(q_1, q_2, q_3)$ называются дифференциальными параметрами Ламе.

Метод Лагранжа можно применять и при описании динамики свободной механической системы. Зачастую, особенно при использовании криволинейных координат, уравнения движения системы проще получить методом Лагранжа, чем проектировать векторные уравнения Ньютона на соответствующие орты. В качестве примера получим уравнения движения материальной точки массы m в поле силы $\mathbf{F}(r)$ в сферической системе координат.

Кинетическую энергию точки найдем, учитывая, что приращение радиуса-вектора точки описывается формулой

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{n}_r + r d\theta \mathbf{n}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{n}_\varphi,$$

а скорость —

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi,$$

где $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\varphi$ — единичные сферические орты. Поэтому

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

и кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Обобщенные силы

$$Q_r = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_r) = F_r, \quad Q_\theta = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) = r (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_\theta) = r F_\theta,$$

$$Q_\varphi = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right) = r \sin \theta F_\varphi.$$

Подставляя T и Q в уравнения (27.7) и полагая в них $q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$, получим уравнения движения точки в сферических координатах:

$$\begin{aligned} m \{ \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \} &= F_r, \\ m \left\{ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right\} &= r F_\theta, \\ m \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) &= r \sin \theta F_\varphi. \end{aligned}$$

Проекция ускорения точки на орты сферической системы координат

$$\begin{aligned} \omega_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Приведем также функцию Лагранжа свободной материальной точки в отсутствие внешних сил в декартовых (x, y, z)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

и в цилиндрических (ρ, φ, z)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

координатах.

Пример. Задача о движении двух тел в однородном внешнем поле. Показать, что задача о движении двух взаимодействующих (по 3-му закону Ньютона) между собой тел в однородном внешнем потенциальном поле сводится к задаче о движении центра масс и задаче о движении μ -точки в заданном поле.

В качестве обобщенных координат выберем координаты радиусов-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 частиц массы m_1 и m_2 . Пусть внешнее поле действует на частицу m_1 с силой \mathbf{F}_1 , на частицу массы m_2 — с силой \mathbf{F}_2 (причем по условию $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{F}_2$), а потенциальная энергия взаимодействия частиц равна $U(r)$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Функция Лагранжа в координатах $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(r) + (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1) + (\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2).$$

Перейдем к независимым координатам

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - U(r) + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \mathbf{R} + \\ + \frac{(\mathbf{F}_2 m_1 - \mathbf{F}_1 m_2) \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Уравнения Лагранжа в координатах \mathbf{R} и r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}}, \quad (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad \mu \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} - \mu \left(\frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} \right).$$

В частности, если частицы обладают зарядами e_1, e_2 , а напряженность внешнего поля равна \mathbf{e} , то $\mathbf{F}_1 = e_1 \mathbf{e}$, $\mathbf{F}_2 = e_2 \mathbf{e}$, $U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$; если исследуется движение двух гравитирующих частиц в однородном поле тяжести напряженности g , то $\mathbf{F}_1 = m_1 g$, $\mathbf{F}_2 = m_2 g$, $U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$, где G — гравитационная постоянная.

Из полученных результатов видно, что при движении точек в однородном внешнем потенциальном поле внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс системы. Это достаточно общий результат.

7.6. СТРУКТУРА ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА. ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим структурную зависимость функции Лагранжа от обобщенных скоростей и поставим вопрос: какой наиболее общий вид потенциала как функции обобщенных скоростей может быть, чтобы уравнения движения механической системы имели бы форму (30.7)? Начнем тем не менее с установления структуры кинетической энергии. Подставляя (21.7) в (24.7), получим

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + T^{(0)}, \quad (34.7)$$

где

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (35.7)$$

Мы видим, что

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad (36.7)$$

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \quad (37.7)$$

где

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (38.7)$$

— однородная квадратичная форма обобщенных скоростей, а

$$T^{(1)} = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \quad (39.7)$$

— однородная линейная форма обобщенных скоростей.

В целом T является неоднородной формой обобщенных скоростей, и лишь в случае, когда все $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$, т. е. когда связи стационарны, $T = T^{(2)}$ и кинетическая энергия становится однородной квадратичной формой обобщенных скоростей. Отметим, что коэффициенты a_{jk} симметричны $a_{jk} = a_{kj}$ и что $T^{(2)} \geq 0$, т. е. $T^{(2)}$ — положительно определенная форма обобщенных скоростей.

Рассмотрим теперь структуру потенциала. До сих пор мы исследовали системы с потенциалами, зависящими только от координат (в том числе и обобщенных). Примеры из классической динамики заряженных частиц в электромагнитном поле общего вида приводят нас к понятию обобщенного потенциала, производные которого определенным образом связаны с соответствующими обобщенно-потенциальными силами. Проиллюстрируем это на примере силы Лоренца.

В электродинамике вводят понятие обобщенного потенциала в виде

$$U = -\frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + e\varphi. \quad (40.7)$$

Здесь \mathbf{A} и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, заданные как функции точки пространства и времени и определяющие напряженность поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}], \quad (41.7)$$

где e — заряд частицы, c — скорость света. Зная (40.7), силу Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}] \quad (42.7)$$

можно представить как

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \equiv -\nabla U + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right). \quad (43.7)$$

Действительно, подставляя (40.7) в (43.7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -e\nabla\varphi + \frac{e}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \\ &= -e\nabla\varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} = e\mathbf{e} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (44.7)$$

Здесь мы использовали известную из векторного анализа формулу

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{C}[\nabla \mathbf{a}]],$$

где $\mathbf{C} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$ — постоянный (т. е. не зависящий от координат) вектор $\mathbf{a} \equiv \mathbf{A}(r, t)$. Заметим, что в качестве обобщенных координат, в частности, можно использовать и декартовы координаты; тогда обобщенными скоростями будут, очевидно, компоненты вектора скорости $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. В общем случае сила (43.7) может быть построена как обобщенная сила

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (45.7)$$

Докажем, что это так. По определению обобщенной силы имеем

$$Q_j = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (46.7)$$

Используя соотношение $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}$, приведем (46.7) к виду

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} \right),$$

убеждаемся, что Q_j действительно определяется формулой (45.7).

Следует подчеркнуть, что обобщенный потенциал, с помощью которого определяют силы вида (45.7), должен быть линейной формой относительно обобщенных скоростей (т. е. в U недопустимы степени \dot{q} выше первой), так как в противном случае обобщенные силы зависели бы от обобщенных ускоре-

ний и задача динамики стала бы неопределенной. Следовательно, в общем случае обобщенный потенциал имеет вид

$$U = U^{(1)} + U^{(0)}, \quad (47.7)$$

где $U^{(1)} = \sum_{j=1}^s U_j(q, t) \dot{q}_j$ — линейная однородная форма обобщенных скоростей, $U^{(0)}(q, t)$ — форма нулевой степени. Легко получить структуру обобщенной силы:

$$Q_j = -\frac{\partial U^{(0)}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k, \quad (48.7)$$

где $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}$ — коэффициенты, антисимметричные по индексам j, k , так что

$$\sum_{j,k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0. \quad (49.7)$$

Последний член в (48.7) представляет так называемую гироскопическую часть обобщенной силы. Таким образом, при наличии обобщенно-потенциальных сил функция Лагранжа представима в виде

$$\mathcal{L} = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)}. \quad (50.7)$$

Приведем здесь также выражение для полной механической энергии несвободной системы материальных точек:

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)}, \quad (51.7)$$

Обратим внимание на то, что, по определению, E есть сумма кинетической и потенциальной энергий системы точек.

7.7. ОБОБЩЕННЫЙ ИМПУЛЬС, ОБОБЩЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

При наличии обобщенно-потенциальных и диссипативных сил уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^d, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (52.7)$$

где Q_j^d — обобщенные диссипативные силы.

Рассмотрим систему из N точек, находящуюся в поле потенциальных сил. Функцию Лагранжа этой системы запишем, вы-

бирая в качестве обобщенных координат декартовы координаты:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=1}^N U_i^{(0)}(x, y, z).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j = p_{x_j} \text{ и т. д.}$$

Здесь p_{x_j} , p_{y_j} , p_{z_j} — x -, y -, z -компоненты импульса j -й частицы соответственно. Основываясь на этих соотношениях, можно ввести понятие обобщенного импульса как величины, равной $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$. Каждой обобщенной координате q_j соответствует обобщенный импульс $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$; p_j также называют каноническим импульсом. Запишем (52.7) в форме

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + Q_j^d. \quad (53.7)$$

Из (53.7) следует

Теорема. Если от какой-либо обобщенной координаты q_k функция Лагранжа механической системы не зависит, а обобщенная сила $Q_k^d = 0$, то обобщенный импульс p_k является интегралом движения (т. е. сохраняется). Координата q_k в этом случае называется циклической.

Доказательство теоремы тривиально. В самом деле, если условия теоремы выполнены, то

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \text{ и } p_k(t) = p_k(t_0).$$

Обобщенный импульс является, очевидно, линейной неоднородной формой обобщенных скоростей. Действительно,

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j - U_j.$$

Динамические уравнения (52.7) позволяют ввести понятие еще одной важной физической величины — обобщенную энергию механической системы. Умножим обе части каждого из уравнений (52.7) на соответствующую скорость \dot{q}_j и после этого сложим все уравнения:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right\} = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (54.7)$$

Представим $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j$ в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \ddot{q}_j$$

и подставим результат в (54.7):

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right\} = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (55.7)$$

Далее, используя

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right),$$

запишем (55.7) в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right\} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (56.7)$$

Функция

$$\mathcal{H}((q), (\dot{q}), t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (57.7)$$

является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и, вообще говоря, времени. Она называется обобщенной энергией механической системы. Из (56.7) следует

Теорема. Если функция Лагранжа механической системы явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют, то обобщенная энергия является интегралом движения.

Действительно, при этих условиях из (56.7) получаем

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad \mathcal{H}((q), (\dot{q}), t) = \mathcal{H}((q_0), (\dot{q}_0), t_0). \quad (58.7)$$

Заметим, что условия существования законов сохранения механической и обобщенной энергий в общем случае не совпадают. Так, для сохранения E необходимо, чтобы связи были бы стационарными: $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$, $i=1, 2, \dots, N$. Условия сохранения \mathcal{H} менее жесткие. Таким образом, обобщенная энергия является фактически еще одним интегралом движения (при выполнении условий теоремы), который может быть использован при решении конкретных задач.

Чтобы лучше понять различие между E и \mathcal{H} , установим структуру \mathcal{H} . Согласно (50.7) и (57.7) имеем

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial U^{(1)}}{\partial q_j} \dot{q}_j - T^{(2)} - T^{(1)} - T^{(0)} + U^{(1)} + U^{(0)} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)} = \mathcal{H} \quad (59.7)$$

Сравнивая (51.7) с (59.7), видим, что \mathcal{H} и E совпадают только в том случае, если $T^{(1)} = T^{(0)} = 0$, т. е. при условии, что все $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$. Эти условия выполняются, если все связи, наложенные на систему, стационарны.

Пример. Функция Лагранжа вращающейся рамки. Система, изображенная на рис. 1.7, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси; нижняя точка рамки может двигаться только вдоль вертикальной оси. Напряженность поля тяжести равна $(0, 0, -g)$. Все стержни жесткие и невесомые.

Уравнения связей:

$$f_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l^2 = 0,$$

$$f_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - l^2 = 0,$$

$$f_3 = \arctg \frac{y_1}{x_1} - \omega t = 0,$$

$$f_4 = \arctg \frac{y_2}{x_2} - \omega t = 0, \quad f_5 = z_1 - z_2 = 0,$$

$$f_6 = x_3 = 0, \quad f_7 = y_3 = 0, \quad f_8 = z_3 - 2z_1 = 0.$$

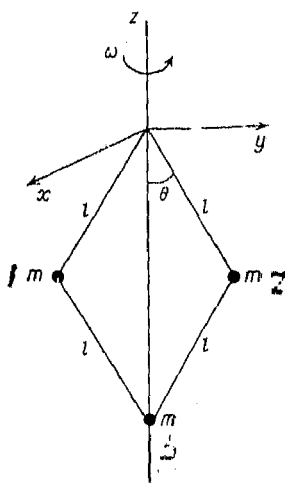


Рис. 1.7

Число независимых координат равно единице, так как $3N - 8$ при $N = 3$ равно 1. В качестве независимой (обобщенной) координаты выберем угол θ . Нетрудно проверить, что тогда

$$z_1 = z_2 = -l \cos \theta, \quad z_3 = -2l \cos \theta.$$

и уравнения связей удовлетворяются тождественно. Выразим $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ через обобщенную координату и обобщенную скорость

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = l\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{z}_3 = 2l\dot{\theta} \sin \theta.$$

Найдем функцию Лагранжа

$$T = ml^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta,$$

$$T = T^{(2)} + T^{(0)}, \quad U = -4mgl \cos \theta, \quad U = U^{(0)},$$

$$\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = l^2 \sin^2 \theta, \quad \rho_2^2 = l^2 \sin^2 \theta,$$

$$\mathcal{L} = T^{(2)} + T^{(0)} - U^{(0)} = ml^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta + 4mgl \cos \theta,$$

Так как $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, сохраняется обобщенная энергия

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{H}_0.$$

Функцию \mathcal{H} получим из формулы

$$\mathcal{H} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)} = ml^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 - ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta - 4mgl \cos \theta.$$

Равенство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ представляет собой первый интеграл движения.

В данном примере \mathcal{H} имеет смысл механической энергии точек в системе отсчета S' , жестко связанной с рамкой. Чтобы показать это, помимо системы отсчета S с неподвижными осями $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ введем систему отсчета S' , орт \mathbf{n}_z' которой направим по оси вращения, орт \mathbf{n}_y' — в плоскости, а орт \mathbf{n}_x' — перпендикулярно плоскости рамки. Часть потенциальной энергии системы точек, которая связана с силами инерции, в неинерциальной системе отсчета S' , движение которой относительно инерциальной системы отсчета S задано с помощью функций времени — $\mathbf{W}(t)$ — ускорения начала системы S' и $\omega(t)$ — угловой скорости вращения S' — определяется формулой (см., например: Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. Изд-во МГУ, 1974)

$$U_h = \tilde{m} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{R}') - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\omega r'_i]^2.$$

Здесь $\tilde{m} = \sum_{i=1}^N m_i$, \mathbf{R}' — радиус-вектор центра масс в S' , r'_i — радиус-вектор i -й точки в S' . В рассматриваемом нами случае $\mathbf{W} = 0$, $\omega(t) = (0, 0, \omega)$,

$$\mathbf{r}'_1 = (0, l \sin \theta, -l \cos \theta), \mathbf{r}'_2 = (0, -l \sin \theta, -l \cos \theta),$$

$$\mathbf{r}'_3 = (0, 0, -2l \cos \theta),$$

поэтому $U_h = -m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta$. Эта часть потенциальной энергии определяет центробежные силы, действующие на точки в S' . Заметим, что U_h добавляется к потенциальной энергии частиц, обусловленной действием внешних сил и силами взаимодействия точек системы.

Пример. Заряженная частица в электромагнитном поле.

Построить лагранжиан заряда e массы m в электромагнитном поле, описываемом скалярным φ и векторным \mathbf{A} потенциалами. Найти обобщенную энергию. Показать, что уравнения Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{e} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}], \quad \Rightarrow$$

где $\mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$, $\mathbf{H} = [\nabla\mathbf{A}]$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно.

В качестве обобщенных координат будем использовать декартовы координаты x, y, z . Тогда

$$T \equiv T^{(2)} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}, \quad T^{(1)} = T^{(0)} = 0, \quad U = -\frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + e\varphi,$$

а функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = T^{(2)} - U^{(1)} - U^{(0)} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - e\varphi.$$

Из (59.7) следует, что обобщенная энергия заряда в данном случае

$$\mathcal{H} = T^{(2)} + U^{(0)} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + e\varphi$$

имеет смысл механической энергии заряда. Очевидно, \mathcal{H} можно также записать в виде

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) - \mathcal{L}.$$

Уравнения Лагранжа в векторной форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} = 0$. Выше было показано, что (см. (40.7) — (44.7))

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = e\mathbf{e} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}],$$

и, значит, уравнения Лагранжа окончательно приобретают вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{e} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}].$$

В частности, если поля однородны и постоянны, то векторный и скалярный потенциалы можно, например, задать как

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{r}], \quad \varphi = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}),$$

где \mathbf{e} и \mathbf{H} — постоянные векторы, не зависящие от координат.

7.8. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО

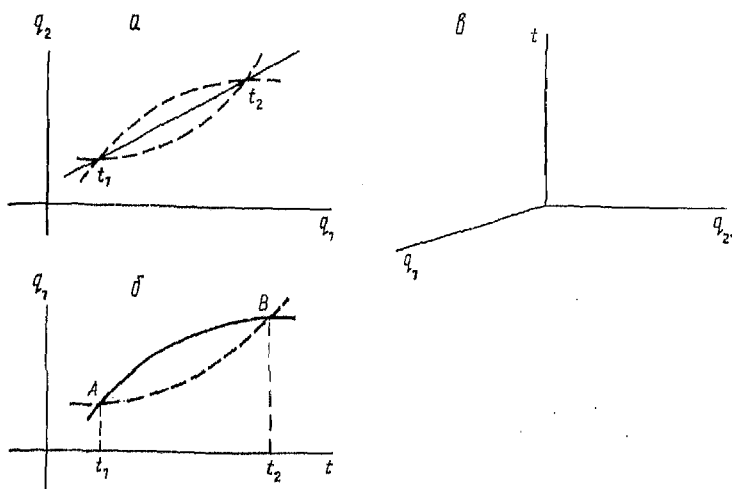
Идея, которая положена в основу всех интегральных и некоторых дифференциальных принципов, заключается в положении, что реальное движение механической системы сообщает экстремальность некоторой физической величине. Для математической формулировки этого положения необходимо, как и ранее, ввести в рассмотрение наряду с реальным движением совокупность мыслимых движений, подчинив их вполне определенным требованиям.

Формулировка интегральных принципов проводится в конфигурационном пространстве. Напомним, что для системы, обладающей s степенями свободы, обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_s , определяющие конфигурацию системы в момент времени t , рассматриваются как декартовы координаты в соответствующем s -мерном пространстве, которое и является конфигурационным пространством. С течением времени состояние механической системы изменяется и точка, изображающая эту систему, описывает некоторую кривую. Движение системы удобно рассматривать как движение изображающей точки вдоль этой кривой. Время t при таком рассмотрении является параметром, а каждой точке траектории будет соответствовать одно или несколько значений t .

Если нас интересует положение системы на конфигурационной траектории в каждый момент t , то нужно добавить еще одну ось (t). Тогда мы получим «многомерный график» движения рассматриваемой нами системы. Можно также изучать проекции многомерного графика на определенные плоскости, скажем tq_1 (рис. 2.7). На рисунке A, B являются проекциями изображающей точки в моменты t_1 и t_2 соответственно, сплошной линией изображено реальное, штриховой — одно из мыслимых движений.

Интегральный принцип — это утверждение о том, как осуществляется реальное движение системы за конечный (не бесконечно малый!) промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Тем, что было с системой до момента времени t_1 , мы не интересуемся. Но коль скоро начальный и конечный моменты времени фиксированы, считается, что механическая система при всех мыслимых движениях в момент времени t_1 проходит через точку A , в момент t_2 — B ; эти точки соответствуют начальному и конечному положениям системы в ее реальном движении.

Наиболее общая формулировка положения о движении механических систем содержится в так называемом принципе наименьшего действия (его называют также принципом Гамильтона—Остроградского):



Реальное движение механической системы в промежутке времени от t_1 до t_2 таково, что при этом интеграл, называемый функцией действия S и равный

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \quad (60.7)$$

где $\mathcal{L} = T - U$ — лагранжиан данной механической системы, имеет экстремум (минимум). Переменная t при этом не варьируется.

Иными словами, при реальном движении должна быть равна нулю вариация действия

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0. \quad (61.7)$$

при условии, что все конфигурационные траектории в моменты времени t_1 и t_2 проходят через начальную и конечную точки реального движения, т. е.

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (62.7)$$

Этот принцип, в отличие от дифференциального принципа Д'Аламбера, является интегральным в том смысле, что он содержит утверждение о движении системы в целом за конечный промежуток времени Δt . Фактически из него следуют уравне-

ния Лагранжа, тем самым из принципа наименьшего действия, можно сказать, получается вся динамика механической системы.

Пусть функции $q_j(t)$, $j=1, 2, \dots, s$, описывают реальное движение, т. е. $q_j(t)$ — те функции, для которых S имеет минимум. Рассмотрим совокупность функций $q_j(t) + \delta q_j(t)$, где $\delta q_j(t)$ — вариации функций $q_j(t)$, которые предполагаются малыми по сравнению с $q_j(t)$ во всем интервале времени от t_1 до t_2 . Кроме того, все $\delta q_j(t)$ удовлетворяют соотношениям (62.7). Вычислим так называемую первую вариацию S , имея в виду, что функция Лагранжа может зависеть от обобщенных координат q_j , обобщенных скоростей \dot{q}_j , $j=1, 2, \dots, s$, и времени t :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}((q), (\dot{q}), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt.$$

Поскольку $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$, второй член в δS можно проинтегрировать по частям и получить

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

В силу условий (62.7) сумма

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

исчезает, а остающийся интеграл будет равен нулю при произвольных значениях δq_j только тогда, когда каждый член суммы подынтегрального выражения обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (63.7)$$

Полезно помнить, что из решения задачи на экстремум функции получается система конечных уравнений, из которых находится точка, в которой функция достигает экстремального значения. В данном случае мы имеем дело с функционалом, решение задачи на экстремум которого дает систему дифференциальных уравнений 2-го порядка. Из этих уравнений находится линия в конфигурационном пространстве, задаваемая функциями $q_j(t)$, на которой функционал достигает минимума. Линию эту называют экстремалью.

Поскольку задача построения той или иной механической модели состоит в составлении уравнений движения, мы видим, что фактически динамика системы определяется одной функцией — лагранжианом, так как именно эта функция решает поставленную задачу. Таким образом, лагранжиан системы является интересным физическим объектом, изучение которого необходимо в связи с задачами динамики. В частности, из принципа наименьшего действия видно, что функция \mathcal{L} определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени. Это нужно понимать так: системе, определяемой ее уравнениями движения, соответствует не одна функция Лагранжа \mathcal{L} . Действительно, пусть имеется \mathcal{L}' , связанная с \mathcal{L} соотношением

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F(t, q_1, \dots, q_s). \quad (64.7)$$

Значит,

$$S = S' - F(t, q_1, \dots, q_s) \Big|_{t_1}^{t_2},$$

а

$$\delta S = \delta S' - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \Big|_{t=t_2} \delta q_j(t_2) - \frac{\partial F}{\partial q_j} \Big|_{t=t_1} \delta q_j(t_1) \right).$$

Но, так как $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$,

$$\delta S = \delta S'$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа, получаемые с помощью функций \mathcal{L} и \mathcal{L}' , одни и те же. Неоднозначность определения функции Лагранжа вида (64.7) не сказывается на уравнениях движения, а каждая \mathcal{L}' из класса (64.7) решает задачу построения динамики системы однозначно.

Важным свойством системы уравнений Лагранжа является их ковариантность. Это означает, что уравнения Лагранжа сохраняют свой вид при точечных преобразованиях обобщенных координат *)

$$q'_j = q'_j(t, q_1, \dots, q_s), \quad j = 1, \dots, s, \quad (65.7)$$

т. е. при пользовании обобщенными координатами q'_j уравнения Лагранжа будут иметь тот же вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_j} = 0, \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L}(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}'), t),$$

*) Заметим, что точечные преобразования независимых координат, в формулы которых явно входит время, можно рассматривать и как преобразования между координатами в различных системах отсчета, в том числе и неинерциальных. Поэтому уравнения движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета можно записать в форме уравнений Лагранжа.

что и при использовании обобщенных координат q_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t).$$

Докажем прямо, что уравнения Лагранжа ковариантны относительно преобразования (65.7). Построим \mathcal{L}' :

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t)$$

и производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} &= \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}'_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} \right) = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались очевидным соотношением

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_k}{\partial q'_j}.$$

Учитывая, что $\frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}'_j}$, найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right] = 0, \quad j=1, \dots, s,$$

откуда следует, что если

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, \dots, s,$$

то и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_j} = 0, \quad j=1, \dots, s.$$

Ранее уравнения Лагранжа в обобщенных координатах были выведены из принципа Д'Аламбера или, как его также называют, динамического принципа виртуальных перемещений, который является дифференциальным принципом в том смысле, что в нем представлено суждение о движении системы в каждый момент времени t . Можно показать, что между принципом Д'Аламбера и принципом наименьшего действия, который является интегральным принципом, существует однозначная связь.

Покажем это на примере консервативных систем. Динамический принцип виртуальных перемещений утверждает, что в каждый момент времени t должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} \delta q_j = 0.$$

Умножим его на dt и проинтегрируем по t от t_1 до t_2 . Тогда, если $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$, мы получим

$$\delta S = 0.$$

А это и есть принцип наименьшего действия.

Глава 8

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С s СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

8.1. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ

При рассмотрении задачи о собственных линейных колебаниях механических систем будем предполагать, что:

1. Связи, наложенные на систему, стационарны, голономны, идеальны, а внешние силы от времени не зависят и являются потенциальными *).

2. Система обладает положением устойчивого равновесия. Поскольку мы будем рассматривать линейные (малые) колебания, встает задача линеаризации уравнений Лагранжа в окрестности положения устойчивого равновесия. Значит, нужно найти такие положения. С этого и начинается исследование собственных колебаний механической системы. В положении равновесия все обобщенные силы должны быть равны нулю, т. е.

$$\tilde{F}_1|_{q_j=q_{j\text{eq}}}=0, \tilde{F}_2|_{q_j=q_{j\text{eq}}}=0, \dots, \tilde{F}_s|_{q_j=q_{j\text{eq}}}=0. \quad (1.8)$$

Зная $F_j((q))$, из (1.8) находим $q_{j\text{eq}}$. Если обобщенные силы зависят от q_j и \dot{q}_j , то для нахождения положений равновесия системы нужно в (1.8) подставить значения $\dot{q}_j=0$ и решить полученные уравнения относительно q_1, \dots, q_s .

Мы рассматриваем системы, на точки которой действуют потенциальные силы, поэтому уравнения (1.8) принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_s}=0, \quad (2.8)$$

где U — потенциальная энергия системы как функция обобщенных координат. Решения $q_{1\text{eq}}, \dots, q_{s\text{eq}}$ этих уравнений определяют те значения координат, при которых система может нахо-

*) Говоря точнее, здесь мы имеем в виду и механические системы, лагранжианы которых явно от времени не зависят, но допускают структуру

$$\mathcal{L} = T^{(2)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) + T^{(0)}((q)) - U^{(0)}((q)).$$

Если $T^{(0)} \neq 0$, то под потенциальной энергией системы, зависящей только от обобщенных координат q_1, \dots, q_s , мы будем понимать величину $U(q_1, \dots, q_s) = U^{(0)} - T^{(0)}$, т. е. член $T^{(0)}$ в функции Лагранжа мы формально относим к потенциальной энергии. В связи с последним замечанием см. пример к п. 7.7.

даться в равновесии; этих положений может быть несколько, причем равновесие в некоторых из них может быть устойчивым, а в некоторых — неустойчивым. Устойчивость равновесия удобно рассматривать в фазовом $2s$ -мерном пространстве (пространство состояний). Механическое состояние в нем представляется в виде точки M $2s$ -мерного пространства, по осям которого откладываются обобщенные координаты q_1, \dots, q_s и обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$. Точку M называют изображающей точкой.

Так как устойчивость равновесия рассматривается относительно обобщенных координат и скоростей, то уравнения Лагранжа формально удобно переписать в виде системы $2s$ уравнений 1-го порядка по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.8)$$

Легко видеть, что (3.8) является системой уравнений 1-го порядка по времени относительно функций q_j и ξ_j . Уравнениями (3.8) определяется некоторое движение (состояние) системы $q_j^0(t)$, $\xi_j^0(t)$, подлежащее исследованию на устойчивость; оно называется невозмущенным движением. Решения $q_j^0(t)$ и $\xi_j^0(t)$ являются частными решениями дифференциальных уравнений (3.8), удовлетворяющими начальным условиям при $t=t_0$:

$$q_1^0|_{t=t_0} = q_1^0(t_0), \dots, q_s^0|_{t=t_0} = q_s^0(t_0), \xi_1^0|_{t=t_0} = \xi_1^0(t_0) \dots \quad (4.8)$$

Если теперь изменить начальные условия, придав начальным значениям переменных q_j и ξ_j небольшие по модулю приращения при $t=t_0$, т. е. переходя к начальным условиям

$$q_1|_{t=t_0} = q_1^0(t_0) + \delta_{q_1}, \dots, q_s|_{t=t_0} = q_s^0(t_0) + \delta_{q_s}, \\ \xi_1|_{t=t_0} = \xi_1^0(t_0) + \delta_{\xi_1}, \dots, \xi_s|_{t=t_0} = \xi_s^0(t_0) + \delta_{\xi_s}, \quad (5.8)$$

то соответствующее этим условиям движение называют возмущенным движением, а величины $\delta_{q_1}, \dots, \delta_{q_s}, \delta_{\xi_1}, \dots, \delta_{\xi_s}$ — возмущениями. Возмущенное движение удобно характеризовать с помощью отклонений, или вариаций, величин

$$x_j = q_j - q_j^0, \quad y_j = \xi_j - \xi_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (6.8)$$

при этом если все отклонения равны нулю, то возмущенное движение $q_j(t)$ и $\xi_j(t)$ будет совпадать с невозмущенным движением $q_j^0(t)$, $\xi_j^0(t)$. Мы видим, что невозмущенному движению отвечают нулевые значения переменных x_j и y_j , а в фазовом пространстве ему отвечает неподвижная точка $x_j = y_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Заметим, что уравнения (3.8) будут уравнениями возмущенного движения, если считать, что в положении равновесия по-

тенциальная энергия системы равна нулю, а все обобщенные координаты q_j отсчитывать от этого положения, т. е. в формулах (6.8) нужно положить все q_j^0 равными нулю.

Примем далее следующее

Определение Ляпунова. Пусть для сколь угодно малых (заданных наперед) положительных величин $\varepsilon_{(q)}$, $\varepsilon_{(\dot{q})}$ можно найти такие положительные величины $\delta_{(q)}$, $\delta_{(\dot{q})}$, что для любого $t > t_0$ все $|x_j| < \varepsilon_{q_j}$, $|y_j| < \varepsilon_{\dot{q}_j}$, если только при $t=t_0$ все $|x_j(t_0)| < \delta_{q_j}$, $|y_j(t_0)| < \delta_{\dot{q}_j}$, то невозмущенное состояние движения $q_i^0(t) \equiv q_{ieq}$, $\dot{q}_i(t) = 0$ устойчиво, а положение q_{ieq} называют положением устойчивого равновесия.

Следующая теорема Лагранжа определяет достаточные условия равновесия консервативных систем.

Положение равновесия консервативной голономной системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум.

Определение. Минимум потенциальной энергии U называют изолированным, если в некоторой окрестности положения равновесия Δ_j , в которой U минимальна, нет других экстремумов. Иначе говоря, минимум будет изолированным, если при $|q_j - q_{jeq}| < \Delta_j$

$$U((q)) \geq U((q_{eq})),$$

причем знак равенства будет, только если все $q_j = q_{jeq}$. Заметим, что положительные величины Δ_j определяют окрестность минимума в конфигурационном пространстве. Теорему Лагранжа впервые доказал Дирихле. Современное доказательство, данное А. М. Ляпуновым, вытекает непосредственно из его так называемого прямого метода^{*}). В этом методе основную роль играют некоторые вещественные однозначные и непрерывные функции $V(x, y) = V(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$, определяемые в области

$$\sum_{j=1}^s (x_j^2 + y_j^2) \leq C,$$

где C — постоянное положительное число. Начало отсчета выбирается в точке $x_j, y_j = 0, j = 1, \dots, s$, т. е. предполагается, что $V(0, 0) = 0$. Далее проводится классификация функций $V(x, y)$. Так, если всюду в области определения $V(x, y) \geq 0$ или $V(x, y) \leq 0$, то функция $V(x, y)$ называется знакопостоянной (положительной, если $V \geq 0$, или отрицательной, если $V \leq 0$). Если же знакопостоянная функция обращается в нуль только в том случае, когда все $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s$ равны нулю, то она называется знакоопределенной (определенно-положительной или опре-

^{*} Более детально с элементами теории устойчивости можно познакомиться в прекрасной работе Д. Р. Меркина «Введение в теорию устойчивости движения» (М.: Наука, 1987).

деленно-отрицательной соответственно). Функции, принимающие значения обоих знаков, называют знакопеременными функциями. Введенные так функции V , с помощью которых исследуются проблемы устойчивости движения, называют функциями Ляпунова.

Доказательство теоремы Лагранжа основывается на знаменитой теореме Ляпунова об устойчивости движения. Мы приводим последнюю без доказательства.

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Примеры.

Функция $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ — определено положительная (рис. 1.8). Функция $V(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ — знакопостоянная, так как в нуль она обращается не только в начале координат $x=y=0$, но и на прямой $x=y$ (рис. 2.8).

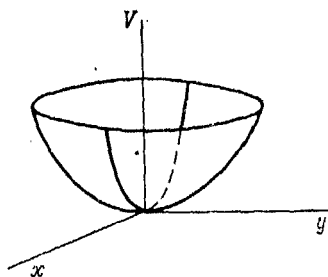


Рис. 1.8

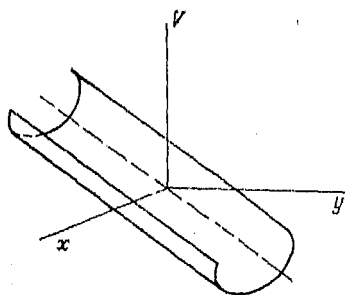


Рис. 2.8

Теперь нетрудно доказать теорему Лагранжа.

Отсчитывая q_i от q_{ieq} , а $U(q)$ от $U(q_{eq})$, нетрудно видеть, что в рассматриваемом положении потенциальная энергия равна нулю и имеет изолированный минимум по условию. Это означает, что в некоторой окрестности положения равновесия q_{ieq} потенциальная энергия U является определено-положительной функцией переменных q_i , а полная энергия

$$E = T + U \quad (7.8)$$

— определено-положительной функцией обобщенных координат и скоростей. Действительно, кинетическая энергия механической системы с голономными и стационарными связями содержит только форму $T^{(2)}$, которая является определено-положительной квадратичной формой обобщенных скоростей. Выберем E в качестве функций Ляпунова V . Из уравнений Лагранжа (3.8) следует, что $\dot{E} \equiv \dot{\mathcal{H}} = 0$, т. е. E — интеграл движения.

Значит, $\dot{V}=0$. Следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения, частным случаем которого является устойчивость равновесия. Теорема Лагранжа доказана.

8.2. СОБСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача о собственных линейных колебаниях механических систем по существу является задачей о движении вблизи устойчивого положения равновесия. В силу доказанных теорем такие движения будут устойчивыми. Выведем уравнения, которыми описываются линейные колебания механических систем с голономными, стационарными связями, предполагая, что внешние силы консервативны и не зависят от времени. Для таких систем $T=T^{(2)} \geq 0$. Разложим кинетическую и потенциальную энергии системы в окрестности точки q_{jeq} , ограничиваясь членами второго порядка малости по обобщенным координатам $q_j - q_{jeq}$ и обобщенным скоростям \dot{q}_j . В результате получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} ((q_{eq})) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (8.8)$$

$$U = U((q_{eq})) + \sum_{j=1}^s \left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{(q)=(q_{eq})} (q_j - q_{jeq}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{(q)=(q_{eq})} (q_j - q_{jeq})(q_k - q_{keq}). \quad (9.8)$$

Будем отсчитывать U от $U((q_{eq}))$ и учтем, что в положении равновесия все обобщенные силы обращаются в нуль:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{(q)=(q_{eq})} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (10.8)$$

Напомним, что эти уравнения определяют положения равновесия. Введя $x = q_j - q_{jeq}$, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} x_j x_k, \quad (11.8)$$

где

$$c_{jk} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{(q)=(q_{eq})}$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия U должна обладать изолированным минимумом.

Из линейной алгебры известно, что если коэффициенты c_{jk} удовлетворяют критерию Сильвестра

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad (12.8)$$

то U будет определено-положительной квадратичной формой переменных x_1, \dots, x_s в окрестности нуля, а значит, U имеет изолированный минимум в точке $q_{1eq}, q_{2eq}, \dots, q_{seq}$ и положение равновесия устойчиво. Заметим, что T — определено-положительная квадратичная форма переменных $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s$. Значит, матрицы коэффициентов a_{jk} удовлетворяют условиям

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kh} \end{vmatrix} > 0. \quad (13.8)$$

Построим функцию Лагранжа в окрестности начала координат фазового пространства, т. е. в окрестности точки $x_j=0, \dot{x}_j=0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} x_j x_k, \quad (14.8)$$

и составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{x}_k + c_{jk} x_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (15.8)$$

Мы видим, что движение системы с s степенями свободы около положения устойчивого равновесия определяется линейными однородными уравнениями с постоянными вещественными симметричными коэффициентами. Решение системы (15.8), как известно, следует искать в виде

$$x_k = C_k e^{\lambda t}, \quad (16.8)$$

где C_k — некоторые постоянные.

Подставляя (16.8) в (15.8), получим алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (17.8)$$

Нетривиальное, т. е. не равное нулю, решение $C_k \neq 0$ ($k=1, \dots, s$) этой системы существует только в том случае, если детерминант алгебраической системы (17.8) равен нулю, т. е.

$$\det (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk})_{j,k=1}^s = 0. \quad (18.8)$$

Это так называемое характеристическое уравнение, представляющее собой, очевидно, алгебраическое уравнение $2s$ -й степени относительно λ . Следовательно, в общем случае, оно имеет $2s$ различных корней λ_α . Корни λ_α называют собственными значениями характеристического уравнения.

Предположим, что все корни λ_α различны, т. е. что кратных корней нет. Соотношения между постоянными C_k^α *) определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k^\alpha = 0. \quad (19.8)$$

Величины C_k^α иногда называют «амплитудами», принадлежащими собственному значению λ_α . Общее решение x_k ($k=1, \dots, s$) имеет вид

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t}. \quad (20.8)$$

Знак реальной части Re здесь необходим, так как обобщенная координата x_k по определению величина вещественная.

Для механических консервативных систем, на которые наложены стационарные связи, каждый корень λ_α должен быть чисто мнимым, так как если бы все $\operatorname{Re} \lambda_\alpha$ ($\alpha=1, 2, \dots, 2s$) не равнялись бы нулю, то x_k и \dot{x}_k имели бы экспоненциально возрастающие и убывающие со временем множители, что привело бы к нарушению закона сохранения энергии. Таким образом, в этом случае собственные значения характеристического уравнения (18.8) таковы:

$$\operatorname{Re} \lambda_\alpha^\pm = 0, \lambda_\alpha^+ = i\omega_\alpha, \lambda_\alpha^- = -i\omega_\alpha, \quad \alpha=1, \dots, s. \quad (21.8)$$

Здесь λ_α перенумерованы от 1 до s , поскольку каждому номеру соответствует пара комплексно-сопряженных значений корня. Решения (20.8) теперь можно переписать в виде

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{ (C_k^\alpha)^+ e^{i\omega_\alpha t} + (C_k^\alpha)^- e^{-i\omega_\alpha t} \}. \quad (22.8)$$

Вещественные величины ω_α называют собственными частотами системы. Значения коэффициентов C_k^α , соответствующих λ_α^2 , определяются с помощью однородной системы.

Пусть, например, какой-то из коэффициентов C_k^α не равен нулю. Переобозначим номер k' , присвоив ему индекс s , и перенесем все члены $(a_{js}\lambda_\alpha^2 + c_{js}) C_s^\alpha$ в уравнениях (19.8) в правую сторону. В результате однородная система (19.8) станет неод-

*) Напомним, что C_k^α , вообще говоря, комплексные постоянные.

нородной системой уравнений относительно коэффициентов C_k^α , $k=1, \dots, s-1$. Ее решение известно из линейной алгебры:

$$C_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha C_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha}, \quad (23.8)$$

где Δ_k^α — алгебраическое дополнение к элементу k -го столбца любой строки характеристического детерминанта, взятого при значении $\lambda^2 = \lambda_\alpha^2$. Но так как «амплитуда» C_s^α не определена, введя $C_\alpha \equiv C_s^\alpha / \Delta_s^\alpha$, имеем $C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha$, $k=1, 2, \dots, s$, и

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{C_\alpha^+ \Delta_k(i\omega_\alpha) e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- \Delta_k(-i\omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t}\}. \quad (24.8)$$

Здесь C_α — постоянная величина.

Так как детерминант (18.8) и все Δ_k^α содержат только степени квадрата λ , которые являются вещественными величинами, то детерминант и все дополнения характеристического детерминанта Δ_k^α — вещественные величины, которые удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\Delta_k(i\omega_\alpha) = \Delta_k(-i\omega_\alpha). \quad (25.8)$$

Введем

$$\operatorname{Re}(C_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t}) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha). \quad (26.8)$$

С учетом этого общее решение x_k приобретает вид

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(\lambda_\alpha^2) a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(\lambda_\alpha^2) \Theta_\alpha, \quad (27.8)$$

где

$$\Theta_\alpha \equiv a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha). \quad (28.8)$$

Амплитуда простого гармонического колебания a_α и его начальная фаза β_α определяются начальными условиями, т. е. начальными значениями обобщенных координат $x_j(0)$ и обобщенных скоростей $\dot{x}_j(0)$. Отметим три важных свойства собственных линейных колебаний механических систем:

1. Общее решение, описываемое координатой x_k , представляет собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами системы ω_α . Это принцип суперпозиции.

2. Собственные частоты системы не зависят от начальных условий и определяются только механическими свойствами колебательной системы. Это свойство изохронности.

3. Общее решение x_k не содержит функций вида $\cos(p\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$, где $p > 1$ — целое число, т. е. не содержит гармоник, кратных собственным частотам системы. Это свойство, как и

первое свойство, есть следствие линейности дифференциальных уравнений.

Заметим, что x_k не является периодической функцией в общем случае, в то время как Θ_α — периодическая функция.

В конфигурационном пространстве x_1, \dots, x_s в случае несоизмеримых частот «траектория» представляет собой незамкнутую кривую. Если частоты соизмеримы, то «траектория» изображающей точки замкнута.

Мы видим также, что собственные частоты ω_α характеризуют движение системы в целом, а не изменение одной какой-то координаты x_k . Однако можно так задать начальные условия, чтобы все координаты гармонически изменялись бы со временем с одной из собственных частот системы. Действительно, амплитуды a_α и начальные фазы β_α определяются начальными условиями. Пусть начальные условия таковы, что все a_α , кроме a_τ , равны нулю. Тогда $x_k = a_\tau \Delta_k (\lambda_\tau^{-2}) \cos(\omega_\tau t + \beta_\tau)$, $k=1, 2, \dots, s$.

В общем случае изменение каждой из координат системы со временем представляет наложение s простых периодических колебаний $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты. А можно ли так выбрать обобщенные координаты, чтобы каждая из них совершала только одно гармоническое (простое) колебание?

Путь к решению этой задачи указывают соотношения (27.8). Рассмотрим их как систему s уравнений относительно s неизвестных величин Θ_α . Разрешим эту систему, выразив Θ_α через обобщенные координаты x_1, \dots, x_k , и выберем величины Θ_α в качестве новых обобщенных координат. Эти координаты называют нормальными (или главными), а соответствующие им простые гармонические колебания — нормальными (главными) колебаниями механической системы. Уравнения Лагранжа в координатах Θ_α выглядят особенно просто:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.8)$$

Мы видим, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на s независимых уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее зависимости от времени надо знать начальные значения только ее самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы кинематически и динамически.

Очевидно, функция Лагранжа системы, выраженная через нормальные координаты (и скорости) распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию *) с одной из собственных частот ω_α :

*) Одномерным колебанием называют колебание системы с одной степенью свободы.

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{a_{\alpha}}{2} \dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \frac{c_{\alpha}}{2} \Theta_{\alpha}^2 \right). \quad (30.8)$$

Отсюда видно, что введение нормальных координат равносильно одновременному приведению двух квадратичных форм (кинетической T и потенциальной U) к диагональному (или, как говорят, к каноническому) виду. Для консервативных систем с идеальными, голономными связями нормальные координаты можно ввести всегда, так как матрицы коэффициентов a_{jk} и c_{jk} в T и U таких систем удовлетворяют условиям следующей теоремы: *Если даны две вещественные симметрические матрицы A и C , причем матрица A определено-положительная, то существует невырожденная матрица B такая, что обе матрицы с ее помощью преобразуются к диагональному виду.*

Нулевая частота. Пусть одна из собственных частот $\omega_{\beta} = 0$. Соответствующее решение в нормальных координатах тогда имеет вид $\Theta_{\beta} = \dot{\Theta}_{\beta 0} t + \Theta_{\beta 0}$. С физической точки зрения такое решение возникает, если потенциальная энергия системы достигает минимума не в одной точке конфигурационного пространства, а в некоторой области, т. е. когда потенциальная энергия не имеет изолированного минимума.

Кратные частоты. Общий вид решений x_k и Θ_{α} остается таким же (с таким же числом s членов) с той лишь разницей, что коэффициенты Δ_R^{-1} , соответствующие кратному корню λ_{γ} , уже не являются алгебраическими дополнениями характеристического детерминанта и должны быть прямо определены из уравнений (19.8). Каждой кратной (или, как говорят, вырожденной) частоте ω_{γ} отвечает столько нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих координат не однозначен. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковой ω_{γ}) входят в виде одинаково преобразующихся сумм $\sum \dot{\Theta}_{\alpha}^2$ и $\sum \Theta_{\alpha}^2$, то их можно подвергнуть любому линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

Пример. Доказать, что для консервативных систем с голономными стационарными связями все корни λ_{α}^2 отрицательны.

Умножим каждое из уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0, \quad j=1, \dots, s \quad (31.8)$$

на C_j и сложим все полученные соотношения:

$$\sum_{k,j=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k C_j = 0. \quad (32.8)$$

Подставим в (32.8) λ_α^2 вместо λ^2 и возьмем соответствующие амплитуды C_k^α, C_j^α . Тогда

$$\sum_{j,k=1}^s (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk}) \Delta_h(\lambda_\alpha^2) \Delta_j(\lambda_\alpha^2) C_\alpha^2 = 0, \quad (33.8)$$

или

$$\lambda_\alpha^2 = - \frac{\sum_{j,k=1}^s c_{jk} \Delta_j(\lambda_\alpha^2) \Delta_h(\lambda_\alpha^2)}{\sum_{j,k=1}^s a_{jk} \Delta_j(\lambda_\alpha^2) \Delta_h(\lambda_\alpha^2)}. \quad (34.8)$$

Здесь числитель и знаменатель всегда положительны для вещественных λ_α^2 . Это следует из того, что обе однородные квадратичные формы (T и U) являются определенно-положительными, т. е. они положительны при всех вещественных значениях обоих аргументов ((q) и (\dot{q}) соответственно). В полученной нами формуле стоят именно так составленные квадратичные формы, так как $\Delta_h(\lambda_\alpha^2), \Delta_j(\lambda_\alpha^2)$ всегда вещественны как определители, все элементы которых вещественны.

8.3. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК

Рассмотрим собственные колебания системы N частиц, соединенных одинаковыми пружинками жесткости κ и длины l в ненапряженном состоянии, которые могут двигаться по кольцу радиуса R . Масса каждой из частиц равна m . Будем считать, что силы, действующие на частицы со стороны пружин, пропорциональны удлинению пружин в первой степени (рис. 3.8). Заметим, что такая цепочка представляет собой простейшую модель, используемую в теории твердого тела.

Функция Лагранжа системы

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 - \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1})^2, \quad (35.8)$$

где x_n — смещение n -й частицы из положения равновесия: $x_n = R(\varphi_n - \varphi_{n,eq})$, причем $x_1 = x_{N+1}$. Из (35.8) получаем уравнения Лагранжа

$$m\ddot{x}_n + \kappa(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (36.8)$$

при дополнительном условии $x_0 = x_N$. Решение удобно искать в виде

$$x_n = C e^{i(\omega t - n\varphi)}. \quad (37.8)$$

Подставляя x_n в уравнения Лагранжа, получаем уравнение

$$\omega^2 = 4 \frac{\kappa}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad (38.8)$$

которым определяется связь частоты с разностью фаз колебаний ψ соседних частиц. Решение (37.8) представляет собой бегущую волну с волновым вектором $k = \psi/l$, так как $n\psi = nkl = = kx_n$, где $l = 2\pi R/N$ — равновесная длина одной пружинки, $x_n = nl$ — координата положения равновесия n -й частицы, отсчи-

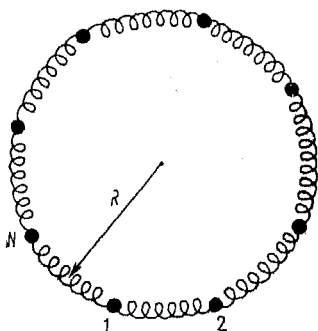


Рис. 3.8

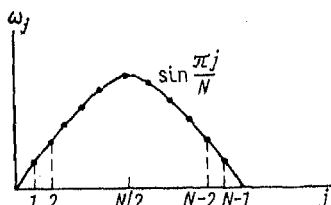


Рис. 4.8

тываемая от N -й частицы в одном и том же направлении. Из условия $x_1 = x_{N+1}$ определим возможные значения частот (как говорят, спектр частот):

$$e^{-iN\psi} = 1, \quad \psi N = 2\pi j, \quad \psi_j = \frac{2\pi j}{N},$$

где $j=0, 1, 2, \dots, N-1$. Поэтому имеем N частот:

$$\omega_j = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{\pi j}{N}. \quad (39.8)$$

Очевидно, частоты ω_j и ω_{N-j} совпадают, а волновые векторы ψ_j и ψ_{N-j} связаны соотношением

$$\psi_j = 2\pi - \psi_{N-j}, \quad (40.8)$$

т. е. волновые векторы отличаются знаком. Одна из собственных частот ω_0 равна нулю. Все пружины в этом случае ненапряжены, а все частицы движутся по кольцу с постоянной скоростью, т. е. движение представляет трансляцию всей системы как целого. Все возможные решения имеют вид

$$x_n^{(j)} = \text{Re } C_j e^{i(\omega_j t - n\psi_j)}. \quad (41.8)$$

Они описывают бегущие по кольцу волны. Из (40.8) и (41.8)

следует, что решения ψ_j и ψ_{N-j} (с двукратным вырождением частот ω_j и ω_{N-j}) соответствуют волнам, распространяющимся в разные стороны. В результате наложения таких волн с равными амплитудами получается стоячая волна

$$x_n^{(j)} \pm x_n^{(N-j)} = 2|A_j| \begin{cases} \cos n\psi_j \cos(\omega_j t + \beta_j), \\ \sin n\psi_j \sin(\omega_j t + \beta_j), \end{cases} \quad (42.8)$$

которая описывает нормальные колебания:

$$\Theta_{j1} = 2|A_j| \cos(\omega_j t + \beta_j), \quad \Theta_{j2} = 2|A_j| \sin(\omega_j t + \beta_j).$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, причем предполагается, что N нечетное. Для N четных решение (41.8) при $j = N/2$ есть стоячая волна, а частота $\omega_{N/2}$ очевидно невырожденная.

Для нечетных N решение x_n , записанное в нормальной форме, имеет вид

$$x_n = \sum_{j=1}^{(N-1)/2} (\Theta_{j1} \cos n\psi_j + \Theta_{j2} \sin n\psi_j) + \Theta_0, \quad (43.8)$$

где Θ_0 — нормальная координата, описывающая «колебание» с нулевой частотой.

Нетрудно показать, что функция Лагранжа (35.8) подстановкой (43.8) диагонализуется:

$$\mathcal{L} = \frac{Nm}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} [\dot{\Theta}_{j1}^2 + \dot{\Theta}_{j2}^2 - \omega_j^2 (\Theta_{j1}^2 + \Theta_{j2}^2)] + \dot{\Theta}_0^2 \right\}. \quad (44.8)$$

Здесь мы воспользовались выражениями известных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sin n\psi_j &= \sum_{n=1}^N \cos n\psi_j = 0, \\ \sum_{n=1}^N \sin^2 n\psi_j &= \sum_{n=1}^N \cos^2 n\psi_j = \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Спектр собственных частот ω_j представляет собой совокупность дискретных точек на синусоиде (рис. 4.8). Этот спектр частот называют акустическим. Иногда удобно изображать $|\omega_j|$, как на рис. 5.8.

8.4. КОЛЕБАНИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ

Кинетическая энергия системы (рис. 6.8)

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Потенциальная энергия системы вблизи положения устойчивого равновесия, которое, очевидно, определяется значениями обобщенных координат $\varphi_{1eq} = \varphi_{2eq} = 0$:

$$U = \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\kappa l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

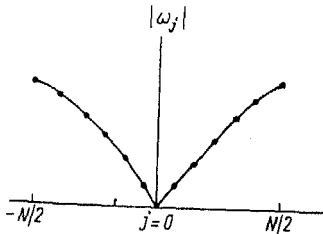


Рис. 5.8

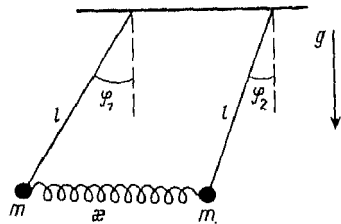


Рис. 6.8

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\kappa l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (45.8)$$

Уравнения Лагранжа

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - \tilde{\omega}_0^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 + \tilde{\omega}_0^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Здесь $\omega_0^2 = g/l$, $\tilde{\omega}_0^2 = \kappa/m$. Решение ищем в виде $\varphi_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $\varphi_2 = C_2 e^{\lambda t}$.

Уравнения для амплитуд

$$C_1 (\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2) - \tilde{\omega}_0^2 C_2 = 0,$$

$$-\tilde{\omega}_0^2 C_1 + (\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2) C_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 & -\tilde{\omega}_0^2 \\ -\tilde{\omega}_0^2 & \lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \pm \tilde{\omega}_0^2$, откуда

$$\lambda_1^2 = -\omega_0^2, \quad \lambda_2^2 = -(\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2).$$

Следовательно, собственные частоты колебаний

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2}.$$

Найдем теперь алгебраические дополнения $\Delta_k(\lambda_\alpha^2)$. Для этого

нужно вычеркнуть в характеристическом детерминанте последнюю строку, k -й столбец и умножить оставшийся определитель на $(-1)^{s+k}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda_1^2) &= \tilde{\omega}_0^2, & \Delta_1(\lambda_2^2) &= \tilde{\omega}_0^2, \\ \Delta_2(\lambda_1^2) &= \tilde{\omega}_0^2, & \Delta_2(\lambda_2^2) &= -\tilde{\omega}_0^2. \end{aligned} \quad (46.8)$$

Решения

$$\varphi_1 = \tilde{\omega}_0^2 (\Theta_1 + \Theta_2), \quad \varphi_2 = \tilde{\omega}_0^2 (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (47.8)$$

где $\Theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1)$, $\Theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2)$ — нормальные координаты. Амплитуды простых колебаний a_α и начальные фазы β_α определяются начальными условиями. Покажем, что всегда можно так задать начальные условия, что все координаты (φ_1, φ_2) будут гармонически изменяться со временем с одной из собственных частот. Пусть $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Тогда

$$\varphi_0 = \tilde{\omega}_0^2 (a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2), \quad 0 = \tilde{\omega}_0^2 (a_1 \omega_1 \sin \beta_1 + a_2 \omega_2 \sin \beta_2),$$

$$\varphi_0 = \tilde{\omega}_0^2 (a_1 \cos \beta_1 - a_2 \cos \beta_2), \quad 0 = \tilde{\omega}_0^2 (a_1 \omega_1 \sin \beta_1 - a_2 \omega_2 \sin \beta_2).$$

Отсюда $a_1 = \varphi_0 / \tilde{\omega}_0^2$, $a_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ и решение

$$\varphi_{1,2} = \tilde{\omega}_0^2 \Theta_1, \quad \Theta_1 = a_1 \cos \omega_1 t.$$

Пусть теперь $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Тогда $a_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $a_2 = \varphi_0 / \tilde{\omega}_0^2$ и решение

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \tilde{\omega}_0^2 \Theta_2, \quad \Theta_2 = a_2 \cos \omega_2 t.$$

Очевидна роль симметрии начальных условий.

Рассмотрим случай слабой связи $\omega_0^2 \gg \tilde{\omega}_0^2$. При этом условии имеем $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 \cong \omega_0 + \frac{\tilde{\omega}_0^2}{\omega_0} = \omega_0 + \varepsilon$, причем $\varepsilon \ll \omega_0$. Запишем решение в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \tilde{\omega}_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1 e^{i\beta_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a_2 e^{i\varepsilon t + i\beta_2} \right\} e^{i\omega_0 t} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} A_1 e^{i\gamma_1} \\ A_2 e^{i\gamma_2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t}, \quad (48.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \tilde{\omega}_0^2 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \pm 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon t + \beta_2 - \beta_1)}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{1,2} &= \frac{a_1 \sin \beta_1 \pm a_2 \sin(\varepsilon t + \beta_2)}{a_1 \cos \beta_1 \pm a_2 \cos(\varepsilon t + \beta_2)}. \end{aligned} \quad (49.8)$$

Амплитуды $A_{1,2}$ медленно изменяются с частотой $\varepsilon \ll \omega_0$ в пределах $\tilde{\omega}_0^2 |a_1 - a_2| \leq A_{1,2} \leq \tilde{\omega}_0^2 |a_1 + a_2|$. Это явление называют биением. Проиллюстрируем этот эффект при следующих начальных

условиях: $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Тогда $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $a_1 = a_2 = \varphi_0/2\omega_0^2$ и решение

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_0 t + \cos (\omega_0 + \varepsilon) t) = \left(\varphi_0 \cos \frac{\varepsilon t}{2} \right) \cos \omega_0 t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_0 t - \cos (\omega_0 + \varepsilon) t) = \left(\varphi_0 \sin \frac{\varepsilon t}{2} \right) \sin \omega_0 t.$$

Амплитуды колебаний являются медленно меняющимися функциями времени, а решения представляют собой гармонические колебания с частотой ω_0 , но периодически меняющейся амплитудой, период изменения которой $T_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$. В начальный момент амплитуда первого маятника максимальна (она равна φ_0), а амплитуда второго маятника равна нулю. Затем амплитуда колебаний первого маятника убывает и через время $t = T_1/4$ обращается в нуль. Амплитуда колебаний второго маятника возрастает, достигая максимального значения φ_0 при $t = T_1/4$. Далее процесс повторяется в обратном порядке, т. е. происходит непрерывный обмен энергией колебаний между маятниками. При $T_1 \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ амплитуды колебаний маятников

$A_{1,2}(t)$ в течение одного периода $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ практически неизменны. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период T) значения квадратов обобщенных координат и скоростей для каждого из связанных маятников в отдельности, и в частности, можно определить «средние механические энергии» для каждого маятника согласно формулам

$$E_1(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{m\dot{\varphi}_1^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \omega_0^2 \varphi_1^2) dt \cong \frac{E}{2} (1 + \cos \varepsilon t),$$

$$E_2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{m\dot{\varphi}_2^2}{2} (\dot{\varphi}_2^2 + \omega_0^2 \varphi_2^2) dt \cong \frac{E}{2} (1 - \cos \varepsilon t),$$

где $E = m\dot{\varphi}_0^2 \varphi_0^2 / 2$, и при дифференцировании $\varphi_{1,2}(t)$ по t мы положили $\dot{A}_{1,2} = 0$, а при интегрировании пренебрегли изменением $A_{1,2}(t)$ за время T . В рассматриваемом случае равенства масс и длин подвесов обмен энергией является полным: маятники настроены в резонанс. Если же маятники не одинаковы, то обмен будет неполным.

Обмена энергией не происходит также в тех случаях, когда каждая координата выражается через одну нормальную координату, так что нет сложения нормальных колебаний.

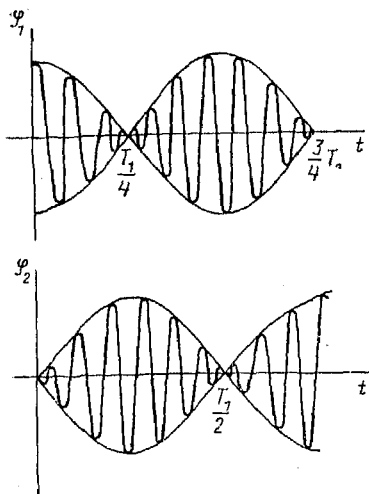


Рис. 7.8

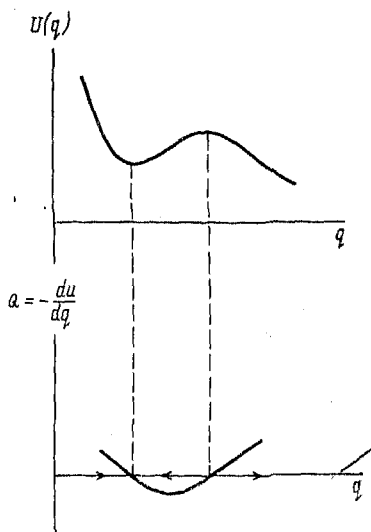


Рис. 8.8

Приведем выражение для функции Лагранжа в нормальных координатах θ_1, θ_2 , связанных с координатами φ_1, φ_2 формулами (47.8):

$$\mathcal{L} = ml^2 \tilde{\omega}_0^4 \{ \dot{\theta}_1^2 - \omega_0^2 \theta_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - (\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2) \theta_2^2 \}. \quad (50.8)$$

8.5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Примем описанную в 8.2 процедуру построения решений уравнения движения механической системы с одной степенью свободы, т. е. рассмотрим случай $s=1$.

Если $s=1$, точка равновесия q_{eq} в конфигурационном пространстве определяется из уравнения

$$\frac{dU}{dq} = 0,$$

причем положение равновесия будет устойчивым, если

$$K = \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_{eq}} > 0. \quad (51.8)$$

Если условие (51.8) выполняется, то в окрестности точки q_{eq} возникает сила, направленная к точке q_{eq} , которая стремится вернуть систему к точке q_{eq} (рис. 8.8). Вводя координату $x = q - q_{eq}$ и обозначая коэффициент $a(q_{eq})$ в выражении кинети-

ческой энергии m , представим функцию Лагранжа механической системы в виде

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (52.8)$$

Здесь мы сохранили, как и выше, только квадратичные члены, пропорциональные \dot{x}^2 , x^2 . Система, которая описывается лагранжианом вида (52.8), называется одномерным гармоническим осциллятором. Уравнение движения гармонического осциллятора (уравнение Лагранжа)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (53.8)$$

Решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

или

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (54.8)$$

где постоянные C_1 , C_2 , a и α определяются начальными условиями. Они связаны соотношениями

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (55.8)$$

Постоянную a называют амплитудой, $\omega t + \alpha$ — фазой, ω — циклической частотой или просто частотой колебаний. Начальная фаза α зависит от выбора начала отсчета времени. Частота определяется механическими свойствами системы и не зависит от начальных условий и, в частности, от амплитуды (свойство изохронности). Подчеркнем, что это свойство связано с выбранным приближением квадратичной зависимости потенциальной энергии от координаты. При сохранении членов более высокого порядка малости оно исчезает.

Энергия осциллятора сохраняется, так как $U(x)$ явно от времени не зависит. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \quad (56.8)$$

Амплитуда и фаза выражаются через начальное механическое состояние x_0 , \dot{x}_0 из соотношений

$$x_0 = a \cos \varphi, \quad \dot{x}_0 = -a\omega \sin \varphi, \quad (57.8)$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega}. \quad (58.8)$$

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени удобно также представить в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}), \quad (59 \text{ в})$$

где $A = ae^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда, ее модуль равен амплитуде a , а аргумент — начальной фазе α .

Механическое состояние осциллятора определяется заданием x, \dot{x} в фазовом пространстве. В случае одномерной системы это фазовая плоскость переменных x, \dot{x} , рассматриваемых как декартовы координаты. Если начальное состояние осциллятора задано координатами x_0, \dot{x}_0 , то изображающая точка $M(x_0, \dot{x}_0)$ с течением времени $t > 0$ описывает фазовую траекторию в фазовой плоскости согласно

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (60 \text{ в})$$

или в явном виде (рис. 9.8)

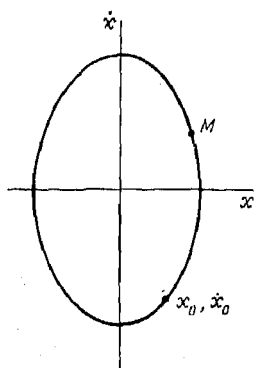


Рис. 9.8

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} = 1. \quad (61 \text{ в})$$

Это уравнение эллипса; его можно также получить из закона сохранения энергии.

Фазовое пространство оказывается весьма удобным для изучения нелинейных колебаний.

Задание начального механического состояния однозначно определяет фазовую траекторию; семейство фазовых траекторий является, очевидно, однопараметрическим, так как они определяются не x_0 и \dot{x}_0 порознь, а их комбинацией, образующей E :

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Фазовые траектории между собой не пересекаются. Это следует из однозначности решений уравнений движения по начальным условиям. В данном случае все фазовые траектории являются подобными эллипсами, поскольку отношение их полуосей постоянно и равно ω .

8.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если механическую систему поместить в переменное (во времени) внешнее поле, то в ней могут возникнуть вынужденные колебания. Рассмотрим эту задачу на приме-

ре одномерного гармонического осциллятора. Потенциальную энергию системы представим в виде

$$U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \tilde{U}(x, t), \quad (62.8)$$

где первый член описывает собственную потенциальную энергию осциллятора, а второй — потенциальную энергию системы во внешнем переменном поле. Предположим, что переменное поле достаточно слабое, так что отклонения $x(t)$ от положения равновесия и колебания в целом по-прежнему являются малыми. Если это так, то $\tilde{U}(x, t)$ можно разложить в ряд по степеням малой величины x , ограничиваясь двумя первыми членами:

$$\tilde{U}(x, t) = \tilde{U}(0, t) + \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot x. \quad (63.8)$$

Учитывая, что $\tilde{U}(0, t)$ — заданная функция времени и потому ее можно опустить в функции Лагранжа, а производная $-\left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right|_{x=0} = F(t)$ есть «внешняя» сила в положении равновесия системы, функцию Лагранжа гармонического осциллятора в переменном внешнем поле представим в виде

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + xF(t). \quad (64.8)$$

Уравнение Лагранжа, описывающее вынужденные колебания осциллятора, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (65.8)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, представляется в виде суммы двух выражений: $x = x_{об} + \tilde{x}$, где $x_{об}$ — общее решение однородного уравнения, а \tilde{x} — частный интеграл неоднородного уравнения. Заметим, что $x_{об}$ найдено в предыдущем пункте.

Особый интерес в связи с различными приложениями представляет случай, когда внешняя вынуждающая сила является простой периодической функцией времени частоты ω :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \beta). \quad (66.8)$$

Тогда $\tilde{x}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{x}(t) = b \cos(\omega t + \beta).$$

Подставляя (66.8) и это решение в уравнение (65.8), находим амплитуду

$$b = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}. \quad (67.8)$$

Полное решение уравнения (65.8) имеет вид

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \cos(\tilde{\omega} t + \beta), \quad (68.8)$$

а постоянные a и α определяются из начальных условий. Движение осциллятора под действием периодической вынуждающей силы представляет собой сумму двух колебаний с частотами ω_0 и $\tilde{\omega}$.

Рассмотрим случай резонанса, когда частоты ω_0 и $\tilde{\omega}$ совпадают. Для этого перепишем (68.8) в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} (\cos(\tilde{\omega} t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)). \quad (69.8)$$

Постоянные A и γ , очевидно, определяются постоянными a , α , а также параметрами, характеризующими переменное поле. В пределе $\tilde{\omega} \rightarrow \omega_0$, раскрывая неопределенность вида $0/0$ во втором члене (69.8), получим

$$x = A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m\varepsilon(\omega_0 + \tilde{\omega})} (\cos((\omega_0 - \varepsilon)t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)) \Big|_{\varepsilon = \omega_0 - \tilde{\omega} \rightarrow 0} = A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (70.8)$$

Видно, что амплитуда колебаний в случае резонанса растет со временем по линейному закону. Заметим, что решение (70.8) применимо лишь на ограниченных отрезках времени, до тех пор пока колебания являются малыми.

8.7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим движение гармонического осциллятора, когда на него действует обобщенная сила трения вида

$$F_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x}. \quad (71.8)$$

Здесь постоянная $\alpha > 0$, \dot{x} — обобщенная скорость, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя (71.8) в правую часть (53.8), получим

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x}. \quad (72.8)$$

Разделим (72.8) на m и введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\mu. \quad (73.8)$$

Здесь ω_0 — частота собственных колебаний системы в отсутствие трения, μ — коэффициент затухания.

Движение осциллятора при наличии силы трения (71.8) описывается однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (74.8)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x = Ce^{\lambda t}. \quad (75.8)$$

Подставляя (75.8) в (74.8), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (76.8)$$

Общее решение уравнения (74.8) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}. \quad (77.8)$$

Далее следует различать два случая. Если $\omega_0 > \mu$, то

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \quad (78.8)$$

и общее решение можно представить в виде

$$x = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (79.8)$$

где a и α_0 — вещественные постоянные. Их можно выразить через начальные значения x_0, \dot{x}_0 :

$$x_0 = a \cos \alpha_0, \quad \dot{x}_0 = -\mu x_0 - \omega a \sin \alpha_0,$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega x_0}.$$

Формулы (78.8), (79.8) описывают движение, которое называют затухающими колебаниями. Хотя функция (79.8) не удовлетворяет условию периодичности $f(t) = f(t+T)$, описываемое ею движение можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Такое движение называют условно-периодическим, поскольку интервал времени T между двумя соседними максимумами отклонения от положения равновесия является постоянной величиной

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (80.8)$$

T называют условным периодом.

Заметим, что частота колебаний ω , как и в случае собственных колебаний, определяется только параметрами системы и не зависит от амплитуды колебаний (свойство изохронности).

За время T амплитуда колебания уменьшается в $e^{\mu T}$ раз. Показатель экспоненты μT называют логарифмическим декрементом, так как

$$\mu T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}. \quad (81.8)$$

Если $\mu > \omega_0$, то оба корня $\lambda_{1,2}$ вещественны и отрицательны. Общее решение

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (82.8)$$

всегда вещественно при вещественных постоянных C_1 и C_2 . Движение в этом случае, характеризующемся достаточно большим трением, не является колебательным. Положение равновесия точка проходит за конечное время не более одного раза. Движение состоит в асимптотическом (при $t \rightarrow \infty$) приближении к положению равновесия независимо от начальных условий. Этот тип движения называют аperiодическим затуханием.

Наконец, если $\mu = \omega_0$, характеристическое уравнение имеет всего один (кратности два) корень $\lambda = -\mu$. Общее решение в этом случае имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\mu t}, \quad (83.8)$$

в чем можно убедиться прямой подстановкой (83.8) в (74.8). Движение это не имеет колебательного характера, представляя собой особый случай аperiодического затухания.

Пример. Вынужденные колебания при наличии трения. Найти закон движения гармонического осциллятора, на который действует сила трения $F_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x}$ и вынуждающая сила $F(t) = F_0 \cos \tilde{\omega} t$, если при $t=0$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t,$$

где $2\mu = \frac{\alpha}{m}$. Запишем правую часть как $\text{Re} \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t}$. Частный интеграл ищем в виде $x = \text{Re} B e^{i\tilde{\omega} t}$, причем $B = b e^{i\delta}$. Подставляя решение в уравнение движения, получим

$$B(\omega_0^2 + i2\mu\tilde{\omega} - \tilde{\omega}^2) = \frac{F_0}{m}.$$

Отсюда

$$b = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\mu^2 \tilde{\omega}^2}}, \quad \delta = -\text{arctg} \frac{2\mu\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2}.$$

$$x = \text{Re} B e^{i\tilde{\omega} t} = b \cos(\tilde{\omega} t + \delta).$$

Добавляя к частному интегралу общее решение однородного уравнения (мы полагаем, что $\omega_0 > \mu$)

$$x_{\text{об}} = a e^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2},$$

получим полное решение

$$x(t) = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0) + b \cos(\tilde{\omega} t + \delta).$$

Заметим, что при $t \gg 1/\mu$ амплитуда собственных колебаний асимптотически обратится в нуль и колебания осциллятора будут происходить с частотой $\tilde{\omega}$. Это так называемые установившиеся колебания.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, имеет вид

$$x(t) = \frac{F_0}{m [(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\mu^2 \tilde{\omega}^2]} \left[(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) (\cos \tilde{\omega} t - e^{-\mu t} \cos \omega t) + 2\mu \tilde{\omega} \left(\sin \tilde{\omega} t - \frac{\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2}{2\omega \tilde{\omega}} e^{-\mu t} \sin \omega t \right) \right].$$

Заметим, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, так как $\delta < 0$ всегда.

Глава 9

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ

9.1. СИСТЕМЫ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Введение обобщенного потенциала $U(q, t) = U^{(0)} + U^{(1)}$, где $U^{(1)} = A_i(q, t) \dot{q}_i$, позволяет описывать гироскопические силы. Мощность гироскопических сил равна нулю, и в случае $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ они не вносят вклад в интеграл энергии

$$\mathcal{H} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)},$$

поэтому гироскопические силы не меняют положения равновесия системы, которое определяется как изолированный минимум энергии. Однако гироскопические силы могут заметно изменить характер движения.

Рассмотрим движение заряженной частицы массы m заряда e в магнитном поле. Пусть на частицу действует поле, направленное вдоль оси OZ инерциальной системы отсчета, и, кроме того, на нее действуют потенциальные силы, энергия которых определяется $U(r) = kr^2/2$ (пространственный осциллятор).

Выберем вектор-потенциал магнитного поля

$$A = \{-H_y, 0, 0\}.$$

Вектор-потенциал определен неоднозначно, поскольку функция Лагранжа определена с точностью до преобразования

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t),$$

не меняющего уравнения движения. В рассматриваемом случае функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{eH}{c} y\dot{x} - \frac{kr^2}{2} \quad (1.9)$$

приводит к уравнениям движения — линейным однородным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \Omega\dot{y} + \omega_0^2 x = 0, \\ \ddot{y} + \Omega\dot{x} + \omega_0^2 y = 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь введены обозначения $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\Omega = \frac{eH}{mc}$. Движение вдоль оси OZ определяется лишь полем осциллятора и происходит по гармоническому закону:

$$z = z_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_3).$$

Движение в плоскости OXY не зависит от движения вдоль оси OZ и определяется обычным образом с помощью подстановки Эйлера

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t},$$

что дает систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \omega_0^2)A - \lambda\Omega B = 0, \\ \lambda\Omega A + (\lambda^2 + \omega_0^2)B = 0. \end{cases}$$

Нетривиальное решение системы существует при значениях λ , определяемых из характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)^2 + \lambda^2\Omega^2 = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, в системе, определяемой уравнениями (2.9), возможно движение, определяемое собственными частотами:

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 + \frac{\Omega^2}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2\Omega^2 + \frac{\Omega^4}{4}}.$$

Вводя обозначение $(\Omega/\omega_0)^2 = \kappa$, получим связь между коэффициентами A^{\pm} , B^{\pm} , соответствующую частотам $\omega = \omega_+$ и $\omega = \omega_-$:

$$\begin{aligned} B_- &= i \frac{\sqrt{\kappa + \frac{\kappa^2}{4}} - \frac{\kappa}{2}}{\sqrt{\kappa} \sqrt{\kappa + \frac{\kappa^2}{4}} - \kappa \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)} A_-, \\ B_+ &= i \frac{\sqrt{\kappa + \frac{\kappa^2}{4}} + \frac{\kappa}{2}}{\sqrt{\kappa} \sqrt{\kappa + \frac{\kappa^2}{4}} + \kappa \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)} A_+. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Эти уравнения определяют решения в виде

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_- t + \varphi_1) + B \cos(\omega_+ t + \varphi_2), \\ y &= -A \sin(\omega_- t + \varphi_1) + B \sin(\omega_+ t + \varphi_2). \end{aligned}$$

В предельном случае слабого поля $\kappa \ll 1$

$$\omega_1 \approx \omega_0 + \Omega_L, \quad \omega_2 \approx \omega_0 - \Omega_L,$$

т. е. движение с частотой $\omega_{1,2}$ — вращение пространственного осциллятора с частотой $\pm\Omega$. Этот результат является частным случаем теоремы Лармора о движении в слабом магнитном поле.

В другом предельном случае $\omega_0=0$ движение также носит колебательный характер, хотя изолированный минимум потенциальной энергии отсутствует. Этот случай соответствует безразличному равновесию.

Более того, колебания будут происходить и в случае $\lambda^2 > 0$, если выполняется условие $\Omega^2 - \lambda^2 > 0$, т. е. в магнитном поле достаточно большой напряженности:

$$H > H_{кр} = \frac{2c}{e} \sqrt{-km} \text{ для } k < 0.$$

В этом случае потенциальная энергия точки имеет максимум в начале координат, и в отсутствие магнитного поля материальная точка экспоненциально быстро уходит из начала координат. При $H > H_{кр}$ магнитное поле вызывает финитное движение и локализует частицу в начале координат.

В этом случае две ветви решения характеристического уравнения (3.9) соответствуют колебаниям, амплитуды которых связаны соотношениями (4.9). Зависимость частот ω_{\pm} от параметра κ , характеризующего величину магнитного поля, приведена на рис. 1.9. Вращение частицы в магнитном поле происходит по радиусу R , зависящему от начальных условий.

Сохранение обобщенной энергии в магнитном поле в окрестности точки неустойчивого равновесия для двух мод колебаний приводит к соотношению

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-,$$

где

$$\mathcal{H}_{\pm} = \frac{m}{2} (\dot{r}_{\pm}^2 - \omega_0^2 r^2) = \frac{m}{2} (\omega_{\pm}^2 - \omega_0^2) R^2.$$

Подставляя значения частот $\omega_{\pm}^2 = (\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2})^2$ для энергии, соответствующей этим значениям, получим

$$\mathcal{H}_{\pm} = mR^2 \sqrt{1 - \bar{\kappa}} (\sqrt{1 - \bar{\kappa}} \pm 1), \quad \bar{\kappa} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}.$$

Из полученного выражения следует, что

$$\mathcal{H}_+ > 0 \text{ и } \frac{\partial \mathcal{H}_+}{\partial R} > 0,$$

т. е. увеличение амплитуды колебаний (радиуса окружности, по которой происходит вращение) приводит к росту энергии. Иначе обстоит дело с величиной \mathcal{H}_- :

$$\mathcal{H}_- < 0 \text{ и } \frac{\partial \mathcal{H}_-}{\partial R} < 0.$$

Это приводит к тому, что с ростом амплитуды колебаний энергия частицы уменьшается!

Рассмотренный результат является общим для всех систем с гироскопическими силами. Пусть взаимодействие материальных точек допускает описание с помощью обобщенно-потенциальных сил

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}.$$

Предположим также, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$, т. е. связи в системе могут явно зависеть от времени или движение может описываться в неинерциальной системе отсчета. В этом случае кинетическая энергия имеет вид

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}$$

и функция Лагранжа может содержать линейные по обобщенным скоростям члены.

Условие равновесия $\left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\dot{q}=0} = 0$ соответствует изолированному минимуму обобщенной энергии

$$\mathcal{H} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}$$

и определяется условием

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right|_{\dot{q}=0} = 0.$$

Мы будем полагать, что выбор обобщенных координат произведен так, что равновесию соответствует точка $q_s = 0$ (здесь мы рассматриваем относительное равновесие в обобщенных координатах q_s). Предположим, что, как и в случае потенциальных сил, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, т. е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ является интегралом, а $T^{(2)}$ — положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \geq 0.$$

В отношении разности $\tilde{U}^{(0)} = U^{(0)} - T^{(0)}$, входящей в обобщенную энергию, мы не будем делать такого предположения:

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2} c_{ik} q_i q_k.$$

Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$m_{ih}\ddot{q}_k + c_{ih}q_k + a_{ih}\dot{q}_h = 0, \quad (5.9)$$

где

$$a_{ih} = \frac{\partial A_i}{\partial q_h} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}$$

— антисимметричная матрица, соответствующая выбранному положению равновесия. Если кинетическая энергия содержит член $T^{(1)}$, то мы будем понимать под $\tilde{U}^{(1)}$ разность

$$\tilde{U}^{(1)} = U^{(1)} - T^{(1)} = A_i \dot{q}_i.$$

Появление гироскопических сил резко меняет поведение решения. Пусть решение имеет вид

$$q_i = \hat{q}_{i0} e^{i\omega t},$$

где $\hat{q}_{i0} = u_i + iv_i$ — комплексная амплитуда. Подстановка в уравнение движения (5.9) дает систему уравнений для определения собственных частот и коэффициентов \hat{q}_{i0} — комплексных амплитуд:

$$-\omega^2 m_{ih} \hat{q}_{h0} + c_{ih} \hat{q}_{h0} + i\omega a_{ih} \hat{q}_{h0} = 0. \quad (6.9)$$

Собственные частоты определяются как обычно из условия существования нетривиальных решений:

$$\det \|\! -\omega^2 m_{ih} + c_{ih} + i\omega a_{ih} \| = 0.$$

Как и в случае потенциальных сил, общие свойства решений ω можно исследовать, умножая (6.9) на \hat{q}_{i0}^* и проводя суммирование по повторяющемуся индексу. Учитывая свойства билинейных форм, возникающих в уравнении

$$-\omega^2 m_{ih} \hat{q}_{i0}^* \hat{q}_{h0} + c_{ih} \hat{q}_{i0}^* \hat{q}_{h0} + i\omega a_{ih} \hat{q}_{i0}^* \hat{q}_{h0} = 0,$$

а именно для нетривиальных решений коэффициент

$$m = m_{ih} (u_i u_h + v_i v_h) > 0$$

в силу положительной определенности и симметрии матрицы m_{ik} . Действительная величина

$$c = c_{ih} (u_i u_h + v_i v_h)$$

в случае локального минимума обобщенной энергии положительна, а антисимметричная матрица a_{ik} порождает билинейную форму

$$2a = ia_{ih} \hat{q}_{i0}^* \hat{q}_{h0} = -2a_{ih} u_i v_h,$$

которая тоже оказывается действительной.

Таким образом, для любого нетривиального решения собственные частоты системы удовлетворяют уравнению

$$m\omega^2 + 2a\omega - c = 0,$$

откуда решения могут быть представлены в виде

$$\omega_{\pm} = -\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{c}{m}}.$$

Следовательно, для любых a при $c > 0$ решение носит колебательный характер. Более того, даже в случае $c < 0$, когда в системе имеется локальный максимум обобщенной энергии, при выполнении соотношения $a^2 > -mc$, т. е. при достаточно больших гироскопических силах, движение остается колебательным. В этом проявляется стабилизирующее влияние гироскопических сил на систему. Собственные векторы $q_i^{(s)} = \widehat{q}_{i0}^{(s)} e^{i\omega_s t}$, соответствующие собственным частотам ω_s , являются ортогональными, как и в случае потенциальных сил. Действительно, умножая уравнение (6.9) с $\omega = \omega_s$ на $\widehat{q}_{i0}^{+(r)}$, соответствующее решению при $\omega = \omega_r$, а решение этого уравнения при $\omega = \omega_r$ на $\widehat{q}_{i0}^{+(s)}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\omega_s^2 m_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(s)} \widehat{q}_{i0}^{*(r)} + c_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(s)} \widehat{q}_{i0}^{*(r)} + i\omega_s a_{ih} \widehat{q}_{i0}^{*(r)} \widehat{q}_{k0}^{(s)} = 0, \\ -\omega_r^2 m_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(r)} \widehat{q}_{i0}^{*(s)} + c_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(r)} \widehat{q}_{i0}^{*(s)} + i\omega_r a_{ih} \widehat{q}_{i0}^{*(s)} \widehat{q}_{k0}^{(r)} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что здесь всюду проведено суммирование по повторяющимся индексам. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$-(\omega_s^2 m_{(rs)} - \omega_r^2 m_{(sr)}) + i(\omega_s a_{(rs)} - a_{(sr)} \omega_r) = 0.$$

Здесь мы ввели обозначения

$$m_{(rs)} = m_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(s)} \widehat{q}_{i0}^{*(r)}, \quad a_{(rs)} = a_{ih} \widehat{q}_{k0}^{(s)} \widehat{q}_{i0}^{*(r)}.$$

Учитывая симметрию матрицы $m_{ik} = m_{ki}$, легко показать, что $m_{(rs)} = m_{(sr)}$.

Антисимметричность матрицы $a_{ik} = -a_{ki}$ приводит к условию

$$\omega_s a_{(rs)} - \omega_r a_{(sr)} = (\omega_s + \omega_r) a_{ik} u_i^{(r)} u_i^{(s)} = 0,$$

откуда $m_{(rs)} = 0$ при $r \neq s$, а следовательно, и $c_{(rs)} = 0$ при $r \neq s$.

Ортогональность решений позволяет записать обобщенную энергию в виде суммы

$$\mathcal{H} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)} = \sum_s \mathcal{H}_s,$$

где

$$\mathcal{H}_s = \omega_s^2 m_s - c_s.$$

Учитывая, что частоты удовлетворяют условию

$$m\omega^2 - c = -2am\omega$$

для любых пар действительных частот

$$\omega_{\pm} = -\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{c}{m}}$$

энергия системы отличается знаком для этих пар: если движение происходит вблизи локального максимума энергии

$$\mathcal{H}_{\mp} = \frac{a^2}{m} \left[\left(1 + \frac{mc}{a^2}\right) \mp \sqrt{1 + \frac{mc}{a^2}} \right].$$

Колебания с частотой ω_- с ростом амплитуды приводят к уменьшению энергии.

Проявление эффекта гироскопической стабилизации движения в окрестности неустойчивой точки хорошо иллюстрирует следующий пример. Рассмотрим круговую ограниченную задачу трех тел. Пусть две точечные массы m_1 и m_2 обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Пробное тело массы $\mu \ll m_{1,2}$ движется в гравитационном поле масс m_1 и m_2 , не влияя на их движение. Пусть расстояние между точками m_1 и m_2 равно l (рис. 2.9).

В инерциальной системе отсчета $Ox'y'$ движение точек вокруг общего центра масс происходит с угловой скоростью, определяемой из условия

$$m_2\Omega^2 x_2 = Gm_1 m_2 / l^2.$$

Координаты точек во вращающейся системе удовлетворяют условию

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0.$$

Учитывая, что $x_1 - x_2 = l$, для частоты обращения получим

$$\Omega^2 = \frac{GM}{l^3}, \text{ где } M = m_1 + m_2.$$

При этом

$$x_1 = -\frac{m_2}{M} l, \quad x_2 = \frac{m_1}{M} l.$$

Начало координат вращающейся системы совпадает с центром масс. Координаты точки x, y во вращающейся системе связаны с координатами инерциальной системы x', y' соотношениями

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

где $\varphi = \Omega t$.

Кинетическая энергия точки μ имеет вид

$$T = \frac{\mu}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \mu\Omega (x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (7.9)$$

а ее потенциальная энергия —

$$U = -\frac{G\mu m_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} - \frac{G\mu m_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}}. \quad (8.9)$$

Функция Лагранжа содержит линейные по скоростям члены, которые во вращающейся системе OXY приводят к появлению гироскопических сил, поскольку слагаемые $T^{(1)}$ и $T^{(0)}$ в этой системе естественно интерпретируются как проявление сил инерции.

Положение равновесия относительно координат OXY определяется условием

$$\frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} \Big|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 0,$$

что дает для положения равновесия

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \pm \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, в системе имеются точки, образующие равно-
сторонний треугольник, такие, что пробное тело находится в
них в положении относительного равновесия. Эти точки назы-
ваются треугольными точками Лагранжа.

Рассмотрим малые отклонения от положения равновесия.

Пусть $x \ll l$, $q = y - \frac{l\sqrt{3}}{2} \ll l$ — отклонения от одного из по-

ложений равновесия, например $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Функция

Лагранжа, приводящая к линейным уравнениям движения в пе-
ременных x , q , имеет вид

$$L = \mu \frac{\dot{x}^2 + \dot{q}^2}{2} + \mu\Omega (x\dot{q} - q\dot{x}) + \frac{\mu\Omega^2}{8} (3x^2 + 2xhq + 9q^2). \quad (9.9)$$

где введено обозначение $\kappa = 3\sqrt{3} \frac{m_1 - m_2}{M}$.

Потенциальная энергия в точке $x=0$, $q=0$ имеет максимум,
так что относительное положение равновесия является неустой-
чивым.

Уравнения движения точки в плоскости OXY , получаемые из функции L , имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{q} - \frac{3\Omega^2}{4}x - \frac{\kappa\Omega^2}{4}q = 0, \\ \ddot{q} + 2\Omega\dot{x} - \frac{9\Omega^2}{4}q - \frac{\kappa\Omega^2}{4}x = 0. \end{cases} \quad (10.9)$$

Действие гироскопических сил, как отмечалось ранее, может стабилизировать движение. Для исследования этой возможности запишем решения этих уравнений, воспользовавшись как обычно подстановкой Эйлера

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad q = Be^{\lambda t}.$$

Подставим эти выражения в (10.9) и получим систему уравнений для определенных коэффициентов:

$$\begin{cases} \left(\lambda^2 - \frac{3}{4}\Omega^2 \right) A - \left(2\lambda\Omega + \frac{\kappa\Omega^2}{4} \right) B = 0, \\ \left(2\lambda\Omega - \frac{\kappa}{4} \right) A + \left(\lambda^2 - \frac{9}{4}\Omega^2 \right) B = 0. \end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения дает собственные значения λ :

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{27m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}} \right).$$

Колебательный режим возможен в случае, когда соотношение масс удовлетворяет условию

$$(m_1 + m_2)^2 > 27m_1m_2, \quad \frac{m_1}{m_2} < \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - 1} \simeq 0,04.$$

В частности, в системе Земля — Луна, если пренебречь влиянием Солнца, возможны колебания частиц вблизи треугольных точек Лагранжа. Подставляя значение отношения масс для этого случая $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{81}$, получим возможные частоты колебаний

$$\omega_- \simeq 0,299\Omega, \quad \omega_+ \simeq 0,954\Omega.$$

Соотношение между коэффициентами A_- и B_- , соответствующее движению с частотой ω_- , в этом случае

$$\left(\lambda_-^2 - \frac{3\Omega^2}{4} \right) A_- = \left(2\lambda_- \Omega + \frac{\kappa\Omega^2}{4} \right) B_-$$

что при подстановке ω_- дает

$$A_- = -1,67e^{i\varphi} B_-, \quad \text{где } \varphi \simeq 0,44.$$

Таким образом, движение относительно вращающейся системы координат вблизи рассматриваемой треугольной точки Лагранжа происходит по закону

$$x = -1,67R \cos(\omega t + 0,44), \quad y = R \cos(\omega t) + l \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Траектория этого движения — эллипс с центром в точке Лагранжа. Относительно инерциальной системы отсчета $OX'Y'$ траектория — незамкнутая кривая, заполняющая область, ограниченную радиусами $r' = r'_{\min}$ и $r' = r'_{\max}$.

9.2. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Рассмотрим, наконец, влияние диссипативных сил на движение системы. В отличие от обобщенно-потенциальных сил их нельзя описать с помощью натуральной функции Лагранжа $L = T - U$, поэтому необходимо построить обобщенные диссипативные силы

$$Q_s^d = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}.$$

Диссипативные силы, такие, как трение, направлены в сторону, противоположную относительному движению тел, и могут как увеличивать, так и уменьшать энергию системы.

Рассмотрим простейший случай сил сопротивления, пропорциональных скорости движения точек:

$$\mathbf{F}_i = -k_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \text{где } k > 0.$$

В этом случае мощность диссипативных сил отрицательна:

$$W^d = \sum \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_i k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 < 0,$$

что приводит к уменьшению энергии системы точек.

При использовании метода Лагранжа, однако, существует теорема об изменении обобщенной энергии, а не полной, поэтому в системе со связями, явно зависящими от времени, или при использовании обобщенных координат q_s , где явно включена зависимость от времени $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$, диссипативные силы не приводят обязательно к уменьшению обобщенной энергии:

$$\dot{E}^* = Q_s^d \dot{q}_s = - \sum_i k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_i k_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Для описания диссипативных сил рассматриваемого типа удобно использовать диссипативную функцию Рэлея $2\Phi = -\rho_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_s$, где ρ_{ik} — симметричная матрица. Ограничимся далее анализом

лишь тех сил, для которых диссипативная функция Рэля отрицательна, а матрица ρ_{ik} — положительно определенная. В нашем случае это соответствует силам, пропорциональным скорости при условии, что преобразование к обобщенным координатам явно не содержит времени.

В приближении линейных уравнений движения положим $b_{ik} = \rho_{ik}(0)$, предполагая, что движение происходит лишь в окрестности начала координат. В этом случае обобщенные диссипативные силы

$$Q_s^d = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} = -b_{si} \dot{q}_i.$$

Рассмотрим вначале простейший пример — движение линейной системы с двумя степенями свободы с учетом сопротивления среды. Пусть система состоит из двух одинаковых материальных точек, соединенных пружинами, жесткость каждой из которых k . Точки могут двигаться вдоль оси q инерциальной системы. Предположим, что коэффициенты κ_1 и κ_2 характеризуют сопротивление среды, причем $\kappa_i = \frac{k_i}{m}$. Уравнения движения с учетом диссипативных сил имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\omega_0^2 q_1 - \omega_0^2 q_2 + \kappa_1 \dot{q}_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 2\omega_0^2 q_2 - \omega_0^2 q_1 + \kappa_2 \dot{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Здесь q — отклонения от положения равновесия, а параметры κ_1 и κ_2 характеризуют сопротивление среды. Используя полученные результаты, введем нормальные координаты $\theta_1 = q_1 + q_2$, соответствующую синфазным колебаниям с частотой $\omega = \omega_0$ и $\theta_2 = q_1 - q_2$, описывающую противофазные колебания, частота которых $\omega = \omega_0 \sqrt{3}$.

Введенные координаты диагонализующие полную энергию

$$E^* = E_1^* + E_2^*, \quad \text{где } E_s^* = E^*(\theta_s),$$

приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 + 2\gamma_1 \dot{\theta}_1 + 2\gamma_2 \dot{\theta}_2 = 0, \\ \ddot{\theta}_2 + 3\omega_0^2 \theta_2 + 2\gamma_1 \dot{\theta}_2 + 2\gamma_2 \dot{\theta}_1 = 0, \end{cases} \quad (11.9)$$

где $\gamma_1 = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{4}$, $\gamma_2 = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)}{4}$.

Если система симметрична, т. е. $\kappa_1 = \kappa_2$, то $\gamma_2 = 0$ и уравнения расцепляются. Решение в этом случае имеет вид

$$\theta_1(t) = Ae^{-\gamma_1 t} e^{i\omega_0 t},$$

$$\theta_2(t) = Be^{-\gamma_1 t} e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}.$$

Асимметрия системы приводит к появлению перекрестных членов в уравнениях движения, так что в общем случае анализ становится довольно сложным. Для выяснения качественной стороны можно ограничиться случаем малого затухания. Предположим, что $\gamma_1 \ll \omega_0$, так что решение системы можно получить методом итераций. Предполагаем, что решение такой системы представимо в виде

$$\begin{aligned} \theta_1 &= Ae^{-\gamma_1 t + i\omega_0 t} + a(t), \\ \theta_2 &= Be^{-\gamma_1 t + i\sqrt{3}\omega_0 t} + b(t), \end{aligned} \quad (12.9)$$

где $|a(t)| \ll |A|$, $|b(t)| \ll |B|$ — малые поправки. Подставляя соотношения (12.9) в уравнения (11.9), в первом порядке по γ_1 получим уравнения для определения $a(t)$ и $b(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{a} + \omega_0^2 a = -2\gamma_2 B e^{i\omega_0 \sqrt{3} t}, \\ \ddot{b} + 3\omega_0^2 b = -2\gamma_2 A e^{i\omega_0 t}. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений описывает вынужденные колебания под действием вынуждающей силы, которая пропорциональна соответствующей моде нормальных колебаний. Установившиеся колебания в системе:

$$\begin{aligned} a(t) &= + \frac{\gamma_2}{\omega_0^2} B e^{i\omega_0 \sqrt{3} t}, \\ b(t) &= - \frac{\gamma_2}{\omega_0^2} A e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Таким образом, влияние слабых диссипативных сил приводит к затуханию колебаний в каждой моде по экспоненциальному закону. В первом приближении в каждой моде колебаний появляются колебания с частотами, соответствующими и другим модам $\omega_k \neq \omega_s$, причем амплитуда этих колебаний пропорциональна коэффициенту γ_{sm} :

$$a_s \sim \gamma_{sm} A_m.$$

Этот вывод легко обобщается на случай произвольного числа степеней свободы. Пусть диссипативная функция Рэлея задается матрицей коэффициентов b_{sm} :

$$2\Phi = -b_{sm} \dot{\theta}_s \dot{\theta}_m,$$

где θ_s — нормальные координаты системы без затухания.

При учете диссипативных сил в общем случае система уравнений принимает вид

$$\ddot{\theta}_s + \omega_{(s)}^2 \theta_s = -b_{sm} \dot{\theta}_m. \quad (13.9)$$

Полагая, как раньше, $b_{sm} \ll \omega_{(s)}$, используем методы итераций для решения уравнений, полагая, что решения представимы в виде

$$\theta_s = A_s e^{\frac{b_{ss}}{2} t + i\omega_{(s)} t} + a_s(t).$$

Ограничимся линейными по b_{sm} членами. Подставляя это решение в уравнения системы (13.9), получим уравнения для определения a_s :

$$\ddot{a}_s + b_{ss} \dot{a}_s + \omega_{(s)}^2 a_s = - \sum_{m \neq s} b_{sm} A_m e^{i\omega_{(s)} t}.$$

Мы выделили в сумме член с $m=s$ и перенесли его в левую часть уравнения, чтобы исключить резонансные решения вида $t e^{i\omega t}$, появление которых вызвано сделанными приближениями. С учетом сделанных замечаний решение имеет вид

$$a_s(t) = -i \sum_{m \neq s} \frac{b_{sm} \omega_{(m)} A_m}{\omega_s^2 - \omega_m^2} e^{i\omega_m t}$$

и описывает затухающие колебания в каждой моде.

Несколько сложнее обстоит дело с системами, в которых имеются гироскопические силы. Вновь рассмотрим движение заряда в однородном магнитном поле, учитывая теперь диссипативные силы. Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\dot{x}\kappa - \Omega_2 \dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\dot{y}\kappa + \Omega_2 \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\Omega_2 = eH/2mc$ — ларморовская частота, а $\omega_0^2 = k/m$. Действие диссипативных сил приводит к изменению собственных частот системы, так что

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= -(\kappa \pm i\Omega_L) + \sqrt{\kappa^2 - (\Omega_L + \omega_0^2) \pm 2i\kappa\Omega_L}, \\ \lambda_2^\pm &= -(\kappa \pm i\Omega_L) - \sqrt{\kappa^2 - (\Omega_L + \omega_0^2) \pm 2i\kappa\Omega_L}. \end{aligned}$$

В случае малых затуханий $\kappa \ll \Omega_L$

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= +i(\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2} \pm \Omega_L) - \kappa \left(1 \mp \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2}} \right), \\ \lambda_2^\pm &= -i(\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2} \mp \Omega_L) - \kappa \left(1 \pm \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2}} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что при любых Ω_L , ω_0^2 действие диссипативных сил приводит к затухающим колебаниям.

Если рассматривать систему с неустойчивым положением равновесия при $q=0$, то, проводя замену $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_0^2$, получим решения характеристического уравнения для этого случая. В режиме гироскопической стабилизации, когда $\Omega_L^2 - \omega_0^2 > 0$, в системе без диссипации возможны колебательные решения, описывающие движение по окружности. Наличие затухания $\kappa > 0$ в этом случае разрушает режим стабилизации, поскольку имеется решение, для которого $\text{Re } \lambda = \kappa \left(\frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2}} - 1 \right) > 0$, т. е.

соответствующее неустойчивой моде. Рост амплитуды колебаний в этой моде сопровождается уменьшением энергии, так как

$$E_{\text{неуст}}^* < 0 \text{ и } \frac{\partial E_{\text{неуст}}^*}{\partial A} < 0.$$

В общем случае в системах с диссипативными силами в режиме гироскопической стабилизации развитие неустойчивости в одной моде может повлечь возбуждение устойчивых мод за счет перекачки энергии, обусловленной наличием недиагональных членов матрицы b_{ks} .

10.1. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Описание движения механической системы с s степенями свободы с помощью канонических уравнений, или, как их называют, уравнений Гамильтона, производится в $2s$ -мерном (фазовом) пространстве. Это связано с тем, что зачастую оказывается более удобным осуществить переход к системе $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени от s уравнений Лагранжа, но второго порядка по времени. Имеется в виду переход от s независимых переменных q_j к $2s$ независимым переменным. Заметим, что в функции Лагранжа $\mathcal{L}((q), (\dot{q}), t)$ величины q_j и \dot{q}_j не являются независимыми, поскольку \dot{q}_j является производной q_j по времени.

Простейший путь перехода к независимым переменным, очевидно, состоит в том, чтобы ввести s новых переменных x_j согласно соотношениям

$$\dot{q}_j = x_j. \quad (1.10)$$

Эти s соотношений можно рассматривать как систему s дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих между собой $2s$ переменных q_j и x_j . Но теперь функция Лагранжа зависит от q_j , x_j , а уравнения Лагранжа формально имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (2.10)$$

Уравнения (1.10) и (2.10) образуют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Движение механической системы теперь изображается кривой в $2s$ -мерном пространстве x_j , q_j . Удобно вместо q_j , x_j ввести совокупность переменных q_j , p_j , в которых уравнения движения системы приобретут более симметричный вид. Этого можно достичь, если в качестве переменной x_j использовать обобщенный импульс

$$p_j = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (3.10)$$

Регулярный способ описанных преобразований состоит в переходе от переменных q_j, \dot{q}_j, t к переменным q_j, p_j, t с помощью преобразований Лежандра. Задача формулируется следующим образом. От функции $\mathcal{L}((q), (\dot{q}), t)$, зависящей от q_j, \dot{q}_j, t , перейти к функции $\mathcal{H}((q), (p), t)$, зависящей от q_j, p_j, t , причем «новые переменные» p_j выражаются через «старую функцию» \mathcal{L} с помощью (3.10).

Вычислим дифференциал

$$d\mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (4.10)$$

и введем функцию $\mathcal{H}((q), (p), t)$ посредством

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}, \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.10)$$

Найдем полный дифференциал

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \\ &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^s \left(\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Но p_j определяются из (3.10), так что, выражая из них \dot{q}_j через q_j, p_j, t , видим, что \mathcal{H} действительно является функцией $(q), (p), t$. Функция $\mathcal{H}((q), (p), t)$ называется функцией Гамильтона или гамильтонианом механической системы. Это та же обобщенная энергия, но в ней все обобщенные скорости заменены обобщенными импульсами. Зная эту функцию, можно вывести канонические уравнения. Для этого найдем $d\mathcal{H}$, считая \mathcal{H} функцией $(q), (p), t$:

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt, \quad (7.10)$$

и сравним (6.10) с (7.10). Так как левые части обеих формул представляют собой полные дифференциалы одной и той же функции, их правые части также должны совпадать. При независимых q_j, p_j для этого должны выполняться

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (8.10)$$

Воспользуемся определением (3.10) и уравнениями Лагранжа, записанными в форме

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j},$$

и подставим \dot{p}_j из этого уравнения вместо $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$ в (8.10). Тогда получим симметричные (с точностью до знака) уравнения движения механической системы в фазовом пространстве, которые определяются с помощью функции Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (9.10)$$

Это и есть уравнения Гамильтона. Они представляют собой систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка по времени относительно переменных q_j, p_j .

Полезно помнить следующий алгоритм составления этих уравнений: 1) построить функцию Лагранжа системы; 2) найти «новые переменные» — канонические импульсы — по формулам (3.10); 3) построить функцию Гамильтона $\mathcal{H}((q), (p), t)$; 4) подставить функцию Гамильтона в уравнения (9.10).

В процедуре перехода от переменных $(q), (\dot{q}), t$ к $(q), (p), t$ часть переменных заменяется новыми переменными ((\dot{q}) на (p)), другая часть не меняется. Первую группу переменных называют активными, вторую — пассивными переменными. Время t , разумеется, не является динамической переменной и рассматривается формально как пассивная переменная. Заметим, что соотношения для переменных, которые не преобразовываются, будут аналогичны соотношению для «пассивной переменной» t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.10)$$

Действительно, первые s соотношений нетрудно получить, сравнивая две системы уравнений:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Последнее замечание касается «дуальной природы» преобразований Лежандра. Она отражается в следующих уравнениях:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j},$$

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - \mathcal{H},$$

$$\mathcal{H}((q), (p), t), \quad \mathcal{L}((q), (\dot{q}), t).$$

Видно, что «новые» переменные p_j выражаются через «старую» функцию \mathcal{L} так же, как «старые» переменные \dot{q}_j — через «новую» функцию \mathcal{H} . Иными словами, исходя из \mathcal{L} с помощью указанных выше трех операций можно построить \mathcal{H} . Но точно так же можно начать с функции Гамильтона \mathcal{H} и тремя последовательными операциями построить \mathcal{L} .

10.2. ВЫВОД КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Поскольку формализм, базирующийся на функции Гамильтона, широко применяется в разных областях теоретической физики, представляется необходимым показать, как уравнения Гамильтона могут быть выведены из общих вариационных (интегральных) принципов. Фактически это будет означать, что вся динамика механической системы определяется одной функцией — ее гамильтонианом. Для доказательства этого положения можно воспользоваться принципом Гамильтона—Остроградского, введя некоторые изменения в подынтегральное выражение (60.7).

Подставим в (60.7) следующее выражение функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \quad (11.10)$$

и перепишем принцип Гамильтона—Остроградского в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt = 0, \quad (12.10)$$

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0. \quad (13.10)$$

Это вторая форма принципа Гамильтона—Остроградского, или модифицированный принцип Гамильтона. Он гласит: *Реальное движение механической системы, состояние которой определяется каноническими переменными $q_j, p_j, j=1, 2, \dots, s$, осуществляется таким образом, что первая вариация функционала S обращается в нуль при условиях (13.10).*

Рассмотрим вариацию S , полагая, что все входящие в S канонические переменные являются независимыми:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j \delta p_j + p_j \delta \dot{q}_j) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j \right) \right\} dt = \\ &= \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s \delta p_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$, и проинтегрировали по частям члены, содержащие $\delta \dot{q}_j$. Согласно (12.10) и (13.10)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s \left[\delta p_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \right] \right\} dt = 0. \quad (14.10)$$

Но так как все вариации δq_j , δp_j независимы и произвольны, (14.10) удовлетворяется, если только коэффициенты при всех δq_j и δp_j будут равны нулю, т. е.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Тем самым доказано, что канонические уравнения можно вывести из модифицированного принципа Гамильтона.

Подчеркнем, что требование независимости групп переменных (q) и (p) здесь было весьма существенным. Обобщенные импульсы p_j в методе Гамильтона считаются такими же независимыми переменными, как и обобщенные координаты; p_j связаны с q_j только уравнениями движения, т. е. динамически, а не кинематически, т. е. заранее заданными соотношениями, как, скажем, \dot{q}_j связаны с q_j . Мы видим, что ни одна из групп переменных (q) и (p) не рассматривается здесь как основная. Обе группы независимы. Причем, только увеличив число переменных с s до $2s$, можно получить уравнения первого порядка по времени.

10.3. ИНТЕГРАЛЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. СКОБКИ ПУАССОНА. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Рассмотрим некоторую функцию канонических переменных (q) , (p) и времени $f((q), (p), t)$ и поставим вопрос о том, когда эта функция будет обращаться в постоянную в силу уравнений движения (9.10), т. е. будет интегралом гамильтоновой системы. Вычислим полную производную f по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right). \quad (15.10)$$

Подставляя в (15.10) вместо \dot{q}_j и \dot{p}_j правые части (9.10), получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}], \quad (16.10)$$

где

$$[f, \mathcal{H}] = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right). \quad (17.10)$$

Последнее выражение называют скобками Пуассона для величин f и \mathcal{H} . Условие того, что величина f есть интеграл движения, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}] = 0. \quad (18.10)$$

Если же f явно от времени не зависит, то, для того чтобы функция канонических переменных $f(q, p)$ была бы интегралом движения, скобки Пуассона f с функцией Гамильтона данной механической системы H должны обращаться в нуль:

$$[f, \mathcal{H}] = 0. \quad (19.10)$$

Скобки Пуассона можно определить для любой пары величин u, v , зависящих от $(q), (p)$ и t :

$$[u, v] = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right). \quad (20.10)$$

Используя это определение, нетрудно доказать следующие свойства:

- 1) $[u, v] = -[v, u]$;
- 2) $[u, c] = 0$, где c — постоянная функция, не зависящая от $(q), (p)$;
- 3) $[u, u] = 0$;
- 4) $[u + v, w] = [u, w] + [v, w]$;
- 5) $[uv, w] = u[v, w] + v[u, w]$;
- 6) $\frac{\partial}{\partial t} [u, v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]$.

Можно ввести понятие фундаментальных скобок Пуассона. Для этого положим одну из функций u или v равной q_i или p_i . Тогда

$$[q_i, v] = \sum_{j=1}^s \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial p_j} = \frac{\partial v}{\partial p_i}, \quad (21.10)$$

$$[p_i, v] = - \sum_{j=1}^s \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial q_j} = - \frac{\partial v}{\partial q_i}. \quad (22.10)$$

Положим теперь в (21.10) $v = q_i$ и $v = p_j$, а в (22.10) $v = p_j$. Получаем

$$[q_i, q_j] = 0, [q_i, p_j] = \delta_{ij}, [p_i, p_j] = 0. \quad (23.10)$$

Соотношения (23.10) называют фундаментальными скобками Пуассона^{*}).

Скобки Пуассона позволяют по-иному записать уравнения Гамильтона. В самом деле, пусть в (21.10), (22.10) $\dot{v} = \mathcal{H}$. Тогда вместо (21.10), (22.10) получим

$$[q_i, \mathcal{H}] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}], \quad (24.10)$$

$$[p_i, \mathcal{H}] = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \dot{p}_i, \quad \dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}]. \quad (25.10)$$

Уравнения (24.10), (25.10), очевидно, являются уравнениями Гамильтона, записанными с помощью скобок Пуассона. Они являются частными случаями равенства (16.10), в котором в качестве f выбирается либо q_i , либо p_i . Положим в (16.10) $f = \mathcal{H}$. Получим

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (26.10)$$

Следовательно, если \mathcal{H} не зависит от времени явно, то гамильтониан механической системы является интегралом движения.

Можно показать, что между скобками Пуассона, составленными из трех функций u , v и w , существует соотношение

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (27.10)$$

называемое тождеством Якоби.

Одним из важных свойств скобок Пуассона является возможность получения интеграла движения — скобки Пуассона $[u, v]$, если u и v — интегралы движения. Это утверждение составляет содержание теоремы Пуассона. Докажем эту теорему. Вычислим полную производную по t от $[u, v]$:

$$\frac{d[u, v]}{dt} = \frac{\partial [u, v]}{\partial t} + [[u, v], \mathcal{H}] \quad (28.10)$$

и воспользуемся тождеством Якоби, приводя (28.10) к виду

$$\frac{d[u, v]}{dt} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + [u, \mathcal{H}], v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} + [v, \mathcal{H}] \right]. \quad (29.10)$$

^{*} В квантовой механике соотношение $\frac{i}{\hbar} \{u, v\}$, где u, v — операторы физических величин, \hbar — постоянная Планка, называют коммутационными соотношениями. Они определяются как $\frac{i}{\hbar} (uv - vu)$. Коммутационные, или перестановочные, соотношения для операторов q, p введены Гейзенбергом. Процедура так называемого канонического квантования состоит в переходе от фундаментальных скобок Пуассона к перестановочным соотношениям Гейзенберга.

Но если u и v — интегралы движения, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u, \mathcal{H}] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + [v, \mathcal{H}] = 0. \quad (30.10)$$

Следовательно, $\frac{d}{dt} [u, v] = 0$, что и требовалось доказать.

Мы видели, что полная производная по времени любой функции $F(q(t), p(t))$ канонических переменных q, p , которая не зависит от времени явно, определяется равенством

$$-\frac{dF}{dt} = [F, \mathcal{H}]. \quad (31.10)$$

Покажем, что значение $F(q(t), p(t))$ в момент времени t выражается через значение $F(q(0), p(0))$ в момент времени $t=0$ следующей формулой:

$$\begin{aligned} F(q(t), p(t)) &= F(0) + \frac{t}{1!} [F, \mathcal{H}]|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} [[F, \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} + \dots = \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[[\dots [F, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \dots] \mathcal{H}}_n |_{t=0}, \end{aligned} \quad (32.10)$$

где $q(t), p(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям, описывающим эволюцию механической системы, гамильтониан которой $\mathcal{H}(q, p)$ явно от времени не зависит; $F(0) = F(q(0), p(0))$. Ряд в правой части (32.10) предполагается сходящимся.

Доказательство проводится непосредственно подстановкой решения (32.10) в (31.10), в результате которой (31.10) будет удовлетворяться тождественно.

Приведенная формула интересна тем, что на основе ее аналога строится теория возмущений в квантовой теории. В задачах теоретической механики использование этой формулы не всегда дает наиболее простой путь решения задачи, однако она эффективна для нахождения приближенного решения в задачах, где можно выделить малый параметр.

В качестве примера рассмотрим, однако, простую точно решаемую задачу. Найдем $q(t), p(t)$ в задаче гармонического осциллятора. Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Положим $F(q(t), p(t)) = q(t)$ и вычислим скобки Пуассона:

$$[q, \mathcal{H}]|_{t=0} = \frac{p}{m}, \quad [[q, \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} = -\omega^2 q,$$

$$[[[q, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} = -\frac{\omega^3 p}{m} \dots$$

Очевидно, в этом примере правая часть формулы (32.10) легко восстанавливается:

$$\begin{aligned} q(t) &= q + \frac{p}{m} t - \frac{q\omega^2}{2} t^2 - \frac{p}{m} \omega^2 \frac{t^3}{3!} + \dots = \\ &= q \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \dots \right) + \frac{p}{m\omega} \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Функции $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ мы восстановили по первым двум членам их разложений.

Аналогично, полагая $F(q(t), p(t)) = p(t)$ и вычисляя скобки Пуассона, находим

$$[p, \mathcal{H}]|_{t=0} = -\omega^2 m q, \quad [[p, \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} = -\omega^3 p,$$

$$[[[p, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} = \omega^4 m q, \quad [[[[p, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}]|_{t=0} = \omega^4 p,$$

для $p(t)$ получим

$$\begin{aligned} p(t) &= p - \frac{m\omega^2 q}{1!} t - \frac{\omega^2 p}{2!} t^2 + \frac{m\omega^4 q}{3!} t^3 + \frac{\omega^4 p}{4!} t^4 + \dots = \\ &= p \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \dots \right) - m\omega \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= p \cos \omega t - m\omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (34.10)$$

Формулы (33.10) и (34.10) определяют состояние системы в момент времени t , т. е. представляют собой решения канонических уравнений для гармонического осциллятора.

10.4. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преимущество метода Гамильтона по сравнению с методом Лагранжа заключается в том, что в нем обобщенные координаты и обобщенные импульсы выступают равноправно и поэтому метод Гамильтона предоставляет значительно больше возможностей выбора величин, которые принимаются за «координаты» и «импульсы». Тем самым вырабатываются более абстрактные формы изложения основных положений теоретической механики. Мощные теоремы в теории устойчивости движения нелинейных систем (Ляпунова, Колмогорова, Арнольда, Мозера) были доказаны на основе уравнений первого порядка по времени, т. е. уравнений, близких к гамильтоновым. Наконец, методы гамильтоновой динамики оказываются чрезвычайно полезными при построении других физических теорий, где они и сейчас играют фундаментальную роль.

Фактически эти методы явились исходными пунктами при построении квантовой механики, квантовой теории поля, статистической механики.

Во всех этих проблемах значительное место занимают канонические преобразования. Так, можно заметить, что уравнения Гамильтона обладают важным и интересным свойством: они сохраняют свой вид, т. е. являются ковариантными при таких преобразованиях переменных (q) и (p), которые уже не являются точечными преобразованиями. Этот более широкий класс преобразований называют каноническими преобразованиями.

Определение. Каноническими преобразованиями называют такие преобразования канонических переменных (q), (p), которые не изменяют общего вида канонических уравнений

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (35.10)$$

для любой гамильтоновой системы.

Иными словами, если перейти к описанию движения системы новыми переменными

$$Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \quad P_j = P_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \quad (36.10)$$

то в этих переменных уравнения Гамильтона сохраняют свой вид:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j}, \quad (37.10)$$

где $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(Q, P)$ — «новая» функция Гамильтона. Относительно функций Q_j, P_j предполагается, что они однозначные и имеют непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным. Поэтому якобиан преобразований (36.10) должен быть отличным от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_s} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_s}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial p_s} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_s} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_s} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial P_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_s}{\partial q_s} & \frac{\partial P_s}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_s}{\partial p_s} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial (Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \neq 0. \quad (38.10)$$

Важную роль в канонических преобразованиях играет производящая функция, которая может зависеть от переменных

(q), (p), (Q), (P). Всего таких переменных $4s$. Независимых переменных, однако, $2s$, так как $2s$ переменных можно выразить через $2s$ независимых по формулам (36.10). В производящую функцию входят независимые переменные, причем обязательно должно быть s «старых» и s «новых» переменных. Следовательно, всего может быть только четыре вида производящих функций преобразования: $F_1(q, Q)$, $F_2(q, P)$, $F_3(p, Q)$, $F_4(p, P)$.

Переменные Q_j , P_j так же, как и q_j , p_j , являются каноническими в том смысле, что уравнения Гамильтона сохраняют свой вид в этих переменных. Это накладывает определенные ограничения на преобразования переменных, и встает вопрос о необходимых и достаточных условиях «каноничности преобразований».

Очевидно, для того чтобы динамика механической системы в переменных q_j , p_j определялась уравнениями (35.10), а в переменных Q_j , P_j — уравнениями (37.10), нужно потребовать, чтобы и уравнения (35.10), и уравнения (37.10) выводились из модифицированного принципа Гамильтона, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' \right\} dt = 0, \quad (39.10)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right\} dt = 0. \quad (40.10)$$

Какое-либо из этих соотношений можно умножить на произвольную постоянную C (обычно умножают (40.10)), не меняя самих соотношений. Эта постоянная определяет так называемую валентность преобразования. Если $C=1$, то преобразование называют унивалентным. Поскольку наличие постоянной C не влияет существенно на общие выводы, будем полагать ее равной единице.

Напомним, что (39.10) выполняется в конфигурационном пространстве (Q), а (40.10) — в пространстве (q), поэтому подынтегральное выражение в (39.10) определено с точностью до полной производной по времени $\Phi(Q, t)$, а подынтегральное выражение в (40.10) определено с точностью до $\tilde{\Phi}(q, t)$. С учетом этого, приравнявая (39.10) и (40.10), получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' \right) + \frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} \right\} dt, \quad (41.10)$$

где

$$F_1(q, Q, t) = \Phi(Q, t) - \tilde{\Phi}(q, t). \quad (42.10)$$

Формула (41.10) выражает необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. Из нее можно получить

формулы канонического преобразования, которое определяется производящей функцией $F_1(q, Q, t)$. Для этого вычислим $\frac{dF_1}{dt}$ и запишем подынтегральное выражение в виде

$$\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (43.10)$$

Приравнявая коэффициенты при \dot{q}_j, \dot{Q}_j , получаем

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad (44.10)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad (45.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (46.10)$$

Это и есть формулы канонического преобразования, определяемые функцией $F_1(q, Q, t)$. Практическая их значимость заключается в следующем. Задав производящую функцию преобразования $F_1(q, Q, t)$ и разрешая соотношение (44.10), можно получить явный вид функций $Q_j((q), (p))$. Из (45.10), подставляя найденные $Q_j((q), (p))$, получим $P_j((q), (p))$. Наконец, подставляя в (46.10) $q_j((Q), (P)), p_j((Q), (P))$, найдем новый гамильтониан $\mathcal{H}'((Q), (P))$.

Заметим, что уравнение (41.10) является основным в теории канонических преобразований и может быть принято за их определение. Тогда можно доказать, что при переходе к переменным Q_j, P_j , которые определяются формулами (44.10) — (46.10), гамильтонова форма уравнений движения сохраняется. Этот способ изложения обратен приведенному здесь.

Формулы преобразований, определяемых производящими функциями $F_2(q, P, t), F_3(p, Q, t), F_4(p, P, t)$, можно получить, воспользовавшись преобразованиями Лежандра.

Рассмотрим преобразование с функцией $F_2(q, P, t)$. Поскольку F_1 зависит от $(q), (Q), t$, а F_2 — от $(q), (P), t$, причем $-P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$, то для получения формул искомого преобразования можно воспользоваться соотношением (43.10), выражая в нем F_1 через F_2 согласно

$$F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^s P_j Q_j. \quad (47.10)$$

Иными словами, как и в преобразовании Лежандра, мы переходим от переменных $(q), (Q), t$ к переменным $(q), (P), t$, таким, что $P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$. Подставляя (47.10) в (43.10), получим

$$\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j \right) + \\ + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_{j=1}^s (P_j \dot{Q}_j + Q_j \dot{P}_j). \quad (48.10)$$

Отсюда следуют формулы преобразования

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad (49.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad (50.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (51.10)$$

Точно так же, используя (43.10) и рассматривая задачу как переход от переменных (q) , (Q) , t к переменным (p) , (Q) , t , при котором $p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}$, можно получить формулы канонического преобразования, определяемого производящей функцией $F_3((p), (Q), t)$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$F_1 = F_3 + \sum_{j=1}^s p_j q_j \quad (52.10)$$

и

$$\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \\ + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^s (p_j \dot{q}_j + q_j \dot{p}_j). \quad (53.10)$$

Из (53.10) находим

$$q_j = - \frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad (54.10)$$

$$P_j = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad (55.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (56.10)$$

Наконец, преобразование, осуществляемое производящей функцией $F_4((p), (P), t)$, можно получить, используя (43.10) и рас-

смаатривая переход от $(q), (Q), t$ к $(p), (P), t$ с помощью так называемого двойного преобразования Лежандра, так как

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}.$$

Поэтому

$$F_1 = F_4 + \sum_{j=1}^s (p_j q_j - P_j Q_j) \quad (57.10)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \dot{P}_j \right) + \\ &+ \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{j=1}^s (p_j \dot{q}_j + \dot{p}_j q_j - P_j \dot{Q}_j - \dot{P}_j Q_j). \end{aligned}$$

Формулы канонического преобразования, определяемого производящей функцией F_4 , очевидно, таковы:

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad (58.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \quad (59.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (60.10)$$

Заметим, что во всех случаях формула преобразования гамильтониана одинакова:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Примеры канонических преобразований

1. *Тождественное преобразование.* Рассмотрим каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией $F_2 = \sum_{i=1}^s q_i P_i$. Из формул (49.10) — (51.10) находим

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^s \delta_{ji} P_i = P_j, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j. \quad (61.10)$$

Видно, что это действительно тождественное преобразование.

2. Преобразование, меняющее местами координаты и импульсы (инверсия). Пусть преобразование задается производящей функцией

$$F_1 = \sum_{i=1}^s q_i Q_i.$$

Из (44.10) — (46.10) имеем

$$p_j = Q_j, P_j = -q_j, \mathcal{H}' = \mathcal{H}.$$

3. Точечные преобразования, рассматриваемые с точки зрения канонических. Пусть производящая функция канонического преобразования

$$F_2 = \sum_{j=1}^s f_j(q_1, \dots, q_s, t) P_j. \quad (62.10)$$

Из (49.10) — (51.10) получаем

$$Q_j = f_j(q_1, \dots, q_s, t),$$

а это и есть точечные преобразования.

Одним из важных приложений теории канонических преобразований является возможность приведения гамильтониана к такому виду, что задача интегрирования канонических уравнений может стать существенно проще исходной. Например, если «новый» гамильтониан не зависит от какой-то координаты, то «новый» импульс, соответствующий этой координате, является константой, что упрощает общую задачу интегрирования канонических уравнений. Заманчива мысль построить такое преобразование, чтобы новый гамильтониан \mathcal{H}' вообще не содержал новых координат, т. е. чтобы все новые координаты являлись циклическими. Продемонстрируем такую возможность на примере гармонического осциллятора.

Гамильтониан осциллятора в канонических переменных q, p имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Проведем каноническое преобразование, производящую функцию которого выберем в виде

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \operatorname{ctg} Q.$$

Это функция вида $F_1(q, Q)$. Формулы преобразования с F_1 :

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q,$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Отсюда

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} = P\omega = E_0.$$

Обобщенная координата Q является циклической, импульс $P = -E_0/\omega$ — константа движения, причем

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P} = \omega.$$

Интегрирование этих уравнений по времени тривиально

$$Q = \omega t + Q_0.$$

Решение в старых координатах дает закон движения гармонического осциллятора, полученный выше:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0).$$

10.5. СКОБКИ ПУАССОНА — ИНВАРИАНТЫ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Важным свойством скобок Пуассона является их инвариантность относительно канонических преобразований. Докажем это. Пусть даны скобки Пуассона в переменных q, p

$$[u, v]_{q,p} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right). \quad (63.10)$$

Покажем, что скобки Пуассона

$$[u, v]_{Q,P} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j} \frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial Q_j} \right)$$

при условии, что Q_j и P_j получены в результате канонического преобразования, удовлетворяют соотношению

$$[u, v]_{Q,P} = [u, v]_{q,p}. \quad (64.10)$$

Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \quad (65.10)$$

$$\sum_{j,k,k'=1}^s \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial P_j} + \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial P_j} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial u}{\partial q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial P_j} + \frac{\partial u}{\partial p_{k'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial P_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \right\}. \quad (66.10)$$

Пусть, например, каноническое преобразование задается с помощью функции $F_2((q), (P))$. Тогда $p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$, $Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}$ и $\frac{\partial p_k}{\partial Q_j} = 0$, так как $F_2((q), (P))$ не зависит от Q_j . Кроме того, очевидно,

$$\frac{\partial p_k}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_j \partial q_k} \equiv a_{jk} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}.$$

С учетом этих равенств, замечая, что индексы суммирования k, k' можно переобозначить, нетрудно получить из (66.10)

$$[u, v]_{Q,P} = \sum_{j,k,k'=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \right) \frac{\partial q_{k'}}{\partial Q_j} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} =$$

$$= \sum_{k,k'=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \right) \delta_{k'k} = [u, v]_{q,p}. \quad (67.10)$$

Свойство инвариантности доказано.

10.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПУАНКАРЕ

Инвариантами канонических преобразований кроме скобок Пуассона являются и так называемые интегральные инварианты Пуанкаре. На этот счет имеется следующая Теорема Пуанкаре. *Интеграл*

$$J_1 = \iint_S \sum_{j=1}^s dq_j dp_j$$

является инвариантом любого канонического преобразования. Здесь S — произвольная двумерная поверхность в фазовом пространстве размерности $2s$.

Доказать эту теорему рекомендуется самостоятельно. Мы наметим здесь лишь одну из возможных схем доказательства. Положение точки на двумерной поверхности определяется двумя параметрами. Пусть на поверхности S такими параметрами будут ξ и η . Тогда $q_j = q_j(\xi, \eta)$, $p_j = p_j(\xi, \eta)$. Связь между элементами площади $dq_j dp_j$ и $d\xi d\eta$ определяется якобианом

$$\frac{\partial (q_j, p_j)}{\partial (\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial \xi} & \frac{\partial p_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q_j}{\partial \eta} & \frac{\partial p_j}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (68.10)$$

и имеет вид

$$dq_j dp_j = \frac{\partial (q_j, p_j)}{\partial (\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (69.10)$$

Произведем каноническое преобразование от переменных (q) , (p) к переменным (Q) , (P) . Утверждение теоремы записывается в виде

$$\iint_S \sum_{j=1}^s dq_j dp_j = \iint_S \sum_{i=1}^s dQ_i dP_i \quad (70.10)$$

или в эквивалентной форме

$$\iint_S \sum_{j=1}^s \frac{\partial (q_j, p_j)}{\partial (\xi, \eta)} d\xi d\eta = \iint_S \sum_{i=1}^s \frac{\partial (Q_i, P_i)}{\partial (\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (71.10)$$

Но так как область интегрирования является здесь произвольной, (71.10) выполняется, если только равны якобианы

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial (q_j, p_j)}{\partial (\xi, \eta)} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial (Q_i, P_i)}{\partial (\xi, \eta)}. \quad (72.10)$$

Поэтому доказательство инвариантности J_1 эквивалентно доказательству инвариантности сумм якобианов. Далее нужно взять какую-либо производящую функцию канонического преобразования, скажем, $F_2((q), (P), t)$, и, выразив p_j и Q_i через производные от F_2 , нетрудно доказать равенство якобианов.

Оказывается, что можно построить целую последовательность интегральных инвариантов

$$J_2 = \iiint_S \sum_{j,k=1, j \neq k}^s dq_j dp_j dq_k dp_k.$$

Здесь S — произвольная четырехмерная поверхность фазового пространства и т. д. И наконец,

$$J_s = \iiint_V \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s.$$

В J_s интегрирование проводится по произвольной области фазового пространства (как говорят, по объему фазового пространства).

10.7. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим канонические преобразования вида

$$Q_j = q_j + \delta q_j, \quad P_j = p_j + \delta p_j, \quad (73.10)$$

где $\delta q_j, \delta p_j$ — конечные, непрерывные функции обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени, бесконечно малые по сравнению с $|q_j|$ и $|p_j|$ соответственно. Подчеркнем, что δq_j и δp_j являются приращениями q_j и p_j , а не их вариациями.

Канонические преобразования, задаваемые формулой (73.10), называют бесконечно малыми или инфинитезимальными каноническими преобразованиями. Ясно, что (73.10) могут быть построены с помощью производящей функции, близкой к функции тождественного канонического преобразования

$$F_2(q, P) = \sum_{j=1}^s q_j P_j + \varepsilon \tilde{F}_2(q, P, t), \quad (74.10)$$

где ε — малый параметр. F_2 будем называть также производящей функцией. Формулы преобразований, задаваемых (74.10):

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}, \quad P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}, \quad (75.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_j}. \quad (76.10)$$

Учитывая (75.10), видим, что $P_j - p_j = O(\varepsilon)$, и поэтому с точностью до членов первого порядка по параметру ε имеем

$$P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(q, p, t)}{\partial q_j}, \quad (77.10)$$

$$Q_j - q_j = \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(q, p, t)}{\partial p_j}. \quad (78.10)$$

Заметим, что в F_2 можно заменить P_j на p_j . Положим $\varepsilon=dt$, $F_2=\mathcal{H}(q, p)$. Из (77.10)—(78.10) найдем

$$\delta q_j = Q_j - q_j = dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = dt \dot{q}_j = dq_j, \quad (79.10)$$

$$\delta p_j = P_j - p_j = -dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = dt \dot{p}_j = dp_j. \quad (80.10)$$

Мы видим, что с помощью инфинитезимального канонического преобразования с производящей функцией $F_2=\mathcal{H}$ мы получили значения канонических переменных в момент времени $t+dt$, т. е. мы нашли $q(t+dt)$, $p(t+dt)$.

Иными словами, изменение механического состояния гамильтоновой системы за малый промежуток времени dt можно получить посредством инфинитезимального канонического преобразования, генерируемого гамильтонианом. Под этим углом зрения само движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование, производящей функцией которого в каждый данный момент времени является гамильтониан системы.

10.8. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим «элемент объема» фазового пространства

$$d\Gamma = dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0}$$

и вычислим интеграл $\Gamma_0 = \int d\Gamma$ по некоторой области (Γ_0) фазового пространства, изображающий собой ее объем. Представим себе, что в объеме $\Gamma_0 = \int d\Gamma$ в момент времени t_0 сосредоточена бесконечная совокупность одинаковых механических гамильтоновых систем (так называемый ансамбль Гиббса), отличающихся друг от друга только начальными условиями. С течением времени этот ансамбль будет передвигаться в фазовом пространстве, заняв в момент $t_0 + \Delta t$ другую область Γ с объемом

$$\Gamma = \int \int \dots \int_{(\Gamma)} dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s. \quad (81.10)$$

Ясно, что каждая точка фазового пространства перемещается со временем согласно гамильтоновым уравнениям. На фазовой плоскости это движение изображено на рис. 1.10.

Покажем, что при перемещении объем рассматриваемого участка фазового пространства остается неизменным, т. е. $\Gamma_0 = \Gamma$:

$$\int \int \dots \int_{(\Gamma_0)} dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0} = \int \int \dots \int_{(\Gamma)} dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s. \quad (82.10)$$

Учитывая, что реальное движение системы можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование, производящей функцией которого является гамильтониан системы в момент времени t , установим связь между переменными q_{i0}, p_{i0} в момент времени t_0 и переменными q_i, p_i в момент времени $t_0 + \Delta t$. Из (79.10) и (80.10) следует

$$\delta q_i = dq_i = \frac{\partial \mathcal{H}(q_0, p_0, t_0)}{\partial p_{i0}} \Delta t \equiv \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0}} \Delta t, \quad (83.10)$$

$$\delta p_i = dp_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(q_0, p_0, t_0)}{\partial q_{i0}} \Delta t \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q_{i0}} \Delta t. \quad (84.10)$$

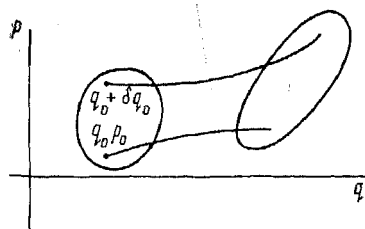


Рис. 1.10

Так как $(q), (p)$ являются функциями $(q_0), (p_0)$, запишем фазовый объем Γ в виде интеграла по области

$$\Gamma = \int \int \dots \int_{(\Gamma_0)} D dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0}. \quad (85.10)$$

где

$$D = \frac{\partial (q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)}{\partial (q_{10} \dots q_{s0}, p_{10} \dots p_{s0})}$$

— якобиан преобразования от переменных $(q), (p)$ к переменным $(q_0), (p_0)$. Элементы якобиана с учетом (83.10) — (84.10) нетрудно получить в виде

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0} \partial q_{j0}} \Delta t, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0} \partial p_{j0}} \Delta t, \quad (86.10)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q_{j0} \partial q_{i0}} \Delta t, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q_{i0} \partial p_{j0}} \Delta t. \quad (87.10)$$

Подставляя (86.10) — (87.10) в выражение для якобиана $D(t_0 + \Delta t)$, найдем с точностью до линейных по Δt членов:

$$D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0} \partial q_{i0}} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q_{i0} \partial p_{i0}} \right) \Delta t = 1. \quad (88.10)$$

Это теорема Лиувилля, выражающая собой закон сохранения фазового объема: Фазовый объем данного ансамбля механических гамильтоновых систем (в отсутствие диссипативных сил) не изменяется во время движения.

Хотя мы доказали теорему о сохранении фазового объема, используя бесконечно малые канонические преобразования, не-

трудно доказать ее и для конечных канонических преобразований, замечая, что канонические преобразования обладают групповыми свойствами.

10.9. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Рассмотрим некоторую функцию обобщенных координат и обобщенных импульсов $u((q), (p))$. Предположим, что в результате бесконечно малого канонического преобразования эта функция изменилась на δu . Под изменением функции понимаем замены ее аргументов $q \rightarrow Q, p \rightarrow P$, т. е. переход от $q(t), p(t)$ к их значениям в момент времени $t + \Delta t$. Вычислим δu :

$$\begin{aligned} \delta u &= u(q_j + \delta q_j, p_j + \delta p_j) - u(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial u}{\partial p_j} \delta p_j \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j} \right) = \varepsilon [u, \tilde{F}_2]. \end{aligned} \quad (89.10)$$

Здесь мы использовали формулы инфинитезимальных канонических преобразований. Положим теперь, что u есть гамильтониан системы. Тогда

$$\delta \mathcal{H} = \varepsilon [\mathcal{H}, \tilde{F}_2], \quad (90.10)$$

и если \tilde{F}_2 — интеграл движения, то $[\mathcal{H}, \tilde{F}_2] = 0$. Из (90.10) видно, что инфинитезимальные канонические преобразования осуществляются такой производящей функцией \tilde{F}_2 , что гамильтониан системы не изменяется, так как $\delta \mathcal{H} = 0$. Это наблюдение позволило высказать утверждение, что все первые интегралы уравнений движения являются производящими функциями тех инфинитезимальных канонических преобразований, при которых не меняется гамильтониан.

Пример. Рассмотрим систему, гамильтониан которой не содержит обобщенную координату q_i , т. е. q_i — циклическая координата. Запишем уравнения инфинитезимальных преобразований

$$\delta q_j = \varepsilon \delta_{ij} \equiv \sum_{i=1}^s |dq_i| \delta_{ij}, \quad \delta p_i = 0. \quad (91.10)$$

Мы учли, что $p_i = \text{const}$ и $\delta p_i = 0$.

С другой стороны,

$$\delta q_j = \varepsilon \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial p_j}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i}. \quad (92.10)$$

Сравнивая (91.10) и (92.10), получаем $\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial q_i} = 0$, $\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial p_j} = \delta_{ij}$, откуда

$\bar{F}_2 = p_i$, т. е. производящая функция представляет собой канонический импульс, сопряженный координате q_i .

$$F_1(q, Q, t)$$

$$F_2(q, P, t)$$

$$F_3(q, P, t)$$

$$F_4(p, P, t)$$

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}$$

$$P_j = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$F_1(q, Q, t) = \mathcal{P}(Q, t) - \mathcal{Q}(q, t)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}) dt =$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum \dot{Q}_j P_j - \mathcal{H}') dt = \frac{dF_1(q, P, t)}{dt}$$

(q, p, t)

$T(p, Q, t)$

Глава 11

МЕТОД ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

$$F_2 = \sum_j P_j Q_j$$

$$F_1 = F_2$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_j}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_j}$$

11.1. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Канонические преобразования обладают групповыми свойствами, т. е. переход от переменных $(q), (p)$ к переменным $(Q), (P)$ можно осуществить следующими способами. Пусть, например, преобразования генерируются производящей функцией $F_1(q, Q)$. Рассмотрим двухэтапный переход от $(q), (p)$ к Q', P' , который осуществляется функциями $F_1(q, Q)$ и $F_1(Q, Q')$. Тогда на первом этапе

$$\delta F_1(q, Q) = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \delta Q_j \right), \quad (1.11)$$

а на втором

$$\delta \tilde{F}_1(Q, Q') = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q_j} \delta Q_j + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q'_j} \delta Q'_j \right). \quad (2.11)$$

Из (1.11) и (2.11) следует, что переход $(q), (p) \rightarrow (Q'), (P')$ можно осуществить сразу с помощью производящей функции

$$F_1' = F_1(q, Q) + \tilde{F}_1(Q, Q'), \quad \text{так как} \quad -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q_j} = P_j \quad \text{и}$$

$$\delta F_1' = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q'_j} \delta Q'_j \right). \quad (3.11)$$

Таким образом, канонические преобразования обладают групповыми свойствами. Это наводит на мысль попытаться найти такое каноническое преобразование, с помощью которого можно было бы совершить переход от $p_j(t)$ к $P_j(t) = p_j(t_0)$ и от $q_j(t)$ к $Q_j = q_j(t_0)$. Если бы удалось найти способ построения производящей функции такого преобразования, то по формулам, связывающим старые и новые переменные, мы нашли бы канонические переменные как функции

$$q_j = q_j((q_0), (p_0), t), \quad p_j = p_j((q_0), (p_0), t),$$

$$(q_0) = q_j(t_0), \quad (p_0) = p_j(t_0), \quad j = 1, \dots, s,$$

что, очевидно, эквивалентно интегрированию уравнений Гамильтона, т. е. полному решению основной задачи механики гамильтоновым методом. Вопрос можно сформулировать так: *Найти каноническое преобразование, проведение которого сведет задачу интегрирования канонических уравнений к тривиальной.*

11.2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Самый простой способ решения сформулированной задачи состоит в том, чтобы «новый» (преобразованный) гамильтониан \mathcal{H}' сделать равным нулю. Тогда канонические уравнения в новых переменных становятся тривиальными:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} = 0, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.11)$$

и, действительно, Q_j и P_j будут постоянными. Но при этом \mathcal{H}' должен быть связан с \mathcal{H} формулой

$$0 = \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad \psi_0 = \text{const} \quad (5.11)$$

где F_1 — производящая функция канонического преобразования.

Следовательно, (5.11) есть уравнение для производящей функции преобразования. Выбирают $F_1 \equiv F_2(q, P, t)$. Но так как гамильтониан \mathcal{H} зависит от «старых» переменных (q), (p), а F_2 — от «старых» и «новых» переменных, \mathcal{H} нужно выразить через те же, что и входящие в функцию F_2 переменные, используя уравнения преобразования

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}. \quad (6.11)$$

Подставив (6.11) в \mathcal{H} , получим дифференциальное уравнение в частных производных, которым определяется F_2 как функция координат и времени:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_j, \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, t\right) = 0. \quad (7.11)$$

Одно из решений этого уравнения обозначают буквой S . Гамильтон назвал это решение главной функцией. Уравнение, определяющее эту функцию,

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right) = 0} \quad S(q_j, t) \quad (8.11)$$

называется уравнением Гамильтона — Якоби.

Обсудим вопрос о функции S более подробно. Прежде всего, так как S является решением (8.11), ясно, что функция S зависит от q_j , t , в то время как нам нужно знать и характер зави-

симости S от «новых» импульсов P_j . С другой стороны, о них мы знаем, что они должны быть постоянными. И тому и другому можно удовлетворить, если в качестве S выбрать так называемый полный интеграл уравнения (8.11).

Определение. Полным интегралом уравнения первого порядка

$$L\left(t, x_1, \dots, x_s, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s}\right) = 0$$

называют функцию $f(t, x_1, \dots, x_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s+1})$, удовлетворяющую этому уравнению и содержащую столько независимых постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$, сколько в этом уравнении независимых переменных t, x_1, \dots, x_s .

В нашем случае независимыми переменными являются t и s обобщенных координат q_j , поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби будет содержать $s+1$ постоянную. Одна из этих постоянных, скажем, α_{s+1} , аддитивная, так как в силу того, что уравнение (8.11) содержит только производные от функции S , но не саму функцию, если S есть решение уравнения (8.11), то и $S + \alpha_{s+1}$ — решение этого уравнения *).

Вспомним теперь, что полный интеграл S нам нужен в качестве производящей функции канонического преобразования, а в формулы преобразования входит не сама функция S , а ее производные $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ и $\frac{\partial S}{\partial P_j}$. Поэтому аддитивная постоянная α_{s+1} несущественна, а полный интеграл уравнения (8.11) можно записать в виде

$$S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (9.11)$$

причем теперь ни одна из постоянных α_j не является аддитивной. Если α_j принять за «новые» переменные P_j , то S в точности будет соответствовать F_2 по их зависимости от одних и тех же аргументов. Поэтому можно положить $P_j = \alpha_j$.

Заметим, что α_j можно выразить через значения координат (q_0) и импульсов (p_0) в начальный момент времени t_0 , как и должно быть по самому смыслу преобразований. Итак, если мы нашли полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби S , то, используя его как производящую функцию канонического преобразования, получим первую группу уравнений преобразования:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial S(q, (\alpha), t)}{\partial q_j}. \quad (10.11)$$

Полагая в этих формулах $t = t_0$, найдем α_j как функции (q_0) , (p_0) . Следовательно, α_j определяются заданными начальными условиями.

* Известно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения.

21 175

Вторая группа уравнений преобразования есть по существу преобразование к новым (постоянным) координатам

$$Q_j = \beta_j = \frac{\partial F_2}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial S((q), (\alpha), t)}{\partial \alpha_j}. \quad (11.11)$$

«Новые» координаты Q_j мы обозначаем буквой β_j . Постоянные β_j можно выразить через начальные значения $(q_0), (p_0)$, полагая в (11.11) $t=t_0$. Если же (11.11) разрешить относительно q_j , то мы получим

$$q_j = q_j((\alpha), (\beta), t) = q_j((q_0), (p_0), t). \quad (12.11)$$

Сформулируем общий алгоритм нахождения решений канонических уравнений методом Гамильтона — Якоби.

1. Получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (8.11), т. е. найти решение этого уравнения, содержащее s существенных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

2. Приравнять частные производные S по этим постоянным интегрирования с новым постоянным: $\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j$.

3. Разрешая эти уравнения относительно координаты q_j , записать их в форме

$$q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s).$$

Эти процедуры приводят к полному решению задачи интегрирования канонических уравнений, так как в итоге мы получаем q_j, p_j в виде явных функций t и $2s$ постоянных интегрирования, которые могут быть выбраны в соответствии с начальными условиями.

4. Зависимость «старых» импульсов от времени можно найти из соотношений $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$.

Итак, с помощью полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби S осуществляется переход к постоянным координатам β_j и импульсам α_j . Решение уравнения Гамильтона — Якоби эквивалентно решению рассматриваемой нами задачи интегрирования системы канонических уравнений. С точки зрения математики это известное соответствие между уравнением первого порядка в частных производных и системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно известно, что каждому уравнению в частных производных соответствует определенная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

11.3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ

Функции $q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)$, $p_j = p_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)$, полученные из соотношений

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

являются решениями канонических уравнений; S — полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби.

Докажем эту теорему. Продифференцируем по времени $\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (13.11)$$

Подставим решение $S(t, q_1(t), \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ в уравнение Гамильтона—Якоби и продифференцируем его по α_j :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (14.11)$$

Мы учли, что производные $\frac{\partial S}{\partial q_k}$, содержащие постоянные α_j , стоят в гамильтониане \mathcal{H} на местах импульсов p_k .

Уравнения (13.11) образуют систему s алгебраических неоднородных уравнений, из которых можно найти \dot{q}_k . Определитель этой системы равен функциональному определителю

$$\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \right|,$$

который не равен нулю в силу независимости α_j в полном интеграле $S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Аналогичную систему с теми же коэффициентами образуют уравнения (14.11) относительно $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$. Значит,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad k=1, 2, \dots, s,$$

т. е. мы приходим к первой группе канонических уравнений.

Чтобы получить вторую группу канонических уравнений, продифференцируем соотношения $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ ($j=1, 2, \dots, s$) по t :

$$\dot{p}_j = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k. \quad (15.11)$$

Далее продифференцируем $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left((q), \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right), t \right) = 0$ по q_j :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0. \quad (16.11)$$

Сравнивая (15.11) и (16.11), получаем

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, s.$$

Мы получили вторую группу канонических уравнений. Теорема Якоби доказана. Справедлива также обратная теорема: Из решений системы канонических уравнений

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, s,$$

можно составить полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби $S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

11.4. КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим консервативную систему, когда

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$. В этом случае уравнение Гамильтона—Якоби явно времени не содержит, а зависимость S от времени, очевидно, сводится к слагаемому $-\mathcal{H}_0 t$:

$$S = S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - \mathcal{H}_0 t. \quad (17.11)$$

Функцию S называют также действием, функцию S_0 , зависящую только от координат, называют укороченным действием.

Подставляя (17.11) в (8.11), получим уравнение Гамильтона—Якоби для укороченного действия в виде

$$\mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = \mathcal{H}_0. \quad (18.11)$$

11.5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Предположим, что координата q_k и соответствующая производная $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ входят в уравнение Гамильтона—Якоби только в виде какой-то комбинации $g\left(q_k \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)$, которая не содержит никаких других координат, производных $\frac{\partial S}{\partial q_j}$, $j \neq k$, и времени, т. е. допустим, что уравнение в частных производных имеет следующую структуру:

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (19.11)$$

Ищем решение (19.11) в виде суммы

$$S = \tilde{S}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t) + S_k(q_k). \quad (20.11)$$

Подставив это выражение в (19.11), получим

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k \frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (21.11)$$

Но поскольку (20.11) есть решение (19.11), то очевидно уравнение (21.11) распадается на два уравнения:

$$g\left(q_k \frac{dS_k}{dq_k}\right) = \alpha_k, \quad (22.11)$$

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \alpha_k\right) = 0, \quad (23.11)$$

где α_k — произвольная постоянная.

Уравнение (22.11) является обыкновенным дифференциальным уравнением, из которого функцию $S_k(q_k)$ можно найти простым интегрированием. После такого разделения мы получим уравнение в частных производных (23.11) с меньшим (на одну) числом независимых переменных.

В ряде случаев разделение переменных можно произвести полностью. Если это возможно и механическая система консервативна, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби целиком сводится к квадратурам. Для консервативной системы с s степенями свободы искомый полный интеграл представляется в виде

$$S = \sum_{j=1}^s S_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - \mathcal{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s) t, \quad (24.11)$$

где каждая из функций S_j зависит лишь от одной координаты q_j , а \mathcal{H}_0 как функция произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

получается в результате подстановки $S_0 = \sum_{j=1}^s S_j$ в уравнение (18.11). Заметим, что \mathcal{H}_0 можно выбрать также в качестве одной из постоянных α . Метод разделения переменных включает в себя как частный случай циклической координаты.

Пусть, например, q_1 — циклическая координата. Тогда, очевидно, уравнение (22.11) приобретает вид

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1 \quad (25.11)$$

и его решение находится тривиальным интегрированием $S_1 = \alpha_1 q_1$. Легко видеть, что постоянная α_1 имеет смысл сохраняющегося обобщенного импульса, сопряженного координате q_1 . Отметим, что отделение времени фактически соответствует методу разделения переменных, когда роль циклической переменной играет t .

Пример. Частица массы m в однородном и постоянном гравитационном поле напряженности $g = (0, 0, -g)$.

Гамильтониан системы запишем в декартовой системе координат

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz. \quad \times y$$

Уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + mgz = 0. \quad (26.11)$$

Решение (26.11) ищем в виде

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 y + S_3(z) - \alpha_3 t. \quad (27.11)$$

Здесь мы положили $\mathcal{H}_0 = \alpha_3$. Подставляя (27.11) в (26.11), получим

$$\left(\frac{dS_3}{dz} \right)^2 = 2m \left(\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right), \quad (28.11)$$

откуда

$$S_3(z) = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz \quad (29.11)$$

и

$$S = -\alpha_3 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz. \quad (30.11)$$

Выражение (30.11) представляет собой полный интеграл уравнения (26.11). Производные S по α_i приравняем новым постоянным:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (31.11)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y - \frac{\alpha_2}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (32.11)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}. \quad (33.11)$$

Вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}$$

и результат подставим в (31.11), (32.11), (33.11):

$$\beta_1 = x + \frac{2^{1/2}\alpha_1}{m^{3/2}g} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}, \quad (34.11)$$

$$\beta_2 = y + \frac{2^{1/2}\alpha_2}{m^{3/2}g} \sqrt{\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} - mgz}, \quad (35.11)$$

$$\beta_3 = -t - \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \sqrt{\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} - mgz}. \quad (36.11)$$

Из (34.11), (35.11) следует, что траекторией частицы является парабола; уравнением (36.11) определяется закон движения $z(t)$. Сохраняющиеся компоненты импульса p_x , p_y найдем из соотношений

$$\left. \frac{dS}{dt} \right| = 0 \quad p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2.$$

Компоненту импульса p_z можно найти как функцию z из соотношения

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \sqrt{2m(\alpha_3 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

11.6. ПЕРЕМЕННЫЕ «ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ»

Рассмотрим консервативную механическую систему и предположим, что существует хотя бы один набор канонических переменных, в котором все переменные разделяются. Это нужно понимать так: можно отыскать канонические переменные, в которых решение уравнения Гамильтона—Якоби примет вид (24.11). Далее предположим, что исследуемые нами механические системы могут совершать движения, близкие к периодическим: мы рассматриваем такие движения, в которых либо каждая из переменных $q_i(t)$, $p_i(t)$ является периодической функцией времени с одинаковым периодом, либо каждый импульс p_i является периодической функцией координаты q_i , в то время как сама координата не является периодической функцией времени. В первом случае движение называют либрацией, во втором — вращением. Нелишне также подчеркнуть,

что здесь q_j, p_j и есть тот самый набор канонических переменных, в котором переменные в уравнении Гамильтона—Якоби полностью разделяются.

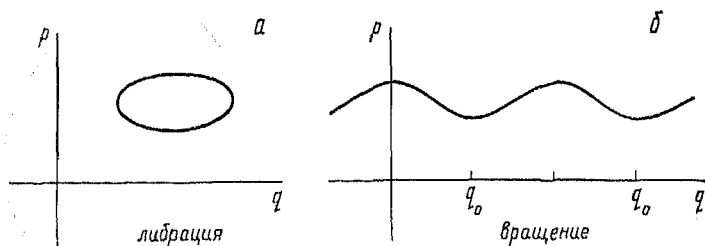


Рис. 1.11

Заметим, что механические системы, в которых реализуются вышеупомянутые движения, не столь редки. Есть системы,

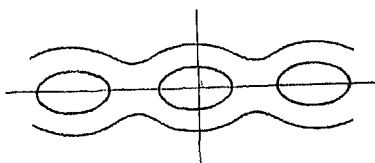


Рис. 2.11

в которых возможны оба движения — либрация и вращение — в зависимости от того, какая область значений параметров и начальных значений реализуется. Проекция фазовой траектории такой системы на соответствующую плоскость качественно изображена на рис. 2.11.

Уравнение Гамильтона—Якоби для рассматриваемых нами систем имеет вид

$$\mathcal{H} \left(g_1 \left(q_1 \frac{\partial S_0}{\partial q_1} \right), \dots, g_s \left(q_s \frac{\partial S_0}{\partial q_s} \right) \right) = \mathcal{H}_0, \quad (37.11)$$

причем

$$g_j \left(q_j \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (38.11)$$

$$S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{j=1}^s S_{0j}(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (39.11)$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (40.11)$$

Канонические импульсы p_j , определяемые соотношениями

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, \quad (41.11)$$

зависят только от q_j и являются периодическими функциями этой же координаты. Весьма плодотворной является идея перехода к таким «новым» каноническим переменным, в которых

«новые» импульсы были бы постоянными движения J_j , зависящими от постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$:

$$p_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (42.11)$$

а все «новые» координаты были бы циклическими, т. е. «новый» гамильтониан зависел бы только от импульсов

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, \dots, J_s). \quad (43.11)$$

Из (41.11) видно, что в качестве J_j можно выбрать

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (44.11)$$

где интегралы берутся по полным периодам изменения импульсов p_j как функций соответствующих координат.

«Новые» переменные J_j являются независимыми функциями (α) , что следует из (42.11):

$$J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (45.11)$$

Их называют переменными действия. Разрешая последние соотношения относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, получим

$$\alpha_j = \alpha_j(J_1, \dots, J_s), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (46.11)$$

Подставляя (46.11) в (40.11), найдем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, \dots, J_s). \quad (47.11)$$

Укороченное действие $S_0(q), (\alpha)$ после подстановки в него α_j из (46.11) приобретает вид

$$S_0(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s).$$

Но по установленному выше смыслу S_0 как функцию (q) , (J) можно рассматривать как производящую функцию канонического преобразования к переменным, в которых (J) играют роль импульсов. «Новые» координаты при таком преобразовании можно получить из соотношений

$$Q_j \equiv \varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}. \quad (48.11)$$

«Новые» координаты мы обозначили буквой φ_j ; они называются угловыми переменными.

Канонические переменные J, φ называются переменными «действие — угол». Уравнения Гамильтона в этих переменных очень просты:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j}, \quad (49.11)$$

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \varphi_j} = 0. \quad (50.11)$$

Из (49.11) с учетом (47.11) получим

$$\varphi_j = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j} t + \varphi_{j0}. \quad (51.11)$$

Каждая из угловых переменных, как видно, является линейной функцией времени.

Покажем теперь, что величина $\omega_j = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j}$ есть частота изменения импульса p_j . Для этого найдем приращение $\Delta \varphi_j$ за полный период изменения $p_j(q_j)$ при условии постоянства всех других (кроме q_j) координат:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_j &= \oint \frac{d\varphi_j}{dq_k} dq_k = \oint \frac{\partial^2 S_0}{\partial J_j \partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k = \\ &= \frac{\partial}{\partial J_j} \oint p_k dq_k = 2\pi \frac{\partial J_k}{\partial J_j} = 2\pi \delta_{kj}, \end{aligned} \quad (52.11)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера со значениями $\delta_{kj}=1$, $k=j$, $\delta_{kj}=0$, $k \neq j$. С другой стороны,

$$\Delta \varphi_j = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j} T_j, \quad (53.11)$$

где T_j — полный период изменения импульса p_j . Сравнивая (52.11) с (53.11), видим, что

$$2\pi = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j} T_j = \omega_j T_j, \quad (54.11)$$

откуда следует, что

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T_j} \quad (55.11)$$

есть частота изменения импульса.

Фактически мы показали, что для нахождения частот ω_j нет необходимости решать динамическую задачу, т. е. отыскивать*) $q_j(t)$. Для определения ω_j нужно:

*) Подчеркнем, что это утверждение относится лишь к системам, которые могут совершать движения, близкие к периодическим в указанном в начале п. 11.6 смысле слова. Движение произвольной механической системы со многими степенями свободы в общем случае не является периодическим ни в целом, ни по каждой из ее координат в отдельности, несмотря на то что задача о движении этой системы допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона—Якоби. Можно показать, однако, что любая однозначная функция механического состояния системы $f(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$, выраженная через переменные «действие — угол», является периодической функцией f_j с периодом 2π . Поэтому ее можно представить в виде разложения в кратный ряд Фурье вида

$$f(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} C_{l_1, l_2, \dots, l_s} e^{it(l_1\omega_1 + \dots + l_s\omega_s)}.$$

- 1) определить функции $p_j = p_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$;
- 2) найти переменные действия как функции $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$:
 $J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$;
- 3) определить гамильтониан \mathcal{H}_0 как функцию J_1, J_2, \dots, J_s :
 $\mathcal{H}_0(J_1, \dots, J_s)$;
- 4) найти частные производные $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j} = \omega_j$.

Пример. Определить частоты трехмерного неизотропного осциллятора.

Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2}.$$

Уравнение Гамильтона—Якоби для укороченного действия

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2} = \mathcal{H}_0 \quad (56.11)$$

сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$g_1 \left(x \frac{\partial S_0}{\partial x} \right) = \left(\frac{dS_{01}}{dx} \right)^2 + m^2 \omega_1^2 x^2 = p_x^2 + (m\omega_1 x)^2 = \alpha_1, \quad (57.11)$$

$$g_2 \left(y \frac{\partial S_0}{\partial y} \right) = \left(\frac{dS_{02}}{dy} \right)^2 + (m\omega_2 y)^2 = p_y^2 + (m\omega_2 y)^2 = \alpha_2, \quad (58.11)$$

$$g_3 \left(z \frac{\partial S_0}{\partial z} \right) = \left(\frac{dS_{03}}{dz} \right)^2 + (m\omega_3 z)^2 = p_z^2 + (m\omega_3 z)^2 = \alpha_3. \quad (59.11)$$

При этом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2m},$$

а переменные действия — «новые импульсы» —

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_y dy, \quad J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint p_z dz. \quad (60.11)$$

Каждый из членов этого ряда является периодической функцией времени с частотой

$$J_1 \omega_1 + \dots + J_s \omega_s.$$

Весь ряд, однако, не будет представлять собой в целом строго периодическую функцию, если все частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ не кратны какой-либо одной из них. Полагая $f = q_j$ или $f = p_j$, видим, что последнее замечание относится и к q_j и p_j .

Видно, что в соответствующих плоскостях фазовые траектории представляют собой эллипсы с полуосями $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_1/m\omega_1}$ в плоскости $p_x x$, $\sqrt{\alpha_2}$, $\sqrt{\alpha_2/m\omega_2}$ в плоскости $p_y y$, $\sqrt{\alpha_3}$, $\sqrt{\alpha_3/m\omega_3}$ в плоскости $p_z z$ соответственно. Величины J_1 , J_2 , J_3 представляют собой площади этих эллипсов, деленные на 2π . Поэтому

$$J_1 = \alpha_1/2m\omega_1, \quad J_2 = \alpha_2/2m\omega_2, \quad J_3 = \alpha_3/2m\omega_3$$

и

$$\mathcal{H}_0(J_1, J_2, J_3) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 J_3.$$

Следовательно, частоты изменения импульсов p_x , p_y , p_z равны

$$\omega_x = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} = \omega_1, \quad \omega_y = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_2} = \omega_2, \quad \omega_z = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_3} = \omega_3.$$

11.7. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Важным свойством переменных действия является свойство адиабатической инвариантности, которое заключается в том, что переменные действия сохраняют свои постоянные значения и в тех случаях, когда гамильтониан системы зависит от времени через некоторые параметры $\lambda_j(t)$, которые, как говорят, адиабатически меняются со временем, т. е. очень медленно. Под медленными подразумеваются такие изменения, при которых $\lambda_j(t)$ мало меняются за отрезки времени, равные по порядку величины периодам T_j , т. е.

$$\left| \frac{d\lambda_j}{dt} \right| T_j \ll \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (61.11)$$

Ясно, что такие механические системы не являются строго изолированными. Покажем, что переменные действия в таких системах являются адиабатическими инвариантами.

Рассмотрим систему, совпадающую в каждый момент времени с изученной выше консервативной системой, которая допускает полное разделение переменных. Предполагаем также, что движение системы финитно. Гамильтониан такой системы явно зависит от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, которые удовлетворяют условиям (61.11); его можно представить в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \{g_1(q_1, p_1, \lambda_1), \dots, g_s(q_s, p_s, \lambda_s)\}. \quad (62.11)$$

При постоянном λ_j p_j являются периодическими функциями соответствующих координат q_j ; q_j в данном случае являются периодическими функциями времени.

Если параметры λ_j меняются со временем медленно, то, несмотря на то что система, описываемая гамильтонианом (62.11) неконсервативна, решение уравнения Гамильтона—Якоби можно искать в виде, близком к (24.11):

$$S = -\mathcal{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t + S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (63.11)$$

где, однако, параметры λ_j , а поэтому и величины α_k и \mathcal{H}_0 медленно меняются со временем. Подставляя (63.11) в уравнение Гамильтона—Якоби и пренебрегая в нем членами, пропорциональными $\dot{\lambda}_j$, получим уравнение «нулевого приближения»

$$\mathcal{H} \left\{ g_1 \left(q_1 \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \lambda_1 \right), \dots, g_s \left(q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, \lambda_s \right) \right\} = \mathcal{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (64.11)$$

В силу (61.11) это уравнение можно решать, полагая все λ_j постоянными, и лишь в построенных решениях считать их заданными функциями времени. Поэтому все формулы, полученные выше для консервативной системы, остаются справедливыми, но во все соотношения теперь войдут зависящие от времени параметры λ_j .

Производящая функция канонического преобразования от переменных $(q), (p)$ к переменным $(\varphi), (J)$ определяется функцией S_0 , которая теперь, однако, будет зависеть и от λ_j :

$$S_0 = S_0(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (65.11)$$

Заметим, что J_j также зависят от λ .

Напишем формулы канонического преобразования, генерируемого функцией (65.11):

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}, \quad (66.11)$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (67.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \mathcal{H}(J_1, \dots, J_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s) + \\ + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \end{aligned} \quad (68.11)$$

Новые уравнения движения имеют вид

$$\dot{\varphi}_k = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial J_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_k} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial J_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (69.11)$$

$$\dot{J}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \varphi_k} = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (70.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, s.$$

Во всех формулах дифференцирование по λ_j должно производиться при постоянных (q) и (J) ; после дифференцирования в

формулах (69.11), (70.11) выполняется подстановка (67.11) и производные $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ выражаются через $J_1, \dots, J_s, \varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Для доказательства свойства адиабатической инвариантности переменных J_k усредним уравнения (70.11) по интервалу времени, малому по сравнению со временем заметного изменения параметров λ_j и достаточно большому по сравнению с периодами системы. При таком выборе интервала времени величины λ_j (в силу медленного изменения λ_j) можно выносить из-под знака среднего. Следовательно,

$$\bar{J}_k = - \sum_{j=1}^s \frac{\overline{\partial^2 S_0}}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j} \lambda_j, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (71.11)$$

Покажем теперь, что производные $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ являются однозначными периодическими функциями φ . Если это так, то тогда их можно будет разложить в ряды Фурье, коэффициенты которых будут зависеть от (J) и (λ) . В свою очередь ряды Фурье для производных $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)$ не будут содержать постоянных членов, и поэтому при усреднении по достаточно большому интервалу времени все производные $\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j}$ обратятся в нуль и адиабатическая инвариантность всех J_k будет доказана.

Заметим, что S_0 — неоднозначная функция координат q_j , так как согласно (66.11) ее можно представить в виде

$$S_0 = \sum_{j=1}^s \int p_j dq_j. \quad (72.11)$$

За полный период изменения координаты q_j (при остальных фиксированных) S_0 получает приращение

$$\Delta S_0 = \oint p_j dq_j = 2\pi J_j. \quad (73.11)$$

Функции $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ — однозначные функции координат, так как при дифференцировании по λ_j добавки, кратные $2\pi J_j$, которые приводят к неоднозначности S_0 , исчезнут. Так как $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ — однозначные функции координат q_j , то они являются периодическими функциями угловых переменных φ_j ; эти функции не будут менять свои значения при изменении φ_j на 2π (при заданных значениях J_j). Иными словами, любая однозначная функция $F((q), (p))$, выраженная через канонические переменные φ, J , является периодической функцией каждой φ_j с периодом, равным 2π . Итак, все $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ являются однозначными периодичес-

кими функциями (φ). Выше мы показали, что в этом случае все $\bar{J}_k=0$ и, значит, все

$$J_k=J_{k0}, \quad k=1, 2, \dots, s.$$

Свойство адиабатической инвариантности всех переменных действия доказано.

Пример. Как изменится энергия заряженной частицы e массы m в центральном поле $U(r)$ при медленном включении слабого однородного магнитного поля напряженности H ?

Запишем функцию Гамильтона заряда в сферической системе координат (ось Oz декартовой системы координат параллельна H):

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r) - eH\rho_\varphi/2mc - e^2 H^2 r^2 \sin^2 \theta / 8mc^2.$$

Здесь c — скорость света. По условию задачи магнитное поле слабое, поэтому последним членом (квадратичным по H) пренебрегаем.

Уравнение Гамильтона—Якоби с учетом этого приобретает вид

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + U(r) - \frac{eH}{2cm} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right) = E_0, \quad (74.11)$$

где E_0 — энергия частицы.

Решение ищем в виде

$$S_0 = S_{0r}(r, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + S_{0\theta}(\theta, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + p_{\varphi 0} \varphi.$$

Здесь в качестве постоянной α_3 мы выбрали $p_{\varphi 0}$. Подставляя S_0 в (74.11), получаем

$$\frac{r^2}{2m} \left(\frac{dS_{0r}}{dr} \right)^2 - \left(E_0 - U(r) - \frac{eH p_{\varphi 0}}{2cm} \right) r^2 = \alpha_1, \quad (75.11)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_{0\theta}}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_{\varphi 0}^2}{2m \sin^2 \theta} = -\alpha_1. \quad (76.11)$$

Уравнение (75.11) определяет функцию $p_r(\alpha_1, \alpha_2, p_{\varphi 0}, E_0, r)$, которая нужна для вычисления переменной действия J_r :

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\alpha_1 + \left(E_0 - U(r) - \frac{eH p_{\varphi 0}}{2cm} \right) r^2} \frac{dr}{r}.$$

Очевидно, J_r будет совпадать с J_r , вычисленным для случая $H=0$, если в последнем выражении вместо E_0 подставить комбинацию $E_0 - \frac{eH p_{\varphi 0}}{2cm}$. Значит, величина $E_0 + \frac{eH p_{\varphi 0}}{2cm}$ остается

ся постоянной при медленном включении однородного магнитного поля. Кроме нее постоянной будет величина $p_{\varphi 0}$ — φ -я компонента обобщенного импульса заряда. По физическому смыслу $p_{\varphi 0}$ — сохраняющаяся проекция момента импульса заряда на вектор H .

11.8. ТЕОРЕМА НЕТЕР

Теорема Нетер играет фундаментальную роль в современной теоретической физике. Она доказывает существование общей связи между преобразованиями, которые оставляют действие системы инвариантным, и законами сохранения. Теорема Нетер в явном виде устанавливает эту связь и позволяет построить соответствующие динамические инварианты.

Теорема Нетер. Всякому непрерывному обратимому преобразованию координат и времени (зависящему от постоянных параметров), оставляющему неизменной (т. е. инвариантной) функцию действия рассматриваемой гамильтоновой системы, соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа этой системы. Первый интеграл уравнений Лагранжа называют динамическим инвариантом.

Теорему Нетер можно закончить другим (вполне эквивалентным) утверждением: «...соответствует некоторая теорема сохранения и константа движения».

Любое непрерывное преобразование имеет инфинитезимальное (т. е. бесконечно малое) преобразование. Совершим бесконечно малое преобразование координат и времени (временную переменную t здесь мы рассматриваем как координату):

$$q'_j = q_j + \varepsilon Q_j((q), t), \quad (77.11)$$

$$t' = t + \varepsilon T((q), t). \quad (78.11)$$

Очевидно, если параметр $\varepsilon=0$, то преобразование (77.11), (78.11) переходит в тождественное.

Рассмотрим реальное движение системы в нештрихованных переменных: $q_j = F_j(t)$. В штрихованных переменных в силу инвариантности действия

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathcal{L}(q', \dot{q}', t') dt'$$

реальное движение системы происходит по закону

$$q'_j = F_j(t').$$

Выразим закон движения системы в переменных q_j, t , ограничиваясь членами порядка ε :

$$q_j(t) = F_j(t') - \varepsilon Q_j(F_j(t), t),$$

или

$$q_j(t - \delta t) = F_j(t) - \delta q_j,$$

где $\delta q_j = \varepsilon Q_j(F_j(t), t)$, $\delta t = \varepsilon T(F(t), t)$.

При таком преобразовании (имеется в виду преобразование (77.11), (78.11)) траектория системы в конфигурационном пространстве (линия AB) меняется (рис. 3.11). В результате изменения координат и времени начала и конца движения переход от траектории AB в траектории $A'B'$ приводит к изменению действия. Нетрудно найти это изменение ΔS в явном виде:

$$S_{A'B'} - S_{AB} = \left[\frac{\partial S}{\partial t} (-\delta t) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} (-\delta q_j) \right]_A^B. \quad (79.11)$$

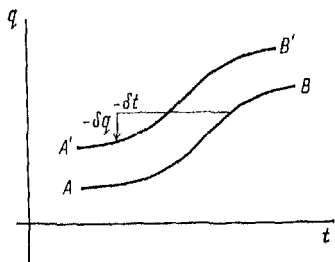


Рис. 3.11

Введем понятие функции действия

$$S(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt, \quad (80.11)$$

предполагая, что в (80.11) вместо (q) , (\dot{q}) подставляются решения канонических уравнений, т. е. функции $q_j(q_0, p_0, t_0, t)$ и их производные. Определенная таким образом функция действия является функцией времени и начальных условий. Аргументами функции действия могут быть также координаты q_j , время t , а также начальные положения q_{j0} и начальный момент времени t_0 . Действительно, предполагая, что

$$\det \left| \frac{\partial q_j}{\partial p_{j0}} \right| \neq 0,$$

и выражая начальные импульсы (p_0) через (q) , t , (q_0) и t_0 , получим

$$p_{j0} = p_{j0}(q_0, t_0, q, t), \quad j = 1, \dots, s.$$

Подставляя эти функции в (80.11), находим

$$S = S(q, t, q_0, t_0).$$

Вычислим вариацию S при фиксированных моментах времени t и t_0 , используя определение (80.11):

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (81.11)$$

Если между измененными начальным и конечным положениями система движется по реальной траектории, то коэффициенты при каждой вариации δq_j в подинтегральном выражении будут равны нулю, и мы получаем

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (82.11)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{j=1}^s p_j dq_j - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_{j0}, \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = p_j. \end{aligned} \quad (83.11)$$

Нетрудно показать, что функция действия S удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби. Действительно, дифференцируя (80.11) по времени, находим

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}. \quad (84.11)$$

С другой стороны,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (85.11)$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = 0 \quad (86.11)$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) = 0. \quad (87.11)$$

Из (87.11) и (80.11) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(t). \quad (88.11)$$

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Так как согласно условию $S_{AB} = S_{A'B'}$, то из (79.11) с учетом (83.11) и (88.11) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t_A) \varepsilon T(q_A, t_A) - \sum_{j=1}^s p_j(t_A) \varepsilon Q_j(q_A, t_A) &= \\ = \mathcal{H}(t_B) \varepsilon T(q_B, t_B) - \sum_{j=1}^s p_j(t_B) \varepsilon Q_j(q_B, t_B). \end{aligned} \quad (89.11)$$

Равенство (89.11) можно переписать по-иному:

$$\mathcal{H}T - \sum_{j=1}^s p_j Q_j = \text{const.}$$

Теорема Нетер дает единый вывод законов сохранения. Действительно, полагая $Q_j=0$, $T=1$ (однородный сдвиг по времени), получаем сохранение гамильтониана, т. е. энергии системы. Если $T=0$, $Q_j=0$ при $j \neq k$, $Q_j=1$ при $j=k$, то $p_k = \text{const}$, т. е. сохраняется обобщенный импульс.

Рассмотрим механическую систему, которая в некоторой инерциальной системе отсчета описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} - \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^N U_{ij}(|r_i - r_j|).$$

Здесь в качестве обобщенных переменных выбраны обычные координаты и импульсы, а гамильтониан совпадает с полной механической энергией системы N частиц. Поэтому инвариантность действия относительно преобразования $t' = t + \varepsilon$, $Q_j = 0$ при всех j приводит к сохранению полной энергии системы

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} + \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^N U_{ij} = E_0.$$

В этой инвариантности проявляется свойство пространства — времени: однородность времени.

Рассмотрим преобразование радиусов-векторов точек системы

$$r'_i = r_i + \varepsilon Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (90.11)$$

Сумму в выражении (89.11), очевидно, можно записать в виде сумм скалярных произведений трехмерных векторов p_i и Q_i :

$$\sum_{i=1}^N (p_i \cdot Q_i) = \text{const.}$$

Выбирая все векторы Q_i одинаковыми, а их декартовы компоненты равными соответственно

$$1) Q_i = (1, 0, 0), \quad 2) Q_i = (0, 1, 0), \quad 3) Q_i = (0, 0, 1),$$

получим из (89.11) закон сохранения полного импульса системы:

$$P = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i = P_0. \quad (91.11)$$

Инвариантность действия относительно преобразования (90.11) связана с важным свойством пространства — его однородностью.

Рассмотрим теперь преобразование координат, описывающее бесконечно малый поворот системы. Преобразование радиуса-вектора каждой точки системы имеет вид

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}_i], \quad (92.11)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор бесконечно малого поворота. Роль $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_i$ в этом случае играет вектор $[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}_i]$. Подставив $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_i$ в (89.11), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_i) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i \cdot [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}_i]) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] \right) = \\ &= (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L}) = (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L}_0) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_{i0} \mathbf{p}_{i0}] \right). \end{aligned} \quad (93.11)$$

Отсюда следует закон сохранения полного момента импульса системы

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \mathbf{L}_0.$$

Инвариантность действия относительно преобразования (92.11) обусловлена изотропностью пространства, т. е. отсутствием в нем каких-либо выделенных направлений.

Важное значение теоремы Нетер состоит в том, что аналогичная теорема может быть сформулирована для любой гамильтоновой (или лагранжевой) системы и не только в классической механике. Теорема Нетер сформулирована и доказана в теории поля, где она играет еще более фундаментальную роль.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

12.1. МОДЕЛИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Описание движения твердого тела следует начать с выбора модели. Как правило, используют две основные модели. Твердое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения. Другой подход связан с понятием сплошной среды и использует полевое описание состояния такой среды. Вводя поле деформаций, можно определить твердое тело как сплошную среду, деформации которой отсутствуют. В основном мы будем использовать в этой главе модель системы частиц.

Определим вначале число параметров, необходимых для описания твердого тела, — число степеней свободы. Покажем, что для описания абсолютно твердого тела достаточно шести независимых координат, т. е. абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Систему материальных точек, расстояние между которыми неизменно, можно рассматривать как систему с голономными связями. Для описания одной точки необходимо ввести три независимые переменные — координаты точки. Для описания системы из двух точек нужно шесть координат, однако дополнительное условие добавляет уравнение связи, т. е. остается пять независимых переменных; три точки, не лежащие на одной прямой, требуют введения девяти координат, однако при этом появляются три уравнения связи, поскольку расстояние между каждой парой точек постоянно, и, таким образом, остается лишь шесть независимых координат. Дальнейшее добавление точек не увеличивает числа параметров, так что число степеней свободы твердого тела равно шести.

Этот же результат можно получить, учитывая, что система отсчета определяется как абсолютно твердое тело и с ним связанная система координат. По определению любая точка твердого тела неподвижна в этой системе отсчета. Следовательно, задание точки начала координат системы, связанной с твердым телом и ориентацией ее осей по отношению к лабораторной системе, полностью определяет движение твердого тела.

12.2. МАТРИЦЫ ПОВОРОТОВ

Обсудим способы описания ориентации и число параметров, необходимых для ее определения.

Ориентацию любой прямой, в частности каждой из оси координат, связанной с твердым телом, можно задать с помощью направляющих косинусов.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\} \text{ — орты лабораторной системы,} \\ \mathbf{e}_i &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ — орты системы координат, связанной} \\ &\text{ с твердым телом.} \end{aligned}$$

Каждый орт \mathbf{e}_i можно разложить по ортам \mathbf{n}_k :

$$\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k, \quad (1.12)$$

где $a_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{n}_k)$ — матрица направляющих косинусов. Назовем эту матрицу матрицей поворотов.

Движение твердого тела мы описываем как изменение радиуса-вектора $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, проведенного из точки O лабораторной системы в точку O' системы, связанной с твердым телом, и изменения ориентации осей, заданной матрицей поворотов:

$$a_{ik} = a_{ik}(t).$$

Движение твердого тела называют поступательным, если выполняются условия $\dot{a}_{ik} = 0$ и $\dot{\mathbf{R}} \neq 0$, т. е. если не происходит изменения ориентации системы координат, связанной с этим телом.

Движение твердого тела называют чистым вращением, если

$$\dot{\mathbf{R}} = 0, \quad \text{а } \dot{a}_{ik} \neq 0.$$

В общем случае движение твердого тела — суперпозиция поступательного движения и чистого вращения.

Поскольку описание поступательного движения тривиально, исследуем подробнее вращательное движение тела с одной закрепленной точкой.

Матрица поворота a_{ik} построена так, что она не меняет длину любого вектора, в том числе векторов \mathbf{e}_s . Это приводит к соотношениям ортогональности

$$(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_i) = \delta_{si} = a_{ik} (\mathbf{e}_s, \mathbf{n}_k) = a_{ik} a_{sk} \quad (2.12)$$

при $s=i$ $\delta_{si}=1$, так что для векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ сохранение длины дает три соотношения:

$$a_{1k} a_{1k} = 1, \quad a_{2k} a_{2k} = 1, \quad a_{3k} a_{3k} = 1,$$

каждое из которых выражает известное соотношение для направляющих косинусов:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

где α, β, γ — углы между вектором \mathbf{e}_i и ортами системы \mathbf{n}_k .

Оставшиеся шесть соотношений при $i \neq s$ содержат лишь три линейно независимых:

$$a_{1k}a_{2k} = 0, \quad a_{1k}a_{3k} = 0, \quad a_{2k}a_{3k} = 0,$$

так что число независимых параметров, определяющих чистое вращение, равно трем.

Соотношения ортогональности, которые следуют из приведенных уравнений, можно записать несколько иначе. Если $\mathbf{e}_i = a_{ik}\mathbf{n}_k$, то матрица коэффициентов разложения b_{ik} векторов \mathbf{n}_p по ортам \mathbf{e}_q называется обратной к a_{ik} :

$$\mathbf{n}_i = b_{ik}\mathbf{e}_k = b_{ik}a_{km}\mathbf{n}_m$$

и обозначается $b_{ik} = a_{ik}^{-1}$. Для ортогональных матриц справедливо соотношение

$$a_{ik}^{-1}a_{km} = \delta_{im}, \quad (3.12)$$

которое легко доказать, учитывая, что $b_{ik}a_{km} = \delta_{im}$.

Сравнивая (1.12) и (2.12), получим $a_{ms}^{-1} = a_{sm}$, или $\tilde{a}_{sm}^{-1} = a_{sm}$, где $\tilde{a}_{sm} = a_{sm}$ — транспонированная матрица.

Ортогональные матрицы, описывающие повороты, имеют определитель, равный единице, т. е. не меняют объем тела при его поворотах. Действительно,

$$\det \delta_{ij} = 1 = \det (a_{ms}^{-1}) \det (a_{sm}) = (\det a_{sm})^2,$$

откуда

$$\det a_{sm} = \pm 1.$$

При малых поворотах, когда $a_{sm} \rightarrow \delta_{sm}$, определитель равен единице. Поскольку поворот, описываемый любой матрицей, можно представить как некоторую последовательность малых поворотов, таких, что определитель матрицы каждой из них равен единице, то для любого поворота $\det a_{sm} = +1$. Матрицы a_{sm} , удовлетворяющие условию $\det a_{sm} = -1$, описывают отражения.

Матрицы поворотов преобразуют координаты векторов, определенные в некоторой системе. Рассмотрим вектор \mathbf{r} , неподвижный в лабораторной системе. Пусть \bar{x}_i — координаты вектора в этой системе:

$$\mathbf{r} = \bar{x}_i \mathbf{n}_i,$$

а x_k — координаты по отношению к ортам \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{e}_k.$$

Из соотношений

$$\bar{x}_i \mathbf{n}_i = x_k \mathbf{e}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_k = a_{ks} \mathbf{n}_s$$

следует, что

$$x_i = a_{ik} \bar{x}_k,$$

т. е. координаты преобразуются так же, как и орты. Учитывая соотношение ортогональности, получим выражение для \bar{x}_k :

$$\bar{x}_k = a_{sk} x_s.$$

Если некоторый вектор \mathbf{A} задан своими компонентами α_s в базисе \mathbf{n}_s : $\mathbf{A} = \alpha_s \mathbf{n}_s$, а вектор $\mathbf{A}' = \alpha_s \mathbf{e}_s$ определен такими же компонентами, но по отношению к базису \mathbf{e}_s , то в этом случае уравнение $\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k$ можно рассматривать как преобразование, переводящее орты \mathbf{n}_k в орты \mathbf{e}_k , а вектор \mathbf{A} в вектор \mathbf{A}' . Таким образом, можно говорить о приращении вектора $\delta \mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$, вызванном поворотом твердого тела. Подставляя в это выражение $\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k$, получим уравнение для компонент вектора приращения в лабораторной системе, заданной ортами \mathbf{n}_k :

$$\delta a_s = (a_{hs} - \delta_{hs}) a_h.$$

Последовательность поворотов описывается произведением ортогональных матриц. Пусть поворот тела из некоторого начального состояния, определенного ориентацией ортов $\mathbf{e}_i = \mathbf{n}_i$, в состояние $\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k$ описывается матрицей a_{ik} , а поворот из состояния $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}'_i = a'_{im} \mathbf{e}_m$ задается матрицей a'_{im} . Конечное состояние твердого тела в этом случае может быть определено из начального с помощью матрицы C_{ik} соотношением $\mathbf{e}'_i = C_{ik} \mathbf{n}_k$, где $C_{ik} = a'_{im} a_{mk}$. Напомним, что произведение матриц a_{im} и a'_{im} некоммутативно:

$$a'_{im} a_{mk} \neq a_{im} a'_{mk},$$

так что результат зависит от порядка выполнения операций. Очевидно, что матрица C_{ik} ортогональна:

$$\bar{C}_{ik}^{-1} = C_{ik}.$$

Преобразование поворотов в трехмерном пространстве происходит так, что при любом повороте существует вектор \mathbf{X} , неизменный в пространстве. Этот вектор является единственным (с точностью до произвольного множителя), называется собственным вектором и определяет ось вращения — прямую, точки которой остаются неподвижными под действием преобразования поворота.

Докажем это утверждение. Пусть a_{mn} — матрица поворотов а \mathbf{X} — собственный вектор. Тогда справедливо равенство

$$\mathbf{X}_m = a_{mn} \mathbf{X}_n.$$

Рассмотрим вектор \mathbf{X} такой, что

$$a_{mn} \mathbf{X}_n = \lambda \mathbf{X}_n,$$

где λ — некоторое число — собственное значение преобразова-

ния. Существование такого вектора очевидно для любой действительной матрицы a_{mn} , поскольку матрица

$$b_{mn} = a_{mn} - \lambda \delta_{mn},$$

удовлетворяющая условию

$$b_{mn} X_n = 0 \text{ для } X_n \neq 0,$$

приводит к условию $\det b_{mn} = 0$, задающему кубическое уравнение для λ — собственного значения преобразования:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0,$$

где $\lambda_{1,2,3}$ — корни этого уравнения. Очевидно, что хотя бы один действительный корень существует всегда. Пусть λ — этот корень. Условие ортогональности дает $\lambda_1 = \pm 1$, а поскольку мы рассматриваем матрицу поворотов, в нашем случае $\lambda_1 > 0$ и

$$\det a_{mn} = \lambda \det \delta_{mn} = \lambda = 1.$$

Других действительных корней нет, так как уравнение

$$\det a_{mn} = 1$$

при $\lambda_1 = 1$ приводит к условию $\lambda_2 \lambda_3 < 0$. Таким образом, если предположить, что $\lambda_{2,3}$ — действительные корни, то хотя бы один из них должен быть отрицательным, но матрица поворотов не может иметь отрицательных собственных значений, поскольку это приведет к преобразованию инверсий. Остается единственная возможность — предположить, что $\text{Im } \lambda_{2,3} \neq 0$, т. е. кроме корня $\lambda_1 = 1$ других действительных корней нет. Мы пришли к выводу, что любой поворот, определяемый ортогональной матрицей, оставляет неподвижными точки на прямой, определяемой собственным вектором матрицы и называемой осью вращения.

Фактически мы доказали теорему Эйлера, которая утверждает, что любое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, из одного положения в другое может быть произведено одним поворотом на некоторый угол вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Действительно, если некоторое положение твердого тела получено в результате последовательных поворотов, то каждый поворот описывается соответствующей ортогональной матрицей $a_{mn}^{(\xi)}$. Суммарный поворот представляется произведением матриц поворотов

$$a_{mn} = \prod_{\xi=1}^N a_{mn}^{(\xi)} = a^{(N)} a^{(N-1)} \dots a^{(1)},$$

так что матрица a_{mn} также является ортогональной. Следовательно, имеется ось вращения, поворот вокруг которой характеризуется единственным углом. Последовательные повороты

будут характеризоваться последовательностью осей вращения. Совокупность всех осей вращения, проходящих через фиксированную неподвижную точку, при заданном движении твердого тела называют подвижным аксоидом.

12.3. УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Конкретный вид коэффициентов матрицы поворотов зависит от системы параметров, применяемых для описания движения твердого тела. Обычно используют систему независимых параметров, называемую углами Эйлера. Эти углы получили широкое распространение, поскольку определяют ориентацию твердого тела по отношению к лабораторной системе как последовательность трех определенных поворотов.

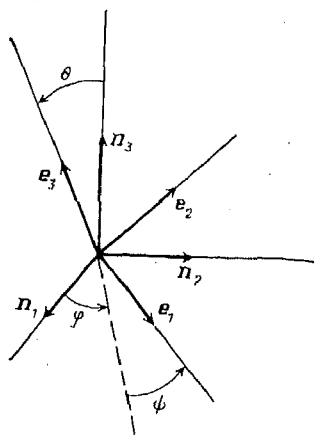


Рис. 1.12

Пусть n_i — орты лабораторной системы, а e_i — орты системы, связанной с твердым телом, как показано на рис. 1.12. Предполагается, что система ортов e_i первоначально совпадала с лабораторной системой n_i , а затем была приведена в указанное состояние путем последовательных поворотов, выполненных в следующем порядке.

1. Поворот вокруг оси e_3 (n_3) на угол φ . При этом орт e_1 займет положение в плоскости $n_1 n_2$, определяемое на рисунке ортом n_6 (пунктир).

2. Поворот твердого тела вокруг орта e_1 (оси узлов) на угол θ . При этом орт e_3 займет положение, указанное на рисунке, а орт e_2 выйдет из плоскости n_1, n_2 .

3. Поворот вокруг орта e_3 на угол ψ , так что орт e_1 выйдет из плоскости $n_1 n_2$.

Поскольку каждый поворот характеризуется простой матрицей поворота вокруг одной из осей, матрицу полного поворота легко получить как произведение этих матриц. Первое преобразование определяется матрицей поворота вокруг оси e_3 на угол φ :

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поворот вокруг линии узлов, оставляющий неподвижным орт e_1 , определяется матрицей

$$A_\theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Последнее преобразование — поворот вокруг оси e_3 на угол ψ — описывается матрицей A_ψ , устроенной так же, как и матрица A_φ :

$$A_\psi = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Результирующий поворот определяется произведением матриц, взятых в той же последовательности, в которой выполнялись повороты

$$A = A_\varphi A_\theta A_\psi.$$

Выполняя вычисления, получим выражение для матрицы поворота:

$$A = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Для выполнения обратного преобразования достаточно взять транспонированную матрицу.

12.4. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если рассматривать малые повороты, так что

$$a_{sm} = \delta_{sm} + \varepsilon_{sm}, \text{ где } \varepsilon_{sm} \ll 1,$$

то матрица ε_{sm} антисимметрична:

$$\varepsilon_{sm} = -\varepsilon_{ms},$$

что следует из условия $a_{ik}a_{mk} = \delta_{im}$, которое приводит к уравнению

$$(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik})(\delta_{mk} + \varepsilon_{mk}) = \delta_{im}.$$

Раскрывая скобки, получим с точностью до ε_{im}

$$\delta_{im} + \varepsilon_{im} + \varepsilon_{im} = \delta_{im}, \text{ т. е. } \varepsilon_{im} = -\varepsilon_{im}.$$

Таким образом, координаты точек твердого тела при малых поворотах преобразуются с помощью матрицы ε_{ms} :

$$\delta X_s = \varepsilon_{ms} X_m.$$

Очевидно, что закон преобразования справедлив для любого вектора, заданного фиксированными координатами в системе, связанной с твердым телом, а не только для радиуса-вектора какой-либо точки твердого тела.

Антисимметричный тензор ε_{ms} имеет лишь три отличные от нуля компоненты, поэтому любому антисимметричному тензо-

ру ϵ_{ms} можно сопоставить вектор, точнее, псевдовектор $\delta\varphi_i$, компоненты которого определены соотношениями

$$\delta\varphi_1 = \epsilon_{23}, \quad \delta\varphi_2 = \epsilon_{31}, \quad \delta\varphi_3 = \epsilon_{12}.$$

Эти соотношения удобно записывать в тензорном виде, вводя единичный антисимметричный псевдотензор третьего ранга ϵ_{ijk} , определяемый соотношениями

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} &= 1, \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} &= -1, \end{aligned}$$

а остальные компоненты тензора равны нулю. Тогда псевдовектор $\delta\varphi_i$ можно записать как свертку ϵ_{ijk} и тензора ϵ_{jk} :

$$\delta\varphi_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jk}.$$

Использование тензора ϵ_{ijk} упрощает алгебраические операции над векторами. Так, векторное произведение двух векторов A_j и B_k с помощью введенного тензора представляется в виде

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Соответствие между антисимметричным тензором ϵ_{jk} и вектором $\delta\varphi_i$ взаимно однозначное, так что псевдовектору $\delta\varphi_i$ соответствует тензор

$$\epsilon_{jk} = \epsilon_{jki} \delta\varphi_m.$$

Справедливость приведенного равенства легко доказывается прямой подстановкой, если учесть полезные в дальнейшем выражения для свертки двух псевдотензоров:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Учитывая приведенные выражения, запишем приращение компонент радиуса-вектора точки твердого тела, вызванное его поворотом:

$$\delta X_s = \epsilon_{js} X_j = \epsilon_{smj} \delta\varphi_m X_j,$$

или в векторной форме

$$\delta \mathbf{r} = [\delta\varphi, \mathbf{r}].$$

Приведенные соотношения позволяют ввести вектор угловой скорости, определяемый соотношением $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\delta\varphi}{dt}$, так что

$$\dot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]. \quad (4.12)$$

Угловая скорость является псевдовектором, однако в классической механике принято называть эту величину вектором,

так как преобразование инверсии в теории твердого тела не встречается. Формула, определяющая распределение скоростей точек твердого тела, называется формулой Эйлера. Мы получили формулу (4.12) — частный случай, соответствующий движению тела с закрепленной точкой.

Если матрица поворотов задана в явном виде как функция некоторых параметров q_s — обобщенных координат, то нетрудно вычислить компоненты угловой скорости как функции соответствующих обобщенных координат и скоростей. Движение ортов e_i , связанных с твердым телом, вызывается изменением матрицы поворотов:

$$e_i(t) = a_{ik}(q_s(t)) n_k,$$

так что скорость изменения ортов

$$\dot{e}_i = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s n_k. \quad (5.12)$$

Переходя в правой части равенства (5.12) к ортам e_m с помощью транспонированной матрицы a_{mk} , получим

$$\dot{e}_i = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s a_{mk} e_m.$$

Матрица

$$C_{im} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s a_{mk}$$

является антисимметричной, что легко доказать непосредственно. Действительно, для ортогональных матриц $\tilde{a}_{ik} = a_{ik}^{-1}$, так что

$$a_{ik} a_{mk} = \delta_{ik}.$$

Дифференцирование этого выражения по времени сразу же дает

$$\dot{a}_{ik} a_{mk} + a_{ik} \dot{a}_{mk} = 0,$$

т. е.

$$C_{im} = \dot{a}_{ik} a_{mk} = -C_{mi}.$$

Отсюда следует выражение для вектора угловой скорости, заданное компонентами в системе, связанной с твердым телом:

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{lim} C_{im} = \frac{1}{2} \epsilon_{lim} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} a_{mk} \dot{q}_s,$$

а выражение (5.12) может быть записано в виде

$$\dot{e}_i = \epsilon_{imi} \Omega_i e_m.$$

Таким образом, любой вектор \mathbf{A} , фиксированный постоянными компонентами в движущейся системе, меняется по отношению к лабораторной системе, причем

$$\dot{a}'_i \mathbf{e}_i = \epsilon_{mi} \Omega_i a'_i \mathbf{e}_m,$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{A}} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}].$$

Практически, однако, бывает проще получить выражение для вектора угловой скорости, рассматривая его как сумму векторов, обусловленных изменением каждого из параметров. В частности, для углов Эйлера φ , θ , ψ

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\theta + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\psi,$$

где слагаемые равны соответственно

$$\boldsymbol{\Omega}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{n}_3, \quad \boldsymbol{\Omega}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi, \quad \boldsymbol{\Omega}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{e}_3.$$

Проекция вектора на орты лабораторной системы \mathbf{n}_i обозначим Ω_x , Ω_y , Ω_z . Тогда, учитывая, что

$$\mathbf{n}_\xi = \mathbf{n}_1 \cos \varphi + \mathbf{n}_2 \sin \varphi,$$

а

$$\mathbf{e}_3 = a_{3h} \mathbf{n}_h = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{n}_1 - \sin \theta \cos \varphi \mathbf{n}_2 + \cos \theta \mathbf{n}_3,$$

получим

$$\Omega_x = (\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{n}_1) = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\Omega_y = (\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{n}_2) = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\Omega_z = (\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{n}_3) = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (6.12)$$

При составлении динамических уравнений движения удобнее использовать вектор угловой скорости, определенный проекциями на орты \mathbf{e}_i движущейся системы. Соответствующие выражения легко получить с помощью матрицы поворотов:

$$\Omega_i = a_{ih} \Omega_h^0,$$

где

$$\{\Omega_{hk}^0\} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}.$$

Приведем результаты вычислений:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (7.12)$$

Полученные выражения (6.12) и (7.12) называют *кинематическими формулами Эйлера*.

12.5. ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела можно описывать и в терминах полей, вводя локальные характеристики движения в окрестности выбранной точки наблюдения. Пусть положение точки наблюдения в заданной системе координат определяется радиусом-вектором x . Рассмотрим малые смещения точек твердого тела в этой окрестности, происходящие за время Δt . Пусть в момент $t=0$ некоторая точка твердого тела имеет координаты x_i , а за время Δt переместится в точку с координатами

$$x'_i = x_i + v_i \Delta t,$$

где v_i — скорость рассматриваемой точки твердого тела. Скорости точек движущегося тела образуют поле скоростей

$$v_i = v_i(x_h).$$

Точка с координатами $\tilde{x}_i = x_i + \delta_i$ имеет скорость

$$v'_i = v_i(\tilde{x}_h) = v_i(x_h) + \frac{\partial v_i}{\partial x_h} \delta_h.$$

Поскольку поле скоростей определяет поле перемещений

$$\Delta_i = v_i \Delta t,$$

перемещение точки \tilde{x}_i определяется выражением

$$\Delta'_i = \Delta_i + \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_h} \delta_h.$$

Положение этой точки после перемещения

$$\tilde{x}'_i = \tilde{x}_i + \Delta'_i,$$

а для точки x_i имеем

$$x'_i = x_i + \Delta_i.$$

Расстояние между точками после перемещения, определяемое вектором δ' :

$$\delta'_i = \tilde{x}'_i - x'_i = \delta_i + \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_h} \delta_h,$$

не меняется, поскольку твердое тело мы считаем недеформируемым:

$$\delta'_i \delta'_i = \delta_i \delta_i + 2\delta_i \delta_h \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_h} = \delta_i \delta_i.$$

Отсюда следует условие, которому подчиняется поле скоростей твердого тела:

$$\delta_i \delta_h \frac{\partial v_i}{\partial x_h} = 0. \quad (8.12)$$

Полученное выражение справедливо при любых малых δ_i в окрестности точки x_i , откуда следует, что тензор скоростей деформаций

$$A_{hi} = \frac{\partial v_i}{\partial x_h}$$

является антисимметричным, т. е.

$$A_{ki} = -A_{ik}.$$

Антисимметричность тензора удобно записывать в явной форме, используя следующее представление:

$$A_{hi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} - \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right),$$

т. е. выделяя симметричную и антисимметричную части произвольного тензора. Тогда условие антисимметричности тензора имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_h} - \frac{\partial v_h}{\partial x_i} = 0, \quad (9.12)$$

т. е.

$$A_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} - \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right).$$

Заметим, что тензор A_{ki} не зависит от координат. Действительно,

$$\frac{\partial A_{hi}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} - \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial v_i}{\partial x_s} - \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_s \partial x_i} \right\}.$$

Но из условия (9.12) следует, что

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_s} = -\frac{\partial v_s}{\partial x_h},$$

так что выражение приобретает вид

$$\frac{\partial A_{hi}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Антисимметричный тензор, как отмечалось, характеризуется лишь тремя ненулевыми компонентами, и ему можно поставить в соответствие псевдовектор

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijn} \frac{\partial v_k}{\partial x_j},$$

или в векторных обозначениях вектор угловой скорости

$$\Omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Как мы установили, вектор угловой скорости твердого тела не зависит от координат рассматриваемой точки, т. е. является глобальной характеристикой движения тела. Независимость Ω от координат предполагает линейную зависимость скоростей v_k точек твердого тела от координат:

$$v_k = A_{jk} x_j + v_k^0.$$

Учитывая, что $A_{jk} = \epsilon_{jks} \Omega_s$, получим выражение для распределения скоростей точек твердого тела

$$v_k = \epsilon_{ksj} \Omega_s x_j + v_k^0,$$

или в векторных обозначениях

$$\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}] + \mathbf{v}_0. \quad (10.12)$$

Полученная формула называется формулой Эйлера, частный случай которой был получен ранее (4.12), и определяет распределение скоростей точек недеформируемого твердого тела.

Если известна скорость некоторой точки твердого тела:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t)$$

и задана угловая скорость вращения $\omega = \omega(t)$, то формула Эйлера позволяет определить такие точки твердого тела, скорость которых в данный момент равна нулю:

$$[\Omega \mathbf{r}_0] + \mathbf{v}_0 = 0.$$

Назовем любую точку пространства, не обязательно принадлежащую твердому телу, мгновенным центром вращения, если она удовлетворяет условию $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = 0$. Используя тензорные обозначения, нетрудно найти координаты точек мгновенных центров вращения:

$$x_i^0 = \epsilon_{ijk} \Omega_j^{-1} v_k^0,$$

где v_i^0 — скорость заданной точки (начала координат).

Геометрическое место точек мгновенных центров вращения образует в пространстве некоторую кривую, называемую полодией.

12.6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

До сих пор мы рассматривали движение материальной точки относительно некоторой выбранной системы отсчета. Результаты, полученные при описании движения твердого тела, позволяют решить вопрос о вычислении скоростей и

ускорений материальной точки относительно произвольной подвижной системы отсчета, если задано движение точки в некоторой (лабораторной) системе и известно, как движется подвижная система.

Поскольку системой отсчета называют тело отсчета (твердое тело), связанную с ним систему координат и часы, то, предполагая, что время в лабораторной и подвижной системах течет одинаково, нетрудно получить преобразование скоростей и ускорений — преобразования Галилея. Пусть в лабораторной системе $OXYZ$, оси которой определены ортами \mathbf{n}_i , движение точки M задается радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{n}_i,$$

а в системе $O'X'Y'Z'$, направление осей которой определяется ортами \mathbf{e}_i , закон движения

$$\mathbf{r}' = x'_i \mathbf{e}_i.$$

Движение точки O' относительно системы $OXYZ$ предполагается заданным с помощью радиуса-вектора

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = X_i \mathbf{n}_i,$$

а ориентация ортов \mathbf{e}_i по отношению к лабораторной системе определяется матрицей поворотов a_{ik} :

$$\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k.$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t),$$

или

$$x_i \mathbf{n}_i = X_i \mathbf{n}_i + x'_i \mathbf{e}_i. \quad (11.12)$$

Скоростью точки относительно выбранной системы отсчета называется вектор, компоненты которого равны производным радиуса-вектора точки в данной системе при фиксированных ортах, т. е. в лабораторной системе вектор скорости определяется уравнением

$$\mathbf{v} = \dot{x}_i \mathbf{n}_i,$$

а в движущейся системе скорость точки —

$$\mathbf{v}' = x'_i \mathbf{e}_i.$$

Для вычисления скорости в одной системе, если известна скорость точки в другой системе, продифференцируем соотношение (11.12), учитывая, что $\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{n}_k$:

$$\dot{x}_i \mathbf{n}_i = \dot{X}_i \mathbf{n}_i + \dot{x}'_i \mathbf{e}_i + x'_i \dot{a}_{ik} \mathbf{n}_k. \quad (12.12)$$

Последнее слагаемое в правой части равенства удобно представить, вводя орты \mathbf{e}_i с помощью транспонированной матрицы:

$$\mathbf{n}_k = a_{mk} \mathbf{e}_m,$$

$$\dot{x}_i \dot{a}_{ih} \mathbf{n}_h = \dot{x}_i \dot{a}_{ih} a_{mk} \mathbf{e}_m.$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор угловой скорости вращения движущейся системы

$$\Omega_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \dot{a}_{ik} a_{mh},$$

запишем это слагаемое в виде

$$\dot{x}_i \dot{a}_{ih} \mathbf{n}_h = \epsilon_{iml} \Omega_l \dot{x}_i \mathbf{e}_m. \quad (13.12)$$

С учетом соотношения (13.12) выражение (12.12) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}' + [\Omega \mathbf{r}'].$$

Здесь \mathbf{V}' — относительная скорость (относительно движущейся системы отсчета), а сумма

$$\mathbf{V}_0 + [\Omega \mathbf{r}']$$

называется переносной скоростью.

Очевидно, что структура полученной формулы не связана с дифференцированием именно радиуса-вектора. Любой вектор \mathbf{A} , заданный компонентами a_i по отношению к лабораторной системе, будет при дифференцировании подчиняться тому же правилу. Действительно, пусть

$$\mathbf{A} = a_i \mathbf{n}_i = \dot{a}_i \mathbf{e}_i.$$

Вычисляя производную при фиксированных ортах \mathbf{n}_i , получим

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_i \mathbf{n}_i = \dot{a}_i \mathbf{e}_i + a_i \dot{a}_{ih} a_{jm} \mathbf{e}_{kh},$$

или в векторных обозначениях

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}' = \frac{d'}{dt} \mathbf{A} + [\Omega \mathbf{A}], \quad (14.12)$$

где введен оператор дифференцирования при постоянных ортах

$$\frac{d'}{dt}; \mathbf{e}_i, \text{ а } \Omega = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \dot{a}_{jl} a_{kl} \mathbf{e}_i$$

— угловая скорость вращения движущейся системы.

Учитывая полученную формулу (14.12), вычислим ускорения точки относительно лабораторной системы при сделанных ранее предположениях:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{d'}{dt} \mathbf{v}' + [\Omega \mathbf{v}'] + [\dot{\Omega} \mathbf{r}'] + \left[\Omega \frac{d'}{dt} \mathbf{r}' \right] + [\Omega [\Omega \mathbf{r}']].$$

Собирая подобные члены, получим формулу Кориолиса

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\Omega} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}'] + \mathbf{a}'.$$

Здесь \mathbf{a}' — относительное ускорение, сумма $\mathbf{a}_{\text{пер}}$:

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_0 + [\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\Omega} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}']]$$

называется переносным ускорением, а член, линейный по скорости относительного движения \mathbf{v}' , называется кориолисовым ускорением. Слагаемое в относительном ускорении, содержащее двойное векторное произведение, называется осестремительным ускорением, так как оно направлено к оси вращения системы отсчета. Раскрывая двойное векторное произведение по известному правилу

$$[\boldsymbol{\Omega} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}']] = \boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\boldsymbol{\Omega}^2$$

и вводя единичный вектор \mathbf{n} , определяющий направление угловой скорости, двойное векторное произведение можно представить в виде

$$[\boldsymbol{\Omega} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}']] = -\boldsymbol{\Omega}^2\rho,$$

где

$$\rho = \mathbf{r}' - (\mathbf{n}, \mathbf{r}')\mathbf{n}$$

определяет расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки.

13.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Рассматривая твердое тело как систему материальных точек с идеальными голономными связями, воспользуемся теоремами динамики систем со связями для составления уравнений движения. Формулировки этих теорем отличаются от аналогичных для систем свободных точек.

Теорема об изменении импульса системы. Если в системе с голономными идеальными связями возможна трансляция системы как целого вдоль некоторого направления неподвижного в рассматриваемой инерциальной системе, то скорость изменения импульса системы вдоль этого направления равна сумме всех внешних активных сил, действующих в данном направлении.

Рассмотрим систему, состоящую из N точек m_1, m_2, \dots, m_N с наложенными на нее голономными идеальными связями, определяемыми системой уравнений

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \text{ где } s = 1, 2, \dots, k < 3N.$$

Уравнения Ньютона, которым подчиняется система, имеют вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \Phi_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (1.13)$$

где \mathbf{F}_{ij} — силы, действующие со стороны j -й точки системы на i -ю точку (внутренние силы), Φ_i — внешние силы, действующие на i -ю точку со стороны тел, не включенных в систему. Движение внешних тел считается заданным. \mathbf{R}_i — силы реакции, действующие на i -ю точку со стороны связей. Поскольку реакция связей не определена до решения задачи, силы \mathbf{R}_i являются неизвестными и должны быть исключены при формулировке теоремы динамики.

Пусть $\delta \mathbf{r}_i$ — виртуальное перемещение, удовлетворяющее уравнениям связей

$$\nabla_i f_s \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Для систем с идеальными связями виртуальная работа всех сил реакции равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Учитывая это условие, умножим скалярно каждое уравнение системы на $\delta \mathbf{r}_i$ и сложим все уравнения:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \delta \mathbf{r}_i) = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \Phi_i \delta \mathbf{r}_i.$$

Если связи допускают виртуальное перемещение системы как целого, т. е. среди всех виртуальных перемещений существуют такие, что $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_i$ для всех точек системы, то, вынося $\delta \mathbf{r}_i$ за знак суммирования, получим уравнение

$$\delta \mathbf{r} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \delta \mathbf{r} \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

так как $\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} = 0$ в силу третьего закона Ньютона.

Пусть $\delta \mathbf{r} = \mathbf{n} \delta r$, причем $\dot{n} = 0$, т. е. существует такое неизменное в пространстве направление, вдоль которого систему можно сдвинуть как целое, не нарушая связи. Тогда

$$\dot{P}_n = \sum_{i=1}^N \Phi_{in}, \quad (2.13)$$

где введены обозначения

$$P_n = (\mathbf{P}, \mathbf{n}), \quad \Phi_{in} = (\Phi_i, \mathbf{n}).$$

Применительно к твердому телу теорема позволяет найти движение центра масс \mathbf{R} вдоль направления, задаваемого вектором \mathbf{n} :

$$M \ddot{\mathbf{R}}_n = \sum_i \Phi_{in}. \quad (3.13)$$

Для свободного твердого тела теорема дает максимальное число уравнений, равное трем, и позволяет полностью определить движение центра масс.

Для описания вращения твердого тела относительно выбранной системы отсчета удобно использовать теорему об изменении кинетического момента.

Пусть уравнения движения каждой точки системы имеют вид (1.13), а связи допускают поворот системы точек как це-

лого, т. е. виртуальные перемещения каждой точки представимы в виде

$$\delta \mathbf{r}_i = [\delta \varphi \mathbf{r}_i]. \quad (4.13)$$

Мы полагаем, что неподвижная точка — начало координат. Умножая скалярно каждое уравнение на $\delta \mathbf{r}_i$ и складывая, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \ddot{\mathbf{r}}_i] \delta \varphi = \sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ij}] \delta \varphi + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \Phi_i] \delta \varphi.$$

Здесь мы учли, что для идеальных связей виртуальная работа равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Поскольку внутренние силы, действующие между точками системы, лежат на прямой, соединяющей эти точки, и подчиняются третьему закону Ньютона, получим условие

$$\sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ij}] = 0.$$

Если существует такое направление в пространстве, определяемое вектором \mathbf{n} , что $\delta \varphi = \mathbf{n} \delta \varphi$, причем $\mathbf{n} = 0$, то, вводя обозначения

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i], \quad (5.13)$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \Phi_i],$$

придем к теореме об изменении проекции кинетического момента системы на направление, определяемое вектором \mathbf{n} :

$$\dot{M}_n = L_n. \quad (6.13)$$

Если твердое тело имеет лишь одну неподвижную точку — начало координат, то связи допускают вращение тела вокруг любой оси, проходящей через начало координат, что приводит к теореме об изменении кинетического момента как вектора:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}. \quad (7.13)$$

Рассмотрим, наконец, теорему об изменении энергии системы материальных точек с идеальными голономными связями. Предположим, что в рассматриваемой системе связи явно не зави-

сят от времени, так что виртуальные перемещения могут быть выбраны совпадающими с действительными:

$$\delta \mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i.$$

В этом случае изменение полной энергии системы равно мощности всех активных сил, внешних и внутренних. Действительно, пусть уравнения связей имеют вид

$$f_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Виртуальные перемещения удовлетворяют условию

$$(\nabla_i f_j \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0,$$

а действительные, происходящие за время dt , — условию

$$(\nabla_i f_j \cdot d\mathbf{r}_i) + \frac{df}{dt} dt = 0.$$

Очевидно, что $d\mathbf{r} = \delta \mathbf{r}$ только в случае стационарных связей, когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Пусть

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{V}_i dt = \delta \mathbf{r}_i.$$

Умножая каждое уравнение на $d\mathbf{r}_i$, учитывая, что мы рассматриваем систему с идеальными связями, виртуальная работа которых равна нулю:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

после суммирования по всем уравнениям системы получим соотношение

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{r}_i^2}{2} = W_{\text{внутр}} + W_{\text{внешн}}, \quad (8.13)$$

где

$$W_{\text{внутр}} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \mathbf{V}_i, \quad W_{\text{внешн}} = \sum_i \Phi_i \mathbf{V}_i.$$

Если в системе действуют потенциальные, гироскопические и диссипативные силы, так что

$$\mathbf{F}_i^{\text{пот}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{F}_i^{\text{чир}} = [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)],$$

то, вводя полную энергию системы $E = T + U$, получим теорему об изменении полной энергии системы точек с идеальными голономными связями:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{\partial U}{\partial t} + W^{\text{дисс}}, \quad (9.13)$$

где $W^{\text{дисс}} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{дисс}} \dot{r}_i$ — мощность диссипативных сил.

Применим рассмотренные теоремы для описания движения твердого тела. Поскольку движение центра масс твердого тела, описываемое теоремой об изменении импульса, ничем не отличается от движения материальной точки, подробно изученного нами ранее, рассмотрим более детально движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Будем полагать для простоты, что эта точка совпадает с началом координат выбранной инерциальной системы отсчета.

Пусть r_i — радиус-вектор точки m_i твердого тела. Так как скорость этой точки относительно системы, связанной с твердым телом, равна нулю, то из формулы (4.13) следует

$$\dot{r}_i = [\Omega, r_i], \quad (10.13)$$

где Ω — угловая скорость тела. Вектор кинетического момента в этом случае определяется формулой

$$\mathbf{M} = \sum m_i [r_i (\Omega r)]. \quad (11.13)$$

Для упрощения формул перейдем к тензорной форме записи:

$$M_h = \sum_{(i)} m_{(i)} \epsilon_{hlm} x_l^{(i)} \epsilon_{mnp} \Omega_n x_p^{(i)}.$$

Подставляя значения координат и проводя суммирование по повторяющемуся индексу с учетом формулы (3.13), получим выражение для вектора кинетического момента:

$$\mathbf{M}_h = \sum_{(i)} m_{(i)} (x_l^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{hn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)})_n. \quad (12.13)$$

Величина, стоящая под знаком суммы, является симметричным тензором второго ранга и называется тензором инерции:

$$J_{kn} = \sum_{(i)} m_{(i)} (x_l^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{kn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)}), \quad (13.13)$$

так что выражение для кинетического момента может быть представлено в виде

$$\mathbf{M}_k = J_{kn} \Omega_n. \quad (14.13)$$

Тензор инерции характеризует распределение масс твердого тела. Теорема об изменении кинетического момента твердого те-

ла, имеющего неподвижную точку, с помощью введенного тензора инерции в лабораторной системе имеет вид

$$\frac{d}{dt} (J_{kn} \Omega_n) = L_k,$$

где L_k — момент внешних сил, действующих на тело.

Рассмотрим теперь изменение полной энергии твердого тела. В общем случае по формуле Эйлера

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}'_i].$$

Мощность внутренних сил равна нулю:

$$W_{\text{внутр}} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \mathbf{V}_0 + \sum \mathbf{F}_{ij} [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}'_i] = \left(\boldsymbol{\Omega}, \sum_{i=j} [\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j] \right) = 0,$$

так что изменение полной энергии обусловлено лишь внешними силами:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U_{\text{внешн}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{\text{дисс}} \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Кинетическая энергия твердого тела в случае вращения с одной неподвижной точкой также может быть выражена через тензор инерции. Действительно, по определению кинетическая энергия твердого тела как системы материальных точек

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}'_i]^2. \quad (15.13)$$

Подставляя выражение для скоростей точек и переходя к тензорным обозначениям, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_{(i)} \epsilon_{klm} \Omega_i x_m^{(i)} \epsilon_{hnp} \Omega_n x_p^{(i)} = \frac{1}{2} J_{mn} \Omega_m \Omega_n. \quad (16.13)$$

Таким образом, тензор инерции оказывается важнейшей характеристикой твердого тела при описании вращательного движения.

13.2. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА

Введенный нами в предыдущем разделе тензор инерции системы точек

$$J_{kn} = \sum_{i=1}^N m_{(i)} (x_e^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{kn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)}) \quad (17.13)$$

для твердого тела, плотность которого $\rho = \rho(x_s)$ выражается с помощью интеграла

$$J_{kn} = \int dV \rho(x_s) [x_l x_l \delta_{kn} - x_k x_n]. \quad (18.13)$$

В лабораторной системе отсчета компоненты тензора инерции являются функциями времени, поскольку распределение масс, характеризуемое координатами точек $x^{(i)}_k$, меняется при вращении. Однако в системе отсчета, связанной с твердым телом, эти координаты остаются неизменными, так что компоненты тензора в этой системе — постоянные величины, определяемые лишь распределением масс и не зависящие от каких-либо характеристик движения. Как следует из определения, тензор инерции является симметричным тензором второго ранга, имеющим шесть независимых компонент. Диагональные компоненты тензора называются осевыми моментами инерции, а недиагональные — центробежными моментами инерции.

Соответствующим поворотом осей, связанных с твердым телом, можно привести тензор инерции к диагональному виду

$$J_{lm} = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{vmatrix},$$

причем в силу положительной определенности кинетической энергии все осевые моменты тензора инерции будут неотрицательны. Диагональные моменты в этом случае называют главными моментами инерции, а соответствующие оси — главными осями инерции. Для определения главных осей инерции необходимо найти такие направления в пространстве ξ , которые не менялись бы под действием матрицы J_{lm} , т. е. собственные векторы преобразования, определяемого тензором инерции:

$$J_{lm} x_m = \lambda x_l, \quad (19.13)$$

где x_m — компоненты собственного вектора в системе, связанной с твердым телом, λ — собственные значения. Существование решений системы (19.13), не равных тождественно нулю, возможно при условии

$$\det \|J_{lm} - \lambda \delta_{lm}\| = 0,$$

что определяет три действительных корня $\lambda_{1,2,3} = J_{1,2,3}$ — три главных момента инерции.

Введенный тензор инерции связан с моментом инерции тела, вращающегося вокруг заданной оси. Если ось вращения тела задана единичным вектором \mathbf{n} , так что $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega n}$, или в тензорных обозначениях $\mathbf{n} = \{n_k\} = n_x \mathbf{e}_k$, то моментом инерции тела от-

носительно выбранной оси называют величину I , такую, что кинетическая энергия вращения тела вокруг этой оси имеет вид

$$T = \frac{I\Omega^2}{2}.$$

Учитывая формулу (16.13), запишем энергию в виде

$$T = \frac{1}{2} J_{lm} n_l n_m \Omega^2 = \frac{1}{2} I \Omega^2.$$

Из полученной формулы находим выражение для момента инерции тела, вращающегося вокруг оси \mathbf{n} :

$$I_n = J_{lm} n_l n_m. \quad (20.13)$$

Момент инерции зависит от выбора оси вращения, направление которой определено вектором \mathbf{n} , и этой зависимости можно придать наглядный геометрический смысл, вводя эллипсоид инерции.

Пусть некоторый вектор $\mathbf{d} = \{x_i\}$ имеет длину d :

$$d^2 = x_i x_i.$$

Построим поверхность, определяемую условием

$$I d^2 = C,$$

т. е. определим длину вектора d условием $d = C/\sqrt{I}$. Из формулы (20.13) находим, что эта поверхность представляет собой эллипсоид — эллипсоид инерции. Часто константу выбирают так, чтобы численное значение ее равнялось единице. Утверждение о том, что поверхность второго порядка, определяемая тензором инерции

$$J_{lm} x_l x_m = I d^2 = C,$$

является эллипсоидом, следует из положительной определенности кинетической энергии.

Если оси, связанные с твердым телом, выбраны так, что тензор инерции в этих осях диагонален, то эллипсоид инерции определяется соотношением

$$J_1 x^2 + J_2 y^2 + J_3 z^2 = C.$$

При выборе константы, равной единице, полуоси эллипсоида инерции a, b, c равны соответственно

$$a = 1/\sqrt{J_1}, \quad b = 1/\sqrt{J_2}, \quad c = 1/\sqrt{J_3}.$$

Моменты инерции любого тела удовлетворяют неравенству треугольника;

$$J_{11} + J_{22} \geq J_{33}, \quad J_{11} - J_{22} \leq J_{33}$$

и аналогично для всех других осей. Действительно,

$$J_{11} = \sum_i m_{(i)} (y_{(i)}^2 + z_{(i)}^2),$$

$$J_{22} = \sum_i m_{(i)} (x_{(i)}^2 + z_{(i)}^2),$$

$$J_{33} = \sum_i m_{(i)} (x_{(i)}^2 + y_{(i)}^2),$$

откуда

$$J_{11} + J_{22} - J_{33} = 2 \sum_{(i)} m_{(i)} z_{(i)}^2 \geq 0,$$

$$J_{11} - J_{22} - J_{33} = -2 \sum_{(i)} m_{(i)} x_{(i)}^2 \leq 0.$$

Для системы точек, находящейся в плоскости $z=0$, неравенство треугольника переходит в равенство

$$J_{11} + J_{22} = J_{33}.$$

Практически определение главных осей инерции облегчается, если рассматриваемое тело обладает материальной симметрией. Осью материальной симметрии называют прямую, относительно которой для каждой точки массы m_i можно указать точку такой же массы, расположенную симметрично относительно этой прямой, т. е. отрезок, соединяющий эти точки, проходит через прямую, перпендикулярен ей и делится этой прямой пополам.

Плоскостью материальной симметрии называют такую плоскость, если для любой точки m_i можно указать точку такой же массы, расположенную симметрично относительно этой плоскости, т. е. отрезок, соединяющий эти две точки, перпендикулярен плоскости и делится ею пополам.

Покажем, что центр масс тела лежит на оси материальной симметрии и эта ось является главной осью инерции, т. е. центробежные моменты инерции относительно этой оси равны нулю. Пусть ось OZ является осью материальной симметрии системы, состоящей из $2N$ точек, т. е. для каждой точки m_i , где $1 \leq i \leq N$, задаваемой радиусом-вектором $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, существует точка массы $m_{i+N} = m_i$, положение которой определяется вектором $\mathbf{r}_{i+N} = \{-x_i, -y_i, z_i\}$.

Положение центра масс системы определяется равенством

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2N} m_{(i)} \mathbf{r}_{(i)},$$

где $M = \sum_{i=1}^{2N} m_i$ — масса системы. Проводя суммирование получим

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{i+N} \right) = \left\{ 0, 0, \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i \right\},$$

т. е. центр масс находится на оси симметрии.

Центробежные моменты относительно оси OZ равны нулю:

$$J_{xz} = - \sum_{i=1}^{2N} m_i x_i z_i = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i + \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = 0.$$

Аналогично

$$J_{yz} = 0.$$

Центр масс системы точек, обладающей плоскостью симметрии, лежит в этой плоскости, а любая ось, перпендикулярная ей, является главной осью симметрии. Пусть плоскость OXY является плоскостью симметрии рассматриваемой системы $2N$ точек, т. е. для каждой точки m_i , $1 \leq i \leq N$, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, существует точка, масса которой $m_{i+N} = m_i$, а радиус-вектор $\mathbf{r}_{i+N} = \{x_i, y_i, z_i\}$. Очевидно, что $z=0$, а $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Поскольку положение начала координат ничем не выделено в плоскости OXY , то результат справедлив для любой оси, перпендикулярной плоскости, а не только для OZ .

Для тел, обладающих высокой симметрией, скажем, однородных тел вращения, указанные свойства позволяют сразу же определить главные оси инерции. Так, для тел вращения ось вращения и любые две перпендикулярные ей оси, перпендикулярные между собой, диагонализуют тензор инерции.

Рассмотрим теперь преобразования тензора инерции при сдвиге осей. Пусть в некоторой системе $OXYZ$ тензор инерции определяется выражением J_{lm} (17.13). Координаты точек в новой системе $O'X'Y'Z'$, начало которой сдвинуто относительно исходной системы, а оси координат параллельны исходным осям, связаны со старым соотношением

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i + \mathbf{c}_i,$$

где вектор \mathbf{c}_i определяет сдвиг начала новой системы. Подставляя это выражение в (17.13), получим связь между тензором инерции в исходной системе и в новой J'_{lm} :

$$J_{lm} = J'_{lm} + \sum_i m_{(i)} (c^2 \delta_{lm} - c_l c_m) + \sum_i m_{(i)} (2c_h x'_k{}^{(i)} \delta_{lm} - x'_l{}^{(i)} c_m - x'_m{}^{(i)} c_l).$$

Если начало новой системы совместить с центром масс, то

$$\sum_i m_{(i)} x'_{(i)l} = 0,$$

и в этом случае

$$J_{lm} = J_{lm}^0 + M(c^2 \delta_{lm} - c_l c_m), \quad (21.13)$$

где J_{lm}^0 — тензор инерции в системе центра масс, $M = \sum_i m_i$.

Параллельный перенос осей преобразует момент инерции системы относительно оси, определяемой вектором \mathbf{n} :

$$J_{lm} n_l n_m = I = I^0 + M d^2. \quad (22.13)$$

Здесь $d = c \sin \alpha$ — расстояние от точки O' системы центра масс до оси вращения, а I^0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Рассмотренное преобразование составляет содержание теоремы Штейнера.

13.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой существенно упрощаются, если динамические переменные — векторы кинетического момента и угловой скорости — задавать проекциями на оси системы \mathbf{e}_s , жестко связанные с движущимся телом. В этом случае компоненты тензора инерции явно не зависят от времени. Выберем систему координат, связанную с твердым телом, так, чтобы учесть симметрии в распределении масс и диагонализировать тензор инерции. Пусть $J_1 > J_2 > J_3$ — главные моменты тензора. Вектор угловой скорости мы будем задавать также проекциями на орты \mathbf{e}_s :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_s \mathbf{e}_s.$$

Кинетический момент вращающегося тела в этом случае

$$\mathbf{M} = M_s \mathbf{e}_s = J_{sk} \Omega_k \mathbf{e}_s = J_1 \Omega_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \Omega_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3,$$

т. е. определяется компонентами

$$\mathbf{M} = \{J_1 \Omega_1, J_2 \Omega_2, J_3 \Omega_3\}. \quad (23.13)$$

Векторы \mathbf{e}_s при движении твердого тела могут поворачиваться относительно инерциальной системы, определяемой ортами \mathbf{n}_k , так что $\mathbf{e}_s = \alpha_{sk} \mathbf{n}_k$, причем коэффициенты матрицы поворотов зависят от времени:

$$\alpha_{sk} = \alpha_{sk}(t).$$

Используем теорему об изменении кинетического момента

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \mathbf{L}.$$

Выполняя дифференцирование с учетом вращения ортов

$$\frac{dM_s}{dt} \mathbf{e}_s + M_s \frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = \mathbf{L}, \quad \frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = \dot{\alpha}_{sk} \mathbf{n}_k = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_s],$$

получим выражение для изменения кинетического момента

$$\dot{M}_s \mathbf{e}_s + [\boldsymbol{\Omega}, M_s \mathbf{e}_s] = \mathbf{L}. \quad (24.13)$$

Подставляя в это выражение значения вектора кинетического момента из (23.13), найдем проекции уравнения (24.13) на орты движущейся системы:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\Omega}_1 = (J_2 - J_3) \Omega_2 \Omega_3 + L_1, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 = -(J_1 - J_3) \Omega_1 \Omega_3 + L_2, \\ J_3 \dot{\Omega}_3 = (J_1 - J_2) \Omega_1 \Omega_2 + L_3. \end{cases} \quad (25.13)$$

Полученная система уравнений называется системой динамических уравнений Эйлера. Вместе с кинематическими уравнениями, выражающими угловую скорость через обобщенные координаты и скорости, полученная система шести уравнений первого порядка описывает вращательное движение твердого тела. В качестве таких уравнений можно взять кинематические уравнения Эйлера (7.12):

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases}$$

Интегрирование этой системы уравнений в общем случае весьма сложно. Общее решение в квадратурах для этих уравнений может быть получено в некоторых частных случаях, к которым относятся случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Случай свободного движения твердого тела, когда момент внешних сил, действующих на него, равен нулю, называется случаем Эйлера.

В частности, если эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения $J_1 = J_2$, движение тела называют регулярной прецессией. Интегрирование уравнений в этом случае существенно упрощается. Напомним, что углы Эйлера имеют следующие названия:

- ψ — угол собственного вращения,
- θ — угол нутации,
- φ — угол прецессии.

так что названия движения вращающегося тела — прецессия или нутация — связаны с изменением соответствующих углов Эйлера.

В случае свободного движения, когда момент внешних сил равен нулю, система динамических уравнений Эйлера явно не зависит от углов и может быть проинтегрирована независимо от системы кинематических уравнений (7.12). В рассматриваемом случае симметричного тела решение последнего уравнения системы (25.13) тривиально:

$$\Omega_3 = \omega_3,$$

а оставшиеся два уравнения этой системы

$$\begin{cases} J_1 \dot{\Omega}_1 - (J_1 - J_3) \omega_3 \Omega_2, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 - (J_1 - J_3) \omega_3 \Omega_1 \end{cases} \quad (26.13)$$

являются линейными однородными уравнениями с постоянными коэффициентами, решение которых находится стандартными методами:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_0 \sin \left[\left(1 - \frac{J_3}{J_1} \right) \omega_3 t + \psi_0 \right], \\ \Omega_2 &= \omega_0 \cos \left[\left(1 - \frac{J_3}{J_1} \right) \omega_3 t + \psi_0 \right]. \end{aligned} \quad (27.13)$$

Таким образом, компоненты Ω_1 и Ω_2 вектора угловой скорости вращаются вокруг орта \mathbf{e}_3 с угловой скоростью

$$\Omega = \left(1 - \frac{J_3}{J_1} \right) \omega_3,$$

поэтому и весь вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega} = \Omega_i \mathbf{e}_i$ вращается (прецессирует) вокруг оси \mathbf{e}_3 .

Полученные решения динамических уравнений позволяют проинтегрировать кинематические уравнения (7.12):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi &= \omega_0 \sin (\Omega t + \psi_0), \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi &= \omega_0 \cos (\Omega t + \psi_0), \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} &= \omega_3. \end{aligned} \quad (28.13)$$

Для упрощения вычислений выберем лабораторную систему так, чтобы вектор кинетического момента \mathbf{M} , который является интегралом задачи, был направлен вдоль оси \mathbf{n}_3 :

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}_3 = J_1 (\Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2) + J_3 \omega_3 \mathbf{e}_3.$$

Как следует из решения системы (25.13), проекция вектора \mathbf{M} на орт \mathbf{e}_3 также сохраняется:

$$M_0 (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}_3) = M_0 \cos \theta = J_3 \omega_3.$$

Учитывая, что величина кинетического момента M_0 постоянна:

$$M_0 = \sqrt{J_1^2 \omega_0^2 + J_3^2 \omega_3^2},$$

определим сохраняющийся угол θ :

$$\cos \theta = \frac{J_3 \omega_3}{\sqrt{J_1^2 \omega_0^2 + J_3^2 \omega_3^2}}.$$

С учетом полученного решения система кинематических уравнений (28.13) может быть приведена к уравнениям

$$\dot{\varphi} \sin \theta_0 = \omega_0, \quad \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} = \omega_3, \quad (29.13)$$

решения которых и определяют движение твердого тела

$$\psi = \Omega t + \psi_0, \quad (30.13)$$

$$\varphi = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{J_3^2 \omega_3^2}{J_1^2 \omega_0^2}} t + \varphi_0.$$

В зависимости от соотношения между J_1 и J_3 прецессия может быть прямой, когда $J_1 > J_3$, или обратной, когда $J_1 < J_3$.

Полученные результаты могут быть применены к описанию движения планет, которые представляют собой слегка сплюснутые тела вращения. Если распределение масс обладает симметрией, то можно полагать $J_1 = J_2$, $J_3 \neq J_1$. Например, для Земли $J_3 > J_1$. Если период суточного вращения известен и угол между осью вращения и осью симметрии мал, то период обращения полюса — период Эйлера — определяется полученным соотношением

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \Omega.$$

В частности, для Земли $\frac{J_1 - J_3}{J_1} = 0,0033$, так что $\omega_{\text{пр}} = \Omega/300$.

Наблюдаемое движение полюса несколько отличается от расчетного, что может быть обусловлено отклонением в распределении масс от принятой модели или тем, что модель абсолютно твердого тела в этом случае оказывается слишком грубой.

13.4. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим подробнее общий случай свободного движения, когда решение может быть получено в квадратурах, — случай Эйлера. В этом случае задача интегрирования может быть разделена на две части. Во-первых, может быть проинтегрирована в квадратурах система динамических уравнений Эйлера и получены выражения для компонент вектора угловой скорости независимо от выбора координат, определяющих ориентацию твердого тела, и, во-вторых, до конца интегри-

руется система кинематических уравнений, например, при выборе в качестве параметров углов Эйлера. Первая часть задачи решается благодаря выбору подвижной системы координат для записи динамических уравнений, поскольку в этом случае коэффициенты J_s не зависят от времени.

Система однородных уравнений Эйлера имеет два очевидных интеграла — энергию и квадрат кинетического момента:

$$\begin{cases} 2E = J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2, \\ M^2 = J_1^2\Omega_1^2 + J_2^2\Omega_2^2 + J_3^2\Omega_3^2. \end{cases} \quad (31.13)$$

Используя эти интегралы, легко исключить любые две функции, например Ω_1 и Ω_3 , из уравнений движения. Обычно исключают $\Omega_{1,3}$ и оставляют уравнение для Ω_2 :

$$J_1J_3J_2^2\dot{\Omega}_2^2 = [(M^2 - 2EJ_3) - J_2(J_2 - J_3)\Omega_2^2][(2EJ_1 - M^2) - J_2(J_1 - J_2)\Omega_2^2].$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Прежде чем переходить к вычислению квадратуры, проведем качественное исследование и рассмотрим возможные области изменения параметров и переменных. Пусть движение происходит с некоторым заданным значением величины кинетического момента $M = \text{const}$.

Движение возможно лишь в области изменения энергии и переменной Ω_2 , удовлетворяющих условию $\Omega_2^2 > 0$. Структура уравнения совпадает со структурой уравнения в задаче одномерного движения в случае существования интеграла энергии. В этом случае полезным оказывается введение эффективной потенциальной энергии, возможно, зависящей от дополнительных параметров (например, момента в задаче о движении в центральном поле). В рассмотренных ранее задачах, однако, энергия входила линейно, а в нашем случае выражение

$$\dot{\Omega}^2 = \dot{\Omega}^2(E, M, \Omega^2)$$

содержит не только линейные, но и квадратичные по энергии члены. Такая структура характерна для релятивистских одномерных задач, где интегралом является квадрат четырехмерного импульса. Полезно поэтому несколько обобщить понятие эффективной энергии, определив ее условием $\dot{\Omega} = 0$. В нашем случае это приведет к существованию двух ветвей эффективной энергии $E_{\text{эфф}}$, определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{M^2}{2J_3} - \frac{J_2\Omega_2^2}{2} \frac{J_2 - J_3}{J_3}, \\ E_- &= \frac{M^2}{2J_1} + \frac{J_2\Omega_2^2}{2} \frac{J_1 - J_2}{J_1}. \end{aligned} \quad (32.13)$$

Поскольку мы полагаем $J_1 > J_3$, введем следующие обозначения:

$$E_{\max} = \frac{M^2}{2J_3}, \quad E_{\min} = \frac{M^2}{2J_1}.$$

Значения параметров E_{\min} и E_{\max} определяют область изменения энергии в рассматриваемой задаче при фиксированном значении кинетического момента:

$$E_{\min} \leq E \leq E_{\max}.$$

Зависимость $E_{\text{эфф}}(\Omega)$ изображена на рис. 1.13.

Движение с заданным значением E происходит в области

$$E_-(\Omega) < E < E_+(\Omega),$$

что определяет область изменения переменной Ω :

$$\Omega_{10} \leq \Omega \leq \Omega_{20}.$$

Границы области, соответствующие значениям $\Omega_{10}=0$, $\Omega_{20}=0$, определяют точки остановки. В отличие от обычных графиков разность $E - E_{\text{эфф}}$ теперь не является кинетической энергией точки, так что непосредственное определение скорости по виду графика несколько сложнее. В рассматриваемом случае

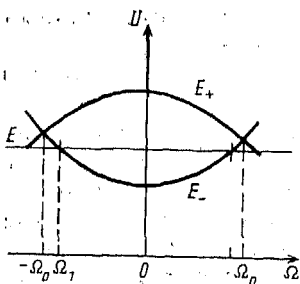


Рис. 1.13

$$\dot{\Omega} \sim \sqrt{(E - E_-(\Omega))(E_+(\Omega) - E)},$$

т. е. определяется средним геометрическим. Максимальное значение Ω_0 достигается в точках, удовлетворяющих условию

$$E_+(\Omega_0) = E_-(\Omega_0) = E_0.$$

Подставляя сюда значения из уравнений (32.13), получим

$$\Omega_0 = \frac{M}{J_2}, \quad E_0 = \frac{M^2}{2J_2}.$$

Таким образом, при энергии $E = E_0$ тело вращается вокруг оси, совпадающей с ортом e_2 . При $\Omega_2 = 0$ ось вращения лежит в плоскости e_1, e_3 и может занимать любое положение по отношению к ортам. В частности, если $\Omega_1 = 0$, то $M = J_3 \Omega_3$, $E = E_{\max}$. Таким образом, тело, вращающееся вокруг оси с минимальным моментом инерции, обладает максимальной энергией, а точка на графике $\Omega_2 = 0$, $E = E_{\max}$ изображает это состояние. Соответственно при $\Omega_2 = 0$ и $E = E_{\min}$, $M = J_1 \Omega_1$ вращение происходит вокруг оси e_1 .

Вблизи границы области движение является равноускоренным, так что граница достигается за конечное время. Действи-

тельно, пусть изображающая точка движется вблизи Ω_{10} . Разложим $E_-(\Omega)$ в окрестности точки Ω_{10} :

$$E_-(\Omega) = E_-(\Omega_{10}) + \frac{\partial E}{\partial \Omega} \Delta\Omega_2 \equiv E_-(\Omega_{10}) - k\Delta\Omega,$$

где

$$-k = \frac{\partial E}{\partial \Omega} < 0.$$

В этом случае справедливо приближение

$$\dot{\Omega} = \Delta\dot{\Omega} \sim \sqrt{k\Delta\Omega(E_+(\Omega_{10}) - E_-(\Omega_{10}))},$$

т. е.

$$\Delta\dot{\Omega} \sim \sqrt{\Delta\Omega},$$

так что интеграл $\Delta t = \int_0^{\Delta\Omega_1} \frac{d\Omega}{\sqrt{\Delta\Omega}} \sim \sqrt{\Delta\Omega_1}$ сходится. Этот результат

означает, что все точки границы

$$\begin{cases} E_+ - E = 0, \\ E - E_- \neq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} E_+ - E \neq 0, \\ E - E_- = 0 \end{cases}$$

являются точками поворота и достигаются за конечное время. Таким образом, движение изображающей точки — колебания.

Угловая скорость $\Omega_2 = \Omega_2(t)$ при заданном значении момента M совершает колебания, амплитуда которых зависит лишь от значения энергии и определяется условием

$$E = E_{\text{эфф}}(\Omega_{\text{ампл}}).$$

Кинетическая энергия движения, обусловленного изменением параметра Ω_2 , имеет в рассмотренных точках простой корень. Точки $\Omega_2 = 0$, $E = E_{\text{min}}$ и $\Omega_2 = 0$, $E = E_{\text{max}}$ являются точками устойчивого равновесия, а движение в окрестности этих точек — гармонические колебания.

Несложно вычислить период этих колебаний и определить закон движения. Пусть, например, $E = E_{\text{min}} + \epsilon$, где $\epsilon \ll E_{\text{min}}$. Это соответствует вращению вокруг оси e_1 . Полагая, что в этом случае

$$E_+(\Omega) - E \approx E_{\text{max}} - E_{\text{min}} = \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right),$$

получим приближенное уравнение для Ω_2 :

$$\frac{J_2 \dot{\Omega}_2^2}{2} = \frac{M^2}{J_2} \frac{J_1 - J_3}{J_1 J_3} \left(\epsilon - \frac{J_1 - J_2}{J_1} \frac{J_2 \Omega_2^2}{2} \right).$$

Решение этого уравнения дает гармонические колебания для $\Omega_2(t)$:

$$\Omega_2 = \Omega_{20} \sin(\omega_1 t + c_1),$$

которые происходят с амплитудой Ω_{20} , определяемой отклонением энергии от экстремума E_{\min} , а частота этих колебаний определяется лишь компонентами тензора инерции и величиной кинетического момента

$$\omega_1 = \frac{M}{J_1} \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_3}}.$$

Учитывая связь между компонентами угловой скорости (31.13)

$$\begin{cases} J_1(J_1 - J_3)\Omega_1^2 = M^2 - 2EJ_3 - J_2(J_2 - J_3)\Omega_2^2, \\ J_3(J_1 - J_3)\Omega_3^2 = 2EJ_1 - M^2 - J_2(J_1 - J_2)\Omega_2^2, \end{cases}$$

при $E = E_{\min} + \varepsilon$ получим выражения для компонент Ω_1 и Ω_3

$$\Omega_1(t) = \pm \sqrt{\frac{M^2}{J_1^2} - \frac{J_2(J_2 - J_3)}{J_1(J_1 - J_3)} \Omega_2^2(t)}, \quad (33.13)$$

$$\Omega_3(t) = \pm \sqrt{\frac{J_2(J_1 - J_2)}{J_3(J_1 - J_3)}} \Omega_{20} \cos(\omega_1 t + c_1).$$

Таким образом, вектор угловой скорости описывает эллипсы вокруг оси e_1 , причем полуоси этих эллипсов определяются малой амплитудой колебаний Ω_{20} . Поскольку величина вектора скорости практически равна $\Omega_1 \approx M/J_1$, то период вращения вектора угловой скорости вокруг оси

$$\omega_1 \approx \Omega_1 \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_3}}.$$

Аналогичные выражения справедливы и для вращения вокруг оси e_3 . Выражения для них могут быть получены простой заменой индексов:

$$\omega_3 = \Omega_3 \sqrt{\frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_3)}{J_1 J_2}}.$$

Несколько сложнее исследовать движение в окрестности точки Ω_0 . При $E = E_0$ точка $\Omega = \Omega_0$ является корнем кратности 2 для выражения $(E - E_{\text{эфф}})^2$.

В этом случае, как следует из общей теории качественного исследования движения, особая точка недостижима за конечное время.

Подставляя значение $E_0 = M^2/2J_2$ в уравнение для угловой скорости Ω_2 , получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\Omega}_2 = \pm \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}{J_1 J_2}} (\Omega_0^2 - \Omega_2^2) \pm k_2 (\Omega_0^2 - \Omega_2^2), \quad (34.13)$$

где

$$k_2 = \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}{J_1 J_2}}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\pm k_2 t = \frac{1}{2\Omega_0} \ln \left| \frac{\Omega_2 + \Omega_0}{\Omega_2 - \Omega_0} \right| + \text{const.}$$

Выбирая константу интегрирования так, чтобы

$$\Omega_2(0) = 0, \quad \dot{\Omega}_2(0) > 0,$$

получим явное выражение для Ω_2 :

$$\Omega_2(t) = \Omega_0 \operatorname{th} k_2 \Omega_0 t.$$

Очевидно, что $\Omega_2 \rightarrow \Omega_0$ при $\Omega_0 t \rightarrow \infty$, но точка остается недостижимой. Закон движения в этом случае совпадает с законом движения математического маятника при $E = U_{\max}$. Более подробно исследовать характер движения при энергии $E = E_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \ll E_0$, можно, проведя замену переменных, сводя задачу к задаче о движении математического маятника. Для упрощения обозначений введем вместо констант E и M , определяющих энергию и момент твердого тела, переменные размерности угловой скорости Ω_{10} и Ω_{30} , определяемые следующими уравнениями:

$$J_2(J_2 - J_3)\Omega_{10}^2 = M^2 - 2EJ_3, \quad (35.13)$$

$$J_2(J_1 - J_2)\Omega_{30}^2 = 2EJ_1 - M^2,$$

с помощью которых уравнения для угловой скорости Ω_2 можно записать в виде

$$\dot{\Omega}_2^2 = k_2^2 (\Omega_{10}^2 - \Omega_2^2) (\Omega_{30}^2 - \Omega_2^2).$$

В области изменения параметра E при заданном M введенные величины удовлетворяют условиям

$$0 \leq \Omega_{10}^2 \leq \frac{J_2}{J_1} \frac{J_1 - J_3}{J_3 - J_2} \Omega_0^2 \quad (\Omega_{10} = 0 \text{ при } E = E_{\max}),$$

$$0 \leq \Omega_{30}^2 \leq \frac{J_2}{J_3} \frac{J_1 - J_3}{J_1 - J_2} \Omega_0^2 \quad (\Omega_{30} = 0 \text{ при } E = E_{\min}).$$

Вращению вокруг оси e_1 соответствует случай $\Omega_{30}=0$ и $\Omega_{10}^2 = \Omega_{10}^2_{\max}$, а движение при $E=E_0$ происходит так, что $\Omega_2 = \Omega_0$:

$$\Omega_{10}^2 = \Omega_{30}^2 = \Omega_0^2.$$

Рассмотрим подробнее для определенности случай, когда

$$\Omega_{10}^2 \leq \Omega_0^2 \leq \Omega_{30}^2,$$

что соответствует области возможных изменений вектора Ω от вращения вокруг оси e_3 до вращения вокруг e_2 .

Поскольку в этом случае область изменения Ω_2 ограничена условием $\Omega_{10}^2 \leq \Omega_2^2 < \Omega_{30}^2 \pm$ можно ввести переменную α с помощью следующего уравнения:

$$\Omega_2 = \Omega_2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Изменению переменной $-\pi < \alpha < \pi$ соответствует изменение Ω_2 во всей возможной области. В этом случае для переменной справедливо уравнение математического маятника

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2} k_2 \frac{\Omega_{10}^2}{\Omega_{30}} [1 + q + \cos \alpha]^{1/2}, \quad (36.13)$$

где

$$q = 2 \frac{\Omega_{30}^2 - \Omega_{10}^2}{\Omega_{30}^2}.$$

Этот случай соответствует вращению математического маятника, определяемого углом α . При $q \ll 1$ период вращения легко оценить, используя сшивание решений.

Введем характерную частоту

$$\omega_2 = k_2 \Omega_{30} \approx k_2 \Omega_0.$$

Закон движения для переменной α записывается в виде квадратуры

$$\omega_2 t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + q + \cos \alpha}}.$$

Этот интеграл является эллиптическим интегралом первого рода, так что закон движения можно записать в виде

$$\omega_2 t = \pm kF\left(\frac{\alpha}{2}, k\right), \quad \text{где } k = 1/\sqrt{1+q/2}.$$

С помощью полученного выражения можно определить период колебаний угловой скорости для интересующего нас случая

$q \ll 1$. Используя разложение эллиптического интеграла при $k \approx 1$, получим оценку

$$T = \frac{2}{k_2 \Omega_0} \ln \frac{32}{q}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно из квадратуры, используя метод сшивания решений, изложенный в п. 14.2.

Вдали от точек остановки закон движения имеет вид

$$\Omega_2(t) \approx \Omega_{30} \operatorname{th} \omega_2 t.$$

Соответственно для компонент Ω_1 и Ω_3 зависимость от времени дается выражениями

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = \sqrt{\frac{J_2(J_3 - J_2)}{J_1(J_1 - J_2)}} \sqrt{\Omega_{10}^2 - \Omega_2^2(t)}, \\ \Omega_3(t) = \sqrt{\frac{J_2(J_1 - J_2)}{J_3(J_1 - J_2)}} \sqrt{\Omega_{30}^2 - \Omega_2^2(t)}. \end{cases} \quad (37.13)$$

Графики зависимости компонент угловой скорости $\Omega_{1,2}$ от времени приведены на рис. 2.13.

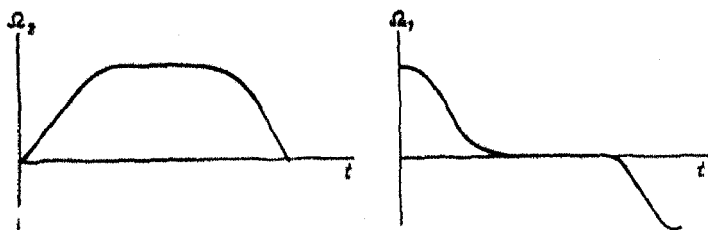


Рис. 2.13

Для определения зависимости углов Эйлера от времени выберем лабораторную систему так, чтобы сохраняющий вектор кинетического момента был направлен вдоль оси OZ : $M = M_0 n_3$. Учитывая явные выражения для коэффициентов матрицы a_{k3} :

$$a_{13} = (e_1, n_3) = \sin \psi \sin \theta,$$

$$a_{23} = (e_2, n_3) = \cos \psi \sin \theta,$$

$$a_{33} = (e_3, n_3) = \cos \theta,$$

найдем проекции вектора \mathbf{M} на орты \mathbf{e}_k , что сразу же дает явную зависимость углов нутации и собственного вращения θ , ψ от времен:

$$\cos \theta = \frac{J_3}{M_0} \Omega_1(t), \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{J_1}{J_2} \frac{\Omega_3(t)}{\Omega_2(t)}.$$

Угол прецессии определяется из кинематических формул Эйлера квадратурой

$$\varphi(t) = \int \frac{\Omega_1 \sin \psi(t) + \Omega_2 \cos \psi(t)}{\sin \theta(t)} dt + \varphi_0. \quad (38.13)$$

13.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПУАНССО

Представление о движении вектора угловой скорости твердого тела в случае Эйлера может быть сделано наглядным, если учесть, что в этом случае вектор кинетического момента \mathbf{M} сохраняется. Сохранение направления вектора в пространстве фиксирует плоскость движения. Выберем систему координат некоторой инерциальной системы отсчета так, чтобы орт \mathbf{n}_3 был направлен вдоль вектора \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = M \mathbf{n}_3.$$

Проекции вектора \mathbf{M} на орты \mathbf{e}_s системы, связанной с твердым телом, изменяются: $M_s = J_{sm} \Omega_m e_s$. Учитывая, что компоненты этого вектора выражаются через компоненты вектора угловой скорости Ω :

$$\Omega = \Omega_m \mathbf{e}_m,$$

вычислим скалярное произведение

$$(\mathbf{M}, \Omega) = J_{sm} \Omega_s \Omega_m = 2E.$$

Поскольку энергия в рассматриваемом случае является интегралом, то полученное соотношение означает, что сохраняется проекция вектора угловой скорости на ось OZ :

$$\Omega_z = \frac{2E}{M}.$$

Таким образом, концы вектора угловой скорости при движении будут лежать в некоторой плоскости P_a , перпендикулярной вектору кинетического момента, а в нашем случае — оси OZ . С другой стороны, сохранение кинетической энергии приводит к тому, что величина вектора Ω меняется, так как геометрическое место концов вектора определяет эллипсоид инерции

$$J_{sm} \Omega_s \Omega_m = 2E.$$

Таким образом, движение вектора угловой скорости при вращении твердого тела происходит так, как будто эллипсоид инерции «катится» без проскальзывания по плоскости P_0 .

Совместное выполнение условий движения эллипсоида инерции по плоскости

$$\begin{cases} M^2 = J_m J_k \Omega_m \Omega_k, \\ 2E = J_m \Omega_m \Omega_m \end{cases}$$

определяет кривые — точки касания плоскости P_0 и эллипсоида инерции. В координатах, связанных с твердым телом, где тензор инерции диагонален (орты e_k), эти уравнения определяют поверхности сферы $M = M_0$ и эллипсоида инерции $E = E_0$:

$$\begin{cases} M_0^2 = J_1^2 \Omega_1^2 + J_2^2 \Omega_2^2 + J_3^2 \Omega_3^2, \\ 2E = J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2. \end{cases} \quad (39.13)$$

Пересечение этих поверхностей определяет геометрическое место точек *малых вектора угловой скорости — полудин*. Вводя константы J_0, Ω_0 вместо E и M :

$$2E = J_0 \Omega_0^2, \quad M^2 = J_0^2 \Omega_0^2,$$

нетрудно показать, что на плоскостях $e_1 e_2$ и $e_1 e_3$ проекции линий пересечения образуют семейство эллипсов:

$$\frac{J_1 (J_1 - J_2)}{J_0 (J_0 - J_2)} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} + \frac{J_2 (J_2 - J_3)}{J_0 (J_0 - J_3)} \frac{\Omega_2^2}{\Omega_0^2} = 1, \quad (40.13)$$

а проекция на плоскость $e_1 e_3$ определяет семейство гипербол:

$$\frac{J_1 (J_1 - J_2)}{J_0 (J_0 - J_2)} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - \frac{J_3 (J_2 - J_3)}{J_0 (J_0 - J_2)} \frac{\Omega_3^2}{\Omega_0^2} = 1.$$

13.6. ТВЕРДОЕ ТЕЛО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА

В случае твердого тела, движущегося в заданном внешнем поле, переменные разделяются, и решение может быть получено в виде квадратур только в некоторых специальных случаях. В случае Лагранжа движение происходит в однородном поле тяжести и предполагается, что вращающееся тело обладает симметрией, так что $J_1 = J_2 \neq J_3$. Предположим, что в этом случае орты e_i выбраны так, чтобы они совпадали с главными осями тензора инерции, а лабораторная система ориентирована так, что сила тяжести направлена вдоль оси n_3 . Мы будем предполагать, что твердое тело имеет неподвижную точку, которая находится на расстоянии l от центра масс, и выберем начало лабораторной системы O , совпадающим с неподвиж-

ной точкой. Положение твердого тела относительно инерциальной лабораторной системы \mathbf{n}_k мы будем задавать углами Эйлера, как показано на рис. 1.13.

Для составления уравнений движения твердого тела в этих переменных может быть использован лагранжев подход. Кинетическую энергию вращающегося тела удобно вычислять, используя теорему Кенига. В этом случае функция Лагранжа легко вычисляется:

$$L = \frac{J_1 + ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от углов прецессии φ и собственного вращения ψ , в системе сохраняются соответствующие обобщенные импульсы:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = [(J_1 + ml^2) \sin^2 \theta + J_3 \cos^2 \theta] \dot{\varphi} + J_3 \dot{\psi} \cos \theta = P_{\varphi_0},$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = P_{\psi_0}.$$

Кроме того, функция Лагранжа не зависит явно от времени, что приводит к сохранению обобщенной энергии, которая в данном случае совпадает с полной:

$$E = \frac{J_1 + ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta. \quad (41.13)$$

Поскольку число первых интегралов задачи равно числу независимых координат, возможно провести разделение переменных и получить решение в виде квадратур. Подставляя выражения для обобщенных скоростей в интеграл энергии (41.13), мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$E = \frac{J_1 + ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta), \quad (42.13)$$

где $U_{\text{эфф}}$ — эффективная энергия, определяемая выражением

$$U_{\text{эфф}} = \frac{P_\psi^2}{2J_3} + \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos \theta)^2}{2(J_1 + ml^2) \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta.$$

Решение уравнения (42.13) в виде квадратуры получается элементарно:

$$t = \pm \sqrt{\frac{J_1 + ml^2}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\theta)}}.$$

Область возможных значений угла нутации θ определяется условием $E - U_{\text{эфф}}(\theta) \geq 0$. При $P_\varphi \neq P_\psi$ функция $U_{\text{эфф}}(\theta)$ обращается в бесконечность при $\theta = 0, \pi$, а в интервале между этими значениями имеет минимум. Таким образом, при любых E дви-

жение происходит в области $\theta_1 < \theta < \theta_2$, где $\theta_{1,2}$ определяется условием $U_{\text{эфф}}(\theta_{1,2}) = E$.

В общем случае решение уравнения (42.13) будет весьма громоздким, однако в некоторых частных случаях решение может быть получено в элементарных функциях. В частности, тело может вращаться вокруг вертикальной оси. Найдем условия, при которых это вращение существует и устойчиво.

Пусть $\dot{\theta}(t) = 0$. При этом орты e_3 и n_3 совпадают, так что $P_\psi = P_\phi$. Поскольку $\dot{\theta}(t) = 0$,

$$U_{\text{эфф}} = \frac{P_\psi^2}{2J_3} + \frac{P_\psi^2}{8(J_1 + ml^2)} + mgl = E. \quad (43.13)$$

В окрестности точки покоя $\dot{\theta} = 0$ эффективная потенциальная энергия может быть разложена в ряд по θ :

$$U_{\text{эфф}} \approx E + \left(\frac{P_\psi^2}{J_1 + ml^2} - 4mgl \right) \frac{\theta^2}{8}.$$

Функция имеет минимум при $\theta = 0$ в случае

$$P_\psi^2 > 4mgl(J_1 + ml^2), \quad (44.13)$$

поэтому при выполнении условия (44.13) движение тела вокруг вертикальной оси устойчиво.

Другой случай — псевдорегулярная прецессия при $\dot{\theta} \neq 0$ осуществляется также при достаточно большой скорости вращения тела вокруг оси симметрии. Пусть параметры задачи выбраны так, что $\varphi_0 = \theta_0 = 0$, а $\dot{\psi}_0 \neq 0$. В этом случае интегралы движения выражаются через заданные значения углов и угловых скоростей:

$$P_\phi = J_3 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0, \quad P_\psi = J_3 \dot{\psi}_0.$$

Эффективная энергия для заданных условий имеет вид

$$U_{\text{эфф}} = \frac{J_3 \dot{\psi}_0^2}{2} + \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{2(J_1 + ml^2)} \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (45.13)$$

Значение полной энергии, при котором $\dot{\theta} = 0$,

$$E = U_{\text{эфф}}(\theta_0) = \frac{J_3 \dot{\psi}_0^2}{2} + mgl \cos \theta_0.$$

Для исследования движения вблизи точки $\theta = \theta_0$ разложим $U_{\text{эфф}}$ по степеням $\varepsilon = \theta - \theta_0$, ограничиваясь степенями ε не выше второй. Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{J_1 + ml^2}{2} \varepsilon^2 = \varepsilon mgl \sin \theta_0 - \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{2(J_1 + ml^2)} \varepsilon^2.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим линейное уравнение для отклонения от точки покоя:

$$(J_1 + ml^2) \ddot{\varepsilon} + \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{J_1 + ml^2} \varepsilon = mgl \sin \theta_0.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) \neq 0$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = 2mgl \sin \theta_0 \frac{J_1 + ml^2}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \frac{\Omega_n t}{2}, \quad \text{где } \Omega_n^2 = \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{J_1 + ml^2}.$$

Учитывая полученное выражение, нетрудно получить зависимость углов Эйлера от времени, используя интегралы задачи

$$\varphi = \frac{mgl}{J_3 \dot{\psi}_0} t - mgl \frac{J_1 + ml^2}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \Omega_n t + \varphi_0, \quad (46.13)$$

$$\theta = \frac{2(J_1 + ml^2)}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} mgl \sin \theta_0 \sin^2 \frac{\Omega_n t}{2} + \theta_0,$$

$$\psi = \dot{\psi}_0 \left(1 - \frac{mgl \cos \theta_0}{J_3 \dot{\psi}_0^2} t \right) + \frac{(J_1 + ml^2) mgl \cos \theta_0}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \Omega_n t + \psi_0.$$

Движение можно рассматривать как медленную прецессию вокруг вертикали. Скорость прецессии тем меньше, чем больше угловая скорость собственного вращения. На это медленное движение накладывается колебание с малой амплитудой и высокой частотой Ω_n . Одновременно происходят малые колебания угла нутации θ с частотой Ω_n .

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

14.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим консервативные одномерные системы. Динамические уравнения для этих систем имеют первый интеграл — интеграл энергии, что позволяет провести качественный анализ характера движения и записать формальное выражение для закона движения точки в виде

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}. \quad (1.14)$$

Здесь x_0 — начальная координата, а параметр \mathcal{H} — обобщенная энергия, определяемая начальными условиями.

Аналитическое представление закона движения связано с возможностью выполнить интегрирование, т. е. представить решение в виде элементарных или специальных функций, свойства которых хорошо известны. Представление закона движения в явном виде связано с дополнительной возможностью обращения полученных функций.

Ясно, что это возможно лишь в исключительных случаях для ограниченного класса функций $U(x)$ и, как правило, при некоторых определенных значениях обобщенной энергии \mathcal{H} , т. е. лишь при определенных значениях начальных условий. Будем называть задачу, допускающую представление решения в таком виде, невозмущенной, а соответствующее решение — невозмущенным решением:

$$x = \bar{x}(t).$$

Практический интерес представляет построение решения в виде «простых» комбинаций невозмущенных решений при некотором «малом» изменении потенциальной энергии. Будем считать, что потенциальная энергия может быть представлена в виде

$$\bar{U}(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x), \quad (2.14)$$

где параметр ε — «малый» параметр, который может быть связан с некоторым «малым» параметром, характеризующим отклонение от невозмущенного решения $\bar{x}(t)$.

Назовем такую систему возмущенной, а слагаемое $\varepsilon U_1(x)$ — возмущением. В частности, возмущение может иметь вид $\varepsilon U_1(x) = -\Delta \mathcal{H}$, что соответствует изменению только начальных условий задачи без изменения сил, действующих на точку.

Теория возмущений изучает методы построения решений возмущенной задачи с заданной точностью в некоторой области изменения времени в виде простых комбинаций определенных функций.

Предположим, что возмущенное решение

$$x = x(t, \varepsilon)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится всюду в области изменения переменной $0 \leq t \leq t_0$ к невозмущенному решению $x(t, 0) = \bar{x}(t)$, т. е. выполняется условие

$$|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

для всех t из указанной области.

Возмущенные решения, обладающие такими свойствами, называются регулярными. Возмущения, не обладающие этим свойством, называют сингулярными.

Возмущенное решение мы будем представлять с помощью удобных для анализа «простых» функций

$$x = x(t, \varepsilon),$$

которые при $\varepsilon \neq 0$ могут отличаться от возмущенного решения $x = x(t, \varepsilon)$ на некоторую величину.

Если при $\varepsilon \rightarrow 0$ отличие исчезает, т. е.

$$|x(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

то функции $x(t, \varepsilon)$ называют асимптотическим приближением возмущенного решения, а соответствующая теория является асимптотической теорией возмущений. Для оценки отклонения возмущенного решения от невозмущенного удобно представить решение в виде функционального ряда по параметру возмущения ε :

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \varepsilon^n.$$

Функции $x_n(t)$ могут быть любыми ограниченными функциями (кроме $x_0(t) = x(t)$), но обычно в качестве таких функций выбирают решение невозмущенной задачи и функции, получаемые из этих решений с помощью последовательного интегрирования или дифференцирования. Конкретные методы построения таких функций определяют ту или иную теорию возмущений.

Мы будем рассматривать такие ряды, что N -я частичная сумма ряда

$$x_N(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N x_n(t) \varepsilon^n$$

является асимптотическим приближением возмущенного решения, причем приближением с точностью порядка $o(\varepsilon^N)$, т. е.

$$|x_N(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| < \varepsilon^N.$$

Если ряд является сходящимся при рассматриваемых значениях параметра возмущения ε в некоторой области изменения t , то увеличение N приводит к увеличению точности представления возмущенного решения.

Асимптотическое представление возмущенного решения возможно и с помощью расходящегося ряда. Если ряд расходится при выбранном значении возмущения ε , то частичные суммы могут быть устроены так, что при $N < N_0$ точность представления возмущенного решения возрастает, и лишь начиная с некоторого номера N_0 точность падает.

Асимптотические ряды могут быть использованы для оценки или вычисления квадратур вида (1.14), возникающих при интегрировании уравнений движения консервативных систем. Рассмотрим один из методов построения асимптотического ряда для такой задачи и обсудим условия сходимости. Пусть решение возмущенной задачи представлено в виде квадратуры:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x) - \varepsilon U_1(x)}}. \quad (3.14)$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных $x_0 \leq x < a$ подынтегральное выражение определено в каждой точке, т. е. всюду в этой области выполняется условие

$$\mathcal{H} - \tilde{U}(x) \geq c > 0.$$

Предположим, что в этой области существует невозмущенное решение, удовлетворяющее аналогичным условиям.

Представим подынтегральное выражение в виде произведения

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x) - \varepsilon U_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)}}}$$

Второй множитель этого произведения может быть представлен в виде формального ряда, так что подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{H} - \bar{U}(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left[\frac{\varepsilon U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right]^n, \quad (4.14)$$

что приводит к выражению

$$t(x) = \bar{t}(x) + \Delta t(x, \varepsilon).$$

Если закон движения в отсутствие возмущения $x = \bar{x}(t)$, то учет поправки дает неявное выражение для возмущенного движения

$$x(t) = \bar{x}(t - \Delta t(x)).$$

Неявное уравнение можно решить методом итераций, если ε мало. Первая итерация даст

$$\Delta t(x) \simeq \Delta t(\bar{x}(t)),$$

так что

$$x(t) \simeq \bar{x}(t - \Delta t(\bar{x}(t))) \simeq \bar{x}(t) - \bar{x}'(t) \Delta t(\bar{x}(t)).$$

Замечательно, что эта формула может быть использована и вблизи от точки остановки, хотя интеграл в этой точке расхо- дится, так что разложение (4.14) оказывается неприменимо.

Конечно, представление решения в виде ряда целесообразно лишь в тех случаях, когда вычисление членов этого ряда про- ще, чем интеграла (3.14).

В системах, совершающих колебания, часть времени части- ца проводит вблизи точек остановки, где подынтегральное вы- ражение имеет особенность, так как

$$\mathcal{H} - U(x_{1,2}) = 0.$$

Мы будем считать, что и в возмущенной и в невозмущенной задачах точки остановки находятся вдали от точек равновесия, так что $U'(x_{1,2}) \neq 0$. Соответственно для возмущенной задачи точки остановки определяются уравнением

$$\mathcal{H} - \bar{U}(x_{1,2}) = 0,$$

и мы предположим, что

$$\bar{U}'(\tilde{x}_{1,2}) \neq 0.$$

Рассмотрим возможность применения теории возмущений вбли- зи особых точек для определения периода колебаний возмущен-

ной системы. Период колебаний невозмущенной системы определяется выражением

$$T(\mathcal{H}) = \sqrt{2m} \int_{x_1(\mathcal{H})}^{x_2(\mathcal{H})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}.$$

Для определения периода колебаний возмущенной системы необходимо вычислить интеграл

$$\tilde{T}(\mathcal{H}) = \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1(\mathcal{H})}^{\tilde{x}_2(\mathcal{H})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x) - \varepsilon U_1(x)}}.$$

Предположим, что возмущение достаточно мало, так что всюду в области интегрирования выполняется условие равномерной сходимости ряда

$$\varepsilon \left| \frac{U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right| < 1,$$

которое нарушается лишь в граничных точках, где

$$\mathcal{H} - U(\tilde{x}_{1,2}) \simeq \varepsilon U_1(\tilde{x}_{1,2}).$$

Подынтегральное выражение может быть разложено в ряд, однако условия теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру в особых точках нарушаются. Это приводит к нарушению условий сходимости ряда в точках $x = x_{1,2}$, поскольку при $x \rightarrow x_{1,2}$ в случае $U_1(x_{1,2}) \neq 0$

$$\varepsilon |U_1(x_{1,2}) / (\mathcal{H} - U(x))| \rightarrow \infty.$$

Биномиальный ряд, представляющий второй сомножитель в выражении (4.14), имеет радиус сходимости $R=1$, так что при выполнении условия

$$\left| \frac{\varepsilon U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right| < 1 \quad (5.14)$$

подынтегральное выражение представлено равномерно сходящимся рядом. Неравенство позволяет в заданной области изменения координаты определить величину параметра возмущения, обеспечивающего равномерную сходимость. Если возмущение задано, то это неравенство определяет область изменения координат, где ряд сходится равномерно.

Равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, поэтому при выполнении условия (5.14) решение возмущенной задачи может быть представлено в виде

$$t(x) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \times \\ \times \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} \left[\frac{U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right]^n.$$

Мы предполагаем, что функции, представляющие закон движения невозмущенной задачи $t = \bar{t}(x)$, позволяют представить $x = \bar{x}(t, \mathcal{H})$ с помощью простых функций. В этом случае решение представляется сходящимся рядом

$$t(x) = \bar{t}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \int_0^t dt \left[\frac{U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right]^n. \quad (6.14)$$

Здесь проведена замена переменной

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}.$$

Для оценки получающихся интегралов удобно использовать тождество

$$\frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial \mathcal{H}^n} \int_{x_1(\mathcal{H})}^{x_2(\mathcal{H})} dx [\mathcal{H} - U(x)]^{n-1/2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}.$$

При дифференцировании верхнего и нижнего пределов мы учли, что

$$\mathcal{H} - U(x_{1,2}) = 0.$$

С помощью этого тождества период возмущенного движения может быть представлен в виде

$$\tilde{T} = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial \mathcal{H}^n} \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1(\mathcal{H})}^{\tilde{x}_2(\mathcal{H})} dx [\mathcal{H} - U(x) - \varepsilon U_1(x)]^{n-1/2}.$$

Предполагая, что всюду в области $\tilde{x}_1 < x < \tilde{x}_2$ выполнено условие разложимости в ряд, получим для оценки периода выражение

$$\tilde{T} = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial \mathcal{H}^n} \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} dx [\mathcal{H} - U(x)]^{n-1/2} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k \left(\frac{U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k \left(\frac{U_1(x)}{\mathcal{H} - U(x)} \right)^k \right\}.$$

Пусть для определенности $U_1(x) > 0$ всюду в области. Тогда $x_1 < \bar{x}_1$, а $x_2 > \bar{x}_2$, т. е. точки лежат за границами области возможного движения возмущенной задачи. Поскольку мы предполагаем, что $U(x_{1,2}) \neq 0$, при вычислении интегралов от первой суммы $0 \leq k \leq n$ пределы интегрирования $\bar{x}_{1,2}$ можно заменить на $x_{1,2}$, причем ошибка вычисления интеграла при такой замене будет порядка $\varepsilon^{n+1/2}$.

Аналогичная оценка может быть получена для любой функции $U_1(x)$, достаточно гладкой и удовлетворяющей условию $U'(x_{1,2}) \neq 0$.

При интегрировании второй суммы нельзя изменить пределы интегрирования для каждого слагаемого, однако эта сумма при сделанных предположениях не превышает слагаемого при $k=n$. Таким образом, с помощью полученного выражения мы имеем асимптотическое представление периода

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \sqrt{2m} \times \\ & \times \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} U_1(x) + \dots + O(\varepsilon^n). \end{aligned}$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\tilde{T} = T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n}{\partial \mathcal{H}^n} \int_0^T dU_1^n(\bar{x}(t)).$$

Здесь T — период невозмущенного движения, $x = \bar{x}(t)$ — закон движения точки в невозмущенной задаче.

Вообще говоря, условие равномерной сходимости существенно, но не является необходимым для почленного интегрирования ряда, так что при указанных условиях ряд теории возмущений будет сходящимся.

В практически важном случае, когда

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

уравнение движения оказывается линейным, а закон невозмущенного движения представляется элементарной функцией

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k}} \cos(\omega_0 t + \psi_0), \text{ где } \omega_0^2 = k/m.$$

В этом случае изменение периода вычисляется особенно просто:

$$\tilde{T} = T \left(1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n}{\partial \mathcal{H}^n} \int_0^{2\pi} d\psi U_1^n \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k}} \cos \psi \right) \right). \quad (7.14)$$

В качестве примера применения изложенного метода вычислим период колебаний системы, полагая

$$U(x) = \frac{k_0 x^2}{2}, \quad \varepsilon U_1(x) = \frac{k_1 x^2}{2}.$$

Невозмущенное движение — гармонические колебания, период которых $T = 2\pi \sqrt{m/k_0}$, а закон движения

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k_0}} \cos \psi,$$

где $\psi = \omega_0 t + \psi_0$.

Выражение для периода колебаний в этом случае представляется рядом

$$\tilde{T} = T \left(1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{k_1}{k_0} \right)^n \int_0^{2\pi} d\psi \cos^{2n} \psi \right).$$

Интеграл легко берется

$$\int_0^{2\pi} d\psi \cos^{2n} \psi = \frac{(2n-1)!!}{2n!!},$$

так что выражение для периода приводится к виду

$$\tilde{T} = T \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{k_1}{k_0} \right)^n. \quad (8.14)$$

При выполнении условия $|k_1/k_0| < 1$ полученный ряд сходится и сумма его вычисляется:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{k_1}{k_0} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{1+k_1/k_0}}.$$

Отсюда следует, что период возмущенного движения при условии $|k_1/k_0| < 1$ выражается формулой

$$\tilde{T} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0 + k_1}},$$

т. е. совпадает с точным выражением.

При $k_1/k_0 > 1$ полученный ряд расходится, однако в области $k_1/k_0 - 1 \ll 1$ он может быть использован для оценки периода колебаний, поскольку остаточный член ряда сначала убывает с ростом n .

Остаточный член ряда может быть представлен в виде

$$r_n(\xi) = \theta (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \xi^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$, $\xi = k_1/k_0$. Таким образом, хотя ряд расходится, при любом $n > 0$ выполняется условие

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{\xi^n} = 0,$$

т. е. ряд является асимптотическим представлением функции

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}.$$

При $k_1 > 0$ ряд является знакопеременным, так что остаточный член ряда не превышает первого отброшенного члена. Это приводит к тому, что увеличение точности представления функции $f(x)$ в области, где ряд расходится, происходит с ростом n лишь до тех пор, пока члены ряда U_n удовлетворяют условию

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{n+1/2}{n+1} \xi < 1.$$

Это отношение убывает для всех целых n , удовлетворяющих неравенству

$$n < n_{\text{опт}} = \left[\frac{2-\xi}{2\xi-2} \right],$$

где $[p]$ — целая часть числа p .

Поведение суммы первых n членов ряда для случая $x=1,1$ иллюстрирует рис. 1.14.

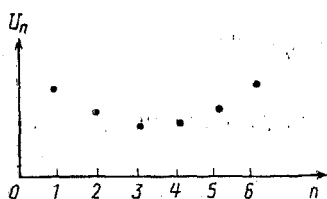


Рис. 1.14

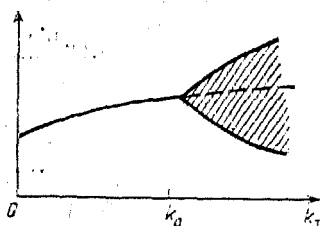


Рис. 2.14

Рассматриваемые свойства асимптотического ряда вызваны тем, что ряд, заданный своими коэффициентами, определяет функцию неоднозначно. Можно показать, что две функции, представляющиеся асимптотическими рядами, коэффициенты которых одинаковы, могут отличаться на экспоненциально малую величину. Такая погрешность, не представляемая степенными рядами, может существенно менять характер поведения решения динамических уравнений.

Вернемся к ряду (8.14), представляющему поведение периода колебаний осциллятора. Поскольку в области $\xi > 1$ асимптотический ряд может быть использован лишь для определения границ области, в которой находится решение, выберем для каждого n оптимальное значение членов ряда, чтобы минимизировать ошибку

$$n = n_{\text{опт}},$$

и построим границы области, внутри которой может находиться функция, представляемая этим рядом. Это построение иллюстрирует рис. 2.14. В области сходимости ряда теории возмущений определена функция $f(x)$. За пределами этой области ряд не представляет определенной функции. Решение исходной задачи в этой области может оказаться достаточно «простым», а может быть и таким, что представление его с помощью элементарных функций и их комбинаций невозможно. Эти выводы полностью переносятся на асимптотические ряды, коэффициенты которых являются функциями времени и представляют закон движения точки. Очень сложное поведение решений динамических уравнений в области неустойчивости и явления динамического хаоса как раз и дают примеры явлений, не описываемых в рамках такого подхода.

Во многих случаях ряды теории возмущений используются лишь для оценки характера решения и его зависимости от параметров, поэтому часто достаточно ограничиться лишь первыми членами разложения асимптотического ряда. Такой подход можно проиллюстрировать на примере математического маятника. Определим в первом порядке теории возмущений поправку к периоду колебаний математического маятника. Интеграл энергии для маятника

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = \mathcal{H} \quad (9.14)$$

приводит к формальному выражению для закона движения

$$t = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathcal{H} + mgl \cos \varphi}}. \quad (10.14)$$

Будем рассматривать такие значения энергии

$$\mathcal{H} = -mgl(1 - \varepsilon), \text{ где } \varepsilon > 0, \quad (11.14)$$

что в области возможных движений $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ можно ограничиться лишь первыми членами разложения потенциальной энергии, полагая

$$\cos \varphi \simeq 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}.$$

Остаточный член знакпеременного ряда удовлетворяет условию $|r_n(\varphi)| < \varphi_{\max}^4/24$, что дает при $\varphi_{1,2} \approx 1$ $|r_n| < 0,05$. Поправка к потенциальной энергии

$$\delta U(\varphi) = -mgl \frac{\varphi^4}{24},$$

что приводит к выражению для периода в первом порядке по ε :

$$\tilde{T} = T \left(1 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\varepsilon^2}{6} \cos^4 \psi \right).$$

Вычисляя интеграл и выполняя дифференцирование по ε , имеем

$$\tilde{T} = T \left(1 + \frac{\varepsilon}{8} \right) = T \left(1 + \frac{\varphi_{\max}^2}{16} \right).$$

Отметим еще раз, что рассматриваемая теория возмущений неприменима вблизи точек локального максимума потенциальной энергии.

Пользуясь полученными результатами, можно вычислить не только поправку к периоду колебаний, но и поправку к закону движения. Подставляя в формулу (10.14) выражение (11.14) для потенциальной энергии возмущений, в первом порядке малости получим искомое выражение

$$\Delta t = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon - \varphi^2/2}} \frac{\varphi^4/24}{\varepsilon - \varphi^2/2}.$$

Здесь мы предполагаем, что начальные условия выбраны в виде

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) > 0.$$

Учитывая, что невозмущенное движение $\varphi = \bar{\varphi}(t)$ — гармонические колебания

$$\varphi = \varphi_{\max} \sin \omega_0 t, \quad \text{где } \varphi_{\max} = \sqrt{2\varepsilon},$$

проведем замену переменных в интеграле, полагая $\psi(\varphi) = \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}$.

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{12\omega_0} \int_0^{\psi} d\psi \frac{\sin^4 \psi}{\cos^2 \psi}.$$

Интеграл легко вычисляется, так что поправка к закону движения имеет вид

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{12\omega_0} \left(\operatorname{tg} \psi + \frac{1}{2} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{2} \psi \right).$$

Учитывая сделанную замену переменной, мы имеем зависимость

$$\Delta t = \Delta t(\varphi).$$

Закон движения с учетом поправки можно получить в явном виде, используя итерацию:

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) - \bar{\varphi}' \Delta t(\bar{\varphi}),$$

что приводит к окончательному результату

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin \omega_0 t - \frac{\varphi_{\max}^3}{16} \left(\omega_0 t \cos \omega_0 t - \frac{3}{4} \sin \omega_0 t - \frac{\sin 3\omega_0 t}{4} \right). \quad (12.14)$$

При $\omega_0 t \sim 1/\varepsilon$ формула (12.14) неприменима.

Обобщение можно получить, полагая, что движение периодическое, как это следует из теории качественного исследования, а непериодические «секулярные» члены возникли в результате разложения периодических функций. Это позволяет предполагать, что возмущенное движение описывается выражением

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \left(1 - \frac{7}{8} \varepsilon \right) \sin \omega t - A \frac{3}{8} \sin 3\omega t, \quad (13.14)$$

где

$$\omega = \omega_0 (1 - A^2/16), \quad \bar{\varepsilon} = -A^2/24.$$

Таким образом, применение теории возмущений позволяет сделать вывод, что появление высших членов разложения потенциальной энергии вблизи точки локального минимума приводит к изменению периода колебаний и, значит, изменению основной частоты. Вторым эффектом является возникновение гармоник этой новой частоты.

14.2. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим теперь колебания с большой амплитудой. Термин «большая амплитуда» здесь означает, что часть времени система проводит вблизи точек неустойчивого равновесия — изолированного максимума потенциальной энергии. Для математического маятника, рассмотренного в 14.1, такими точками являются

$$\varphi_h = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Поскольку приближенное вычисление с помощью разложения функции $U(x)$ вблизи точки максимума дает большую погрешность, мы рассмотрим разложение потенциальной энергии непосредственно в точке локального максимума. Пусть $U(x)$ — потенциальная энергия системы, имеющая максимум в точке $x=0$. Разложение $U(x)$ вблизи этой точки будем вести, ограничиваясь точностью x^2 :

$$U(x) = U_0 + \frac{U''}{2} x^2. \quad (14.14)$$

В рассматриваемой точке

$$U'' = -k < 0.$$

Пусть энергия системы мало отличается от U_0 , а именно

$$\mathcal{H} = U_0 + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \ll \mathcal{H} - U_{\min}.$$

Здесь U_{\min} некоторое значение энергии из области возможного движения. Полагая $x(0) = x_0$, запишем закон движения

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon + \frac{kx^2}{2}}}.$$

Начальное значение координаты x_0 для $\varepsilon > 0$ удобно выбирать равным нулю. При этом $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \neq 0$. При $\varepsilon < 0$ будем считать x_0 точкой остановки, так что

$$\mathcal{H} - U(x_0) = 0.$$

Выбор начальной точки x_0 для случая $\varepsilon = 0$ мы обсудим позже. Введем параметр $\omega_0^2 = k/m$, так что $\tau = 1/\omega_0$ — характерное время движения вблизи максимума — время релаксации.

Вычисляя интеграл для $\varepsilon < 0$, найдем

$$t = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{x}{x_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^2} \right), \quad (15.14)$$

откуда зависимость $x(t)$ при выбранных начальных условиях дает закон движения

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \omega_0 t. \quad (15.14a)$$

В случае $\varepsilon = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} > 0$ решение, соответствующее выбранному начальному условию, имеет вид

$$x(t) = x_0 \operatorname{sh} \omega_0 t. \quad (15.14b)$$

Здесь введена константа $x_0 = \dot{x}_0 / \omega_0 = \sqrt{\varepsilon / 2k}$.

При $\varepsilon=0$ общее решение линейного уравнения движения вблизи максимума имеет вид (15.3):

$$x(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}.$$

Выбор направления движения соответствует выбору знака в экспоненте. Поскольку характерное время системы $\tau=1/\omega_0$, то частица находится вблизи точки максимума в течение времени, сравнимого с τ , а затем координата точки будет экспоненциально быстро нарастать (исключение составляет случай $\varepsilon=0$, когда точка движется к положению равновесия), и разложение потенциальной энергии $U(x)$ окажется неприменимым.

Построение решений повсюду в области движения точки на основе решения вблизи локального максимума и решения в виде квадратуры называется сшиванием.

Решение (15.14), соответствующее случаю $\varepsilon \neq 0$, переходит в решение с $\varepsilon=0$ при $\omega_0 t \gg 1$, если положить $B=0$, $A=x_0/2$. Этим можно воспользоваться при построении решения в общем случае, если полная энергия удовлетворяет условию $\mathcal{H} \neq U(0)$.

В области $\omega_0 t \gg 1$ при $\varepsilon > 1$ справедливо приближение

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} \approx \frac{1}{\omega_0} \int_{x^*}^x \frac{dx}{\sqrt{U_0 - U(x)}}, \quad (16.14)$$

где $x_0^2 = \varepsilon/U''(0)$, $x^* = x_0/2$.

Аналогичное выражение справедливо и при $\varepsilon < 0$. В этом случае x_0 — нижний предел интегрирования в первом интеграле — точка остановки.

В ряде задач не требуется определять детали движения вблизи максимума, но существенным является получение точного описания перехода от точки локального максимума к движению с большой кинетической энергией в области $x \gg x_0$. В этом случае можно сразу использовать формулу (16.14), дающую удобное приближение.

Применим полученные результаты для оценки периода больших колебаний математического маятника ($\mathcal{H} \approx mgl$). Пусть амплитуда этих колебаний φ_m , причем $\pi - \varphi_m \ll \varphi_m$. Всюду в области $\varphi < \varphi_m$ для вычисления закона движения будем полагать

$$\mathcal{H} = mgl.$$

Используя формулу (10.14), получим закон движения

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sin \varphi/2} = 2 \ln \cos \varphi/2 \quad (17.14)$$

или, в явном виде

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \operatorname{th} \omega_0 t. \quad (18.14)$$

Полученное выражение пригодно удален от точек поворота. Для оценки периода положим $\varphi(T/4) = \varphi^*$, где φ^* определяется условием

$$\pi - \varphi^* = \frac{\pi - \varphi_m}{2}. \quad (19.14)$$

Подставляя выражение (19.14) в (18.14), получим период колебаний

$$T = \frac{4}{\omega_0} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi - \varphi_m}{8} = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m}. \quad (20.14)$$

Полученное нами решение (18.14) в области больших значений амплитуды колебаний $\pi - \varphi_m \ll 1$ переходит в (16.14):

$$\varphi(t) = \pi - (\pi - \varphi_m) \operatorname{ch} \omega_0 (t - T/4).$$

Амплитуда колебаний может быть легко выражена через энергию, что дает $\varphi_m = \pi - \sqrt{2 \frac{\varepsilon}{mgl}}$. Таким образом, частота основных колебаний при $\varphi_m \rightarrow \pi$ уменьшается:

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\pi \omega_0}{\ln \left(32 \frac{mgl}{\varepsilon} \right)}, \quad (21.14)$$

а период логарифмически растет:

$$T(\varepsilon) = \frac{2}{\omega_0} \ln \left(32 \frac{mgl}{\varepsilon} \right). \quad (22.14)$$

Зависимость периода колебаний математического маятника от энергии можно получить, вычисляя интеграл

$$T = 4 \sqrt{ml^3} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\mathcal{H} + mgl \cos \varphi}}, \quad (23.14)$$

который заменой переменных $\sin \xi = \frac{\sin \varphi/2}{\sin \varphi_m/2}$ сводится к эллиптическому

числому $T = \frac{4}{\omega_0} K(\sin(\varphi_m/2))$, где φ_m — амплитуда колебаний, а

$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$ — полный эллиптический интеграл первого

рода. Зависимость периода движений математического маятника от энергии представлена на рис. 3.14. Полученные нами выражения соответствуют первым членам разложения эллиптического интеграла по амплитуде при малых $\varphi_m \ll 1$ и больших

$\varphi_m \sim \pi$ значениях. Область энергии $\mathcal{H} < mgl$ на рис. 3.14 соответствует колебаниям, а при $\mathcal{H} > mgl$ происходит вращение. В этом случае T — период вращений.

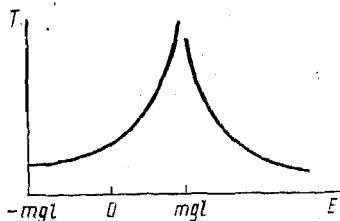


Рис. 3.14

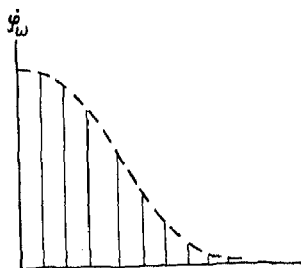


Рис. 4.14

В области сильной нелинейности спектр колебаний маятника богат гармониками основной частоты. В пределе $\mathcal{H} \rightarrow mgl$ спектр становится непрерывным, что соответствует асимптотически медленному движению. В этом предельном случае вычисление спектра особенно просто. Вычислим для примера спектр скорости маятника:

$$\dot{\varphi}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Соответственно спектр колебаний угла имеет вид

$$\varphi_\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (24.14)$$

В случае колебаний с периодом $T \gg 2\pi/\omega_0$ коэффициенты b_n фурье-гармоник четной функции $\varphi(t)$ приближенно описываются формулой

$$b_n \approx \frac{\omega_0}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{n\Omega}{\omega_0}}.$$

Характер спектра скорости в этом случае представлен на рис. 4.14. Спектр является дискретным с шириной между линиями $\Delta\omega = \omega(\varphi_m)$. При $\varphi_m \rightarrow \pi$ $\Delta\omega \rightarrow 0$.

14.3. ЛОКАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ «ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ»

Мы определили нелинейные колебания как финитное движение, описываемое нелинейными уравнениями. Основными характерными свойствами таких колебаний, в отличие от линейных, являются следующие:

1) нелинейные колебания являются неизохронными, т. е. период колебаний зависит от начальных условий;

2) колебания являются негармоническими, т. е. закон движения точки не является зависимостью вида $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. При исследовании нелинейных колебаний негармонический характер их сильно усложняет описание. В частности, построение теории возмущений в виде асимптотических рядов, рассмотренное в п. 14.1, удобно проводить, если невозмущенное движение — гармонические колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. В случае консервативных одномерных систем удобно бывает провести замену переменных так, чтобы в новых координатах $q(t)$ движение было гармоническим.

Предположим, что область возможного движения при некоторых значениях \mathcal{H} ограничена, $x_1 \leq x \leq x_2$, причем время достижения особых точек конечно. В этом случае в системе существуют колебания, а закон движения определяется интегралом (1.14).

Период колебаний — минимальное время возврата системы в исходное состояние — определяется выражением

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}. \quad (25.14)$$

Здесь использовано обозначение контурного интеграла в смысле интегрирования по обеим ветвям уравнения (1.14) в зависимости от направления движения. Основная частота колебаний $\Omega = 2\pi/T$. Отметим, что мы рассматриваем существенно нелинейные колебания, так что частота колебаний зависит от энергии

$$\Omega = \Omega(\mathcal{H}).$$

Определим фазу φ , линейно растущую со временем:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0 = \Omega \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}} + \varphi_0, \quad (26.14)$$

и введем новую переменную q , которая будет периодической функцией времени с периодом T , и изменяется по гармоническому закону: $q = q_0 \sin \varphi$. В этом выражении q_0 — некоторый параметр — амплитуда колебаний. Обобщенная скорость, соответ-

ствующая выбранной координате, определяется дифференцированием

$$\dot{q} = q_0 \Omega \cos \varphi,$$

что приводит к интегралу энергии в новых переменных

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{\Omega^2 q^2}{2} = \frac{\Omega^2 q_0^2}{2}. \quad (27.14)$$

Мы построили гармоническую переменную, вводя промежуточные переменные q_0 , φ — амплитуду и фазу колебаний. В ряде задач эти переменные, удовлетворяющие системе уравнений первого порядка, оказываются удобными. Однако эти переменные не являются каноническими. Нетрудно ввести пару канонически сопряженных переменных, вместо амплитуды вводя переменную $I = I(q_0)$ — действие, — зависящую от амплитуды q_0 . Так как для гармонических колебаний энергия (27.14) зависит только от амплитуды колебаний, а не от фазы, функция Гамильтона зависит лишь от действия

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I), \quad \dot{I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0.$$

Выполняя дифференцирование

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \Omega^2 q_0 \frac{\partial q_0}{\partial I} = \Omega(I),$$

получим связь между амплитудой q_0 и новой переменной I :

$$I = \frac{\Omega q_0^2}{2}. \quad (28.14)$$

Канонические уравнения в новых переменных действие—угол имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \Omega(\mathcal{H}), \\ \dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad (29.14)$$

откуда следует, что $\mathcal{H} = I\Omega$, а зависимость $\Omega = \Omega(\mathcal{H})$ от энергии системы позволяет определить переменную I из первого уравнения непосредственно, не обращаясь к промежуточным выкладкам:

$$I = \int \frac{d\mathcal{H}}{\Omega(\mathcal{H})} = \frac{1}{2\pi} \int T(\mathcal{H}) d\mathcal{H}. \quad (30.14)$$

При этом предполагается, что $\Omega(\mathcal{H})$ не обращается в нуль. Подставляя

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H} - U(x)}}$$

и интегрируя выражение (30.14) по параметру \mathcal{H} , получим зависимость

$$I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2m} \oint \sqrt{\mathcal{H} - U(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \oint p(x) dx,$$

где $p(x)$ — импульс, сопряженный координате x . Выражая отсюда $\mathcal{H} = \mathcal{H}(I)$, мы получим гамильтониан системы в переменных действие—угол. Частота основных колебаний определяется теперь дифференцированием $\Omega = \partial \mathcal{H} / \partial I$.

Таким образом, использование переменных действие—угол позволяет ввести обобщенные координаты $q = q(x)$, такие, что для любых финитных движений системы с некоторым периодом T колебания в этих переменных будут гармоническими (но не изохронными). Это свойство переменных привело к широкому использованию их в теории.

В качестве примера построим «гармонические» координаты для математического маятника, совершающего большие колебания. Пусть энергия маятника $\mathcal{H} = mgl(1 - \varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$. Из интеграла энергии (9.14) определим амплитуду колебаний φ_m :

$$mgl(1 - \varepsilon) = -mgl \cos \varphi_m.$$

Вводя $\delta = \pi - \varphi_m \ll 1$, получим $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$. Период колебаний математического маятника в этом случае вычислен нами:

$$T(\varepsilon) = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Это выражение позволяет определить переменную I :

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int T(\mathcal{H}) d\mathcal{H} = I_0 - \frac{mgl}{\pi\omega_0} \varepsilon \left(1 + \ln \frac{32}{\varepsilon} \right).$$

Значение константы I_0 можно вычислить, используя выражение при $\varepsilon = 0$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \oint ml^2 \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi = \frac{8ml^2}{\pi} \omega_0,$$

где

$$\dot{\varphi}(\varphi) = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, для перехода к переменным, изменяющимся гармоническому закону, достаточно ввести амплитуду

$$q_0 = \sqrt{\frac{2I}{m\Omega}}, \text{ где } I = \frac{8ml^2}{\pi} \omega_0 \left(1 - \frac{e}{8} \left(1 + \ln \frac{32}{e} \right) \right),$$

а частота колебаний

$$\Omega = \frac{\pi\omega_0}{\ln \frac{32}{e}}.$$

Переменная $q(t) = q_0 \sin(\Omega t + \varphi_0)$ является искомой переменной.

Приведенные рассуждения показывают, что основным критерием нелинейности системы выступает неизохронность колебаний, т. е. зависимость периода или частоты от начальных условий. В дальнейшем будем называть колебания нелинейными, если они являются неизохронными в канонических переменных во всей области возможных начальных условий.

Важную роль при решении задач динамики играет качественный анализ, который позволяет изучить общую картину движения и наметить подходы для решения уравнений, используя подходящие для данной задачи методы, аналитические или численные. В простейшем случае одномерной консервативной динамической системы качественный анализ может быть проведен с помощью интеграла энергии, как показано в гл. 3. Это исследование позволяет установить область допустимого изменения обобщенной координаты (область возможных движений), определить «особые точки», в которых скорость обращается в нуль, и оценить время достижения таких точек. С помощью качественного исследования можно определить число и положение точек равновесия системы и установить характер равновесия (устойчивое или неустойчивое). Знание этих характеристик системы позволяет исследовать движение вблизи точек равновесия, как это рассмотрено в гл. 3, а также построить приближенное описание, например асимптотическую теорию возмущений. Выбор подходящего способа такого описания движения существенно зависит от характера и расположения особых точек и начальных условий, определяемых константой интегрирования — энергией системы. Конкретные примеры построения теории возмущений в зависимости от характера и расположения особых точек и начальных условий рассматривались в гл. 14.

Кроме того, качественное исследование позволяет установить зависимость структуры фазового пространства динамической системы, т. е. числа, расположения и типа особых точек от параметров задачи. Примером такого исследования является анализ состояния равновесия центробежного регулятора в зависимости от угловой скорости вращения, проведенный в гл. 15.

Аналогичным образом можно исследовать движение консервативных систем с двумя и более степенями свободы, если в системе имеется достаточно первых интегралов, с помощью которых можно разделить переменные и свести задачу к одномерной. Для описания движения в этом случае вводят некоторую «эффективную потенциальную энергию». Такая ситуация возникает, например, при исследовании движения в централь-

ном поле, не зависящем явно от времени. Исследование общих свойств движения этих систем принципиально ничем не отличается от случая одномерного движения. Единственным отличием является то, что эффективная энергия будет зависеть от констант интегрирования как от параметров, т. е. в этом случае характер особенностей (количество и расположение точек равновесия и их характер) определяется не только внешними параметрами системы, но и начальными условиями. Для гамильтоновых систем с n степенями свободы, имеющих n интегралов движения, как следует из общей теории, всегда можно провести разделение переменных и проинтегрировать задачу, так что рассмотренное качественное исследование с помощью интеграла энергии относится к интегрируемым задачам динамики.

Однако такая ситуация является скорее исключением, чем общим правилом. В общем случае невозможно указать необходимое количество первых интегралов, чтобы проинтегрировать уравнения движения. Такие системы называют неинтегрируемыми. Основы теории качественного исследования неинтегрируемых систем были сформулированы в конце XIX в. при изучении некоторых задач небесной механики, решение которых не может быть представлено в виде известных элементарных или специальных функций или сходящихся рядов таких функций. Дальнейшие исследования показали, что неинтегрируемые системы чрезвычайно широко распространены и являются наиболее типичными в задачах механики. В частности, к ним относятся такие простейшие системы, как математический маятник, на который действует вынуждающая сила, система из двух связанных математических маятников и многие другие. Поскольку мы предполагаем вести качественный анализ неинтегрируемых систем, для исследования общих свойств движения нам придется обратиться непосредственно к динамическим уравнениям.

15.1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Уточним прежде некоторые понятия, которыми мы пользовались ранее. Как известно, состояние механической системы с n степенями свободы полностью определяется заданием в каждый момент времени $2n$ переменных, например координат и скоростей точек системы

$$x_i = \{q_i, \dot{q}_i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Предполагается, что взаимодействие тел рассматриваемой механической системы между собой и с другими (внешними) телами происходит так, что если известно состояние системы в некоторый момент времени $t=0$, то при заданном законе движения внешних тел эволюция системы однозначно определяется начальными условиями. Система, эволюция которой однозначно определена начальным состоянием, называется динамической.

Множество всех возможных состояний системы образует фазовое пространство. В частности, фазовое пространство системы может быть пространством координат и скоростей. Для механической системы с n степенями свободы фазовое пространство $2n$ -мерно.

В некоторых случаях, когда описание движения удобнее проводить с помощью канонических уравнений, фазовое пространство строится как пространство координат и импульсов:

$$x_i = \{q_i, p_i\}.$$

Для одномерных систем фазовое пространство является двумерным и во многих случаях представляет собой фазовую плоскость. В общем случае геометрические свойства фазового пространства порождаются свойствами динамической системы. Различают локальные и глобальные свойства. Если в некоторый момент времени координаты и импульсы, определяющие состояние некоторой системы, мало отличаются от координат и импульсов, определяющих другое состояние системы, такие состояния называют близкими. Для определения близости точек фазового пространства вводят понятие расстояния между точками, определяя метрику пространства. Обычно для этой цели используют метрику евклидова пространства. Напомним, что пространство конфигураций, образуемое обобщенными координатами и используемое для описания движения систем с голономными связями в методе Лагранжа, оказывается римановым. Введение расстояния в фазовом пространстве позволяет определить фазовый объем, который часто используется при исследовании поведения канонических систем.

Глобальные геометрические свойства фазового пространства, определяемые динамической системой, формируют определенную топологию. Так, при описании движения математического маятника в качестве обобщенной координаты обычно используют угол отклонения стержня от положения равновесия. Поскольку точки $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ описывают одно и то же положение маятника, точки фазового пространства φ_0 и $\varphi_0 + 2\pi$ должны быть отождествлены, т. е. фазовое пространство математического маятника — цилиндр.

Изменение состояния механической системы с течением времени называется движением. Пусть при $t = t_0$ состояние системы определено точкой x_{i0} фазового пространства, а при $t = t_1$ — точкой x_{i1} . Назовем расширенным фазовым пространством или пространством состояний пространство, точки которого определяются координатами $u_i = \{x_i, t\}$. Оператор, переводящий точки расширенного фазового пространства u_{i0} в точки u_{i1} :

$$u_{i1} = \hat{T}(\tau_1) u_{i0}, \text{ где } \tau_1 = t_1 - t_0,$$

задает движение системы. Этот оператор называется оператором эволюции.

Поскольку точку u_{i1} можно рассматривать как начальную точку, для того чтобы определить движение в точке u_{i2} :

$$u_{i2} = \widehat{T}(\tau_2) u_{i1}, \quad \tau_2 = t_2 - t_1,$$

то операторы, определяющие отображение точек пространства состояний, образуют однопараметрическую группу, так как выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \widehat{T}(\tau_2 + \tau_1) &= \widehat{T}(\tau_2) \widehat{T}(\tau_1), \\ \widehat{T}(0) &= \widehat{I}, \quad \widehat{T}(-\tau) = \widehat{T}^{-1}(\tau). \end{aligned}$$

Для механических систем классической физики переход от одного состояния к другому осуществляется через непрерывную последовательность состояний, образующих в фазовом пространстве некоторую кривую — фазовую траекторию:

$$x_i = x_i(t).$$

В некоторых случаях, например при изучении движения точки под действием периодической силы, бывает удобно фиксировать состояние системы в определенные моменты времени. Оператор эволюции в этом случае задает лишь дискретное отображение точек фазового пространства — отображение Пуанкаре. В этом случае фазовая траектория отсутствует.

Если оператор эволюции динамической системы определен для всех моментов времени и определяет непрерывное отображение, то такая система называется потоком. Если оператор эволюции системы определен для дискретного множества значений времени, то она называется каскадом.

Для систем, динамика которых описывается с помощью непрерывного оператора эволюции, можно ввести фазовую скорость. Фазовой скоростью V_i называют вектор, определяемый соотношением

$$V_i = \dot{x}_i.$$

Векторы фазовой скорости образуют в каждой точке фазового пространства линейное пространство, называемое касательным:

$$V_i = V_i(x_k, t).$$

Рассматриваемые динамические системы можно задавать с помощью дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_k, t), \quad 1 \leq i, k \leq n. \quad (1.15)$$

В частности, это может быть каноническая система.

Система дифференциальных уравнений описывает динамическую систему, если начальные условия однозначно определяют эволюцию, т. е. выполняются условия теоремы существования и единственности решения уравнений.

Если функции $f_i(x_k, t)$ непрерывны в некоторой области фазового пространства и удовлетворяют в этой области условию Липшица по переменным x_k :

$$|f_i(x_k, t) - f_i(x'_k, t)| < L_p \left\{ \sum |x_k - x'_k| \right\},$$

где L_p — константа, не зависящая от t и x_k , то начальные условия определяют единственное решение на интервале $0 < t < T$. Таким образом, решение уравнений (1.15) с заданными начальными условиями определяет интегральную кривую в расширенном фазовом пространстве. При этом интегральные кривые не могут пересекаться, если выполнены условия теоремы.

Точка пространства состояний называется особой, если в ней возможно пересечение интегральных кривых. Заметим, что нарушение условий теоремы существования и единственности не обязательно указывает на существование особой точки.

Построение оператора эволюции для системы, описываемой дифференциальными уравнениями, сводится к отысканию решений этих уравнений при заданных начальных условиях, т. е. решению задачи Коши. Хотя выполнение условий теоремы существования и единственности и гарантирует существование этого решения, практическое получение его и исследование свойств представляют, как правило, весьма сложную задачу.

15.2. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Качественное исследование динамической системы в общем случае очень сложно, поэтому мы рассмотрим некоторые частные случаи, часто встречающиеся в задачах механики. Если правые части дифференциальных уравнений (1.15) не зависят явно от времени, то система называется автономной. Векторное поле $V_i = f_i(x_k)$ автономной системы является стационарным. Фазовые траектории системы касаются соответствующих векторов и, следовательно, также являются стационарными. Поскольку фазовые траектории не меняются с течением времени, для решения этих уравнений справедливо следующее утверждение.

Если $x_i = x_i(t)$ — решение автономной системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_i(0) = x_{i0}$, то $\tilde{x}_i = x_i(t + \tau)$ также является решением автономной системы, проходящим через указанную точку. Таким образом, две различные фазовые траектории автономной системы не пересекаются. Действительно, если предположить, что два различных решения $x_i = x_i(t)$ и $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t)$ проходят через одну точку $x_i(t_1) = \tilde{x}_i(t_2)$, то в силу сделанного утверждения эти решения совпадают при всех t . Фазовая траектория автономной системы, имеющая точку самопересечения, или состоит из одной точки, или является пе-

риодической с некоторым периодом. Действительно, если при некотором $\tau = t_2 - t_1$

$$x_i(t_2) = x_i(t_1),$$

то решения совпадают при всех t . В этом случае имеются лишь две возможности относительно выбора τ :

если равенство справедливо при любых τ , то, полагая $\tau = -t$, получим $x_i(t) = x_i(0)$, т. е. траектория системы — точка;

если равенство выполняется не при любых τ , то существует минимальное значение $\tau_{\min} = T$ (T — период), такое, что $x_i(t + T) = x_i(t)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что любая траектория автономной системы принадлежит к одному из трех типов:

траектория без самопересечений;

замкнутая траектория, называемая циклом;

траектория, состоящая из одной точки.

Траектории, состоящие из одной точки, называют точками покоя. Эти траектории определяют положения равновесия системы. Необходимым и достаточным условием того, что точка фазового пространства является точкой покоя, будет выполнение условия $V_i(x_{k0}, t) = 0$, т. е. фазовая скорость системы в точке покоя равна нулю.

Исследование движения автономной системы вблизи точки покоя во многих случаях можно провести в линейном приближении, разложив в ряд функции $f_i(x_k)$ в окрестности рассматриваемой точки и ограничиваясь линейными членами

$$f_i(x_k) = f_i(x_{k0} + \xi) = f_i(x_{k0}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi_k = a_{ik} \xi_k.$$

В этом случае система динамических уравнений в окрестности точки покоя заменяется линейной

$$\dot{\xi}_i = a_{ik} \xi_k.$$

Эта система является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами. Предположим, что

$$\det a_{ik} \neq 0.$$

Для пространства с одной степенью свободы фазовое пространство двумерно ($1 \leq i, k \leq 2$) и в окрестности изолированных точек покоя является плоскостью.

Если матрица диагонализирована, то уравнение (1.15) можно привести к виду

$$\dot{\xi}_1 = a_{11} \xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = a_{22} \xi_2 = \lambda_2 \xi_2.$$

Решения уравнений имеют вид

$$\xi_1 = A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Если при этом окажется, что $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории стремятся к точке покоя. Система фазовых траекторий, подходя к точке покоя, образует «устойчивый узел», изображенный на рис. 1.15, а.

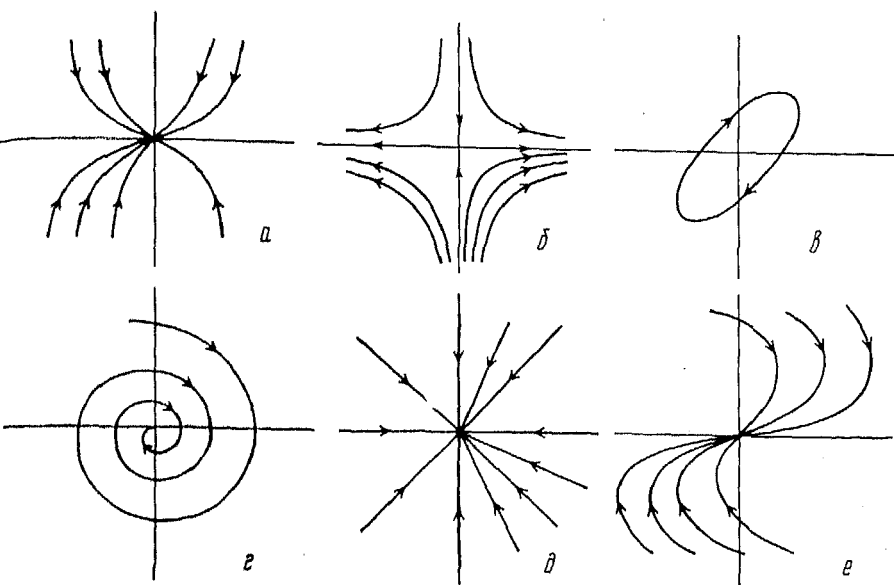


Рис. 1.15

Если выполнены неравенства $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то форма траекторий остается такой же, но движение точки в этом случае происходит от точки покоя. Такая система траекторий образует неустойчивый узел.

Пусть λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Возникающая картина фазовых траекторий — «седло» — имеет две траектории, асимптотически приближающиеся к точке покоя, — «устойчивые усы», и две траектории, выходящие из этой точки, — «неустойчивые усы». Остальные траектории асимптотически приближаются к осям координат, как показано на рис. 1.15, б.

Если матрица a_{ik} не приведена к диагональному виду, то топологическая структура фазовых кривых в окрестности точек покоя не меняется. Положение «усов» в этом случае определяется собственными векторами, для которых найдены собственные значения матрицы a_{ik} .

В случае, когда собственные значения $\lambda_{1,2}$ комплексны, имеются следующие возможности:

1) $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$. Решение системы имеет вид

$$\xi_1 = A^\pm e^{\pm i\omega t}, \quad \xi_2 = B^\pm e^{\pm i\omega t}.$$

Фазовые траектории для этого случая — эллипсы. Такая система называется центром (рис. 1.15, в).

2) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$. В этом случае система фазовых кривых называется устойчивым фокусом. Закон движения в этом случае имеет вид

$$\xi_1 = Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \xi_2 = Be^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Логарифмические спирали фазовых траекторий в этом случае асимптотически приближаются к точке покоя.

3) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$. Такая система называется неустойчивым фокусом. Вид кривых на фазовой плоскости такой же, как в предыдущем случае, но точки удаляются от положения равновесия. Отметим, что для всех рассмотренных случаев, кроме случая $\operatorname{Re} \lambda = 0$, малое изменение параметров системы, а следовательно, и матрицы a_{ik} не меняет качественного характера движения вблизи точки покоя. Небольшие изменения параметров системы для случая $\operatorname{Re} \lambda = 0$ превращают центр в устойчивый или неустойчивый фокус.

В случае кратных корней возможны следующие ситуации. Если матрица a_{ik} диагонализуема и $\lambda < 0$, то решение уравнений имеет вид $\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $\xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$, так что $\xi_2 = \frac{C_2}{C_1} \xi_1$. Фазовые траектории такой системы — прямые, проходящие через точку покоя. Такая система фазовых траекторий называется устойчивым дикритическим узлом. Если в этом случае $\lambda > 0$, то получается система, называемая неустойчивым дикритическим узлом, изображенным на рис. 1.15, д.

Если матрица имеет вид

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

то решение системы в этом случае представляется в виде

$$\xi_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

При $\lambda < 0$ уравнения определяют системы фазовых траекторий, стремящихся к точке покоя — вырожденный устойчивый узел (рис. 1.15, е). При $\lambda > 0$ фазовые траектории выходят из точки покоя. Такая система называется неустойчивым вырожденным узлом.

Если $\lambda_1 = 0$, то возможна ситуация, когда $\lambda_2 \neq 0$. В этом случае фазовые траектории — прямые, параллельные оси $O\xi_2$. При $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ траектории параллельны оси абсцисс.

Мы привели классификацию точек равновесия и рассмотрели характер движения системы в окрестности этих точек в линейном приближении. Очевидно, что этим не исчерпываются

все возможные случаи. Детальный анализ различных случаев приведен в математической литературе *).

Для физических приложений наибольший интерес представляют точки устойчивого равновесия, поскольку фазовые траектории «притягиваются» к этим точкам. Множества, к которым притягиваются фазовые траектории динамической системы, называются аттракторами. Области фазового пространства, через которые проходят фазовые траектории, притягивающиеся к аттракторам, называются бассейном аттрактора.

Для изучения свойств предельных множеств, к которым стремятся фазовые траектории, удобно использовать понятие об инвариантных множествах операторов. Назовем инвариантным множеством оператора T такое подмножество точек фазовой плоскости, которое переходит в себя под действием этого оператора. Если оператор T — оператор эволюции динамической системы, то неподвижные точки этого оператора представляют пример инвариантного множества.

Другим примером инвариантных множеств оператора эволюции автономной области являются сепаратрисные кривые, начинающиеся или заканчивающиеся в седловых точках. Эти кривые разделяют фазовую плоскость на области, движение в которых имеет качественно различный характер.

Существует еще один тип инвариантного множества оператора эволюции автономной системы — изолированный предельный цикл, введенный А. Пуанкаре. Если динамическая система описывается дифференциальными уравнениями, то предельным циклом называют изолированное периодическое решение. Решение уравнений называют изолированным периодическим решением, если решения, проходящие через любую сколь угодно близкую к предельному циклу точку, не являются периодическими. Иными словами, в любой ε -окрестности предельного цикла нет других замкнутых траекторий. Предельный цикл разбивает фазовую траекторию на две области: внешнюю и внутреннюю. Поскольку фазовые траектории автономной системы не могут пересекаться, любая траектория, отличная от предельного цикла, является либо внешней, либо внутренней. Предельный цикл называется устойчивым, если все траектории, и внешние и внутренние, начинающиеся в ε -окрестности цикла, приближаются к нему. Если все траектории из рассматриваемой области удаляются от предельного цикла, то он называется неустойчивым. Если некоторые траектории, например внешние, приближаются к предельному циклу, а другие, например внутренние, удаляются от этого цикла, то цикл называется полуустойчивым. Кроме рассмотренных фазовых траекторий, в ε -окрестности предельного цикла других траекторий не существует. Покажем это, используя метод, разработанный и использованный для

* См.: Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1947.

анализа динамических систем А. Пуанкаре, — метод точечных отображений.

Пусть Γ — замкнутая траектория предельного цикла, а G — некоторая траектория, порождаемая уравнениями движения вблизи предельного цикла. Пусть в некоторый момент $t=0$ движение по кривой начинается из точки x_{i0} на рис. 2.15. Проведем отрезок AB , пересекающий кривую Γ . Поскольку точку x_{i0} мы выбираем близкой к предельному циклу, то в течение некоторого времени траектория будет оставаться в окрестности цикла. Предположим, что траектория приближается к Γ . Тогда в некоторой точке x_{i1} она пересечет отрезок AB . Введем координату x вдоль отрезка с началом в точке \bar{x} . Функция, сопоставляющая каждой точке отрезка Ox координату точки пересечения траектории после одного оборота, называется функцией последования

$$y = \varphi(x).$$

Отметим некоторые важнейшие свойства этой функции для автономных систем.

Так как через каждую точку фазовой плоскости автономной системы проходит лишь одна фазовая кривая, функция последования имеет обратную, причем обе функции являются непрерывными.

Покажем, что функция последования является монотонной. Пусть координата неподвижной точки x_{i0} на оси Ox равна \bar{x} . Очевидно, что \bar{x} — корень уравнения $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$. Так как мы рассматриваем изолированное решение, в рассматриваемой окрестности других корней нет, поэтому для всех точек $x > \bar{x}$ выполняется только неравенство $\varphi(x) < x$ или только неравенство $\varphi(x) > x$, что и доказывает наше утверждение.

Любая траектория, проходящая через некоторую точку x^s , образует последовательность $x^{(s+k)}$, где $x^{(s+1)} = \varphi(x^s)$, которая является монотонной и ограниченной. Следовательно, она име-

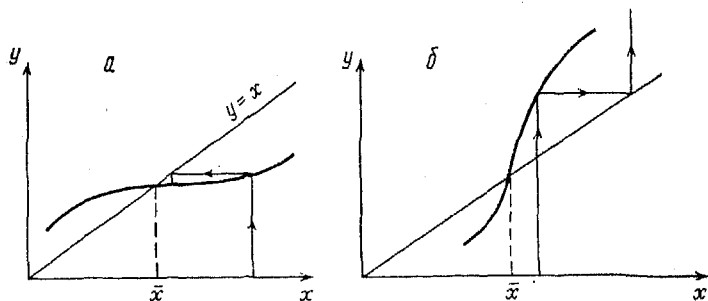


Рис. 3.15

ет предел, единственный и совпадающий с \bar{x} . Поскольку для достижения предельного цикла необходимо совершить бесконечно много оборотов, время достижения предельного цикла бесконечно.

Поведение точечного отображения, порождаемого функцией последования, удобно исследовать графически. Для рассмотренного нами случая монотонная функция последования, удовлетворяющая условию $\varphi(x) < x$, изображена на рис. 3.15, а. Для быстрого определения характера отображения удобно провести биссектрису $y=x$. Тогда последовательность отображений образует «лестницу» — лестницу Ламерея. Очевидно, что последовательность сходится к точке \bar{x} :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x^{(s)} = \bar{x}.$$

Если выполняется неравенство $\varphi(x) > x$, то последовательность является расходящейся, как на рис. 3.15, б.

Если графики функций $y=x$ и $y=\varphi(x)$ пересекаются в точке \bar{x} , то малое изменение динамических уравнений, описываемое изменением некоторого параметра системы r , мало меняет траектории. В этом случае точка $\bar{x}(r)$ остается единственным корнем, т. е. предельная точка существует и устойчива относительно малых возмущений системы. Если же функция последования касается биссектрисы угла при некотором значении параметра уравнений, то цикл будет полуустойчивым. В этом случае при $x < \bar{x}$ точка приближается к \bar{x} , а при $x > \bar{x}$ удаляется от нее. При изменении параметра r кривая может пересечь биссектрису, например при $r > r_0$. В первом случае мы будем иметь два корня в некоторой области, т. е. два предельных цикла, а во втором случае предельный цикл отсутствует вовсе. Возмущение системы в этом случае может привести к рождению предельных циклов, причем, как следует из приведенных рассуждений, предельные циклы рождаются парами.

Рассмотрим в качестве примера систему особых точек и особых кривых фазовой плоскости математического маятника. Пусть φ — угол отклонения маятника от вертикали, δ — параметр затухания, а $\omega_0^2 = g/l$ — параметр. Пусть для простоты $\delta^2 \ll \omega_0^2$. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.15)$$

Введем фазовое пространство с помощью переменных $p = \dot{\varphi}$, $q = \varphi$. Движение в этих переменных описывается системой

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -2\delta p - \omega_0^2 \sin q. \end{cases} \quad (3.15)$$

Точки равновесия системы определяются условием

$$p = 0, \quad \sin q = 0,$$

откуда $p=0$, $q=0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$

Для определения характера точек линеаризуем систему (3.15) в окрестности точек покоя:

- а) $\sin q = \xi$ в окрестности точек $q_s = 2\pi s$, $q = q_s + \xi$;
 б) $\sin q = -\xi$ вблизи $q_s = 2\pi s + \pi$.

В переменных ξ , $\eta = \rho$ — отклонения от положения равновесия — система (3.15) имеет вид

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \mp \omega_0^2 \xi - 2\delta \eta, \quad (4.15)$$

где знаки « \pm » относятся к первому и второму случаям соответственно. Характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda + 2\delta) \pm \omega_0^2 = 0$$

дает для первого случая

$$\lambda_{\mp}^{(1)} = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

так что точка покоя здесь — устойчивый фокус, поскольку мы ограничились случаем $\delta^2 < \omega_0^2$ и полагаем $\omega_0^2 = 0$. При $\delta = 0$ эти точки — центры.

Во втором случае

$$\lambda_{\pm}^{(2)} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2},$$

так что $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ и точка покоя — седло. Решение уравнений (4.15) в окрестности особых точек имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}, \\ \eta &= A_+ \lambda_+ e^{\lambda_+ t} + A_- \lambda_- e^{\lambda_- t}. \end{aligned}$$

Собственные векторы, соответствующие значениям $\lambda = \lambda_{\pm}$, определяют положение сепаратрис: $\eta_{\pm} = \lambda_{\pm} \xi_{\pm}$.

При $\delta = 0$ в отсутствие затухания сепаратрисы начинаются в одном седле, а заканчиваются в другом, соседнем, так что плоскость вблизи оси абсцисс оказывается разделенной на ряд изолированных областей, внутри каждой из которых находится особая точка — центр. Поскольку фазовые кривые не могут пересекаться, любая точка внутри ограниченной области никогда не сможет ее покинуть. Так как в центре области находится точка покоя, движение может быть циклом, заключающим эту точку. Этот случай описывает свободные колебания маятника без трения. Если начальные условия выбраны так, что изображающая точка попадает в область, внешнюю по отношению к сепаратрисе, то фазовые кривые здесь начинаются и заканчиваются на бесконечности, так как точек покоя в этой области нет. Этот случай соответствует вращению маятника. Структура плоскости изображена на рис. 4.15.

В случае затухающего маятника картина резко меняется. Вместо центра возникает устойчивый фокус. Сепаратрисы седла идут в фокусы или фазовые траектории из бесконечности попадают в седло. Траектории, начавшиеся вдали от фокусов, обязательно попадут в окрестности этих точек, и маятник будет

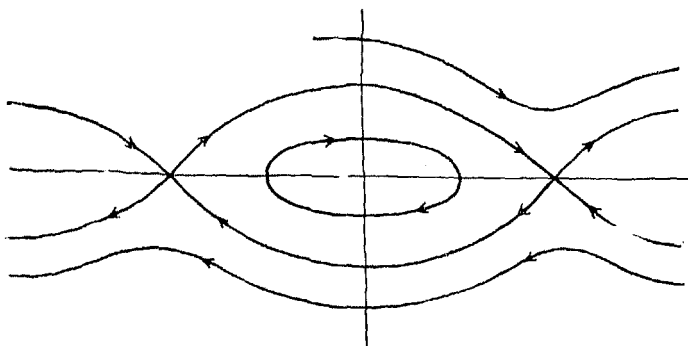


Рис. 4.15

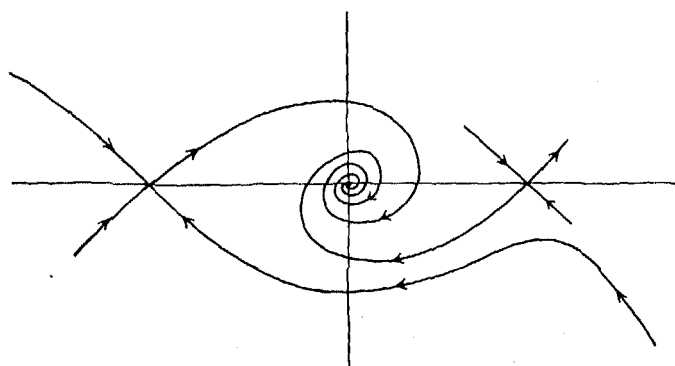


Рис. 5.15

совершать затухающие колебания через некоторое достаточно большое время при любом выборе начальных параметров. Структура плоскости представлена рис. 5.15.

15.3. ПОНЯТИЕ О СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Динамические системы, описываемые в рамках метода Лагранжа, испытывают воздействие со стороны внешних тел, задаваемых как силами, так и связями. В ряде случаев зависимость удобно задавать с помощью параметров, входящих в уравнение движения наряду с обобщенными координатами. Зависимость от дополнительных параметров по су-

щество означает, что при описании динамики мы используем различные модели, определяемые выбором соответствующих параметров. Аналогичная ситуация имеет место и при решении задач, когда модель уже выбрана. Как правило, в процессе решения уравнений движения приходится делать некоторые приближения, меняющие исходные уравнения. Эти изменения, приводящие к изменению исходной модели, также могут быть описаны как переход к уравнениям, зависящим от параметров. Наконец, и выбор исходной модели также обусловлен некоторыми приближениями, и при анализе необходимо оценивать последствия неточности модели. Понятно, что физически содержательные результаты при исследовании динамики таких систем будут получены, если некоторые небольшие изменения параметров задачи не приведут к качественным изменениям в поведении системы, т. е. если модель оказывается достаточно «грубой».

Если перейти к описанию движения системы с помощью дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_k, t; r_s),$$

где r_s — параметры, характеризующие систему, то при изменении параметров возможное изменение характера движения может повлечь изменение структуры фазового пространства рассматриваемой системы.

Как мы отмечали ранее, система динамических уравнений порождает определенную структуру фазовой плоскости, характеризуемую количеством и взаимным расположением особых точек и особых кривых, как содержащих особые точки, так и не содержащих их. Особые кривые определяют топологическую структуру фазового пространства.

Пространство параметров, таким образом, может быть разбито на области, в которых изменение этих параметров не меняет топологической структуры фазового пространства, сохраняя количество и тип особых точек и их взаимное расположение. Изменение топологии, происходящее при некоторых значениях, называют бифуркацией.

Исследование в этом направлении, выполненное в работах А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина, привело к уточнению введенных понятий и положило начало математической теории бифуркаций.

Понятие бифуркации системы и грубости опирается на понятие топологической эквивалентности фазового пространства различных динамических уравнений или уравнений при различных значениях параметров.

Системы называют топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм, связывающий две системы: $x_1^1(t)$ и $x_2^1(t)$, т. е.

$$x_2^1(t) = \hat{g}(x_1^1(t)),$$

где \hat{g} осуществляет взаимно однозначное соответствие, причем

$$x_2^i(t+T) = \hat{g}(x_1^i(t+T))$$

для любого T .

Система является структурно устойчивой, если она порождает в фазовом пространстве топологически эквивалентную систему особых точек и кривых, причем ориентированные фазовые кривые системы топологически эквивалентны в некоторой области изменения параметров.

Структурно устойчивые системы называют грубыми. Системы, не являющиеся грубыми, называют негрубыми. Значения параметров, при которых происходит перестройка структуры фазового пространства, называют критическими.

В общем случае характер изменения фазового пространства чрезвычайно сложен и недостаточно изучен, поэтому мы ограничимся лишь простейшим случаем — рассмотрим фазовую плоскость.

Рассмотрим автопомные системы. В этом случае число особых фазовых траекторий ограничено. Это состояния равновесия, сепаратрисные кривые седловых состояний равновесия и замкнутые фазовые траектории. Поскольку рассматриваются лишь грубые системы, то такие кривые, как сепаратрисы, идущие из одной седловой точки в другую, отсутствуют.

Назовем негрубые системы, которые возникают в момент перехода от одного состояния к другому, системами первой степени негрубости, если в результате изменения параметров появляется только одна особая траектория.

Пусть уравнения движения соответствующим выбором переменных приведены к виду

$$\dot{q} = f_1(q, r), \quad \dot{p} = f_2(p, r).$$

Рассмотрим простейшие случаи.

Пусть $f_1(q, r) = -q^2 + r$; $f_2(p, r) = -p$. Тогда при $r < 0$ уравнения не содержат особых точек, а при $r > 0$ имеются две особые точки:

$$q_{1,2} = \pm q_0 = \sqrt{r}; \quad p_{1,2} = 0.$$

Точка (q_1, p_1) — устойчивый узел, а точка (q_2, p_2) — седло, поскольку оба корня характеристического уравнения в точке 1 отрицательны, а в точке 2 имеют разные знаки. Изменения структуры фазовой плоскости показаны на рис. 6.15.

Бифуркация рождения пары особых точек, одна из которых является седлом, а другая — узлом, называется седло — узел и является примером системы первой степени негрубости.

Другой типичный пример может быть получен, если рассмотреть систему

$$\begin{cases} \dot{q} = r q - q^3, \\ \dot{p} = -p. \end{cases}$$

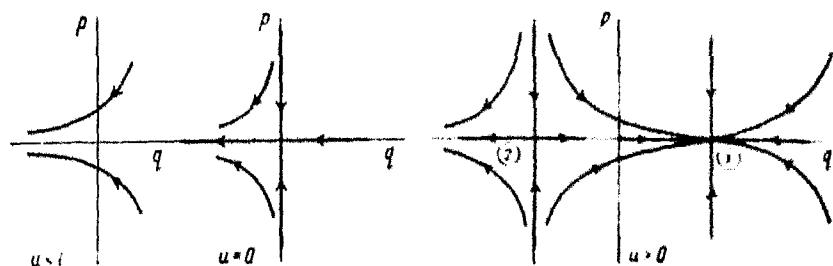


Рис. 6.15

При $r < 0$ особая точка $p_0 = 0, q_0 = 0$ является устойчивой особой точкой — устойчивым узлом. При $r > 0$ на фазовой плоскости появляются три особые точки:

$$(q_0, p_0), (q_1, p_2), (q_2, p_2),$$

причем обе точки 1 и 2 являются устойчивыми точками — устойчивыми узлами. Точка $q = 0, p = 0$ при $r > 0$ становится неустойчивой точкой — седлом. Изменение фазовой плоскости в этом случае иллюстрирует рис. 7.15.

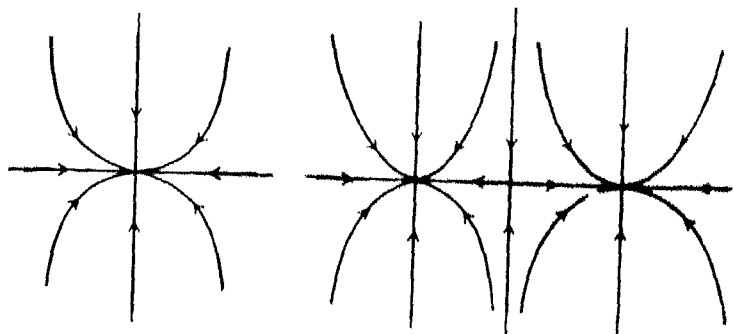


Рис. 7.15

Рассмотрим пример. Пусть центробежный регулятор массы вращается на невесомом стержне длины l вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в поле тяжести. Ускорение свободного падения g .

Введем обобщенную координату α — отклонение от положения равновесия (рис. 8.15). Поскольку функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{ml^2\omega_0^2}{2} \sin^2 \alpha + mgl \cos \alpha$$

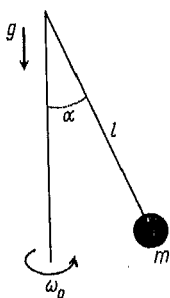


Рис. 8.15

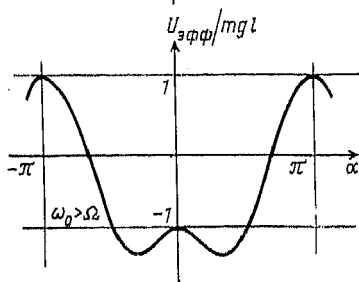
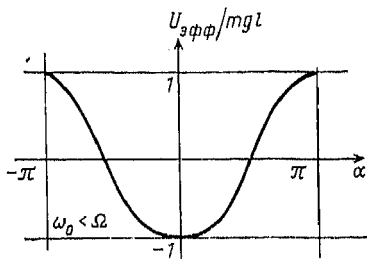


Рис. 9.15

явно не зависит от времени, сохраняется обобщенная энергия.

$$\mathcal{H} = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} - \frac{ml^2\omega_0^2}{2} \sin^2 \alpha - mgl \cos \alpha.$$

Вводя эффективную потенциальную энергию

$$V_{эфф}(\alpha) = -\frac{ml^2\omega_0^2}{2} \sin^2 \alpha - mgl \cos \alpha,$$

найдем закон движения

$$t = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\mathcal{H} - V_{эфф}(\alpha)}}.$$

Поведение функции $V_{эфф}(\omega_0)$ существенно зависит от величины угловой скорости. Точки равновесия определяются условием $V_{эфф}' = 0$, что приводит к уравнению

$$\sin \alpha (\omega_0^2 \cos \alpha - \Omega^2) = 0,$$

где $\Omega^2 = g/l$

При всех значениях ω_0 $\alpha = \pi$ — неустойчивая точка — максимум функции $V_{эфф}(\alpha)$. При $\omega_0 < \Omega$ точка $\alpha = 0$ определяет минимум $V_{эфф}(\alpha)$, а при $\omega_0 > \Omega$ в этой точке имеется локальный максимум. При этом значении появляется пара локальных минимумов в точках $\cos \alpha_{1,2} = \Omega^2/\omega_0^2$. Вид функции $V_{эфф}(\alpha)$ приведен на рис. 9.15.

При значении $\mathcal{H} < mgl$ в системе возможны колебания. При $\omega_0 < \Omega$ малые колебания происходят около положения, $\alpha = 0$, а при $\omega_0 > \Omega$ малые колебания возможны лишь вблизи точек $\alpha = \alpha_{1,2}$. Положение равновесия $\alpha = 0$ в этом случае становится неустойчивым.

Для анализа структуры фазовой плоскости системы перейдем к каноническим уравнениям, введя импульс $p = \partial L / \partial \dot{\alpha} = ml^2 \dot{\alpha}$. Система канонических уравнений имеет вид

$$\dot{\alpha} = \frac{p}{ml^2},$$

$$\dot{p} = -mgl \sin \alpha + ml^2 \omega_0^2 \sin 2\alpha/2.$$

Особые точки фазовой плоскости определяются соотношением между ω_0 и Ω . При $\omega_0 < \Omega$ имеются особые точки $\alpha = 0, p = 0$ и $\alpha = \pm \pi, p = 0$. Точка $\alpha = 0, p = 0$ — центр, а точки $\alpha = \pm \pi, p = 0$ — седло. При $\omega_0 > \Omega$ появляются дополнительные точки покоя $p = 0, \alpha = \pm \alpha_0$, где $\cos \alpha_0 = \Omega^2/\omega_0^2$.

Линеаризуя уравнения в окрестности особых точек, составим матрицу коэффициентов характеристического уравнения

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/ml^2 \\ ml^2 (\omega_0^2 \cos 2\alpha - \Omega^2 \cos \alpha) & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Из условия $\det a_{ik} = 0$ определим значения λ и соответствующие им собственные векторы

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \pm \sqrt{\omega_0^2 \cos 2\alpha - \Omega^2 \cos \alpha}.$$

В точке $\alpha = 0$

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

и при $\omega_0 < \Omega$ эти точки являются центром. При $\omega_0 > \Omega$ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\text{Im } \lambda = 0$, так что особая точка — седло. Собственные векторы определяются из условия

$$\delta \alpha_{1,2} \lambda_{1,2} = \frac{1}{ml^2} \delta p_{1,2},$$

$$\delta p_{1,2}(0) = \pm ml^2 \Omega \sqrt{\omega_0^2/\Omega^2 - 1} \delta \alpha_{1,2}.$$

При $\alpha = \pi$

$$\lambda_{1,2}(\pi) = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2},$$

так что седловые точки имеют здесь сепаратрисы, определяемые векторами $\delta p_{1,2}(\pi) = \pm ml^2 \Omega \sqrt{(\omega_0/\Omega)^2 + 1} \delta \alpha_{1,2}$. Структура фазовой плоскости системы до и после бифуркации изображена на рис. 10.15.

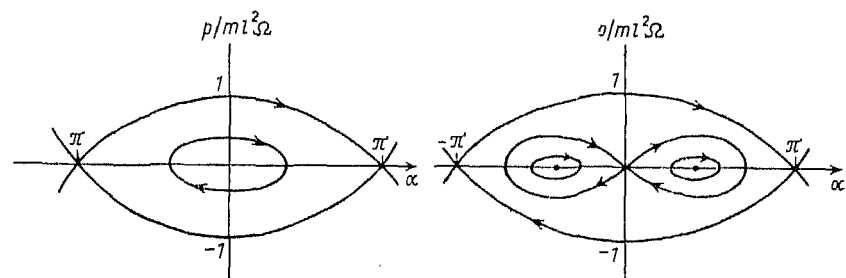


Рис. 10.15

Исследование рассматриваемой динамической системы с трением, пропорциональным скорости, с помощью квадратичного интеграла энергии представляет трудности, так что для анализа этой системы метод фазовой плоскости представляется наиболее удобным. Пусть в системе действует диссипативная сила, пропорциональная скорости $Q^d = -2\kappa\dot{\alpha}$. В этом случае $\mathcal{H}_\varphi = -Q^d\dot{\alpha} < 0$. Уравнения движения с диссипацией имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{ml^2} p, \\ \dot{p} = ml^2 (\omega_0^2 \cos \alpha - \Omega^2) \sin \alpha - 2\kappa p/ml^2. \end{cases}$$

Положение особых точек на фазовой плоскости остается неизменным, однако их характер существенно другой. Введение затухания можно рассматривать как некоторый дополнительный параметр. При $\kappa > 0$ система является грубой по параметру всюду, за исключением точек бифуркации по ω_0 , а $\kappa = 0$ — критический параметр. При этом значении фокусы переходят в центры. Для определения структуры фазовой плоскости при $\kappa > 0$ построим матрицу линеаризованной системы и характеристическое уравнение

$$\lambda \left(\lambda + \frac{2\kappa}{ml^2} \right) + \Omega^2 \varphi(z) = 0.$$

Здесь введены параметр $z = (\omega_0/\Omega)^2$ ($0 < z < \infty$) и функция $\varphi(z, \alpha)$, определенная для особых точек уравнения

$$\varphi(z, \alpha) = z \cos 2\alpha - \cos \alpha.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\kappa}{ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{ml^2}\right)^2 - \Omega^2 \varphi(z)}$$

при $\varphi(z) < (\kappa/ml^2\Omega)^2$ определяют устойчивые фокусы.

При $\varphi(z) > 0$ особые точки будут или устойчивыми узлами, если оба корня отрицательные, либо седлами в случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$. В системе возможны два типа бифуркаций. Во-первых, переход фокус—узел при $\varphi(z) = \left(\frac{\kappa}{ml^2\Omega}\right)^2$ и, во-вторых, переход узел—седло при $\lambda_1 = 0$. Рассмотрим эти возможности. Для точки $\alpha = \pm\pi$, $p=0$ $\varphi(\pi, z) = -(1+z)$, так что для любых z $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, и точки являются седлом.

Для точки $\alpha=0$, $p=0$ $\varphi(0, z) = 1-z$. При $0 < z < z_1 = 1 - \left(\frac{\kappa}{ml^2\Omega}\right)^2$ $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, так что особая точка — устойчивый фокус, так как $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$. При $z_1 < z < 1$ $\lambda_{1,2} < 0$, и точка превращается в устойчивый узел. При $z > 1$ $\varphi(0, z) < 0$, так что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, и устойчивый узел переходит в седло.

Таким образом, по мере увеличения угловой скорости вращения затухающие малые колебания в окрестности точки $\alpha=0$ переходят в апериодические, а затем точка становится неустойчивой. Бифуркация при $\omega_0 = \Omega$ сопровождается появлением пары устойчивых точек при $\omega_0 > \Omega$, как было показано ранее для случая $\kappa=0$:

$$\lambda_{1,2}(\alpha_0, z) = -\frac{\kappa}{ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{ml^2}\right)^2 - \Omega^2 \frac{(z-1)^2}{z}}$$

При

$$z < z_2 = 1 + \frac{\kappa}{ml^2\Omega^2} \quad \text{Im}\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,2} < 0,$$

т. е. появившиеся особые точки — устойчивые узлы, движение вблизи которых — апериодические колебания. При $z > z_2$ $\text{Im}\lambda \neq 0$ и происходит бифуркация, превращающая эти точки в устойчивые фокусы. Процесс перестройки фазовой плоскости можно изобразить на диаграмме, показывающей характер и положение особых точек в зависимости от параметра (рис. 11.15). Здесь сплошной толстой линией отмечены устойчивые фокусы, точками — устойчивые узлы, а сплошной тонкой линией — седловые точки. Характер бифуркации на фазовой плоскости вблизи точки $\omega_0 = \Omega$ изображен на рис. 12.15. В этом случае из устойчивого узла при $\alpha=0$ появляется седло при $\alpha=0$ и пара устойчивых узлов в точках $\alpha = \pm\alpha_{1,2}$. На рисунке изображена окрестность точки $\alpha=0$, $p=0$. Общая структура фазовой плоскости и характер кривых в случае $\kappa > 0$ и $\omega_0 > 0$ изображены на рис. 13.15.

Характер бифуркаций, рассмотренных выше, весьма разнообразен, однако существуют некоторые правила, запрещающие произвольное рождение или уничтожение особых точек. Отбор возможных бифуркаций можно провести, вводя индекс Пуанка-

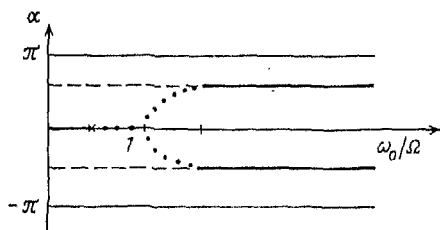


Рис. 11.15

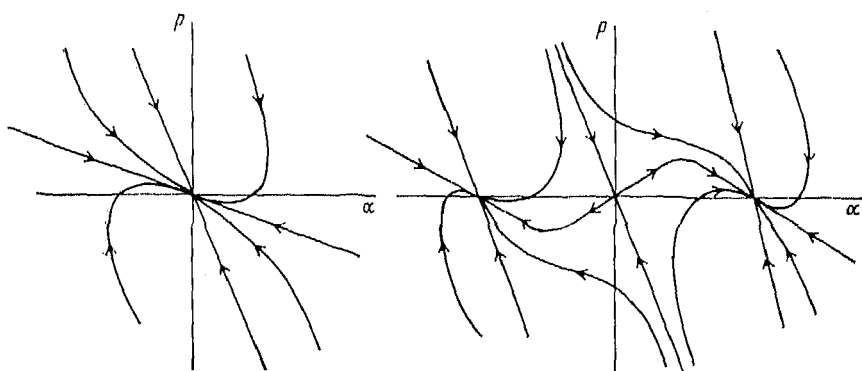


Рис. 12.15

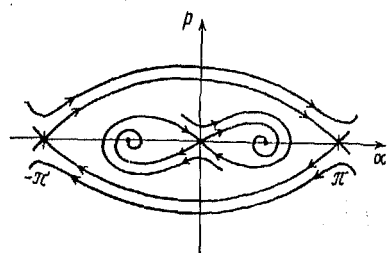


Рис. 13.15

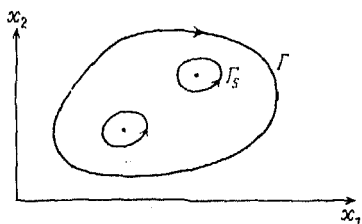


Рис. 14.15

ре. Пусть на фазовой плоскости имеется произвольный замкнутый контур Γ без самопересечений, не проходящий через особые точки. Пусть в некоторой точке контура ρ определен вектор фазовой скорости. При обходе контура векторы фазовой скорости, определенные на этом контуре, будут поворачиваться и, совершив некоторое целое число оборотов k , вернуться в ис-

ходное положение в точке p . Если определить угол между векторами фазовой скорости и каким-либо постоянным направлением, например осью x_1 , то угол изменится на величину $\Delta\theta = 2\pi k$. Число оборотов, совершенных вектором при обходе контура, называется индексом замкнутого контура Γ . Если система динамических уравнений исследуемой задачи

$$\dot{x}_i = f_i(x_k), \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

то, поскольку $\operatorname{tg} \theta = \frac{dx_2}{dx_1}$,

$$k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\operatorname{arctg} \frac{f_2}{f_1} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Очевидно, что если всюду в области, охватываемой контуром, подынтегральная функция и ее производные непрерывны, то $k=0$. В особых точках $f_{1,2}=0$, так что знаменатель дроби обращается в нуль, что может вести к нарушениям непрерывности. Для того чтобы исключить особые точки, необходимо рассматривать многосвязную область (рис. 14.15).

Таким образом, для определения индекса кривой необходимо выписать сумму индексов кривых Γ_s , охватывающих особые точки. Поскольку кривую Γ_s можно расположить в непосредственной близости от особой точки, то при вычислении интеграла можно ограничиться линейным приближением для функций f_1 и f_2 . Полагая

$$\delta x_1 = a_{11}\delta x_1 + a_{12}\delta x_2,$$

$$\delta x_2 = a_{21}\delta x_1 + a_{22}\delta x_2,$$

где $\delta x_i = x_i - x_{is}$, x_{is} — координаты особой точки, выберем в качестве контура интегрирования Γ_s эллипс

$$(a_{11}\delta x_1 + a_{12}\delta x_2)^2 + (a_{21}\delta x_1 + a_{22}\delta x_2)^2 = 1.$$

Тогда знаменатель подынтегрального выражения обращается в единицу, и интеграл имеет вид

$$k_s = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{2\pi} \oint (\delta x_1 d(\delta x_2) - \delta x_2 d(\delta x_1)),$$

но $\oint_{\Gamma_s} (\delta x_1 d(\delta x_2) - \delta x_2 d(\delta x_1)) = 2S$, где S — площадь эллипса; $S =$

$= \pi |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|^{-1}$, а коэффициенты разложения определяют знаки корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

так что

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Это приводит к выражению для индекса Пуанкаре $k = \lambda_1 \lambda_2 / |\lambda_1 \lambda_2|$. Отсюда получаем индексы кривых, охватывающих особые точки. Для центра и фокуса $\lambda_2 = \lambda_1^*$, так что $\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda|^2$ и $k = +1$. Для узла $\text{Im } \lambda = 0$ и оба корня отрицательны, так что $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, т. е. $k = +1$. Для седловой точки $\text{Im } \lambda = 0$, а $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, что приводит к значению $k = -1$. Обход регулярной точки не поворачивает вектор фазовой скорости.

Таблица индексов Пуанкаре

Тип особенности	Центр	Фокус	Узел	Седло	Регулярная точка
Индекс Пуанкаре	+1	+1	+1	-1	0

Если на фазовой плоскости имеется замкнутая интегральная кривая, например предельный цикл, то, поскольку вектор фазовой скорости на такой кривой касателен к ней, он поворачивается на угол $\theta = 2\pi$ при полном обходе контура. Таким образом, внутри замкнутой интегральной кривой должна находиться хотя бы одна особая точка, имеющая индекс $k = +1$. Если в контуре имеется несколько особых точек, то количество седел на единицу меньше, чем других особых точек.

Более подробно изложение этого вопроса см. в книге Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

15.4. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

При исследовании неавтономных систем возникают серьезные трудности даже в случае систем с одной степенью свободы. Это вызвано тем, что явная зависимость уравнений движения от времени порождает фазовые траектории, которые могут пересекаться. Самопересечение траекторий приводит к очень сложной и запутанной картине, плохо поддающейся анализу, если время наблюдения достаточно велико по сравнению с характерными временами системы. Поскольку полная картина фазовых траекторий становится неудобной для изучения, в теории неавтономных систем применяют другие подходы, основанные на наблюдении систем в некоторые определенные моменты времени, — стробоскопический метод и метод отображений Пуанкаре.

В обоих подходах при описании движения системы происходит переход к точечным отображениям, характер и общие свойства которых позволяют судить об особенностях движения и при необходимости восстанавливать фазовую траекторию. Особенно эффективны эти методы для анализа предельных множеств.

При использовании стробоскопического метода состояние системы на фазовой траектории фиксируется через определенные промежутки времени. Обычно этот метод используется для систем, на которые действует периодическая внешняя сила. В этом случае удобно выбирать интервалы, равные или кратные периоду внешнего воздействия.

Отображение Пуанкаре — описание состояния системы в моменты, когда достигается заданное значение одной из динамических переменных, например координаты или импульса. Использование отображения Пуанкаре позволяет эффективно понижать размерность фазового пространства, поэтому оно часто используется для описания систем, фазовое пространство которых имеет размерность больше двух, — таких систем, как система двух связанных нелинейных осцилляторов и т. п.

В этом случае при наличии интеграла энергии, дающего дополнительную связь между динамическими переменными, отображение Пуанкаре оказывается двумерным. Возникающая при этом картина состояния может быть изображена на фазовой плоскости. В системах с одной степенью свободы отображение Пуанкаре позволяет перейти к анализу с помощью функции последования, которую мы использовали при изучении предельного цикла.

Нетривиальный характер фазовых траекторий существенно усложняет и структуру предельных множеств (аттракторов) неавтономных динамических систем. Как показывают исследования, в случае неавтономных систем возможно появление сложно устроенных предельных множеств — странных аттракторов, имеющих фрактальную структуру. Поведение динамической системы в этих случаях за время, превышающее некоторое характерное, становится похожим на хаотическое, которое плохо описывается с помощью обычных методов классической механики. Такое явление называют динамическим хаосом.

Некоторое представление об использовании стробоскопического метода для анализа неавтономных систем дает изучение ротатора, на который действует периодическая внешняя сила. Рассмотрим диполь, образованный зарядами $\pm e$, находящимися на концах невесомого недеформируемого стержня l , помещенного в поле плоского конденсатора (рис. 15.15). Стержень может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Будем считать, что поле включается на небольшой промежуток времени, так что за время действия силы угол не успевает заметно измениться, однако импульс силы за это время заметно меняет кинетический момент. Динамическое уравнение для изменения кинетического момента в этом случае имеет вид

$$ml^2\ddot{\varphi} = -eEl \sin \varphi \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

Здесь τ — период включения поля E . Из этого уравнения следует, что если в момент времени непосредственно перед включением поля положение ротатора определялось углом φ_n , а угловая скорость его равна $\dot{\varphi}_n$, то после окончания действия поля

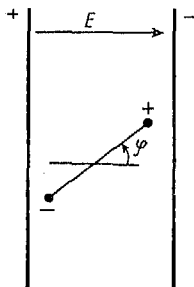


Рис. 15.15

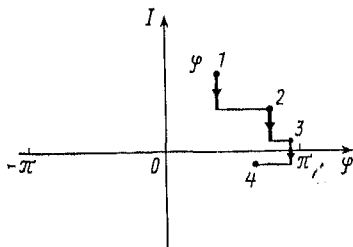


Рис. 16.15

угловая скорость определяется с помощью теоремы об изменении кинетического момента;

$$ml^2 \dot{\varphi}_{n+1} = ml^2 \dot{\varphi}_n - eE\tau \sin \varphi_n.$$

Это значение угловой скорости сохраняется вплоть до следующего включения поля, а угол линейно меняется, так что спустя время τ , т. е. к моменту включения поля $t_{n+1} = t_n + \tau$, он определяется выражением

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \dot{\varphi}_{n+1} \tau.$$

Вводя безразмерную переменную $I_n = \dot{\varphi}_n \tau$, получим систему

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + I_{n+1}, \\ I_{n+1} = I_n - k \sin \varphi_n, \end{cases}$$

где $k = eE\tau^2/ml$ — безразмерный коэффициент. Таким образом, положение системы на фазовой плоскости I, φ в момент времени t_n определяется точкой $u_n \equiv (\varphi_n; I_n)$, а в момент t_{n+1} — точкой $u_{n+1} \equiv (\varphi_{n+1}, I_{n+1})$.

Оператор эволюции $\hat{T}(\tau)$, осуществляющий отображение, реализуется системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - k \sin \varphi_n + I_n, \\ I_{n+1} = -k \sin \varphi_n + I_n. \end{cases}$$

Зная положение точек на фазовой плоскости, легко восстановить фазовую траекторию системы. Несколько последовательных отображений и фазовая траектория, соединяющая эти точки, изображены на рис. 16.15. Фазовая траектория соответствует $k=1$.

Очевидно, что, как и в случае математического маятника, фазовое пространство ротатора является цилиндром, так что точки $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ можно отождествить.

Исследование ротатора мы начнем с определения неподвижных точек отображения. Эти точки определяются условием

$$u_n = \hat{T} u_n,$$

где \hat{T} — оператор эволюции (дискретный). Полученная система уравнений имеет решения

$$\begin{cases} \varphi_n = \pi n, \\ I_n = 0, \end{cases}$$

т. е. неподвижные точки находятся на оси абсцисс фазовой плоскости. Если учесть, что состояния ротатора φ_i и $\varphi_i + 2\pi l$ являются физически неотличимыми (топология фазового пространства — цилиндр), то неподвижные точки отображения на цилиндре имеют координаты

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = \pi, \\ I_1 = 2\pi n, & I_2 = 2\pi n, \end{cases}$$

где n определяет число оборотов, совершенных ротатором за период.

Для исследования устойчивости неподвижных точек рассмотрим преобразование двух близких точек

$$u_n = (\varphi_n, I_n) \text{ и } u_n + \delta u_n = (\varphi_n + \delta\varphi_n, I_n + \delta I_n).$$

Оператор эволюции $\hat{T} = \hat{T}(\varphi)$ переводит точку u_n в u_{n+1} , так что

$$\begin{cases} \delta\varphi_{n+1} = (1 - k \cos \varphi_n) \delta\varphi_n + \delta I_n, \\ \delta I_{n+1} = -k \cos \varphi_n \delta\varphi_n + \delta I_n. \end{cases}$$

Матрица преобразования для вектора приращения δu_n называется матрицей Якоби. Элементы этой матрицы определяются дифференцированием матрицы \hat{T} оператора эволюции:

$$\hat{M}(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 - k \cos \varphi & 1 \\ -k \cos \varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $\det \hat{M} = 1$, т. е. преобразование фазового пространства, осуществляемое матрицей \hat{M} , происходит без изменения фазового объема. Системы, в которых фазовый объем сохраняется, называют гамильтоновыми.

Произвольный вектор δu_n под действием оператора \hat{M} подвергается растяжению или сжатию и повороту на некоторый угол. Собственные векторы матрицы \hat{M} определяют на фазовой плоскости те направления, вдоль которых осуществляется чистое сжатие или растяжение, если собственные значения являются действительными.

Характеристическое уравнение

$$\det(\hat{M} - \lambda \hat{I}) = 0$$

приводит к уравнению для определения собственных значений λ :

$$\lambda^2 - 2\lambda \left(1 - \frac{k}{2} \cos \varphi\right) + 1 = 0.$$

Из этого уравнения определим собственные значения

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{k}{2} \cos \varphi \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{k \cos \varphi}}\right).$$

Из полученного выражения следует, что действительные собственные значения существуют при условии

$$k \cos \varphi (k \cos \varphi - 4) > 0.$$

Заметим, что собственные значения λ_{\pm} удовлетворяют условию

$$\lambda_{-} = \frac{1}{\lambda_{+}}.$$

Собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, имеют компоненты

$$\delta u_{\pm} = \{\delta \varphi, \delta I_{\pm}\},$$

$$\delta I_{\pm} = \frac{k}{2} \cos \varphi \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{k \cos \varphi}}\right) \delta \varphi.$$

В окрестности неподвижной точки $\varphi = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \dots$,

$$\lambda_{\pm}^{\pi} = 1 + \frac{k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k}}\right),$$

так что при всех $k > 0$ существуют собственные векторы

$$\delta u_{\pm}^{\pi} = \{\delta \varphi, \delta I_{\pm}^{\pi}\},$$

где

$$\delta I_{\pm}^{\pi} = -\frac{k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4/k}\right) \delta \varphi.$$

Собственное значение λ_{+}^{π} положительно, так что любая пара точек, лежащих на прямой, проходящей через неподвижную точку и определяемой вектором δu_{+}^{π} , испытывает растяжение. Соответственно точки, принадлежащие прямой, определяемой вектором δu_{-}^{π} , испытывают сжатие. Существование в окрестности неподвижной точки лучей, вдоль которых точки фазовой

плоскости экспоненциально быстро удаляются от неподвижной точки, свидетельствует о неустойчивости этой неподвижной точки при всех значениях параметра $k > 0$.

Аналогичным образом можно рассмотреть поведение точек фазовой плоскости вблизи неподвижной точки $\varphi=0, I=0$. В этом случае собственные значения матрицы \hat{A}

$$\lambda_{\pm}^0 = 1 - \frac{k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{k}} \right)$$

являются действительными лишь при условии $k > 4$. Поскольку в этом случае $|\lambda_{+}^0| > 1$, собственный вектор δu_{+}^0 , соответствующий этому собственному значению, определяет направление экспоненциального разбегания точек.

Несколько сложнее исследовать поведение точек фазовой плоскости вблизи рассматриваемой точки покоя при значении параметра k в области $0 < k < 4$. В этом случае действительные собственные значения отсутствуют:

$$\lambda_{\pm}^0 = e^{\pm i\delta}, \text{ где } \operatorname{tg} \delta = \frac{-\frac{k}{2} \sqrt{\frac{4}{k} - 1}}{1 - \frac{k}{2}}.$$

Однако в этом случае матрица преобразования \hat{A} подобна матрице поворота O , т. е. в некотором базисе, связанном с данным невырожденным преобразованием X , матрица \hat{A} является матрицей поворота:

$$\hat{A} = \hat{X}^{-1} \hat{O} \hat{X}.$$

Для исследования устойчивости неподвижной точки в рассматриваемом случае удобно обратиться к анализу структуры инвариантного множества матрицы \hat{A} , представляющей линеаризованный оператор эволюции \hat{T} . Напомним, что инвариантным по отношению к данному преобразованию \hat{A} множеством точек называют такое подмножество точек фазового пространства, любая точка которого под действием рассматриваемого преобразования вновь будет принадлежать этому подмножеству. В частности, рассмотренные нами неподвижные точки являются инвариантными множествами оператора эволюции. Инвариантными множествами линеаризованного оператора эволюции \hat{A} являются собственные векторы этого оператора, рассмотренные выше.

Инвариантным множеством матрицы поворота является окружность, точки которой переходят вновь в точки этой же окружности под действием преобразования поворота. Инвариантным множеством матрицы \hat{A} , подобной матрице поворота, является эллипс, определяемый уравнением

$$a_{12} (\delta I)^2 + (a_{11} - a_{22}) (\delta \varphi) (\delta I) - a_{21} (\delta \varphi)^2 = C,$$

где a_{ik} — элементы матрицы A , в чем можно убедиться прямой подстановкой. Полуось эллипса наклонена под углом χ к оси абсцисс, определяемым условием

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12} + a_{21}}.$$

В окрестности точки $\varphi=0, I=0$ матрица поворота, подобная матрице A , имеет компоненты

$$\bar{O} = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \frac{k}{2} & + \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \\ -\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} & 1 - \frac{k}{2} \end{array} \right\|,$$

а инвариантное множество матрицы A определяется кривой

$$(\delta I)^2 - k\delta\varphi\delta I + k(\delta\varphi)^2 = C.$$

Если угол поворота кратен π/N , то инвариантное множество состоит из $2N$ точек. В противном случае последовательное применение оператора A генерирует систему точек, заполняющих весь эллипс. Таким образом, при $k < 4$ рассматриваемая точка является устойчивой. При $k > 4$ инвариантное множество превращается в систему гипербол, асимптоты которых определяются собственными векторами матрицы A .

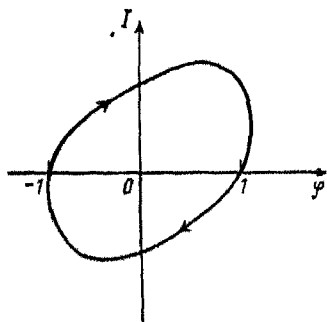


Рис. 17.15

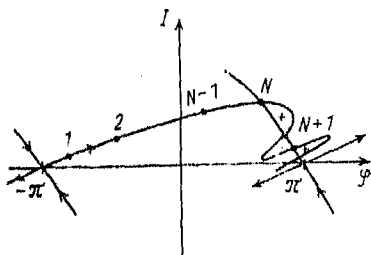


Рис. 18.15

Инвариантное множество полного оператора эволюции существенно сложнее. Некоторое представление о его структуре можно получить на основе вычислительного эксперимента. Как показывают вычисления, при малых k точки этого множества группируются около кривой, напоминающей искаженный эллипс (рис. 17.15). По мере увеличения параметра k они удаляются от этой кривой и заполняют все пространство при $k > 4$. Структура инвариантного множества оказывается очень сложной,

имеющей масштабную инвариантность. Такие множества называются фракталами и описаны в специальной литературе.

Некоторое представление о характере инвариантного множества полного оператора эволюции можно получить на основе аналитических оценок для специального случая — множества точек, определяемых собственными векторами оператора A в окрестности неподвижной точки.

Рассмотрим для определенности поведение точек, принадлежащих прямым, определяемым собственными векторами оператора A вблизи точек $q = \pm\pi, I = 0$. Эти векторы существуют при всех $k > 0$. Линеаризованный оператор A определяет прямые, проходящие через рассматриваемые точки. Если бы полный оператор эволюции был линейным, то прямая, выходящая из точки $(-\pi, 0)$ на рис. 18.15, пересекла бы прямую, входящую в точку $(\pi, 0)$ в некоторой точке N . В действительности оператор эволюции не является линейным, так что рассматриваемые прямые переходят в некоторые кривые $f_1(q, I) = 0$ и $f_2(q, I) = 0$ соответственно, которые могут пересекаться в точке N . Точка пересечения инвариантных множеств принадлежит кривой, входящей в точку $(\pi, 0)$, следовательно, действие оператора эволюции T переведет эту точку последовательно в точки $N+1, N+2$ и т. д., принадлежащие кривой $f_2(q, I) = 0$, входящей в точку $(\pi, 0)$. По мере приближения к неподвижной точке эта кривая стремится к прямой, определяемой собственным вектором du^a , а отношение расстояний между точками и неподвижной точкой $(\pi, 0)$ стремится к λ^{-1} . Поскольку в рассматриваемом случае кривые $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ не совпадают, между точками N и $N+1$ образуется петля, площадь которой S_+ . Преобразование, осуществляемое оператором эволюции T , преобразует эту петлю в петлю между точками $N+1$ и $N+2$. Поскольку определитель матрицы Якоби A всюду на фазовой плоскости равен единице, площадь (фазовый объем) этой петли сохраняется при движении:

$$S_+ = S_-.$$

Таким образом, сжатие точек по мере приближения к неподвижной точке приводит к увеличению амплитуды петли и разбеганию точек рассматриваемого инвариантного множества. В окрестности неподвижной точки $(\pi, 0)$ точки инвариантного множества, находившиеся на некотором малом отрезке кривой $f_1 = 0$, могут оказаться как в непосредственной близости друг от друга, так и на расстоянии, сравнимом с расстоянием между неподвижными точками полного отображения. Сложная структура такого предельного множества называется гомоклинической и впервые была исследована А. Пуанкаре.

Картина неподвижных точек отображения T является существенно более сложной, чем рассмотренная нами, поскольку оператор эволюции генерирует систему операторов, осуществляющих отображения за период, за два периода и т. д. В ча-

стности, отображение за два периода определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2} &= \varphi_n - 2k \sin \varphi_n - k \sin(\varphi_n - k \sin \varphi_n + I_n) + 2I_n, \\ I_{n+2} &= I_n - k \sin \varphi_n - k \sin(\varphi_n - k \sin \varphi_n + I_n). \end{aligned}$$

Кроме неподвижных точек, рассмотренных нами, оператор T_2 имеет неподвижные точки, определяемые из условий

$$\begin{cases} \bar{\varphi} - \frac{k}{4} \sin \bar{\varphi} = \pi n, \\ \bar{I} - \frac{k}{2} \sin \bar{\varphi}. \end{cases}$$

Детальное исследование структуры фазовой плоскости рассматриваемого отображения проведено в специальной литературе.

В заключение отметим связь между рассмотренной системой с дискретным временем и динамической системой, описываемой дифференциальными уравнениями второго порядка. Пусть начальное состояние системы определено точкой $u_{n-1} = (\varphi_{n-1}, I_{n-1})$. Двукратное применение оператора эволюции переводит систему сначала в точку u_n , а затем в точку u_{n+1} , причем

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + I_n, \quad I_{n+1} = I_n - k \sin \varphi_n.$$

Исключая из этой системы I , найдем связь между φ_{n-1} , φ_n и φ_{n+1} :

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \varphi_{n-1} - k \sin \varphi_n.$$

Поскольку $\varphi_{n+1} - \varphi_n \sim \tau$, где τ — период системы, то левая часть уравнения представляет собой одну из возможных реализаций дифференциального оператора второго порядка с помощью разностной схемы

$$\ddot{\varphi} \tau^2 = \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}.$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ мы перейдем к дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему математический маятник:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \text{где } \omega^2 = k/\tau^2.$$

Таким образом, параметр k является шагом интегрирования, выраженным в безразмерных переменных. При $k \ll 1$ свойства модели дискретных отображений хорошо передают свойства решения дифференциального уравнения маятника (типичная величина шага интегрирования $k \sim 0,01$). При увеличении шага интегрирования в области $k \geq 1$ свойства дискретной модели и непрерывной существенно различаются.

В качестве второго примера неавтономной системы рассмотрим математический маятник, на который действует момент силы, запаздывающий на некоторое заданное время относительно

но определенного состояния системы. Пусть на маятник действует момент силы M , который включается спустя время $T_0/2$ после прохождения маятником точки максимального отклонения, а выключается в момент времени T_0 . (Здесь T_0 — период малых колебаний маятника: $T_0 = 2\pi/\omega_0$.) Будем считать, что в течение этого времени момент силы остается постоянным. Уравнение движения маятника, на который действует такой момент силы, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = M(t).$$

Действие такой вынуждающей силы будет приводить к росту амплитуды малых колебаний маятника, как показано на рис. 19.15, поскольку работа внешней силы за период положительна:

$$A_1 = \int_0^T dt M(t) \dot{\varphi}(t) > 0.$$

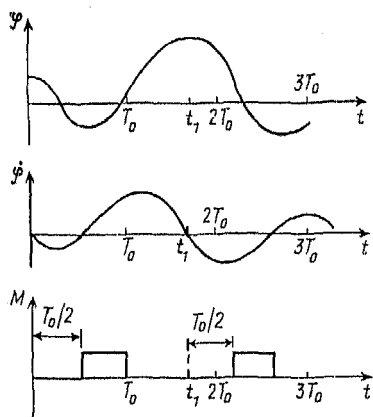


Рис. 19.15

По мере увеличения амплитуды период колебаний математического маятника будет увеличиваться, так что в течение некоторого времени за каждый период момент силы будет оказывать тормозящее воздействие. Если в начальный момент времени угол отклонения маятника достаточно велик, то воздействие внешней силы в целом за период приведет к уменьшению амплитуды колебаний, поскольку работа внешних сил в этом случае может оказаться отрицательной:

$$A_2 = \int_0^T dt M(t) \dot{\varphi}(t) < 0.$$

Для анализа системы построим функцию последования, рассматривая точки пересечения фазовой траекторией системы оси абсцисс при $\varphi > 0$. Эта функция позволяет определить максимальное отклонение (амплитуду) маятника в области положительных значений углов по предыдущему отклонению.

Поскольку при малых значениях углов момент M совершает положительную работу, увеличивая амплитуду колебаний, то в этом случае $\varphi_{n+1} > \varphi_n$. При больших углах отклонения справедливо противоположное неравенство: $\varphi_{n+1} < \varphi_n$. Функция последования является непрерывной, поэтому существует такое значение амплитуды $\bar{\varphi}$, что $\varphi_{n+1} = \varphi_n$. Это означает, что отображе-

ние, порождаемое функцией последования, имеет неподвижную точку. Если неподвижная точка отображения устойчива, то фазовая кривая, проходящая через эту точку, является устойчивым циклом. Для оценки поведения функции последования и положения предельного цикла на фазовой плоскости предположим, что действующий на маятник момент достаточно мал, так что он существенно не меняет закон движения маятника за период. В этом случае для оценки изменения энергии маятника за период можно воспользоваться методом итераций, проводя интегрирование в выражении по невозмущенному движению $\varphi(t)$:

$$\cos \varphi_{n+1} = \cos \varphi_n - \frac{M}{m\omega_0^2} (\varphi(T_0) - \varphi(T_0/2)).$$

Для малых колебаний маятника можно считать, что движение происходит по гармоническому закону, но период колебаний зависит от амплитуды. Ограничимся первым порядком теории возмущений для вычисления зависимости периода колебаний маятника от времени, полагая, что применимы формулы для свободных колебаний маятника:

$$T(\varphi_n) = T_0 (1 + \varphi_n^2/16).$$

Изменение амплитуды колебаний за период в этом случае легко оценить, используя теорему об изменении энергии:

$$E_{n+1} = E_n + A,$$

где

$$E_n = -m\omega_0^2 \cos \varphi_n \text{ и } \varphi(t) = \varphi_n \cos \omega t.$$

В этом приближении функция последования выражается через элементарные функции:

$$\cos \varphi_{n+1} = \cos \varphi_n - \frac{M}{m\omega_0^2} \left(\cos \omega T_0 - \cos \omega \frac{T_0}{2} \right) \varphi_n.$$

Неподвижная точка отображения определяется из уравнения

$$\cos \omega T_0 - \cos \frac{\omega T_0}{2} = 0,$$

решение которого дает амплитуду установившихся колебаний маятника:

$$\bar{\varphi} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Учет конечной величины воздействия внешней силы и изменения закона движения маятника при больших углах отклонения несколько меняет положение неподвижной точки отображения. График функции последования для $M=0,19$ приведен на

рис. 20.15, б. При увеличении амплитуды внешнего воздействия максимум кривой растет, одновременно смещаясь в сторону меньших значений начальной амплитуды колебаний, а угол, под которым кривая пересекает прямую $y=x$, растет. Неподвижная точка отображения с ростом амплитуды воздействия смещается в область больших значений начального угла отклонения.

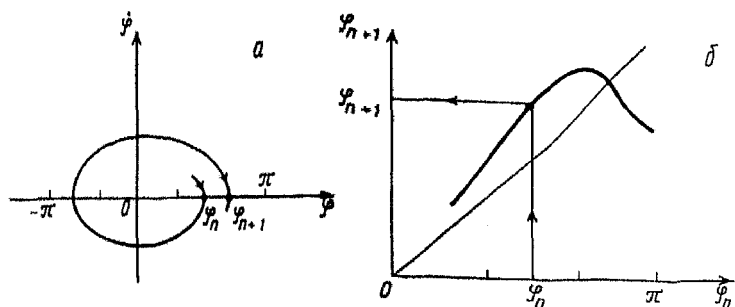


Рис. 20.15

Для определения устойчивости неподвижной точки вычислим производную функции последования в этой точке. Малое отклонение от равновесного состояния будет нарастать, т. е. цикл будет неустойчивым, если выполняется условие

$$|\varphi'(x)| > 1.$$

При малых M , как следует из проведенных расчетов, предельный цикл является устойчивым, однако при некоторой величине внешнего воздействия система теряет устойчивость и аттрактор, имеющий вид замкнутой кривой без самопересечений, разрушится. Структурная перестройка фазовой плоскости происходит при $M=0,195$. При дальнейшем увеличении внешнего воздействия в рассматриваемом случае происходит изменение аттрактора, который при $0,195 < M < 0,215$ представляет собой кривую, имеющую самопересечения и возвращающуюся в начальную точку после двух оборотов вокруг начала координат. Бифуркация, происшедшая в этом случае, называется бифуркацией удвоения цикла. Фазовый портрет аттрактора, возникшего в результате бифуркации удвоения цикла, приведен на рис. 21.15, а.

Дальнейший анализ устойчивости этой системы удобнее проводить, введя функцию последования за два периода:

$$\varphi_{n+2} = f(f(\varphi_n)) = f_2(\varphi_n).$$

Функция последования для этого случая приведена на рис. 21.15, б сплошной линией. Как следует из приведенного графика

ка, после бифуркации удвоения цикла имеются две устойчивые точки — $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$, причем для каждой из этих точек выполняется условие

$$\bar{\varphi}_2 = f(\bar{\varphi}_1),$$

$$\bar{\varphi}_1 = f(\bar{\varphi}_2),$$

т. е. отображение за период $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$ переводит одну точку в другую.

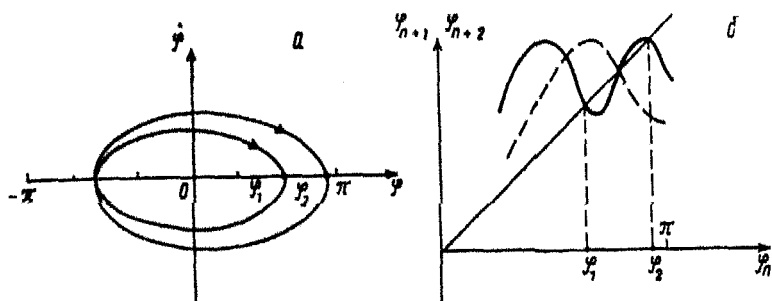


Рис. 21.15

При $M=0,218$ обе неподвижные точки отображения одновременно теряют устойчивость, а на плоскости возникает аттрактор, представляющий кривую, возвращающуюся в исходную точку фазовой плоскости лишь после четырех оборотов. На кривой, изображающей функцию последования системы после четырех оборотов точки на фазовой плоскости, возникают четыре устойчивые точки. Дальнейшее увеличение момента M , действующего на маятник, приводит к последовательному удвоению числа устойчивых точек системы и соответственно к последовательному удвоению периода системы. Происходящее явление называют каскадом бифуркаций удвоения цикла. Система неподвижных точек представляет предельное множество дискретного оператора эволюции, порождаемого функцией последования. Диаграмма, изображающая структуру предельного множества, приведена на рис. 22.15.

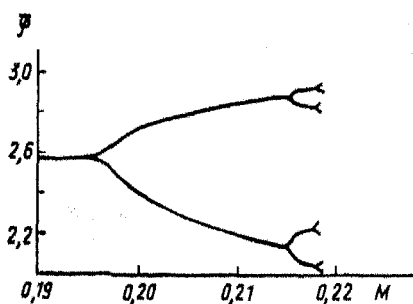


Рис. 22.15

Система неподвижных точек представляет предельное множество дискретного оператора эволюции, порождаемого функцией последования. Диаграмма, изображающая структуру предельного множества, приведена на рис. 22.15.

Для более подробного анализа поведения математического маятника, характеризуемого отображением

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n, M),$$

имеющим максимум, рассмотрим модельное отображение. Основные свойства поведения системы можно получить, аппроксимируя функцию $f(\varphi, M)$, полученную в результате численного решения динамического уравнения, параболой. Пусть

$$y(x) = rx(1-x).$$

Для удобства анализа выберем масштаб по оси абсцисс так, чтобы при изменении угла φ движение происходило в области $0 \leq x \leq 1$ и $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Отображение в этом случае определяется единственным параметром r .

Мы будем полагать, что этот параметр, характеризующий положение максимума функции, выбран так, чтобы выполнялось условие

$$0 \leq y \leq 1,$$

что соответствует области изменения параметра $0 \leq r \leq 4$. Такое отображение было введено в 1845 г. П. Ферхюльстом для анализа размножения популяций и называется логистическим.

Предельное множество (аттрактор) на фазовой плоскости определяется положением и устойчивостью неподвижных точек логистического отображения, удовлетворяющих уравнению

$$\bar{x} = r\bar{x}(1-\bar{x}).$$

Две неподвижные точки этого отображения определяются следующим выражением:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

Поведение отображения можно исследовать или графически, построив лестницу Ламерея, или аналитически.

Как отмечалось выше, неподвижные точки отображения будут устойчивыми, если выполнено условие

$$|\varphi'(\bar{x})| < 1.$$

В противном случае точки будут неустойчивыми. Для логистического отображения

$$y' = r(1-2x).$$

Это приводит к следующему выводу. При $r < 1$ точка $\bar{x}_1 = 0$ является устойчивой. При увеличении параметра r эта точка ста-

новится неустойчивой, однако в области $1 < r < 3$ устойчивой становится вторая неподвижная точка:

$$\bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

При дальнейшем увеличении параметра в области $r > 3$ неподвижная точка отображения \bar{x}_2 также становится неустойчивой, так что у рассматриваемого отображения отсутствуют устойчивые неподвижные точки. Однако логистическое отображение порождает множество отображений:

$$y_n = \varphi_n(x) = \varphi(\varphi(\dots\varphi(x))).$$

Рассмотрим подробнее квадратичное отображение вида

$$y_2 = \varphi(\varphi(x)).$$

Неподвижные точки этого отображения определяются условием

$$\bar{x} = y_2(\bar{x}).$$

Очевидно, что все неподвижные точки отображения

$$y = \varphi(x)$$

являются также неподвижными точками отображения

$$y = \varphi(\varphi(x)).$$

Однако при $r > 3$ у квадратичного отображения кроме рассмотренных выше появляются дополнительные неподвижные точки. Отображение $y_2(x)$ осуществляется с помощью полинома четвертой степени, так что неподвижные точки отображения определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \bar{x}_+ = r\bar{x}_-(1 - \bar{x}_-), \\ \bar{x}_- = r\bar{x}_+(1 - \bar{x}_+), \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\bar{x}_\pm = \frac{1}{2r} (1 + r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}).$$

Очевидно, что при $r > 3$ появляется сразу пара неподвижных точек вместо одной. Для определения области устойчивости неподвижных точек вычислим производную отображения в этих точках:

$$y'_2(\bar{x}_\pm) = \frac{dy}{dz} y'(\bar{x}_\pm), \text{ где } z = y(\bar{x}_\pm) = \bar{x}_\mp.$$

Вычисляя ее как производную сложной функции

$$y_2'(\bar{x}_{\pm}) = y'(\bar{x}_{\mp}) y'(\bar{x}_{\pm}),$$

получим

$$|y_2'(\bar{x}_{\pm})| = |r^2 - 2r - 4|.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ неподвижные точки рассматриваемого отображения являются устойчивыми.

Дальнейшее увеличение параметра r приведет к потере устойчивости точек \bar{x}_+ и \bar{x}_- . При этом отображение четвертого порядка будет иметь четыре неподвижные точки. Исследование устойчивости этих точек аналогичным путем громоздко и поэтому обычно проводится численными методами.

Заметим, что бифуркации удвоения периода порождают пары новых устойчивых точек, которые при больших значениях n — числа точек — расположены в непосредственной близости от породившей их точки, которая стала неустойчивой. Это позволяет применить приближенное описание процесса рождения устойчивой пары, рассматривая лишь малую окрестность неподвижной точки. Пусть

$$x = \bar{x}_+ + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \ll 1$ — отклонение от положения равновесия. Рассматриваемое отображение $y = y_2(x)$ переводит эту точку в точку

$$\bar{x}_+ + \varepsilon_{n+1} = y_2(\bar{x}_+ + \varepsilon_n).$$

Поскольку $\varepsilon_n \ll 1$, ограничимся лишь квадратичными по ε_n членами отображения:

$$\bar{x}_+ + \varepsilon_{n+1} = y_2(\bar{x}_+) + y_2'(\bar{x}_+) \varepsilon_n + \frac{1}{2} y_2''(\bar{x}_+) \varepsilon_n^2.$$

Вычисление производных дает

$$y_2'(\bar{x}_+) = y'(\bar{x}_+) y'(\bar{x}_-),$$

$$y_2''(\bar{x}_+) = y''(\bar{x}_+) y'(\bar{x}_-) + y_2'(\bar{x}_+) y''(\bar{x}_-).$$

Таким образом, отображение y_2 преобразует ε -окрестность неподвижной точки так же, как логическое отображение

$$\varepsilon_{n+1} = a\varepsilon_n - b\varepsilon_n^2.$$

Для квадратичного отображения параметры a , b элементарно выражаются через параметр r :

$$a = r^2 - 2r - 4,$$

$$b = r(4 + 2r - r^2 + 3\sqrt{(r-3)(r+1)}).$$

Линейная замена переменной

$$\varepsilon = \frac{2+a}{b} \xi - \frac{1+a}{b}$$

и введение нового параметра

$$\tilde{r} = a + 2 = r^2 - 2r - 2$$

приводят полученное выражение к логистическому для переменной ξ и параметра \tilde{r} :

$$y = \tilde{r} \xi (1 - \xi).$$

Потеря устойчивости неподвижной точкой $\xi = \bar{\xi}_2$, что соответствует $x = \bar{x}_+$, произойдет при $\tilde{r} = 3$, т. е. бифуркационное значение параметра r , определяемое из уравнения

$$r^2 - 2r - 5 = 0,$$

совпадает с полученным выше:

$$r = 1 + \sqrt{6}.$$

Масштабное преобразование окрестности неподвижной точки можно последовательно провести и для следующего отображения. Самоподобие бифуркаций удвоения периода при последовательном преобразовании масштаба называется скейлингом. Отметим, что точность аппроксимации возрастает по мере увеличения порядка отображения.

Преобразование параметра

$$\tilde{r} = r^2 - 2r - 2$$

в свою очередь можно рассматривать как некоторое отображение, осуществляемое оператором \hat{R} :

$$\tilde{r} = \hat{R}r.$$

Существует неподвижная точка этого отображения, определяемая условием

$$r_\infty = r_\infty^2 - 2r_\infty - 2.$$

Отсюда легко найти величину параметра логистического отображения, при которой число бифуркаций бесконечно:

$$r_\infty = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3,56.$$

Это приближенное значение параметра хорошо совпадает со значением, полученным в результате вычислительных экспериментов:

$$r_\infty = 3,569945\dots$$

Полученный результат подтверждает, что бифуркации удвоения периода обладают скейлингом. Скейлинг приводит к тому, что при больших значениях числа удвоений периода n значения параметра r_n , при которых происходит бифуркация, удовлетворяют условию

$$r_n - r_\infty \sim \delta^{-n}.$$

Константа $\delta = 4,669$ называется константой Фейгенбаума. Предельное множество логистического отображения, которое при $r = r_\infty$ состоит из бесконечного числа точек, называется аттрактором Фейгенбаума.

Движение систем, имеющих предельные инвариантные множества типа аттрактора Фейгенбаума, во многом носит случайный, хаотический характер. Это обусловлено тем, что точки таких аттракторов являются неустойчивыми. Устойчивость удобно характеризовать показателем Ляпунова — величиной, определяющей среднюю скорость разбегания двух близких точек за одно отображение. Пусть отображение задано функцией $y = \varphi(x)$. Если точки, характеризующие состояние динамической системы, находятся вначале на расстоянии $\delta \ll 1$, то после n -кратного применения отображения расстояние между ними определяется выражением

$$\delta_n = |\varphi_n(x + \delta) - \varphi_n(x)| \approx \left| \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right| \delta.$$

Определим показатель Ляпунова следующим условием:

$$\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\delta_n}{\delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right|.$$

Предел $n \rightarrow \infty$ в этом определении введен для того, чтобы характеризовать предельные множества, содержащие бесконечно много точек. Если рассматриваемая точка является неподвижной точкой отображения, т. е. $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, то, поскольку справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= |\varphi(\bar{x} + \delta) - \bar{x}| \approx \varphi'(\bar{x}) \delta, \\ \delta_2 &= |\varphi_2(\bar{x} + \delta) - \bar{x}| \approx |\varphi'(\bar{x})| \delta_1 = |\varphi'|^2 \delta, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= |\varphi'|^n \delta, \end{aligned}$$

показатель Ляпунова вычисляется элементарно:

$$\sigma(x) = \ln |\varphi'(x)|.$$

Таким образом, для устойчивых точек, когда $|\varphi'| < 1$, показатель Ляпунова отрицателен, $\sigma(x) < 0$, а в случае неустойчивых точек, когда $|\varphi'| > 1$, этот показатель положителен, $\sigma(\bar{x}) > 0$.

Вычисление показателя Ляпунова в произвольной точке возможно лишь в исключительных случаях. В качестве примера

можно рассмотреть треугольное отображение, задаваемое на интервале $0 < x < 1$ функцией

$$y = \begin{cases} rx, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ r(1-x), & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \quad 0 < r < 2.$$

Всюду, кроме точки $x=1/2$, выполняется условие $|\varphi'|=r$. Отсюда следует, что для любых точек показатель Ляпунова $\sigma = \ln r$ отрицателен при $r < 1$ и положителен при $r > 1$. Таким образом, при $r > 1$ все точки оказываются в среднем неустойчивыми, разбегаясь экспоненциально быстро. Поскольку при этом они остаются внутри интервала $0 < x < 1$, возникает явление, называемое динамическим хаосом. Расстояние между любыми двумя близкими точками за конечное (и малое) число итераций окажется порядка размеров интервала. После этого система «забывает» о начальных условиях и движение ее представляется случайным, хаотическим.

Аналогичные свойства проявляет и рассматриваемая система с логистическим отображением при достаточно больших значениях параметра r . Аналитическое вычисление показателя Ляпунова в этом случае затруднительно, однако численный анализ системы показывает, что при $r < r_\infty$ показатель Ляпунова всюду отрицателен, за исключением конечного числа точек, где он обращается в нуль. Эти точки — точки бифуркации системы. В области $r_\infty < r < 4$ показатель Ляпунова становится положительным, что свидетельствует о локальной неустойчивости системы. При $r=4$ наступает глобальный хаос, поскольку все точки в этом случае оказываются неустойчивыми.

Эволюционное описание системы с помощью функций, определяющих зависимость координат от времени, в области динамического хаоса является неэффективным. В этом случае целесообразно ввести функцию распределения $\rho(x)$, характеризующую вероятность нахождения частицы в заданном интервале $(x, x+dx)$.

Если следующая итерация не меняет заданное распределение, то распределение является инвариантным. Можно показать, что для треугольного отображения при $r=1$ инвариантное распределение равномерно покрывает интервал $0 < x < 1$. Более того, любое нормированное распределение сходится к инвариантному.

Конкретный вид распределения для систем в области динамического хаоса зависит от вида функции, задающей отображение. В частности, для логистического отображения при значении параметра $r=4$ инвариантное распределение имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Мы рассмотрели простейшие модельные системы, в которых возможно возникновение динамического хаоса. Заметим, что это явление не является чем-то экзотическим. Динамический хаос появляется в большинстве нелинейных систем. В частности, такими системами являются математический маятник, на который действует периодическая внешняя сила, ротатор, возбуждаемый периодическим полем, система из двух связанных маятников и многие другие простейшие системы. Более подробно вопросы, затронутые в этом разделе, освещаются в специальной литературе *).

*) См.: Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

16.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Определение эволюции некоторой динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями с заданными начальными условиями, сводится к решению задачи Коши. (Корректность такой процедуры обеспечивается выполнением условий теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений). В механике решение уравнений движения производится посредством построения первых интегралов, что позволяет в ряде случаев получить полное решение поставленной задачи. Регулярная процедура построения решений в этом случае для канонических систем с помощью уравнения Гамильтона — Якоби рассматривалась в гл. 8.

Задачи, для которых решение уравнений может быть построено указанным методом, мы назвали интегрируемыми. Практически лишь в редких случаях удается найти полный набор первых интегралов. Более того, после работ А. Пуанкаре по исследованию динамических систем стало ясно, что существование интегралов движения является не правилом, а исключением, так что основной случай динамики — неинтегрируемые задачи. Заметим, что результаты Пуанкаре касаются существования однозначных интегралов для всех допустимых начальных условий и параметров механической задачи. Это не исключает возможности существования интегралов для отдельных значений параметров или начальных условий. Таким образом, решение динамической задачи в большинстве случаев связано с необходимостью замены уравнений, описывающих исследуемую неинтегрируемую систему другими, «близкими» к ней, но интегрируемыми, решения которых могут быть легко получены и отличаются от искомых на некоторую величину, которой можно пренебречь в рассматриваемой задаче.

Существует большое число различных приемов и методов решения поставленной задачи, определяемых в конечном итоге как характером изучаемой системы, так и поставленными целями. Мы рассмотрим лишь некоторые простейшие подходы к решению этой задачи.

В основе ряда методов теории возмущений лежит теорема о зависимости решений дифференциальных уравнений от пара-

метра и начальных условий. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_k, t, \varepsilon) \text{ где } i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.16)$$

а ε — некоторый параметр задачи, зависимость от которого предполагается достаточно гладкой. В начальный момент времени $t=0$ $x_i(0) = x_{i0}$.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, если функции $f_i(x_k, t, \varepsilon)$ вместе со своими производными по x_k, ε, t непрерывны по всем переменным в некоторой области D :

$$D = \{0 \leq t \leq t_0, |x_k - x_{k0}| \leq b_k, |\varepsilon| < \varepsilon_0\},$$

то в некоторой области изменения времени $0 < t < T$ решение начальной задачи непрерывно по x_0 и параметру ε . Если при указанных условиях начальные значения являются параметрами, изменяющимися в некоторой области D_1 , то решение задачи будет непрерывным также и по начальным параметрам в некоторой области изменения t *).

Мы будем предполагать, что при $\varepsilon=0$ рассматриваемая система является интегрируемой и решение ее известно. Тогда решение системы, зависящее от параметра $x_k = x_k(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ является возмущенным. Очевидно, что для получения физически содержательного результата необходимо, чтобы выбранная интегрируемая система уравнений — «эталонная» — удовлетворяла некоторым условиям, связанным с физической постановкой задач механики. В частности, следует учесть эти обстоятельства — желательно выбирать интегрируемую эталонную систему грубой.

Начальные условия в задаче Коши принципиально могут быть определены лишь с некоторой точностью, поэтому желательно, чтобы малые ошибки при их определении не приводили к нарастающим отклонениям в законе движения, т. е. систем должна быть устойчивой.

При выполнении указанных условий зависимость решений от начальных значений и параметра позволяет строить решение описывающее возмущенное движение.

Перечислим некоторые из методов решения задач динамики

Из наиболее простых методов, широко применяемых во многих задачах, назовем метод вариаций постоянных. При нахождении решений этим способом решение невозмущенной задачи представляется в виде $x_k = x_k(t, C_i(t), \varepsilon)$, причем при $\varepsilon=0$ $C_i(t) = C_{i0}$.

Поскольку константы C_k определяются начальными условиями, метод вариации постоянных фактически предполагает, что возмущенное решение может быть получено путем непрерывной «подстройки» начальных условий невозмущенной задачи. М

* См.: Тихонов А. Н., Васильева А. В., Свешников А. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

тод вариаций постоянных удобно использовать для определения частного решения линейной неоднородной системы.

Один из эффективных методов решения дифференциальных уравнений динамики с помощью рядов в конце прошлого века был предложен А. Пуанкаре. В основе метода лежит представление решения в виде ряда по параметру возмущения:

$$x_1(t, C_k, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_{k1}(t, C_m),$$

который с учетом требования аналитичности по параметру позволяет построить решение задачи Коши.

Еще один прием, широко используемый в задачах механики, связан с принципом разделения движений, т. е. с представлением закона движения динамической системы в виде

$$x_i(t) = \bar{x}_i(t) + \xi_i(t).$$

Для линейных систем такое представление может быть использовано, например, для задач о воздействии вынуждающей силы. Тогда $\bar{x}_i(t)$ — решение однородной системы, а ξ_i — частное решение неоднородного уравнения. Разделение движений эффективно в задачах, где имеются различные характерные временные масштабы, например в предложенном примере воздействия быстро осциллирующей силы на маятник, собственная частота колебаний которого мала. В этом случае функции $\bar{x}_i(t)$ описывают некоторое усредненное движение, а ξ_i соответствует быстрым осцилляциям вблизи этого усредненного движения.

Существует еще множество приемов, позволяющих находить решения различных задач. Однако, как правило, при решении задач используется комбинация различных методов. Так, построение рядов Пуанкаре в методе Пуанкаре — фон Цайпеля связано с последовательным интегрированием системы неоднородных уравнений, которые удобно выполнять методом вариаций постоянных. Метод приближенного решения уравнений для слабонелинейного осциллятора Крылова — Боголюбова или метод канонических преобразований в переменных действие — угол, опираются на процедуру усреднения, основанную на методе разделения движений, и т. д.

Широкое использование методов приближенного интегрирования создает иногда впечатление об их универсальности при анализе динамических систем. Следует, однако, помнить, что в большинстве случаев динамические уравнения неинтегрируемы, так что рассмотренные методы могут давать частную информацию лишь о поведении систем в ограниченной области начальных условий и параметров. В других областях параметров требуются совершенно другие подходы. Так, при описании существенно нелинейных неинтегрируемых систем в областях глобальной неустойчивости, аналогичной рассмотренной в гл. 15,

целесообразен вероятностный подход, основанный на введении функции распределения в фазовом пространстве. К системам, в которых этот подход может быть применен при некоторых значениях параметров, относятся такие хорошо известные, как математический маятник, на который действует периодическая вынуждающая сила, нелинейные осцилляторы с двумя и более степенями свободы, классическая задача трех тел, электрический заряд в кулоновском поле, на который действует электромагнитная волна, и многие другие.

Все это требует от исследователя четкой постановки задачи и формулировки «желательного» окончательного ответа, а также его формы. Такая формулировка в значительной степени облегчает выбор модели переменных, в которой она описывается, и метода построения результирующей зависимости.

16.2. ПРЯМОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

Метод разделения движений связан с возможностью представления решения в виде суммы

$$x_i = \bar{x}_i + \xi_i.$$

Вообще говоря, такое представление произвольно, и для его реализации необходимо наложить некоторые дополнительные условия. Как правило, эти условия определяются особенностями задачи. В частности, в качестве функции $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$ может быть выбрано решение невозмущенной задачи

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{x}_k, t, \varepsilon = 0).$$

Если предполагать, что ξ_i мало, а правая часть уравнений движения допускает разложение по ε , то, ограничиваясь линейными членами при $\varepsilon \neq 0$, можно существенно упростить исследование движения возмущенной системы. В частности, такой подход может быть использован для анализа устойчивости по линейному приближению.

Чаще метод разделения движений используется в системах, характеризующихся различными временными масштабами. Тогда разделение движения в системе производится на быстрые и медленные. В этом случае $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$ определяется из усредненных уравнений. Проиллюстрируем применение метода разделения движений в случае одномерного движения в быстро осциллирующем поле (метод Капицы, 1951).

Пусть материальная точка m движется под действием заданной силы $F = F(x, t)$, которую можно представить в виде суммы двух членов:

$$F(x, t) = F_0(x) + F_1(x, t),$$

причем характерный масштаб времени для движения под действием силы $F_0 = T_0$, а сила $F_1(x, t)$ быстро изменяется, так что

$T_1 \ll T_0$. Пусть для простоты $F_1(x, t)$ — быстро осциллирующая сила,

$$F_1(x, t) = \varepsilon F_1(x) \sin \omega_1 t.$$

Здесь малость параметра ε , вообще говоря, не предполагается. Положим, что решение уравнения движения частицы массы m под действием силы F представимо в виде суммы

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi(t). \quad (2.16)$$

Далее потребуем, что при $\varepsilon=0$ функция $\bar{x}(t, 0)$ удовлетворяла уравнению

$$m\ddot{\bar{x}}(t, 0) = F_0(\bar{x}(t, 0)).$$

Действие возмущения существенно меняет характер медленного движения, так что

$$\bar{x}(t, \varepsilon) \neq \bar{x}(t, 0).$$

Поскольку представление движения произвольно, наложим дополнительное условие. Будем считать, что решение $\bar{x} = \bar{x}(t, \varepsilon)$ описывает медленное движение, а $\xi = \xi(t)$ — быстрое, так что при усреднении по периоду быстрых колебаний полного решения выполняется условие

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) dt = \bar{x}(t),$$

т. е. $\xi(t)$ не дает вклада в медленное движение:

$$\int_0^{T_1} \xi(t) dt = 0, \quad \int_0^{T_1} \bar{x}(t, \varepsilon) \xi dt = 0.$$

Подставляя теперь решение вида (2.16) в уравнение возмущенного движения, получим

$$m\ddot{\bar{x}} + m\ddot{\xi} = F_0(\bar{x} + \xi) + \varepsilon F_1(\bar{x} + \xi) \sin \omega_1 t.$$

Предположим, в этом случае справедливы разложения

$$F_0(\bar{x} + \xi) = F_0(\bar{x}) + F_0'(\bar{x}) \xi + o(\xi),$$

$$F_1(\bar{x} + \xi) = F_1(\bar{x}) + F_1'(\bar{x}) \xi + o(\xi).$$

Это приводит нас к уравнению в линейном по ξ приближении

$$m\ddot{\bar{x}} + m\ddot{\xi} = F_0(\bar{x}) + F_0'(\bar{x}) \xi + \varepsilon F_1(\bar{x}) \sin \omega_1 t + \varepsilon F_1'(\bar{x}) \xi \sin \omega_1 t.$$

Усредняя полученное уравнение по времени за период T_1 быстрого движения, получим уравнение для \bar{x} :

$$m\ddot{\bar{x}} = F_0(\bar{x}) + \varepsilon F_1'(\bar{x}) \overline{\xi \sin \omega_1 t},$$

правая часть которого содержит слагаемое, пропорциональное возмущению. Соответственно для быстрой переменной получаем линейное уравнение

$$m\ddot{\xi} = F_0'(\bar{x}) \xi + \varepsilon F_1(\bar{x}) \sin \omega_1 t + \varepsilon F_1'(\bar{x}) (\xi \sin \omega_1 t - \overline{\xi \sin \omega_1 t}).$$

В предположении, что сила, действующая на точку, слабо меняется на характерной длине (амплитуде) быстрых колебаний, т. е.

$$(F_0' + F_1'(\bar{x})) \xi \ll F_1(\bar{x}),$$

получим решение для ξ :

$$\xi(t) = -\frac{1}{\omega_1^2} \frac{\varepsilon F_1}{m} \sin \omega_1 t,$$

что приводит к уравнению для медленной переменной \bar{x} :

$$m\ddot{\bar{x}} = F_0(\bar{x}) - \frac{F_1 F_1'}{2m\omega_1^2}.$$

Так как уравнение для усредненного движения не зависит явно от времени, можно построить эффективную потенциальную энергию

$$U_{\text{эфф}}(\bar{x}) = U_0 + \frac{F_1^2(x)}{4m\omega_1^2},$$

которая содержит вклад от быстро осциллирующей части сил, действующих на точку. Заметим, что уравнение для усредненного движения и эффективная потенциальная энергия не зависят от закона, по которому происходит колебание силы F_1 .

В качестве примера применения метода усреднения Капицы рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания в поле тяжести по закону $x_0 = A \cos \omega t$ (рис. 1.16). Периодическое воздействие на систему здесь осуществляется с помощью нестационарной связи $|r - r_0(t)| = l$. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mlA\omega^2 \cos \omega t \cos \varphi + mgl \cos \varphi,$$

что приводит к уравнениям движения

$$ml \ddot{\varphi} = -\Omega^2 \sin \varphi - a\omega^2 \sin \varphi \cos \omega t,$$

где $\Omega^2 = g/l$ и введен безразмерный параметр $a = A/l$. Действие нестационарной связи приводит к обобщенной силе, гармонич-

чески зависящей от времени, т. е. к случаю, рассмотренному выше. Эффективная потенциальная энергия усредненного движения имеет вид

$$U_{\text{эфф}}(\varphi) = mgl(-\cos\varphi + k^2 \sin^2\varphi),$$

где $k = a\omega/2\Omega$ — параметр задачи. При $k < 1/\sqrt{2}$ нижнее положение равновесия $\varphi_0 = 0$ является устойчивым, а $\varphi_{1,2} = \pm\pi$ — неустойчивым. При увеличении частоты колебаний подвеса пара-

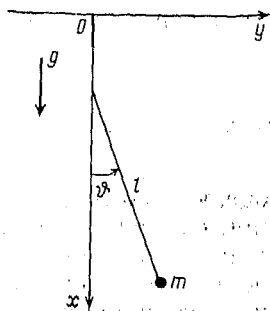


Рис. 1.16

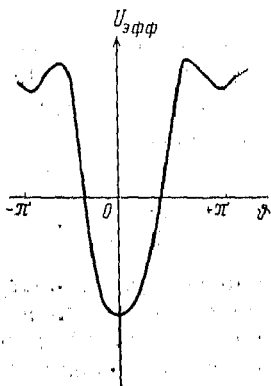


Рис. 2.16

метр растет, и при $k > 1/\sqrt{2}$ верхнее положение равновесия также оказывается устойчивым. Появляются две неустойчивые точки равновесия, определяемые условием $\cos\varphi_{3,4} = -\frac{1}{2k^2}$.

Зависимость эффективной потенциальной энергии усредненного движения от φ для случая $k > 1/\sqrt{2}$ приведена на рис. 2.16.

Разделение движений на быстрые и медленные эффективно при изучении колебаний слабонелинейных систем. Пусть некоторая нелинейная система, например математический маятник, испытывает малые колебания. Тогда с высокой точностью движение является гармоническим:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0).$$

По мере роста амплитуды колебаний маятника происходят два процесса. Во-первых, меняется период, а значит, и основная частота колебаний, а, во-вторых, форма колебаний начинает все заметнее отличаться от гармонической, т. е. спектр колебаний обогащается гармониками основной частоты:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\psi + b_n \cos n\psi),$$

где $\psi = \omega t + \psi_0$ — фаза колебаний, причем $\psi = \omega \neq \omega_0$.

Представление движения в виде ряда можно рассматривать как некоторую реализацию метода разделения движений на медленное, происходящее с основной частотой ω , и быстрое, представляемое суммой ряда при $n \gg 2$:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \xi(t),$$

$$\xi(t) := \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \sin n\psi + b_n \cos n\psi).$$

В случае разложения движения в ряд Фурье метод разделения движений приобретает точный математический смысл, а именно решение, описывающее медленное движение $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t)$, ортогонально быстрому:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \bar{\varphi}(t) \xi(t) dt = 0. \quad (3.16)$$

Это условие позволяет построить процедуру последовательного приближения для вычисления коэффициентов разложения в ряд и определения основной частоты колебаний. Указанный принцип последовательного разделения движения в виде разложения в ряд Фурье лежит в основе многих методов приближенного решения уравнений нелинейных колебаний, в частности таких, как метод гармонического баланса, и такого мощного метода, как метод Крылова—Боголюбова.

Рассмотрим вначале основные идеи на примере метода гармонического баланса, удобного для описания стационарных колебаний в слабонелинейных системах. Рассмотрим вначале консервативную систему, так что уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = F(x).$$

Представим решение этого уравнения в виде $x = \bar{x} + \xi$. Подставляя это выражение в уравнение (3.16) и учитывая, что при малых ξ можно ограничиться первым членом разложения по ξ правой части уравнения, получим уравнение для разделенного движения в виде

$$\ddot{\bar{x}} + \ddot{\xi} = F_0(\bar{x}) + F_1(\bar{x})\xi. \quad (4.16)$$

В отличие от рассмотренного ранее случая прямого разделения движения мы не можем непосредственно определить зависимость $\xi = \xi(t)$. Для выделения медленной части разложим правую часть уравнения в ряд Фурье, полагая, что зависимость медленной координаты \bar{x} от фазы имеет вид $\bar{x} = x_0 \sin \psi$:

$$F_0(x_0 \sin \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(x_0) \sin n\psi + B_n(x_0) \cos n\psi),$$

и ограничимся нулевым порядком разложения по ξ . В этом приближении уравнение для медленной части $\bar{x} = x_0 \sin \psi$

$$-\omega^2 x_0 A_1(x_0)$$

позволяет определить зависимость частоты колебаний от амплитуды

$$\omega^2(x_0) = \frac{A_1(x_0)}{x_0}.$$

При определении коэффициентов Фурье мы воспользовались произвольностью выбора начальной фазы ψ_0 , чтобы обратить B_1 в нуль. Подставляя найденное решение в уравнение (4.16), мы можем найти уравнение для определения быстрого движения:

$$\ddot{\xi} = F_1(\bar{x}) \xi + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n(x_0) \sin n\psi + B_n(x_0) \cos n\psi). \quad (5.16)$$

Заметим, что решение этого уравнения не будет ортогональным к x , поскольку входящее в правую часть уравнения произведение $F_1(x) \xi$ может содержать члены, пропорциональные \bar{x} . Для получения решения необходимо на каждом шаге выделять быстрые и медленные части решения, что приводит нас к процедуре последовательного приближения. Полагая, что $\xi \ll 1$, и членом, пропорциональным ξ , можно пренебречь, из уравнений найдем выражение для ξ :

$$\xi(t) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} (A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi).$$

Для уравнения математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

зависимость функции F от фазы ψ имеет вид

$$F(\bar{x}) = -\omega_0^2 \sin(x_0 \sin \psi),$$

так что коэффициент A_1 имеет вид

$$A_1 = -\frac{\omega_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin(x \sin \psi) d\psi = -2J_1(x_0) \omega_0^2,$$

где $J_1(x_0)$ — функция Бесселя.

Напомним, что эта функция может быть определена с помощью ряда

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Для колебаний, происходящих с малой амплитудой $x_0 \ll 1$, можно ограничиться первыми членами ряда

$$J_1(x_0) \approx \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{x_0^2}{8} \right),$$

что дает зависимость частоты малых колебаний от амплитуды:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{8}}.$$

Этот же результат может быть получен и непосредственно из уравнения (4.16), учитывая, что для малых колебаний можно ограничиться разложением

$$\sin \bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{6},$$

и, подставляя $\bar{x} = x_0 \sin \psi$, получить

$$F_0(\bar{x}) = -\omega_0^2 x_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{8} \right) \sin \psi - \frac{3}{8} \omega_0^2 x_0^3 \sin 3\psi.$$

Из этого выражения следует, что основная частота малых колебаний математического маятника, колеблющегося с амплитудой x_0 , определяется выражением

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{16} \right).$$

16.3. РЕЗОНАНС В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим поведение слабонелинейного осциллятора под действием внешней периодической силы. Для простоты ограничимся случаем силы сопротивления, пропорциональной скорости. Уравнение движения осциллятора под действием возмущения в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2(x) x = f \sin \Omega t. \quad (6.16)$$

Для линейной системы $\omega^2(x) = \omega_0^2$ и в некотором интервале частот $\Omega \approx \omega_0$ в случае малого затухания возможно явление резонанса, рассмотренное ранее в гл. 8. В теории линейного резонанса рассматриваются два основных режима: установившиеся колебания, когда амплитуда колебаний не зависит явно от времени, и переходный режим — процесс установления колебаний в системе. Характерное время установления колебаний определяется параметром λ , так что в случае $\lambda \rightarrow 0$ время установления велико. Характерная область резонансных частот $\Delta\Omega$ также определяется этим параметром, так что при $\lambda \rightarrow 0$ $\Delta\Omega \rightarrow 0$. Решение уравнения (6.16) является суммой решений однородных

уравнений, описывающих собственные колебания с частотой $\omega \approx \omega_0^2$, и решения неоднородного уравнения, которое при $\lambda=0$ для всех $\Omega \neq \omega_0$ имеет вид $x_{\text{н}} = A \sin \Omega t$.

При $\Omega = \omega_0$ амплитуда резонансного решения растет линейно со временем, так что установившегося режима в этом случае нет:

$$x_{\text{рез}} = -\frac{f}{2\Omega} t \cos \omega_0 t.$$

В случае нелинейных колебаний также можно выделить режим установившихся колебаний, существующий в системах с затуханием, и режим переходных процессов.

Рассмотрим вначале слабонелинейную систему без затухания. В этом случае при некоторой амплитуде период свободных колебаний осциллятора может совпасть с периодом вынуждающей силы, так что условие резонанса окажется выполненным. Очевидно, что в случае слабонелинейной системы внешнее периодическое воздействие может привести к изменению энергии и соответственно амплитуды колебаний. Однако в отличие от линейного резонанса период колебаний нелинейного осциллятора зависит от амплитуды колебаний, так что ее изменение нарушает условия резонанса и линейный рост амплитуды оказывается невозможным. Для описания колебаний системы при $\Omega \approx \omega_0$ удобно использовать теорему об изменении энергии.

Рассмотрим осциллятор, колебания которого происходят с амплитудой A_0 и имеют период $T_0 = T(A_0)$. Предположим, что основная частота колебаний $\omega = 2\pi/T = \omega(A)$ слабо зависит от амплитуды, так что приближенно можно записать

$$\omega(A) = \omega(A_0) + \frac{\partial \omega}{\partial A} (A - A_0) = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial A} a,$$

где $a = A - A_0$ — изменение амплитуды, причем выполняется условие

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} \frac{a}{\omega_0} \ll 1.$$

Энергия свободного нелинейного осциллятора

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} \omega^2(x)$$

определяется амплитудой колебаний $E = E(A)$. Под действием вынуждающей силы энергия меняется, так что скорость изменения равна мощности приложенной силы:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial A} \dot{a} = m f \sin \omega t \dot{x}(t).$$

Изменение амплитуды приводит к изменению фазы колебаний

$$\psi = \int \omega(t) dt.$$

Введем переменную ϑ — отклонение фазы от линейного закона:

$$\vartheta = \psi - \Omega t. \quad (7.16)$$

Мы будем предполагать, что изменение фазы определяется лишь изменением амплитуды колебаний, а непосредственное воздействие возмущающей силы фазу колебаний не меняет. Очевидно, что такое приближение справедливо при достаточно малой величине возмущения.

Из уравнения (7.16) можно выразить $t = t(\vartheta)$ и использовать ϑ в качестве независимой переменной, так что $a = a(\vartheta)$. Будем искать закон движения слабонелинейного осциллятора в виде

$$x(t) = A(t) \sin \psi(t) = (A_0 + a) \sin(\Omega t + \vartheta),$$

т. е. используя метод вариации постоянных. Для вычисления мощности силы, действующей на систему, достаточно ограничиться нулевым приближением для скорости, полагая

$$\dot{x}(t) = A_0 \Omega \cos \psi.$$

В этом приближении мощность силы

$$W = \frac{m\Omega A_0 f}{2} (\sin \vartheta + \sin 2\Omega t) (\sin(2\omega t + \vartheta) - \sin \vartheta).$$

Интегрирование за период невозмущенного движения позволяет вычислить среднее за это время изменение энергии:

$$\bar{\dot{E}} = \frac{\Delta E}{T} = -\frac{m\Omega A_0 f}{2} \sin \vartheta = \dot{a} \frac{\partial E}{\partial A}.$$

Поскольку мы предполагаем, что колебания почти линейные,

$$E \simeq \frac{m\Omega^2 A_0^2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial A} = m\Omega^2 A_0.$$

Таким образом, для изменения амплитуды и фазы нелинейных колебаний вблизи резонанса мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{f}{2\Omega} \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial \omega_0}{\partial A} a. \end{cases}$$

Полученная система уравнений эквивалентна уравнению второго порядка для фазовых колебаний:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{f}{2\Omega} \frac{\partial \omega_0}{\partial A} \sin \vartheta = 0,$$

совпадающего с уравнением движения математического маятника:

$$\ddot{\vartheta} - \Omega_0^2 \sin \vartheta = 0,$$

где

$$\Omega_0^2 = \frac{f}{2\Omega} \left| \frac{\partial \omega}{\partial A} \right|.$$

Как известно, решения этого уравнения могут иметь как колебательный, так и вращательный характер. Максимальная амплитуда колебаний переменной

$$\vartheta_{\max} \sim \pi.$$

Существование первого интеграла

$$\dot{\vartheta}^2 - 2\Omega_0^2 \cos \vartheta = C$$

позволяет оценить максимальное отклонение частоты колебаний, полагая $C=0$:

$$|\dot{\vartheta}_{\max}| \sim \Omega_0 \sim \left(\frac{f\omega'}{\omega} \right)^{1/2}$$

и, следовательно, оценить изменение амплитуды:

$$|a_{\max}| \sim \frac{\Omega_0}{\omega'} = \left(\frac{f}{\omega\omega'} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемое приближение не может переходить в линейное, поскольку при выводе уравнений мы предполагали, что выполняется условие

$$\frac{a_{\max}}{A_0} \sim \left(\frac{f}{\omega\omega'} \right)^{1/2} \frac{1}{A_0} \ll 1.$$

Рассматриваемое приближение называется приближением умеренной нелинейности и широко используется в теории нелинейного резонанса, поскольку дает универсальную схему описания для большого класса систем.

При малой амплитуде фазовых колебаний, когда $\vartheta \ll 1$, характерное время процесса обмена энергией с внешней системой $\tau \sim \frac{1}{\Omega_0} = \left(\frac{\omega}{f\omega'} \right)^{1/2}$. При этом изменения амплитуды и фазы носят гармонический характер:

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\Omega_0 t + \beta_0), \quad a = a_0 \frac{\Omega_0}{\omega'} \cos(\Omega_0 t + \beta_0).$$

Рассмотрим теперь стационарный режим, учитывая диссипативные силы. Воспользуемся вновь методом гармонического баланса. Предполагая, что свободные колебания в системе от-

существуют, будем искать решение в виде разложения Фурье по гармоникам вынуждающей силы:

$$x(t) = a \sin \Omega t + \sum_{n \geq 2}^{\infty} (a_n \sin n\Omega t + B_n \cos n\Omega t) = x + \xi.$$

Здесь мы выделили быстро осциллирующую часть.

В общем случае резонансные эффекты в слабонелинейной системе могут проявляться вблизи тех частот, которые кратны любой, не обязательно первой гармонике вынуждающей силы. Если для слабонелинейной системы с малым затуханием период свободных колебаний характеризуется частотой ω , то резонансные эффекты могут возникать при $\Omega = \omega/n$. Кроме того, возможно резонансное возбуждение колебаний на частотах $\Omega = n\omega$ вследствие резонанса между высокой гармоникой фурье-разложения собственных колебаний и вынуждающей внешней силой. Колебания на субгармониках и гармониках высокой частоты очень сильно усложняют картину нелинейного резонанса и при некоторых условиях приводят к возникновению динамического хаоса в системах. Однако в рассматриваемом случае, когда нелинейности малы, амплитуды колебаний гармоник высокой частоты мало влияют на резонанс при $\Omega \sim \omega$, и для простоты мы ограничимся только этим случаем. Детальное изложение особенностей нелинейного резонанса для других случаев можно найти в специальной литературе.

Ограничиваясь случаем основного резонанса, определим коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $F(x)$:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Полагая, что движение происходит по закону $\bar{x} = a \sin \psi$, где $\psi = \Omega t + \alpha$, подставим это решение в уравнение. Коэффициенты при $\sin \psi$ и $\cos \psi$ обращаются в нуль, что дает систему для определения амплитуды колебаний и сдвига фаз:

$$\begin{cases} -\Omega^2 a + A_1(a) = \frac{f}{m} \cos \alpha, \\ -2\lambda \Omega a = \frac{f}{m} \sin \alpha. \end{cases}$$

Резонансная кривая $a = a(\Omega)$ определяется уравнением

$$[\Omega^2 a - A_1(a)]^2 + 4\lambda^2 \Omega^2 a^2 = \left(\frac{f}{m}\right)^2,$$

а сдвиг фаз α — из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\lambda\Omega a}{a\Omega^2 - A_1(a)}.$$

В частности, для случая слабонелинейного математического маятника

$$A_1 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right),$$

откуда

$$\left[\Omega^2 - \omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right)\right]^2 + 4\lambda^2 \Omega^2 = \left(\frac{f}{ma}\right)^2.$$

В пределе малого затухания стационарный режим возникает при сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия $f \rightarrow 0$, так что зависимость

$$\omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) - \Omega^2 = 0$$

в этом случае определяет «скелетную кривую» нелинейного резонанса.

При учете затухания кривая $a = a(\Omega)$ определяется из кубического уравнения относительно a^2 , что не очень удобно для аналитического представления результатов, однако характерные точки и типичное поведение системы нетрудно исследовать, если заметить, что обратная зависимость

$$\Omega^2 = \Omega^2(a^2)$$

выражается биквадратным уравнением

$$\Omega^4 - 2\omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) \Omega^2 + 4\lambda^2 \Omega^2 + \omega_0^4 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right)^2 - \left(\frac{f}{ma}\right)^2 = 0.$$

Две ветви кривой нелинейного резонанса слева и справа от «скелетной кривой» определяются корнями уравнения

$$\Omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) - 2\lambda^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) - 2\lambda^2\right]^2 - \omega_0^4 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right)^2 + \left(\frac{f}{ma}\right)^2},$$

а положение вершины можно найти из уравнения

$$\left(\frac{f}{ma}\right)^2 - 4\lambda^2 \left(\omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) - \lambda^2\right) = 0.$$

При $\lambda/\omega_0 \ll 1$ и $f \ll m\omega_0\lambda$ это дает

$$a_0 \approx \frac{f}{2m\omega_0\lambda},$$

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a_0^2}{8} \right) - 2\lambda^2.$$

Характерной особенностью нелинейного резонанса является зависимость формы кривой от амплитуды вынуждающей силы. При $f \rightarrow 0$ резонансная кривая мало отличается от линейного случая. Однако с ростом f при заданном значении затухания амплитуда колебаний растет, что приводит к увеличению наклона «скелетной кривой» вблизи максимума и, как следствие, к появлению перегиба на резонансной кривой под этим максимумом. Возникающая при этом неоднозначность зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы обусловле-

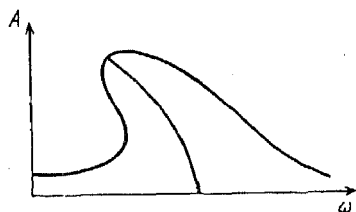


Рис. 3.16

на тем, что состояние маятника может зависеть от предыстории системы. Анализ устойчивости колебаний вблизи резонанса показывает, что устойчивым колебаниям соответствует точка нижней ветви при $\Omega < \omega_{\text{рез}}$ вплоть до Ω_1 , где выполняется условие

$$\left. \frac{da}{d\Omega} \right|_{\Omega_1} = 0.$$

При прохождении резонанса из области $\Omega > \omega_{\text{рез}}$ устойчивой является ветвь с общей амплитудой, вплоть до точки Ω_2 , где

$$\left. \frac{da}{d\Omega} \right|_{\Omega_2} = 0.$$

Дальнейшее уменьшение частоты вынуждающей силы приводит к срыву колебаний и переходу на нижнюю ветвь, где амплитуда колебаний мала.

Вид резонансной кривой для математического маятника приведен на рис. 3.16.

16.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Как отмечалось в п. 16.1, решение дифференциальных уравнений, зависящих от параметра ϵ , при выполнении условий теоремы существует и непрерывно зависит от параметра в некоторой области изменения переменных. Если функции $f_i(x_k, t, \epsilon)$ в правой части динамических уравнений

(1.16) имеют непрерывные частные производные до s -го порядка включительно по всем переменным, то решение задачи в данной области также имеет непрерывные производные до s -го порядка. Более того, если функции f_i являются аналитическими функциями своих аргументов, то решение задачи аналитически зависит от параметров. Последнее утверждение является теоремой Пуанкаре.

Существование непрерывных производных по параметру возмущения позволяет разложить решение в ряд Маклорена по этому параметру:

$$x_i(t, \varepsilon) = x_i(t, 0) + \sum_{n=1}^k \frac{\partial^n x_i}{\partial \varepsilon^n} \frac{\varepsilon^n}{n!} + o(\varepsilon^{k+1})$$

и представить решение в виде суммы

$$x_i(t, \varepsilon) = x_i(t, 0) + \xi_i(t, \varepsilon) = \bar{x}_i(t) + \xi_i,$$

где $x_i(t, 0) = \bar{x}_i(t)$ — решение невозмущенной задачи. Предполагается, что решение невозмущенной задачи известно. Очевидно, что решение $\xi_i(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно стремится к нулю на сегменте $[0, T]$.

Пусть функции f_i являются аналитическими функциями всех аргументов, т. е. могут быть представлены в виде рядов по целым положительным степеням x_k , t и ε . Тогда решение представимо в виде ряда, равномерно сходящегося по ε в некоторой области. Для практического вычисления коэффициентов этого разложения можно использовать метод последовательных приближений Пуанкаре — фон Цайнеля. Для этого подставим решение в виде формального ряда по переменной ε в уравнения и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях параметра возмущения.

Рассмотрим для определенности системы вида

$$\dot{x}_i = f_i^0(x_k, t) + \varepsilon f_i^1(x_k, t).$$

Пусть \bar{x}_i — решение невозмущенной задачи

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i^0(\bar{x}_k, t).$$

Предположим, что функции $f_i^1(x, t)$ являются аналитическими, и будем искать решение в виде ряда

$$x_i = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = f_i^0(\bar{x}, t), \\ \dot{\xi}_{1i} = f_{ik}^{\prime 0}(\bar{x}, t) \xi_{1k} + f_i^1(\bar{x}, t), \\ \dot{\xi}_{2i} = \frac{1}{2} f_{ik}^{\prime\prime 0}(\bar{x}, t) \xi_{2k} + f_{ik}^{\prime 1}(\bar{x}, t) \xi_{1k}(t), \\ \dots \end{cases}$$

Последовательное решение этой системы позволяет определить функции ξ_1, ξ_2 и т. д., решая неоднородные уравнения, например, методом вариации постоянных. Выбор начальных условий на каждом шаге интегрирования допускает определенную свободу. В рассматриваемых примерах мы полагаем все $\xi_i(0) = 0$ и $\bar{x}_i(0) = x_{i0}$.

В качестве примера применения метода рассмотрим колебания математического маятника достаточно малой амплитуды. В этом случае можно ограничиться первой нелинейной поправкой, полагая $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Полученное уравнение — уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3.$$

Пусть в начальный момент времени $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$. Решение невозмущенной задачи в этом случае имеет вид

$$\bar{x} = a \cos \omega_0 t.$$

Подставим это решение в уравнение первого порядка по параметру возмущения:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = \varepsilon a^3 \cos^3 \omega_0 t.$$

Решение этого уравнения с начальными условиями

$$\xi_1(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0$$

имеет вид

$$\xi_1(t) = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 (\omega_0 t \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t) - \frac{a^3}{32} \varepsilon \cos 3\omega_0 t.$$

Очевидно, что уже в первом порядке решение содержит слагаемые, которые расходятся при $\omega_0 t \rightarrow \infty$. Эти слагаемые называют вековыми или секулярными членами. Полученный ряд сходится при условии, что $\omega_0 t < 1$. В случае $\omega_0 t > 1$ вопрос о сходимости ряда гораздо сложнее. Ряд, содержащий вековые члены, может быть сделан сходящимся при выборе достаточно малого возмущения на достаточно малом интервале времени.

Вообще говоря, при решении дифференциальных уравнений с помощью рядов часто ряды оказываются расходящимися. В качестве примера, взятого из монографии А. Найфэ*), рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}.$$

Будем искать решение в области $|x| \gg 1$. Представим решение в виде формального ряда

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m}$$

и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях m , получим

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^k} \right).$$

Из приведенного выражения следует, что при любых x ряд расходится. Однако конечное число членов ряда хорошо аппроксимирует решение при $x < 0$, которое можно представить в виде

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x} dx.$$

Справедливость последнего утверждения легко проверить прямой подстановкой. Интегрирование по частям позволяет представить остаточный член ряда в виде интеграла

$$R_n(x) = n! e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x^{n+1}} dx. \quad (8.16)$$

При $x < 0$ ряд является знакпеременным и остаточный член легко оценить:

$$|R_n| \leq n! \left| \frac{1}{x^{n+1}} \right| e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{n!}{|x^{n+1}|}.$$

Поскольку остаточный член меньше последнего члена ряда, мы получили для всех x удобную оценку точности представления решения дифференциального уравнения конечным числом членов ряда.

Ряды, сходящиеся при всех t для некоторых фиксированных ϵ , называют равномерно-пригодными. Это свойство рядов тео-

*) См.: Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир. 1976.

при возмущений может быть нарушено как особенностями динамических уравнений, так и неудачной формой представления решений. В последнем случае удастся указать процедуру устранения расходимости. Так, в рассмотренном выше примере решения уравнения Дуффинга для нелинейного осциллятора возникновение вековых членов обусловлено неудачным выбором частоты колебаний, поскольку частота возмущенного осциллятора не равна ω_0 . Устранение расходимости в этом случае может быть достигнуто при учете изменения частоты нелинейного осциллятора. Процедура перенормировки частоты в каждом приближении ряда Пуанкаре была предложена Линдштедтом. В этом случае предполагается, что зависимость частоты колебаний от возмущения может быть представлена рядом

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение движения и приравнявая члены с одинаковыми степенями ε для ξ_1 , получим уравнение:

$$\xi_1'' + \xi_1 = \left(2 \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{1}{8} A^2\right) A \cos \omega t + \frac{A^3}{24} \cos 3\omega t.$$

Здесь в качестве независимого аргумента выбрана фаза колебаний $\psi = \omega_0 t + \psi_0$. Накладывая дополнительное условие периодичности возмущенного решения, легко определить поправку к частоте ω_1 , обеспечивающую обращение в нуль резонансного члена в правой части уравнения движения $\omega_1 = -\frac{1}{16} \omega_0 A^2$.

Для нулевых начальных условий

$$\xi_1(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0$$

это дает поправку к закону движения:

$$\xi_1 = \frac{A^3}{192} (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

Заметим, что получаемый таким способом ряд уже не является рядом по степеням параметра возмущения, поскольку ε входит в выражение для частоты колебаний. Процедура последовательного исключения резонансных членов путем определения поправок к частоте колебаний слабонелинейных систем была развита в методе Крылова — Боголюбова.

16.5. МЕТОД КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА

Метод Крылова — Боголюбова является обобщением рассмотренных ранее методов построения асимптотических приближений для неконсервативных колебательных систем, в частности систем с диссипацией. Этот метод развивает идеи Линдштедта о разложении частоты колебаний в ряд по

малому параметру и использует методику разделения движений на быстрые и медленные. Для разделения движений используется разложение в ряд Фурье по возмущенному движению, так что выделение медленного движения является хорошо определенной процедурой, и это позволяет контролировать точность асимптотического разложения. Для упрощения изложения основных идей метода мы ограничимся здесь рассмотрением автономных динамических систем. Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}),$$

где ϵ — параметр возмущения. При $\epsilon=0$ решение этого уравнения — тригонометрические функции.

Если система является консервативной, то колебательное решение при $\epsilon \neq 0$ можно представить в виде тригонометрического ряда

$$x(t) = a \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(n\psi + \theta_n),$$

коэффициенты которого определяются начальными условиями и, следовательно, могут быть выражены через амплитуду первой гармоники:

$$a_n = a_n(a), \quad \theta_n = \theta_n(a), \quad n \geq 2.$$

В общем случае диссипативные члены, входящие в уравнение (8.16), представлены в виде малого возмущения, пропорционального ϵ . Решение для такой системы естественно представлять в виде асимптотического ряда по параметру возмущения:

$$x(t) = a \sin \bar{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(a, \bar{\psi}), \quad (9.16)$$

где $a = a(t)$ и $\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t)$ — медленно меняющиеся функции.

Как и в случае консервативных систем, мы будем предполагать, что в этом выражении производится разделение движения на медленное и быстрое, так что первое слагаемое полностью описывает медленное движение. Математическим выражением этого факта является условие ортогональности первого слагаемого всем остальным членам ряда:

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi u_n(a, \psi) d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi u_n(a, \psi) d\psi = 0. \quad (10.16)$$

Это условие однозначно определяет процедуру построения решения. Уравнения для определения медленно меняющейся амплитуды и фазы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{a} = a + \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n(a). \end{cases} \quad (11.16)$$

Правые части уравнений (11.16) определяются из уравнения (8.16) путем подстановки решений, выраженных через введенные переменные a и θ .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно построить ряд (9.16). Построенный ряд является асимптотическим и обеспечивает точность ε^n , в том числе на больших временах движения системы при $\omega_0 t > \varepsilon$.

Практически более удобным для получения асимптотического ряда (9.16) является метод усреднения, применяемый к точным уравнениям для введенных переменных — $A(t)$, $\psi(t)$ — амплитуды и фазы. Эти переменные вводятся с помощью соотношения

$$x = A(t) \sin \psi(t). \quad (12.16)$$

При $\varepsilon = 0$

$$\psi = \omega_0 t + \theta_0.$$

Если новые переменные подчинить дополнительному условию

$$\dot{A} \sin \psi + A \dot{\psi} \cos \psi = 0, \quad (13.16)$$

то выражение для производной $\dot{x}(t)$ явно не будет содержать зависимости от производных A и θ :

$$\dot{x}(t) = A \omega_0 \cos \psi. \quad (14.16)$$

В этом случае уравнение (8.16) вместе с (13.18) приводит к системе уравнений первого порядка для амплитуды и фазы:

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi, \\ \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{A \omega_0} f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi. \end{cases} \quad (15.16)$$

Если рассматриваемые функции $f(x, \dot{x})$ являются периодическими по переменной ψ , удобно представить их в виде рядов Фурье, коэффициенты которых зависят от амплитуды:

$$f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) = \sum_{n=-1}^{\infty} (g_n(A) \cos n\psi + h_n(A) \sin n\psi) + g_0(A).$$

Используя это представление, запишем уравнения (15.16):

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(A) (\cos(n-1)\psi + \cos(n+1)\psi) + \\ \quad + h_n(A) (\sin(n-1)\psi + \sin(n+1)\psi)\}, \\ \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2A\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(A) (\sin(n+1)\psi - \sin(n-1)\psi) + \\ \quad + h_n(A) (\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi)\}. \end{cases} \quad (16.16)$$

Амплитуду и фазу удобно представить в виде суммы медленно изменяющейся части и осциллирующих функций:

$$A(t) = a(t) + a_1(t),$$

$$\theta(t) = \bar{\theta}(t) + \theta_1(t).$$

Поскольку амплитуда осцилляций мала: $a_1(t) \sim \varepsilon a(t)$, в первом порядке по ε уравнения для медленных функций можно получить из точных, усредняя их по времени за период. Эти уравнения можно получить из (16.16), оставляя в правой части лишь члены, не зависящие от фазы ψ :

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} g_1(a), \\ \dot{\bar{\theta}} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} h_1(a). \end{cases}$$

Решение уравнений с учетом начальных условий $a(0) = a_0$, $\theta(0) = \theta_0$ дается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\omega_0}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{g_1(a)}, \\ \bar{\theta}(a) &= \theta_0 - \int_{a_0}^a \frac{da}{a} \frac{h_1(a)}{g_1(a)}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Осциллирующие члены a_1 и θ_1 можно определить из уравнения (16.16), заменяя интегрирование по времени интегрированием по фазе, с учетом сделанных приближений:

$$g_n(A) \approx g_n(a), \quad h_n(A) \approx h_n(a).$$

Для представления решения уравнения (8.16) в форме Крылова — Боголюбова в первом порядке по ε подставим полученные выражения для амплитуды и фазы в (12.16):

$$x(t) = a \sin \bar{\psi} + \varepsilon u_1(a, \bar{\psi}), \quad (18.16)$$

где

$$\varepsilon u_1 = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1 - n^2}.$$

Приближения более высокого порядка по ε можно получить таким же путем, подставляя полученные выражения в правую часть (14.16) и вновь повторяя изложенную процедуру.

Метод Крылова — Боголюбова можно использовать для анализа движения математического маятника в среде с сопротивлением. Если момент сил сопротивления пропорционален скорости, то уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (19.16)$$

Здесь φ — угол отклонения от вертикали.

Возмущение в этом случае описывается функцией

$$\varepsilon f(\varphi, \dot{\varphi}) = \omega_0^2 (\varphi - \sin \varphi) - 2\delta\dot{\varphi}.$$

Подставляя в это выражение $\varphi = a \sin \psi$, $\dot{\varphi} = a\omega_0 \cos \psi$ и раскладывая возмущение в ряд Фурье, для коэффициентов разложения получим

$$g_1(a) = -2\delta a \omega_0, \quad h_1(a) = \omega_0^2 (a - 2J_1(a)),$$

$$h_n(a) = -2\omega_0^2 J_n(a),$$

где $n=2k+1$, $J_n(a)$ — функции Бесселя. Остальные коэффициенты равны нулю.

Уравнения (17.16) дают

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t},$$

$$\theta(a) = \theta_0 + \frac{\omega_0}{2\delta} \int_{a_0}^a da \frac{a - 2J_1(a)}{a^2}.$$

Для $a \ll 1$ поправка к фазе выражается через элементарные функции

$$\theta(a) = \theta_0 + \frac{\omega_0}{32\delta} (a^2 - a_0^2),$$

так что зависимость фазы от времени имеет вид

$$\bar{\psi}(t) = \omega_0 \left(t + \frac{a_0^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right).$$

Закон движения в виде Крылова — Боголюбова в первом порядке по параметру возмущения представлен выражением

$$\varphi(t) = a_0 e^{-\delta t} \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(a)}{k(k+1)} \sin(2k+1)\bar{\psi}.$$

Более подробно этот метод и приведенный пример изложены в оригинальной литературе *).

16.8. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ВКБ

Рассмотренные выше методы приближенного решения уравнений во многом основаны на разделении движений. Предполагается, что система в среднем движется медленно и при этом совершает быстрые колебания относительно усредненного движения. Если в задаче можно ограничиться линейным приближением для описания быстрых осцилляций, то уравнения для этих колебаний будут линейными дифференциальными уравнениями с коэффициентами, явно зависящими от времени. В общем случае решение таких уравнений очень сложно, но, используя различные временные масштабы, которые обычно имеются в задаче, решение можно упростить. Если коэффициенты линейного уравнения являются медленными функциями времени, то для построения решений удобно использовать метод Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна или сокращенно метод ВКБ. Развитие этого метода в основном связано с построением решений уравнений квантовой теории. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим простейшую модель — линейный осциллятор с частотой, явно зависящей от времени.

Уточним вначале понятия быстрого и медленного движений применительно к рассматриваемому случаю. Пусть ω — частота колебаний, определяющая масштаб быстрых процессов, характерное время которых $T = 2\pi/\omega$. Медленные изменения характеризуются масштабом T_0 , в течение которого частота быстрых колебаний существенно меняется, т. е.

$$\Delta\omega \approx \dot{\omega} T_0 \approx \omega.$$

Будем рассматривать системы, для которых выполняется условие

$$\frac{T}{T_0} \sim \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \varepsilon \ll 1. \quad (20.16)$$

Такие системы мы будем называть системами с медленно изменяющимися параметрами.

* См.: Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

Пусть линейный осциллятор, частота которого явно зависит от времени $\omega = \omega(t)$, удовлетворяет условию (20.16). Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = 0. \quad (21.16)$$

Учитывая медленное изменение частоты, будем искать решение уравнения в виде

$$x(t) = A(t) \sin \psi(t),$$

где $A(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда, а фаза определяется выражением

$$\psi(t) = \int \omega(t) dt.$$

Поскольку рассматриваемое уравнение линейно, решение его удобно искать в комплексной форме, а затем выделить действительную часть. Рассмотрим замену переменных

$$x = A(t) e^{i \int \omega(t) dt}. \quad (22.16)$$

Подстановка решения в виде (22.16) в уравнение (21.16) дает для амплитуды линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{A} + 2i\omega\dot{A} + i\dot{\omega}A = 0, \quad (23.16)$$

имеющего, как и исходное уравнение (21.16), два линейно независимых решения. В общем случае решение этого уравнения не проще исходного, однако его линейно независимые решения обладают замечательной особенностью — они характеризуются различными временными масштабами. Это позволяет легко организовать процедуру разделения движений. На временном интервале $T \ll \tau \ll T_0$ можно считать, что $\omega = \omega_0$, $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$ являются некоторыми константами. В этом случае решение можно представить в виде

$$A(t) = A_0 e^{i\lambda t}$$

и построить характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2i\omega_0\lambda - i\dot{\omega}_0 = 0,$$

решение которого, соответствующее корню $\lambda_1 = -2i\omega_0 \mp \omega_0 \varepsilon$, описывает быстрые движения, а $\lambda_2 = \mp \omega_0 \varepsilon / 2$ — медленные процессы.

Для выделения медленной части заменим уравнение второго порядка (23.16) уравнением первого порядка, полученного отбрасыванием старшей производной:

$$2\omega\dot{a}_0 + \dot{\omega}a_0 = 0.$$

Представим амплитуду A в виде ряда

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t).$$

Члены ряда, начиная с $n=1$, можно получить с помощью итеративной процедуры, полагая, что они удовлетворяют неоднородным уравнениям первого порядка

$$2\dot{\omega}\ddot{a}_n + \dot{\omega}a_n = i\ddot{a}_{n-1},$$

правая часть которых определена предыдущей итерацией. В этом случае ряд определяет только медленно меняющуюся функцию.

Решения приведенных уравнений с учетом начального условия $A(0) = A_0$ имеют вид

$$a_0(t) = A_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega(t)}},$$

$$a_n(t) = \frac{i}{2} a_0(t) \int_0^t \frac{dt}{\omega(t)} \frac{\ddot{a}_{n-1}(t)}{a_{n-1}(t)},$$

в частности первое приближение для рассматриваемой задачи дает

$$a_1(t) = \frac{i}{8} a_0(t) \int_0^t dt \frac{3\dot{\omega}^2 - 2\omega\ddot{\omega}}{\omega^3}.$$

Эти приближения пригодны для всех ω , удовлетворяющих условию $0 < \alpha \ll \omega(t)$.

В качестве примера применения метода ВКБ рассмотрим малые колебания математического маятника, длина которого линейно увеличивается:

$$l(t) = l_0 + v_0 t.$$

Изменение длины приводит к медленному росту амплитуды. В нулевом приближении этот рост описывается формулой

$$a_0(t) = A_0 \sqrt[4]{1 + v_0 t / l_0}.$$

Если одномерный осциллятор описывается функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t) q^2}{2},$$

где $\omega(t)$ — медленно меняющийся параметр, адиабатический инвариант системы

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{\mathcal{H}}{\omega}$$

сохраняется (приближенно).

Подставляя значение амплитуды, полученной с помощью ВКБ приближения, найдем зависимость функции Гамильтона от времени:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{m\omega(t)\omega_0 A_0^2}{2},$$

где $\omega(0) = \omega_0$. Отсюда следует, что $I = m\omega_0 A_0^2 / 2 = \text{const}$.

Таким образом, нулевое приближение ВКБ соответствует сохранению инварианта. Использование высших приближений метода ВКБ позволяет оценить точность сохранения адиабатического инварианта.

ДОПОЛНЕНИЕ.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ *)

Уравнения Лагранжа

Покажем, что основные интегральные принципы механики, обобщенные соответствующим образом, могут быть использованы при исследовании движений материальных тел в релятивистской области энергий. В частности, выведем уравнения движения релятивистской частицы во внешнем поле из принципа наименьшего действия. Запишем сначала действие в отсутствие внешнего поля:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt. \quad (D1)$$

Здесь \mathcal{L} — функция Лагранжа частицы. Можно показать, что релятивистское движение частицы (например, в декартовой системе координат) правильно описывается следующей функцией Лагранжа:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (D2)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ — компоненты скорости частицы, c — скорость света, m — масса частицы.

Раскладывая (D2) в ряд по отношению $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, т. е. переходя к пределу $c \rightarrow \infty$, получим с точностью до несущественной кон-

*) Здесь мы следуем книге: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1987.

станты правильное выражение функции Лагранжа в нерелятивистской области:

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (Д3)$$

Вектор

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \quad (Д4)$$

называют импульсом частицы. Его явный вид

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Очевидно, при $v \ll c$ это выражение переходит в нерелятивистское. Энергией частицы называют величину

$$E = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathcal{L}. \quad (Д5)$$

Так же определяется обобщенная энергия частицы в нерелятивистской механике, которая в случае стационарных связей, как известно, совпадает с механической энергией. Подставляя (Д2) и (Д4) в (Д5), получим

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (Д6)$$

При $v=0$ $E_0=mc^2$ (E_0 — энергия покоя).

При малых скоростях ($v \ll c$) с точностью до членов порядка v^2 имеем

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е. разность $E - E_0$ равна кинетической энергии частицы.

Обобщенная энергия, выраженная через импульс, есть функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (Д7)$$

Это выражение при $p \ll mc$ приближенно равно

$$\mathcal{H} \cong mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

т. е. за вычетом E_0 это нерелятивистское выражение гамильтониана. Нетрудно видеть, что имеется следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью частицы:

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \quad (Д8)$$

Действие для частицы, находящейся во внешнем электромагнитном поле, складывается из двух частей: из действия (Д1) и из члена, который описывает взаимодействие частицы с полем. В релятивистской механике функция Лагранжа заряда e массы m во внешнем электромагнитном поле, описываемом векторным потенциалом A и скалярным потенциалом φ , имеет вид

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\varphi. \quad (\text{Д9})$$

Мы видим, что структура этой функции точно соответствует структуре лагранжиана заряда во внешнем поле в нерелятивистской механике. Действие S записывается в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\varphi \right) dt. \quad (\text{Д10})$$

Обобщенный импульс заряженной частицы в электромагнитном поле получается дифференцированным (Д9) по \mathbf{v} :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (\text{Д11})$$

Подставляя (Д11) в (Д9), найдем обобщенную энергию частицы в поле:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + e\varphi \quad (\text{Д12})$$

и далее, выражая (Д12) через обобщенный импульс, получим функцию Гамильтона заряда во внешнем электромагнитном поле

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi, \quad (\text{Д13})$$

или

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (\text{Д14})$$

Согласно принципу наименьшего действия (см. гл. 7) интеграл (Д10) на реальной траектории заряда должен достигать экстремума. Поэтому $\delta S = 0$, и мы получаем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (\text{Д15})$$

Здесь \mathcal{L} определена выражением (Д9). Правая часть (Д15) преобразовывается так же, как и в п. 7.6. Учитывая это, полу-

чаем следующее векторное уравнение движения заряда в электромагнитном поле:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (D16)$$

где \mathbf{p} — импульс частицы, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ — напряженность электрического, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ — напряженность магнитного поля. Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, уравнения движения (D16) переходят в уравнения движения нерелятивистской механики:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (D17)$$

Нетрудно видеть, что в релятивистской механике, в полной аналогии с нерелятивистским, имеет место уравнение

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (D18)$$

где $E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Изменение кинетической энергии частицы со временем равно произведенной полем над частицей работе в единицу времени. Заметим, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна скорости частицы.

Выражение (D18) представимо также в виде

$$dE_{\text{кин}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (D19)$$

и если сила \mathbf{F} имеет потенциал, не зависящий от времени, т. е.

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(x, y, z),$$

то из (D19) получим

$$dE_{\text{кин}} = -dU, \quad d(E_{\text{кин}} + U) = 0, \quad (D20)$$

что дает закон сохранения энергии точки в релятивистской механике

$$E_{\text{кин}}(t) + U(t) = E_{\text{кин}}(t_0) + U(t_0).$$

Таким образом, формально введя функцию Лагранжа (D2) на основании принципа наименьшего действия, можно получить динамические уравнения релятивистской механики. Здесь возникает интересный вопрос. Функция Лагранжа частицы массы m в отсутствие внешних полей в какой-то инерциальной системе отсчета S имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}. \quad (D21)$$

Она удовлетворяет принципу относительности Галилея. Действительно, построим функцию Лагранжа этой же частицы в системе отсчета S' , движущейся относительно S с постоянной скоростью $-\mathbf{V}$. Координаты \mathbf{r} и \mathbf{r}' точки в этих двух системах отсчета связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{V}t,$$

но ход времени в S и S' одинаков: $t' = t$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} = \frac{m}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) + \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 = \\ &= \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \left(m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) + \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 t \right). \end{aligned} \quad (\text{Д22})$$

Из (Д22) видно, что второй член в нижней строчке является полной производной по времени от некоторой функции координат и времени и поэтому согласно свойству (64.7) может быть опущен. Это означает, что действие в нерелятивистской механике инвариантно относительно преобразований Галилея.

Функция Лагранжа свободной частицы в релятивистской механике принципу относительности Галилея не удовлетворяет. Но тогда законы движения, полученные на основании (Д15), не будут одинаковыми в инерциальных системах отсчета, связанных преобразованием Галилея. С точки зрения физики представляется правильным, что интеграл (Д1) для свободной частицы не должен зависеть от выбора инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантным относительно преобразований между инерциальными системами отсчета. Действие (Д1) можно сделать инвариантным, если допустить, что наряду с координатами нужно преобразовывать и время, причем $t' = t'(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$, где \mathbf{V} — относительная скорость систем отсчета S и S' . При этом полезно использовать понятие четырехмерного пространства, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время.

Рассмотрим системы отсчета S и S' , считая для простоты, что \mathbf{V} имеет компоненты $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$. Нетрудно доказать, что интеграл (Д1) будет инвариантным относительно следующих преобразований координат и времени (штрихованные величины относятся к системе отсчета S'):

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{Д23})$$

Это формулы преобразования Лоренца. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (\text{Д24})$$

Четыре величины ct , x , y , z называют координатами события, а величину

$$S_{1,2} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (\text{Д25})$$

— интервалом между событиями, описываемыми координатами ct_2 , x_2 , y_2 , z_2 и ct_1 , x_1 , y_1 , z_1 . Из (Д24) следует, что интервал между двумя событиями инвариантен относительно преобразований Лоренца. Если два события бесконечно близки друг к другу, то для интервала между ними имеем (в системе S)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{Д26})$$

и (в системе S')

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (\text{Д27})$$

Из свойства (Д24) следует, что

$$dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}, \quad (\text{Д28})$$

где

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad v'^2 = \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2.$$

Соотношение (Д28) доказывает инвариантность действия (Д1) с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

относительно преобразований Лоренца.

Совокупность координат некоторого события (ct, x, y, z) рассматривается как совокупность компонент четырехмерного радиуса-вектора в четырехмерном пространстве. Его компоненты принято обозначать через x^i , где индекс принимает значения 0, 1, 2, 3. При этом $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Квадрат «длины» этого вектора (который называют также 4-радиусом-вектором) определяется выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Очевидно, квадрат «длины» инвариантен относительно преобразований Лоренца. Совокупность четырех величин, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиуса-вектора x^i , называют 4-вектором. Различают 4-векторы с верхним индексом A^i , которые называют контравариантными, и с нижним индексом A_i , называемые ковариантными компонентами 4-вектора.

Поднимание и опускание индексов 4-векторов можно производить с помощью так называемого метрического тензора

$$\eta^{ik} = \eta_{ih} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Тогда $A^i = \sum_{k=0}^3 \eta^{ik} A_k$, $A_i = \sum_{k=0}^3 \eta_{ik} A^k$. По дважды повторяющемуся индексу согласно принятому правилу подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. Квадрат 4-вектора определяется любой из следующих форм:

$$\begin{aligned} (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 &= A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = \\ &= \eta_{ih} A^i A^h = \eta^{ik} A_i A_k. \end{aligned}$$

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 — пространственными; 4-векторы с положительным квадратом называют времениподобными, с отрицательным — пространственноподобными, с квадратом, равным нулю, — нулевыми, или изотропными. Можно ввести четырехмерные тензоры 2-го и более высоких рангов.

Четырехмерной скоростью частицы является 4-вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

Его компоненты найдем, замечая, что

$$ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (\text{D29})$$

где \mathbf{v} — обычная трехмерная скорость частицы, т. е. $\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$. Следовательно,

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (\text{D30})$$

4-Скорость u^i является безразмерной величиной. Ее квадрат равен единице, так как $ds^2 = dx_i dx^i$ и $u^i u_i = 1$.

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным телом, называют собственным временем этого тела. Поэтому формула

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

выражает собственное время ds/c через время в системе отсчета S , относительно которой рассматривается движение тела.

Введенные выше энергия и трехмерный импульс образуют контравариантный 4-вектор импульса (или просто 4-импульс)

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right),$$

который для свободной частицы также можно записать в виде

$$p^i = mc u^i. \quad (\text{Д31})$$

Из (Д31) легко получить

$$p_i p^i = m^2 c^2. \quad (\text{Д32})$$

По аналогии с обычным определением силы можно определить 4-вектор силы как производную

$$f^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}. \quad (\text{Д33})$$

Выразив компоненты f^i через трехмерный вектор силы $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, получим

$$f^i = \left\{ \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{F}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}.$$

Нетрудно проверить, что $f^i u_i = 0$ и что временная компонента силы связана с работой трехмерной силы.

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля образуют 4-вектор-потенциал

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}).$$

И наконец, вводя 4-тензор электромагнитного поля F_{ik} согласно

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (\text{Д34})$$

запишем уравнения движения заряда e , массы m (Д16), (Д18) в релятивистско-ковариантной форме:

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k, \quad (\text{Д35})$$

или

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (\text{Д36})$$

Это краткое введение в теорию 4-векторов нам понадобилось для того, чтобы ниже дать решения некоторых важных задач релятивистской механики точки.

Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби

Уравнение Гамильтона — Якоби для свободной частицы в релятивистской механике получается подстановкой в (Д32) вместо p_i производных $-\frac{\partial S}{\partial x^i}$:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x_i} \equiv \eta^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2. \quad (\text{Д37})$$

Записав сумму по i, k в явном виде, получим

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2, \quad (\text{Д38})$$

где S — функция координат и времени. Для получения релятивистского уравнения Гамильтона — Якоби для частицы в заданном электромагнитном поле нужно использовать (Д14), подставляя в него вместо \mathcal{H} производную $-\frac{\partial S}{\partial t}$, а вместо обобщенного импульса $\mathbf{P} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$. В результате получим

$$\left(\text{grad } S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (\text{Д39})$$

Нерелятивистское уравнение Гамильтона — Якоби можно получить из (Д39) в некотором пределе. При этом нужно помнить, что в релятивистской механике энергия частицы содержит нулевую энергию $E_0 = mc^2$, которой нет в нерелятивистском случае. Но так как при получении релятивистского уравнения мы использовали замену $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, ясно, что при переходе к пределу нерелятивистской механики надо вместо S ввести новое действие \tilde{S} , так чтобы член с нулевой энергией исчезал в пределе $c \rightarrow \infty$. Вводя

$$S = \tilde{S} - mc^2 t$$

и подставляя это выражение в (Д38), получим

$$\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0, \quad (\text{Д40})$$

переходящее в уравнение Гамильтона — Якоби в нерелятивистской механике в пределе $c \rightarrow \infty$.

Движение заряда в кулоновском поле

Рассмотрим релятивистскую задачу о движении заряда e массы m в кулоновском поле неподвижного центра, заряд которого равен e' . Как и выше, при решении этой за-

дачи в рамках классической нерелятивистской механики (см. п. 5.4), рассмотрим движение частицы в центральном поле $U = \alpha/r$. Запишем релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби, учитывая тот факт, что движение заряда происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр поля. Это, как и в нерелятивистском случае, следует из закона сохранения момента импульса заряда $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = L_0$.

Выберем систему координат с осью $Oz \parallel L_0$, а на плоскости xOy введем полярные координаты r, φ . Тогда релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right) - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (\text{Д41})$$

$$\alpha = ee'.$$

Решение (Д41) ищем в виде

$$S = -Et + L_0\varphi + S_r(r), \quad (\text{Д42})$$

где E и L_0 — постоянные энергия и момент импульса частицы. Подставляя (Д42) в (Д41), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{L_0^2}{r^2} - m^2 c^2. \quad (\text{Д43})$$

Таким образом,

$$S = -Et + L_0\varphi + \int dr \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{L_0^2}{r^2} - m^2 c^2}. \quad (\text{Д44})$$

Закон движения $r(t)$ определяется уравнением $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta_1$, а траектория $r(\varphi)$ — уравнением $\frac{\partial S}{\partial L_0} = \beta_2$. Прежде чем найти траекторию, запишем уравнения движения заряда в релятивистской форме. 4-импульс частицы

$$p^i = m \frac{dx^i}{ds} = \eta^{ik} p_k = -\eta^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^k}. \quad (\text{Д45})$$

Правую сторону этого равенства вычислим с помощью (Д44):

$$m \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial S}{\partial ct} = \frac{E}{c}, \quad (\text{Д46})$$

$$m \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{L_0}{r^2}, \quad (\text{Д47})$$

$$m^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{L_0^2}{r^2} - m^2 c^2. \quad (\text{Д48})$$

Здесь мы учли, что в цилиндрических координатах элементы метрического тензора имеют вид $\eta^{ik} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -1)$. Как и в нерелятивистском случае, классически доступные области движения можно определить из (Д48). Так как должно выполняться условие $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \geq 0$, движение может происходить в областях, где

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \frac{2E\alpha}{c^2 r} + \frac{\frac{\alpha^2}{c^2} - L_0^2}{r^2} \geq 0. \quad (\text{Д49})$$

Корни этого уравнения

$$r_{1,2} = \frac{\alpha E}{c^2 K_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha E}{c^2 K_0}\right)^2 - \frac{\beta}{K_0}}, \quad (\text{Д50})$$

где

$$K_0 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{c^2} - L_0^2.$$

Если $\alpha > 0$, то оба корня при $E > 0$ положительные. Классически доступная область движения определяется неравенством

$$(r - r_1)(r - r_2) \geq 0, \quad (\text{Д51})$$

откуда следует, что область $r > r_1$ классически доступна, а в область $r_1 > r > r_2$ частица попасть не может. Поэтому, если $\alpha > 0$, частица не может сколь угодно близко подойти к центру поля и тем более «упасть» на него.

Если $\alpha < 0$ (притяжение), различают два случая: 1) $\beta < 0$, $L_0 > \frac{|\alpha|}{c}$; 2) $\beta > 0$, $L_0 < \frac{|\alpha|}{c}$. В первом случае при $E > 0$ $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, поэтому при $r \geq 0$ неравенство (Д51) удовлетворяется в области $r > r_1$ и, значит, падение на центр невозможно. Однако если $\beta > 0$, то при $E > 0$ оба корня отрицательны, неравенство (Д51) может быть удовлетворено всюду в области $r \geq 0$, и падение частицы на центр поля становится возможным.

Эта ситуация отлична от ситуации в нерелятивистском случае, когда падение частицы с $L_0 \neq 0$ на центр поля невозможно.

Найдем теперь траекторию заряженной частицы, используя уравнение $\frac{\partial S}{\partial L_0} = \beta_2$ и (Д44):

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{K_0 \pm \frac{2|\alpha|E}{c^2 r} + \frac{\beta}{r^2}}} + \varphi_0. \quad (\text{Д52})$$

Здесь знак «+» соответствует притяжению ($\alpha < 0$), знак «-» соответствует отталкиванию ($\alpha > 0$), и мы положили $\beta_2 = \varphi_0$. По-

лагая $x = \frac{\sqrt{\beta}}{r} \pm \frac{|\alpha| E}{\sqrt{\beta} c^2}$ ($\beta > 0$, $\alpha^2 > L_0^2 c^2$), преобразуем и затем вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \varphi &= \mp \frac{L_0}{\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{\sqrt{K_0 - \frac{\alpha^2 E^2}{\beta c^4} + x^2}} + \varphi_0 = \\ &= \mp \frac{L_0}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arccch} \left(\frac{x}{\sqrt{K_0 - \frac{\alpha^2 E^2}{\beta c^4}}} \right) + \varphi_0. \end{aligned}$$

Обращая формулу, находим

$$(\alpha^2 - c^2 L_0^2) \frac{1}{r} = \pm c \sqrt{(L_0 E)^2 + m^2 c^4 \beta} \operatorname{ch} \left[(\varphi - \varphi_0) \frac{\sqrt{\beta}}{L_0} \right] \pm E |\alpha|. \quad (\text{Д53})$$

Здесь верхний знак соответствует случаю $\alpha < 0$, нижний — $\alpha > 0$. Пусть теперь $\beta < 0$, $L_0^2 c^2 > \alpha^2$. Полагая

$$x = \frac{\sqrt{\beta}}{r} \mp \frac{|\alpha| E}{c^2 \sqrt{\beta}}$$

и вычисляя интеграл, получим в результате

$$(c^2 L_0^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = -c \sqrt{(L_0 E)^2 - m^2 c^4 |\beta|} \cos \frac{\sqrt{\beta}}{L_0} (\varphi - \varphi_0) \mp E |\alpha|. \quad (\text{Д54})$$

Здесь выбор знака перед корнем нужно согласовать со знаками φ_0 и $r'_0(\varphi_0)$. Третий случай возникает, если начальные условия таковы, что $\beta = 0$. Тогда

$$\varphi = - \frac{L_0 c^2}{2 |\alpha| E} \int \frac{dx}{\sqrt{K_0 \pm x}} + \varphi_0, \quad (\text{Д55})$$

где $x = \frac{2 |\alpha| E}{c^2 r}$. Тривиальные вычисления приводят к результату

$$\frac{2 |\alpha| E}{r} = E^2 - m^2 c^4 - \left(\frac{\alpha E}{L_0 c} \right)^2 (\varphi - \varphi_0)^2. \quad (\text{Д56})$$

Рассмотрим траекторию, задаваемую формулой (Д54). Очевидно, r может обращаться в бесконечность только тогда, когда правая часть (Д54) будет обращаться в нуль. Если

$$E \alpha > c \sqrt{(E L_0)^2 - m^2 c^4 |\beta|},$$

то r конечно. Возводя это неравенство в квадрат, получим

$$0 > (E^2 - m^2 c^4) \left(L_0^2 - \frac{\alpha^2}{c^2} \right). \quad (Д57)$$

Отсюда следует, что при $L_0 > \frac{|\alpha|}{c}$ и $E < mc^2$ движение финитно (при $\alpha < 0$); если $E > mc^2$, то движение инфинитно. Однако в отличие от нерелятивистской механики, где траектории представляют собой эллипсы, траектории релятивистского финитного движения никогда не замкнуты. Как видно из (Д54), вместо эллипсов траектории являются незамкнутыми розетками.

Угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями «перигелия» (точки $r=r_{\min}$) равно

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\pi L_0}{\sqrt{|\beta|}}.$$

Траектории (Д53) и (Д56) при $\alpha < 0$ представляют собой *спирали*. Из (Д53) и (Д56) видно, что при $\varphi \rightarrow \infty$ $r \rightarrow 0$, т. е. происходит падение заряда на центр поля. Так как при $r \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \infty$, это значит, что частица, падая на центр поля, делает вокруг него бесконечное число оборотов. Тем не менее время, в течение которого заряд, находившийся вначале на конечном расстоянии от центра поля, падает на центр, конечно. Время падения с расстояния R определяется интегралом

$$t = - \int_R^0 \frac{\frac{1}{c^2} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right) dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{L_0^2}{r^2} - m^2 c^2}}. \quad (Д58)$$

Нетрудно доказать, что этот интеграл сходится на верхнем пределе. Приведем здесь также точный результат для случая $\alpha < 0$:

$$t = - \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{E}{c^2} \sqrt{K_0 r^2 + \frac{2|\alpha|E}{c^2} r + \beta} \right\}_R^0 - \\ - \frac{|\alpha| m^2}{\sqrt{K_0}} \ln \left(2 \sqrt{K_0} \sqrt{K_0 r^2 + \frac{2|\alpha|E}{c^2} r + \beta} + \right. \\ \left. + 2K_0 r + \frac{2|\alpha|E}{c^2} \right) \Big|_R^0.$$

Здесь $K_0 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 > 0$, $\beta \approx \frac{\alpha^2}{c^2} - L_0^2 \geq 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В «СПИРАЛЬНОМ ОНДУЛЯТОРЕ»

Рассмотрим магнитное поле, вектор напряженности которого изменяется по закону

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_1 H_0 \sin az - \mathbf{e}_2 H_0 \cos az. \quad (\text{П1})$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — орты декартовой системы координат. Такое поле создается на оси ондулятора, конструкция которого представляет собой два одинаковых соосных соленоида с большим шагом намотки l с противоположным направлением токов и смещенных между собой на половину шага намотки.

Уравнения движения электрона в поле (П1) в выбранной нами системе координат имеют вид ($e = -e_0, e_0 > 0$)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0 \dot{z} \cos az, \\ \ddot{y} &= -\omega_0 \dot{z} \sin az, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

$$\ddot{z} = \omega_0 (\dot{x} \cos az + \dot{y} \sin az),$$

$$\omega_0 = \frac{e_0 c H_0}{E}.$$

Здесь точкой мы обозначили производную по времени t , E — энергия электрона, являющаяся, очевидно, интегралом движения. Пусть начальные значения компонент радиуса-вектора и скорость электрона заданы в виде

$$\begin{aligned} x(0) &= R, \quad y(0) = z(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = c\beta_0, \quad \dot{z}(0) = c\bar{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Интегрируя (П2), получим первые интегралы движения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -c\beta_0 \sin az, \\ \dot{y} &= c\beta_0 \cos az, \\ \dot{z} &= c\bar{\beta}, \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

причем

$$c\beta_0 = \frac{\omega_0}{a} = \frac{e_0 c H_0 l}{2\pi E}. \quad (\text{П5})$$

Введя далее

$$\Omega = ac\bar{\beta}, \quad (\text{П6})$$

для радиуса-вектора получим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}_1 R \cos \Omega t + \mathbf{e}_2 R \sin \Omega t + \mathbf{e}_3 c\bar{\beta} t. \quad (\text{П7})$$

Отметим, что также (т. е. по закону (П7)) движется электрон в поле плоской электромагнитной волны, поляризованной по кругу, в постоянном однородном магнитном поле, а также в некоторых других конфигурациях электромагнитных полей при заданных (не произвольных) начальных условиях.

2. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Постоянное однородное магнитное поле, вектор напряженности которого направлен вдоль оси OZ , можно определить с помощью 4-векторов потенциалов

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_1 = Hy \quad (\text{П8})$$

или

$$A'_0 = A'_3 = 0, \quad A'_1 = \frac{1}{2} Hy, \quad A'_2 = -\frac{1}{2} Hx. \quad (\text{П9})$$

Здесь A_0, A'_0 — временные, а A, A' — пространственные компоненты 4-векторов. Декартовы координаты точек x^μ перечисляем в обычном порядке:

$$x^\mu = (ct, x, y, z). \quad (\text{П10})$$

В этой системе координат метрический тензор

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{П11})$$

Нетрудно показать, что 4-потенциалы (П8) и (П9) отличаются калибровкой.

Уравнения Лоренца для электрона ($e = -e_0, e_0 > 0$) в декартовой системе координат запишем в виде

$$m\ddot{t} = 0, \quad m\ddot{x} = -\frac{e_0}{c} Hy, \quad m\ddot{y} = \frac{e_0}{c} Hx, \quad m\ddot{z} = 0, \quad (\text{П12})$$

где точкой обозначено дифференцирование по собственному времени τ . Из (П12) следует общее решение:

$$m\tau = \frac{E}{c^2} \tau, \quad x = R \cos \varphi + x_0, \quad y = R \sin \varphi + y_0, \quad (\text{П13})$$

$$mz = -p_3 (\tau - \tau_0), \quad \varphi = \Omega_{II} \tau - \varphi_0, \quad \Omega_{II} = \frac{eH}{mc}.$$

Здесь $E, R, x_0, y_0, \varphi_0, \tau_0, p_3$ — постоянные интегрирования (интегралы движения). Эти интегралы движения не все являются независимыми; из (П12) вытекает, что

$$\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{p_3}{c}\right)^2 + \left(\frac{e_0 HR}{c^2}\right)^2. \quad (\text{П14})$$

Полагая $x_0, y_0, \varphi_0, \tau_0$ равными нулю и выражая t через τ , получим закон движения электрона в следующем виде:

$$r(t) = e_1 R \cos \Omega t + e_2 R \sin \Omega t + e_3 c \beta_{\parallel} t, \quad (\text{П15})$$

где

$$\Omega = \frac{e_0 H c}{E}, \quad \beta_{\parallel} = \frac{c p_3}{E}.$$

Характер движения и смысл интегралов движения ясны. Электрон вращается по окружности радиуса R с частотой Ω в плоскости XOY и движется вдоль оси OZ с постоянной скоростью

$$c \beta_{\parallel} = \frac{c^2 p_3}{E}, \quad (\text{П16})$$

где E — энергия заряда, p_3 — проекция импульса электрона на направление магнитного поля (т. е. на ось OZ).

3. ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении постоянного единичного вектора \mathbf{n} , можно определить соотношениями

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\varphi), \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \vec{\mathcal{E}}], \quad (\mathbf{n}, \vec{\mathcal{E}}) = 0, \quad (\text{П17})$$

$$\varphi = n_{\mu} x^{\mu} = x^0 - (\mathbf{n} \mathbf{r}).$$

Здесь $n^{\mu} = (1, \mathbf{n})$ — изотропный вектор, $n_{\mu} n^{\mu} = 0$. Вектор-потенциал поля (П17) выберем в виде

$$\mathbf{A}^{\mu} = (0, \mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\varphi), \quad (\mathbf{n} \mathbf{A}) = 0, \quad \vec{\mathcal{E}} = -\mathbf{A}' \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (\text{П18})$$

Уравнения движения электрона в декартовой системе координат записываются в виде

$$m c \dot{t} = -\frac{e_0}{c} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \dot{\mathbf{r}}), \quad m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e_0 \vec{\mathcal{E}}}{c} \dot{\varphi} - \mathbf{n} \left(\frac{e (\vec{\mathcal{E}} \dot{\mathbf{r}})}{c} \right). \quad (\text{П19})$$

Умножим правую и левую части векторного уравнения (П19) скалярно на \mathbf{n} и вычтем полученный результат из первого уравнения (П19). Тогда найдем

$$m(\dot{c}\dot{t} - \mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}) = m\ddot{\varphi} = 0,$$

или

$$m(ct - \mathbf{n}\mathbf{r}) = \lambda, \quad (\text{П20})$$

где λ — постоянная (интеграл движения). Интегрированием (П20) находим связь

$$m(ct - \mathbf{n}\mathbf{r}) = \lambda(\tau - \tau_0). \quad (\text{П21})$$

Здесь τ_0 — постоянная. Переходя с помощью (П21) в (П19) от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ и затем интегрируя (П19), получим

$$\mathbf{r} = \lambda^{-1} \int \boldsymbol{\pi}(\varphi) d\varphi + \mathbf{n}(2\lambda^2)^{-1} \int (m^2c^2 + \pi^2 - \lambda^2) d\varphi + \mathbf{r}_0,$$

$$ct = (2\lambda^2)^{-1} \int (m^2c^2 + \pi^2 + \lambda^2) d\varphi,$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A}(\varphi), \quad (\text{П22})$$

$$(\mathbf{n}\mathbf{p}) = (\mathbf{n}\boldsymbol{\pi}) = 0.$$

Найденное в параметрической форме (φ -параметр) решение уравнений (П19) зависит от шести интегралов движения λ , \mathbf{p} (двумерный вектор), \mathbf{r}_0 .

Общий характер движения электрона исследуем, предполагая, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \int_0^L \mathbf{A}(\varphi) d\varphi = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \int_0^L \mathbf{A}^2(\varphi) d\varphi = \overline{A^2} < \infty. \quad (\text{П23})$$

Введем среднюю скорость электрона согласно

$$\begin{aligned} c\beta_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r}}{t} = \frac{2\lambda\mathbf{p} + \mathbf{n}[m^2c^2(1 + \xi^2) + \rho^2 - \lambda^2]}{m^2c^2(1 + \xi^2) + \rho^2 + \lambda^2}, \\ \xi^2 &= \frac{e_0^2 \overline{A^2}}{m^2c^4}. \end{aligned} \quad (\text{П24})$$

Тогда из (П22) следует, что при выполнении (П23) заряд осциллирует около некоторого среднего положения и дрейфует со скоростью $c\beta_0$. Если $\mathbf{p} = 0$ и $\lambda^2 = m^2c^2(1 + \xi^2)$, то $\beta_0 = 0$. Интеграл движения λ в выбранной нами системе отсчета, в которой вектор-потенциал поля имеет вид (П18), имеет ясный физический смысл. Он выражается в виде разности энергии электрона, де-

ленной на c , и проекции обобщенного импульса на направление n :

$$\lambda = \frac{E}{c} - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}). \quad (\text{П25})$$

Мы будем использовать также безразмерную величину

$$\alpha = \frac{\lambda}{mc} = \frac{E - c(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})}{mc^2}. \quad (\text{П25}')$$

Из (П22) найдем энергию электрона

$$E = c \frac{m^2 c^2 + p^2 + \lambda^2}{2\lambda}, \quad (\text{П26})$$

откуда следует выражение для средней энергии

$$\bar{E} = c \frac{\lambda^2 + p^2 + m^2 c^2 (1 + \xi^2)}{2\lambda}. \quad (\text{П27})$$

В заключение выпишем решения (П22) в конкретном случае, когда вектор-потенциал $\mathbf{A}(\varphi)$ (П18) описывает циркулярно поляризованную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси OZ . Тогда

$$A_1 = -\frac{cE_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad A_2 = g \frac{cE_0}{\omega_0} \cos \omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad A_3 = 0, \quad (\text{П28})$$

где величина g характеризует правую ($g=+1$) или левую ($g=-1$) поляризацию волны, E_0 — амплитуда напряженности электрического поля, ω_0 — частота волны. Полагая $\mathbf{p}=0$ и $\mathbf{r}_0=0$, из (П22) нетрудно получить закон движения электрона в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}_1 R \cos \Omega t + \mathbf{e}_2 g R \sin \Omega t + \mathbf{e}_3 v_{\parallel} t, \quad (\text{П29})$$

где $\Omega = \omega_0 (1 - \beta_{\parallel})$; $R = \frac{c\xi}{\alpha\omega_0}$,

$$v_{\parallel} = c \frac{1 + \xi^2 - \alpha^2}{1 + \xi^2 + \alpha^2} \approx c\beta_{\parallel}. \quad (\text{П30})$$

Из (П29) видно, что направление вращения электрона совпадает с направлением вращения вектора поляризации электромагнитной волны: если $g=+1$, то траектория электрона представляет собой правую спираль, если $g=-1$, то левую.

Нелишнее отметить, что если $\mathbf{p}=0$, то при движении электрона в поле (П28) сохраняется энергия, которую в данном случае можно представить в виде

$$E = \frac{mc^2 (\sqrt{1 + \xi^2})}{\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}}. \quad (\text{П31})$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автономная система 54, 261
 адиабатическая инвариантность 186, 326
 аксиальный вектор 11
 активные переменные 152
 амплитуда 118, 119, 129, 139, 251, 321
 аналитические связи 86
 ансамбль Гиббса 169
 аперриодическое затухание 134
 апсидальный вектор 49
 асимптотическое приближение 238
 асимптотические ряды 239
 аттрактор 54, 265, 291, 292
 — Фейгенбаума 296
- Барьер** потенциальный 38, 42
 бассейн аттрактора 265
 биекта 126
 Бине формулы 15
 бинормаль 19
 бифуркация 270—272, 276
 — удвоения цикла 289, 290, 294
- Вектор** аксиальный 11
 — апсидальный 49
 — волновой 123
 — главной нормали 18
 — изотропный 50
 кинетического момента 215
 — Лапласа 58
 — Рунге—Ленца 58
 вириал Клаузиуса 70
 вириала теорема 69—71
 виртуальная работа 89
 виртуальное перемещение 87, 88
 возможное перемещение 88, 110
 возмущение 113, 238
 возмущенное решение 238
 волна бегущая 123
 — стоячая 124
 вращение 181
 — ось 198
 — чистое 195
 времени однородность 27
 вырожденные движения 60
 — частот 124
 вынужденные колебания 130, 135
 вынуждающая сила 131
- Галилея—Ньютона** закон инерции 22
 Гамильтона главная функция 174
 — принцип (модифицированный) 153, 160
 — уравнения 150, 183
 — функция 151, 189, 325, 327, 328
 гамильтоnian 151, 180, 185
- Гамильтона—Остроградского принцип 89
 Гамильтона—Якоби метод 176
 — уравнение 174, 180, 182, 185, 189, 192, 334
 гармонические колебания 40
 осцилляторы 39, 40, 50, 129
 гелиоцентрическая система отсчета 23
 геоцентрическая система отсчета 23
 глобальная инерциальная система отсчета 23
 Гиббса ансамбль 169
 гироскопическая сила 36, 100, 136, 143
 — стабилизация 141—142
 главные моменты инерции 217
 — оси инерции 217
 голономные связи 86
 гомоклиническая структура 286
 грубость 270
 группа преобразований 26
 — (движений) Галилея 26
- Д'Аламбера** принцип 90—93
 движение возмущенное 113
 — одномерное 37
 — финитное 13, 38, 48, 138
 — инфинитное 38, 47, 50
 — невозмущенное 113
 — неустойчивое 53
 — условно-периодическое 133
 действительное перемещение 88
 декремент логарифмический 134
 диаграмма скоростей 78
 — импульсов 78, 79
 динамическая система 258
 — хаос 297
 диссипативные силы 36
 — функция Рэлея 145, 147
 Дуффинга уравнение 316, 318
- Евклидово** пространство 25, 26
 естественные координаты 17
 — трехгранник 17
- Задача** двух тел 71, 78
 — механики прямая 29
 — — обратная (основная) 29, 32
 — рассеяния 75, 80
 закон движения 72, 343
 — инерции 22
 — изменения импульса точки 33
 — — — системы 63, 91
 — — момента импульса точки 33
 — — — системы 91
 — — энергии точки 33, 36, 91

- — — системы 91
- Шютона 22—24
- сохранения импульса системы 63, 91, 193
- момента импульса системы 91, 194
- энергии 35, 61, 91, 329
- замкнутая система 64
- затухание аperiodическое 134
- колебаний 133
- захвата сечение 84, 85
- Идеальные связи** 88, 89
- изображающая точка 113, 130
- изолированный минимум 114
- предельный цикл 265
- изолированная система 64, 76
- изотропность пространства 27, 194
- изотропный гармонический осциллятор 50
- изохронность 119, 133
- импульс канонический 101, 152, 182
- обобщенный 101, 150
- точки 22, 33, 327
- системы 63
- индекс Пуанкаре 277—279
- инерциальная система отсчета 22, 24
- инерции закон 22
- принцип 22
- эллипсоид 218
- инвариант интегральный Пуанкаре 166
- канонических преобразований 165
- инвариантное множество 284—285
- распределение 297
- инвариантность 330, 331
- ip-состояние 75, 84
- интеграл движения 30, 31, 34, 37, 42, 46, 341—342
- момента 46
- общий 175
- полный 175, 180
- уравнений Эйлера 225
- энергии 46, 235, 246
- интегральный принцип 106
- интегрируемые задачи 299
- интервал 331
- инфинитное движение 38, 47, 50
- Капицы метод** 302
- канонические импульсы 101, 152, 182
- преобразования 159, 163—165, 168, 169
- уравнения 150
- касание 18
- каскад бифуркаций 291
- каскады 260
- квантовое туннелирование 39
- кинетический момент системы 64, 66
- — энергия 66, 93
- — твердого тела 216
- Клаузюса вириал 70
- ковариантность уравнений Лагранжа 109
- колебания вынужденные 130, 135
- гармонические 40
- главные 120
- затухающие 132
- нормальные 120, 124
- установившиеся 135
- количество движения 22
- коммутационные соотношения 156
- компоненты вектора
- ковариантные 331
- контравариантные 331
- консервативные силы 68
- системы 67
- константа Фейгенбаума 296
- конфигурационное пространство 106
- траектория 106, 107
- координатные линии 13
- оси 13
- поверхности 13
- координаты естественные 17
- криволинейные 94
- натуральные 19
- нормальные 120, 124, 126, 146
- обобщенные 91
- события 331
- циклические 101, 183
- цилиндрические 12
- Корнюлиса формула 210
- корнюлисово ускорение 210
- кривизна кривой 19
- радиус 18
- критерий Сильвестра 117
- круг кривизны 18
- кручение кривой 19, 20
- кручения радиус 19
- Лабораторная система** (л-система) 75
- Лагранжа принцип** 89
- теорема 114
- треугольные точки 143
- уравнения 90, 94, 105, 107, 125, 128, 129, 131, 328
- функция 94, 105, 117, 125, 128, 129, 131, 326, 328
- лагранжиан 94
- Ламе параметры 95
- Ламерея лестница 267, 292
- Лармора теорема 138
- Лапласа вектор 58, 59
- Лежандра преобразования 151, 161, 163
- либрация 181
- линия узлов 200
- Лиувилля теорема 170
- лобовой удар 80
- логарифмический декремент 134

- Лоренца 4-вектор 64
 — уравнение 340
 Ляпунова показатель 296, 297
 — прямой метод 114
 — теорема 115
 — функция 115
 Масса приведенная 72, 82
 — системы 64
 материальной симметрии ось 219
 — — плоскость 219
 матрица поворотов 196, 200
 — Якоби 282
 мгновенный центр вращения 207
 метод ВКБ 323
 — Гамильтона—Якоби 176
 — гармонического баланса 306, 311
 — Капицы 301, 302
 — последовательных приближений 315
 — разделения движений 306
 — — переменных 178
 — стробоскопический 280
 метрический тензор 332
 механическое состояние 29, 74, 130
 многообразие устойчивое 55
 момент импульса точки 33, 34
 — — системы 64
 — инерции 217, 218
 — главный 217
 — осевой 216
 — центробежный 220
 — точка 73, 80
 Натуральные координаты 19
 начала механики 88
 неголономная связь 86
 неинерциальная система 22
 неконсервативная система 186
 неоднозначность функции Лагранжа 109
 неподвижная точка отображения 282, 289, 290
 Нетер теорема 190
 нормали главный вектор 18
 нормальные колебания 120, 124
 — координаты 120, 124, 126, 146,
 нутации угол 222, 232
 Область движения 38, 47
 обобщенный импульс 101, 150, 328
 — координата 91, 99
 — потенциал 98, 99, 100, 136
 — сила 93, 95, 99, 132
 — скорость 92, 99
 — энергия 101, 102, 141, 273, 328
 обратимость движения 39
 общее уравнение механики 90
 общий интеграл 175
 одномерное движение 37
 однородность пространства 27, 194
 — времени 27, 193
 однородная сила 64
 — функция 68, 69
 оператор эволюции 260, 281
 осестремительное ускорение 210
 особые точки 55
 ось вращения 198
 — материальной симметрии 218
 осциллятор гармонический 39, 40, 129
 — пространственный 55, 136
 относительная скорость 209
 — ускорение 210
 относительности принцип 26
 отображение логистическое 292
 — Пуанкаре 260, 280
 — треугольное 297
 out-состояние 75, 84
 Падение на центр 51—53, 85, 336, 338
 параметры Ламе 95
 пассивные переменные 152
 переменные действия 183, 185, 189
 — действие—угол 183, 254—255
 перемещение виртуальное 87, 88, 110
 — возможное 88
 — действительное 88
 переносная скорость 209
 период колебаний 39, 40, 241, 256, 309
 — — условный 133
 плоскость материальной симметрии 218
 показатель Ляпунова 296—297
 поле скоростей 205
 — перемещений 205
 полный интеграл 175, 180
 полная энергия системы 68, 100
 — — точки 35
 полодия 207, 233
 положение равновесия 112, 136
 поступательное движение 196
 потенциал обобщенный 98—100, 136
 потенциальный барьер 38, 42
 — сила 34, 35, 68
 — — системы 68
 — энергия точки 35, 131
 — — эффективная 47
 — яма 39
 потоки 260
 правая система 11
 предельное множество 291
 предельный цикл 54
 преобразования канонические 159
 — Лежандра 151, 161, 163
 прецессии угол 222, 232
 приближение умеренной нелинейности 311
 приведенная масса 72, 82
 принцип виртуальных перемещений 89

- работ 89
- Гамильтона модифицированный 153, 160
- Гамильтона—Остроградского 89, 107, 153
- д'Аламбера 90, 92, 93
- инерции 22
- Лагранжа 89
- механической причинности 30
- наименьшего действия 107, 110, 326
- относительности Галилея 72
- суперпозиции колебаний 119
- Эйлера 89
- Якоби 89
- принципы интегральные 106
- механики 88, 89
- прицельное расстояние 75, 77
- проекции скорости 20
- ускорения 20
- производящая функция 159, 171, 183
- пространственный осциллятор 136
- пространство евклидово 25, 26
- конфигураций 106
- состояний 113, 259
- фазовое 113, 130, 150, 259
- псевдовектор 11, 202
- псевдотензор 202
- Пуанкаре индекс 277—279
- интегральный инвариант 166
- отображение 260, 280
- теорема 166
- Пуассона скобки 155—157
- — фундаментальные 155, 156
- теорема 156
- Работа виртуальная** 89
- элементарная 35
- равновесия положение 136
- радиус кривизны 18
- кручения 19
- радиус-вектор 10, 208, 340
- — центра масс 64, 66, 72
- разделение движений 301.—302
- реакции связей 86
- Резерфорда формула 83
- резонанс 132
- реономные связи 86
- решение уравнений общее 30—32
- — частное 30
- Рунге—Ленца вектор 59
- Рэля диссипативная функция 145, 147
- Связи** 86
- апалитические 86
- голономные 86
- идеальные 86
- неголономные 86
- нестационарные 86
- реономные 86
- склерономные 86
- стационарные 86
- седло 264, 274, 276
- сепаратриса 265, 268, 275
- секторная скорость 11, 12
- сечение захвата 84, 85
- полное 83
- рассеяния 81
- сила внешняя 63
- внутренняя 63
- вынуждающая 131
- гироскопическая 36, 100, 136, 143
- диссипативная 36
- консервативная 68
- обобщенная 93
- обобщенно-потенциальная 100
- однородная 64
- потенциальная 34, 35
- трения обобщенная 132
- центральная 34
- центробежная 104
- Сильвестра критерий 117
- система отсчета 10
- гелиоцентрическая 23
- геоцентрическая 23
- глобальная инерциальная 23
- инерциальная 22
- лабораторная 75
- неинерциальная 22
- правая 11
- центра масс (ц-система) 65, 76
- система точек 63
- замкнутая 64
- изолированная 64
- консервативная 67
- скейлинг 295—296
- скобки Пуассона 155—157
- скорость обобщенная 92
- относительная 209
- переносная 209
- точки 10, 12, 208
- угловая 202
- фазова 260, 261, 281
- собственное время 332
- значение 118
- колебание 116
- частота 118, 123, 125, 137, 141, 148
- соотношение ортогональности 195
- состояние in 84
- out 75
- равновесия 89
- системы 74
- спектр частот 124, 251
- средняя скорость 343
- стабилизация гироскопическая 141—142
- степень свободы 91, 93
- однородности 69
- стробоскопический метод 280

- структура фазового пространства 257
- структурная устойчивость 271
- сферические орты 95
- потенциальная яма 60
- Твердое тело 195
- тело отсчета 10
- тензор инерции 215, 216
- скорость деформаций 206
- теорема вириала 69—71
- Лагранжа 114
- Лармора 138
- Ливилля 170
- Ляпунова 115
- Нетер 190
- Пуанкаре 166
- Пуассона 156
- Штейнера 221
- Эйлера 71
- Эйлера 199
- Якоби 176
- теория возмущений 238
- t -инвариантность 39
- траектория 10, 45, 48, 49, 50, 51, 53, 57, 120, 181, 336, 337
- фазовая 260, 261, 281
- тождество Якоби 156
- топологическая эквивалентность 271, 279
- точечное преобразование 94
- точка изображающая 113, 130
- особая 55
- остановки 38, 40, 240
- поворота 50, 227
- покоя 262
- равновесия 273
- траектория 106, 107
- треугольное отображение 287
- точка Лагранжа 143
- трехгранник естественный 17
- Френе 19
- тунелирование квантовое 39
- туннельный эффект 39
- Угловая скорость 202, 209
- переменная 183
- угол смежности 18
- преломления 62
- углы Эйлера 200, 222, 236
- прецессии 222, 232
- нутации 222, 232
- собственного вращения 222, 232
- удар лобовой 80
- уединенная волна 44
- уравнение Гамильтона 151, 325, 327
- Гамильтона—Якоби 174, 180, 182, 185, 189, 192
- д'Аламбера—Лагранжа 90
- движения 29, 63, 69, 73, 90, 136, 144, 146, 148, 187, 308, 324, 329, 333, 339, 341
- для производящей функции 174
- Дуффинга 316, 318
- каноническое 150
- Лагранжа 90, 97, 100, 105, 107, 122, 125, 128, 129, 131, 328
- Лоренца 340
- математического маятника 230
- механики общее 90
- нулевого приближения 187
- траектории 47
- характеристическое 118, 125, 133, 137, 274, 283
- Эйлера динамическое 222
- — кинематическое 222, 223
- условия идеальности связей 91
- каноничности преобразования 160
- падения на центр 84, 85
- условно-периодическое движение 133
- условный период 133
- ускорение точки 11, 12
- кориолисово 210
- осестремительное 210
- относительное 210
- переносное 210
- установившиеся колебания 135
- устойчивая орбита 53
- устойчивость колебаний 314
- равновесия 113, 114, 227
- состояния движения 114
- структурная 271
- Фаза колебания 119, 129, 310, 321
- фазовая скорость 260
- траектория 260, 281
- фазовое пространство 113, 130, 150, 259
- Фейгенбаума аттрактор 296
- константа 296
- финитное движение 38, 48, 138
- фокус 54, 264, 275
- форма квадратичная однородная 98
- линейная — 98, 100
- нулевой степени 100
- форм-инвариантность 26
- формулы Бине 15
- канонических преобразований 161—163, 168, 171, 187
- Корнолиса 210
- Резерфорда 83
- Френе 20
- Эйлера 203, 207
- — кинематические 204
- Френе трехгранник 19
- фундаментальное взаимодействие 23
- функция Гамильтона 151, 325, 327 328
- действия 191
- Лагранжа 94, 105, 117, 122, 125, 128, 129, 131, 136, 304, 326, 328

- Ляпунова 115
- последования 266, 288—290
- производящая 159, 171
- распределения 297

Хаос динамический 297
 характеристическое уравнение 118, 125, 133, 274, 283

- Центр** 264, 274, 275
 центр вращения мгновенный 207
 центр инерции 64
 — масс 64, 72
 центр силы 34, 51
 — поля 49
 центральная сила 34
 — поле 45, 51
 центробежная сила 104
 — момент 220
 — энергия 47
 цилиндрические координаты 12
 цикл предельный 54
 циклическая координата 101, 179, 183
 ц-система 76, 81
 ЦСО 67, 71

- Частота** 129, 309
 — вращения 195
 — кратная 121
 — ларморовская 148
 — нулевая 121
 — собственная 118, 123, 125, 137, 141, 148
4-вектор 331
 — временноподобный 332
 — изотропный 332
 — Лоренца 64
 — пространственноподобный 332

- 4-вектор-потенциал 338
- 4-импульс системы 64, 333
- 4-радиус-вектор 331
- 4-скорость 332
- 4-тензор поля 333
- чистое вращение 195

Штейнера теорема 221

- Эволюции оператор** 260, 281
Эйлера подстановка 144
 — принцип 89
 — теорема 71, 199
 — углы 200, 222, 236
 — уравнения динамические 222
 — — кинематические 222—223
 — формулы 203, 204, 207
 эквивалентность топологическая 270—271
 экстремаль 108
 элементарная работа 35
 эллипсоид инерции 218, 232
 энергия обобщенная 101, 102, 141, 273
 — кинетическая 35
 — полная 35
 — покоя 327
 — потенциальная 35, 131
 — средняя 127
 — центробежная 47
 — эффективная 47, 50, 60, 84, 85, 225, 234, 273, 305
 эффективное сечение рассеяния 81

- Якоби матрица** 282
 — принцип 89
 — теорема 176
 — тождество 156
 яма потенциальная 39

Учебное издание

**Владислав Рустемович ХАЛИЛОВ,
Геннадий Александрович ЧИЖОВ**

ДИНАМИКА КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Зав. редакцией *Л. А. Николова*
Редактор *Р. А. Бунатян*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *Т. А. Корнеева*
Корректоры *И. А. Мушникова, Т. С. Милякова*

ИБ № 4465

Сдано в набор 16.06.92
Подписано в печать 04.03.93.
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 21,09.
Тираж 850 экз. Заказ № 295. Изд. № 2058

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы