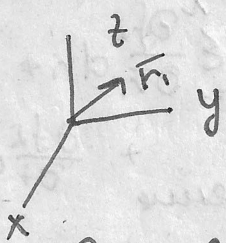
① Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип вирт перемещ. Принцип Даламбера.

Мех систем – система, состоящая из 1 либо из N матер точек. Положения матер точки в пр-ве хар-ется с помощью радиус-вектора $\{\bar{r}_i(t)\}$



$\dot{\bar{r}}_i$ – скорость i-й мат точки

$\dot{\bar{r}}_i$ – скорость i-й матер точки

$\{\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i\}$ опред. мех состояние системы

Основная задача механики – определить механ. состояние системы в произв момент времени t при заданных усл. движения

Свободная система – сист, кот движется под действием зад. внешних сил

$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i$ => n векторных ур-й / 3n скалярных ур-й | предполаг наличие НУ |

Для них осн задача – найти $\bar{r}_i(t)$ и $\dot{\bar{r}}_i(t)$

Для данной сист произвольно Нач.усл, заданные для данной сист несвободной называется ур-ем связи, а сама сист несвободной

Голономная сист – сист из N материальных точек, для кот задано k голономных связей, т.е. уравнения вида
$$\begin{cases} f_1(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t) = 0 \\ f_k(\bar{r}_1, \dots \bar{r}_N, t) = 0 \end{cases}$$

Если t не входит в сист ур-й связи то система назыв стац, иначе нестационарной

$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i$ – описывает ур-е несвободной сист.
↑ сила реакции

Отличие: 1) проблемы с интегрированием (не все $\bar{r}$ независ)
2) силы реакции не определ.

Виртуал. перемещение сист называют бесконеч. малое изменение ее конфигурации, согласующ со связями налож на нее в данный мом времени.

то $f_\alpha(r_1 + \delta r_1, \dots r_N + \delta r_N, t) = 0$ $\alpha = 1, 2 \dots k$

т.е. данные ур-е должны удовлетворяться в один и тот же мом. времени. Вирт. перемещ явл геометрич понятием, не связ с движением, это вариации ф-й δr_i (t) при неизменном значении аргумента, т.е. малые изменение вида ф-й. Это не перемещение точек сист во времени, а элементарные отрезки, которые по опред. должны удовлетворять уравнениям связи в тот же мом времени t, что и $r_i(t)$

$$f_\lambda(\bar r_1+\delta\bar r_1,\dots \bar r_N+\delta\bar r_N,t)=\underbrace{f_\lambda(\bar r_1,\dots\bar r_N,t)}_{0}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\lambda}{\partial r_i}\delta\bar r_i=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\lambda}{\partial r_i}\delta\bar r_i=0$$

$d\bar r_i$ – малое перемещение – действительное перемещение за dt, происходящее под действием зад силы F_i

$$0=f_\lambda(\bar r_1+d\bar r_1,\dots \bar r_N+d\bar r_N,t+dt)=f_\lambda(r_1,\dots r_N,t)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_i}dr_i+\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}dt=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_i}d\bar r_i+\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}dt=0$$ – действит перемещение

как один из возможных

К классу виртуальных возможные перемещ относятся только тогда, когда связи стационарны

Пусть сумма работ всех реакций связей на $\forall$ виртуальных перемещениях точек $=0$ $\sum_{i=1}^{N}(\bar R_i\ \delta\bar r_i)=0$ – идеальные связи

Рассм. несвободную сист мат точек в равновесии $\Phi_i=\bar F_i+R_i$ – сумма сил, действ на i-ю точку

$\Phi_i=0$ Вычислим $\sum_{i=1}^{N}\bar\Phi_i\ \delta\bar r_i=0$

Представим полученное равенство в виде

$$\sum_{i=1}^{N}(\Phi_i\cdot\delta\bar r_i)=\sum_{i=1}^{N}\bar F_i\ \delta\bar r_i+\sum_{i=1}^{N}\bar R_i\delta\bar r_i=0$$

и если связи идеальны $\sum_{i=1}^{N}\bar R_i\delta\bar r_i=0$ то $\sum_{i=1}^{N}\bar F_i\delta\bar r_i=0$

Виртуальная работа внешних сил приложенных к уравновешенной сист, равна нулю – принцип вирт перемещ. Он эквивалентен постулату: виртуальная работа сил реакции всегда равна нулю на любом вирт перемещении, не нарушающих заданный кинемат условий: $0=\sum_{i=1}^{N}\bar F_i\delta\bar r_i=-\sum_{i=1}^{N}\bar R_i\ \delta\bar r_i$

$\bar F_i\neq 0$, т.к. не все $\delta\bar r_i$ независимы

$m_i\ddot{\bar r}_i=\bar F_i+\bar R_i$

$\Phi_i=m_i\ddot{\bar r}_i-\bar F_i-\bar R_i$ $\Big|$ в силу ид. связей $\Big)\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\bar r}_i-\bar F_i)\delta\bar r_i=0$ – общее ур-е механики или принцип Даламбера

Для свободной сист мгновенно получаем

$m_i\ddot{\bar r}_i=\bar F_i$, т.к. δr_i независимы

(в общ. случае не все δr_i независимы)

② Уравнение Лагранжа с неопр. множителями (1-ого) рода для мех сист при наличии связей

Умножим каждое из соотношений $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_i} \delta r_i$ на некоторый мн-ль $-\lambda_\alpha(t)$ и сложим их $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} -\lambda_\alpha (t) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_i} \delta \bar{r}_i = 0$ Складывая это р-во

и общее уравнение механики получим

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m\ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_i}\right) \delta \bar{r}_i = 0$$

Подберем λ_α, так, чтобы можно было приняеть $=0$ коэфф при всех зависимых вариациях $\delta \bar{r}_i$, тогда для всех зависимых вариаций такая сумма будет $=0$.

Т.е. для независимых вариаций $\delta \bar{r}_i$ $m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(t) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_i}$ - урав-е Лагранжа 1-ого рода

Силы реакции связей выражается через производные от функции f_α: $R_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_i}$

Урав-е Лагранжа 1-ого рода представляет собой необходимое и достаточное условие обращения в нуль виртуальной работы сил реакций, т.е. использовано условие идеальных связей

Закон изм полных импульсов $\dot{p} = F^{ext} + R^{ext}$ ext - внеш.

Закон изм полного мом импульса $\dot{l} = M^{ext} + M_R^{ext}$

$$R^{ext} = \sum_{i=1}^{N} R_i^{ext}, \quad M_R^{ext} = \sum_{i=1}^{N} [r_i R_i^{ext}]$$

Закон изменение полной мех энергии несвободной системы $\dot{E} = \frac{\partial e_i^{ext}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{N} F_i v_i - \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$

т.е необходимо учитывать внешние силы реакции. Таким мех энергия несвободной системы сохран лишь при условии стац, внешних потенциальных сил, отсутствие диссип сил и стационарности всех связей

Нестац. связи ~~сп~~ способны соверш работу в результате которой мех энергия сист будет измен. со временем

③ Уравнение Лагранжа в независимых координатах
(вывод из общ ур мех)

Для получения уравнений Лагранжа 2-ого рода нужно переписать принцип Даламбера в независимых (или как их иначе назыв обобщ-х) координатах. Подберем S обобщ. коорд $\bar{q}_i$ так, чтобы $\bar{r}_i$ были однозначными ф-ми этих S координат $q_1, q_2 \dots q_s$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots q_s, t)$$

Число незав. координат $s = 3N - k$ для систем, на которые наложены голономные связи - число степ свободы

Если перенумеровать декартовые координаты материальных точек системы (x_i, y_i, z_i) в определ. порядке, то условие независимости q_i означает, что из $3N$ функций x_i S функций д.б. независимыми, что можно обеспечить требованием

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_s}{\partial q_1} & \frac{\partial x_s}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \neq 0$$

Второе условие накладывается на связи: $f_k(\bar{r}_1, \dots \bar{r}_n, t) = 0$ при подстановки $\bar{r}_i$ в уравнение связи f_k оно должно обращаться в тождества

$$f_k(r_1, \dots r_n, t)\Big|_{\substack{r_1 = r_1(q_1, \dots q_s, t) \\ \dots \\ \bar{r}_n = \bar{r}_n(q_1, \dots q_s, t)}} = 0$$

В динамические ур-я, записанные в независимых координатах, силы реакции связи не входят: они исключены из динамики сист. как $\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0$

Запишем принцип Даламбера в независ. координатах. Для этого получим связи м/ду вариациями $\delta \bar{r}_i$ и δq_i исходя из $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots q_s, t)$: $\delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$

$$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Полные произв. по времени от обобщ. коорд q_j назыв обобщ. скоростями. Подств $\delta \bar{r}_i$ в (1)

и преобр р-т.

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}-F_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\right)-\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{n} F_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\right\} q_j=0$$

④ Механическая система с одной степенью свободы в пр-ве конфигураций. Кач исследования. Движение вблизи точек остановки. Период колеб как ф-я энергии.

Фун-а Лагранжа

Ф-я Лагранжа имеет вид $L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q)$, $a(q)>0$

$U(q) = U^{вн}(q) - T^0$ Если U явл только ф-ей ~~квадратур~~ координаты q, то ур-е движения интегр. в общем виде, т.е. основная задача динамики решается при произвольной ф-ии U. Для этого найдем первый интеграл движения $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Обобщ энергия (1) $H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{a(q)\dot{q}}{2} + U(q) = E_0$ - сохраняется

$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\right)$ $\frac{a(q)\dot{q}^2}{2} = E_0 - U(q) \geq 0$

Кроме того (1) явл. дифф ур-ем 1 порядка, кот можно проинтегр в общем виде методом разделения переменных

$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}\left(E_0 - U(q)\right)}$ откуда (1) $t = \pm\int \frac{dq}{\frac{2}{a(q)}\left(E_0 - U(q)\right)} + C$ -

зависит от $E_0, C = const$, явл вторым интегралом движения

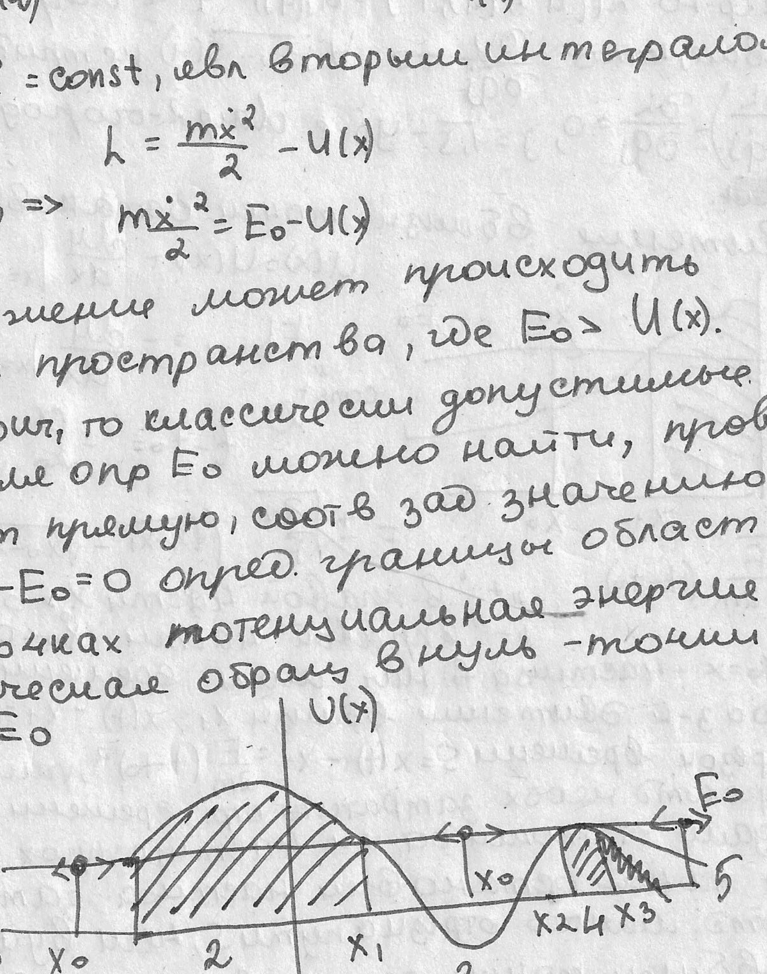
$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$

Положим $a(q) = m$, $q = x$, => $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - U(x)$

Т.к. $\frac{m\dot{x}^2}{2} = T > 0$, то движение может происходить только в тех областях пространства, где $E_0 > U(x)$.

Если $U(x)$ задана графич, то классически допустимые области движения для опр E_0 можно найти, проведя на графике $U(x)$ горизонт прямую, соотв зад значению E_0. Корни уравнения $U(x) - E_0 = 0$ опред. границы областей движения. В этих точках потенциальная энергия равна полной, а кинетическая обращ в нуль - точки остановки. зависят от E_0

в 2 и 4: $E_0 < U(x)$ => в них частица не может классически находиться



в 1 и 5 движение инфинитно (не огр, т.е частица → на бесконечность в 3: колеб движение $-m\ddot{x} = -\frac{dU}{dt} = F(x)$, $t = -t$ ничего не изменится

$\Rightarrow$ обрат движ $\Rightarrow \Delta t_{x_2 \to x_1} = \Delta t_{x_1 \to x_2} = \frac{T}{2}$ период

Кинетическую энергию точек системы как ф-ю обобщ. коор-й

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \Big| = T(q, \dot{q}, t)$$, а также обобщ. силы

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots q_s, t)$$

$$Q_j(q) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$. С учетом введенного принципа Даламбера

можно записать в виде (1) $$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$ — в независ. коорд.

Размерность обобщ силы — энергия деленную на обобщ коорд, $\Rightarrow$ ее размерность в общем случае не совп с размерностью обобщ. силы. В случае голономных связей все δ_j явл. независимыми и для удовлетв принципа Даламбера мы должны положить коэфф. при каждой вариации ∂q_j равными нулю:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \; j = 1, \dots s$$ — описывается динамика механической системы в независимых координатах под действием задаваемых внешних сил; силы реакции не входят. Независимыми в этих ур-ях явл обобщ. координаты как ф-ии времени. Число неизвестных и число ур-й совпадают и в данном случае = числу степ. свободы. Если внешние силы имеют потенциал $U(r_1, \dots r_N)$, то $F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$; $Q_j = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial U(r)}{\partial q_j}\Big|_{r = r(q_i)}$

$Q_j(q_1, \dots q_s)$ не завис от обобщ. скоростей $\dot{q}_1, \dots \dot{q}_s$

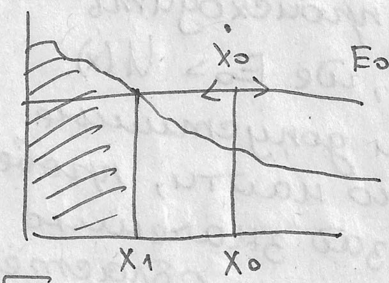
Введем ф-ю $L((q), (\dot{q}), t) - U((q))$ — ф-е Лагранжа ~~при~~ или лагран-н сист.

Учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \; \forall j \overline{1, \dots s}$ (1) не трудно преобр и виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \; j = \overline{1, s}$$ — Ур-е Лагр 2-ого рода.

[redacted].

Движение вблизи точки остановки:



$$U(x) = U(x_1) + \frac{dU}{dx}\Big|_{x = x_1}(x - x_1) = U(x_1) - F(x - x_1)$$

$$F|_{x = x_1} = -\frac{dU}{dx}\Big|_{x = x_1}$$

$$\begin{cases} x_0 - x_1 \ll x_1 \\ x(t) - x_1 \ll x_1 \end{cases}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2F}} \int_{x_0}^{x} \frac{d}{\sqrt{x - x_1}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2m}{F}} \left(\sqrt{x - x_1} - \sqrt{x_0 - x_1}\right) =$$ [redacted] $$\sqrt{x - x_1} - \sqrt{x_0 - x_1} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{F}{2m}} (t - t_0)$$ "+" в правой части $\dot{x}_0 > 0$

"−" в правой части $\dot{x}_0 < 0$

Пусть $x_0 = x$ — частица в нач мом времени t_0 наход в точке ост-ки.

Тогда з-н движения вблизи x_1: $x(t) - x_1 = \frac{F}{2m}(t - t_0)^2$, т.е частица движ с пост ускорением

Если отрезок времени $S = x(t) - x_1 = \frac{F}{2m}(t - t_0)^2$ примыкает к точке ост-ки, то для его прохожд необх затратить отр. времени $\Delta t \sim \sqrt{\frac{2m}{F} S}$. Малый отрезок пути S вдали от точки ост-ки частица прох за $\Delta t \sim S$.

Вблизи точки остановки частица затрачивает большее время на прохожд. малого отрезка пути S, чем вдали от нее. Скорость частицы вблизи точки остановки $\to$ к 0.

5) Одномерный гармонический осциллятор. Собств. и вынужд. колебания. Ф-я лагранжа

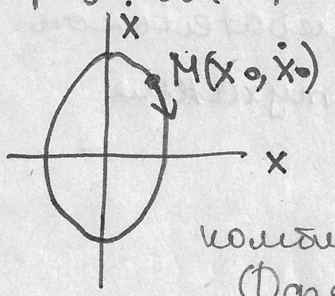
В системе с одной степенью свободы $S=1$, точка равновесия q_0 определ. из усл. $\frac{dU}{dq}=0$. Положение равновесия будет устойчивым, если $k=\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q=q_0}>0$, тогда вокр-ти точки q_0 возникает сила, которая стремится возвратить систему к т. q_0. $\Rightarrow L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}$, где $x=q-q_0$. Система, описыв. таким лагранжианом — одномерный гармонический осциллятор.

Уравнение движения гармонического осциллятора (УЛ):

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=a\cos(\omega t+\alpha),\ a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\quad tg\alpha=-\frac{C_2}{C_1}$$

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m\omega^2a^2}{2}\quad \begin{cases}x_0=a\cos\alpha\\ \dot{x}_0=-a\omega\sin\alpha\end{cases}(1)\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{x^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0}}\\ tg\alpha=\frac{-\dot{x}_0}{x_0\omega}\end{cases}$$

Механическое состояние осциллятора определ. заданными $x,\dot{x}$ в фазовом пр-ве. Из (1): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2}=1$ — уравнение эллипса



Заданное начальное мех. состояние однозначно определ. фазовую траекторию. семейство фазовых явл. однопараметрическим т.к. они определяют не x_0 и $\dot{x}_0$ порознь, а их комбинацию образ E: $E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$

Фазовые траектории м/ду собой не пересекаются

Пусть $U=\frac{m\omega^2x^2}{2}+\tilde{U}(x,t)$, где $\tilde{U}(x,t)$ — потенц. энергия сист. во внешнем переменном поле

Пусть переменное поле достаточно слабое, так что в отклонении $x(t)$ от положения равновесия и колебание в нем по прежнему явл. малыми.

$$\Rightarrow \tilde{U}(x,t)=\tilde{U}(0,t)+\underbrace{\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x}\Big|_{x=0}}_{F(t)}$$, где $f(t)$ — "внешняя" сила в положении равновесия системы (пренебр. $\tilde{U}(0,t)$ т.к. с точностью до $f(t)$)

УЛ: $\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{m}\Rightarrow x=\underset{\text{дифф. ур}}{x_{общ}}+\underset{\text{неодн. ур-е}}{\tilde{x}_{част}}$

Пусть на гармонич. осциллятор действует обобщ. сила трения вида: $F_{тр}=-\lambda\dot{x}$, $\lambda>0$, x — обобщ. "−" т.к. $\bar{F}\uparrow\downarrow\dot{x}\Rightarrow$

ур-е движения: $m\ddot{x}+kx=-\lambda\dot{x}$ $\quad\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $2\mu=\frac{\lambda}{m}$.

где μ — коэф. затухания $\Rightarrow\ddot{x}+2\mu\dot{x}+\omega_0^2x=0$.

Ищем решение в виде $x=Ce^{\lambda t}$: $\lambda^2+2\mu\lambda+\omega_0^2=0$

$x=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}$, где $\lambda_{1,2}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$

1) Если $\omega_0 > \mu$, то $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$

Тогда $x = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha_0)$

$$\begin{cases} x_0 = a\cos\alpha_0 \\ \dot{x}_0 = -\mu x_0 - a\omega\sin\alpha_0 \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \mu x_0)^2}{\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega x_0}$$

$\Rightarrow$ движение условно-переодическое, т.к. интервал времени T м/ду двумя соседними макс. отклонениями от положение равновесие (условный период) = const: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

2) $\mu > \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$ – вещест и отриц.

$\Rightarrow x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ движ хар-ся боль шим трением не явл колебательным. Точка проходит положение равновесие не более одного раза за конечное время. Движение состоит в асимптотическом (при $t \to \infty$) приближении к полож равновесие. Независимо от, н.у така тип движение называется апериодически затуханием.

3) $\mu = \omega_0$; $\lambda = -\mu$

$x = (C_1 + C_2)e^{-\mu t}$ движение не имеет колебательного характера, предст. собой случай апериод. затухание

(6) Общие...

Движение частицы во внешнем поле в кот ее потенц энергия зависит только от r до неопр. непод в Т

Действ. сила $F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{dU}{dr}\frac{\bar{r}}{r}$

зависит только от r и напр вдоль радиус-вектора

При движ. в ц.с. поле сохр мом. сист о/о. центра поля для одной частицы $M = [rp]$.

траектория частицы в ц.с поле лежит строго в одной плоскости $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$

Ф-е не содержит в явном виде φ

В механ. обобщ. коорд. q_i, не вход явным образом в L, назыв циклич.

Уравн Л: $\frac{d}{dt}\frac{dL}{dq_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, т.е. соотв. ей обобщ импульс

явл $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ интеграл движ.

в данном случае $p_0 = mr^2\dot{\varphi}^2$ совп с мом. $M_z = M$.

$$M = mr^2\dot{\varphi}^2 = const$$

Полное решение задачи о движ частицы в ц.с поле проще получить исходя из з-нов СЭ и мом.

(*) $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$ – опр. в неявном виде расст r движ точки от центра как ф-е вр.

Отсюда: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}$

(**) $t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + C$, перепишем $M = mr^2\dot{\varphi}^2$ в виде

$$d\varphi = \frac{M}{mr} r dt$$

$\varphi = \int \frac{(M/r^2)\,dr}{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}} + C$ (1) – опр связь м/ду φ и r, т.е ур-е трает.

показ, что радиальную часть движ можно рассм. как одномерное движ в поле с „эфф пот энергией"

$U_{эфф} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ центроб энергия

Знач r при которых $U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E$ опред

границ области движения по расст от центра

При вып рав-ва радиал скорость $\dot{r}$ обращ в ноль.

Это не значит, остановку наступ, т.к. угл скор $\dot{\varphi} \neq 0$

$\dot{r}=0$ означ точку поворота траектори

в кот ф-я $r(t)$ переход от увелич и уменьш

Если область изм r им 2 границы r_{min} и r_{max}, то

движ финитное, траектория лежит внутри кольца

за время в теч которого удаляется от

max до min р-с в-р повернтся на $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{max} \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2m(E-U)-M^2/r^2}}$$

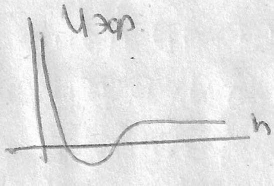
Усл замкнутости: $\Delta\varphi = \frac{2\pi m}{n}$ - цел. - цели

Через n-периодов (повтор переход в точке) сделав m полных оборотов совпадет с изнач полож

⑥ Кеплерова задача: Поле имеют вид $\frac{1}{r}$, силы $\frac{1}{r^2}$

Рассмотрим поле притяж $U = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$

$$U_{эф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$



при $r = \frac{M^2}{\alpha m}$ имеем

$$U_{эф}\ min = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$$

при $E>0$ движ инфинитно

при $E<0$ движение финитно

ф-ла траектории подставим в (1) $(\varphi = \int(\dots))\dots$

$U = -\frac{\alpha}{r}$, и произв. инт выбираем так,

$$\varphi = \arccos \frac{M/r - M\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + C$$

выбираем так, чтобы $C=0$ вводим обозн

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{EM^2}{m\alpha^2}}$$

перепишем ф-лу для траектории

параметр $p \rightarrow \frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$ (2)

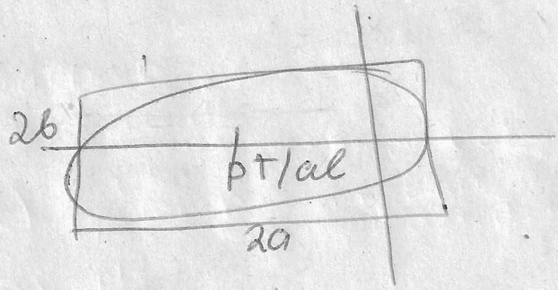
↓ эксцентриситет

уравнен кон. сечения с фокусами в начале коорд.

из 2 видно, что $T\varphi = 0$ явл ближ к центру

при $E<0$, $e<1$ - эллипс

движение финитно



$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\alpha M|E|}$$

$e = 0$ - окружност

$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$ $r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$

период вращ по эллипсу

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

з-т от энергии

$E>0$, $e>1$ гипербола

$$r_{min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1)$$

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$ - полуось гиперболы

7 Система материал точек...

Системой материальных точек называют совокупность тел, каждое из которых можно считать материальной точкой. Замкнутой системой - система в которой с прочими телами можно пренебречь

Внутр. сил - сил, действ м/ду точками данной системы. Сумма внутренних сил равна 0. т.к. сил, действ на ∀ две точки равны по модулю и противоп. по направлению.

Импульс сист - сумма имп всех точек вход в сист $\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i$

Закон изм импульса: $\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext}$

Закон сохр импульса: если сумма проекций внешних сил на данную ось на данную ось $=0$, то проекция импульса на данную ось сохраняется $\frac{dp_x}{dt} = F_e^{ext} = 0 \Rightarrow p_x = const$

В частности в замкнутой системе $(\bar{F}^{ext}=0)$ импульс сохран.

Момент имп системы - сумма мом. импульса всех точек системы $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i \bar{p}_i]$ $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i \dot{\bar{p}}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\dot{\bar{r}}_i \times \bar{p}_i] = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext}] + \sum_{j,i}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}]$

$$\sum_{j,i=1}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}] = \sum_{ij=1}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}] + [\bar{r}_j \times \bar{F}_{ij}] = \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \bar{F}_{ji}$$

$$\bar{F}_{ij} = (\bar{r}_i - \bar{r}_j) f(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|)$$

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext}]$$

В замкнутой системе мом. имп. системы сохраняется

$\bar{F}_i^{ext} = 0$, $\dot{\bar{L}} = 0$, $\bar{L} = \bar{L}_0$

Полная мех энергия системы мат точек

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ij} \Big| \cdot (\dot{\bar{r}}_i)$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\bar{r}}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{(\bar{r}_i' + \bar{V}_0)}{2} = T' + \sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{r}_i' \bar{V}_0) + \frac{M V_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = T' + \frac{M V_0^2}{2}$$

Предположим, что внешние и внутренние силы потенциальны и консервативны, тогда $\bar{F}_i^{ext} = -\frac{\partial U^{ext}}{\partial \bar{r}_i}$

Если $\bar{F}_{ij}$ удовлетв. III з-ну Ньютона, то они могут быть построены с помощью некоторой ф-ии $V_{ij} = V_{ij}(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|)$

как $\bar{F}_{ji} = -\frac{\partial}{\partial r_i} V_{ij}$, $\bar{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_j} V_{ij}$

Учитывая, что $\bar{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij}$ и $\bar{F}_{ij} = (\bar{r}_i - \bar{r}_j) f = -r_{ji} f$, где f - скаляр. ф-я аргумента r_{ji}, то

$$\sum_{j,i=1}^{n} (\bar{F}_{ji} d\bar{r}_i) = \sum_{j,i=1}^{n} (\bar{F}_{ji} d\bar{r}_i) + (\bar{F}_{ij} d\bar{r}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{F}_{ji} d\bar{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} V_{ij} d(r_{ij}) = -\frac{1}{2} d \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}$$

$$\bar{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_i} V_{ij} = -\frac{\partial}{\partial (r_i - r_j)} V_{ij}$$

Можно определить потенциальную энергию системы точек, как $V = V^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}$

$E = T + V \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} = -W^{d}$ - Убыль энергии за счет диссипат сил компенсируется поступл. энергии в систему за счет зависящих от времени потенциальных сил.

Для замкнутой системы имеем 10 интегралов движения семь первых ($E = E_0$, $\bar{p} = \bar{p}_0$, $\bar{L} = \bar{L}_0$) и три вторых ($\bar{R} = Vt + \bar{R}_0$).

Рассмотрим движение в поле консерват сил системы точек, потенц. энергия которой является однородной ф-ей координат т.е. удовл. усл $V(\lambda\bar{r}_1, \dots \lambda\bar{r}_n) = \lambda^{\nu} V(\bar{r}_1, \bar{r}_n)$

λ-незав пост, ν- степень [redacted] однородной сист.

Уравнение движения: $m_i \ddot{\bar{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$ $i = \overline{1, N}$

и произвед. в них преобр. при кот. наряду с изм. радиус-векторов в λ-раз одновременно изм в β раз

Ур-е движения в результате этого преобразо-вания:

$$\frac{\lambda}{\beta^2} m_i \ddot{\bar{r}}_i = -\lambda^{\nu-1} \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

$\beta = \lambda^{1-\frac{\nu}{2}}$ Тогда уравнение движение неизменны, а радиус-векторы всех частиц изменились в λ раз, т.е. переход и геометричеси подобным траекториям, отлич. от исходной лишь своими размерами

$\frac{t'}{t} = \left(\frac{e'}{e}\right)^{1-\frac{\nu}{2}}$, e'/e - отношение линейных размеров двух траекторий.

Такой переход возможен, только когда потенциальная энергия системы явл. однородной ф-ей ν-ей степени свободы от декартовых координат.

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{p}} = \frac{e'}{e} \Big/ \frac{t'}{t} = \frac{e'}{e}\left(\frac{e}{e}\right)^{\nu/2-1} = \left(\frac{e'}{e}\right)^{\nu/2}$$

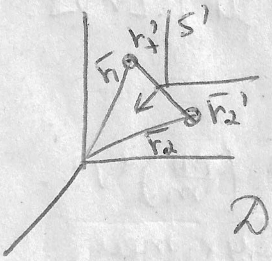
8. Задача двух тел. общее решение задачи и квадр т.

Под задачей двух тел понимают задачу о движении двух взаимодействующих точек в отсутствие внешних сил

Уравнение движение точек относительно инерциальной системы:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar r}_1 = \bar F_{21}(|\bar r_2 - \bar r_1|) = -\dfrac{\partial U(|\bar r_2 - \bar r_1|)}{\partial \bar r_1} \\ m_2 \ddot{\bar r}_2 = \bar F_{12}(|\bar r_2 - \bar r_1|) = -\dfrac{\partial U(|\bar r_2 - \bar r_1|)}{\partial \bar r_2} \end{cases}$$

Из-за отсутствие внешних сил центр масс сист. движется относительно инерц. СО равномерно и прямолинейно. Скорость ц.м. и его радиус-вектор.



$$\bar R = \frac{m_1 \bar r_1 + m_2 \bar r_2}{m_1 + m_2} = \bar V t + \bar R_0$$

$$\bar V = \frac{m_1 \dot{\bar r}_{10} + m_2 \dot{\bar r}_{20}}{m_1 + m_2} \text{ скорость} \quad R_0 = \frac{m_1 \bar r_{10} + m_2 \bar r_{20}}{m_1 + m_2} \text{ р-в.}$$

Для СОS' с началом O' в ц.м.

$\bar r_i = R + \bar r_i'$; $\dot{\bar r}_i = \bar V + \dot{\bar r}_i'$, $i = 1, 2$, $\bar V = \dot{\bar R} = \bar V_0$,

$\bar r_i'$ – р-в. i-ой точки относительно S'

Согласно правилу относительность Галилея УД сохр свою форму в ИСОS':

$$m_1 \ddot{\bar r}_1' = F_{21}(|\bar r_2 - r_1|)$$
$$m_2 \ddot{\bar r}_2' = F_{12}(|\bar r_2' - \bar r_1'|)$$

В с.ц.м. (S') $\bar R' = 0 \Rightarrow m_1 \bar r_1' + m_1 r_2' = 0$, вводя вектор взаимного располож. $\bar r = \bar r_2 - \bar r_1 = \bar r_2' - \bar r_1' \Rightarrow$

$$\bar r_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar r, \quad \bar r_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar r; \quad \dot{\bar r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\bar r},$$

$$\dot{\bar r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\bar r}$$

$$\ddot{\bar r}_1' = +\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\bar r}, \quad \ddot{\bar r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\bar r}$$

Уравн. движ для каждой точки запис одинаково $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{\bar r}_1' &= F_{21}\left(\frac{m}{m_2} |\bar r_1'|\right) \\ m_2 \ddot{\bar r}_2' &= \bar F_{12}\left(\frac{m}{m_1} |\bar r_2'|\right) \end{aligned}\right., \quad m = m_1 + m_2$$

Переходим к переменной $\bar{r}$: $\mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12} = F_{12}(|\bar{r}|)$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса. Получаем ур-е движения в одной точке в заданном поле с центром силы, помещ. в центр масс двух точек. Задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении μ-точки – вообр. точки с массой μ и рад-вектором $\bar{r}$ в ЦСП с неподвижным центром.

Поскольку на μ-точку „действ" центр. стационарная потенциальная сила, имеет место сохр. мом. импульса и энергии относительно S' $\mu[\bar{r}\bar{v}] = M_0'$, [redacted]

$$\frac{\mu v^2}{2} + U(\bar{r}) = E_0'$$

Согласно этим законам кинетический момент и энергия сист. двух точек сохраняется относительно S'

$$M' = M_1' + M_2' = M_0' \quad E' = T_1' + T_2' + U = E_0'$$

выразим момент импульса и кинетическую энергию точки в переменных $\bar{r}, \bar{v}$ $M_1' = m_1[\bar{r}_1', \bar{v}_1'] = m_1 \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 [\bar{r}\bar{v}]$.

$$T_1' = \frac{m_1 (v_1'^2)}{2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m}\right)^2 v^2$$

аналогично для второй точки

$$M_2' = m_2 \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 [\bar{r}\bar{v}], \quad T_2' = \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m}\right)^2 v^2$$

$\Rightarrow M' = \mu[\bar{r}\bar{v}]$, $T' = \frac{\mu v^2}{2}$ $\Rightarrow$ реш. задачи двух тел относительно S' можно найти сразу

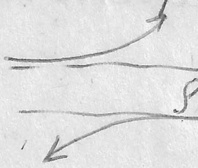
$M_0' \cdot r = 0$ $\Rightarrow$ опред. плоскость движения μ-точки, плоскость, проход. через ц.м. $\perp$ к M_0, совп. с $O'x'y'$

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U_{эфф})}} + const$$

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M_0}{\mu r^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_0' - U_{эфф})}} + const; \quad U_{эфф} = U(r) + \frac{(M_0')^2}{2\mu r^2}$$

⑧ Если две удаленные частицы после сближения в результате взаимодействия вновь удаляются на большое расстояние, => произошло упругое рассеивание

До рассеяния: $\bar{V_1} = V_1(t)|_{t\to 0}$, $\bar{V_2} = V_2(t)|_{t\to}$



ρ – расст. на котором прошли бы частицы, если бы не было вз-я, прицельное расстояние

$$U(|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|) = 0$$

После рассеяния: $\bar{V}_1|_{t\to\infty} = V_1^+$, $\bar{V}_2|_{t\to\infty} = \bar{V}_2^+$

Задачу рассеяния двух частиц можно решить в общем виде, используя задачу двух тел. Задачу двух тел сведем к задаче о движении μ-точки и учитывая сохр скорости ц.м.с в процессе рассеяния

$$V_1^+ = V - \frac{m_2}{m_1} V^+,\ V_2^+ = V + \frac{m_2}{m} V^+,\ m = m_1 + m_2$$

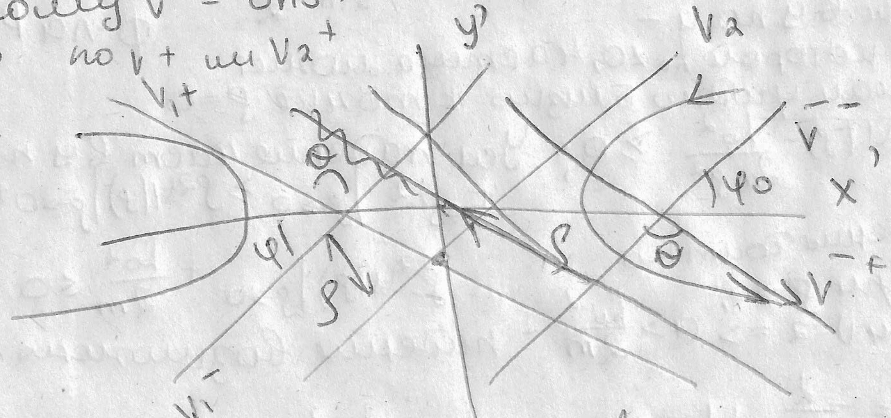
$V = \frac{m_1 \bar{V_1} + m_2 \bar{V_2}}{m}$ – скорость ц.м. $V^+ = V_2^+ - V_1^+$ – скорость

μ-точки после рассеяния. найдем V^+: $\frac{\mu V^+}{2} + U|_{t=\infty} = \frac{\mu \bar{v}}{2} + U|_{t=-\infty}$

Из з.с.э для точки μ

Поэтому $\bar{V}^+ = \bar{v} \bar{n}_0$, где $\bar{v} = |\bar{V_2} - \bar{V_1}|$, а ед. вектор по напр по V^+ или V_2^+

$X'OY'$ – плоск. движ вз. част.



Полярный угол $\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L_0'}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U(r) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}\right)}}$

угол отклон $\Theta = \pi - 2$

Сохран в-ны: $E_0 = \frac{\mu \bar{v}^2}{2}$, $L_0 = \mu[\bar{r}\ \bar{V}] = \mu\rho \bar{V}$

$$\Theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu \bar{v}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Обозначим через dN число частиц, рассеиваемых в единицу времени на угол, лет м/ду Θ и $\Theta + d\Theta$, оно зависит от плотности пад пучка n

$d\sigma = \frac{dN}{n}$ (n – плотность потока частиц) – диффер. сечение рассеяния, определ. видом рассеивающ. поля

Зависимость эфф. сечения рассеивания от угла рассеяния: $d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\theta$

Эфф. сечение можно отнести к элементу телесного угла

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta \Rightarrow d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\Omega$$

Ф-ла Резерфорда: положим $U(r) = \frac{-\alpha}{r} \Rightarrow$

$$\theta = \pi - 2\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha x}{\mu v^2\rho} - x^2}}, \quad x = \frac{\rho}{r}$$

μ – прив. масса, $v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$

x_{max} – положит корень ур-я $x^2 - \frac{2\alpha x}{\mu\rho v^2} - 1 = 0$

$$x_{max} = \frac{\alpha}{\mu\rho v^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\mu\rho v^2}\right)^2 + 1} \Rightarrow \text{угол рассеяния}$$

$$\theta = -2\,\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\mu\rho v^2}$$

В случае сил притяжения $(\alpha > 0)$ $\theta < 0$, а если отталкиваются $(\alpha < 0)$, то $\theta > 0$ $\rho = -\frac{\alpha}{\mu v^2}\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$

Диф. по θ и подставляя получаем

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{\mu v^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}d\theta \text{ или } d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

ф-ла Резерфорда

Падение частицы в ц. поле – ситуация, при которой $L_0 \neq 0$, частица может приблизиться как угодно близко к точке $\rho = 0$

$$\frac{m\dot\rho^2}{2} = E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \geq 0;$$

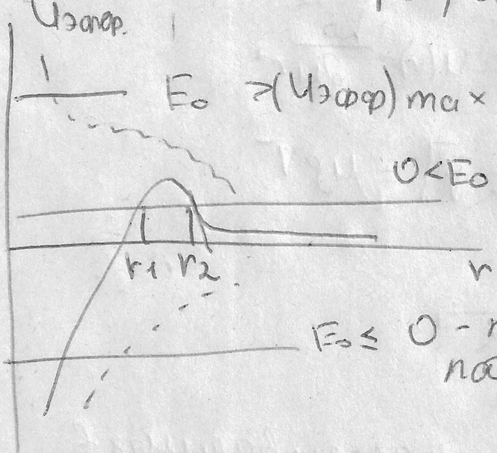
Усл. падения част в ц. п. $E_0\rho^2\big|_{\rho\to 0} \geq \rho^2 U(\rho)\big|_{\rho\to 0} + \frac{L_0^2}{2m}$

$U(\rho)$ – поле притяжения должно стремиться к ∞ при $\rho \to 0$;

$$\rho^2 U(\rho)\big|_{\rho\to 0} + \frac{L_0^2}{2m} \leq 0.$$

$U(\rho) = -\frac{a}{\rho^\nu}$, при $\nu = 2 \Rightarrow a > \frac{L_0^2}{2m}$ – падение возможно.

Например: для $U(r) = \frac{-\alpha}{r^5}$, $U_{эфф} = \frac{-\alpha}{r^5} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$



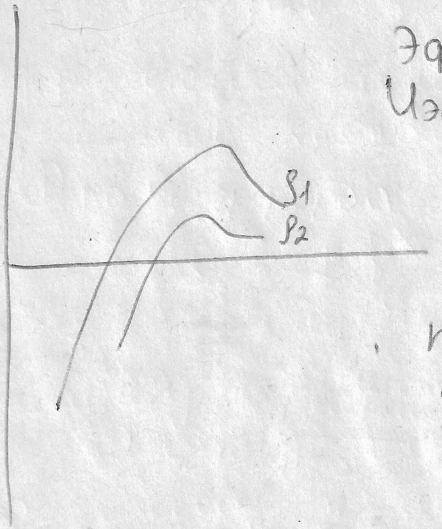
$E_0 > (U_{эфф})_{max}$ – движение проход в неогр об., возм. пад на цен

$0 < E_0 < (U_{эфф})$ – движ происх либо в обл $r \geq r_2$, $r \leq r_1$ в кот возм. падение на центр

$E_0 \leq 0$ – тоже имеет место пад на центр

(8) Рассмотрим задачу двух тел массами m_1 и m_2 и сведем ее к эквив задаче о двит μ-й точки в ц. поле с неподв. центром

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



Эфф энергия:

$$U_{эфф} = U(r) + \frac{L_0^2}{2\mu r^2} = U(r) + \mu \frac{\bar{v}^2 \rho^2}{2r^2}$$

$$E_0' = \frac{\mu \bar{v}^2}{2}$$

Если $E_0' > (U_{эфф})$ то μ точка падает к центру поля. Э некоторое max прицельное расстояние, меньше кот частица начинает захватываться со.

⑨ Уравнение Лагранжа в независимых координатах и их ковариантн. при точ. преобр. Обобщ. имп. и коорд. Интегралы движ. ур-е Лагранжа

Уравнение Лагранжа сохраняет вид при точечных преобразованиях Обобщ. координат: $q_j' = q_j'(q_1, \dots q_s, t)$

УЛ будут иметь тот же вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j'} = 0 \quad L' = L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}'), t)$$

что и при использовании ОК q_j

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \; L = L(q, \dot{q}, t)$$

Д-во: $\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j'} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j'}$ (с учетом $\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j'} = \frac{\partial q_k}{\partial q_j'}$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j'}\right) = \sum_{k=1}^{s}\left\{\frac{\partial q_k}{\partial q_j'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial q_j'}\right)}_{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j'}}\right\}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j'} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial q_j'} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j'}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j'} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial q_k}{\partial q_j}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]}_{=0} \quad \text{ч.т.д}$$

Интеграл движение – ф-я $(q, \dot{q}, t)$ сохраняющая свое значение постоянным при эволюции системы

$$f(\dot{q}(t), q(t), t) = \mathrm{const}, \; \forall t \Leftrightarrow \frac{d}{dt} f(\dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)$$

• Обобщенная энергия

$$H = \left(\sum_{i=1}^{s}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - L$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(L(\dot{q}(t), q(t), t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\cancel{\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\Bigg) - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\right) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\dot{q}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = -\frac{dL}{dt} + \sum_{i=1}^{s} Q_i^{d}\dot{q}_i$$

$\frac{dH}{dt}=0$, т.е H-интеграл двит, если 1) $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ (Фл явно не зависит)

Обобщ.импульс p_i, соотв обобщ. координате q_i

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{d}{dt}p_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}+Q_i^d;\quad \frac{d}{dt}p_i=0 \Leftrightarrow$$ p_i - интеграл движения, если

1) $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ (Фл не з-т от q_i - цикл. коорд)

2) $Q_i=0$

т.е. обобщенный импульс соот-в. циклической координаты в отсутствие диссипативных сил - интеграл движение.

(10) Функция Лагранжа заряда во вн

Скалярная ф-ия U, зависящая не только от положений точки и времени, но и от скоростей точки назыв. обобщенным потенциалом. В электродинамике вводится понятие обобщ. потенциала в виде $U = -\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) + e\varphi$
где $\bar{A}$ и φ - векторный и скалярный потенциалы э/м поля, заданные как ф-ии точки пр-ва и времени и опред напр поля:

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}, \quad \bar{H} = [\nabla\bar{A}]$$

Зная обобщенный потенциал U, силу Лоренца можно представить в виде

$$\bar{F}_л = e\bar{E} + [\dot{\bar{r}}\,\bar{H}]$$

$$\bar{F}_л = -\bar{\nabla}U + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\bar{r}}}\right)$$

Докажем, что $\bar{F}_л = -\bar{\nabla}\left(-\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) + e\varphi\right) + \frac{d}{dt}\left(-\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) + e\varphi\right) =$

$$= \frac{e}{c}\bar{\nabla}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) - e\bar{\nabla}\varphi - \frac{e}{c}\frac{d\bar{A}}{dt} = -e\bar{\nabla}\varphi + \frac{e}{c}(\dot{\bar{r}}\,\bar{\nabla})\bar{A} +$$

$$+ \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}}[\bar{\nabla}\bar{A}]] - \frac{e}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \frac{e}{c}(\dot{\bar{r}}\,\bar{\nabla})\bar{A} = e\bar{E} + \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}}\bar{H}]$$ ч.т.д.

Ф-я Лагранжа заряж частицы во внеш э/м поле имеет вид: $L = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 + \frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}}) - e\varphi$

Ур-е Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\bar{r}}} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\bar{r}}} = -\frac{\partial U}{\partial\bar{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{\bar{r}}} \Rightarrow m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_л = e\bar{E} + \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}}\bar{H}]$$

В общ сл сила Лоренца м.б. представлена как обобщ сила: $Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$ (1)

Докажем это по опр обобщ силы
$$Q_j = F\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{\bar{r}}}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j},$$ учитывая,

что $\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial\dot{\bar{r}}}{\partial\dot{q}_j}$ имеем $Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\bar{r}}}\frac{\partial\dot{\bar{r}}}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial\dot{\bar{r}}}\frac{\partial\dot{\bar{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} =$
$= \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$ Обобщ. потенциал, с помощью которого опр. силы вида (1) д.б. линейной формой отн-но обобщ. скоростей, т.к. в противном

случае обоб. пот имеет вид

$$U = U^0((q),t) + \sum_{k=1}^{S} U_k((q),t)\dot{q}_k = U^{(1)} + U^{(0)}$$

Тогда $Q_j = -\frac{\partial U^{(0)}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{S}\left(\frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}^k$

Т.о. при наличии обобщ. потенц сил ф-я Лагранжа представлена в виде $L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)}$

Пусть $\bar{H} = const$, $\parallel Oz$, т.е. $\begin{cases} \bar{H} = H_0 \bar{e}_z \\ \bar{E} = \bar{E}_0 \end{cases}$ $A, \varphi - ?$

1) Рассмотрим декартовые координаты: $q_i = (x, y, z)$

причем $H_0\bar{e}_z = \bar{H} = rot\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = H_0 \end{cases}$

Данная сист не имеет решения

Будем искать ЧР с $A_z = 0$. $\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow A_y \neq A_y(z)$ из отк.

$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \Rightarrow A_x \neq A_x(z)$ из отк.

$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = H_0$. Выберем калибровку потенциала

$$\bar{A} = \frac{1}{2}H_0(-y\bar{e}_x + x\bar{e}_y + 0\bar{e}_z)$$

$A_y = \frac{1}{2}H_0 x$, $A_x = -\frac{1}{2}H_0 y \Rightarrow \bar{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\cancel{\frac{\partial A}{\partial t}} \Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_0 = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = -(\bar{E}_0\bar{r}) + \cancel{f(t)}$ положим $=0$

Тогда $L = \frac{m}{2}((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2) + \frac{eH_0}{2c}(-y\dot{x} + x\dot{y}) + e(\bar{E}_0\bar{r})$

2) цилиндр координаты $q_i = (\rho, \varphi, z)$: $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot{\varphi} + e[\bar{E}_0\bar{r}]$.

3) сферические координаты: $q_i\ (r, \theta, \varphi) = L = \frac{m}{2}((\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2) + \frac{eH}{2c}r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} + e[\bar{E}_0\bar{r}]$

Пусть $\bar{A} = (0; -xH, 0)$;

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}(-xH\dot{y})$$

1) $\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{e}{c}H = const$

2) $\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = const$

3) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $Q^d = 0 \Rightarrow E = const = \frac{\dot{x}^2 m + \dot{y}^2 m + \dot{z}^2 m}{2}$

(11) Малые колеб. динам систем

Связи наложенные на систему стационарны, голономны, идеальны, внешние силы не завис от t явл потенциальными

В положении равновесие все обобщ силы = 0

$\hat{F}_1 |_{q_j = q_{j\,eq}} = 0 \quad \hat{F}_2 |_{q_j = q_{eq}} = 0$

мы рассматрива $F_s = 0$
системы с потенц силами

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0$$

Реш этих ур-й определяют те значение координат, при кот система м.б. в равновесии. Этих положений м.б. несколько, уст. и неустой

Устойчивость удобно рассматривать в фазовом 2s-мерном пр-ве. (пр-во сост) оси $q_1, \dots q_s$ и $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_s$

Ур-е Лагранжа удобно записать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = q_j, \quad j = \overline{1,s}$$

Уравнение опред некоторое движ сист $q_j^0(t)\ \varepsilon_j^0(t)$; подлеж исследов. на уст невозм движении

нач.усл. $q_i^0 |_{t=t_0} = q_i^0(t_0), \dots q$

$\varepsilon_1^0 |_{t=t_0} = \varepsilon(t_0),$

теперь даем приращение при $t = t_0$,

$q_1 |_{t=t_0} = q_1^0(t_0) + \delta q$
$\varepsilon_1 |_{t=t_0} = \varepsilon_1^0(t_0) + \delta \dot{q}_i$ => соотв этим усл движение

назыв возмущени

отклонн $x_j = q_j - q_j^0$
$y_j = \varepsilon_j - \varepsilon_j^0, \; j = \overline{1,s}$ возмущен

невозм движ отвеч нулевые знач x_i и y_j

Опред. Ляпунова Пусть для сколь угодно малых положени в-н $\varepsilon(q)$ и $\varepsilon(\dot{q})$ можно найти такие положения в-ны $\delta(q)$ и $\delta(\dot{q})$, чтобы $\forall t > t_0$ все $|x_j| < q_{q_j}; |y_j| < \varepsilon_{q_j}$,

если только при $t = t_0$ все $|x_{j}| < \delta q_i \; |y_j(t_0)| < \delta q_i$ то невозм состояние движения $q_j^{(0)} = q_{ij\,eq}, \; q_s(t) = 0$ устойчиво, а полож $q_{j\,eq}$ называется положением уст равновесие

Теорема Лагранжа. Положение равновесия консерв. голономной системы устойчиво, если в полож. равновесия U имеет изолир. минимум

Опред. Минимум U назыв. изолированным, если в некоторой окр. положения равновесия Δ_j в кот. U минимальна, нет других экстремумов

если при $|q_j - q_{j\,eq}| < \Delta_j \Rightarrow U(q) \geq U(q_{eq})$

Теор. Ляп. если для диф. ур-е возм. движения можно найти знакоопр. ф-ю V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих ур-ий была бы знакопостоянной ф-ей противоп. знака с V или тожд. $= 0$, то невозм. сост. устойчиво.

(11) Задача особств колеб сист явл задачей о движ вблизи уст. полож равновесие.

Разложим T и U в окр q_{jeq}.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}((q_{eq}))\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$U=U(q_{eq})+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_j}\Big|_{q=q_{eq}}(q_j-q_{j\,eq})+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\partial q_k}\cdot$$

$$\cdot(q_j-q_{j\,eq})(q_k-q_{k\,eq})$$ в т. рав н $\frac{\partial U}{\partial q_j}\Big|_{q=q_{eq}}=0.$

(все обобщ сил вт. равн. обращ в ноль).

введем $x=q_j-q_{j\,eq}$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}=a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k\ ,\quad U=\frac{1}{2}\sum g_k x_j x_k$$

$$c_{jk}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\partial q_k}\Big|_{q=q_{eq}}$$

Для min. условие $c_{11}>0$ $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}>0$

равн. уст $\rightarrow$

$$h=\frac{1}{2}\sum_{jk=1}^{s}a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k-\frac{1}{2}\sum_{jk}^{s}c_{jk}\lambda x_k$$

Ур. Л. $\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\ddot{x}_k+c_{jk}x_k)=0,\ j=\overline{1,s}$

Реш. ищем в виде $x_k=C_k e^{\lambda t}$

Подст $\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda^2+c_{jk})C_k=0$ $\rightarrow$ имеем 2s разл. корней

$\det(a_{jk}\lambda^2+c_{jk})_{j,k=1}=0$

λ_α - корни хар. уравнение, допустим нет кратных корней

в-ны C_k^α - амплитуды, приним. собст зн. λ_α

общ реш : $x_k=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2s}C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t}$

для мех сист со стац связями λ_α мнимый

Реш $x_k=\mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{s}((C_k^\alpha)^+e^{i\omega_\alpha t}+(C_k^\alpha)^-e^{-i\omega_\alpha t})$

положит вещест ω_α назыв собств част. системы

(12) Интегральные пр. механики. Действие. Экстр действ и ур-е Лагранжа. Принцип наим действия в пр-ве конфиг.

Вариац. принципы механики - положение уст св-ва которыми истинные, т.е. фактически происходящее под действ заданных сил, движение (или состояние равновесие) мех. системы отличается от всех ее кинемат возможных движений (состояний) и позволяющие получить в качестве сл-е ур-е движение или условие равновесие этой системы.

Интегральные устанавливают различие м/ду истинным движением и кинемат возможным для перемещений, соверш. системой за момент промежутка времени

$q_1, q_2, q_3 \dots q_s$, определяющие конф. системы в мом. вр t, рассматр как декартовы координаты в соотв с S-мерным пр-ве, кот и явл конфигур.

Интегр принцип - утверждение о том, как осуществ. реал движ $\Delta t = t_2 - t_1$ за конечный промежуток времени t. Тем, что было с сист до t мы не интересуемся. Но коль скоро нач и конеч моменты фиксир, считается, что мех сист при всех мысленных движ в мом вр. t проходит через т. A t_2 - B.

Принцип наим действие (принцип Гамильт - Остроград)

Реальное движение мех. системы в промеж времени от t_1 до t_2 таково, что при этом интеграл называется ф-ией действ S и $= S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$,

$L = T - U$ - лагранжиан данной системы, имеет экстремум (minimum)

Переменная t не варьируется

(13) Невырожд лагранжианы. Преобр и представл ур-й Лагранжа в эквив. форме ур-й Гамильтона с одной цикл несвой координатой консерватив система с 2 степ свободы и одной цикл коорд.

Требование невырожденности Лагранжиана:

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\right) \neq 0.$$

$$H = H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot q_i - \mathcal{L}(q, \dot q, t)$$

Переход $\mathcal{L} \to H$ - преобр. Лежандра

Переход от одного набора незав переменных к другому набору делается с помощью преобр Лежандра

полный дифф $L \to dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i$;

$$dL = \sum \dot p_i dq_i + \sum p_i d\dot q_i$$

$$\sum p_i d\dot q_i = d(\sum p_i \dot q_i) - \sum \dot q_i dp_i$$

$$d\,(\underbrace{\sum p_i \dot q_i - L}_{H(p,q,t)}) = -\sum \dot p_i dq_i + \sum \dot q_i dp_i$$

$H(p,q,t)$ - энергия системы (гамильтонова ф-я системы)

$$dH = -\sum \dot p_i \cdot dq_i + \sum \dot q_i dp_i$$

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ур-я Гамильтона

Они представляют систему 2s диф. ур-й I порядка и 2s неизв. ф-й $p(t)$ и $q(t)$

Эти уравнения назыв каноническими

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot p_i$$

подстав сохр.

урав. Гамильт. они

получим $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

если ф-я Гамильтона не з-т от t явно, мы приходим к з-ну сохр энергии.

(14) Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электром. поле Ур-е Лагранжа и Гамильтона и инт движ этих ур-й для заряда e, m в поле $\bar{H}$ $(A=(yH,0,0)$.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{e}{c}(\bar{A}\dot{r}) - e\varphi$$

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + \frac{e}{c}\bar{A}$$

$$H = \bar{p}\dot{r} - L = m\dot{r}^2 + \frac{e}{c}\bar{A}\dot{r} - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{e}{c}\bar{A}\dot{r} + e\varphi = \frac{m\dot{r}^2}{2} + e\varphi$$

т.к. $\dot{r} = (\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A})\frac{1}{m}$, то ф. Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A})^2 + e\varphi$$

Интегралы движ гамильтовой системы:

Ур-е движение $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$; $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Рассмотрим $f((q),(p),t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_j}\cdot\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

Подставим ур-е движение Тогда $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{\text{скобки Пуассона}}$

Условие того, что f - интеграл движение

$\frac{\partial f}{dt} = 0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$.

Если f явно не зависит от t, т.е. $f((q),(p),t)$, то чтобы f была интегралом движение $[f,H]=0$

Если $f = H$, то $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$, значит, если H не зависит явно от t, то гамильтониан является интегралом движение.

~~Рплоскость ...~~: Ур-е Лагранж и Гамильто в одн МПС $A=(yH,0,0)$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}(\bar{A}, \dot{r})$$

$B = \text{rot}\,\bar{A}$

$\bar{A} = \text{rot}\,\bar{H}$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}yH\cdot\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + \frac{e}{c}yH) = 0. \quad m\ddot{x} + \frac{e}{c}H\dot{y} = 0.$$

(15) Скобки Пуассона. и интегралы движения. св-ва скобок Пуассона. Найти с помощью скобок Пуассона все инт движ в зад Кеплера

Теорема Пуассона

Тождество Якоби $[u[v,w]]+[v[w,u]]+[w[u,v]]=0$

Теорема Пуассона: если u и v - интегралы движения, то $[u,v]$ - тоже интегралы движения

Д-во: $\frac{d[u,v]}{dt}=\frac{\partial[u,v]}{\partial t}+[[u,v]H]=\left[\frac{\partial u}{\partial t};v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial t}\right]+$

$+[[u,v],H]$ // $[[u,v],H]=-[[v,H],u]-[[H,u],v]=$

$=[u,[v,H]]+[[u,H]v]$ //

Тогда: $\frac{d[u,v]}{dt}=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+[u,H],v\right]+\underbrace{\left[u,\frac{\partial u}{\partial t}+[v,H]\right]}_{=0}=0$

Для любой пары в-н u и v скобки Пуассона опред аналогично $[u,v]=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j}-\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j}\right)$

$u(q_1,\dots q_s,p_1\dots p_s,t)$ $v(q_1,\dots q_s,p_1\dots p_s,t)$

Св-ва скобок Пуассона

1) $[u,v]=-[v,u]$
2) $[u,u]=0$ 3) $[u,c]=0$
4) $[u+v,w]=[u,w]+[v,w]$
5) $[uv,w]=u[v,w]+v[u,w]$
6) $\frac{\partial}{\partial t}[u,v]=\left[\frac{\partial u}{\partial t},v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial t}\right]$

Зад. Кеп. показ, что вектор L и H явл интеграл.

~~L и P~~

~~З Кеп. (явл. инт. $\partial 6$)~~

$[p_x,L_x]=[p_y,L_y]=[p_z,L_z]=0$

$[p_y,L_y]=p_z$, $[p_y,L_z]=p_x$, $[p_z,L_x]=p_y$

$[p_y,L_x]=-p_z$, $[p_z,L_y]=-p_x$, $[p_x,L_z]=-p_y$

$$H=\frac{p_1^2+p_2^2}{2m}+\frac{k_1q_1^2}{2}+\frac{k_2q_2^2}{2}$$

$k_1\neq k_2$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\right]+\frac{k_1q_1^2}{2}+\frac{k_2q_2^2}{2}=0$$

$S = -Ht + S_1(q_1) + S_2(q_2)$

$g_1(q_1, p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} = \alpha_1$

$g_2(q_1, p_2) = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = \alpha_2$

$S_1(q_1) = \int \sqrt{2m\left(q_1 - \frac{k_1 q_1^2}{2}\right) dq_1}$, $S_0 = S_1(q_1, \alpha_1) + S_2(q_2, \alpha_2)$

$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_i} dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_1(q_1) dq_1$; $\frac{p_i}{2m\alpha_i} + \frac{k_1 q_i^2}{2\alpha_i} = 1$

$a = \sqrt{2m q_i}$ $b = \sqrt{\frac{2q_i}{k_i}}$ $H = \alpha_1 + \alpha_2$

$J_1 = \frac{1}{2\pi} \pi \frac{2a\sqrt{m}}{\sqrt{k_i}} = \alpha \sqrt{\frac{m}{k_i}}$ $H = \sqrt{\frac{k_1}{m}} J_1 + \sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2$

(16) Канонические преобр. Производящие ф-ии и инварианты канонических преобразований. Теорема Лиувилля.

Путем задания лишь закона преобр ОК, ФГ не свести H' => Надо одновременно задавать з-н преобр импульса и координат

$$(p, q) \to (P, Q)$$

$$\begin{cases} P_i = P_i(p, q, t) \\ Q_i = Q_i(p, q, t) \end{cases}$$

Тогда старая ФГ: $H = H(p, q, t)$

Новое УГ: (1) $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$ рассм исключени сист без диссипат

Опр1: Канонич преобразования - преобр q и p, кот для $\forall$ ур-й (1) не имеют общего вида канонич гамильтоновой системы: т.е. $\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}$; $\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$

В отличие от ЛФ, когда задавая $q_i \to Q_i$ автомат. задается $\dot{q}_i \to \dot{Q}_i$, в ГФ p и q не связаны м/ду собой => Нужно задавать ОБА преобразования.

Пусть $H' = K$. В общем случае ур-е в опр 1: не выполн, однако мы хотим сохранить ковариант. УГ, а поэтому делаем преобр имп и координат кто и опр. канон преобр.

Старые УГ могут быть получены из принципа стат. действия, т.е.:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)\right) = \int_{t_1}^{t_2} p_i\,dq_i - H dt$$

$\delta S_1 = 0$ предполагается, что $q_i(t_{1,2}) = fixed$.

1 „Нов" УГ имеет тот вид, что и „старые"

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}; \quad S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i\,dQ_i - K dt\right),$$ так, что $Q_i(t_1, t_2) = fix$

$\delta S_2 = 0$ => „Нов" УГ

Для того, чтобы вып и У Гетаринов одновременно S_1 и S_2 достиг экстр одноврем.

$cS_1 = S_2 + const$

Проставить! $const = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{F_1(Q,q,t)}{dt} = F_1(Q,q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} =$

$= F_1(Q(t_2), q(t_2), t_2) - F_1(Q(t_1), q(t_1), t_1) = F_1(t_2) - F_1(t_1)$

$c\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i dQ_i - K dt\right) + \int_{t_1}^{t_2} dF_1(Q,q,t)$

$\Rightarrow c \left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) = \sum P_i dQ_i - K dt + dF_1(Q,q,t)$

$\Rightarrow q, Q$ в нашем смысле явл независит

$dF_1(Q,q,t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i$

$$\begin{array}{l} dq_i: \\ dQ_i: \\ dt: \end{array} \begin{cases} cp_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ 0 = P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ -cH = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Утв: Необх и достаточно и дост усл. канонич преоб $p(p,q) \to (P,Q)$ явл $\exists$ хотя бы от одной из них произв ф-й

Утв: 1) Если $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}\right) \neq 0$, то Н и д. усл канонических преобр канонич преобр переменных

$\begin{cases} P_i = P_i(p,q,t) \\ Q_i = Q_i(p,q,t) \end{cases}$ явл $\exists$ ф-ии $F_1(Q,q,t)$, уд. $\begin{cases} cp_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases}$ $K = cH - \frac{\partial F}{\partial t}$

2) если $\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$, то $\exists$ пр. ф. и $F_2(q,P,t)$

$\begin{cases} cp_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \end{cases}$
$K = cH + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

3) $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$; $\begin{cases} cq_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \end{cases}$

4) $\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$ $\begin{cases} Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ cq_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \end{cases}$

(16) Теорема Лиувилля: Рассм. область g в фазовом пр-ве дан сист. Рассм эволюцию состояний $(q^{(1)}, p^{(1)}) \in g$ перейдет в $(G^{(2)}, p^{(2)})$ так, что g отод G. Выясним, как соотношение фаз. объемы этих областей

$$dS(q^{(1)}, t_1, q^{(1)}, t_2) = \sum_{\alpha=1}^{s} [\bar{p}_\alpha (t_2) dq_\alpha^{(2)} - \bar{p}_\alpha (t_1) dq_\alpha^{(1)}] - \bar{H}(t_2)dt_2 + \bar{H}(t_1)dt_2,$$

т.к $dt_2 = dt_1$, то

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha (t_1) dq_\alpha^{(1)} - \bar{H}(t_1)dt_1 = \sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha (t) dq_\alpha^{(2)} - \bar{H}(t_2)dt_1 - d\,S(q^{(1)}, t, q^{(2)}, t_1, t)$$

Т.к кон сост сист однозн опр нач усл соотв м/ду точками областей g и G равны, т.е.

ФАЗОВ объем сохр при движ системы

(17) Принцип наим действия в расшир фазовом пр-ве и канон ур-е Гамильтона.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt L=\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i p_i\dot q_i - H(p,q,t)\right)=S[p(t),q(t)]$$

Принцип стац действ

$$0=\delta S=S[p(t)+\delta p(t), q(t)+\delta q(t)]-S[p(t),q(t)]=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\sum_i (p_i+\delta p_i)(\dot q_i+\delta\dot q_i)-H(p+\delta p, q+\delta q, t)-\sum_i p_i\dot q_i+H(p,q,t)\right\}=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i (\cancel{p_i\dot q_i}+p_i\delta\dot q_i+\delta p_i\dot q_i+\delta p_i\cdot\delta\dot q_i-\cancel{p_i\dot q_i})+(-H(p,q,t)-\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i-\right.$$

$$-\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+H(p,q,t) \Rightarrow \left[\delta\dot q_i=\frac{d}{dt}\delta q_i\right]=\sum_i^s p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}\xrightarrow{}0 +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_i^s\delta p_i\left(\dot q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\sum_i^s\delta q_i\left(\dot p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right\}dt$$

т.к. все комбинации δq_i δp_i независимы и произв, то это возможно, только если коэф при всех δq_i и δp_i будут $=0$, т.е.

$$\begin{cases}\dot q_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i} & i=\overline{1,s}\\ \dot p_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}$$

что есть канонич ур-е Гамильтона

Действие как ф-ия обобщ коорд. и ур-е Гам-Якоби.

1) Рассмотрим два близких действие. Траектории системы одна из которых определяется $q_\alpha(t)=q_{\alpha 1}$, $q_\alpha(t_2)=q_{\alpha(2)}+\delta q_{\alpha(2)}$ $\alpha=\overline{1,s}$

другая $q_\alpha(t_1)=q_{\alpha(1)}$, $q_\alpha(t_2)=q_{\alpha(2)}$ $\alpha=\overline{1,s}$

$$S(q_1,t_1,q_2+\delta q,t_2)-S(q_1,t_1,q_2,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\bar p_\alpha\delta\dot q_\alpha+\dot{\bar q}_\alpha\delta\bar p_\alpha-\frac{\partial H(q,\bar p,t)}{\partial q_\alpha}\Big|_{q=\bar q}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\delta q_\alpha-\frac{\partial H(\bar q,p,t)}{\partial p_\alpha}\Big|_{p=\bar p}\delta\bar p_\alpha\right)dt=\sum_{\alpha=1}^{s}\bar p_\alpha\delta\bar q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\cdot$$

$$\cdot\left(-\left[\dot{\bar p}_\alpha+\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_\alpha}\Big|_{q=\bar q}\right]\delta q_\alpha+\left[\dot{\bar q}_\alpha-\frac{\partial H(\bar q,p,t)}{\partial p_\alpha}\Big|_{p=\bar p}\right]\delta\bar p_\alpha\right)dt$$

т.к $\bar q,\bar p$ - действ, т.е. удов ур-ю Гамильт

$$\Rightarrow\frac{\partial S}{\partial q_2}=S(q_1,t_1,q_2+\delta q_2,t_2)-S(q_1,t_1,q_2,t_2)=\sum_{\alpha=1}^{s}\bar p_\alpha(t_2)\delta q_{\alpha(2)}$$

аналогично: $\dfrac{\partial S}{\partial q_{\alpha 2}}=\bar p_\alpha(t_2)$ $\alpha=\overline{1,s}$

$$\frac{\partial S}{\partial q_{\alpha 1}}=-\bar p_\alpha(t_1)\quad \alpha=\overline{1,s}$$

от координат

2) Две близкие траектории $\begin{cases} q_\alpha(t) = q_{\alpha 1}, \; q_\alpha(t_2+\delta t_2) = q_{\alpha 2} & (1) \\ q_\alpha(t_1) = q_{\alpha 1}, \; q_\alpha(t_2) = q_{\alpha 2} & (2) \end{cases}$

$S(q_1, t_1, q_2, t_2+\delta t_2) - S(q_1, t_1, q_2, t_2) = \int_{t_1}^{t_2+\delta t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} (\bar{p}_\alpha + \delta \bar{p}_\alpha)(\dot{\bar{q}}_\alpha + \delta \dot{\bar{q}}_\alpha) - H(\bar{q}+\delta\bar{q}, \bar{p}+\delta\bar{p}) \right) dt$

$- \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}_\alpha - H(\bar{q}, \bar{p}, t) \right) dt$

от времени

Разлагая первый интеграл по δt_2 с помощью ф-лы Ньютона-Лейбница

$S(q_1, t_1; q_2, t_2+\delta t_2) - S(q_1, t_1, q_2, t_2) = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}_\alpha - \bar{H} \right)\Big|_{t=t_2} \delta t_2 +$

$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\bar{p}_\alpha \delta \dot{\bar{q}}_\alpha + \dot{\bar{q}}_\alpha \delta \bar{p}_\alpha - \frac{\partial H(q, \bar{p}, t)}{\partial q_\alpha}\Big|_{q=\bar{q}} \delta \bar{q}_\alpha - \frac{\partial H(\bar{q}, p, t)}{\partial p_\alpha}\Big|_{p=\bar{p}} \delta \bar{p}_\alpha \right) dt =$

$= \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}_\alpha - H \right)\Big|_{t=t_2} \delta t_2 + \left[\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha \delta \bar{q}_\alpha \right] \Big|_{t_1}^{t_2}$

Напишем усл (1) для $\bar{q}(t) + \delta \bar{q}(t)$: $\dot{\bar{q}}_\alpha(t_2)\delta t_2 + \delta q_\alpha(t_2) = \bar{q}_\alpha(t_2)$

$(\bar{q}_\alpha + \delta \bar{q}_\alpha)(t_2 + \delta t_2) = q_{\alpha 2} = \bar{q}_\alpha(t_2) + \dot{\bar{q}}_\alpha$

$\Rightarrow \delta \bar{q}_\alpha(t_2) = -\dot{\bar{q}}_\alpha(t_2)\delta t_2$

$S(q^{(1)}, t_1, q^{(2)}, t_2 - \delta t_2) - S(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2) = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha(t_2) \dot{\bar{q}}_\alpha(t_2) - \bar{H}(t_2) \right) \delta t_2 -$

$- \sum_{\alpha=1}^{s} \bar{p}_\alpha(t_2) \dot{\bar{q}}_\alpha(t_2) \delta t_2 = \boxed{-H(t_2)\delta t_2 = \frac{\partial S}{\partial t_2} \delta t_2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\bar{H}(t_2) \quad \frac{\partial S}{\partial t_1} = \bar{H}(t_1)}$

Рассм сист с ФГ: $H = H(p, q, t)$. Если провести канон преобр $(p, q) \to (P, Q)$: $K = cH + \frac{\partial F}{\partial t}$

Проведем невот. каноничн преобр $\Rightarrow K = 0$: $\boxed{0 = H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t}}$

но для $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial t}, t\right) = 0$.

ур е Г-Я.

3) Пусть две замкнутые кривые l_1, l_2 охватывают одну и ту же трубку фазовых траекторий, тогда интегр форм $p\,dq - H\,dt$ по ним декартовы

$\oint \bar{p}\,d\bar{q} - \bar{H}\,dt = \oint \bar{p}\,d\bar{q} - \bar{H}\,dt$

Ф-ма $p\,dq - H\,dt$ наз инт. инв Пуан- Картона.

Д-во: Фаз траектории - это линии ротора форм $p\,dq - H\,dt$, а интегралы по охват. одну трубку ротора замкнуты кривым одинаковы по линиям Стокса.