① Движение мех систем при налож. связях. Голономные связи. Принцип вирт. перемещ. Принцип Даламбера

Связи — не вытекающие из ур-й движения ограничения, налагаемые на полож. скорости и ускорения точек мех системы.

Реакции связей — силы с котор. тела осуществ. связи действ на точки сист.

(1) Для $\forall t$: $f_\alpha(\bar{r}_1, \bar{r}_2, .. r_n, t) = 0 \quad \alpha = \overline{1,k}$

Если все ур-е связей можно представить в виде (1) до интегрирования ур-й движ (т.е. если можно проинт. ур-е связей нез-мо от ур-й движ) то связи — голономные. Если ур-е связей проинт нельзя, так, что в них остаются скорости, то связи — неголономные.

Трудности: 1) не все $\bar{r}_i$ незав (т.к. связ опр соотн) => не все ур-е движ явл незав.
2) силы возн в рез-те действ связей заранее не заданы

Задача сводится к решению

$3N+K$ - скал. ур-й
$6N$ - незав. ф-й
$(3N: \bar{r}_i;\ 3N: \bar{R}_i)$

$$\begin{cases} m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i & (i = \overline{1,N}) \text{ ур-е движ} \\ f_\alpha(\bar{r}_1, \bar{r}_2 .. \bar{r}_n, t) = 0 & (\alpha = \overline{1,k}) \text{ ур-е связей} \end{cases}$$

Если $K = 3N$ - связи полностью опр движ сист. Если $K < 3N$, то рассм зад. явл опр. только когда известно, $6N - (3N+k) = 3N - k = S$ независ соотн. меж/ду полож. точек и реакциями связей

Виртуальные перемещ. сист - бескон.мал. измен ее конфигурации, согласующееся со связями (налож на нее) в данный мом. времени, т.е если:

$f_\lambda(\bar r_1, \bar r_2, \ldots \bar r_n, t) = 0 \quad \lambda = \overline{1,k}$

то и

(2) $f_\lambda(\bar r + \delta r_1, \ldots \bar r_n + \delta r_n, t) = 0 \quad \lambda = \overline{1,k}$ | одновременно

Это геометр понятие, не связ. с движением. Это вариации ф-й $\delta \bar r_i(t)$ при неизм. значении аргумента, т.е. малые изм-я вида ф-й. Это не перемещения точек со временем, а элементарные отрезки, кот по опред, должны удовл. уравн связи в том же мом врем t, что и $\bar r_i(t)$

Рассматр (2) до лин члена:

$$f_\lambda(\bar r_1, \bar r_2, \ldots \bar r_n, t) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_i}\delta \bar r_i(t)\right) = 0 \quad \lambda = \overline{1,k}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_i}\delta \bar r_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_i f_\lambda \delta \bar r_i) = 0 \quad \lambda = \overline{1,k}$$

Т.к число ур-й $K < 3N$, то в выборе $\delta \bar r_i$ имеется произв. После ур (5) произв будут $S = 3n - k$ - ур-й.

Пусть Σ всех работ всех реакций связей на виртуальных перемещ. точек системы $= 0$,

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{n} \bar R_i \delta \bar r_i = 0.$$

Тогда связи - идеальные.

Рассмотрим несвободную сист. мат точек в равновесии.

Тогда $\bar\Phi_i = \bar R_i + \bar F_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\Phi \cdot \delta \bar r_i) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar\Phi \cdot \delta \bar r_i) = \sum_{i=1}^{n}(\bar F_i \cdot \delta \bar r_i) + \sum_{i=1}^{n}(\bar R_i \cdot \delta \bar r_i) = 0$$ | связи и идеал и голон-ные

если связи идеальные, т.е. если $\sum_{i=1}^{n} (R_i \cdot \delta \bar{r}_i) = 0$, то

и $\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i) = 0$

Постулат: Виртуальная работа сил реакции всегда $= 0$ на $\forall$ виртуальном перемещении, не наруш. заданных кинемат условий

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i \delta \bar{r}_i) = - \sum_{i=1}^{n} (\bar{R}_i \; \delta \bar{r}_i)$$

$\bar{F}_i \neq 0$, т.к. не все $\delta \bar{r}_i$ - независимы

Включим $m_i \ddot{\bar{r}}_i$ в $\bar{\Phi}_i$ и далее применим принцип виртуал. перемещ. к „мех сист", на кот действ силы $\bar{\Phi}_i$, тогда:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} ((m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i) \cdot \delta \bar{r}_i) = 0$$

– принцип Даламбера

R_i – сила реакции действ на част. i

$\delta \bar{r}_i$ – вирт. перем.

S - min, ~~...~~ число кот-х необх для однозн. задания полож. тел сист.

② Уравн. Лагранжа с неопр мн-ми (1-ого)
Законы сохр мех сист при нал связей
В силу идеальности и голономности связей
$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{R}_i\,\delta\bar{r}_i)=0;\quad \sum_{i=1}^{N}(\nabla_i f_\lambda)\delta\bar{r}_i=0\ (\lambda=\overline{1..k})$$
умножая на неопр сил мн-ль λ_λ $(\lambda=\overline{1,..k})$
и складыв получ рез-ты =>
$$(*)\quad \sum_{i=1}^{N}\{\bar{R}_i-\sum_{\lambda=1}^{k}\lambda_\lambda\nabla_i f_\lambda\}\delta\bar{r}_i=0;$$
в кот к вариац коорд. явл зав-ми, а $3N-k$ - независим.
Складывая с общим ур-ем механики:
$$\sum_{i=1}^{N}\{(m_i\ddot{\bar{r}}_i-\bar{F}_i-\sum_{\lambda=1}^{k}\lambda_\lambda\bar{\nabla}_i f_\lambda)\cdot\delta\bar{r}_i\}=0.$$
Т.к. $\delta\bar{r}_i$ - независ, то коэф перед ним $=0$
$$\Rightarrow m_i\ddot{\bar{r}}_i=\bar{F}_i+\sum_{\lambda=1}^{k}\lambda_\lambda\bar{\nabla}_i f_\lambda,\ i=\overline{1,N}$$ - ур-е Лагранжа 1-го рода
=> М/gy реакциями идеальных голономных связей и ф-ями f_λ, опред. ур-я связей, имеет место соотнош-е
$$\bar{R}_i=\sum_{\lambda=1}^{k}\lambda_\lambda\bar{\nabla}_i f_\lambda,\ i=\overline{1,N}$$ - силы реакции связей
Законы ИМ или З.кинет. мом. и энергии системы при наличие связей м.б. получены из ур-е Лагран.
Т.к. по отношению к исслед. системе связи м.б как внутр, так и внешние
=>
$$\dot{\bar{P}}=\bar{F}^{ext}+\bar{R}^{ext}\quad -\text{ЗСИ}$$
$$\dot{\bar{L}}=\bar{M}^{ext}+\bar{M}_R^{ext}\quad -\text{ЗСМИ}.$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} (\bar{F}_i^d \cdot \dot{\bar{r}}_i) + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial t} - 3(\text{мех эн.})$$

$$\bar{R}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \bar{R}_i^{ext}$$ – сумма реакц внеш. связей

$$\bar{M}_R^{ext} = \sum_{i=1}^{N} [\bar{r}_i\ \bar{R}_i^{ext}]$$ – сумма моментов реакц. внеш связей

Заметим: Полная мех энергия несвободной сист сохраняет, лишь при усл. стац внешних потенциальных сил, отсутствие диссипат сил и стацион. всех связей.

③ Уравнения Лагранжа в нез коорд (вывод из общ ур-я мех) (ур-е Дал-Лагр)

Общ ур-е механики $\sum\limits_{i=1}^{n}\{m_i\ddot{\bar r}_i-\bar F_i\}\delta\bar r_i=0$

введем понятие независ обобщ коорд. Таким коорд. по опред. являются любые $3N-k$ в-ны, однозначно определ. положение сист (N, k - числа точек сист. и голономных связей соотв).

Число независ координат (обобщ), равное $S=3N-k$, в случае систем с голономными связ - число степ свободы

Два требования:

1) радиус-векторы т. сист д.б. однозн ф-ми q: $\bar r_i=r_i(q_1,q_2\ldots q_s,t)$ $(i=\overline{1,N})$

2) коорд. q д.б. выбраны в соотв. с ур-ями связей т.е. $f_\alpha(\bar r_1,\ldots\bar r_N,t)\Big|_{\substack{r_1\to\bar r_1(q,t)\\ r_N\to r_N(q,t)}}=0$ $\alpha=(\overline{1,K})$.

Представим общее ур-е механики в форме ~~в~~ ур-е относительно незав. координат и их производных по времени

Для этого найдем виртуал. перемещ

$$\delta\bar r_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j\ (i=\overline{1,N}).$$

Подставим в общ ур-е механики и измен порядок суммир

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\bar r}_i\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{N}\bar F_i\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}\right\}\delta q_j=0$$

Преобр 1-член $\ddot{\bar r}_i\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar r}_i\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}\right)-\dot{\bar r}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}\right)$

Найдем скорости точек как ф-ии обобщ коорд

$$\dot{\bar r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\bar r_i}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial\bar r_i}{\partial t}\ (i=\overline{1,N}).$$

скорости мат точек явл. лин ф-ми вел-н $\dot q_j$,
и назыв обобщ. скоростями

с $\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}$ $\left(\begin{matrix} i=\overline{1,N} \\ j=\overline{1,S}\end{matrix}\right)$ Изменяя порядок дифф по t и q_j =>

$$\dot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j} \quad (j=\overline{1,S})$$

кин. энер сист как Σ обобщ. скорост и коорд

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{\vec r}_i)^2 \Big|_{\substack{\dot{\vec r}_1 = \dot{\vec r}_1(q,\dot q,t) \\ \dot{\vec r}_N = \dot{\vec r}_N(q,\dot q,t)}} = T(q,\dot q,t).$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j=\overline{1,S})$$; обознач:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} \quad (j=\overline{1,S})$$ (Q_j - обобщ сила, соот q_j)

Придем к общ ур-ю механики в обобщ коорд.

$$\sum_{j=1}^{S} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Из общ ур-е механики вытекают диф ур-я движения, а именно ур-е Лагранжа в нез-х коорд.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=\overline{1,S})$$

Эти ур-я спр-вы для сист с голоном идеал связями.

4) Механическая с одной коорд. Выр-ве конф. Кач. исследов. Движ вблиз точек ост-ки. Ф-ла для периода колебаний

Одномерным наз движ с одной степ свободы

1) $S=1$ вид Лагран. ф-ии $L=\frac{1}{2}a(x)\dot{(x)}^2-U(\;)$

$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i\dot{r}_i^2$ (сумма эн. всех точек)

$=\underbrace{\frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{d\bar{r}_i}{dq}\right)^2}_{\text{нек ф-я } a(q)}\dot{q}^2 \qquad a(q)=\sum_i m_i\left(\frac{dr_i}{dq}\right)^2$

$T=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$; $L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q)$

$\lambda=1,\ a(x)=m \Rightarrow L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x)$

E-интегр движ. $E=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-L=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)$

$\dot{x}=\frac{dx}{dt}\Rightarrow \dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$ $\qquad t-t_0=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$

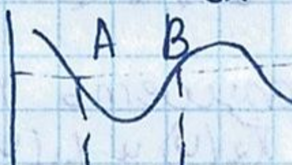
$\dot{x}\in Re$

$\cdot\ E\geq U(x)$ - усл класс-и допустимой обл. движ.

точки останов - точки, в кот. потенц энергия равна полной, а кинетич. энергия обращ в ноль

Одномерное финитное движ явл колебат

Напр в потенц ямеA B время движ от x_1 до x_2 = = от x_2 до x_1.



т.е. период $T=2\cdot$ участок x_1x_2,

т.е.

согласно $t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+const.$

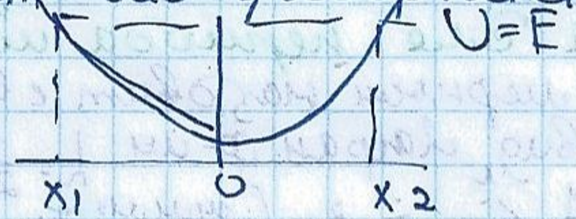
$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{d}{\sqrt{E-U(x)}}$, предел x_1 и x_2 являются корнями урав-и $U(x)=E$.

при данном значении E.

Определен потенц эн по периоду колеб.

Пусть $U(x)$ имеет вид преобр. интегр.

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$



рассматривая в нем координату X как ф-ю U. Фун-я $X(U)$ двузначна - каждое знач потенц энергии осущ. при двух различ значен. X

заменим dx на $\frac{dx}{dU}dU$, перейдем к сумме интегралов: от $x=x_1$ до $x=0$, от $x=0$ до $x=x_2$;

Пределами интегрир dU будут E и 0. => получим

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1}{dU}(U)\frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E\left(\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right)\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$ | разделим на $\sqrt{\alpha-E}$, α - параметр, и проинт по E от 0 до α

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E\left(\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right)\frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}$$

меняя порядок интегрирования

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha\left(\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right)dU\underbrace{\int_U^\alpha\frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}}_{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}\,(x_2(\alpha)-x_1(\alpha)),$$ учтено $x_2(0)=x_1(0)=0$

зам α на U =>

$$x_2(U)-x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}},$$ по извест ф-ии $T(E)$

определяется разность $x_2(U)-x_1(U)$

Сами ф-ии $x_2(U)$ и $x_1(U)$ остаются неопред. Это значит, существ не одна, а бесчисл мн-во кривых $U=U(x)$, приводящ к заданной зав-ти

Неоднозначность исчезает, если симметр о/о оси ординат.

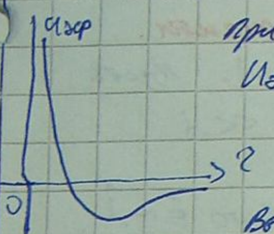
20

1. Задача Кеплера. Вектор интеграл Лапласа.

Важнейш. случ. центр. полей являе поля, в кот. $U(r) \sim r$ и соотв. силы обратно пропорц. r^2. Сюда относ ньют. поля тяготения и кул. эл-стат. поля.

Рассм. поле притяжения:

$U = -\alpha/r$; $U_{эф} = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{M^2}{2mr^2}$; при $r \to 0$ $U_{эф} \to +\infty$; при $r \to \infty$ $U_{эф} \to -0$.



При $r = M^2/\alpha m$

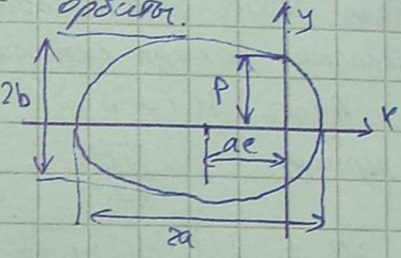
$U_{эф}$ имеет минимум $(U_{эф})_{min} = -\dfrac{\alpha^2 m}{2M^2}$. При $E > 0$ движ-е частицы инфинитно, при $E < 0$ — финитно.

Ф-ла траектории: $\varphi = \arccos \dfrac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + const$.

Выб. нач. отсчета так, что $const = 0$, и вводя $p = M^2/m\alpha$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, перепиш. ф-лу траект.

$\boxed{p/r = 1 + e\cos\varphi}$. параметр, Эксцентриситет орбиты.

В случ. $\varphi = 0$ имеем перигелий орбиты.



При $E < 0$, $\Rightarrow e < 1$ — орбита — эллипс., движ. финитно.

$a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\alpha}{2|E|}$; $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \dfrac{M}{\sqrt{2m|E|}}$

при $E = E_{min} \Rightarrow e = 0 \to$ окружность.

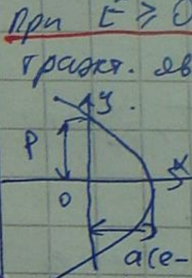
$r_{min} = \dfrac{p}{1+e} = a(1-e)$,

$r_{max} = \dfrac{p}{1-e} = a(1+e)$; Из з-на сохр-я момента $M = 2m\dot{f} = const$, проинтегр от 0 до T, получ.

$2mf = TM$, где f — площ. орбиты ; $f = \pi ab$ (эллипс.) $\Rightarrow T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\dfrac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\dfrac{m}{2|E|^3}}$

Период зав. только от энерг. частицы.

При $E \geq 0$ дв-е инфинитно, при $E > 0$ $e > 1$, т.е. траект. явл-ся гиперболой. Расст. от периг. до центра $r_{min} = \dfrac{p}{e+1} = a(e-1)$



$a = \dfrac{p}{e^2-1} = \dfrac{\alpha}{2E}$ — „полуось гиперболы.

При $E = 0$ $e = 1$, ч-ца дв-ся по параболе, $r_{min} = p/2$.
(если ч-ца нач. движ. из сост. покоя на ∞).

Для эллипт. орб. $t = \sqrt{\dfrac{m}{2|E|}}\displaystyle\int \dfrac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\dfrac{ma}{\alpha}}\int \dfrac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}$

С пом. подстановки

$r - a = -ae\cos\xi$ получ. $t = \sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}\displaystyle\int (1 - e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + const$.

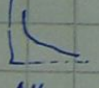
$r = a(1 - e\cos\xi)$; $x = a(\cos\xi - e)$

$t = \sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi)$; $y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi$. полному обороту соотв. изм-е ξ от 0 до 2π.

Для гип. орб. $r = a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1)$ $t = \sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi)$

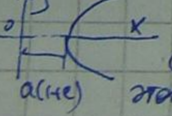
$x = a(e - \mathrm{ch}\,\xi)$, $y = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi$. $-\infty < \xi < \infty$.

В поле отталк-я $U = \alpha/r$; $(\alpha > 0)$. $U_{эф}$ монот. убывает от $+\infty$ до 0 при изм. r от 0 до ∞. Энергия только > 0, движ. инфин. Траект — гипербола.



$\dfrac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$. $r = a(e\,\mathrm{ch}\,\xi + 1)$; $t = \sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi + \xi)$

$r_{min} = \dfrac{p}{e-1} = a(e+1)$. $x = a(\mathrm{ch}\,\xi + e)$; $y = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi$.



Вектор интеграл Лапласа. При движ. в поле $U = \alpha/r$ (с любым знаком α). имеется инт-л движ-я, специф. именно для этого поля. $\boxed{[\bar{v}\bar{M}] + \dfrac{\alpha\bar{r}}{r} = const}$; Действит., ее полн. произв. по врем равна

5. Движение в центральном поле и поле диполя (канонические переменные). Найдем уравнение фазовой траектории и закон движения частицы в силовом поле, представляющем собой суперпозицию центрального поля $u(r)$ и поля диполя $\dfrac{d\cos\theta}{r^2}$, ориентированного вдоль полярной оси сферической системы координат.

Потенциальная энергия $U(r,\theta)$ частицы в этом случае может быть представлена суммой

$$U(r,\theta) = u(r) + \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

или каждым слагаемым по отдельности. Гамильтониан частицы в таком поле является сепарабельным в сферических координатах:

$$H = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right] + u(r) + \frac{d\cos\theta}{r^2} =$$
$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + u(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[p_\theta^2 + 2md\cos\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right].$$

Поэтому три первых интеграла движения можно получить просто из вида гамильтониана:

$$p_\varphi = p_{\varphi 0}$$

(координата φ — циклическая);

$$p_\theta^2 + 2md\cos\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}p_{\varphi 0}^2 = \alpha = \mathrm{const}$$

(канонические переменные θ, p_θ содержатся в гамильтониане в виде отделяющейся функции);

$$\frac{1}{2m}p_r^2 + u(r) + \frac{\alpha}{2mr^2} = E = \mathrm{const}$$

(гамильтониан не содержит явной зависимости от времени и диссипативные силы отсутствуют).

Найденные импульсы p_φ, p_θ, p_r в соответствии с теоремой Якоби равны также производным от укороченного действия по канонически сопряженным координатам: $\partial W/\partial q_\mu = p_\mu$. Поэтому

$$S = -Et + W(r, \theta, \varphi, p_{\varphi 0}, \alpha, E) =$$
$$= -Et + p_{\varphi 0}\varphi + \int d\theta \sqrt{\alpha - 2md\cos\theta - p_{\varphi 0}{}^2/\sin^2\theta} +$$
$$+ \int dr \sqrt{2m\left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}\right)}. \quad (63.37)$$

Новые результаты получаются отсюда согласно теореме Якоби в виде вторых интегралов движения по формулам

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}\right)}},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - 2md\cos\theta - p_{\varphi 0}{}^2/\sin^2\theta}} -$$
$$- \frac{1}{2}\int \frac{dr^2}{r} \sqrt{2m\left(E - u(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}\right)},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial p_{\varphi 0}} = \varphi - p_{\varphi 0}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha - 2md\cos\theta - p_{\varphi 0}{}^2/\sin^2\theta}}.$$

Постоянные β_0, β_1, β_2 определяются начальными условиями.

Эти формулы вместе с формулами для канонически сопряженных импульсов p_φ, p_θ, p_r дают в общем виде решение поставленной задачи.

$$L = \frac{m}{2}\left(\rho^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{m\omega^2\rho^2}{2}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2\rho^2}{2} = 0$$

$$S = -E_0 t + S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$$

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_\varphi}{d\varphi}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2\rho^2}{2}$$

$$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi \qquad S_\varphi = \alpha_\varphi \varphi$$

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right) + \frac{\alpha_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{m\omega^2\rho^2}{2}$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{\alpha_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right)}$$

$$S = -E_0 t + \int \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{\alpha_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right)}\, d\rho + \alpha_\varphi \varphi$$

З а д а ч а

Вычислить переменные действия для эллиптического движения в поле $U = -\alpha/r$.

Р е ш е н и е. В полярных координатах r, φ в плоскости движения имеем

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}\, dr = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Отсюда энергия, выраженная через переменные действия:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}.$$

Она зависит лишь от суммы $I_r + I_\varphi$, что означает вырождение движения — обе основные частоты (по φ и по r) совпадают.

Параметры орбиты p и e (см. (15.4)) выражаются через I_r, I_φ согласно

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2.$$

В силу адиабатической инвариантности величин I_r, I_φ, при медленном изменении коэффициента α или массы m эксцентриситет орбиты остается неизменным, а ее размеры меняются обратно пропорционально m и α.

$\nu = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{\partial E}{\partial J_\varphi}$ $\qquad$ $\underset{\text{период}}{T} = \frac{1}{\nu}$

$$\omega_i(t) = \frac{\partial \ldots}{\partial I_i} \qquad (9.226)$$

с которыми изменяются импульсы p_i (в свою очередь, сами частоты являются медленно меняющимися функциями времени).

Пример 9.10. *Адиабатическое изменение длины математического маятника.*

Определить изменение амплитуды линейных колебаний математического маятника при адиабатическом изменении длины его подвеса.

Уравнение (9.213) для случая линейных колебаний маятника имеет вид

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 + m^2gl^3\theta^2 = 2ml^2E,$$

где E — медленно меняющаяся полная энергия маятника. Интегрируя это уравнение при постоянных l и E, найдем полный интеграл

$$W = \sqrt{m^2gl^3}\left\{\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{2E}{mgl} - \theta^2} + \frac{E}{mgl}\arcsin\frac{\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mgl}}}\right\},$$

который является неоднозначной функцией θ. Приращение функции W за полный цикл изменения θ в пределах $\pm\sqrt{2E/mgl}$ (см. (9.197) и (9.224)) равно

$$\Delta W = 2\pi\frac{E}{\omega} = 2\pi I,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$, а I — переменная действия. Поскольку I является адиабатическим инвариантом, то полная энергия маятника будет пропорциональна медленно изменяющейся частоте маятника:

$$E(t) = I\omega(t). \qquad (1)$$

В соответствии с доказательством инвариантности действия I энергия в формуле (1) является энергией, усредненной по некоторому интервалу времени:

$$\overline{E} = \frac{ml^2}{2}\overline{\dot{\theta}^2} + mgl\frac{\overline{\theta^2}}{2} \qquad (2)$$

(здесь мы пренебрегли членом, пропорциональным $\dot{l}^2$, и вынесли адиабатически изменяющиеся функции за знак усреднения).

Учитывая, что маятник совершает гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой $\theta_0(t)$ и частотой $\omega(t)$, в результате усреднения получим

$$\overline{\theta^2} = \frac{\theta_0^2}{2}, \qquad \overline{\dot{\theta}^2} = \frac{\theta_0^2}{2}\,\omega^2,$$

и, таким образом, вместо (2) найдем

$$\overline{E} = \frac{mg}{2}\, l\theta_0^2. \tag{3}$$

Наконец, из формул (1) и (3) получим соотношение

$$l^{3/4}\,\theta_0 = \mathrm{const}, \tag{4}$$

согласно которому при бесконечно медленном удлинении подвеса маятника его угловая амплитуда θ_0 уменьшается, а линейная амплитуда $l\theta_0$ увеличивается; при этом энергия маятника (согласно (1)) уменьшается обратно пропорционально $\sqrt{l}$.

П р и м е р. *Определить частоты трехмерного неизотропного осциллятора.*

Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2}.$$

Уравнение Гамильтона—Якоби для укороченного действия

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right\} + \\ + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2} = \mathcal{H}_0 \tag{56.11}$$

сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$g_1\left(x \frac{\partial S_0}{\partial x}\right) = \left(\frac{dS_{01}}{dx}\right)^2 + m^2\omega_1^2 x^2 = p_x^2 + (m\omega_1 x)^2 = \alpha_1, \tag{57.11}$$

$$g_2\left(y \frac{\partial S_0}{\partial y}\right) = \left(\frac{dS_{02}}{dy}\right)^2 + (m\omega_2 y)^2 = p_y^2 + (m\omega_2 y)^2 = \alpha_2, \tag{58.11}$$

$$g_3\left(z \frac{\partial S_0}{\partial z}\right) = \left(\frac{dS_{03}}{dz}\right)^2 + (m\omega_3 z)^2 = p_z^2 + (m\omega_3 z)^2 = \alpha_3. \tag{59.11}$$

При этом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2m},$$

а переменные действия — «новые импульсы» —

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_x\,dx,\quad J_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_y\,dy,\quad J_3 = \frac{1}{2\pi}\oint p_z\,dz. \tag{60.11}$$

Видно, что в соответствующих плоскостях фазовые траектории представляют собой эллипсы с полуосями $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_1/m\omega_1}$ в плоскости $p_x x$, $\sqrt{\alpha_2}$, $\sqrt{\alpha_2/m\omega_2}$ в плоскости $p_y y$, $\sqrt{\alpha_3}$, $\sqrt{\alpha_3/m\omega_3}$ в плоскости $p_z z$ соответственно. Величины J_1, J_2, J_3 представляют собой площади этих эллипсов, деленные на 2π. Поэтому

$$J_1 = \alpha_1/2m\omega_1, \quad J_2 = \alpha_2/2m\omega_2, \quad J_3 = \alpha_3/2m\omega_3$$

и

$$\mathcal{H}_0(J_1, J_2, J_3) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 J_3.$$

Следовательно, частоты изменения импульсов p_x, p_y, p_z равны

$$\omega_x = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} = \omega_1, \quad \omega_y = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_2} = \omega_2, \quad \omega_z = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_3} = \omega_3.$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right) - \frac{L^2}{\rho^2}}\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mE_0\rho^2 - (m\omega)^2\rho^4 - L^2}\, \frac{d\rho}{\rho}$$

$$u = \rho^2 \qquad du = 2\rho\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mE_0 u - (m\omega)^2 u^2 - L^2}\, \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left[-(m\omega)^2 u + 2mE_0 - \frac{L^2}{u}\right] du}{\sqrt{2mE_0 u - (m\omega)^2 u^2 - L^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(-m\omega)^2\, u\, du}{\sqrt{-(m\omega)^2 u^2 + 2mE_0 u - L^2}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{2mE_0\, du}{\sqrt{-(m\omega)^2 u^2 + 2mE_0 u - L^2}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{-L^2 \frac{du}{u}}{\sqrt{-(m\omega)^2 u^2 + 2mE_0 u - L^2}}$$