Малые колебания (линейные) в системе с одной степенью свободы

Чтобы в системе возбуждались колебания:

1) $L(q\dot q t) = \frac{a(q)}{2}\dot q^2 - U(q)$ | a и U не завис. t

$H = \dot q \frac{\partial L}{\partial \dot q} - L$, $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a(q)}{2}\dot q^2 + U(q) = H_0}$

— сохранение полн. энергии

2) $\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$, $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$ — строгий лок. минимум потенц. энергии

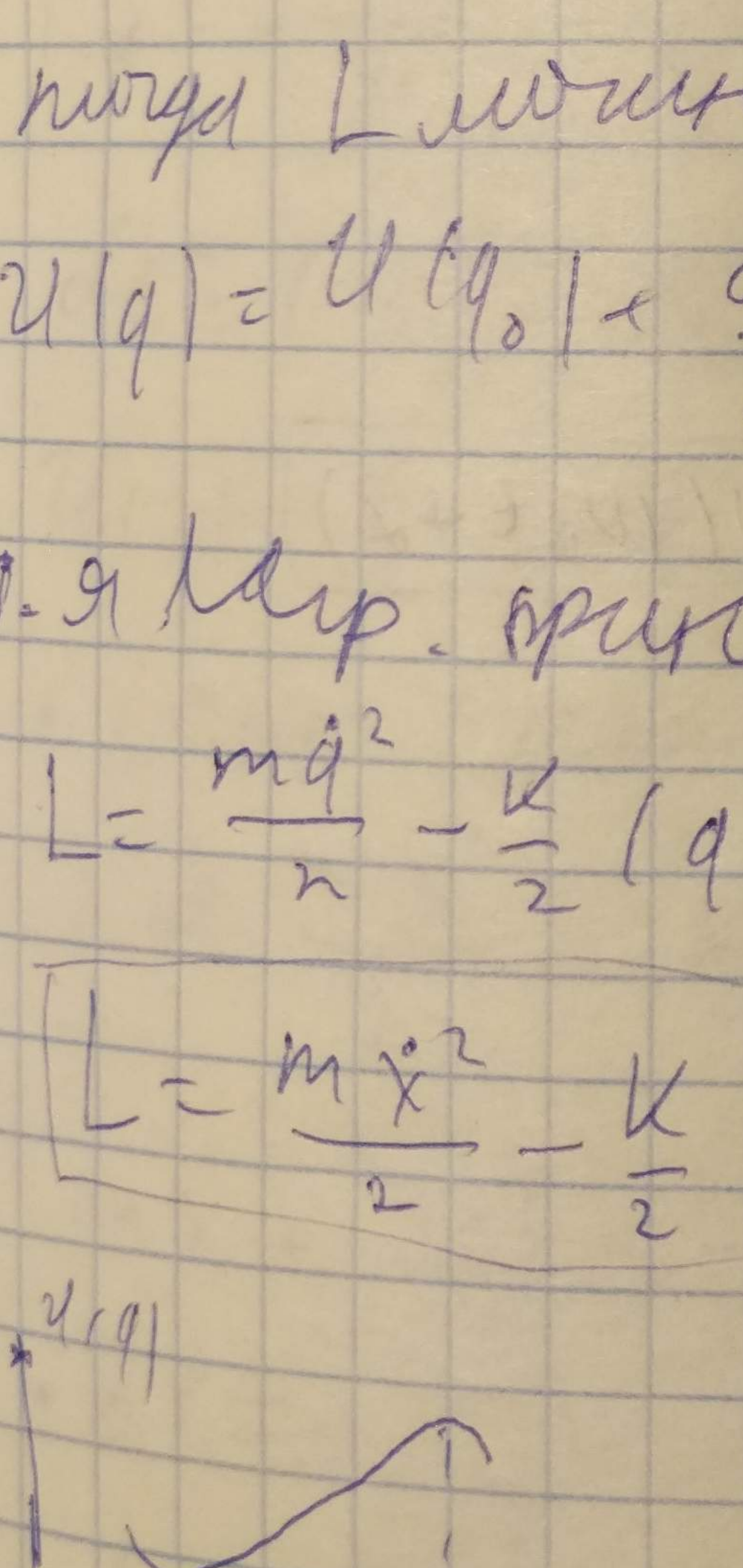
тогда L можно разложить в ряд:

$$U(q) = U(q_0) + \overset{=0}{\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0}}(q-q_0) + \frac{k}{2}(q-q_0)^2 \qquad k = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

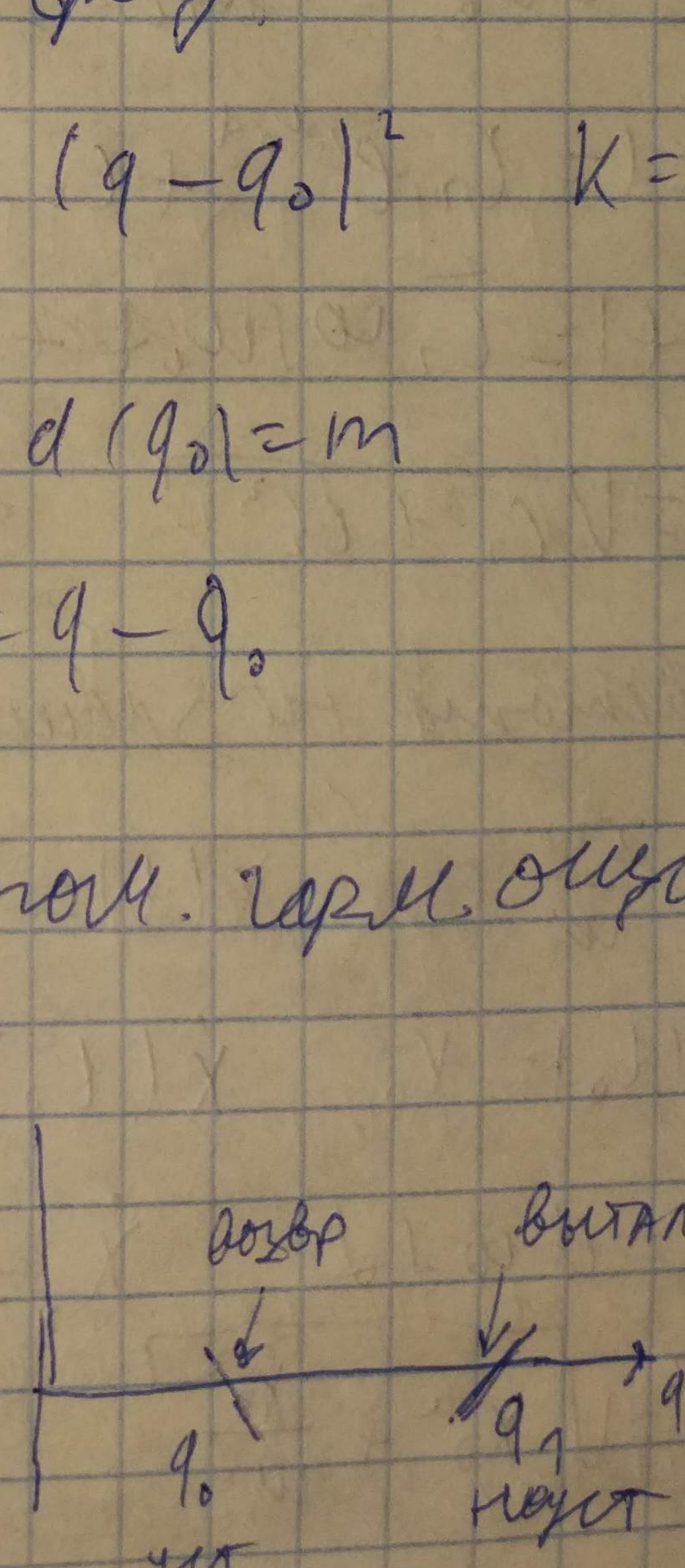
ф-я Лагр. принимает вид: , $a(q_0) = m$

$$L = \frac{m\dot q^2}{2} - \frac{k}{2}(q-q_0)^2, \quad x = q - q_0$$

$\boxed{L = \frac{m\dot x^2}{2} - \frac{k}{2}x^2}$ — ф-я одном. гарм. осциллят.



$$\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0,\,q_1} = 0$$



2)

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = -kx \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$C(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t) = \tilde{C}_1 \cos\omega_0 t + \tilde{C}_2 \sin\omega_0 t = \boxed{a\cos(\omega_0 t + \alpha)}$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad tg\,\alpha = -\frac{C_2}{C_1}$$

Частота не зависит от НУ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , x(t) = x(t+T)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

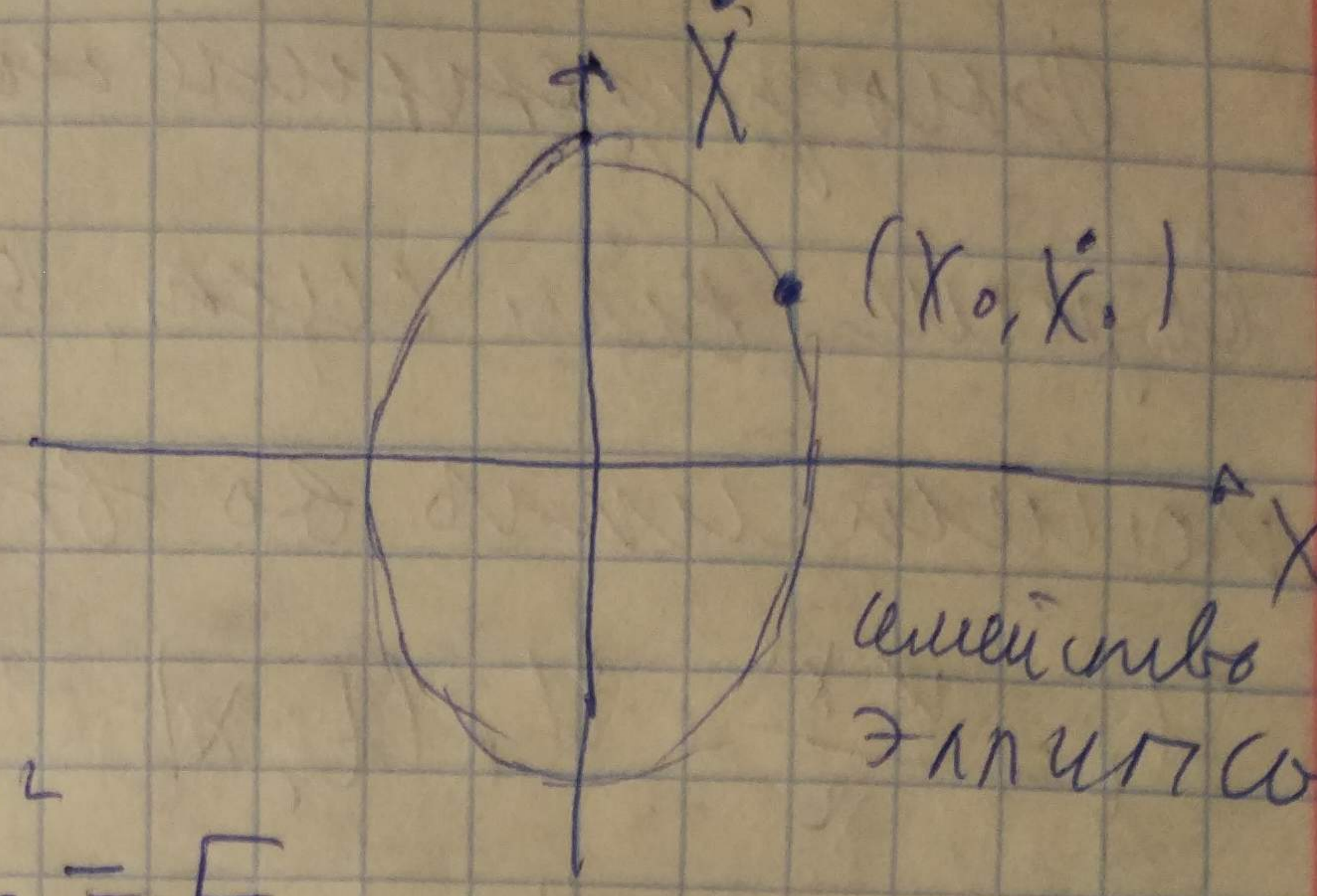
$$x_0 = a\cos\alpha \qquad \dot{x}_0 = -a\omega\sin\alpha$$

$$a^2 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \qquad tg\,\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}$$

Фазовая пл-кость — коорд $\dot{x}, x$

$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega_0 t + \alpha)$

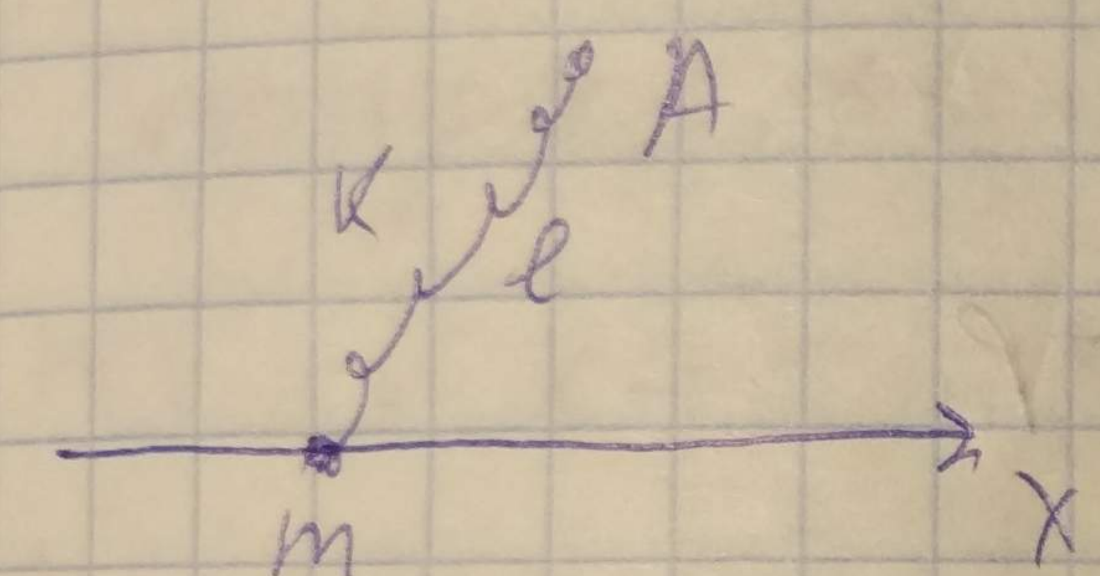
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} = 1$



$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} = E_0$

| НУ связаны ЗСЭ

$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{E_0}{m}$ => семейство эллипсов однопараметрическое



$l, l_0 >> x$

$T_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ $\quad U(x) = \frac{k}{2}\delta l^2$

$\delta l^2 = (\sqrt{l^2 + x^2} - l_0)^2$ => разл в ряд

$U(x) = \frac{k}{2}(\Delta l + \frac{x^2}{2l})^2 = \frac{k}{2}(\Delta l)^2 + \frac{k}{2}\frac{\Delta l}{l}x^2 + \frac{k}{8}\frac{x^4}{l^2}$

• $\Delta l > 0$ (натянута)

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\Delta l}{2l}x^2$

$m\ddot{x} + \frac{k\Delta l}{l}x = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{k\Delta l}{ml}} = \sqrt{\frac{F_H}{ml}}$

• $\Delta l = 0$

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{8l^2}x^4$

$m\ddot{x} + \frac{k}{2l^2}x^3 = 0$ — нелинейные колеб

4

Вынужденные колебания

возник. если сист., облад. свойств. колеб., поместить во внешн. поле

$$U_t = \frac{kx^2}{2} + U_e(t, x)$$

$$U_e(t, 0) + \frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{t=0} x$$

$$-F_e(t)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + Fx$$ — ф-я Лагр.

$$m\ddot{x} + kx = F$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}}$$ — ур-е Лагр

$$x_t = \underset{\text{одн}}{x(t)} + \underset{\text{неодн}}{x_e(t)}$$

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$$

пусть $F(t) = F_0\cos(\tilde{\omega} t + \beta)$

$$b = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\boxed{x_t = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}\cos(\tilde{\omega} t + \beta)}$$

наложение колебаний

Реш. справедливо вдали от точки резонанса

Вблизи:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}\left[\cos(\tilde{\omega} t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)\right]$$

$\omega_0 = \tilde{\omega}_0 + \varepsilon$, $\tilde{\omega} = \omega_0 - \varepsilon$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}\left[\cos(\omega_0 t + \beta)\cos\varepsilon t + \sin(\omega_0 t + \beta)\sin\varepsilon t - \cos(\omega_0 t + \beta)\right] \quad \varepsilon \to 0$$

$\omega_0 = \tilde{\omega}$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin(\omega t + \beta)$$

Затухающие колебания

$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$ $\quad\alpha$ – тормозящая сила

$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad 2\mu = \frac{\alpha}{m}$ – коэф затухания

$x(t) = Ce^{\lambda t}$, $C(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$

$C \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ $\quad\lambda_{1,2}$ – комплексные

1) $\omega_0 > \mu$! $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ – частота затухающей

$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega$

$x(t) = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha)$

$x(t) \neq x(t+T)$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – условный период

Можно показать, что макс. решений следуют строго через период T

6

$x_0, \dot{x}_0$: $x_0 = a\cos\alpha$

$\dot{x}_0 = -a\mu\cos\alpha - a\omega\sin\alpha =$

$= -\mu x_0 - a\omega\sin\alpha$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \mu x_0)^2}{\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{x_0\omega}$$

$\mu T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}$ – логар декрем затухания

2) $\mu > \omega_0$ $\lambda_{1,2}$ – вещественные

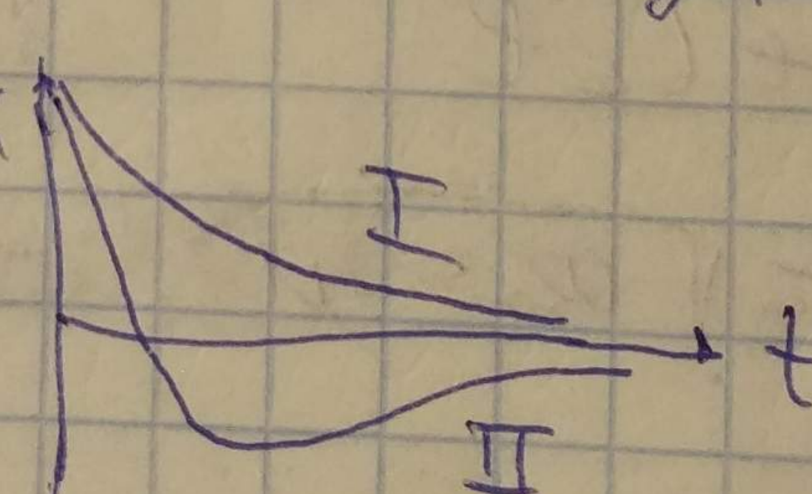
$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = C_1 e^{-\mu t + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\, t} + C_2 e^{-\mu t - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\, t}$

апериодич. затухание

$|x| \to 0, \ t \to \infty$

сист. проходит полож равн за конечн время не более 1 раза



3) $\mu = \omega_0$ $\lambda_{1,2} = -\mu$ (кратные корни)

$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\mu t}$

$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \mu^2 x = 0$

особый случай апериод затух

Лекция 2.

Собств. колеб. мех. систем с $S>1$ степ. свобод.

Устойчивость невозмущенного движения. Возмущ. система S ур-ий:

$$\frac{dy_j}{dt} = Y_j(y_1, \dots, y_s, t) \quad j = 1, \dots S$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = Y_1(y_1 \dots y_s, t) \\ \vdots \\ \frac{dy_s}{dt} = Y_s(y_1 \dots y_s, t) \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Y}(\bar{y}, t)$$

Пусть известно частное решение, отвеч. граничными условиям. $y_1 = f_1(t_0) \dots y_s = f_s(t_0)$

$y_0(t) = $ невозмущ. решение.

$$\boxed{y_j(t) = f_j(t)}$$

$y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \dots y_s = f_s(t_0) + \varepsilon_s$

ε – малые величины возмущения

$y_j(t) = f_j(t) + \varepsilon_j$ — возмущ. решение

$x_j(t) = y_j(t) - f_j(t)$ — отклонение невозм. от возм (вариации)

В s-мерном пр-ве решение отобр. изображающей точкой. В эволюционир. системе изобр. точка описывает траекторию

$\sum_{j=1}^{s} x_j^2$, $x_{0j} = \varepsilon_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} x_{0j}^2 = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j$

Пусть для любого положит. ε как бы мало оно не было можно найти такое пол. δ что при $\forall$ нач. возмущ., удовл. условию $\sum_{j=1}^{s} x_{0j}^2 \le \delta$, при любом $t > t_0$, $\sum_{j=1}^{s} x_j^2 < \varepsilon$, то невозмущенное движ. назыв. устойчивым (Ляпунов)

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{y})$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots y_n)$$

. . . . . .

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, \dots y_n)$$

$\bar{y}_0$ — положение равнов.

если $\overline{y_0}$ – решение системы уравнений

$\| \bar{f}(\overline{y_0}) = 0$ $\qquad T^{(2)}$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}(|\bar{q}|)\dot{q}_l\dot{q}_k - U(|\bar{q}|)$$

$q_1 \ldots q_s$ – явно не зависит от времени

$$L = T^{(2)} + \underset{0}{\underset{\|}{T^{(1)}}} + T^{(0)} - U_{ext}$$ – натуральная система

$U = U_{ext} - T^{(0)}$ (T^0 если связи не стационарны)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Точка $\begin{pmatrix} \bar{q} = \overline{q_{eq}} \\ \bar{\dot{q}} = \dot{q}_{eq} \end{pmatrix}$ является положением равновесия только если

$\dot{q}_{eq} = 0$ и $\overline{q_{eq}}$ является критической точкой потенц. энергии. $\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{q}}\right|_{q_k eq} = 0}$ $\left(\left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_{q_k eq} = 0\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1 \ldots s$$

при $\dot{q}_j = 0$: $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q\,eq} = 0$

$\Rightarrow \dot{q}_j = 0$, $\bar{q} = \overline{q_{eq}}$

10

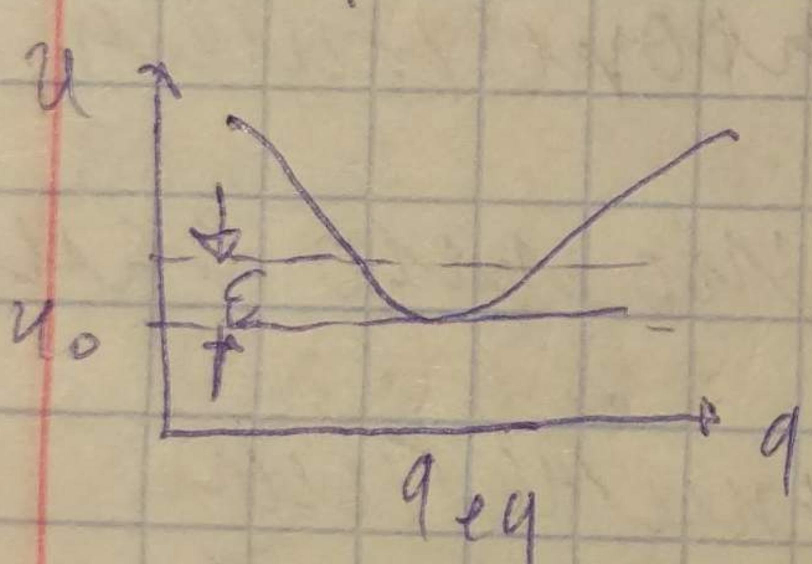
Теорема Лагранжа:

Движение вблизи положения равновесия устойчиво по Ляпунову, если потенц. энергия в этой точке имеет строгий локальный минимум

Д-во: Строгий лок. минимум — точка, в окрестности которой нет других экстрем.

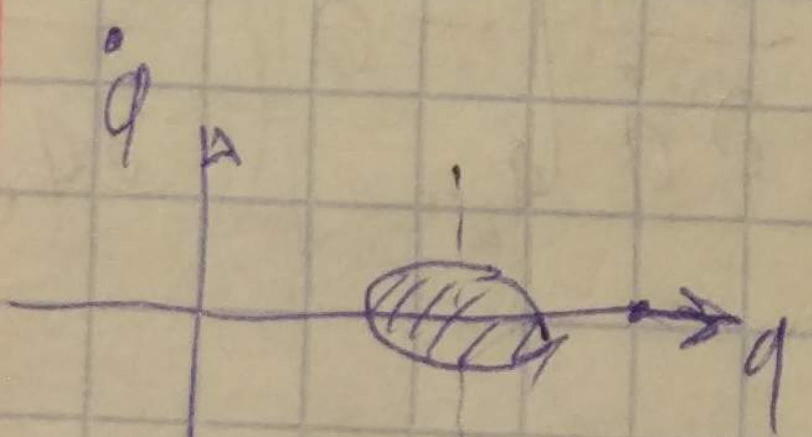
$U(\bar q) > U(\bar q_{eq}) = U_0$ если $\bar q \neq \bar q_{eq}$

• Всегда можно найти ε: $U_0+\varepsilon$, что $\bar q$ находится в такой ~~[illegible]~~ окр-ти $\bar q_{eq}$, если $U(\bar q) < U_0+\varepsilon$



• Можно найти область в фаз. пр-ве, для которой:

$E = T + U < U_0 + \varepsilon$



В силу ЗСЭ, система консервативна, область всегда будет существ. и мы не выйдем за её пределы.

Общее решение системы ур-ий Лагранжа в режиме малых колебаний.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} a_{\ell k}\dot{q}_\ell \dot{q}_k - U(q_1 \ldots q_s)$$

$$H = \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const = H_0 \text{ (ЗСЭ)}$$

$$\sum_{\ell,k=1}^{s} a_{\ell k}(\bar{q})\dot{q}_\ell \dot{q}_k + U(\bar{q}) = H_0$$

Пусть $\bar{\Delta}$ Лагранжа выполнения

тогда $\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{j\,eq}} = 0$ – положение равновесия

$$U = U_0 + \sum_{\ell k=1}^{s} \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\ell \partial q_k}\right|_{\substack{q_\ell\, eq \\ q_k\, eq}} (q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq}) =$$

$$= U_0 + \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} c_{\ell k}(q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq}), \text{ где } c_{\ell k} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_\ell \partial q_k}\right|_{\substack{q_{\ell eq} \\ q_{k eq}}}$$

Тогда $L = \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} a_{\ell k}\dot{q}_\ell \dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} c_{\ell k}(q_\ell - q_{\ell eq})(q_k - q_{k eq})$

$x_j = q_j - q_{j\,eq}$ – отклонения ($x = 0$ – равновесие)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} a_{\ell k}\dot{x}_\ell \dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{\ell k=1}^{s} c_{\ell k} x_\ell x_k$$

$a_{\ell k}\, c_{\ell k}$ – симм.

II – тые полож. опр. кв. форма

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0\right|_{j=1 \ldots s}$$

$\boxed{12}$

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}\ddot{x}_k + c_{jk}x_k) = 0 \qquad j = 1..s$$

$$a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{1s}\ddot{x}_s + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1s}x_s = 0$$

$$a_{s1}\ddot{x}_1 + a_{s2}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{ss}\ddot{x}_s + c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{ss}x_s = 0$$

(коэф постоянны)

– ОДСУ II порядка с пост. коэф

$$x = C_k e^{\lambda t} \qquad C_k \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0 \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{pmatrix}$$

$$\det(a_{jk}\lambda^2 + c_{jk})_{j,k=1}^{s} = 0$$

(2s корней λ)

λ_α, $\alpha = 1..2s$ – собств. знач

$$x_k(t) = \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^{\alpha} e^{\lambda_\alpha t}$$

$$\lambda_\sigma = \mathrm{Re}\,\lambda_\sigma + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_\sigma \Rightarrow e^{\mathrm{Re}\,\lambda_\sigma + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_\sigma}$$

(+) возраст. или

(−) убывающая,

что приводит к нарушению ЗСЭ системы в целом. ЗСЭ может иметь только s пар комплексно сопряж корней $\lambda = \pm i w_0$ $(Re \lambda_\alpha = 0)$

$$V_k(t) = Re \sum_{\alpha=1}^{s} \left(C_k^{a+} e^{i w_\alpha t} + C_k^{a-} e^{-i w_\alpha t} \right)$$

w_0 - собств частоты   амплит.

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk} \lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k^\alpha = 0$$

$C_{k'}^\alpha \neq 0 \quad k' \to s$

$$\sum_{k=1}^{s-1} (a_{jk} \lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k^\alpha = -(a_{js} \lambda_\alpha^2 + c_{js}) C_s^\alpha$$

$C_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha}{\Delta_s^\alpha} C_s^\alpha$, Δ_t^α - А Д к эл-ту столбца Х 1 взятого при λ_α^2

(характер. детерм)

Положим $C_\alpha = \frac{C_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha}$

$$\boxed{C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha}$$

$k = 1 \ldots s-1$

Лекция 3

Общее решение ур-я Лагранжа для мех. системы с S степенями свободы в режиме малых колебаний. Норм. коорд. Векторы смещений. Св-во ортогональности. Случай нулевой и кратной частот системы

1) Ф-я L не зависит явно от времени

2) В пр-ве ~~конф~~ конфигураций ~~$q_1 \dots q_s$~~

$q_1 \dots q_s,\ \dot q_1 \dots \dot q_s$ Потенц энергия удовл условиям $\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{j\,eq}} = 0 \quad j = 1 \dots S$

$q_k = q_{k\,eq} \quad \dot q_{k\,eq} = 0 \qquad k = 1, \dots S$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\right|_{\substack{q_{k\,eq} \\ q_{i\,eq}}} = 0$$

$U(q) \geq U(q_{eq})$

Ф-ю Лагранжа можно разложить вблизи точки равновесия.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ek} \underbrace{a_{ek}(q)\, \dot q_e \dot q_k}_{\geq 0} - \frac{1}{2} \sum_{ek} c_{ek}\, q_e q_k$$

$$c_{ek} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_e \partial q_k}\Big|_{q_{eq}} \qquad a_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{e1} & \dots & a_{ek} \end{vmatrix} > 0$$ – полож опр форма

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ek=1}^{s} c_{ek} q_e q_k$$

$$U(q) = U(q_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_e q_k} \dots$$

удовл критерию Сильвестра

Вводим $x_j = q_j - q_{j\,eq}$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ek=1}^{s} a_{ek} \dot{x}_e \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum_{ek=1}^{s} c_{ek} x_e x_k$$

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk} \ddot{x}_k + c_{jk} x_k) = 0$$

собств. колеб – система ЛОУ II порядка

Ищем решение в виде (возмущенное):

$$x_k = C_k e^{\lambda t}, \quad \sum_{k=1}^{s} (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0, \quad j = 1 \dots s$$

$$\det |a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}| = 0$$

$\lambda_\alpha^{\pm} = \pm i \omega_\alpha$ – компл сопряж

ω_α – собств частоты

λ_α – собств. значения

16

$$X_k = \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(C_k^{\alpha +} e^{+i\omega_\alpha t} + C_k^{\alpha -} e^{-i\omega_\alpha t} \right)$$ || x-вещ

$$\boxed{C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha}$$

Δ_k^α - АДк элементу к-го столбца любой строки хар детерм. взятого при λ_α^2

Тогда:

$$X_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha (\lambda_\alpha^2) \Theta_\alpha(t)$$

$$\Theta_\alpha(t) = \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{s} \left[C_k^+ e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \right] =$$

$$= a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

- Любая коорд пр-ва q изменяется как наложение периодич. решений, каждое из которых меняется с одной из собств. частот системы ω_α.
- Собств частоты опред. свойствами системы и не связаны с начальными условиями
- В решении не присутствуют высшие гармоники основных частот

Пусть ∃ кривая $f(X_1, \dots, X_s) = 0$ и все частоты несоизмеримы, то кривая незамкнутые

Если частоты соизмеримы, то кривая замкнута. $X_k = q_k - q_{k\,eq}$ — вектор смещения

$$\vec{X}^{\alpha} = \begin{pmatrix} X_1^{\alpha} \\ \vdots \\ X_s^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{\alpha} \\ \vdots \\ C_s^{\alpha} \end{pmatrix} a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \beta_{\alpha})$$

$$\vec{X}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} X^{\alpha}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \vec{C}^{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \beta_{\alpha})$$

$$C^{\alpha} = \begin{pmatrix} C_1^{\alpha} \\ \vdots \\ C_s^{\alpha} \end{pmatrix} a_{\alpha}$$

Θ_{α} — нормальная координата — меняется только с одной частотой системы (главные колебания)

Выберем НУ: $a_{\alpha} = 0$, $\Theta_{\alpha} = a_{\gamma}$, $\alpha = \gamma$

$$\underline{X_k = \Delta_k^{\gamma} a_{\gamma} \cos(\omega_{\gamma} t + \beta_{\gamma})}$$

За счёт НУ можно возбудить колеб. только на одной собств. частоте

$$X_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^{\alpha} (\lambda_{\alpha}^2) \Theta_{\alpha}(t)$$

Δ — матрица преобразования

$$\dot{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^{\alpha} \dot{\Theta}_{\alpha}$$

$$\ddot{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^{\alpha} \ddot{\Theta}_{\alpha}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ek=1}^{s} a_{ek} \dot{X}_k \dot{X}_e - \frac{1}{2} \sum_{ek=1}^{s} C_{ek} X_e X_k$$

18

Для θ: $\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0$, $\alpha = 1 \ldots 5$

Ф-я: $\boxed{L = \sum_{\alpha=1}^{5} \left(\frac{a_\alpha}{2} \dot{\theta}_\alpha^2 - \frac{c_\alpha}{2} \theta_\alpha^2 \right)}$

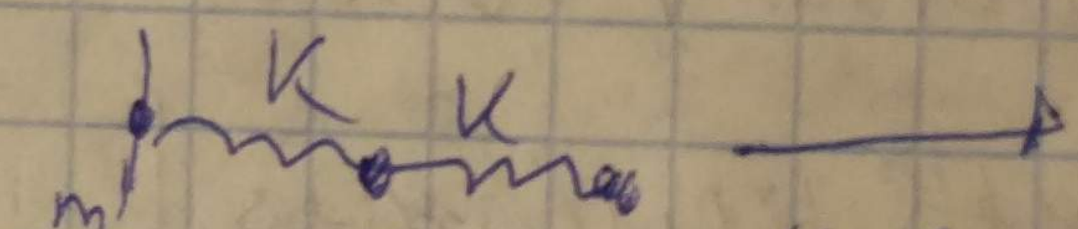
В коорд. θ колебания развязаны $\ddot{\theta}_\alpha = -\omega_\alpha^2 \theta_\alpha$ (кин. и динам.)

в x — связаны

Общее решение — сумма 5 нормальных колеб.

• Нулевая частота: $\omega_\gamma = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_\gamma = 0$

$\theta_\gamma = \dot{\theta}_{\gamma 0} t + \theta_{\gamma 0}$



шт-мол углов

Возникает, когда минимум не строгий

• Кратные частоты: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array}$$

Тогда число θ не изменяется (5)

$$L = \frac{a}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \frac{c}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right) + \sum_{\alpha=4}^{5} \left(\frac{a_\alpha}{2} \dot{\theta}_\alpha^2 - \frac{c_\alpha}{2} \theta_\alpha^2 \right)$$

Выбор норм. частот неоднозначен

① Все $\lambda_\alpha^2<0$ (λ_α - мнимые)

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})\,c_k^\alpha=0 \quad \Big|\cdot c_j^\alpha+\sum_{j=1}^{s}$$

$$\sum_{jk=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})\,c_k^\alpha=0$$

$$\lambda_\alpha^2\sum_{jk=1}^{s}a_{jk}\Delta_j^\alpha\Delta_k^\alpha+\sum_{jk=1}^{s}c_{jk}\Delta_j^\alpha\Delta_k^\alpha)\,c_\alpha^2=0$$

$$\lambda_\alpha^2=-\frac{\sum_{jk=1}^{s}c_{jk}\Delta_j^\alpha\Delta_k^\alpha}{\sum_{jk=1}^{s}a_{jk}\Delta_j^\alpha\Delta_k^\alpha}$$

к-ты вещественны, положит. опред.

② Св-во ортогональности норм колебаний:

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})\,c_k^\alpha=0 \quad \Big|\cdot c_j^\beta\sum_j$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\beta^2+c_{jk})\,c_k^\beta=0 \quad \Big|\, c_j^\alpha\sum_j \qquad a_{jk}=a_{kj}$$

$$\sum_{jk=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})\,c_k^\alpha c_j^\beta=0$$

$$\sum_{jk=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\beta^2+c_{jk})\,c_k^\beta c_j^\alpha=0$$

(1-2) $\quad (\lambda_\alpha^2-\lambda_\beta^2)\sum_{jk=1}^{s}a_{jk}c_k^\alpha c_j^\beta=0$

20

Если $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, то $\underline{\sum_{i,k=1}^{s} a_{ik} C_k^\alpha C_i^\beta} = 0$ (кин)

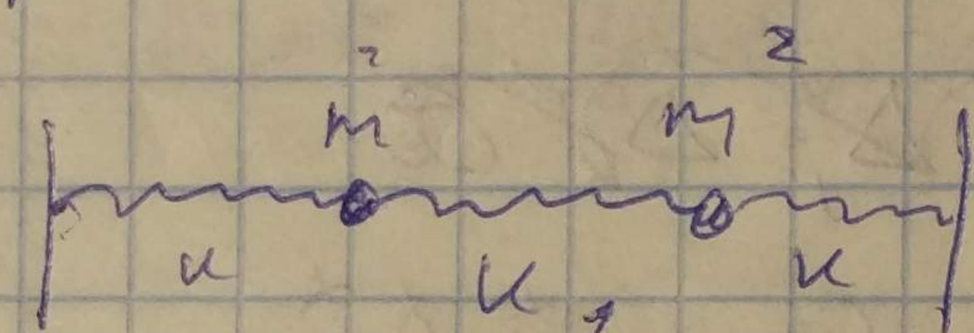
скал. произв

Нормальные колебания ортогональны в метрике кин. энергии

$$\sum_{i,k=1}^{s} c_{ik} C_i^\alpha C_k^\beta = 0 \text{ (потенц)}$$

И в метрике потенц. энергии

пример:



длины l

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{k_1}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$m\ddot{x}_1 + k x_1 - k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + (k + k_1) x_2 - k_1 x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_1}{m}(k + k_2) - \frac{k_1}{m} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{x_2}{m}(k + k_1) - \frac{k_1}{m} x_1 = 0$$

$$x_j = C_j e^{\lambda t}, \quad j = 1, 2$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k + k_1}{m}\right) C_1 - \frac{k_1}{m} C_2 = 0$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k + k_1}{m}\right) C_2 - \frac{k_1}{m} C_1 = 0$$

$$\det = \left(\lambda^2 + \frac{k + k_1}{m}\right)^2 - \frac{k_1^2}{m^2} = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 + \frac{k+k_1}{m} = \pm \frac{k_1}{m}$$

$$\lambda_1^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_1^{\pm} = i\omega_1 = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{k+2k_1}{m} \Rightarrow \lambda_2^{\pm} = \pm i\omega_2 = \pm i\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$$

Решение: $X_k = \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \Delta_k^{\alpha}\, \theta_\alpha(t)$

$$\theta_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

$$\Delta_1^1 = -\frac{k_1}{m}(-1)^{2+1} = \frac{k_1}{m} \qquad \Delta_1^2 = \frac{k_1}{m}$$

$$\Delta_2^1 = \frac{k_1}{m} \qquad \Delta_2^2 = -\frac{k_1}{m}$$

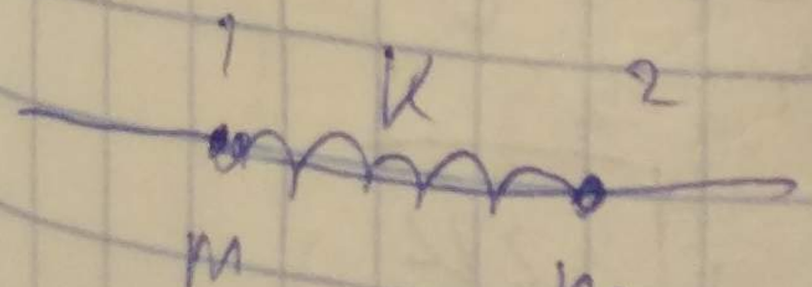
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\theta_2$$

Лекция 4

Многомерные колебания.

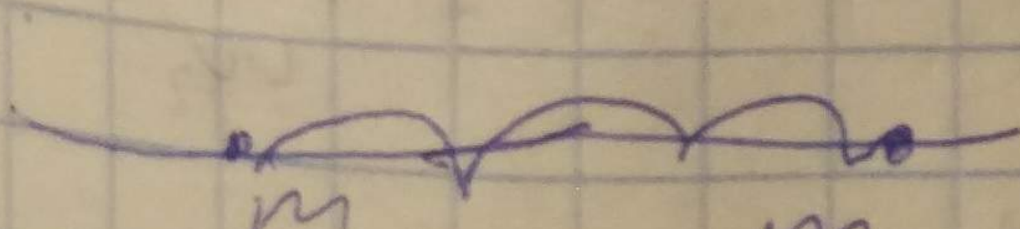
Пример 2.

Случай нулевой частоты



1) равном движении — нулевая частота

2)



$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\omega = 0$ возник когда нет строгого min

22

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k(x_2 - x_1) = 0 \quad \Rightarrow x_2 = x_1 \text{ равновесие}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$x_j = C_j e^{\lambda t} \quad j = 1, 2$$

$$(\lambda^2 + \frac{k}{m})C_1 - \frac{k}{m}C_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m}C_1 + (\lambda^2 + \frac{k}{m})C_2 = 0$$

$$(\lambda^2 + \frac{k}{m})^2 - (\frac{k}{m})^2 = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \frac{2k\lambda^2}{m} = 0$$

$$-\frac{k}{m}C_1 + (\lambda^2 + \frac{k}{m})C_2 = 0$$

$$(\lambda^2 + \frac{k}{m})^2 - (\frac{k}{m})^2 = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \frac{2k\lambda^2}{m} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad \lambda^2 = -\frac{2k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{2k}{m}}}_{\omega_2}$$

$$\omega = 0$$

$$\lambda_1^2 = 0 \quad \frac{k}{m}C_1^{(1)} - \frac{k}{m}C_2^{(1)} = 0 \Rightarrow C_1^{(1)} = C_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{2k}{m} \qquad -\frac{k}{m} C_1^{(2)} - \frac{k}{m} C_2^{(2)} = 0 \Rightarrow C_1^{(2)} = -C_2^{(2)}$$

$$x_{1,2} = \theta_1(t) \pm \theta_2(t)$$

$$\theta_1(t) = \dot{\theta}_1(0)t + \theta_1(0)$$

$$\theta_2(t) = a\cos(\omega_2 t + \beta)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_1}\theta_1(t) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}_2}\theta_2(t)$$

$\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ ортог

$\dot{x}$ $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ — неизв ф. времени
подст в ф-ю Лагр получим:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - \frac{2k}{m}\theta_2^2\right)$$

Гамильтонова механика.

Ур-я Лагранжа в живив форме ур-ий Гамильтона. Преобр Лежандра, Ф-ии Лагр и Гам.

$$L((q),(\dot{q}),t) = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1 \dots s$$

Преобраз. Лежандра

24

$f(x)$, $f''(x) > 0$

$u = \frac{\partial f}{\partial x} = f'$ $\quad g(u) = ux - f(x)$

$f(x,y)$, $f_{xx} > 0$

$u = \frac{\partial f}{\partial x}$

$g(u,y) = ux - f(x,y)$ – преоб Лежандра

$dg = x\,du + \cancel{u\,dx} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} dx} - \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$x = \frac{\partial g}{\partial u}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad$ y - пассивная переменная

Св-во инвалютивности

$g^2 \to f$ Дважды примен преобр приведет к ф-ии f (исходной)

$L = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 - U(q,t)$ (выпукла по $\dot{q}$)

$f \leftrightarrow L$ $\quad x \leftrightarrow \dot{q}$ $\quad y \leftrightarrow q$ $\quad u \leftrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$g(p,q) \longleftrightarrow H(p,q,t)$ – ф-я Гамильтона

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$H(p,q,t) = p\dot{q} - L$

$dH = dp \cdot \dot{q} + \cancel{p\,d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$, $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

s степ свободы!

$p = a(q)\dot{q}$

$H = p\dot{q} - \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} + U(q,t) = \frac{p^2}{a} - \frac{p^2}{2a} + U(q\cancel{t}) =$

$= \frac{p^2}{2a(q)} + U(q t)$

$L(q, \dot{q}, t)$ $2s+1$

$L = \frac{1}{2}\sum_{ek=1}^{s} a_{ek}(q)\dot{q}_e\dot{q}_k - U(q t)$

$\to 0$

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ $\boxed{H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L}$

Преобраз Лежандра приводят выпуклые часть ф-ии в вып. часть

$dH = \sum_{j=1}^{s}(\dot{q}_j dp_j + \cancel{p_j d\dot{p}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$

$dH = \sum_{j=1}^{s}(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$

$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$

26

$$\frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

система ур-ий Гамильтона

В векторной форме:

$$H = \bar{p}\dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \qquad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}$$

Эволюция системы в 2S-мерном пр-ве описывается системой ур-ий I пор-ка причём в каждой т. задано вектор. поле. $\bar{f}(\bar{q}, \bar{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$ - 2S мерн вектор

тогда: $\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x})$

1) построить H - ф-ию Гамильт.
2) Определ p - ~~об~~ об-ну импульс
3) Найти обобщ. эффект и найти ф-ю Гамильт. Получим сист ур-ий Гам. Чтобы не потерять ни одно ур-е необх, чтобы $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ было разрешимо относительно $\dot{q}_j$

$$\left|\frac{\partial p}{\partial \dot{q}_k}\right| \neq 0$$ - усл-е разреш-ти

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0$$ Опред. Гесса (Гессиан)

Если $\Gamma = 0$, системы особенные
Если $\Gamma \neq 0$, системы неособенные и можно записать $2S$ ур-й Гамильтона.

Эквивалентность:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L \iff L = \sum_{j=1}^{S} \dot{q}_j p_j - H$$

$H(q, \dot{q}, t)$ $\qquad$ $L(q, \dot{q}, t)$

28

Ур-я Гам. записаны в сим. форме, I порядка по времени.

Следствия:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$H(\bar{q}\,\bar{p}\,t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{q}}\frac{d\bar{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}\frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = H_0$ - энергия (поверхность) сохранения

Лекция 5

Ур-я Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1 \ldots s$$

$H(q_1 \ldots q_s, p_1 \ldots p_s, t)$ - ф-я Гамильтона

$\bar{q} = (q_1 \ldots q_s) \qquad \bar{p} = (p_1 \ldots p_s)$

$\parallel \vec{a}\, \vec{b} = a, b, c - a, b, \parallel$

тогда: $\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$ $\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$

Ур-я Гамильтона канонические

p, q — канон. сопряж. переменные

Динамика описывается в фазовом

$2s$ — мерном пр-ве $(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)$

$\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$

Ур-я Гамильт. принимают вид

$\dot{\vec{x}} = f(x)$ $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$

$\bar{f}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{p}}; -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}\right)$

Пусть известно ~~...~~ $\bar{q}(t), \bar{p}(t)$

($\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ — касательн. к траектории)

$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x})$ — мн-во точек

Тогда: $g^t\{\bar{q}(0), \bar{p}(0) \to \bar{q}(t), p(t)\}$ — однопар.

группа преобразований — фазовый поток

$\{q(t), p(t)$ — решения ур-я Гамильтона

$H(\bar{q}, \bar{p}, t)$: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

Если $H(\bar{q}, \bar{p})$, то $H(\bar{q}, p) = H_0$ — интеграл движения.

Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ — система консервативная

Если коорд не входит в ф-ю Гам., то она циклическая

$$\frac{\partial H(\bar{q}, p)}{\partial q_j} = -\frac{\partial L(\dot{\bar{q}}, q)}{\partial q_j}$$

Пусть есть система с цикл. коорд. q_1, тогда $p_1 = const$. Изменени остальных коорд. происходит как в системе с $s-1$ сс, при этом $H(q_2 \ldots q_s, p_2 \ldots p_s, c, t)$ зависит от c как от пар-ра.

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}' &= (q_2 \ldots q_s) \\ \bar{p}' &= (p_2 \ldots p_s) \end{aligned}\right\} \text{разм-сть } s-1$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = \frac{-\partial H}{\partial q_1} = 0, \quad p_1 = c$$

$$\dot{\bar{q}}' = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}'}, \quad \dot{\bar{p}}' = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}'} \quad (S-t)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H(\bar{q}'(t), \bar{p}'(t), \cancel{t})}{\partial p_1}$$ – рш. системы

$$\frac{dq'}{dt} = f(t)$$

Система с двумя степ. своб. и одн. цикл. коорд. интегрируема в квадратурах

$$H(q', p', c) = H_0$$

Пример 1: Одном гарм осц

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \qquad q \equiv x$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad H = p\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} -$$

– обобщ. ЭН

$$H(x, \dot{x})\Big|_{\dot{x} = f(p, x)} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

Ур-е $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -kx^2 \end{aligned}\right\}$ эквивал-но ур-ю Лагр-жа

32

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

В потенц. поле $U(xyz)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(xyz)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = m\dot{y} \quad p_z = m\dot{z}$$

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(xyz)$$

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(xyz)$$

пусть $H(\sqrt{x^2+y^2}, z)$

Вводим цил. с.к. ρ, φ, z

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi + \dot{z}\bar{e}_z$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, z)$$

// φ - циклич. коорд.

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} \quad p_z = m\dot{z}$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho, z)$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + U(\rho z) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho z)$$

$U(r)$ сферич коорд $r\,\theta\,\varphi$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

$$p_r = m\dot{r} \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$H(\dot{q}q) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + U(r)$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\theta^2\frac{1}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r)$$

Ф-я Гамильтона во внешнем Э.П.

масса m, заряд e.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U_{об} \qquad \vec{A}(\vec{r}t) \quad \Phi(\vec{r}t)$$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\bar{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \vec{B} = \operatorname{rot} A \end{cases}$$

$$U_{об} = -\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\vec{r}}) + e\Phi$$

34

$$L=\frac{m\dot{\bar{r}}^2}{2}+\frac{e}{c}(\bar{A}\dot{\bar{r}})-e\varphi$$

$$\bar{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{r}}}=m\dot{\bar{r}}+\frac{e}{c}\bar{A}(\bar{r}t)$$

$$H=\bar{p}\cdot\dot{\bar{r}}-L=\frac{m\dot{\bar{r}}^2}{2}+e\varphi$$

$$\dot{\bar{r}}=\frac{1}{m}(\bar{p}-\frac{e}{c}\bar{A})$$

$$H=\frac{(\bar{p}-\frac{e}{c}\bar{A})^2}{2m}+e\varphi$$

Принцип наименьшего действия в фазовом пр-ве.

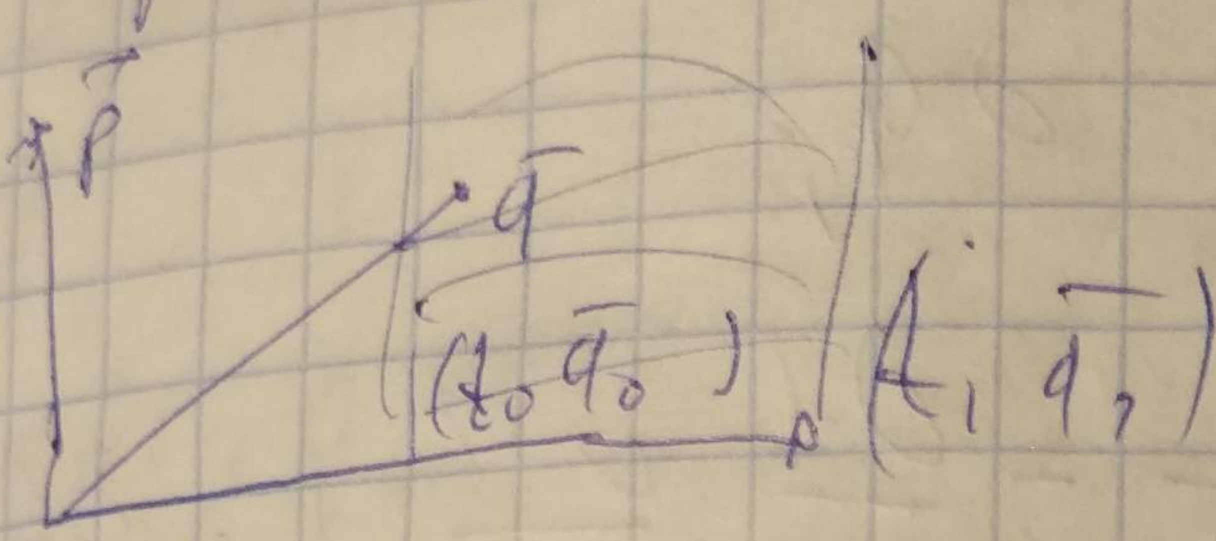
$H(\bar{q}\,\bar{p}\,t)$ $\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ $\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$

$2S+1$ расшир фазовое пр-во

Рассмотрим интегральную кривую γ, соединяющую точки $(t_0\, q_0\, p_0)$ и $(t_1\, q_1\, p_1)$

Теорема! Функц. $\int \bar{p}\,d\bar{q}-H(\bar{q}\,\bar{p})dt$

γ - экстремаль относительно любых вариаций при которых концы экстремали остаются на S-мерн ур-ве $(t_0, \bar q_0 = \bar q_0) \to (t_1, \bar q = \bar q_1)$



$$\delta \int_\gamma (\bar p \dot{\bar q} - H)\,dt = \int_\gamma \left(\bar p\, \delta \dot{\bar q} + \dot{\bar q}\, \delta \bar p - \frac{\partial H}{\partial \bar q}\delta \bar q - \frac{\partial H}{\partial \bar p}\delta \bar p\right) dt$$

$$= \bar p\, \delta \bar q \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_\gamma \left[\left(\dot{\bar q} - \frac{\partial H}{\partial \bar p}\right)\delta \bar p - \left(\dot{\bar p} + \frac{\partial H}{\partial \bar q}\right)\delta \bar q\right] dt$$

$$\dot{\bar q} = \frac{\partial H}{\partial \bar p}, \quad \dot{\bar p} = -\frac{\partial H}{\partial \bar q}$$

γ - экстремаль, если вып. уравнения Гамильтона.

$$\boxed{p\, d\bar q - H\, dt}$$

Интегральный инвариант Пуанкаре

Скобки Пуассона

// $H(\bar r, p) = \dfrac{C(\bar p)}{n(\bar r \bar p)}$ - не имеет ф-ии Лагр //

$q_1, \dots q_s, p_1 \dots p_s \quad f(\bar q \bar p t) \quad H(\bar q \bar p t)$

Является ли f интегралом?

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot q_j + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot p_j + \frac{\partial f}{\partial t}$$

36)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$[f, H] = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) -$$

– скобка Пуассона

$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$ если f – интеграл

Если $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow [f, H] = 0$

Пусть $u(\vec{q}, \vec{p}, t)$ $\cdot$ $v(\vec{q}, \vec{p}, t)$

Тогда $[u\, v] = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} \right)$

Свойства:

1) $[u, c] = 0$ 2) $[u, v] = -[v, u]$ кососим

3) $[u, u] = 0$ 4) $[u+v, w] = [u, w] + [v, w]$

5) $[uv, w] = v[u, w] + u[v, w]$

6) $\frac{\partial}{\partial t}[u, v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right]$

Фундаментальные скобки Пуассона

$q_1 \dots q_s \quad p_1 \dots p_s$

$[q_j, q_k] = 0$

$[p_j, p_k] = 0$

$[q_j, p_k] = \delta_{jk}$

$$[q_j, \vartheta] = \sum_{j=1}^{s} \delta_{kj} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_j} = \frac{\partial \vartheta}{\partial p_k}$$

Лекция 6

Скобки Пуассона для $\forall$ двух состояний

$$[\varphi, \vartheta] = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial \vartheta}{\partial q_j} \right)$$

Уравнения Гамильтона

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f\, H]$$

$f = q_j$

$f = p_j$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_j &= [q_j, H] \\ \dot{p}_j &= [p_j, H] \end{aligned}}$$

I интеграл: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$

$f = H \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow$, если t явно

38

не входит в H, то H сохраняется

$$H(q,p) = H_0$$

Теорема Пуассона. Если u и v интегралы движения гам. Гамильтоновой системы

$$\frac{du}{dt} + [u, H] = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + [v, H] = 0$$

, то $[u, v]$ тоже является интегралом движения

$$\frac{d[u,v]}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}[u,v] + [[u,v],H] = 0$$

Тождество Якоби: $\forall u, v, w$

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

$$w = H$$

$$[u,[v,H]] + [v,[H,u]] + [H,[u,v]] = 0$$

$$[[u,v],H] = [u,[v,H]] + [v,[H,u]] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[u,v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] +$$

$$+ [u,[v,H]] + [v,[H,u]] =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + [[u, H] v] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] +$$

$$[u[v, H]] = \left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + [uH]}_{0}, v\right] +$$

$$+ \left[u, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + [v, H]}_{0}\right] = 0$$

Пример: 1. $u(q_1 p_1)$ $f(v(q_1, p_1), q_2 \ldots q_s, p_2 \ldots q_s)$

$$[u, f] = \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial v}[u, v]$$

В частности: если в системе:

$$H(v(q_1 p_1), q_2 \ldots q_s, p_2 \ldots p_s)$$

$$[v, H] = \frac{\partial H}{\partial v}[v, v] = 0 \Rightarrow v \text{ — интеграл движения}$$

2) $\vec{q} = \vec{r} = (x_1 x_2 x_3)$, $\vec{p} = (p_1 p_2 p_3)$

$$\vec{L} = [\vec{r}\, \vec{p}] \qquad L_i = e_{ijk} x_j p_k \qquad e_{123} = e_{312} = e_{231} =$$

$$= -e_{213} = -e_{321} = -e_{132} = 1$$

$$L_3 = e_{3jk} x_j p_k = e_{312} x_1 p_2 + e_{321} x_2 p_1 = x_1 p_2 + x_2 p_1$$

40

$[\vec{r}, \vec{L}] = [x_e\, L_i] = [x_e\, e_{ijk}\, x_j p_k] =$

$= e_{ijk} \left(\underbrace{[x_e\, x_j]}_{0} p_k + \underbrace{[x_e\, p_k]}_{\delta_{ek}} x_j \right) =$

$= e_{ijk}\, \delta_{ek}\, x_j = \cancel{e_{ij} x_j = e_{e j} x_j}$

$= e_{ije}\, x_j = e_{eij}\, x_j$

31 Показать, что вектор L частицы и H являются интегралами движения задачи дв. т. в $U(r) = -\frac{a}{r}$ задача Кеплера (L отн центр. поля)

$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{a}{r} \qquad \vec{p}^2 = p_e^2 \qquad \vec{r} = \sqrt{x_e^2}$

$L_i = e_{ijk}\, x_j p_k$

$H = \frac{p_e^2}{2m} - \frac{a}{\sqrt{x_e^2}}$

$\frac{dH}{dt} = 0$ — ф-ии Гамильтона не зав от времени

$[L, H] = e_{ijk} \{ x_j [p_k H] + p_k [x H] \}$

$$[p_k H] = -\frac{\partial p_k}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial x_n}$$

$$\overset{\shortparallel}{\delta_{kn}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n} = \frac{a}{r^3} x_e \delta_{en}$$

$$[p_k, H] = \delta_{en}\delta_{en}\frac{a x_e}{r^3}$$

$$[x H] = \delta_{in}\frac{p_e}{m}\delta_{en}$$

$$[L_i, H] = e_{ijk} x_j \delta_{kn}\frac{a}{r^3} x_e \delta_{en} + e_{ijk}\delta_{jn}\delta_{en}\frac{p_e}{m} =$$

$$= -e_{ije} x_j \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_k}} \frac{a}{r^3} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{e_{ijk}}} \frac{p_i p_e}{m} = 0$$

антисим тензор умн на сим часть

Момент импульса при движении в цен. поле сохраняется

Каноничиские Преобразования

$q_1 \dots q_s$

$Q_j = Q_j(q_1 \dots q_s, t)$ - точечные преобр.

Ур- ~~е~~ сохраняют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot Q_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0$$

42

L' – новая ф-я Лагранжа

$$L' = L(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}))$$

$$\dot{Q}_j = -\frac{\partial H}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ ур-я Гамильт. ковариантны относительно точечн. преобраз

$\frac{2S}{qp}$

$$Q_j = Q_j(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)$$
$$P_j = P_j(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)$$

Чтоб преобразование сохр. форму уравнений Гамильтона

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

Канонические преобразования сохр ур-е Гамильтона и их можно ~~~~ задать с помощью производящей функции.

Будем требовать:

1) Q и P – однозначные ф-ии q и p и имеют непр ЧП до II пор-ка

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial P_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_s}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} = \frac{D(Q_1 \ldots Q_s, P_1 \ldots P_s)}{D(q_1 \ldots q_s, p_1 \ldots p_s)} \neq 0$$

и s перем

Производящая функция $F(q, Q, p, P)$

$2s$ незав

s старых, s новых

4 вида производящих функций:

$F_1(q, Q, t)$ $F_2(p, P, t)$

$F_3(q, P, t)$ $F_4(p, Q, t)$

Пусть H и H' выводятся из принципа наименьшего действия;

$$\delta \int \Big(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H\Big) dt = 0$$

$$\delta \int \Big(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H'\Big) dt = 0$$

концы кривых: $t_0: \bar{q} = \bar{q}_0$ $\delta q(t_0, t_1) = 0$

$t_1: \bar{q} = \bar{q}_1$

44)

$t_0 = \bar{Q} = \bar{Q}_0$

$t_1 = \bar{Q} = \bar{Q}_1$ $\quad \delta Q(t_0, t_1) = 0$

$\int \left(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H \right) dt =$

для ПНЯ δp и $\delta Q = 0$

$= \int \left(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt + \frac{dF_1}{dt} dt$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j H = \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j - H' + \frac{dF_1}{dt}$$

основные уравнения

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{\partial F_1}{\partial t} +$$

$$+ \sum \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right)$$

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad \text{I}$$

$$P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad \text{II}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \text{III}$$

$F_1(q, Q, t)$ Преобраз Лежандра

$F_2(q, P, t)$

$$F_2 : F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$$

$t_0 : \bar{Q} = \bar{Q}_0$

$t_1 : \bar{Q} = \bar{Q}_1$

$$\delta Q(t_0, t_1) = 0$$

$$\int \Big(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H \Big) dt = \int \Big(\sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' \Big) dt +$$

для пия

$$+ \frac{dF_1}{dt} dt$$

Лекция 7

Каноничные преобразования

1) $(q\ p) \to (Q\ P)$ однозн

2) F - производящая ф-я

3) Динамика От. Гамильтоновой

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H \Big) dt$$

$t_0 \to \bar{q}_0 \to \delta q_j(t_0) = 0$

$t_1 \to \bar{q}_1 \to \delta q_j(t_1) = 0$

46]

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H\right)dt = 0 \Leftrightarrow \delta q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(P_j\dot Q_j - H'\right)dt = 0 \Leftrightarrow \delta Q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

при $\delta q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1},\ \delta Q_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{s}\left(p_j\dot q_j - H\right)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(P_j\dot Q_j - H'\right)dt + \frac{dF}{dt}dt\right]$$

, учитывая что на концах отрезка

$$\delta F_1\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

$$\delta F_1 = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial F}{\partial Q}\delta Q_j\right)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j\dot Q_j - H' + \frac{dF_1}{dt}$$

Основное ур-е канон преоб

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\dot Q_j\right) - \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \qquad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

(2) $F_2(q, P, t)$

$F_1(q, Q, t)$ $\qquad F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{d}{dt}\left(F_2 - \sum_{j=1}^{s} P_j Q_j\right)$$

$$dF_2 = \sum_{j=1}^{s} Q_j P_j$$

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j}\dot{P}_j - P_j\dot{q}_j - p_j \dot{Q}_j\right)$$

$$P_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \qquad (I_2)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \qquad (II_2)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (III_2)$$

(3) $-F_1(q\ Q\ t)$

$F_3(p\ Q\ t)$

$$F_1 = F_3 + \sum_{j=1}^{s} p_j q_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{s} - P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{d\left(F_3 + \sum_{j=1}^{s} p_j q_j\right)}{dt}$$

48)
$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_3}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial F_3}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j\right) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \quad (I_3)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \quad (II_3)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (III_3)$$

4) $F_4(p, P, t)$

$$F_1 = F_4 + \sum_{j=1}^{s}(p_j q_j - P_j Q_j)$$

$$\frac{d\left(F_4 + \sum_{j=1}^{s}(p_j q_j - P_j Q_j)\right)}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j}\dot{p}_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_4}{\partial P_j}\dot{P}_j + \dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - P\dot{Q}_j - \dot{P}Q_j\right) + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \quad (I_4)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \quad (II_4)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (IV_4)$$

Канон преобр как тождественное:

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k \quad \text{- тожд}$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{s} \delta_{kj} P_k = P_j$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j$$

Точечные преобразов

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} f_k (q_1 \dots q_s, t) P_k$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \sum_{k=1} f_k(\dots) \delta_{kj} = f_j$$

$$F_1 = \sum_{k=1}^{s} q_k Q_k \quad \text{- меняет местами импульсы и коорд}$$

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j$$

Канон преобр позволяет упростить решение: гармон осциллятор:

$$H = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \cancel{\omega} x_k^2}{2} \right)$$

50

Цель: найти преобр переводящее в новые коорд циклические:

$$F_1 = \sum_{j=1}^{s} \frac{m\omega_j q_j^2}{2} \operatorname{ctg} Q_j$$

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = m_k \omega_k q_k \operatorname{ctg} Q_k$$

$$P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = \frac{m_k \omega_k q_k^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q_k}$$

$$q_k = \sqrt{\frac{2P_k \sin^2 Q_k}{m_k \omega_k}} = \sqrt{\frac{2P_k}{m_k \omega_k}} \sin Q_k$$

$$p_k = \sqrt{2 P_k m_k \omega_k} \cos Q_k$$

$$H'(Q, P) = \sum_{k=1}^{s} P_k \omega_k$$

Новые коорд циклические

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j} = \omega_j \Rightarrow Q_j = \omega_j t + Q_{j0}$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{const} = P_{j0}$$

$$q_k = \sqrt{\frac{2P_{k0}}{m_k \omega_k}} \sin(\omega_k t + Q_{k0})$$

$$p_k = \sqrt{2P_{k0} m_k \omega_k} \cos(\omega_k t + Q_{k0})$$

Свойства

Можно показать, что

$[u\ \vartheta]_{(q\,p)} = [u\ \vartheta]_{(Q\,P)}$ – инвариант

2) ~~Теорема Пуанкаре~~

2S: $J_1 = \iint_S \sum_{j=1}^{s} dq_j\, dp_j$ – инвар канон преобразований

$J_2 = \iiiint_S \sum_{j,k=1}^{s} dq_j\, dp_j\, dq_k\, dp_k$

$J_3 = \iiint \sum^{j \neq k} dq_1 \dots dq_s\, dp_1 \dots dp_s$

Инварианты Пуанкаре

3) Фазовый объём

Бесконечно малые канон преоб-я
(инфинитизимальные)

$Q_j = q_j + \delta q_j\,(q, p, t)$

$P_j = p_j + \delta p_j\,(q, p, t)$

Пусть $|\delta q_j| \ll |q_j|$, $|\delta p_j| \ll |p_j|$

$F_2 = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k + \varepsilon F_2(q, P, t)$

$$P_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde F_2}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{\partial F}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde F_2}{\partial P_j}$$

$$\left.\begin{aligned} P_j - p_j &= -\varepsilon \frac{\partial \tilde F(q,P,t)}{\partial q_j} \\ Q_j - q_j &= \varepsilon \frac{\partial \tilde F_2}{\partial p_j}(q\,p\,t) \end{aligned}\right\}$$ линейное приближение по ε

Положим $\varepsilon = dt \quad \tilde F_2(q\,p\,t) = H$

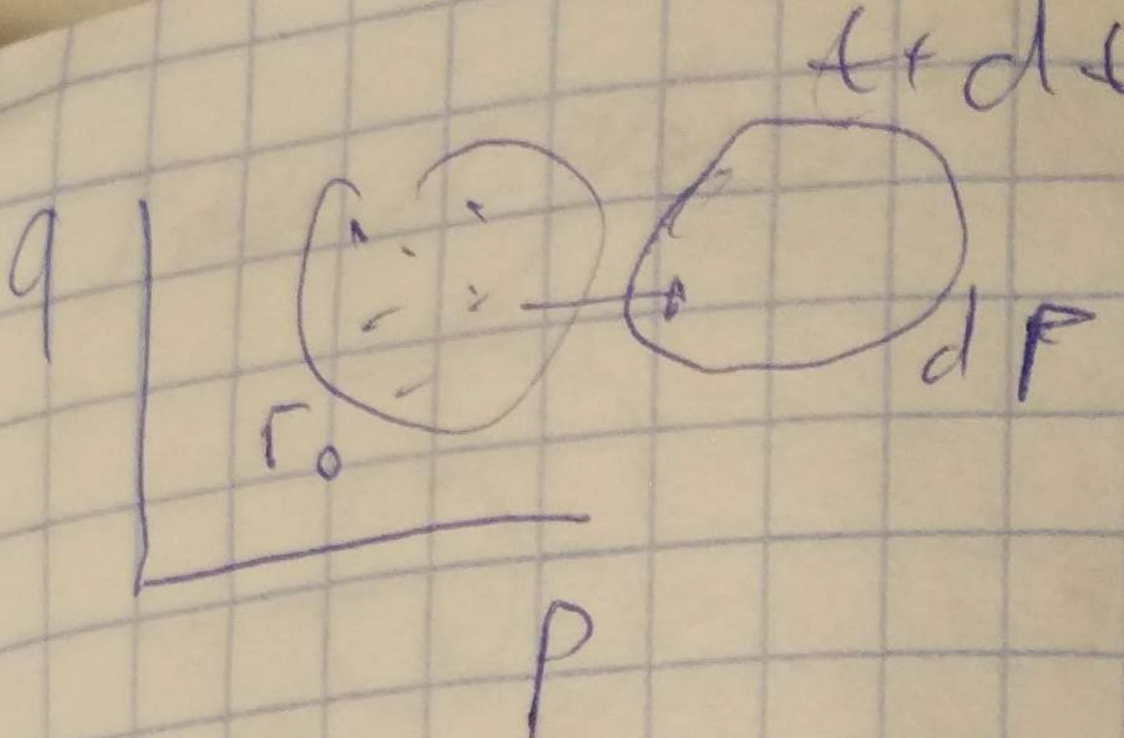
$$P_j = p_j - dt\frac{\partial H}{\partial q_j} = p_j + \dot p_j\, dt = p_j + dp_j = p_j(t+dt)$$

$$Q_j = q_j + dt\frac{\partial H}{\partial p_j} = q_j + \dot q_j\, dt = q_j + dq_j = q_j(t+dt)$$

— малое преобразов. — непрерывное каноничн. преоб-е с произв функцией в виде ф-ии Гамильтона

Теорема Лиувилля

Рассмотрим большое кол-во одинаковых гамильтоновых систем



$$d\Gamma_0 = dq_{10} \dots dq_{s0}\, dp_{10} \dots dp_{s0}$$

$$\Gamma_0 = \int d\Gamma_0$$

Ансамбль Гиббса: $d\Gamma = dq_1 \dots dq_s\, dp_1 \dots dp_s$

$$\Gamma = \int d\Gamma$$

$\boxed{Д}$: При движении ансамбля Гиббса его объём сохраняется $\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_0 = \int \dots \int dq_{10} \dots dq_{s0}\, dp_{10} \dots dp_{s0}$$

$$q_i = q_{i0} + dt \frac{\partial H_0}{\partial p_{i0}}$$

$$p_i = p_{i0} - dt \frac{\partial H_0}{\partial q_{i0}} \qquad H_0 = H(q_0, p_0, t_0)$$

$$\Gamma = \int_{\Gamma_0} \int D\, dq_{10} \dots dq_{s0}\, dp_{10} \dots dp_{s0}$$

$$D = \frac{\partial(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)}{\partial(q_{10} \dots q_{s0}, p_{10} \dots p_{s0})}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} = \delta_{ij} + dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0}\, \partial p_{i0}}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} = dt \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\, \partial p_{i0}}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_{i0}} = -dt\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0}\,\partial q_{i0}}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_{j0}} = \delta_{ij} - dt\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\,\partial q_{i0}}$$

$$D = J + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0}\,\partial p_{j0}} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\,\partial q_{j0}}\right)dt$$

$\Rightarrow D = 1$

Лекция 8

~~Т Лиувилля~~ Т Лиувилля: фазовый поток сохраняет объём.

(q,p) $\quad g^t \to q(t), p(t)$ — фаз. поток

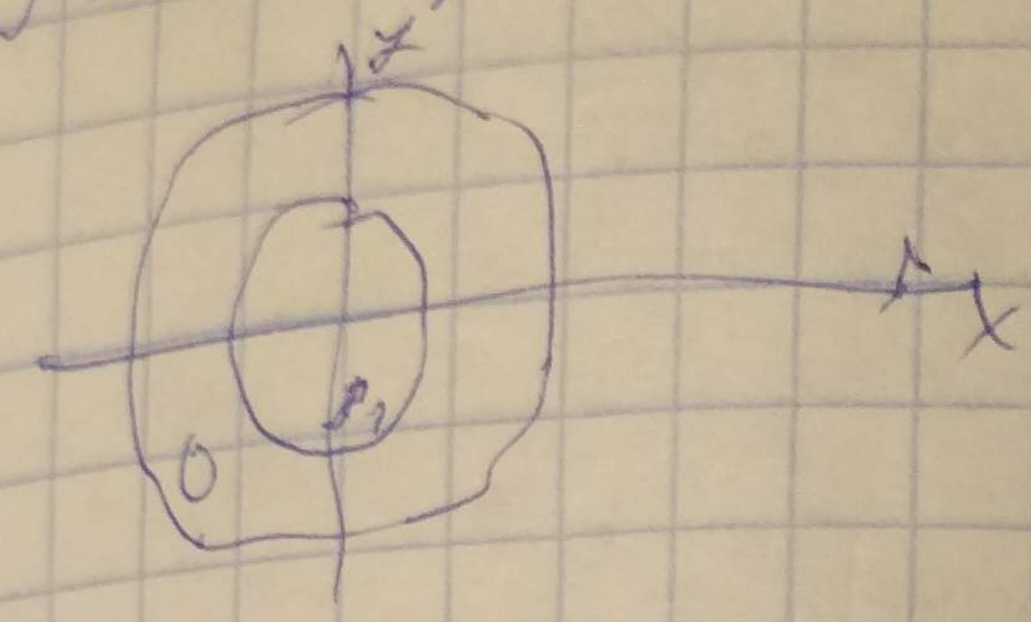
$g^t D = D$

Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть g — сохр объём непрерывн взаимно однозн отображение $g\ D \to D$

Тогда в любой окр U любой точки $\in D$ $\exists\, x \in U$ возвращающаяся в U $\boxed{g^n x \in U}$

Движ. частиц в поле: $U(r) = a r^4$ 55



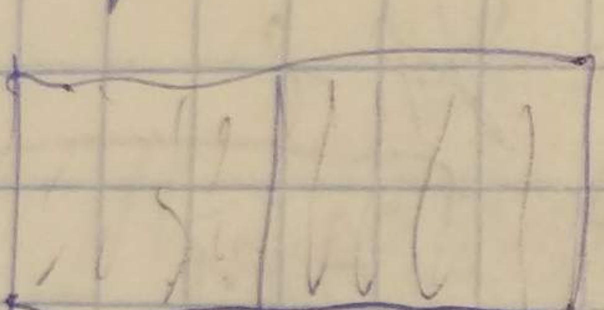
$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \geq 0$$

$$E \geq U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} = a\rho^4 - \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

$\rho_{1,2}(E, L)$ – точки поворота

Траектория либо замкнутая либо всюду плотная.

Идеальный газ:



время за которое газ соберется обратно больше ~~вр~~ ~~возраст~~ чем возраст солнечн. системы

$$\boxed{\text{Уравнения Гамильтона – Якоби}}$$

$q(t+dt) \to q(t+\tau)$ не на dt, а на конечн. τ

$p(t+dt) \to p(t+\tau)$

$q(t) \to q(t_0) = q_0$

$p(t) \to p(t_0) = p_0$

Идея: построить преобр, связывающее p и q с начальными значениями

$q(t, q_0, p_0)$ $\quad H(q, \dot{q}, t)$

5.6

Ищем $q(t) \to Q = Q_0$

$p(t) \to P = P_0$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = const = 0$$

$\dot{Q} = 0 \quad \dot{P} = 0$

$$H(q\,p\,t) + \frac{\partial F_2(q\,P\,t)}{\partial t} = 0$$

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$$

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2(q\,P\,t)}{\partial t} = 0}$$ – ур-е Гам. Якоби

S – главная ф-я.

$$H\left(q\,\frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q\,P\,t)}{\partial t} = 0$$

Полный интеграл – решение, кот. зависит от всех ~~…~~ переменных и от пост. интегрирования (от всех)

$S(q_1 \ldots q_s, t, \alpha_1 \ldots \alpha_{s+1})$

α_{s+1} – аддитивная постоянная

$\underbrace{S(q_1 \dots q_s, t, \alpha_1 \dots \alpha_s)}_{} + \alpha_{s+1}$

полный интеграл без адд. пост.

$P_j = \alpha_j$

$S(q_1 \dots q_s, t, P_1 \dots P_s)$ - можно рассм. как производящую ф-ю.

$$\boxed{P_j = \frac{\partial S(q\alpha t)}{\partial q_j}}$$

$$\boxed{Q_j = \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}}$$

$q_j = (t, \alpha, \beta)$

$q_j = (t, q_0, P_0)$

Теорема Якоби: ф-ии q_j и β_j где S - полный инт ур-я Гам-Як с ф-ей H являются решениями системы канон ур-ий Гамильтона

Дифф по времени:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q \underset{\frac{\partial S}{\partial q}}{P} t) = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$$

58)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} = 0 \Rightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right| \neq 0$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k \partial q_j} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \; j = 1 \ldots s$$

Пример)

Одном. гарм. осцил.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = 0$$

$$S = -Et + S_0(q) \quad / \; E = \alpha$$

$$-E + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = 0$$

$$S_0 = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\, dq$$

$$S = -Et + \int \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\, dq$$

Траектория $\beta = \frac{dS}{dE}$

$$\beta + t = \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{E - \frac{kq^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) \quad -\beta$$

Консервативные системы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1 \ldots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$S = -H_0 t + S_0(q_1 \ldots q_s)$$

$$H\left(q_1 \ldots q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = H_0$$

S_0 — укороч. действие

S — действие

$$S = \int_{(t_0, \bar q_0)}^{(t, \bar q)} L(q \dot q t)\, dt$$ — функция действия

$S(q t)$ — действие, удовл. ур-ю Гамильтона-Якоби

60

Метод разделения переменных

Пусть структура ур-я Г-Я

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\varphi_1\left(q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2 \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$$

$$S = \tilde{S}(q_2 \ldots q_s, t) + S_1(q_1)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(\varphi_1\left(q_1 \frac{d S_1}{d q_1}\right), q_2 \ldots q_s \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}, t\right) = 0$$

$\varphi_1\left(q_1 \frac{dS}{dq_1}\right) = \alpha_1$ – интеграл в квадратурах

Конс. система $H\left(\varphi_1\left(q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) \ldots \varphi_s\left(q_s \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)\right)$

$$S = -H_0 t + S_0(q_1 \ldots q_s)$$

$$S_1(q_{10}) + S_2(q_{20}) + \ldots + S_s(q_{s0})$$

$$= \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(q_k\, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

$$\varphi_k\left(q_k \frac{dS_{0k}}{dq_k}\right) = \alpha_k$$

$$H_0 = H\left(\varphi_1\left(q_1 \frac{dS_{01}}{dq_1}\right) \ldots \varphi_s\left(q_s \frac{dS_{0s}}{dq_s}\right)\right)$$

$H_0 = H(\alpha_1 \ldots \alpha_s)$

$S = -H(\alpha_1 \ldots \alpha_s)t + \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(\alpha_k, q, \ldots \alpha_s)$ — решение

Лекция 9

Метод раздел. перем. в ур-ии Гам-Як

циклические координаты

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1 \ldots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0$$

H q_1 явно не входит — циклическая

$$S = S_1(q_1) + \tilde{S}(t, q_2 \ldots q_s)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(t, q_2 \ldots q_s, \frac{dS_1}{dq_1}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$\frac{dS_1}{dq_1} = const = \alpha_1$$

$S_1 = \alpha_1 q_1$ α_1 — играет роль обобщ. имп.

$$S = \alpha_1 q_1 + \tilde{S}(t, q_2 \ldots q_s)$$

Пусть консервативна

$$S = \alpha_1 q_1 + \tilde{S}(q_2 \ldots q_s) - H_0 t$$

62

Пусть $H(g_1(q_1 p_1), \dots g_s(q, p_s))$

$$S = -H_0 t + \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q_j, \alpha_1 \dots \alpha_s)$$

$H_0 = H_0(\alpha_1 \dots \alpha_s)$

$(q, p) \Rightarrow (\beta, \alpha)$ S - пр ф-я канонич преобразований

① Декартовы коорд

m, $U(xyz) = U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) +$$

$$+ U_1(x) + U_2(y) + U_3(z) = 0$$

$$S = -E_0 t + S_1(x) + S_2(y) + S_3(z)$$

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+ U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$$

$$E_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 = \alpha_1 - U_1(x)$$

$$S_1(x, \alpha_1) = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - U_1)}\,dx$$

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t + \int \sqrt{2m(\alpha_1 - U_1)}\,dx +$$

$$+ \int \sqrt{2m(\alpha_2 - U_2)}\,dy + \int \sqrt{2m(\alpha_3 - U_3)}\,dz$$

$$\begin{cases} \beta_1 = -t + \frac{m}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha_1 - U_1}} \\ \beta_2 = -t + \frac{m}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha_2 - U_2}} \\ \beta_3 = -t + \frac{m}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - U_3}} \end{cases}$$

Пусть $E_0 = \alpha_1$ — разделить перемен.

② Цилиндр коорд

$$U(\rho \varphi z) = a(\rho) + \frac{b(\varphi)}{\rho^2} + Cz$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + \frac{P_\varphi^2}{\rho^2} + P_z^2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) +$$

$$+ a(\rho) + \cancel{\frac{b(\varphi)}{\rho^2}}^{\,0} + C(z) = 0 \quad \text{пусть } b = 0$$

$$S = -\overset{=\alpha_2}{E_0}\, t + P_{\varphi 0}\, \varphi + S_1(\rho) + S_3(z)$$

$\boxed{64}$

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{d\rho}\right)^2 + \frac{P_{\varphi_0}^2}{\rho^2}\right] + a(\rho) + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dz}\right)^2 +$$

$$+ c(z) \Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_3}{dz}\right)^2 + c(z) = \alpha_3$$

$$S_3(z) = \int \sqrt{2m(\alpha_3 - c(z))}\, dz$$

$$S_1(\rho) = \int \sqrt{2m(E_0 - a(\rho) - \alpha_3)^2 \frac{P_{\varphi_0}^2}{\rho^2}}\, d\rho$$

$$S = -E_0 t + P_{\varphi_0}\varphi + S_1(\rho, E_0, P_{\varphi_0}, \alpha_3) +$$

$$+ S_3(z, \alpha_3)$$

③ Сферические координ.

$$U(r\theta\varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \cancel{\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}} 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right] +$$

$$+ a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} = 0$$

$$S = E_0 + P_{\varphi_0}\varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{P_{\varphi_0}^2}{2m} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)^2 +\right.$$

$$+ \frac{P_{\varphi_0}}{r^2\sin^2 t} + \ldots + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}$$

$$g_0\left(\theta, \frac{dS_2}{d\theta}\right) = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}\right] + b_0(\theta) = \alpha_2$$

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - b(\theta)) - \frac{p_{\varphi_0}^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} + a(r) = E_0$$

$$S_1(r) = \int \sqrt{2m(E_0 - a(r)) - \frac{\alpha_2}{r^2}}\, dr$$

$$S = -E_0 t + p_{\varphi_0}\varphi + S_1(r, E_0, \alpha_2) + S_2(\theta, \alpha_2, p_{\varphi_0})$$

Переменные действие-угол

$q_1 \dots q_s$

1) Система консервативна
2) Движение финитно по всем коорд
3) Близко к периодическому
4) Система допускает полное разделение переменных в ур-ии Г-Я

$$H(g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), \dots, g_s(q_s, p_s))$$

Возможно только 2 типа движений

66)

① $p_k\, q_k$ — оба меняются с одним периодом — вибрация
траектория — эллипс

② q — не период, p — период. ф-ия координат — вращение

— условно периодич. движение

$S = -H(\alpha_1 \ldots \alpha_s) \cdot \quad S_0(q_1 \ldots q_s, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$

$S_0 = \sum_{k=1}^{s} S_{0k}(q_k, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$

Используем ур. действия в виде произв. функции

$S_0 : (q p) \to (Q, P)$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial S_0}{\partial q_j} = \frac{dS_{0j}}{dq_j}$$

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j(q_j)\, dq_j =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dS_{0j}}{dq_j}\, dq_j = J_j(\alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

$\alpha_k(J_1 \ldots J_s)$ — переменные действия (J)

$S_0 = S_0(q_1 \ldots q_s, J_1 \ldots J_s)$

$H(J_1 \ldots J_s)$ – новая ф-ия Гамильтона

$$Q_j = \varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}$$

J_j, φ_j – действие - угол

Запишем ур-е Гамильтона

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial J_j}$$

J_j, $J_0 \neq 0$

$$\varphi_j = \frac{\partial H}{\partial J_j} t + \varphi_0$$

$\frac{\partial H}{\partial J_j}$ – частота $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_j} \quad \omega_j = \frac{\partial H}{\partial J_j}$

$$\Delta \varphi_{jk} = \int \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \underbrace{\oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k}_{2\pi w} = 2\pi \delta_{kj}$$

$$\Delta \varphi_j = \omega_j T_j \Rightarrow T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

68

Чтобы найти состав частоты нужно

1) Найти S_0

2) Переменные действ-угол

3) Энергия системы

4) взять ЧП

Условно-периодич движение

$2s$-мерное ФП

$H(q_1(q_1, p_1) \ldots q_s(q_s, p_s))$ – полное разделение переменных

и система консервативна тогда можно найти полный интеграл $S = -H(\alpha_1 \ldots \alpha_s)t + \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q\alpha_1 \ldots \alpha_s)$

$g_i(q_i p_i) = \alpha_i$

$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j(q_j) dq_j = J_j(\alpha_1 \ldots \alpha_s)$ – действие

$H(J_1 \ldots J_s)$

$S_0(q_1 \ldots q_s, J_1 \ldots J_s)$

$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}$ — перем. угол

$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H^0}{\partial J_j} = \frac{\partial H}{\partial J_j}$

$\varphi_j = \omega_j t + \varphi_{j0}$

$J(q\,p) = J_{j0}$ — ∃ огр. движении ФП

J_j — однозн. ф-ии коорд. q

$\varphi_j / \alpha_j\ (J)$ — неодн. ф-ии

при обходе замкн. кривой коорд φ можем получать приращения, кратное 2π или 0 (кривая лежит в D)

Пусть есть нек. однозначн.

$$F(q\,p) = \sum_{e_1} \dots \sum_{e_s} C_{e_1 \dots e_s}(J)\, e^{i(e_1\varphi_1 + \dots + e_s\varphi_s)}$$

Любую одн. ф-ю состояния можно представить в виде ряда Фурье

$$F(q,p) = \sum_{l_1} \dots \sum_{l_s} C_{l_1} J e^{i(l_1\omega_1 + \dots + l_s\omega_s)t}$$

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

периодич. ф-я времени, изм с частотой $l_1\omega_1 + \dots + l_s\omega_s = \Omega_{l_1 \dots l_s}$ если все частоты кратны Ω.

Все члены отдельно — периодические.

$\det\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial J_j}\right) \neq 0$ — нет кратных частот.

Движение системы будет происходить по многообр. s измерений

$$T^s: \underbrace{S^1 \times S^1 \times S^1}_{s}$$ — намот. на т-я

Условно периодическое

т) (q_0, p_0) через большой пр-к времени. Она через $p_0 q_0$ не пройдёт а пройдёт сколь угодно близко.

Невырожденное движение:

Если частоты соизмеримы
$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_s \omega_s = 0$ то
движение частично вырожд.
Если n соотношений вырождены
все частоты соизмеримы

Все и кратными имеют
одну вел. часть
в общем случае: $H(J_1 \dots J_s)$

Например $n\omega_1 = l\omega_2$
$H(lJ_1 + nJ_2, J_3, \dots J_s)$
Если в системе есть вырожд.
то число однозначных инт. движения
будет больше чем s.
П позволяет разделить перем. в
нескольких коорд систем
$U = -\frac{\alpha}{r}$
Интегралы E, L; Вектор инт Лапласа

$$J = \left[\dot{\vec{r}}\,[\,]\right] - \frac{\alpha}{r}\vec{r}$$

$\boxed{72}$ в полярн + в эллипт коорд

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2}$$

$k_1 \neq k_2$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_1}}_{=p_1}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_2}}_{=p_2}\right)^2\right] + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = 0$$

$$S = -Ht + S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

$$g_1(q_1 p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} = \alpha_1$$

$$g_2(q_2 p_2) = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = \alpha_2$$

~~$S_1(q_1) = \int \sqrt{}$~~

~~$S_i(\alpha_i) = \int \sqrt{2m\left(\alpha_i - \frac{k_i \alpha_i^2}{2}\right)}\, d\alpha_2$~~

$$S_i(q_i) = \int \sqrt{2m\left(\alpha_i - \frac{k_i q_i^2}{2}\right)}\, dq_i$$

$$S_0 = \underbrace{S_1(q_1 \alpha_1)}_{=(J_1)} + S_2(q_2 \alpha_2)$$

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\, dq_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i(q_i)\, dq_i$$

$$\frac{p_i^2}{2m\alpha_i} + \frac{k_i q_i^2}{2\alpha_i} = 1$$

$$a = \sqrt{2m\alpha_i} \qquad b = \sqrt{\frac{2\alpha}{k_i}}$$

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\,\frac{2\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{k_i}} = \alpha_i\sqrt{\frac{m}{k_i}}$$

$$H = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$H = \sqrt{\frac{k_1}{m}}J_1 + \sqrt{\frac{k_2}{m}}J_2 \qquad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$$

$$S_0 = \int\sqrt{2m\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}J_1 - \frac{k_1 q_1^2}{2}\right)}\,dq_1 +$$

$$+\int\sqrt{2m\sqrt{\frac{k_2}{m}}J_2 - \frac{k_2 q_2^2}{2}}\,dq_2$$

$$w_i = \frac{\partial S_0}{\partial J_i} = \sqrt{2m}\int\frac{dq_i\,\sqrt{\frac{k_i}{m}}}{2\sqrt{\sqrt{\frac{k_i}{m}}J_i - \frac{k_i q_i^2}{2}}}$$

$$\int\frac{dq}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{km}}J_i - q_i^2}} = \arcsin\frac{q_i}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{k_i m}}J_i}}$$

$$J = \frac{\partial m}{\delta w}$$

w – фаза

Полностью вырожд движение

$$k_1 = k_2 \qquad H = \alpha_1 + \alpha_2 = \omega(J_1 + J_2) = \sqrt{\frac{k}{m}}(J_1 + J_2)$$

рассмотрим изотр гарм. осц. в полярн коорд

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + \frac{k r^2}{2}$$

74

$q_1^2 + q_2^2 = r^2$

2) Движение частицы массой m в ц.с. поле $U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ в перем. „действие"

r, θ – полярные

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = 0$$

$$S = -Et + S_r(r) + L\theta$$

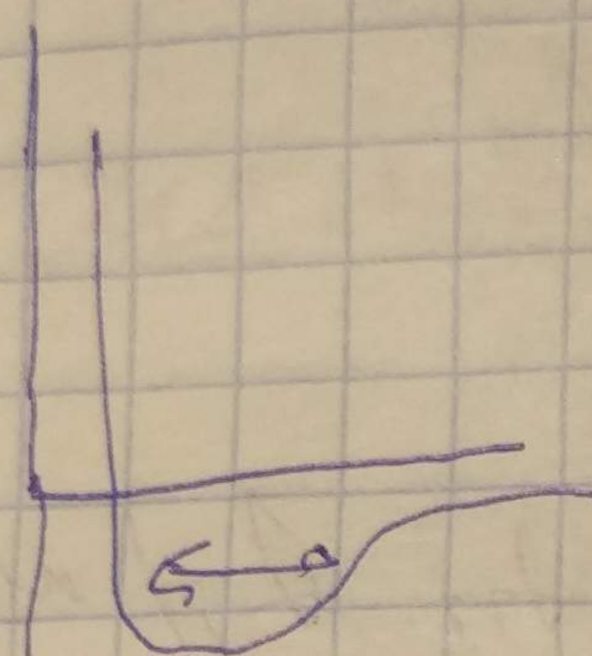
$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} - \frac{L^2}{2m r^2}\right)}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint L\, d\theta = L$$

$$J_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{\ldots}\, dr =$$

$$= -\sqrt{L^2 + 2mb} + \sqrt{\frac{m a^2}{-2E}}$$

$$J_r = -\sqrt{J_\theta^2 + 2mb} + \sqrt{\frac{ma^2}{-2E}}$$



$$E = -\frac{ma^2}{2\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^2}$$

$$\omega_t = +\frac{ma^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^3}$$

$$\omega_\theta = \frac{ma}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2mb}\right)^2} \cdot \frac{J_\theta}{\sqrt{J_\theta^2 + 2mb}} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{2mb}{J_\theta^2}} \qquad \omega_\theta = \gamma \omega_r$$

• $b = 0$: $\omega_\theta = \omega_r$ $\gamma = 1$ — полностью вырожд. траект всегда замкн.

$$E = -\frac{ma^2}{J_r + J_\theta}$$

Можно решать задачи в пол. коорд

$U = -\frac{a}{r}$ в 3пп коорд

• если $J \neq \frac{k}{m}$ то $k\omega_r \neq n\omega_\theta$

• Если $J = \frac{k}{n}$, то замкн. траект

~~Если $b = 0$, то тр~~

76

Зам $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Если известна $S(t, q_1 \dots q_s, \alpha_1 \dots \alpha_s)$ то по формулам канон преобр задачи решение этих $\cancel{в}$ ур-ний в квадратурах

$$\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad j = 1 \dots s$$

Разрешая отн q_j получ $q_j(\beta, \alpha)$

$$\begin{cases} \alpha_1 = g_1\left(q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = g_1(q_1, p_1) \\ p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \end{cases}$$

т.е. $\alpha_j = \alpha_j(q\, p)$

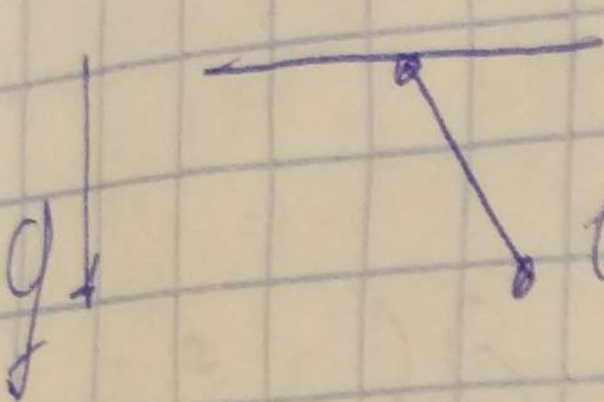
Опр: $[\alpha_j, \alpha_k] = 0$ то $\alpha_j\, \alpha_k$ наход в инволюции

– пример правильности теор Лиувилля: об интегрир мех. систем:

Если для Гамильт сист с S степ свобод в пр-ве конфиг. известно S ~~нез~~ независ. интегралов в инвариант по решению задачи может быть получено в квадратурах.

Адиабатический инвариант

Когда в сист. меняются



парам медленно меняются со временем

$$H(g_1(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \lambda_1) \ldots g_s(q_s \frac{\partial S}{\partial q_s}, \lambda_s))$$

медленно от t означает $\left|\frac{d\lambda_j}{dt} T_j\right| \ll \lambda_j$

т.е. за характерн. время измен. λ_j

меняется незначительно

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(g_1(q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}, \lambda_1) \ldots g_s(q_s, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \lambda_s)) = 0$$

$$S = -H_0 t + S_0(q_1 \ldots q_s, \alpha_1 \ldots \alpha_s, \underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_s}_{\text{считаем фиксир}})$$

$$H(g_1(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \lambda_1) \ldots g_s(q_s \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, \lambda_2)) = H_0$$

$H_0, \alpha_1 \ldots \alpha_s$ — тоже медл. ф-ии времени

78

$$J_j = \frac{1}{2\pi}\oint p_j\, dq_j = J_j(\alpha_1 \ldots \alpha_s, \lambda_1 \ldots \lambda_s)$$

$$S_0 = (q_1 \ldots q_s, J_1 \ldots J_s, \lambda_1 \ldots \lambda_s)$$

$$\left(\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j};\ p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right)$$

$$H' = H_0(J_1 \ldots J_s) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = H_0 + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial S_0}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k$$

$$\frac{\partial S_0((q(\varphi, J, \lambda)), (J), (\lambda))}{\partial \lambda_k}$$

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H'}{\partial J_j} = \frac{\partial H_0}{\partial J_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S_0}{\partial J_j \partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k$$

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_j} = -\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_j \partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k$$

Усредним $\dot{J}_j\ \dot{\varphi}_j$ по T где

$$T_{j\,max} \ll T \ll T_\lambda$$

Очевидно: $\overline{\dot{J}} = -\overline{\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_j \partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k} =$

$$= -\dot{\lambda}_k \overline{\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_j \partial S_k}} =$$

$$= \left[\frac{\partial S_0}{\partial I_k} = \right.$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{s} \int p_i \, dq_i$$

$$\frac{d S_{0i}}{d q_i}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \bar{J}_j = J_0$$

$$\Delta S_{0j} = \oint p_j \, dq_j = 2\pi J_j$$

<u>Пример</u> кол движ эл частицы в ц поле $U(r)$ при включении слабого однородного магн поля, медленно меняющ со временем $H(t) \parallel Oz$

$$A_r = A_\theta = 0$$

$$A_\varphi = \frac{1}{2} H r \sin\theta$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin\theta} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{e H r \sin\theta}{2c} \right)^2 \right] + U(r) = 0$$

$$S = -E_0 t + P_{\varphi_0} \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

$$= E_0 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{P_{\varphi_0}^2}{r^2\sin^2\theta} -\right.$$

$$\left. - \frac{eH}{c}P_{\varphi_0} + \cancelto{0}{\frac{e^2H^2}{4c^2}} r^2\sin^2\theta\right] + U(r) = \mathcal{E}$$

малое

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{P_{\varphi_0}}{\sin^2\theta}\right)^2 = \alpha_3$$

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\left(E_0 + \frac{eHP_{\varphi_0}}{2mc} - U_r - \frac{\alpha_3}{2mr^2}\right)}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dS_1}{dr}\,dr = \underbrace{J_r\left(E_0 + \frac{eHP_{\varphi_0}}{2mc},\ \alpha_3\right)}$$

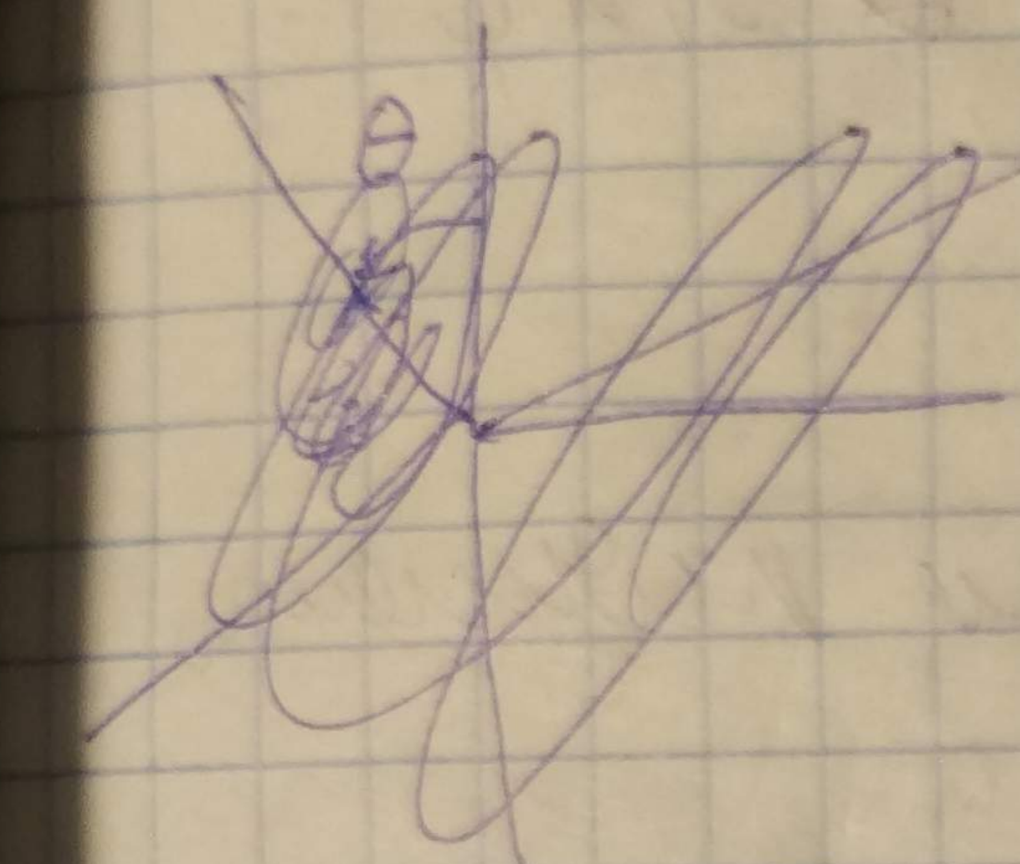
$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint\int_0^{2\pi} P_{\varphi_0}\,d\varphi = L \ (\text{на ось } z)$$

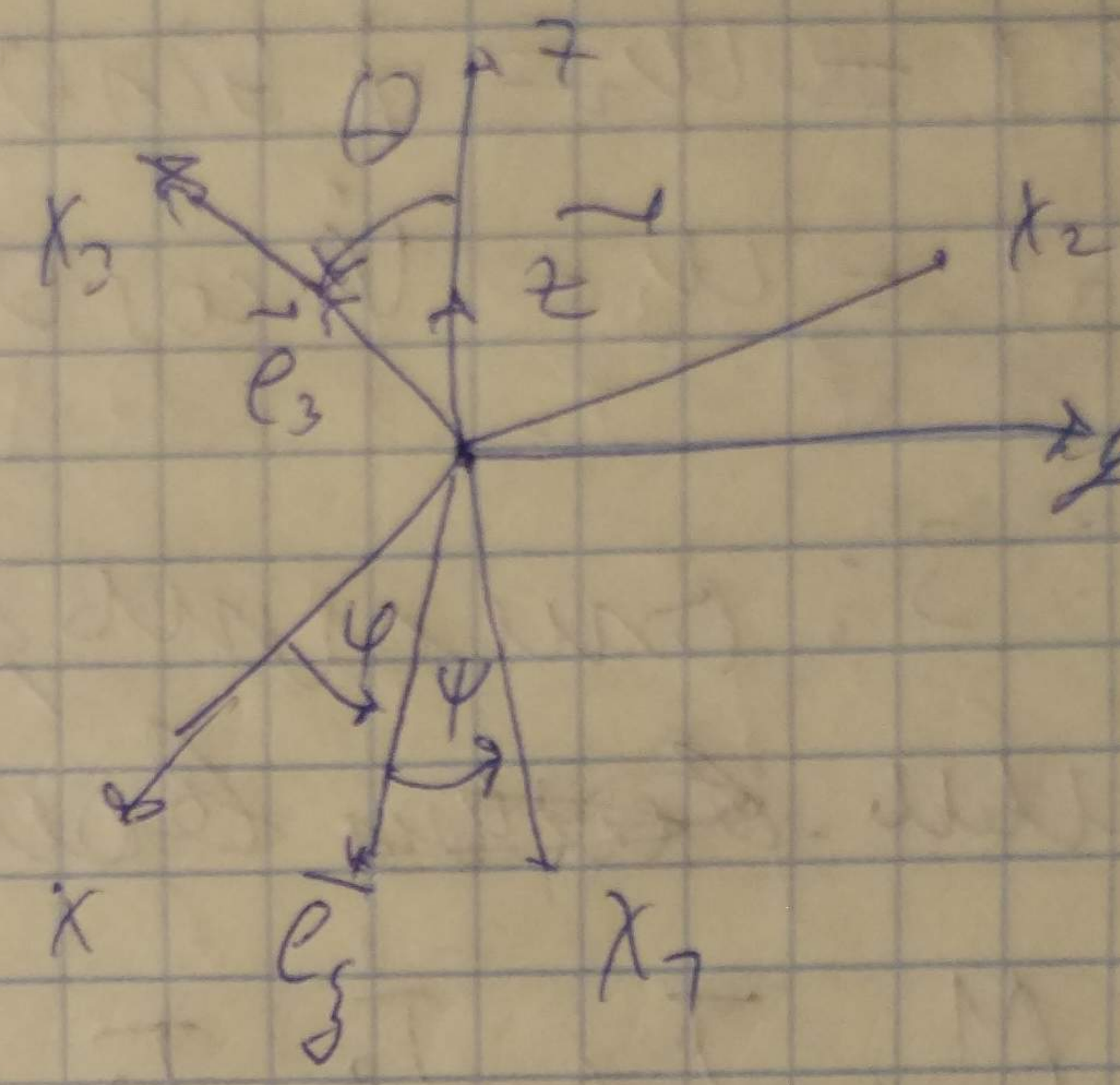
Итак медленно $\Rightarrow$

$$E_0 + \frac{eHP_{\varphi_0}}{2mc} = \text{const}$$

Лекция 10

Углы Эйлера и т.д. + Волной





$\overline{e}_3'$ - линия узлов

$\theta\ \varphi\ \psi$ - углы Эйлера

$0 \le \varphi,\quad \psi \le 2\pi$

$\vec{e}_3' = [\vec{z} \cdot \vec{e}_3]$ A

$0 \le \theta \le \pi \qquad \vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\chi}}{dt}$

пусть произв. беск малый поворот

$d\varphi\ \ d\psi\ \ d\theta\ \ \cancel{d\vec{\chi} = d}$

$d\vec{\chi} = d\varphi\,\vec{z} + d\psi\,\vec{e}_3' + d\varphi\,\vec{e}_3$

$$\omega = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{e}_{\xi} + \dot{\psi}\vec{e}_3$$

82

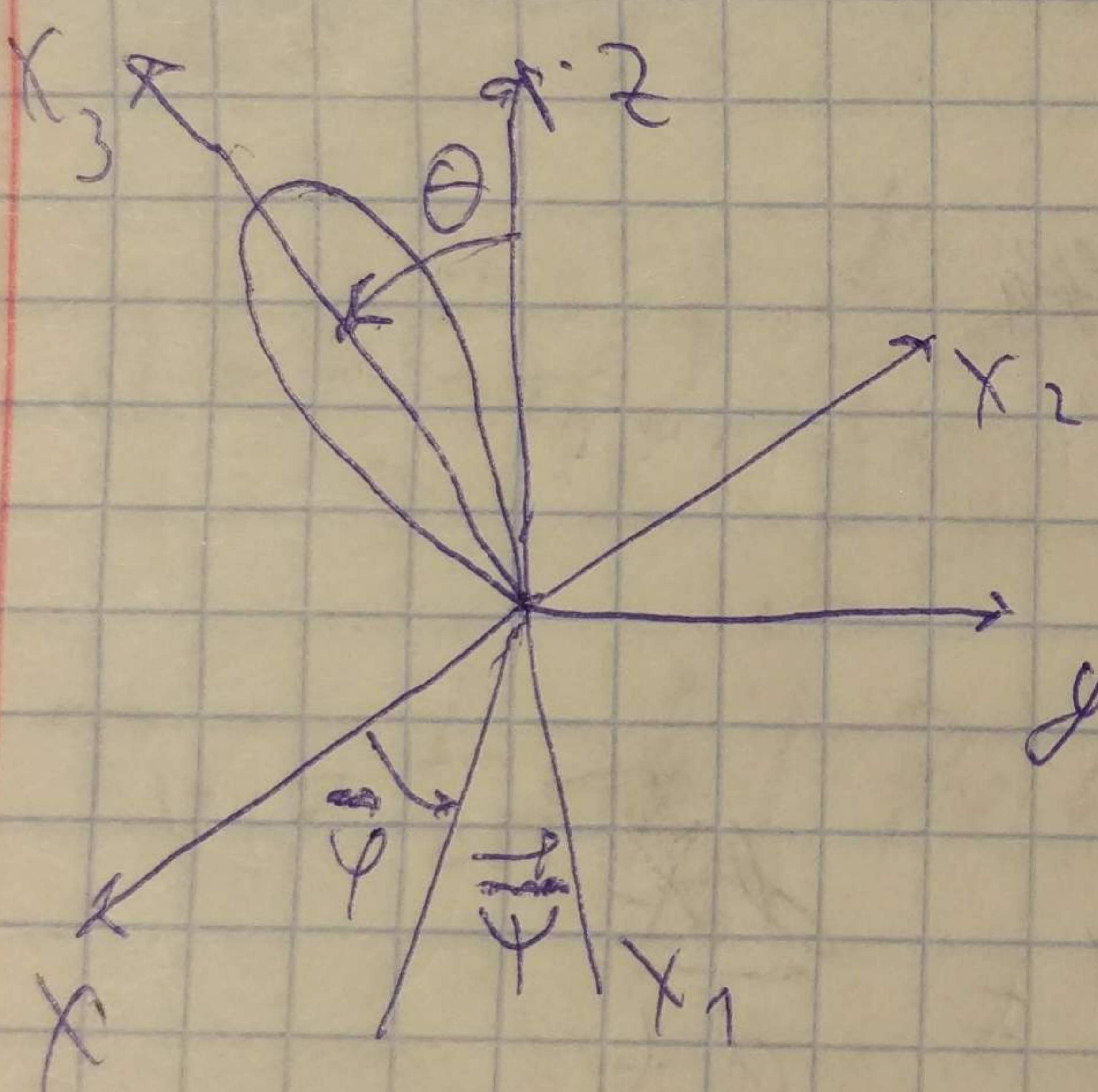
$$(\bar{\omega}\,\bar{e}_1) = \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$(\bar{\omega},\bar{e}_2) = \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$(\bar{\omega},\bar{e}_3) = \omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

ФЛ: 3: описать движение тяжелого симм. ~~волч~~ волчка

g M, J, J_2 J_3 $\qquad J_1 = J_2 \neq J_3$



$$J'_{ik} = J_{ik} + M(d_l^2\delta_{ik} - d_i d_k)$$

$$J'_1 = J_1 + ml^2 = J'_2$$

$$J'_3 = J_3$$

$$T = \frac{J_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2}{2}$$

$$L = \frac{J_1(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2}{2} -$$

$$- mgl\cos\theta.$$

$$E = \frac{J_1'(\dot\varphi \sin^2\theta + \dot\theta^2) + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2}{2} +$$

$$+ mgl\cos\theta = E_0$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = J_1'\dot\varphi\sin^2\theta + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta =$$

$$= L_{z0}$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = L_{30}$$

$$\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi = \frac{L_{30}}{J_3}$$

$$\dot\varphi = \frac{L_{z0} - L_{30}\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}$$

$$\frac{J_1'\dot\theta^2}{2} = E_0 - mgl\cos\theta - \frac{L_{30}^2}{2J_3} -$$

$$- \frac{(L_{z0} - L_{30}\cos\theta)^2}{2J_1'\sin^2\theta} = \tilde{E} - U_{eff}(\theta)$$

84

$$\tilde{E} = E_0 - \frac{L_{30}^2}{2J_3} - mgl$$

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(L_{z0} - L_{30}\cos\theta)^2}{2J_1' \sin^2\theta} - mgl(1-\cos\theta)$$

$$t + C = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{J_1'}(\tilde{E} - U_{eff}(\theta))}}$$

$L_{z0} \neq L_{30}$ $\quad$ $\theta_1 > \theta_2$ — корни ур-я

$$\tilde{E} - U_{eff}(\theta) = 0$$

· пусть φ не меняется

движ по оси z — прецессия

по оси θ — нутация

· если φ меняется

если $L_{z0} - L_{30}\cos\theta = 0$ (1)

корень θ совпад (1) и (2)

$$\frac{J_1'}{2}\dot{\theta}^2 = \tilde{E} - U_{eff}(\theta) \quad (2)$$

Динамические ур-я Эйлера.

Опред. динам. ур-я Эйлера с 1 неподв. точкой

Пусть тв. тело имеет 1 неп. т.

$L_1 = J_1 \omega_1 \qquad L_2 = J_2 \omega_2$

$L_3 = J_3 \omega_3 \qquad \vec{L}_i = L_i \vec{e}_i$

$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \vec{e}_i + L_i \dot{\vec{e}}_i = \dot{L}_i \bar{e}_i + [\bar{\omega} \bar{L}]$

$\dot{\vec{e}}_i = [\bar{\omega} \vec{e}_i]$

$$[\bar{\omega} \bar{L}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ L\omega_1 & L\omega_2 & L\omega_3 \end{vmatrix}$$

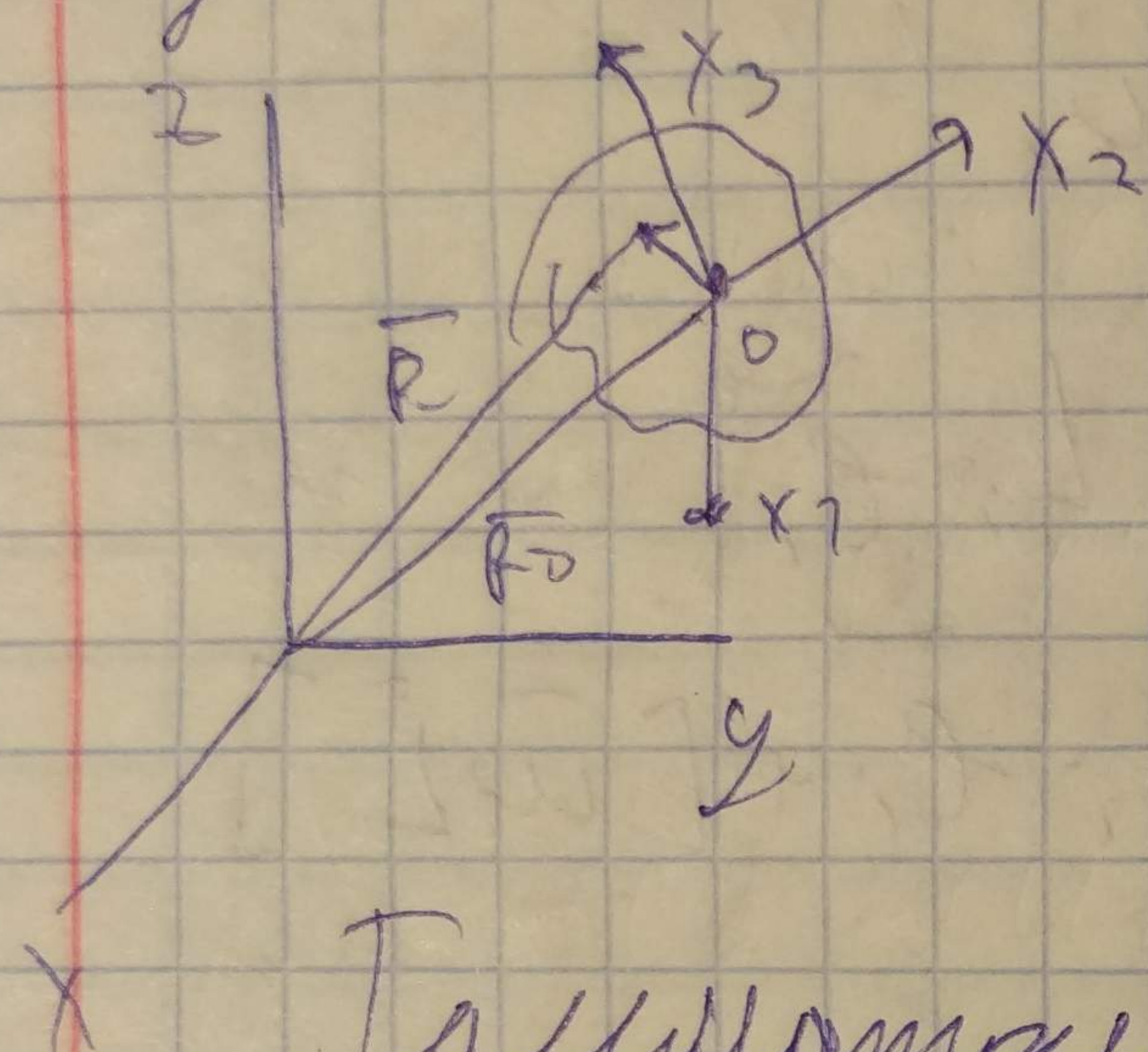
$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \omega_2 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

динамич. ур-я Эйлера

86

Кинематика твёрдого тела

Тв тело — система точек, расст между которыми не измен. при движении.



$m_i \to \rho\, dV$

$x_1 \to x \quad x_2 \to y \quad x_3 \to z$

R_0 и 3 угла — 6 коорд.

Рассмотрим беск малые перемещения

$$d\vec{R} = \underset{\text{поступ}}{d\vec{R}_0} + \underset{\text{поворот}}{d\vec{r}}$$

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}]$$

$d\vec{\varphi}$ — вектор беск малого поворота по напр. совпадает с осью вращения

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + [\vec{\Omega}\, \vec{r}]$$

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$ — вектор угл. скор-ти

O' — новый полюс отст на $\vec{a}$ = const

$\vec{V}'_{\text{поступ}}$ $\quad$ $\vec{\Omega}'_{\text{углов}}$

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$

$\vec{V} = \vec{V} + [\vec{\omega}\,\vec{a}] + [\vec{\omega}\,\vec{r}]$

$V = \vec{V}\,' + [\vec{\omega}\,'\vec{r}\,']$

$$\begin{cases} \vec{V}\,' = \vec{V} + [\vec{\omega}\,\vec{a}] \\ \vec{\omega} = \vec{\omega}\,' \end{cases}$$ – угл. скорость пост.

$\vec{\omega}$ – вращение тела как целого (абс. характ)

$\perp$ момент вращения $(\vec{V}\vec{\omega}) = 0 = (\vec{V}\,'\vec{\omega}) = 0$?

$(\vec{V}\vec{\omega}) = (\vec{V}\vec{\omega}) + ([\vec{\omega}\vec{r}]\vec{\omega}) = 0$

Все точки лежат в одной пл-ти перпенд $\vec{\omega}$. Всегда можно выбрать $\vec{a}$: $V' = 0 \to$ движение можно представить как чистое вращение – мгнов ось вращения

Имп. Мом имп. Кин эн. Теорем

$\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{V}_\alpha$

$\vec{P}$ ~~...~~ $\vec{P} = \sum m_\alpha (\vec{V}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}_\alpha]) = M(\vec{V}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}_c])$ где

88

$M = \sum m_\alpha$

$\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum m_\alpha}$ — р.в. центра масс в П.СО

$\vec{L} = \sum_\alpha [\vec{R}_\alpha, \vec{P}_\alpha] = \sum [\vec{R}_\alpha \cdot m_\alpha \vec{V}_\alpha] =$

$= \sum m_\alpha [(\vec{R}_0 + \vec{r}_\alpha)(V_0 + [\vec{\omega}\, \vec{r}])] =$

$= [\vec{R}_0 \cdot \vec{P}] + M[\vec{r}_c \vec{V}_0] + \sum_\alpha m_\alpha [\vec{r}_\alpha [\vec{\omega}\, \vec{r}_\alpha]]$

Если СО — система Ц.М., то

$\vec{P} = M\vec{V}_0$

$L = [\vec{R}_0 \vec{P}] + \sum m_\alpha [\vec{r}_\alpha [\vec{\omega}\, \vec{r}_\alpha]]$

$\vec{L}'$ — чистое вращение

$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{V}_0^2 + 2(\vec{V}_0 [\vec{\omega}\, \vec{r}_\alpha]) + [\vec{\omega}\, \vec{r}]^2) =$

$= \boxed{\dfrac{m V_0^2}{2} + M(\vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_c]) + \dfrac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha [\vec{\omega}\, \vec{r}_\alpha]^2}$

Тензор инерции

Вращ. энергия

$T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha [\vec{\omega}\, \vec{r}_\alpha]^2 \qquad \vec{\omega} = \{\omega_i\}$

Суммир. по индексам:

$$T_{вр} = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \left(\overline{\omega}^2 \overline{r}_\alpha^2 - (\overline{\omega}\overline{r}_\alpha)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\overline{\omega}_e^2 x_{e(\alpha)}^2 - \omega_e x_{e(\alpha)} \omega_k x_{k(\alpha)}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ik} x_{e(\alpha)}^2 - x_{i(\alpha)} x_{k(\alpha)}\right)}_{\text{распред-е массы } J_{ik}} \omega_i \omega_k$$

$$J_{ik} = \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{l(\alpha)}^2 \delta_{ik} - x_{i(\alpha)} x_{k(\alpha)}\right)$$ — тензор инерции

$$T_{вр} = \frac{J_{ik}\omega_i\omega_k}{2}$$

$$J_{ik} = \begin{vmatrix} \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha & \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha & -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha & \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + x_\alpha^2) \end{vmatrix}$$

$$J_{ik} = \int \rho\, dV (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$ — для непрер.

Диаг. — осевые моменты

Остальные — центробежные

Тензор аддитивен по массе

90

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$ – главные моменты инерции

(O – ц. м.
оси – глав. оси)

$$T_{вр} = \frac{J_1 w_1^2 + J_2 w_2^2 + J_3 w_3^2}{2}$$

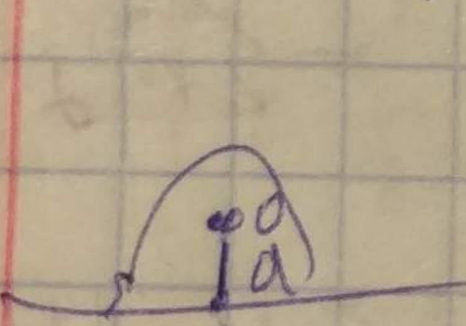
w_i – проекция на ось i

Если $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ тело – асиммет волчок

Если $J_1 = J_2 \neq J_3$ – тело симм волчок

Если $J_1 = J_2 = J_3$ – тело – шаровой волчок

Направление осей $\forall$



$$\boxed{J'_{ik} = J_{ik} + M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)}$$
Т. Гюйгенса-Штейнера

$$L' = \sum_a m_a [\bar{r}_a [\bar{w}\, \bar{r}_a]]$$

$$L_i = \sum m_a (w_i (x_{l(a)}^2 - x_{i(a)} w_k x_{k(a)})$$
$$\overset{\|}{w_k \delta_{ik}}$$

$$\boxed{L_i' = J_{ik}\,\omega_k}$$

$L_1' = J_1\omega_1 \quad L_2' = J_2\omega_2 \quad L_3' = J_3\omega_3$

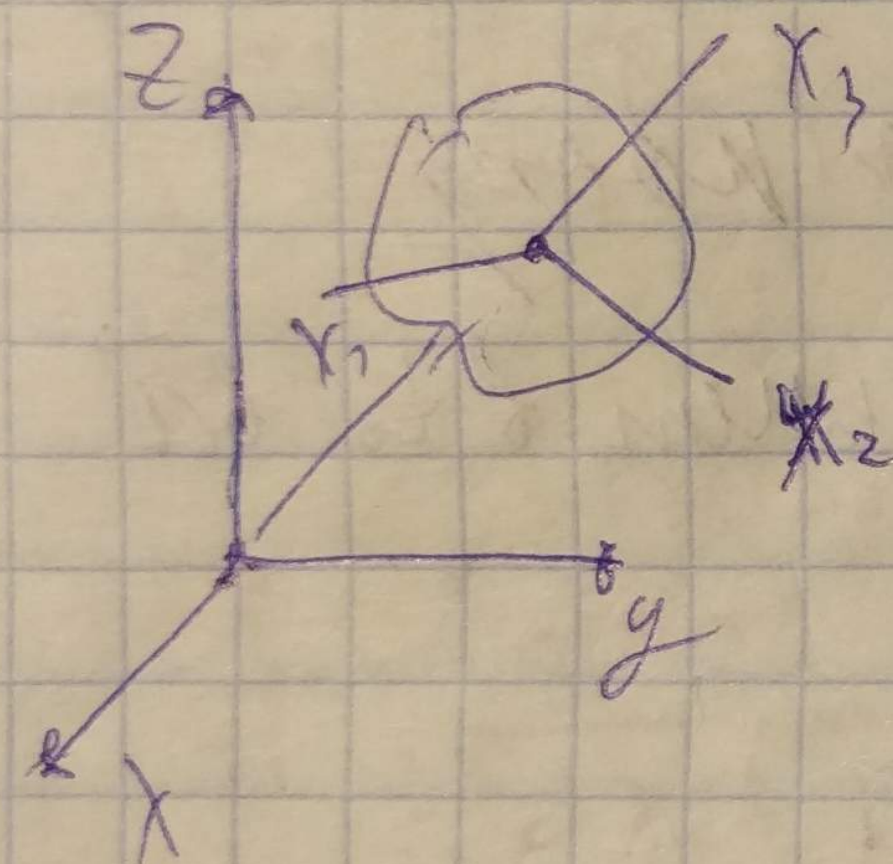
В С.О Ц.М с J_{ik} в диаг виде

$\bar{L}' = J\bar{\omega}$ для шарового волчка

Лекция 13

Кинематика сплошной среды.

Жидк. газы деф тв-тела



разобьём на элем.объёмы

$\Delta V \ll V$

$\Delta V \gg d$ - межмолек расст

$\Delta N \gg 1$

Хар-ки. $\bar{\vartheta}(\bar{r}, t)$ - скорость

$\rho(\bar{r}, t)$ - плотность

$\Delta N \gg 1$ дает возм. описать ее с помощью гладких функций и написать дифф. ур-ие

Этим смещение $d\vec r(\vec r\, t) = \vec u$ (поле)

92| Этим объём — физич весьма малая частица, частица жидкости

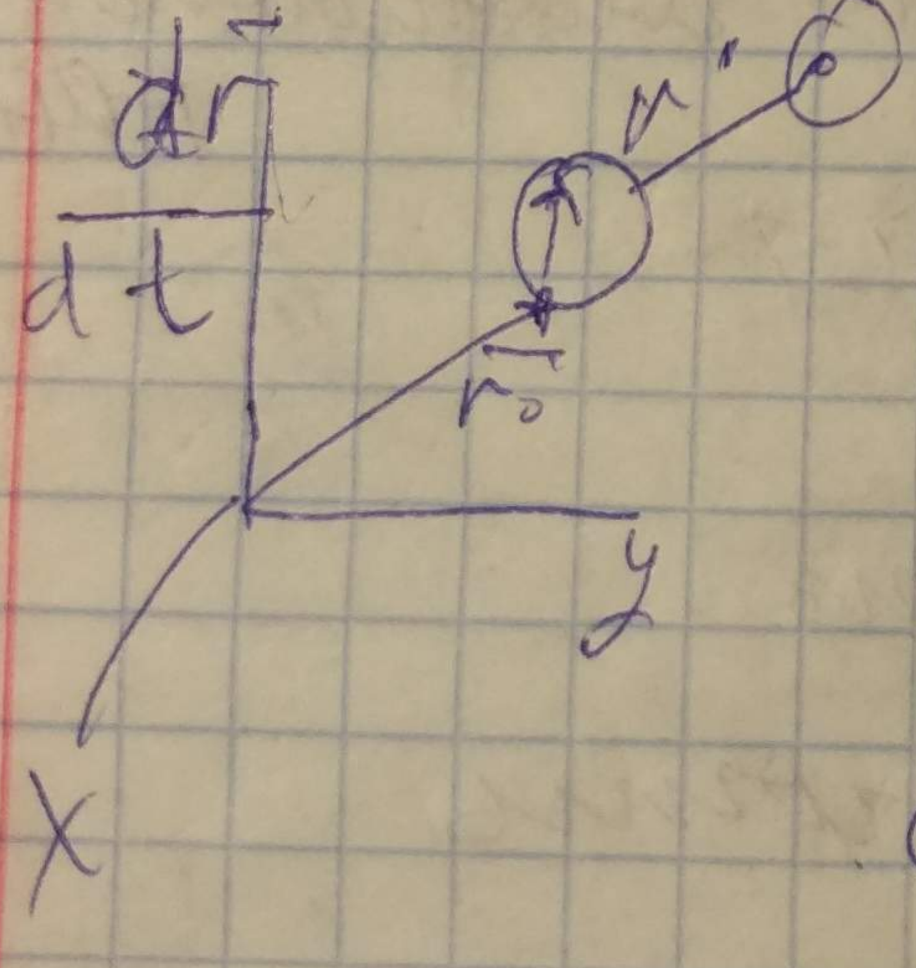
Лагранжев способ

В t_0 отв ~~в......~~ все объёмчики

Следим за изм. положения частица (объёма), кот в t_0 имел радиус-вектор $\vec a$ (для малых Δt)

Эйлеров подход

За коорд ΔV принимается коорд этой частицы, котор имеет в t_0 $\vec a$



$$d\vec r = \vec r_0 + \vec r'$$

$$d\vec r = d\vec r_0 + d\vec r'$$

$$|\vec r'| \ll |\vec r|, |\vec r_0|$$

$$d\vec r = \vec u(\vec r\, t)$$

$$d\vec r_0 = \vec u(\vec r_0\, t)$$

$$\vec r - \vec r'$$

$$d\vec r = \vec u(\vec r, t) - \vec u(\vec r_0\, t)$$

$$d\vec r = \left(\vec r', \frac{\partial \vec u}{\partial \vec r}\right) = \boxed{(\vec r \vec\nabla)\vec u}$$

смещ с мин. деформ

$X_i:\quad dx_i = \frac{x_i'\,\partial u_i}{\partial x_k}$

∂x_k

$d\chi_i = x_k' \varepsilon_{ki} + x_k' \chi_{ki}$

$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ симметр

$\chi_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ — антисимм

$d\chi_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \chi_{jk}$ $\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \chi_{ki} + \varepsilon_{ki}$

$dx_i = x_k \chi_{ki} + x_k \varepsilon_{ki}$

$e_{123} = e_{312} = e_{231} = -e_{213} = -e_{132} = -e_{321} = 1$

$d\chi_i = (d\chi_1, d\chi_2, d\chi_3) - (\chi_{23}, \chi_{31}, \chi_{12}) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) =$

$= \boxed{d\bar{\chi} = \frac{1}{2}[\bar{\nabla}\bar{u}] = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{u}}$ поворот

$dx_i' = \chi_{ki} x_k' = e_{lki}\, d\chi_l\, dx_k' = e_{ikl}\, d\chi_l\, x_k'$

$d\bar{r}' = [d\bar{\chi}', \bar{r}']$ $\qquad d\chi_i = \varepsilon_{ki} x_k'$

94)

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{is} \cancel{x} x_i' x_s'$$

$$d\vec{r} = \underbrace{d\vec{r}_0' + [d\vec{\chi}, \vec{r}]}_{\text{тв. тело}} + \text{grad}_r \Psi$$

$$dx_i' = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^\circ}$$

$$\boxed{d\vec{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}_0} = \vec{\nabla}^\circ \Psi}$$ деформация

ε_{ki} можно привести к диаг. виду

$$\varepsilon_{ki} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$ тензор деформ

Кинематич. изм-е СС сводится к изменению ΔV напр $x\, y\, z$

Относит изм ΔV ε_{ki} – диаг

$$V = x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$$

$$V + \Delta V = x_1' x_2' x_3' (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} =$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = div\, \vec{u}$$

$$! \; \left[d\vec{r} = d\vec{r_0} + [d\vec{\chi}, \vec{r}] + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \right.$$

завихр. деформ.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{\chi}_i = u_i = w_{ki}\, dt$$

$$\chi_{ki} = w_{ki}\, dt \qquad \varepsilon_{ki} = V_{ki}\, dt.$$

$$w_{ki} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right)$$ — тензор $\vec{u} = \frac{1}{2} rot\, V = \frac{d\chi}{dt}$

$$V_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$ — тензор скоростей деформации

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\chi}}{dt} = \frac{1}{2} rot\, \vec{V}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} V_{ki} X_k' X_i'$$

e_{ii} — относ. удлинение малого отрезка цур. напр-го ∥ i-ой коорд. оси

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\, \vec{r}'] + \nabla' \varphi$$

ε_{nk} — деформ. движ. $n \neq k$

ε_{nn} — деформ. растяж. (сжатия)

$$V_{ki} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta V_A} = \vec{\delta V_0} + \vec{D}$$

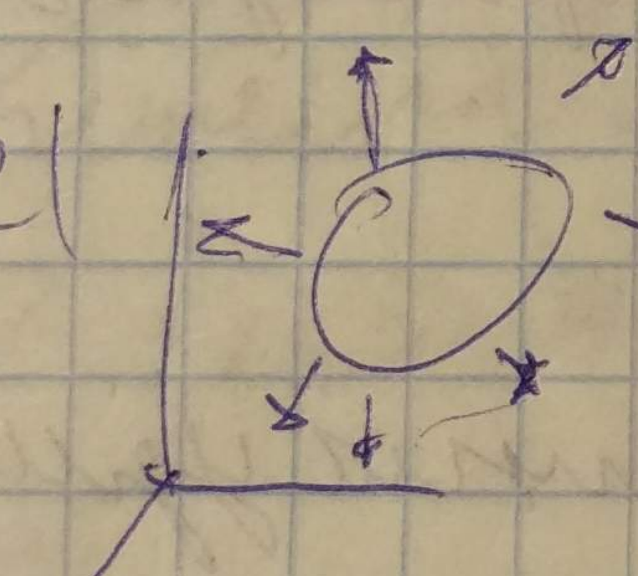
$$\frac{d_\Delta V}{\Delta V\, dt} = V_{11} + V_{22} + V_{33} = \cancel{\frac{\partial V_i}{\partial x_i}}$$

поле скоростей

$$= \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{V}$$ — скорость относит измен объема частицы

1) Объемные силы — силы, медленно убыв с расстоянием по мере проникнов в ΔV (т.е. все вещ-во одинак)

$\vec{F} = f_i(\vec{r}, t)\, \rho(\vec{r}, t)\, \Delta V$ — сила тяж, сила электростат взаимод

2)  Поверхностные — быстро убывающие с расстоянием и $\sim \Delta S$

Вещ-во вне действует на в-во внутри

$\vec{F}_i(\vec{r}, t, \vec{n}_i)\, \Delta S$ — нечетная. нормальн локальные напряжения

$\vec{F_i} = P_{ik}(\vec{r}, t)\, \vec{n_k}$

тензор мол напр-й (ШМН)

P_{ik} – i-я комп. сила, действ на единицу площади эл-та пов-ти, расп. $\perp X_k$ в момент t в точке пр-ва

Приводятся диаг вид

$$P_{ik} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

Уравнение Эйлера:

Рассмотрим ΔV: $\rho \frac{dV_i}{dt} \Delta V = \rho f_i \Delta V + \oint P_{ik} h_k dS$

$d\vec{s} = \vec{h} ds$

$\int \frac{\partial P_{ik}}{\partial X_k} dV'$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial X_k}}$$ – ур-е движ-я жидкости

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' = -\oint \rho V_i h_i dS' = -\int \frac{\partial \rho V_i}{\partial X_i} dV'$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} = 0}$$ – ур-е непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \cancel{(\vec{\nabla}\vec{V})} + \rho \operatorname{div} \vec{V} + (\vec{V}\,\vec{\nabla})\rho =$$

$$= \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0}$$

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V}, \vec{\nabla})\rho$$

Идеальная жидкость

$$\left.\begin{aligned} &\rho \frac{dV}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \\ &\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \end{aligned}\right\} \rho, V_j, P_{ik} \text{ неизв}$$

Модель ид жидк: движущуюся сплошная среда, в которой $\forall\ P_{ik}$ изотропен

$$P_{ik} = -\underbrace{P(x,y,z,t)}_{\text{давление}}\,\delta_{ik}$$

2) Движение происходит адиабатически (нет теплообмена)
и отсутствует вязкость = изэнтропия.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial x_k} = 0 \qquad s = const$$

$$V = \frac{1}{\rho}; \quad \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\varkappa} = const, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} \qquad \rho = F(p)$$

Баротропные процессы

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{d\vec V}{dt} = \rho\vec f - \nabla p \\ &\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\,\vec V = 0 \end{aligned}\right\} \text{уравн. Эйлера}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\,\bar v = 0 \\ &\rho\frac{d\bar v}{dt} = -grad\, p + \rho f \\ &\rho\frac{de}{dt} = -p\, div\, v \\ &\frac{ds}{dt} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\rho = F(p)$$

$$\frac{d\bar V}{dt} = \frac{\partial \bar V}{\partial t} + (\bar V\bar\nabla)\bar V$$

$$[\bar a[\bar b\bar c]] = \bar b(\bar a\bar c) - \bar c(\bar a\bar b)$$

$$(\bar V\bar\nabla)\bar V = \bar\nabla\frac{V^2}{2} - [\bar V[\bar\nabla\bar V]]$$

$$\frac{1}{2}[\bar\nabla\bar V] = \bar\omega \text{ — вихрь}$$

$$\frac{\partial\bar V}{\partial t} + 2[\bar\omega\bar V] = -\bar\nabla\frac{\bar V^2}{2} + \vec f + \frac{\bar\nabla\bar p}{\rho}$$

Пусть $f = -\bar\nabla u$

удельная энергия

Энтальпия: $\boxed{W = e + p\frac{1}{\rho}}$

100)

$$dw = T\,ds^{=0} + V\,dP = \frac{dP}{\rho}$$

$$\vec{\nabla} w = \vec{\nabla}\frac{P}{\rho}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + 2[\bar{\omega}\,\bar{V}] = -\bar{\nabla}\left(\frac{V^2}{2} + U + w\right)$$

НУ: V_0 ГУ: $V_n|_{\Gamma} = 0$

1) Стац. проц. — поле скоростей от времени не зависит $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$

2) Линии тока — линии к которым указывают напр. скорости

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{V}}{V} \bar{e} \qquad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad \Big| \cdot \bar{e}$$

$$\bar{e}\,\vec{\nabla} P = 0 \qquad P = \frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} + U$$

$\frac{\partial P}{\partial e} = 0$ — вдоль линий тока V сохран.

Интеграл Бернулли $\boxed{\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} + U = C}$

Безвихревое движение (потенциальное)

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\bar{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \vec{\nabla}\varphi(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2} + w + u\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2} + w + u + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + w + u + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t)}$$ — интеграл Коши

$$\frac{p}{\rho} + e$$

Если бездвижны и стац, то

$$\frac{V^2}{2} + w + u + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{C}$$

$$\frac{V^2}{2} + h + u = C$$

Потоки энергии и импульса. Ур-е непр-ти

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \rho Q}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q V_k}{\partial x_k}$$ Q — ∀ тен. велич

Эйлер:
$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho f - \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ \rho \frac{d^2 \vec{V}}{dt^2} = -V_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho f_{in} \end{cases}$$

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt}^{=0} - p\frac{dV}{dt} \qquad V = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

полн эн на един. массы

102

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{\partial P V_i}{\partial x_i} + \rho f_i V_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial P V_i}{\partial x_i} + \rho f_i V_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)V = \rho f_i V_i - \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)$$

Если $f_i = 0$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0}$$ Ур-е неразрывности

$W_i = \rho\left(e+\frac{V^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)V_i$ — вектор потока энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\left(\underset{\text{внутр}}{e} + \underset{\text{кинет потенц}}{\frac{V^2}{2}}\right)dV = -\oint\left(\underset{\text{перенос через границу}}{\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)} + \underset{\text{работа сил давления}}{P}\right)V_i n_i\, dS$$

$\bar{W}$ — поток энергии сс, вытек из V в ед времени через ед. площадку с вект нормали $\bar{n}$

Поток импульса

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

$P_{ik} = -(p_{ik} - \rho v_i v_k)$ — плотн потока имп.

$p_{ik} = -p\delta_{ik}$

$$\boxed{P_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k}$$ для идеал жидк. ~~плотн~~ плотн потока имп

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\oint P_{ik} n_k \, ds$$

P_{ik} i-я комп. импульса вып через площадку с норм n_k

Звуковые волны

Распределение малых возмущений p, ρ, v в сжимаемой сплошн среде; колеб-я распр-ся в виде волн малых амплитуд

p_0 — равн знач

$p = p_0 + p'$, $p' \ll p_0$

109)

$\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right) + (\bar{V} \bar{\nabla}) \bar{V} = -\bar{\nabla} P \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{V} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\bar{\nabla} P' \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{V} = 0 \end{cases}$$

div: $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} V = -\Delta P'$

$$P' = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \rho'$$

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_0} \right)_s \Rightarrow P' = C^2 \rho'$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta P' = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial^2 P'}{\partial t} - C^2 \Delta P' = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - C^2 \Delta \rho^2 = 0 \end{gathered}}$$

$\bar{V}' = \vec{\nabla} \Phi$

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p'$$

$$-p' = -c^2 \rho' , \quad \rho' = -\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$-\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho_0 \Delta \Phi = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \Phi = 0}$$

возм только в сжим. среде

Плоская волна

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi} = 0$ $\quad \Phi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

При $f_2 = 0$ $\quad \rho' = f_1(x - ct)$ $\quad x - ct = const$

f_1 - бегущ. волна $\quad x = const + ct$

Такое же реш-е у [illegible]

Пусть $y = f_1(x - ct)$

$V_y = V_z = 0$, $V_x = f_1'$

106

V - скор частиц жидк-ти, совп напр волны - продольн

$$p' = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \to \rho' = \frac{\rho_0}{c} f_1'$$

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c} V, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{V}{c}$$

Моночр волна

$$\varphi = \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \varphi_0(x, y, z)$$

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0$$

если плоская, то

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} A e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$A - a e^{i\alpha}$ $\vec{n}$ вдоль напр волны $(1, 0, 0)$

Волновой вектор $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}}$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\varphi = a\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

~~Тензор вязкого напряжения~~

Тензор вязкого напряжения, Ур-е Навье–Стокса; Динамич. подобие течений, Число Рейнольдса

Вязкая жидкость: модель движений в жидком или газообр состоянии, при котором существенны силы внутр трения $P_{ik} = -p\delta_{ik}$

В вязк жидк-ти появл напряж. сдвига. Нормали к разным эл-там пов-ти неодинак. $P_{ik}^{пов}$ анизотропны т.к. зависят от нормали.

$P_{ik} = -p\delta_{ik} + t_{ik}$ ← опред. резон. скорость деформ. $\sim f \sim \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ $\quad V_{ik} = \frac{1}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$

$S_{ik} = V_{ik} - V_{ik}$ S-тор деф чистого сдвига

Если $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ мало, v_i мало, то t_{ik} — лин одн.

Ф-я $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$. нужно исключить вращение →

→ t_{ik} — симм тензор — линейн вязк среда (изотропн)

! $t_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$ — тензор вязких направлений

108

$L_{ii} \to \eta$ - внутр. трение

ζ - объёмн. вязкость

$$\rho\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{x_k}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_e}{\partial x_e}\right) +$$

$$+ \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_e}\delta_{ik}$$

Чаще всего:

Ур-е Навье Стокса!

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\Big) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} +$$

$$+ \eta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_e}{\partial x_e}\right) + \zeta\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_e}\right)\delta_{ik}$$

$t \to -t \quad v \to -v$

Ур-е изм-я энергии

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\frac{dv_i}{dx_i} + D - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Вязкость приводит к необр-ми процессам!

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x_e}\right)$$

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{f} - \mathrm{grad}\, \bar{p} + \eta \Delta \bar{V} + \left(\zeta + \frac{2}{3}\right) \mathrm{grad\, div}\, V$$

Если жидкость несжимаема:

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{f} - \mathrm{grad}\, p + \eta \Delta \bar{V}, \quad \mathrm{div}\, V = 0$$

Решение: $f = \nabla \eta$

rot: $\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\, V + \mathrm{rot}(\nabla \bar{v})\bar{V} = \eta \Delta\, \mathrm{rot}\, \bar{V}$

div: $\Delta p = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$

ГУ: $V_{гр} = 0$ — усл. прилипания

Ур-е движ. несжим. жидк-ти:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, V = 0 \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\, \mathrm{grad}\, p + \nu \Delta \bar{V} + \bar{f} \end{cases}$$

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — уд. вязкость

Несжим. жидкость:

110

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right)=\rho f_i-\frac{\partial P}{\partial x_k}+\eta\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i\partial x_k}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0$$

Возникает идея отделить влияние одн. параметров опр жидкости от влияния самих единиц измерения

$\rho,\ \eta,\ x,\ v$

Запишем в безразм. форме:

$$V_i=\frac{v_i}{v_0}\qquad X_i=\frac{x_i}{R}\qquad T=\frac{t v_0}{l}$$

$$P=\frac{p-p_0}{R\rho},\ \text{пусть } f=0$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+Re\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k\partial x_i}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0$$

$$Re=\frac{\rho V_0 l}{\eta}$$ — число ~~Re~~ Рейнольдса

Пусть нашли решение

$V_i = F_i(\tau, X, Re)$ при опред Re

Тогда выбираем 3 из 4 ($\rho V_0 l \eta$) при фикс Re

Получим 3 семейства решений, опис. формулой.

- Динамич подобные течения

Аналогично $P = P(\tau, X, Re)$

- Закон динамического подобия (для вязкой жидк-ти с мин. вязкостью)

Кинемат. подобие:

$$\tau = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{l}{\tau} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{l}{\tau^2}$$

Распред масс: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1 V_1}{m_2 V_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{l^3}$

Кинемат подобие → динамич подобие

112

$$\frac{|F_1|}{|F_2|} = \frac{m_1|a_1|}{m_2|a_2|} \to \frac{F_1}{\rho_1 V_1^2 S_1} = \frac{F_2}{\rho_2 V_2^2 S_2}$$

Закон подобия Ньютона.

$F = C_F \rho V^2 S$, C_F - коэф один для подобных течений

Вязкость: $C_F = \frac{F}{\rho v^2 S} = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\mu}{\rho v^2 S} =$

$= idem$ — независ $\Rightarrow C_F = \frac{V}{L}\frac{\eta}{\rho V^2}$

$Re - \frac{1}{C_F} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{VL}{\xi}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_2 = k\bar{r}_1 \\ a_2(r_2) = k_2 a_1(r_1) \end{array}\right\}$$ есть подобие течений

l - р-р неодн-ти u - скор потока

ν - уд вязкость

$\tilde{r} = \frac{\bar{r}}{l}$, $\tilde{V} = \frac{\bar{V}}{u}$

$\tilde{p} = \frac{p}{\rho u^2}$, $\tilde{\nabla} = l\nabla$ $\tilde{\Delta} = l^2\Delta$

$(\tilde{V}\tilde{\nabla})\tilde{V} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{R}\tilde{\Delta}\tilde{V}$ где $\boxed{R = \frac{ul}{\nu}}$ число Рейнольдса