1. Кинематика материальной точки. Основные понятия. Линейные и угловые характеристики движения.

**(Опр.)** Механическое движение – это изменение положения тел в пространстве (т.е. относительно других тел) с течением времени.

Простейшей ***моделью*** реального ***тела***, с которой начинается построение механики, является ***материальная точка*** (МТ).

**(Опр.)** Материальная точка – физическое тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь.

Механическое движение может быть определено только по отношению к ***системе отсчета*** (*СО*).

**(Опр.)** Система отсчёта включает тело отсчета (ТО), а также прибор для измерения времени.

**(Опр.)** Траектория – это линия в пространстве, вдоль которой движется материальная точка.

**Линейные кинематические характеристики движения**

В выбранной *СО* с телом отсчёта обычно связывают систему координат. Тогда пространственное положение материальной точки можно задать её ***координатами***. Положение точки можно задать также и ***радиус-вектором*** *r̄* проведённым из началакоординат к материальной точке. Связь ***радиус-вектора*** с координатами точки математически записывается так:

,

где *х*, *у*, *z* – координаты МТ, равные проекциям радиус-вектора *r̄* на оси *OX*, *OY* и *OZ*; а *ēx*, *ēy*, *ēz* – единичные векторы («орты») соответствующих направлений.

Основной (но не единственной) задачей механики является нахождение координат (или радиус-вектора) движущейся точки в любой момент времени – установление кинематического ***закона движения***:

 или .

**(Опр.)** Путь Δ*l* – это длина участка траектории между начальным и конечным положениями.

**(Опр.)** Перемещением за промежуток времени Δ*t* = *t2* – *t1* называется вектор Δ*r̄*, соединяющий положение точки в момент времени *t1* с её положением в момент времени *t2*:

**(Опр.)** Средняя скорость – отношение перемещения к интервалу времени движения:

**(Опр.)** Мгновенная скорость – предельное значение средней скорости при уменьшении временного интервала ∆*t*→0 (на «бесконечно коротком» участке траектории):

Направлена по касательной к траектории.

**(Опр.)** Путевая скорость – это скалярная величина равная отношению пройденного пути к соответствующему интервалу времени:

Модуль вектора скорости, а значит и путевая скорость, связаны с проекциями скорости на координатные оси:

Зная мгновенную скорость как функцию времени, можно найти изменения координат:

; ; ,

а значит перемещение и пройденный путь:

.

**(Опр.)** Равномерным называется движение, при котором МТ за любые равные интервалы времени совершает равные перемещения (т.е. *V̄* = const).

***Закон равномерного движения*** при *t0=0* (в «координатной» форме):

или в векторном виде:

**(Опр.)** Ускорением называется производная скорости по времени:

**(Опр.)** Равнопеременным называется движение МТ, если за любые равные интервалы времени ∆*t* происходят равные изменения скорости ∆V̄ (т.е. ā = const).

***Закон равнопеременного движения*** при *t0=0* (в векторном виде):

Или в «координатной» форме:

**Угловые кинематические характеристики движения**

**(Опр.)** Введём понятие ***углового перемещения***, отталкиваясь от случая движения МТ по окружности. ***Радиус-вектор*** , соединяющий центр окружности (точка О) и материальную точку, как всегда «следит» за изменением её положения, и при этом ***поворачивается на угол ∆φ***. Чтобы указать направление этого поворота угловому перемещению придают векторный характер: *за направление вектора принимается направление поступательного перемещения правого винта – «буравчика» при повороте его рукоятки в направлении вращения радиус-вектора.*

 **(Опр.)** Угловая скорость равна производной по времени от угла поворота

 **(Опр.)** Угловое ускорение равна производной по времени от угловой скорости

Аналогично случаю линейных характеристик оно позволяет находить, изменение угловой скорости и угловое перемещение:

***Закон сложения скоростей Галилея:***

2. Движение по окружности. Связь линейной и угловой скорости. Ускорение при криволинейном движении.

**(Опр.)** Введём понятие ***углового перемещения***, отталкиваясь от случая движения МТ по окружности. ***Радиус-вектор*** , соединяющий центр окружности (точка О) и материальную точку, как всегда «следит» за изменением её положения, и при этом ***поворачивается на угол ∆φ***. Чтобы указать направление этого поворота угловому перемещению придают векторный характер: *за направление вектора принимается направление поступательного перемещения правого винта – «буравчика» при повороте его рукоятки в направлении вращения радиус-вектора.*

 **(Опр.)** Угловая скорость равна производной по времени от угла поворота

*Связь линейной и угловой скорости*

Скорость V̄ называют ***линейной***. Её модуль *v* связан с модулем угловой скорости ω соотношением (длина дуги окружности ):

Линейная скорость направлена по касательной к траектории, т.е. перпендикулярно радиусу окружности. Угловая – вдоль оси, относительно которой поворачивается радиус-вектор частицы, т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежат оба вектора V̄ и R̄. Таким образом, . Можно также выбрать начало СО (точку О’) в произвольном месте оси поворота радиус-вектора R̄ (r̄ - расстояние от точки O’ до МТ): .

**(Опр.)** Угловое ускорение равна производной по времени от угловой скорости

Аналогично случаю линейных характеристик оно позволяет находить, изменение угловой скорости и угловое перемещение:

**Ускорение при криволинейном движении**

При криволинейном движении линейная скорость V̄ обязательно изменяется хотя бы по направлению. Поэтому ускорение всегда отлично от нуля. Если материальная точка движется по произвольной кривой траектории можно утверждать, что вектор ускорения направлен всегда внутрь этой траектории. Его удобно разложить на две составляющие – вдоль вектора скорости (по касательной к траектории) и в нормальном (т.е. перпендикулярном) направлении:

Поскольку

Тангенциальное ускорение ответственно за изменение модуля скорости, а нормальное или «центростремительное» ускорение, изменяющее скорость по направлению, направлено в центр «мгновенной» окружности.

, где R – радиус кривизны траектории

Для движения по окружности (R = const)

В векторной форме: и (минус означает здесь, что *ān* направлено в сторону противоположную вектору R̄, т.е. к центру окружности).

3. Кинематика абсолютно твёрдого тела. Поступательное и вращательное движения. Плоское движение твёрдого тела. Мгновенная ось вращения.

**(Опр.)** Модель «абсолютно твёрдое тело» (ТТ) предполагает, что можно пренебречь деформацией тел при механическом движении.

**Поступательное движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При поступательном движении за любые интервалы времени перемещения всех точек ТТ одинаковы.

При любых интервалах времени *∆t*, исходя из определения, , где и соединяют начальные и конечные положения любых двух точек A и B, и у всех точек тела одинаковы линейные скорости и ускорения , и они движутся по одинаковым траекториям. Соответственно, описав движение только для одной точки (например, центра масс), можно решить поставленную задачу.

**Вращательное движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения тела.

Линейные характеристики движения отличаются для точек, находящихся на разном расстоянии от оси вращения. А вот угловые – и – для всех точек твёрдого тела одинаковы. Поскольку указание всего одной величины – угла поворота – достаточно, чтобы знать положение ТТ, говорят, что вращающееся тело имеет одну степень свободы.

**Плоское движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При плоском движении все точки тела движутся, оставаясь в параллельных плоскостях.

Плоское движение является комбинацией поступательного и вращательного движений, причём ось вращения выбирается произвольно (перпендикулярная плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела).

Из множества способов разложения движения можно выбрать такой, когда движение тела сведётся к последовательности поворотов вокруг некоторой оси, скорость которой равна нулю в данный момент времени. Эта ось вращения занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют ***мгновенной осью вращения***. При качении без проскальзывания эта ось проходит через точку касания с поверхностью, по которой катится тело.

4. Поступательное и вращательное движения твёрдого тела. Плоское движение твёрдого тела. Мгновенная ось вращения.

**(Опр.)** Модель «абсолютно твёрдое тело» (ТТ) предполагает, что можно пренебречь деформацией тел при механическом движении.

**Поступательное движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При поступательном движении за любые интервалы времени перемещения всех точек ТТ одинаковы.

При любых интервалах времени *∆t*, исходя из определения, , где и соединяют начальные и конечные положения любых двух точек A и B, и у всех точек тела одинаковы линейные скорости и ускорения , и они движутся по одинаковым траекториям. Соответственно, описав движение только для одной точки (например, центра масс), можно решить поставленную задачу.

**Вращательное движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения тела.

Линейные характеристики движения отличаются для точек, находящихся на разном расстоянии от оси вращения. А вот угловые – и – для всех точек твёрдого тела одинаковы. Поскольку указание всего одной величины – угла поворота – достаточно, чтобы знать положение ТТ, говорят, что вращающееся тело имеет одну степень свободы.

**Плоское движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При плоском движении все точки тела движутся, оставаясь в параллельных плоскостях.

Плоское движение является комбинацией поступательного и вращательного движений, причём ось вращения выбирается произвольно (перпендикулярная плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела).

Из множества способов разложения движения можно выбрать такой, когда движение тела сведётся к последовательности поворотов вокруг некоторой оси, скорость которой равна нулю в данный момент времени. Эта ось вращения занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют ***мгновенной осью вращения***. При качении без проскальзывания эта ось проходит через точку касания с поверхностью, по которой катится тело.

5. Динамика материальной точки. Сила. Законы Ньютона. Инертная масса тела.

***Закон инерции:*** Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

**(Опр.)** Сила является мерой воздействия тел друг на друга.

***Первый закон Ньютона*** утверждает, что существуют такие системы отсчёта, в которых тело движется равномерно и прямолинейно (V̄ = const), если на него не действуют другие тела или действие всех тел скомпенсировано. Такие системы отсчёта называют инерциальными (ИСО).

***Второй закон Ньютона*** устанавливает количественную связь между воздействием на тело (МТ) и быстротой изменения его скорости, т.е. ускорением.

Ускорение тела (МТ) прямо пропорционально действующей на него силе.

Коэффициент пропорциональности между силой и ускорением разный для разных тел, обладающих разной ***инертностью***. Он связан с ещё одним важным понятием – «***масса тела***».

**(Опр.**) Масса тела есть мера инертности этого тела, то есть величина, равная отношению силы, действующей на тело, к ускорению, которое тело приобретает под действием этой силы:

Замечания:

1. F̄ - равнодействующая (сумма) всех сил, действующий на тело.
2. II закон Ньютона не является определением силы или ускорения, а объективно связывает эти величины.
3. Выполняется только в ИСО.
4. При решении задач переписывается в форме .

**(Опр.)** Импульсом материальной точки называется произведение её массы на скорость: . С учётом этого можно записать

Тогда, согласно II закону Ньютона .

Скорость изменения импульса тела равна сумме действующих на тело сил. Используя начальные условия движения (начальное положение и скорость), можно определять зависимость координат материальной точки от времени – ***закон движения***. По этой причине равенство, соответствующее второму закону Ньютона называют также ***уравнением движения***.

***Третий закон Ньютона.*** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, проходящей через эти точки .

Силы действия и противодействия:

1. Равны по величине
2. Противоположны по знаку
3. Действуют вдоль одной прямой линии
4. Приложены к разным телам
5. Имеют одинаковую природу

6. Третий закон Ньютона. Силы в механике. Принцип относительности Галилея.

***Третий закон Ньютона.*** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, проходящей через эти точки .

Силы действия и противодействия:

1. Равны по величине
2. Противоположны по знаку
3. Действуют вдоль одной прямой линии
4. Приложены к разным телам
5. Имеют одинаковую природу

**Силы в механике**

1. **Силы Всемирного тяготения** подчиняются закону

Две материальные точки притягиваются с силами пропорциональными произведению их масс (m1 и m2) и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними. Силы направлены вдоль прямой, проходящей через материальные точки ()

Здесь *F̄12* – сила действующая на первую МТ со стороны второй, *r̄12*– радиус-вектор проведенный от первой МТ ко второй. Коэффициент пропорциональности G – «***гравитационная постоянная***», равен 6,67·10-11 Н·м2/кг2.

1. **Упругие силы** возникают при упругой деформации тел (силы натяжения нитей, пружин, реакции опор). В некотором интервале деформаций тел величина деформации оказывается пропорциональна приложенной силе (***закон Гука***). Со стороны пружины действует сила реакции – упругая сила. С учётом 3-го закона Ньютона можно для силы упругости записать:

где *k* – коэффициент упругости («жёсткость»), а *ξ* – величина деформации тела. При этом сила упругости всегда противоположна направлению деформации тела, поэтому для проекции силы упругости на направление деформации Х можно написать равенство: .

1. **Силы трения** возникают при движении или при возможности относительного движения контактирующих друг с другом тел.

Бывают случаи, когда на тело, соприкасающееся с некоторой поверхностью, действуют силы, но оно остаётся в покое. Это результат того, что на тело действует ***сила трения покоя***, компенсирующая другие внешние силы. Её величина находится из условия отсутствия относительного движения: .

Пока тело находится в покое, сила трения покоя в точности равна по величине и противоположна по направлению касательной составляющей результирующей сил. Максимальное значение силы трения покоя равно , где *FN* – ***нормальная составляющая*** силы реакции опоры, *μ* – коэффициент трения скольжения.

С некоторой долей приближения можно считать, что ***сила сухого трения скольжения*** не зависит от величины скорости и равна . Эта сила всегда направлена противоположно вектору скорости тела, поэтому равенству можно придать векторный характер: .

При движении тел в жидких или газообразных средах возникает ***сила вязкого трения***. Её отличие от сухого трения проявляется в отсутствии трения покоя, а также в зависимости от скорости движения тела относительно среды. При малых скоростях сила вязкого трения: , где b – коэффициент вязкого трения. Он зависит от размеров и формы тела, а также от вязких свойств среды.

1. **Сила Лоренца.** На электрически заряженную частицу в электрическом и магнитном полях действует так называемая «обобщённая сила Лоренца»:

**Принцип относительности Галилея**

Законы механики инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта. То есть все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Иначе говоря, с точки зрения классической механики, не существует абсолютного покоя или абсолютного движения.

7. Центр масс системы материальных точек и твёрдого тела. Уравнение движения центра масс.

**(Опр.)** Центром масс системы материальных точек называется точка, положение которой в выбранной системе отсчёта определяет радиус-вектор

В частности, такими частицами (МТ) могут быть и отдельные элементы, на которые можно “разбить” твёрдое тело, тогда в знаменателе – масса тела.

Приведённой векторной записи в общем случае соответствуют три скалярные – для отдельных координат центра масс:

; ;

**(Опр.)** Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов отдельных её частей .

Если в равенстве, задающем центр масс, массу из знаменателя перенести налево и продифференцировать по времени, то, что получится справа соответствует определению импульса системы, а слева – произведение массы системы на скорость центра масс. Получаем .

**(Опр.)** Импульс системы материальных точек равен произведению её массы на скорость центра масс.

**Теорема о движении центра масс**

Напишем для каждой частицы системы уравнения движения (второй закон Ньютона) относительно некоторой ИСО:

Просуммируем все левые и все правые части уравнений.

В правой части возникнут пары сил, равных и противоположно направленных друг другу на основании 3-го закона Ньютона: . Ясно, что их суммирование даст нулевой результат и в правой части останется лишь сумма всех внешних сил . Сумма слева равна произведению массы системы на ускорение центра масс. Можно убедиться в этом, продифференцировав дважды равенство для радиус-вектора центра масс:

*Формулировка утверждения теоремы.* Центр масс системы материальных точек (/ТТ) движется так же, как и материальная точка массой m под действием тех же внешних сил, что действуют на систему. То есть

Если нам известны начальные условия и силы, действующие на твёрдое тело, то мы можем написать закон движения его центра масс.

8. Плоское движение твёрдого тела. Пример применения законов механики к плоскому движению твёрдого тела: скатывание цилиндра по наклонной плоскости.

**Плоское движение твёрдого тела**

**(Опр.)** При плоском движении все точки тела движутся, оставаясь в параллельных плоскостях.

Плоское движение является комбинацией поступательного и вращательного движений, причём ось вращения выбирается произвольно (перпендикулярная плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела).

При качении без проскальзывания эта ось проходит через точку касания с поверхностью, по которой катится тело.

Из множества способов разложения движения можно выбрать такой, когда движение тела сведётся к последовательности поворотов вокруг некоторой оси, скорость которой равна нулю в данный момент времени. Эта ось вращения занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют ***мгновенной осью вращения***.

**Основное уравнение вращательного движения**

Исходя из уравнения моментов:

Аналогия с уравнением движение (вторым законом Ньютона).

Пример. Цилиндр скатывается по наклонной плоскости.

С учётом изображённых на рисунке сил, действующих на цилиндр, запишем конкретные уравнения системы:

Поступательное движение определено ускорением центра масс цилиндра:

Что касается линейной скорости центра масс и угловой скорости качения, то они растут по линейному закону:

9. Момент силы. Момент импульса МТ, системы МТ и твёрдого тела. Уравнение моментов для системы материальных точек и твёрдого тела.

**(Опр.)** Моментом силы N̄ относительно некоторой точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄, проведённого из точки О в точку приложения силы, на вектор этой силы F̄:

 Модуль момента силы

**(Опр.)** Моментом импульса M̄i материальной точки ∆mi относительно точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄i, проведённого из точки О к материальной точке, на импульс этой частицы ∆miV̄i:

 Модуль момента импульса

**(Опр.)** Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства О называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:

 Модуль момента импульса

**Уравнение моментов**

Рассмотрим движение частицы с номером «i» в некоторой ИСО с началом в точке О. По определению момент импульса этой частицы равен . Если взять производную от левой и правой части этого равенства, получим:

Первое слагаемое в правой части равно нулю, поскольку – это скорость частицы , а векторное произведение двух сонаправленных векторов всегда равно нулю. Второе слагаемое равно моменту силы , действующей на «i-ю» частицу. Ведь , а по определению. Таким образом, приходим к равенству .

Для каждой частицы системы можно написать «своё» уравнение моментов:

Просуммируем все левые и правые части уравнений. В правой части возникнут пары моментов сил . Они соответствуют внутренним силам равным и противоположно направленным друг другу по 3-му закону Ньютона. А значит можно утверждать, что суммирование даёт ноль. В правой части останется лишь сумма моментов внешних сил.

Левую часть можно записать как производную от суммы моментов импульса всех частиц, составляющих систему. Т.е. как раз того, что является моментом импульса системы материальных точек:

*Скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы.*

10. Момент силы. Момент импульса МТ, системы МТ и твёрдого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

**(Опр.)** Моментом силы N̄ относительно некоторой точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄, проведённого из точки О в точку приложения силы, на вектор этой силы F̄:

 Модуль момента силы

**(Опр.)** Моментом импульса M̄i материальной точки ∆mi относительно точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄i, проведённого из точки О к материальной точке, на импульс этой частицы ∆miV̄i:

 Модуль момента импульса

**(Опр.)** Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства О называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:

 Модуль момента импульса

Для случая вращения относительно оси OZ запишем скалярную форму уравнения моментов . Разобьём твёрдое тело на малые элементы с массами , положение которых указывают радиус-векторы . При вращательном движении все точки тела характеризуются одним и тем же вектором угловой скорости , направленным вдоль оси вращения Z. Векторы линейной скорости и импульсов этих элементов перпендикулярны как оси Z, так и векторам .

**(Опр.)** Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:

Элементы ТТ предполагаются настолько малыми по геометрическим размерам, чтобы расстояние от любой точки элемента до оси можно было считать одинаковым. С математической точки зрения это означает необходимость предельного перехода к бесконечно малым величинам и от суммы к интегралу:

При вращении вокруг закреплённой оси существует взаимосвязь осевого момента импульса твёрдого тела с его угловой скоростью:

Момент инерции играет роль меры инертности тела по отношению к вращению.

**Основное уравнение вращательного движения**

Исходя из уравнения моментов:

Аналогия с уравнением движение (вторым законом Ньютона).

11. Уравнение моментов для системы материальных точек и твёрдого тела. Уравнение моментов в системе центра масс.

**Уравнение моментов**

Рассмотрим движение частицы с номером «i» в некоторой ИСО с началом в точке О. По определению момент импульса этой частицы равен . Если взять производную от левой и правой части этого равенства, получим:

Первое слагаемое в правой части равно нулю, поскольку – это скорость частицы , а векторное произведение двух сонаправленных векторов всегда равно нулю. Второе слагаемое равно моменту силы , действующей на «i-ю» частицу. Ведь , а по определению. Таким образом, приходим к равенству .

Для каждой частицы системы можно написать «своё» уравнение моментов:

Просуммируем все левые и правые части уравнений. В правой части возникнут пары моментов сил . Они соответствуют внутренним силам равным и противоположно направленным друг другу по 3-му закону Ньютона. А значит можно утверждать, что суммирование даёт ноль. В правой части останется лишь сумма моментов внешних сил.

Левую часть можно записать как производную от суммы моментов импульса всех частиц, составляющих систему. Т.е. как раз того, что является моментом импульса системы материальных точек:

*Скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы.*

**Система центра масс**

На практике иметь дело с уравнением моментов и его следствием не очень удобно, так как момент инерции тела относительно неподвижной оси Z всё время меняется. Можно обойти эти трудности, используя особую систему отсчёта, связанную с центром масс самого тела – «систему центра масс». Такая СО движется поступательно вместе с телом и может быть и неинерциальной! Можно доказать, однако, что уравнение моментов, записанное в этой системе относительно оси Zс, проходящей через центр масс тела и параллельной оси Z, также справедливо. А вот момент инерции Iс относительно этой оси – уже величина постоянная.

12. Момент импульса твёрдого тела относительно оси. Момент инерции твёрдого тела. Пример расчёта момента инерции и применения теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Для случая вращения относительно оси OZ запишем скалярную форму уравнения моментов . Разобьём твёрдое тело на малые элементы с массами , положение которых указывают радиус-векторы . При вращательном движении все точки тела характеризуются одним и тем же вектором угловой скорости , направленным вдоль оси вращения Z. Векторы линейной скорости и импульсов этих элементов перпендикулярны как оси Z, так и векторам .

**(Опр.)** Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:

Элементы ТТ предполагаются настолько малыми по геометрическим размерам, чтобы расстояние от любой точки элемента до оси можно было считать одинаковым. С математической точки зрения это означает необходимость предельного перехода к бесконечно малым величинам и от суммы к интегралу:

При вращении вокруг закреплённой оси существует взаимосвязь осевого момента импульса твёрдого тела с его угловой скоростью:

**Теорема Гюйгенса-Штейнера**

Расчёт момента инерции для однородного диска (или цилиндра) относительно оси перпендикулярной его плоскости и проходящей через середину. Строго по определению: . Если выбрать ось, проходящую не через центр, а через край, ситуация усложняется. Для такого расчёта пользуются теоремой Гюйгенса-Штейнера («теорема о параллельных осях»):

*Момент инерции Iz твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции Ic относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями:*

Для примера с диском:

13. Момент инерции твёрдого тела. Расчёт моментов инерции диска и стержня. Пример применения теоремы Гюйгенса-Штейнера.

**(Опр.)** Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:

Элементы ТТ предполагаются настолько малыми по геометрическим размерам, чтобы расстояние от любой точки элемента до оси можно было считать одинаковым. С математической точки зрения это означает необходимость предельного перехода к бесконечно малым величинам и от суммы к интегралу:

При вращении вокруг закреплённой оси существует взаимосвязь осевого момента импульса твёрдого тела с его угловой скоростью:

Момент инерции играет роль меры инертности тела по отношению к вращению.

**Теорема Гюйгенса-Штейнера**

Расчёт момента инерции для однородного диска (или цилиндра) относительно оси перпендикулярной его плоскости и проходящей через середину. Строго по определению: для диска и для стержня. Если выбрать ось, проходящую не через центр, а через край, ситуация усложняется. Для такого расчёта пользуются теоремой Гюйгенса-Штейнера («теорема о параллельных осях»):

*Момент инерции Iz твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции Ic относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями:*

Для примера с диском:

Для примера со стержнем:

14. Плоское движение твёрдого тела. Применение законов кинематики и динамики на примере качения тела по наклонной плоскости.

**(Опр.)** При плоском движении все точки тела движутся, оставаясь в параллельных плоскостях.

Плоское движение является комбинацией поступательного и вращательного движений, причём ось вращения выбирается произвольно (перпендикулярная плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела).

При качении без проскальзывания эта ось проходит через точку касания с поверхностью, по которой катится тело.

Из множества способов разложения движения можно выбрать такой, когда движение тела сведётся к последовательности поворотов вокруг некоторой оси, скорость которой равна нулю в данный момент времени. Эта ось вращения занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют ***мгновенной осью вращения***.

**Основное уравнение вращательного движения**

Исходя из уравнения моментов:

Аналогия с уравнением движение (вторым законом Ньютона).

Пример. Цилиндр скатывается по наклонной плоскости.

С учётом изображённых на рисунке сил, действующих на цилиндр, запишем конкретные уравнения системы:

Поступательное движение определено ускорением центра масс цилиндра:

Что касается линейной скорости центра масс и угловой скорости качения, то они растут по линейному закону:

15. Закон сохранения импульса. Реактивное движение. Уравнение Мещерского.

Запишем для всех частиц системы материальных точек систему уравнений 2-го закона Ньютона, справедливых в некоторой инерциальной системе отсчёта:

Просуммируем все уравнения и получим:

Первая сумма в правой части равна нулю. Ведь для любой пары взаимодействующих друг с другом частиц по третьему закону Ньютона силы равны и противоположно направлены !

В левой части можно поменять местами знаки суммирования и дифференцирования, а значит, получим скорость изменения импульса всей системы . Итак, как и для одной частицы, справедливо равенство: . Можно сформулировать закон сохранения импульса для системы материальных точек/ТТ:

*Если сумма всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то импульс системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется).*

**Реактивное движение. Уравнение Мещерского**

Заставить двигаться с ускорением часть системы можно за счёт движения другой её части в противоположном направлении. В этом состоит принцип реактивного движения.

Найдём реактивную силу. Пусть ракета движется в космосе вдали от других тел. В некоторый момент времени *t* масса ракеты равна *m*, а её скорость относительно инерциальной системы отсчёта равна *V̄*. Спустя малый промежуток времени *dt* масса ракеты уменьшится на величину *dm* за счёт выброса продуктов сгорания топлива реактивного двигателя ракеты. Пусть их скорость равна *ū* относительно ракеты. Запишем равенство, соответствующее закону сохранения импульса для системы «ракета – продукты сгорания»:



Здесь – скорость «выброса» продуктов сгорания из сопла двигателя ракеты относительно ИСО (по закону сложения скоростей). Будем пренебрегать слагаемым вида – бесконечно малой величиной. Получим в результате: . Поделим это равенство на интервал времени dt и запишем окончательно уравнение движения ракеты ( – темп выброса продуктов сгорания топлива):

Это и есть уравнение Мещерского. Реактивная сила таким образом:

Знак «–» указывает на то, что эта сила направлена в сторону, противоположную направлению выброса продуктов сгорания.

16. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса для системы материальных точек и твёрдого тела.

**(Опр.)** Моментом силы N̄ относительно некоторой точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄, проведённого из точки О в точку приложения силы, на вектор этой силы F̄:

 Модуль момента силы

**(Опр.)** Моментом импульса M̄i материальной точки ∆mi относительно точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора r̄i, проведённого из точки О к материальной точке, на импульс этой частицы ∆miV̄i:

 Модуль момента импульса

**(Опр.)** Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства О называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:

 Модуль момента импульса

**Закон сохранения момента импульса**

Для систем материальных точек и при движении твёрдого тела выполняется уравнение моментов:

*Скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы.*

Опираясь на него, мы можем сформулировать ещё один закон сохранения: *Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то момент импульса системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*.

Если равна нулю сумма проекций моментов внешних сил на некоторое направление, например, закреплённую ось вращения Z, то сохраняется проекция момента импульса системы только на это направление:

В частности, для систем с переменным моментом инерции выполняется равенство:

17. Работа силы. Механическая энергия – кинетическая и потенциальная. Связь силы и потенциальной энергии.

**(Опр.)** Элементарной работой *δA* называется произведение проекции силы на направление малого перемещения точки приложения силы *dl̄* на модуль этого перемещения: или

**(Опр.)** Работа на конечном участке траектории вычисляется как сумма элементарных работ:

Работа силы – величина скалярная и зависит от взаимной ориентации векторов силы и скорости.

Работа при вращении тела относительно закреплённой оси:

**(Опр.)** Мощность силы равна отношению работы δA, совершаемой за малый интервал времени dt к величине этого интервала:

**(Опр.)** Механическая энергия есть физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел.

**(Опр.)** Кинетическая энергия системы материальных точек равна:

Кинетическая энергия величина аддитивная, скалярная и всегда положительная.

**(Опр.)** Потенциальная энергия измеряется работой, которую тела системы способны совершить при изменении своей конфигурации (взаимного расположения её частей).

Потенциальная энергия является такой функцией координат U = f(x,y,z), что работа консервативных сил A12(к) равна разности значений этой функции при изменении положений тел системы (конфигурации системы), т.е. A12(к) = U1 – U2 = -∆U.

**Связь силы и потенциальной энергии**

1. Как найти потенциальную энергию, если известны действующие консервативные силы F̄(x,y,z)?

Пусть в некоторой точке пространства P0(x0,y0,z0) потенциальная энергия равна нулю: U(x0,y0,z0) = 0. Тогда для произвольного положения частиц системы P(x,y,z) потенциальная энергия равна:

, а значит

1. Как, зная функцию U(x,y,z) для потенциальной энергии, определить силу?

Для малого перемещения *dl̄* элементарную работу можно записать двумя способами: dA12(к) = -dU и dA12(к) = (F̄, dl̄). Приравняв правые части, получаем: (F̄, dl̄) = -dU. Скалярное произведение и полный дифференциал функции U(x,y,z) можно перепивать иначе:

Это равенство говорит о том, что проекции вектора силы в любой точке пространства равны с противоположным знаком частным производным по координатам от потенциальной энергии:

Сам вектор F̄ можно задать таким способом:

Модуль силы

Направление вектора силы (если одну из осей направить по нормали к эквипотенциальной поверхности)

**Градиент** – вектор, имеющий компоненты и показывающий направление, в котором быстрее всего растёт потенциальная энергия U вблизи данной точки пространства. Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста U по координатным направлениям, а вот его модуль определяет скорость в направлении максимального изменения U (в направлении вектора *grad*U). Таким образом, F определяет изменение потенциальной энергии на единицу длины, в направлении наиболее быстрого изменения энергии. Знак «минус» означает при этом, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

18. Кинетическая энергия при поступательном, вращательном и плоском движении твёрдого тела.

**(Опр.)** Кинетическая энергия системы материальных точек равна:

Кинетическая энергия величина аддитивная, скалярная и всегда положительная.

1. При поступательном движении в любой момент времени все элементы тела ∆mi обладают одной и той же линейной скоростью *V̄1 = V̄2= … = V̄i* – той же, с которой движется его центр масс – *V̄c*. Поэтому кинетическая энергия поступательно движущегося твёрдого тела равна
2. При вращательном движении в любой момент времени у всех элементов тела ∆mi одинаковы угловые скорости. Поэтому
3. Плоское движение можно представить, как совокупность одновременно происходящих поступательного и вращательного. Чтобы найти кинетическую энергию такого движения, удобно вспомнить о понятии мгновенной оси вращения: в каждый момент времени движение представляет собой лишь поворот относительно такой оси, а значит . Момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения Izм по теореме Штейнера можно связать с моментом инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела Ic:

***Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и вращения относительно оси, проходящей через центр масс.***

19. Теорема о кинетической энергии. Консервативные и неконсервативные силы. Связь силы и потенциальной энергии.

**(Опр.)** Кинетическая энергия системы материальных точек равна:

Кинетическая энергия величина аддитивная, скалярная и всегда положительная.

**Теорема о кинетической энергии**

Пусть материальная точка перемещается из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории “L”. Найдём элементарную работу действующей на неё силы *F̄* на малом перемещении *dl̄*:

Полученный результат есть не что иное, как дифференциал (малое изменение) кинетической энергии частицы: .

Просуммируем элементарные работы на всех малых участках траектории:

**Утверждение теоремы:**

*Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на тела системы.*

**Консервативные и неконсервативные силы**

**(Опр.)** Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела называются консервативными.

Силы, не обладающие таким свойством, являются неконсервативными. К ним относятся все различные виды сил трения, реактивная сила, сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля и т.д.

К силам консервативным относятся гравитационные, упругие и «кулоновские» силы, а также внутриядерные и межмолекулярные силы.

**Связь силы и потенциальной энергии**

1. Как найти потенциальную энергию, если известны действующие консервативные силы F̄(x,y,z)?

Пусть в некоторой точке пространства P0(x0,y0,z0) потенциальная энергия равна нулю: U(x0,y0,z0) = 0. Тогда для произвольного положения частиц системы P(x,y,z) потенциальная энергия равна:

, а значит

1. Как, зная функцию U(x,y,z) для потенциальной энергии, определить силу?

Для малого перемещения *dl̄* элементарную работу можно записать двумя способами: dA12(к) = -dU и dA12(к) = (F̄, dl̄). Приравняв правые части, получаем: (F̄, dl̄) = -dU. Скалярное произведение и полный дифференциал функции U(x,y,z) можно перепивать иначе:

Это равенство говорит о том, что проекции вектора силы в любой точке пространства равны с противоположным знаком частным производным по координатам от потенциальной энергии:

Сам вектор F̄ можно задать таким способом:

Модуль силы

Направление вектора силы (если одну из осей направить по нормали к эквипотенциальной поверхности)

**Градиент** – вектор, имеющий компоненты и показывающий направление, в котором быстрее всего растёт потенциальная энергия U вблизи данной точки пространства. Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста U по координатным направлениям, а вот его модуль определяет скорость в направлении максимального изменения U (в направлении вектора *grad*U). Таким образом, F определяет изменение потенциальной энергии на единицу длины, в направлении наиболее быстрого изменения энергии. Знак «минус» означает при этом, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

20. Теорема о консервативности центральных сил. Потенциальная энергия при гравитационном, электростатическом и упругом взаимодействиях.

**Консервативные и неконсервативные силы**

**(Опр.)** Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела называются консервативными.

Силы, не обладающие таким свойством, являются неконсервативными. К ним относятся все различные виды сил трения, реактивная сила, сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля и т.д.

К силам консервативным относятся гравитационные, упругие и «кулоновские» силы, а также внутриядерные и межмолекулярные силы.

**Теорема о консервативности центральных сил**

Понятие центральная сила означает, что в любой точке пространства на частицу действует сила, направленная к одной и той же неподвижной точке пространства О или от неё. Точка О называется «силовым центром». Величина силы зависит только от расстояния частицы до силового центра.

Здесь – проекция силы на направление радиус-вектора , проведённого из силового центра к частице m, – единичный вектор, задающий радиальное направление. Говорят, что частицы находятся в центральном силовом поле или в поле центральных сил. Примерами поля центральных сил являются гравитационные и «кулоновские» силы.

Рассчитаем теперь работу центральной силы при перемещении частицы m из точки 1 в точку 2 вдоль траектории “L”:

Полученный результат не зависит от формы траектории, что и подтверждает утверждение теоремы – центральные силы консервативны.

**(Опр.)** Потенциальная энергия измеряется работой, которую тела системы способны совершить при изменении своей конфигурации (взаимного расположения её частей.

Потенциальная энергия является такой функцией координат U = f(x,y,z), что работа консервативных сил A12(к) равна разности значений этой функции при изменении положений тел системы (конфигурации системы), т.е. A12(к) = U1 – U2 = -∆U.

1. ***Гравитационное взаимодействие (силы тяготения).*** Пусть материальная точка m находится в гравитационном поле некоторой планеты M. Это случай центральной, а значит консервативной силы. Она подчиняется закону всемирного тяготения и для описания состояния системы достаточно одной переменной – расстояния между телами r. При бесконечно большом расстоянии между телами потенциальную энергию считают равной нулю. Тогда:

Итак

Как видим, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия величина отрицательная. Это соответствует притяжению тел!

1. ***Электростатическое взаимодействие («кулоновские» силы).*** Потенциальную энергию электростатического взаимодействия Ue системы двух точечных заряженных частиц q1 и q2 можно найти совершенно аналогично. Пусть одна из них неподвижна в начале некоторой ИСО. Тогда при удалении другой на бесконечно большое расстояние «кулоновская» сила совершит работу:

Итак

Знак этой энергии зависит, очевидно, от того одноимёнными или разноимёнными являются эти заряды.

1. ***Потенциальную энергию при упругой деформации тел*** определим для случая спиральной пружины. Пусть один конец её шарнирно закреплён в точке О, чтобы пружина могла поворачиваться. Тогда на материальную точку, закреплённую на противоположном конце пружины, действует центральная сила . Здесь r0 – координата МТ в отсутствии деформации пружины. Потенциальную энергию естественно считать равной нулю как раз при r = r0. Тогда:

Итак

В последнем равенстве мы использовали обозначение x = r – r0 для деформации пружины.

21. Работа в поле центральных сил. Потенциальная энергия при гравитационном, электростатическом и упругом взаимодействиях.

**Консервативные и неконсервативные силы**

**(Опр.)** Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела называются консервативными.

Силы, не обладающие таким свойством, являются неконсервативными. К ним относятся все различные виды сил трения, реактивная сила, сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля и т.д.

К силам консервативным относятся гравитационные, упругие и «кулоновские» силы, а также внутриядерные и межмолекулярные силы.

**Теорема о консервативности центральных сил**

Понятие центральная сила означает, что в любой точке пространства на частицу действует сила, направленная к одной и той же неподвижной точке пространства О или от неё. Точка О называется «силовым центром». Величина силы зависит только от расстояния частицы до силового центра.

Здесь – проекция силы на направление радиус-вектора , проведённого из силового центра к частице m, – единичный вектор, задающий радиальное направление. Говорят, что частицы находятся в центральном силовом поле или в поле центральных сил. Примерами поля центральных сил являются гравитационные и «кулоновские» силы.

Рассчитаем теперь работу центральной силы при перемещении частицы m из точки 1 в точку 2 вдоль траектории “L”:

Полученный результат не зависит от формы траектории, что и подтверждает утверждение теоремы – центральные силы консервативны.

**(Опр.)** Потенциальная энергия измеряется работой, которую тела системы способны совершить при изменении своей конфигурации (взаимного расположения её частей.

Потенциальная энергия является такой функцией координат U = f(x,y,z), что работа консервативных сил A12(к) равна разности значений этой функции при изменении положений тел системы (конфигурации системы), т.е. A12(к) = U1 – U2 = -∆U.

1. ***Гравитационное взаимодействие (силы тяготения).*** Пусть материальная точка m находится в гравитационном поле некоторой планеты M. Это случай центральной, а значит консервативной силы. Она подчиняется закону всемирного тяготения и для описания состояния системы достаточно одной переменной – расстояния между телами r. При бесконечно большом расстоянии между телами потенциальную энергию считают равной нулю. Тогда:

Итак

Как видим, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия величина отрицательная. Это соответствует притяжению тел!

1. ***Электростатическое взаимодействие («кулоновские» силы).*** Потенциальную энергию электростатического взаимодействия Ue системы двух точечных заряженных частиц q1 и q2 можно найти совершенно аналогично. Пусть одна из них неподвижна в начале некоторой ИСО. Тогда при удалении другой на бесконечно большое расстояние «кулоновская» сила совершит работу:

Итак

Знак этой энергии зависит, очевидно, от того одноимёнными или разноимёнными являются эти заряды.

1. ***Потенциальную энергию при упругой деформации тел*** определим для случая спиральной пружины. Пусть один конец её шарнирно закреплён в точке О, чтобы пружина могла поворачиваться. Тогда на материальную точку, закреплённую на противоположном конце пружины, действует центральная сила . Здесь r0 – координата МТ в отсутствии деформации пружины. Потенциальную энергию естественно считать равной нулю как раз при r = r0. Тогда:

Итак

В последнем равенстве мы использовали обозначение x = r – r0 для деформации пружины.

22. Механическая энергия – кинетическая и потенциальная. Связь силы и потенциальной энергии. Закон сохранения механической энергии.

**(Опр.)** Механическая энергия есть физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел.

**(Опр.)** Сумму кинетической и потенциальной энергии называют полной механической энергией:

**(Опр.)** Кинетическая энергия системы материальных точек равна:

Кинетическая энергия величина аддитивная, скалярная и всегда положительная.

**(Опр.)** Потенциальная энергия измеряется работой, которую тела системы способны совершить при изменении своей конфигурации (взаимного расположения её частей).

Потенциальная энергия является такой функцией координат U = f(x,y,z), что при изменении положений тел системы (конфигурации системы) A12(к) = U1 – U2 = -∆U.

**Связь силы и потенциальной энергии**

1. Как найти потенциальную энергию, если известны действующие консервативные силы F̄(x,y,z)?

Пусть в некоторой точке пространства P0(x0,y0,z0) потенциальная энергия равна нулю: U(x0,y0,z0) = 0. Тогда для произвольного положения частиц системы P(x,y,z) потенциальная энергия равна:

, а значит

1. Как, зная функцию U(x,y,z) для потенциальной энергии, определить силу?

Для малого перемещения *dl̄* элементарную работу можно записать двумя способами: dA12(к) = -dU и dA12(к) = (F̄, dl̄). Приравняв правые части, получаем: (F̄, dl̄) = -dU. Скалярное произведение и полный дифференциал функции U(x,y,z) можно перепивать иначе:

Это равенство говорит о том, что проекции вектора силы в любой точке пространства равны с противоположным знаком частным производным по координатам от потенциальной энергии:

Сам вектор F̄ можно задать таким способом:

Модуль силы

Направление вектора силы (если одну из осей направить по нормали к эквипотенциальной поверхности)

**Градиент** – вектор, имеющий компоненты и показывающий направление, в котором быстрее всего растёт потенциальная энергия U вблизи данной точки пространства. Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста U по координатным направлениям, а вот его модуль определяет скорость в направлении максимального изменения U (в направлении вектора *grad*U). Таким образом, F определяет изменение потенциальной энергии на единицу длины, в направлении наиболее быстрого изменения энергии. Знак «минус» означает при этом, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

**Закон сохранения механической энергии**

1. Пусть только одна частица m (МТ) движется под действием консервативных и неконсервативных сил от точки 1 до точки 2 вдоль траектории “L”. По теореме о кинетической энергии . Работа первых равна убыли потенциальной энергии, т.е. -∆U. Вот, что мы получим в итоге:

***Если работа неконсервативных сил, действующих на частицу, равна нулю, то полная механическая энергия частицы сохраняется.***

1. Рассмотрим систему взаимодействующих друг с другом частиц (МТ и ТТ) во внешних силовых полях.

***Если внешние силы на тела системы не действуют, а все внутренние силы консервативны, то полная механическая энергия системы сохраняется.***

В этой формулировке использованы слишком жёсткие требования к системе. Механическая энергия определяется совершаемой силой работой. Поэтому ограничения можно смягчить в следующей формулировке.

***Если равна нулю суммарная работа внешних сил, действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия сохраняется.***

Пусть система переходит из состояния 1 в новое состояние 2. При этом каждая частица, входящая в состав этой системы, движется вдоль своей траектории “L” и мы можем найти для неё ∆Ti по теореме о кинетической энергии:

***Если равна нулю суммарная работа неконсервативных сил, действующих на тела системы, то полная механическая энергия системы сохраняется.***

23. Гироскоп. Свободный гироскоп. Угловая скорость прецессии гироскопа. Применение гироскопов.

**(Опр.)** Гироскопом называется симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, которая может поворачиваться в пространстве.

В основе теории гироскопа лежит уравнение моментов: , где *N̄* - суммарный момент сил, действующих на гироскоп, а *M̄* - момент импульса гироскопа. Для симметричного тела вращающегося вокруг его закреплённой оси, собственный момент импульса равен , где *Iz* – момент инерции относительно оси вращения, – угловая скорость вращения. Векторы угловой скорости и момента импульса направлены вдоль оси вращения.

1. Если на гироскоп не действуют внешние силы или их суммарный момент равен нулю, то такой гироскоп называют свободным. В соответствии с уравнением моментов при момент импульса не меняется с течением времени . А значит и угловая скорость такого гироскопа остаётся постоянной как по величине, так и по направлению. В результате свободный гироскоп сохраняет неизменным в пространстве направление оси вращения. Для изменения направления, т.е. поворота оси требуются моменты сил, и тем большие, чем больше собственный момент импульса гироскопа.
2. При действии внешних сил момент импульса гироскопа может изменяться. При этом изменение момента импульса зависит как от момента внешних сил, так и от длительности воздействия, ведь .

Здесь полезно рассмотреть два случая:

1. Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени и произведение мало, то изменение момента импульса также будет малым. При ударе направление оси гироскопа не уходит далеко от своего исходного положения, а слегка дрожит, оставаясь почти неизменным. Дрожание оси гироскопа около первоначального направления после кратковременного действия силы называется ***нутацией***.
2. При длительном действии силы ось гироскопа поворачивается в пространстве. Однако движение оси гироскопа происходит не в сторону действия силы, а в перпендикулярном направлении. Если гироскоп находится под действием постоянного момента внешних сил, его ось медленно поворачивается вокруг направления действия силы. Такое поведение гироскопа называется ***регулярной прецессией***, а он сам – ***гироскопическим маятником***.



Рассмотрим в качестве модели гироскоп, состоящий из вращающегося маховика (ротора) и противовеса, закреплённого на оси гироскопа. Противовес обеспечивает равновесие относительно точки опоры О, находящейся под центром масс системы. Ось гироскопа может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку О. Очевидно, сила тяжести уравновешена реакцией опоры, и в отсутствии других внешних сил гироскоп можно считать свободным. Если на ось гироскопа будет действовать дополнительная постоянная внешняя сила F̄ создаваемая небольшим грузиком, подвешенным на некотором расстоянии от оси. Тогда момент N̄ этой силы направлен горизонтально перпендикулярно силе и оси гироскопа.

Направление вектора dM̄ совпадает с направлением вектора момента силы N̄, то есть изменение вектора момента импульса произойдёт в направлении, перпендикулярном вектору момента импульса. Если учесть, что момент импульса направлен вдоль оси вращения, то ось гироскопа повернётся в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, т.е. вокруг вектора силы F̄. Такое вращение оси гироскопа и есть прецессия. При этом модуль собственного момента импульса гироскопа *Izω* не изменяется.

Найдём угловую скорость прецессии Ω. За время *dt* ось гироскопа повернётся на угол *dφ*. Поскольку угол мал, его радианная мера равна тангенсу этого угла. Из рисунка видно, что . Следовательно, угловая скорость прецессии равна . Учитывая уравнение моментов или .

Ось гироскопа поворачивается тем быстрее, чем больший момент сил вызывает это вращение. Чем больше собственный момент импульса гироскопа, тем медленнее будет происходить прецессия. Собственный момент импульса гироскопа определяет инертность гироскопа, в данном случае – устойчивость по отношению к внешнему воздействию. В векторном виде: .

Если какое-либо тело извне действует на ось гироскопа, вызывая его прецессию, то со стороны оси на это тело действует такая же по величине, но противоположно направленная сила. Такие силы противодействия со стороны прецессирующего гироскопа принято называть ***гироскопическими силами***. Именно гироскопические силы ответственны за устойчивость оси гироскопа в пространстве.

Применение.

На устойчивости направления оси вращения гироскопа: навигационные приборы в авиации, космонавтике, в ракетной технике (гирокомпас, гирогоризонт), стабилизаторы положения тел в пространстве.

Прецессией электронных орбит атомов во внешнем магнитном поле можно объяснить диамагнетизм веществ. Методы электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), а также ядерного магнитного резонанса (ЯМР) основаны на гироскопической прецессии электронных и ядерных спинов.

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности электрического поля.

**(Опр.)** Электрический заряд – это мера способности частиц и тел к электрическим и магнитным взаимодействиям ().

Закон сохранения заряда: В электрически изолированной системе алгебраическая сумма электрических зарядов не изменяется с течением времени (*∑qi = const*).

**Закон Кулона – основной закон электростатики**

*Сила электрического взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Это сила притяжения, если заряды разноимённые, и отталкивания, если они одноимённые. Сила направлена вдоль прямой, проходящей через точечные заряды.*

Здесь - сила, действующая на второй заряд со стороны первого, – радиус-вектор, проведенный от первого заряда ко второму. По третьему закону Ньютона на первый заряд со стороны второго действует равная и противоположно направленная сила . Коэффициент пропорциональности имеет вид – электрическая постоянная системы СИ.

**(Опр.)** Напряжённостью электрического поля называется отношение силы, действующей на пробный (точечный) заряд, помещённый в данную точку поля, к величине этого пробного заряда *qпр*:

Выражение для напряжённости электрического поля, создаваемого в окружающем пространстве одиночным точечным зарядом, легко получить, исходя из определения напряжённости и из закона Кулона:

**Принцип суперпозиции**

Каждое электрическое воздействие на точечный заряд *qпр* (назовём его пробным) со стороны каждого отдельного из группы зарядов *q1, q2, …, qi, …, qn ≡ {qi}* описывается силой *F̄i* – векторной величиной, которую можно найти по закону Кулона. Электрическое воздействие со стороны всей группы n зарядов даёт результирующая сила, равная векторной сумме всех сил *F̄i*:

Так как и , получим как следствие принцип суперпозиции для напряжённости электрического поля: .

**(Опр.)** Линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке, называются линиями напряжённости электрического поля.

Они помогают представить структуру электрического поля – его направление и величину в разных точках пространства. О величине судят при этом по «густоте» линий напряжённости в данной области пространства, т. е. по их количеству, отнесённому к площади «пронзаемой» поверхности.

На рисунке приведены картины силовых линий поля одиночного точечного заряда – a (для положительного они направлены радиально от заряда); системы из двух разноимённых, одинаковых по модулю зарядов – б; поля между двумя плоскопараллельными разноимённо заряженными пластинами – в.

**(Опр.)** Разностью потенциалов между точками электростатического поля 1 и 2 называется отношение работы поля по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 к величине этого заряда:

**(Опр.)** Для энергетической характеристики поля – потенциала – полезно также ввести систему «эквипотенциальных поверхностей». Это поверхности постоянного потенциала, которые характеризуют способность сил поля совершать работу при перемещении заряда.

Вдоль таких поверхностей работа, очевидно, вообще не совершается. Она максимальна по направлениям, по которым максимальна густота (плотность) расположения эквипотенциальных поверхностей. В этих местах максимальна и напряжённость поля. Нетрудно сообразить, какова и взаимная ориентация силовых линий и эквипотенциальных поверхностей в местах их пересечений: ***они взаимно перпендикулярны.***

2. Теорема Гаусса. Применение теоремы при расчёте электроёмкости цилиндрического конденсатора.

**(Опр.)** Элементарным потоком *dФ* вектора *Ē* через элемент поверхности *dS̄* называется величина:

,

где *En* – проекция вектора *Ē* на положительную нормаль *n̄* к элементу поверхности *dS̄*.

Полный поток для поля всех заряженных частиц можно вычислить так:

**Теорема Гаусса**

*Поток вектора напряжённости электростатического поля ФЕ в вакууме через любую замкнутую поверхность ∑ пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности.*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен :

С учётом определения потока вектора напряжённости:

Здесь N – число частиц или тел с зарядами *qi* в области пространства Ω, охваченной замкнутой поверхностью ∑. Замкнутая поверхность всегда ограничивает конечную область пространства!

*Доказательство.*

1. Сферическая поверхность охватывает точечный положительный заряд, расположенный в её центре.

В любой точке пространства вектор напряжённости имеет радиальное направление, а его величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда источника поля. Для любого малого элемента сферической поверхности направления векторов *Ē* и *dS̄* совпадают.

1. Cместим точечный заряд из центра всё той же сферической поверхности.

Для каждого малого элемента поверхности угол между векторами *Ē* и *dS̄* разный, также как разные значения принимает и модуль напряжённости. Вспомним, что поток через поверхность пропорционален числу силовых линий пересекающих эту поверхность. Это число не изменилось при смещении заряда из центра. Поэтому можно предполагать, что остаётся в силе и утверждение теоремы Гаусса.

Отношение является мерой телесного угла *dΩ*.

1. Замкнутая поверхность произвольной формы охватывает один точечный заряд.

Число силовых линий, пересекающих поверхность ∑, не изменяется даже в случае самых причудливых замкнутых поверхностей, охватывающих заряд *q*.

1. Один точечный заряд находится вне замкнутой поверхности произвольной формы.

Для каждой силовой линии число её пересечений с замкнутой поверхностью ∑ число пересечений «внутрь» всегда равно числу «выходов наружу». Поэтому точечный заряд не создаёт дополнительного потока через эту поверхность.

1. Система *N* точечных зарядов *q1, q2, ..., qi, ..., qN* находящихся как внутри, так и вне замкнутой поверхности ∑ произвольной формы.

**(Опр.)** Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, между которыми возникает изолированное от внешних тел электрическое поле при сообщении проводникам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.

**(Опр.)** Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними

**Пример. Расчёт электроёмкости цилиндрического конденсатора.**

1. Цилиндрический конденсатор состоит из двух цилиндрических обкладок, разделённых тонким диэлектрическим зазором. Скажем, что на внутреннем электроде радиусом R1 заряд *+q*, на внешнем электроде радиусом R2 заряд *-q*.

Выберем замкнутую поверхность ∑ радиусом R, R1 < R < R2. Поток вектора напряжённости прямого кругового цилиндра равен: . В соответствии с теоремой Гаусса:

1. Разность потенциалов:
2. Электроёмкость «воздушного» плоского конденсатора (*l* – длина цилиндра):

Электроёмкость конденсатора, заполненного однородным диэлектриком:

3. Теорема Гаусса. Пример расчёта электроёмкости плоского конденсатора.

**(Опр.)** Элементарным потоком *dФ* вектора *Ē* через элемент поверхности *dS̄* называется величина:

,

где *En* – проекция вектора *Ē* на положительную нормаль *n̄* к элементу поверхности *dS̄*.

Полный поток для поля всех заряженных частиц можно вычислить так:

**Теорема Гаусса**

*Поток вектора напряжённости электростатического поля ФЕ в вакууме через любую замкнутую поверхность ∑ пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности.*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен :

С учётом определения потока вектора напряжённости:

Здесь N – число частиц или тел с зарядами *qi* в области пространства Ω, охваченной замкнутой поверхностью ∑. Замкнутая поверхность всегда ограничивает конечную область пространства!

*Доказательство.*

1. Сферическая поверхность охватывает точечный положительный заряд, расположенный в её центре.

В любой точке пространства вектор напряжённости имеет радиальное направление, а его величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда источника поля. Для любого малого элемента сферической поверхности направления векторов *Ē* и *dS̄* совпадают.

1. Cместим точечный заряд из центра всё той же сферической поверхности.

Для каждого малого элемента поверхности угол между векторами *Ē* и *dS̄* разный, также как разные значения принимает и модуль напряжённости. Вспомним, что поток через поверхность пропорционален числу силовых линий пересекающих эту поверхность. Это число не изменилось при смещении заряда из центра. Поэтому можно предполагать, что остаётся в силе и утверждение теоремы Гаусса.

Отношение является мерой телесного угла *dΩ*.

1. Замкнутая поверхность произвольной формы охватывает один точечный заряд.

Число силовых линий, пересекающих поверхность ∑, не изменяется даже в случае самых причудливых замкнутых поверхностей, охватывающих заряд *q*.

1. Один точечный заряд находится вне замкнутой поверхности произвольной формы.

Для каждой силовой линии число её пересечений с замкнутой поверхностью ∑ число пересечений «внутрь» всегда равно числу «выходов наружу». Поэтому точечный заряд не создаёт дополнительного потока через эту поверхность.

1. Система *N* точечных зарядов *q1, q2, ..., qi, ..., qN* находящихся как внутри, так и вне замкнутой поверхности ∑ произвольной формы.

**(Опр.)** Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, между которыми возникает изолированное от внешних тел электрическое поле при сообщении проводникам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.

**(Опр.)** Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними

**Пример. Расчёт электроёмкости плоского конденсатора.**

1. Плоский конденсатор состоит из двух плоскопараллельных проводящих пластин, разделённых тонким диэлектрическим зазором. Рассмотрим одну из пластин, которую будем считать «бесконечной плоскостью»

Поток вектора напряжённости через выбранную нами замкнутую поверхность ∑ прямого кругового цилиндра равен: . Заряд внутри поверхности равен , поверхностная плотность заряда . В соответствии с теоремой Гаусса:

В случае плоского конденсатора силовые линии между пластинами напряжённости полей совпадают по направлению, а вне этой области направлены в противоположные стороны. Следовательно:

1. Траектория вдоль силовой линии по оси ОХ, от положительной обкладки до отрицательной.
2. Электроёмкость «воздушного» плоского конденсатора (S – площадь обкладок конденсатора, d – расстояние между ними):

Электроёмкость конденсатора, заполненного однородным диэлектриком:

4. Теорема Гаусса. Пример применения теоремы – расчёт электроёмкости сферического конденсатора.

**(Опр.)** Элементарным потоком *dФ* вектора *Ē* через элемент поверхности *dS̄* называется величина:

,

где *En* – проекция вектора *Ē* на положительную нормаль *n̄* к элементу поверхности *dS̄*.

Полный поток для поля всех заряженных частиц можно вычислить так:

**Теорема Гаусса**

*Поток вектора напряжённости электростатического поля ФЕ в вакууме через любую замкнутую поверхность ∑ пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности.*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен :

С учётом определения потока вектора напряжённости:

Здесь N – число частиц или тел с зарядами *qi* в области пространства Ω, охваченной замкнутой поверхностью ∑. Замкнутая поверхность всегда ограничивает конечную область пространства!

*Доказательство.*

1. Сферическая поверхность охватывает точечный положительный заряд, расположенный в её центре.

В любой точке пространства вектор напряжённости имеет радиальное направление, а его величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда источника поля. Для любого малого элемента сферической поверхности направления векторов *Ē* и *dS̄* совпадают.

1. Cместим точечный заряд из центра всё той же сферической поверхности.

Для каждого малого элемента поверхности угол между векторами *Ē* и *dS̄* разный, также как разные значения принимает и модуль напряжённости. Вспомним, что поток через поверхность пропорционален числу силовых линий пересекающих эту поверхность. Это число не изменилось при смещении заряда из центра. Поэтому можно предполагать, что остаётся в силе и утверждение теоремы Гаусса.

Отношение является мерой телесного угла *dΩ*.

1. Замкнутая поверхность произвольной формы охватывает один точечный заряд.

Число силовых линий, пересекающих поверхность ∑, не изменяется даже в случае самых причудливых замкнутых поверхностей, охватывающих заряд *q*.

1. Один точечный заряд находится вне замкнутой поверхности произвольной формы.

Для каждой силовой линии число её пересечений с замкнутой поверхностью ∑ число пересечений «внутрь» всегда равно числу «выходов наружу». Поэтому точечный заряд не создаёт дополнительного потока через эту поверхность.

1. Система *N* точечных зарядов *q1, q2, ..., qi, ..., qN* находящихся как внутри, так и вне замкнутой поверхности ∑ произвольной формы.

**(Опр.)** Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, между которыми возникает изолированное от внешних тел электрическое поле при сообщении проводникам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.

**(Опр.)** Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними

**Пример. Расчёт электроёмкости сферического конденсатора.**

1. Сферический конденсатор состоит из двух сферических обкладок, разделённых тонким диэлектрическим зазором. Скажем, что на внутреннем электроде радиусом R1 заряд *+q*, на внешнем электроде радиусом R2 заряд *-q*.

Выберем замкнутую поверхность ∑ радиусом R, R1 < R < R2. Поток вектора напряжённости сферы равен: . В соответствии с теоремой Гаусса:

1. Разность потенциалов:
2. Электроёмкость «воздушного» плоского конденсатора:

Электроёмкость конденсатора, заполненного однородным диэлектриком:

5. Теорема Гаусса. Пример применения – расчёт напряжённости и потенциала электрического поля плоского заряженного слоя.

**(Опр.)** Элементарным потоком *dФ* вектора *Ē* через элемент поверхности *dS̄* называется величина:

,

где *En* – проекция вектора *Ē* на положительную нормаль *n̄* к элементу поверхности *dS̄*.

Полный поток для поля всех заряженных частиц можно вычислить так:

**Теорема Гаусса**

*Поток вектора напряжённости электростатического поля ФЕ в вакууме через любую замкнутую поверхность ∑ пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности.*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен :

С учётом определения потока вектора напряжённости:

Здесь N – число частиц или тел с зарядами *qi* в области пространства Ω, охваченной замкнутой поверхностью ∑. Замкнутая поверхность всегда ограничивает конечную область пространства!

*Доказательство.*

1. Сферическая поверхность охватывает точечный положительный заряд, расположенный в её центре.

В любой точке пространства вектор напряжённости имеет радиальное направление, а его величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда источника поля. Для любого малого элемента сферической поверхности направления векторов *Ē* и *dS̄* совпадают.

1. Cместим точечный заряд из центра всё той же сферической поверхности.

Для каждого малого элемента поверхности угол между векторами *Ē* и *dS̄* разный, также как разные значения принимает и модуль напряжённости. Вспомним, что поток через поверхность пропорционален числу силовых линий пересекающих эту поверхность. Это число не изменилось при смещении заряда из центра. Поэтому можно предполагать, что остаётся в силе и утверждение теоремы Гаусса.

Отношение является мерой телесного угла *dΩ*.

1. Замкнутая поверхность произвольной формы охватывает один точечный заряд.

Число силовых линий, пересекающих поверхность ∑, не изменяется даже в случае самых причудливых замкнутых поверхностей, охватывающих заряд *q*.

1. Один точечный заряд находится вне замкнутой поверхности произвольной формы.

Для каждой силовой линии число её пересечений с замкнутой поверхностью ∑ число пересечений «внутрь» всегда равно числу «выходов наружу». Поэтому точечный заряд не создаёт дополнительного потока через эту поверхность.

1. Система *N* точечных зарядов *q1, q2, ..., qi, ..., qN* находящихся как внутри, так и вне замкнутой поверхности ∑ произвольной формы.

**Пример. Расчёт напряжённости и потенциала электрического поля плоского заряженного слоя.**

1. Рассмотрим плоский заряженный слой, которую будем считать «бесконечной плоскостью». Поток вектора напряжённости через выбранную нами замкнутую поверхность ∑ прямого кругового цилиндра равен: . Заряд внутри поверхности равен , поверхностная плотность заряда . В соответствии с теоремой Гаусса:
2. Траектория вдоль силовой линии по оси ОХ. Будем считать потенциал равным нулю там, где поле практически отсутствует. S – площадь слоя.

При наличии газообразной или жидкой однородной диэлектрической среды

6. Поле заряженного проводника. Связь поверхностной плотности заряда и напряжённости электрического поля у поверхности проводника.

1. Напряжённость электрического поля в проводниках равна нулю.
2. Потенциал всех точек проводящего тела одинаков.

*Т.е. в условиях электростатики проводник является эквипотенциальным телом (φ = const, т.к. Ē = -grad φ, а Ē = 0).*

1. Весь избыточный заряд проводника распределён по его поверхности.

*Полный заряд любой макроскопической области внутри проводника равен нулю. Обоснуем, используя теорему Гаусса. Выберем замкнутую поверхность ∑ в виде поверхности, охватывающей всю внутреннюю область проводника за исключением тонкого приповерхностного слоя. Поскольку в любой точке внутри проводника Ē = 0, поток вектора напряжённости через выбранную поверхность также равен нулю: . Согласно теореме Гаусса, поток пропорционален заряду внутри поверхности. Следовательно, полный заряд равен нулю, то есть внутри проводника разноимённые заряды скомпенсированы.*

1. Вне проводника силовые линии электростатического поля вблизи от его поверхности перпендикулярны к ней.

*Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, которые они пересекают или подходят к ним, какой является поверхность проводника.*

1. Напряжённость поля заряженного проводника вблизи поверхности пропорциональна поверхностной плотности заряда.

*Напряжённость поля заряженного проводника вблизи его поверхности определяется поверхностной плотностью избыточного заряда σ. Выделим малый элемент поверхности dS̄ заряженного проводника и применим теорему Гаусса. Поскольку элемент мал, то можно считать его плоским, а плотность заряда σ постоянной. Замкнутую поверхность ∑, охватывающую элемент, выберем в виде прямого цилиндра, основания которого перпендикулярны вектору dS̄ – одно из них располагается вне тела на малом расстоянии от поверхности, а другое внутри. Поскольку вне проводника поле перпендикулярно поверхности, а внутри его просто нет, то поток вектора напряжённости вычисляется так: . Полный заряд внутри поверхности ∑ равен произведению поверхностной плотности заряда σ на площадь поверхности элемента dS̄. Поэтому по теореме Гаусса можем записать:*

1. Плотность поверхностного заряда проводника зависит от её кривизны.

*Заменим реальное проводящее тело произвольной формы (с различной кривизной поверхности) его грубой моделью. Пусть минимальная кривизна поверхности проводника характеризуется радиусом R1, а максимальная R2. Тогда наша модель будет состоять из двух проводящих шаров с радиусами R1 и R2, соединённых тонкой проводящей проволокой. Если расположить шары далеко друг от друга, то можно считать, что избыточный заряд по их поверхности распределён равномерно. Запишем систему уравнений:*

*Подстановка первых двух соотношений в последнее равенство даёт:*

*Откуда получаем:*

*Поверхностная плотность заряда обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности:*

*А также:*

7. Электрический диполь. Поле диполя. «Элементарный диполь» во внешнем однородном и неоднородном электрическом поле.

**(Опр.)** Электрическим диполем называется система, состоящая из двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов *q*, находящихся на расстоянии *l* друг от друга.

Основной характеристикой диполя является его дипольный момент:

,

где вектор *l̄*, проведённый от отрицательного заряда к положительному, называется «плечом» диполя.

**(Опр.)** Элементарным диполем называется диполь микроскопических размеров.

* ***Однородное поле.*** Поскольку напряжённость такого поля одинакова во всех точках пространства, действующие на точечные заряды диполя *q* и *-q* силы *F̄(+)* и *F̄(-)* равны по величине и противоположны по направлению – результирующая сила равна нулю. Однако отличен от нуля *момент* этих *сил*, если только диполь не располагается вдоль силовых линий поля! Определим этот момент. Модуль момента сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через отрицательный заряд диполя:

Вектор момента силы:

Итак, однородное электрическое поле оказывает на диполь ориентирующее действие, стремясь его повернуть, «выстраивая» вектор *p̄* по направлению поля.

* ***Неоднородное поле.*** В неоднородном поле помимо вращающего момента и сила, действующая на диполь, уже не равна нулю. Чтобы найти эту силу будем для начала считать, что поле изменяется лишь в одном направлении. Выберем в этом направлении координатную ось ОХ. Сложим проекции сил, действующих на каждый из точечных зарядов диполя:

Здесь *Е(+)* и *Е(-)* – модуль напряжённости поля в месте нахождения *+q* и *–q*. Один заряд диполя смещён относительно другого вдоль оси ОХ на расстояние *dx*, равное *lcosα*. Проекцию силы можно записать в виде:

Если поле убывает в направлении оси ОХ, то знак проекции *Fx* отрицателен. Наоборот, если поле вдоль оси ОХ нарастает, то знак проекции положителен. ***В обоих случаях диполи втягиваются в область поля с большей напряжённостью!***

В общем случае поле может изменяться при смещении в произвольном направлении, а его приращение равно

Действующая на диполь сила:

Общий вывод: ***Диполи ориентируются вдоль силовых линий и втягиваются в область поля с большей напряжённостью!***

8. Проводники во внешнем электрическом поле. Свойства замкнутых проводящих оболочек (теоремы Фарадея).

При внесении проводника во внешнее электрическое поле в нём происходит перераспределение свободных заряженных частиц. Это явление называется «электростатической индукцией». В результате по поверхности оказывается распределён т.н. индуцированный заряд. На части поверхности проводящего тела находящейся ближе к положительно заряженным внешним телам концентрируются свободные электроны. На более удалённых частях поверхности возникает область, обеднённая этими частицами – т.е. они оказываются положительно заряженными.

Индуцированные заряды локализованы во внешнем поверхностном слое. Если удалить любую внутреннюю часть проводника, это никак не отразится на равновесии зарядов в проводнике и на электрическом поле внутри и вне него. То, что получается в этом случае, называется «проводящая оболочка».

**Положения о проводящих оболочках**

1. ***Если внутри полости проводящей оболочки нет заряженных тел, то эта область пространства свободна от электрического поля.***

Так как напряжённость электрического поля в проводниках равна нулю. Это является основой так называемой «электростатической защиты».

1. ***Суммарный заряд, индуцированный на внутренней поверхности полости, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри полости проводника, взятой с противоположным знаком.***

Для обоснования этого утверждения достаточно применить теорему Гаусса для произвольной замкнутой поверхности ∑, выбранной между внутренней и внешней поверхностями проводящей оболочки. Поскольку в любой точке внутри проводника напряжённость электростатического поля равна нулю, то равен нулю, очевидно, и интеграл , т.е. поток вектора напряжённости. Следовательно, равен нулю и суммарный заряд внутри этой поверхности.

1. ***Индукционный заряд, появившийся на внешней поверхности оболочки, равен по модулю и противоположен по знаку заряду, индуцированному на внутренней её поверхности.***

Иначе говоря, он в точности равен заряду, помещённому в полость. Распределение индуцированного заряда на внутренней поверхности определяется расположением зарядов внутри полости и формой поверхности. А вот распределение заряда по внешней поверхности и, соответственно, электрическое поле вне оболочки диктуется только её формой и никак не зависит от расположения зарядов внутри полости. Заряды на внешней поверхности отделены от всех зарядов внутри областью пространства, в которой поле отсутствует!

9. Разность потенциалов в электростатическом поле. Потенциал. Связь напряжённости и потенциала электрического поля. Потенциал точек электрического поля заряженного кольца на его оси.

**(Опр.)** Разностью потенциалов между точками электростатического поля 1 и 2 называется отношение работы поля по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 к величине этого заряда:

Разность потенциалов – это ***энергетическая характеристика*** электрического поля. Разность потенциалов представляет собой разность значений скалярной функции координат точек поля, которая численно равна потенциальной энергии единичного положительного заряда.

**Потенциал поля точечного заряда**

**Потенциал поля системы точечных зарядов**

Для потенциала поля системы неподвижных точечных зарядов *qi* справедлив принцип суперпозиции.

1. потенциал равен удельной работе по перемещению пробного заряда из данной точки поля в точку нормировки
2. работа силы есть величина аддитивная

**Связь напряжённости электростатического поля с разностью потенциалов**

Определим работу сил поля при малом перемещении *dl̄* пробного заряда *qпр* двумя способами:

1. (бесконечно малое приращение )

Напряжённость поля *Ē* направлена в сторону убывания потенциала *φ*.

Составляющие вектора напряжённости в любой точке электростатического поля равны частным производным по координатам.

**Градиент потенциала** – вектор, имеющий компоненты и показывающий направление, в котором быстрее всего изменяется потенциал электростатического поля в данном месте. Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста потенциала по координатным направлениям, а его модуль определяет скорость в направлении максимального роста потенциала. Знак «минус» означает, что напряжённость электростатического поля направлена всегда в сторону убывания его потенциала.

Пример. Определим потенциал электрического поля *φ(x)* на оси равномерно заряженного кольца радиуса *R*. Заряд кольца *q*, *x* – расстояние от центра кольца.

Потенциал – величина скалярная и после разбиения кольца на малые элементы – точечные заряды ∆qi, остаётся лишь в соответствии с принципом суперпозиции просуммировать совершенно одинаковые величины – потенциалы поля, которое создаёт в некоторой точке каждый из этих зарядов:

10. Конденсатор. Электроёмкость конденсатора. Энергия электрического поля. Объёмная плотность энергии электрического поля.

**(Опр.)** Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, между которыми возникает изолированное от внешних тел электрическое поле при сообщении проводникам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.

**(Опр.)** Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними.

Разность потенциалов между обкладками данного конденсатора строго пропорциональна сообщённому ему заряду. Коэффициент пропорциональности как раз и есть величина обратная его электроёмкости:

Электроёмкость конденсатора зависит от:

1. размера обкладок
2. формы обкладок
3. расстояния между ними
4. диэлектрической проницаемости изолятора между обкладками

Диэлектрическая проницаемость равна отношению электроёмкости конденсатора, заполненного однородным диэлектриком к электроёмкости воздушного (строго говоря, незаполненного) конденсатора.

**Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля**

Элементарная работа внешних сил по перемещению заряда *dq* в электрическом поле конденсатора равна:

Полную работу можно найти суммированием элементарных работ:

Эта работа и определяет энергию «запасённую» конденсатором. *We* – это **энергия электрического поля**. Напряжение *u = φ1 - φ2*.

Для плоского конденсатора , . Тогда

**(Опр.)** Объёмной плотностью энергии называется величина

Если известна напряжённость поля, можно рассчитать полную энергию этого поля в той или иной области пространства Ω конечных размеров:

11. Понятие о механизмах поляризации однородных изотропных диэлектриков. Сторонние и связанные заряды. Диэлектрическая проницаемость.

**(Опр.)** Электрическим диполем называется система, состоящая из двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов *q*, находящихся на расстоянии *l* друг от друга.

Основной характеристикой диполя является его дипольный момент:

,

где вектор *l̄*, проведённый от отрицательного заряда к положительному, называется «плечом» диполя.

**(Опр.)** Диэлектриками называют вещества, не проводящие электрический ток («изоляторы»), т.к. в них нет свободных электрически заряженных частиц, только «связанные заряды», входящие в состав атомов и молекул.

Под действием внешнего электрического поля диэлектрик может поляризоваться - его суммарный дипольный момент становится отличным от нуля:

Здесь – дипольный момент каждой отдельной молекулы.

**Понятие о механизмах поляризации диэлектриков**

Будем говорить о непроводящих средах, то есть однородных и изотропных диэлектриков.

1. Ориентационная (дипольная) поляризация

Такой механизм характерен для среды, полярные молекулы которой обладают дипольным моментом и в отсутствии внешнего электрического поля. В отсутствии поля ориентация диполей случайна вследствие хаотичности теплового движения. Однако, электрическое поле оказывает на элементарные диполи ориентирующее воздействие – появляется некоторая преимущественная ориентация диполей в направлении электрического поля! В результате средний дипольный момент каждой макроскопической области вещества оказывается отличным от нуля.

1. Электронная поляризация (поляризация смещения)

Вещество может состоять и из неполярных молекул. В отсутствии внешнего электрического поля у таких молекул отсутствует дипольный момент. Он появляется лишь под действием поля, благодаря смещению электронной плотности в молекулах вдоль поля. мин для данного типа поляризации – «упругая» поляризация. Наведённые дипольные моменты молекул малы, но зато строго параллельны напряжённости внешнего поля у всех молекул:

Коэффициент α в этом соотношении называется ***поляризуемостью*** молекулы, ε0 – как и ранее, электрическая постоянная. Поляризуемость молекулы не зависит от напряжённости поля и не зависит от температуры!

**(Опр.)** Вектор поляризации среды («поляризованность» диэлектрика):

Здесь *∆V*– объём «физически бесконечно малого элемента» среды. Таким образом, вектор поляризации – локальная характеристика диэлектрической среды и может быть разным в разных точках диэлектрика.

Коэффициент ϰ называется «диэлектрической восприимчивостью».

**Сторонние и связанные заряды**

Поле в диэлектрике складывается из поля связанных зарядов отдельных молекул и зарядов, не входящих в состав молекул в объёме вещества, их называют «сторонними».

В любых опытах (на макроскопическом уровне) проявляют себя лишь пространственно усреднённые поля, так как на микроскопическом масштабе это поле значительно изменяется вблизи ядер и электронов атомов и молекул:

**Законы электрического поля в изотропных диэлектрических средах**

1. ***Диэлектрик занимает всю область однородного поля***

Такая ситуация может быть реализована, например, между обкладками заряженного плоского конденсатора. Напряжённость поля, как мы выяснили ранее, равна сумме напряжённостей полей сторонних и связанных зарядов. Сторонние заряды распределены равномерно по поверхности пластин-обкладок конденсатора, а нескомпенсированные связанные – по поверхностям диэлектрического слоя, примыкающим к ним. Поле связанных зарядов направлено навстречу полю сторонних зарядов, поэтому модуль напряжённости результирующего поля равен:

***Величина называется диэлектрической проницаемостью среды. Она показывает, во сколько раз ослабляет поле присутствие диэлектрической среды.***

1. ***Поле точечного заряда (а также сферически симметрично распределённого заряда) в диэлектрической среде***

Будем предполагать, что однородная и изотропная диэлектрическая среда заполняет всё пространство, окружающее заряженный шарик радиуса *а*. Поле в этом случае, радиально симметрично и складывается из двух противоположно направленных – и . Поэтому

или

где . Кроме того, так как густота линий напряжённости уменьшается при удалении от источника обратно пропорционально квадрату расстояния, можно утверждать, что .

Учитывая сонаправленность векторов и :

1. ***Обобщение.*** В тех случаях, когда однородный изотропный диэлектрик занимает всю область пространства, где есть электрическое поле, присутствие диэлектрика сводится к уменьшению поля (т.е. *Ē* и *φ*) в *ε* раз. Соответственно уменьшаются и силы взаимодействия заряженных тел.

12. Постоянный ток. Сила и плотность электрического тока. Законы Ома и Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

**(Опр.)** Электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц (тел) в веществе или в вакууме.

За направление тока принято считать направление перетекания положительного заряда. Линии, касательные к которым совпадают со скоростями *v̄др* направленного движения положительных носителей тока, называют «линиями тока». Здесь *v̄др* – так называемая «дрейфовая скорость».

Количественными характеристиками электрического тока являются ***сила тока и плотность тока***.

**(Опр.)** Силой тока *I* называется отношение заряда *dq*, переносимого через некоторую поверхность ∑ за малый промежуток времени *dt*, к величине этого промежутка:

Cила тока – величина скалярная. Электрический ток называется *постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени.

**(Опр.)** Плотность электрического тока *j̄* – вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения *v̄др* положительных носителей тока. Модуль этого вектора равен отношению силы тока через малый элемент поверхности, перпендикулярный току к площади этого элемента:

*Исходя из определения, если заряд носителей тока равен q, а их концентрация n (число частиц в единице объёма), плотность тока равна*

Зная вектор *j̄(r̄)* в каждой точке пространства, можно найти силу тока через любую поверхность ∑:

**Закон Ома для однородного участка цепи (без ЭДС) гласит:**

*Сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов между концами однородного участка цепи.*

Коэффициент пропорциональности Λ называется проводимостью, а величина обратная ему «электрическим сопротивлением» участка цепи R.

Закон Ома:

Для участка однородного проводника простой цилиндрической формы длины *l* с площадью поперечного сечения *S* электрическое сопротивление *R* равно

Здесь ρ – удельное сопротивление материала проводника.

**Закон Ома в дифференциальной форме**

Рассмотрим малый элемент проводящей среды, по которой протекает постоянный ток.

Получим закон Ома в дифференциальной (локальной) форме:

**Закон Джоуля – Ленца**

Согласно закону сохранения энергии, работа тока равна изменению энергии участка цепи. Если проводник неподвижен, не происходит химических реакций, и отсутствуют иные потери энергии, то вся работа тока расходуется на выделение в нём тепла . В этом случае справедлив закон Ома , и мы приходим к важному соотношению.

*Количество теплоты Q, выделяемое в проводнике при протекании по нему постоянного тока, определяется законом Джоуля – Ленца:*

**Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**

Выделим «физически бесконечно малый» элемент проводящей среды.

Выразим удельную мощность тепловыделения *w* – т.е. количество теплоты, выделяющееся «в единицу времени и в единице объёма» проводящей среды:

Локальный характер этого соотношения означает, что все величины в левой и правой части равенства относятся к определённой точке.

13. Закон Ома и Джоуля-Ленца для однородного участка цепи (в интегральной форме). Правила Кирхгофа.

**Закон Ома для однородного участка цепи (без ЭДС) гласит:**

*Сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов между концами однородного участка цепи.*

Коэффициент пропорциональности Λ называется проводимостью, а величина обратная ему «электрическим сопротивлением» участка цепи R.

Закон Ома:

Для участка однородного проводника простой цилиндрической формы длины *l* с площадью поперечного сечения *S* электрическое сопротивление *R* равно

Здесь ρ – удельное сопротивление материала проводника.

**Закон Джоуля – Ленца**

Согласно закону сохранения энергии, работа тока равна изменению энергии участка цепи. Если проводник неподвижен, не происходит химических реакций, и отсутствуют иные потери энергии, то вся работа тока расходуется на выделение в нём тепла . В этом случае справедлив закон Ома , и мы приходим к важному соотношению.

*Количество теплоты Q, выделяемое в проводнике при протекании по нему постоянного тока, определяется законом Джоуля – Ленца:*

**Правила Кирхгофа**

Из закона сохранения заряда для постоянных токов следует **первое правило Кирхгофа (правило узлов)**: *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.*

Условно считают силы токов, «входящих» в узел, положительными величинами, а «выходящих» из узла – отрицательными.

Из закона Ома для неоднородных участков цепи () следует **второе правило Кирхгофа (правило контуров)**: *алгебраическая сумма произведений сил токов на полные сопротивления в неразветвлённых участках контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в контуре.*

Знаки произведений сил токов на полные сопротивления и ЭДС источников считаются положительными, если направление токов и ЭДС совпадает с направлением обхода контура.

14. Источники тока. ЭДС. Закон Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи. Правила Кирхгофа.

**(Опр.)** Величина, равная отношению работы сторонних сил по перемещению заряда в цепи к величине этого заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) источника тока (*ε*):

Обычно сторонние силы действуют только на отдельных участках цепи в устройствах, которые называются источниками тока. Конструкция гипотетического источника тока предполагает наличие «бесконечной ленты» транспортёра, «перебрасывающего» «поступающие» из внешней цепи на положительный «полюс» источника тока электроны обратно на «отрицательный» полюс. Заряды внутри источника движутся, таким образом, против сил электростатического поля! Тем самым и создаётся «запас работы», благодаря механической работе сторонних сил Аст = Амех – приводные валики транспортёра необходимо вращать.

**Закон Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи**

Закон Ома для участка цепи с ЭДС связывает силу постоянного тока, протекающего по участку, разность потенциалов на его концах *φ1 – φ2* и действующую на участке ЭДС *ε*. За время *∆t* по участку переносится заряд равный *∆q = I∆t*. Электрическое поле и сторонние силы, действующие на участке, совершают работу:

На участке цепи выделяется при этом тепло (по закону Джоуля-Ленца):

Если на участке цепи проводники не движутся, а значит, не совершается механическая работа, то эти величины можно приравнять.

***Сила тока, протекающего в полной цепи, равна отношению ЭДС источника тока к полному сопротивлению этой цепи (к сумме сопротивлений внешнего и внутреннего её участков):***

**Правила Кирхгофа**

Из закона сохранения заряда для постоянных токов следует **первое правило Кирхгофа (правило узлов)**: *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.*

Условно считают силы токов, «входящих» в узел, положительными величинами, а «выходящих» из узла – отрицательными.

Из закона Ома для неоднородных участков цепи следует **второе правило Кирхгофа (правило контуров)**: *алгебраическая сумма произведений сил токов на полные сопротивления в неразветвлённых участках контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в контуре.*

Знаки произведений сил токов на полные сопротивления и ЭДС источников считаются положительными, если направление токов и ЭДС совпадает с направлением обхода контура.

15. Вектор магнитной индукции. Закон Био-Савара-Лапласа. Расчёт индукции магнитного поля участка прямолинейного тонкого проводника с током.

**(Опр.)** Магнитное поле – посредник во взаимодействии заряженных тел, которое возникает при движении зарядов.

**(Опр.)** Пробным витком называется рамка с током малых размеров. Магнитным моментом пробного витка называют вектор , где *I* – сила тока, протекающего по витку, *S* – его площадь, а *n̄* – «положительная единичная нормаль» к рамке. Положительная нормаль направлена в сторону перемещения правого винта – «буравчика» – при вращении его рукоятки по направлению тока в рамке.

**(Опр.)** Вектор магнитной индукции :

1. За направление вектора принимают направление вектора магнитного момента пробного витка, повернувшегося под действием сил магнитного поля.
2. Модуль вектора магнитной индукции равен отношению максимального момента сил, действующих на пробный виток со стороны магнитного поля, к модулю магнитного момента этого витка:

При произвольном значении угла модуль момента сил равен , а сам вектор

Опытным путём установлено, что для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции

**Закон Био-Савара-Лапласа**

*Определить магнитное поле, созданное проводником произвольной формы с током, можно суммируя индукцию магнитного поля dB̄ от каждого отдельного «элемента тока» Idl̄ в произвольной точке пространства А, задаваемой радиус-вектором r̄:*

В коэффициент пропорциональности системы СИ здесь входит магнитная постоянная .

Направление вектора перпендикулярно как элементу тока (вектору *Idl̄*), так и вектору *r̄*. Если считать, что на точка А и элемент тока лежат в одной плоскости, то вектор *dB̄* направлен «от нас». ***Модуль магнитной индукции*** от элемента тока равен:

Для нахождения результирующего магнитного поля созданного всем проводником следует, пользуясь принципом суперпозиции полей, найти сумму векторов *dB̄* от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник.

**Пример. Найти индукцию магнитного поля прямолинейного длинного проводника с током.**

“Разобьём” проводник на малые элементы и определим индукцию магнитного поля в точке А для каждого из них в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа. Направление векторов определим по «правилу буравчика».

Все векторы *dB̄* направлены одинаково – перпендикулярно плоскости, в которой располагается проводник и точка А. Поэтому результирующий вектор *B̄* направлен так же, и суммировать можно скалярные величины – модули *dB*. Выразим входящие в соотношение величины *r* и *dl* через одну единственную переменную величину – *θ* и её дифференциал *dθ*:

Пределы изменения угла θ для случая очень («бесконечно») длинного проводника от 0 до π.

16. Магнитное поле, вектор магнитной индукции. Закон Био-Савара-Лапласа. Расчёт индукции магнитного поля кругового витка с током на его оси.

**(Опр.)** Магнитное поле – посредник во взаимодействии заряженных тел, которое возникает при движении зарядов.

**(Опр.)** Пробным витком называется рамка с током малых размеров. Магнитным моментом пробного витка называют вектор , где *I* – сила тока, протекающего по витку, *S* – его площадь, а *n̄* – «положительная единичная нормаль» к рамке. Положительная нормаль направлена в сторону перемещения правого винта – «буравчика» – при вращении его рукоятки по направлению тока в рамке.

**(Опр.)** Вектор магнитной индукции :

1. За направление вектора принимают направление вектора магнитного момента пробного витка, повернувшегося под действием сил магнитного поля.
2. Модуль вектора магнитной индукции равен отношению максимального момента сил, действующих на пробный виток со стороны магнитного поля, к модулю магнитного момента этого витка:

При произвольном значении угла модуль момента сил равен , а сам вектор

Опытным путём установлено, что для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции

**Закон Био-Савара-Лапласа**

*Определить магнитное поле, созданное проводником произвольной формы с током, можно суммируя индукцию магнитного поля dB̄ от каждого отдельного «элемента тока» Idl̄ в произвольной точке пространства А, задаваемой радиус-вектором r̄:*

В коэффициент пропорциональности системы СИ здесь входит магнитная постоянная .

Направление вектора перпендикулярно как элементу тока (вектору *Idl̄*), так и вектору *r̄*. Если считать, что на точка А и элемент тока лежат в одной плоскости, то вектор *dB̄* направлен «от нас». ***Модуль магнитной индукции*** от элемента тока равен:

Для нахождения результирующего магнитного поля, созданного всем проводником, следует, пользуясь принципом суперпозиции полей, найти сумму векторов *dB̄* от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник.

**Магнитное поле движущейся заряженной частицы**

*N* – общее число носителей тока внутри малого участка проводника. С учётом закона Био-Савара-Лапласа получим для одной частицы:

**Пример. Найти индукцию магнитного поля кругового витка с током на его оси.**

Определим магнитную индукцию на оси проводника с током на расстоянии *х* от плоскости кругового тока. Векторы *dB̄* перпендикулярны плоскостям, проходящим через соответствующие *dl̄* и *r̄*. Следовательно, они образуют симметричный конический веер. Из соображения симметрии видно, что результирующий вектор *B̄* направлен вдоль оси кругового тока. Каждый из векторов   вносит вклад равный , а   взаимно уничтожаются. Но , , а т.к. угол между *dl̄*  и *r̄*  α – прямой  тогда получим (, ):

При x = 0 получим магнитную индукцию в центре кругового потока:

17. Сила Ампера. Пример расчёта силы взаимодействия между параллельными проводниками с током. Сила Лоренца.

**Закон Ампера:**

*Сила действующая на элемент тока в магнитном поле равна , а её модуль .*

Здесь *dF̄* - сила, действующая на элемент тока *Idl̄* со стороны магнитного поля B̄ направленного под углом *α* к участку проводника *dl̄*. Направление этой силы определяется, как для любого векторного произведения по правилу “левой руки”.

Полная сила, действующая на проводник конечной длины, вычисляется суммированием (векторным!) “элементарных воздействий”.

**Пример. Расчёт силы взаимодействия двух параллельных прямолинейных проводников с током.**

Здесь *μ0* – магнитная постоянная, а *R* – расстояние между проводниками. Это – сила притяжения, если направления токов совпадают и сила отталкивания, если не совпадают.

**Сила Лоренца:**

*Магнитное поле действует не только на токи, но и на движущиеся заряженные частицы с силой , её модуль*

Здесь v̄ – скорость движения заряженной частицы, α – угол между векторами v̄ и B̄. Направление силы Лоренца определяется в соответствии со способом определения направления векторного произведения правилом левой руки.

**Магнитное поле движущейся заряженной частицы**

*N* – общее число носителей тока внутри малого участка проводника. С учётом закона Био-Савара-Лапласа получим для одной частицы:

18. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Её применение для расчёта вектора магнитной индукции поля цилиндрического проводника с током.

**(Опр.)** Циркуляцией вектора *B̄* по замкнутому контуру C называется криволинейный интеграл вида .

**Формулировка теоремы:**

*Циркуляция вектора индукции B̄ магнитостатического поля по любому замкнутому контуру C в вакууме пропорциональна алгебраической сумме сил токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром*

В том случае, когда через поверхность ∑, ограниченную контуром C, протекают распределённые токи, в правой части вместо суммы следует записать поверхностный интеграл вида . Этот интеграл имеет смысл потока вектора плотности тока *j̄* через поверхность ∑, ограниченную контуром C – предполагается, что именно через неё и переносится заряд!

*Доказательство.*

1. Рассмотрим сначала простейший случай – постоянный ток протекает по бесконечно длинному прямолинейному тонкому проводнику. Контур С – окружность, располагающаяся в плоскости, перпендикулярной проводнику, проходящему через её центр. Контур С совпадает с одной из линий индукции магнитного поля проводника. Отсюда ясно, что под знак интеграла при расчёте циркуляции попадают просто произведения *B(r)dl* (на любом малом участке контура направления векторов *B̄* и *dl̄* совпадают!). В силу осевой симметрии модуль вектора *B̄* зависит только от расстояния до проводника и постоянен на окружности радиуса r, а потому его можно вынести за знак интеграла. Получаем:

Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника на расстоянии r от него равна (результат применения закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции)

1. Пусть контур С по-прежнему лежит в плоскости, перпендикулярной проводнику, охватывает проводник, но на этот раз имеет произвольную форму.
2. Пусть теперь проводник проходит вне контура С. Контур разобьём на две составляющие и при вычислении интеграла двигаться сначала от точки 1 к точке 2 по более удалённой его части, а затем от точки 2 к точке 1 возвращаться по более близкой. При этом интеграл разбивается на две части. Для участка 1–2 угол между векторами *B̄* и *dl̄* острый и знак их скалярного произведения положителен. Напротив, для участка 2–1 угол тупой и знак произведения противоположен. В итоге получаем:

Это означает, что токи, лежащие вне поверхности, ограниченной контуром вклада в циркуляцию не дают.

1. Контур не является плоским. Все малые элементы произвольного неплоского контура можно представить, как сумму компонент, лежащих в плоскости перпендикулярной проводнику (), и составляющих, параллельных ему ().
2. Произвольное количество проводников с током. Справедливо с учётом принципа суперпозиции магнитных полей.

**Пример. По длинному прямолинейному проводнику радиуса *R* течёт ток. Плотность тока распределена равномерно по сечению проводника и равна *j*. Найти зависимость индукции магнитного поля тока *B̄(r)* как внутри, так и вне этого проводника.**

В любой плоскости, перпендикулярной проводнику, линии поля – окружности с центрами на оси проводника. Контур С – окружность перпендикулярная проводнику, проходящему через её центр. По теореме о циркуляции (дважды, для C1: *r > R*, правая часть , а для C2: *0 < r < R* и ):

вне проводника внутри проводника

Направление магнитного поля в любой точке пространства определяется “правилом правого винта”.

19. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Применение теоремы для расчёта вектора магнитной индукции поля соленоида.

**(Опр.)** Циркуляцией вектора *B̄* по замкнутому контуру C называется криволинейный интеграл вида .

**Формулировка теоремы:**

*Циркуляция вектора индукции B̄ магнитостатического поля по любому замкнутому контуру C в вакууме пропорциональна алгебраической сумме сил токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром*

В том случае, когда через поверхность ∑, ограниченную контуром C, протекают распределённые токи, в правой части вместо суммы следует записать поверхностный интеграл вида . Этот интеграл имеет смысл потока вектора плотности тока *j̄* через поверхность ∑, ограниченную контуром C – предполагается, что именно через неё и переносится заряд!

*Доказательство.*

1. Рассмотрим сначала простейший случай – постоянный ток протекает по бесконечно длинному прямолинейному тонкому проводнику. Контур С – окружность, располагающаяся в плоскости, перпендикулярной проводнику, проходящему через её центр. Контур С совпадает с одной из линий индукции магнитного поля проводника. Отсюда ясно, что под знак интеграла при расчёте циркуляции попадают просто произведения *B(r)dl* (на любом малом участке контура направления векторов *B̄* и *dl̄* совпадают!). В силу осевой симметрии модуль вектора *B̄* зависит только от расстояния до проводника и постоянен на окружности радиуса r, а потому его можно вынести за знак интеграла. Получаем:

Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника на расстоянии r от него равна (результат применения закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции)

1. Пусть контур С по-прежнему лежит в плоскости, перпендикулярной проводнику, охватывает проводник, но на этот раз имеет произвольную форму.
2. Пусть теперь проводник проходит вне контура С. Контур разобьём на две составляющие и при вычислении интеграла двигаться сначала от точки 1 к точке 2 по более удалённой его части, а затем от точки 2 к точке 1 возвращаться по более близкой. При этом интеграл разбивается на две части. Для участка 1–2 угол между векторами *B̄* и *dl̄* острый и знак их скалярного произведения положителен. Напротив, для участка 2–1 угол тупой и знак произведения противоположен. В итоге получаем:

Это означает, что токи, лежащие вне поверхности, ограниченной контуром вклада в циркуляцию не дают.

1. Контур не является плоским. Все малые элементы произвольного неплоского контура можно представить, как сумму компонент, лежащих в плоскости перпендикулярной проводнику (), и составляющих, параллельных ему ().
2. Произвольное количество проводников с током. Справедливо с учётом принципа суперпозиции магнитных полей.

**Пример. Найдём индукцию магнитного поля *B̄* соленоида.**

Соленоидом называют длинную катушку – её длина много больше диаметра. Катушка состоит из большого количества одинаковых витков с током, каждый из которых дает свой вклад в результирующее магнитное поле. Итак, направление векторов индукции от симметричных витков может быть ***только параллельным оси*** катушки как вне, так и внутри неё.

Выберем контур 1–2–3–4 в виде прямоугольника. Циркуляция вектора *B̄* равна:

Второе и четвёртое слагаемое равны нулю, так как на любом участке сторон контура 2-3 и 4-1 векторы *B̄* и *dl̄* взаимно перпендикулярны. Участок 3-4 может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало (вспомним закон убывания индукции поля с расстоянием по закону БСЛ). Поэтому выражение для циркуляции практически полностью определяется индукцией поля внутри соленоида. Применяем теорему и получаем:

Модуль магнитной индукции поля ***внутри*** соленоида равен:

Практически все поле сосредоточено ***внутри катушки*** и ***однородно***. Таким образом, длинный соленоид в учении о магнетизме играет роль аналогичную конденсатору в электростатике.

20. Открытие Фарадеем явления электромагнитной индукции («Опыты Фарадея»). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла.

В качестве источника магнитного поля Фарадей использовал постоянный магнит, а также катушку, включённую в электрический контур («1») с источником тока (электромагнит). Для регистрации индукционных токов применялась другая катушка, входящая в другой, «регистрирующий контур» («2») с чувствительным к протеканию заряда электроприбором – гальванометром G.

1. Если регистрирующая катушка («2») находилась в поле неподвижного электромагнита (катушка «1») даже с очень большим постоянным током (то же и в случае неподвижного постоянного магнита), то гальванометр G не фиксировал протекание тока. Вывод – постоянное магнитное поле любой величины не вызывает появление электрического тока в неподвижном проводнике.
2. При пространственных перемещениях регистрирующей катушки или магнитов гальванометр показывал появление тока – «индукционный» ток *Iинд* в контуре «2». Какой именно контур «1» или «2» (или магнит) находится в движении, значения не имело – роль играет лишь их относительное движение.
3. То же происходило и при замыкании или размыкании ключа «К», а также и при изменении силы тока в первом контуре.
4. Фарадеем был обнаружен и ряд более тонких эффектов. Например, появление индукционного тока *Iинд* во втором (регистрирующем) контуре в процессе деформации второй катушки или при внесении в неё железных сердечников.

Фарадей проанализировал все проявления электромагнитной индукции и пришёл к выводу – изменения в структуре магнитного поля приводят заряженные частицы в упорядоченное движение. А именно, ***электрический ток индуцируется при любом изменении магнитного потока*** через поверхность, ограниченную замкнутым проводником (контуром) – это ***явление электромагнитной индукции***.

Величина индукционного тока *Iинд* пропорциональна скорости изменения магнитного потока *ΦB*:

**«Правило» Ленца**

*Индукционный ток всегда направлен так, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.*

Или: *Индукционный ток направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.*

**Закон электромагнитной индукции (Фарадея – Максвелла)**

*Закон электромагнитной индукции Фарадея устанавливает, что ЭДС электромагнитной индукции в проводящем контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром:*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен 1. Знак минус соответствует договоренности обозначать направление индукционного тока, определяемое по правилу Ленца: ЭДС считается положительной, если направление индукционного тока составляет с вектором положительной нормали к поверхности, ограниченной контуром, «правовинтовую систему».

21. Электромагнитная индукция. Правило Ленца. Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции.

***Электрический ток индуцируется при любом изменении магнитного потока*** через поверхность, ограниченную замкнутым проводником (контуром) – это ***явление электромагнитной индукции***. Величина индукционного тока *Iинд* пропорциональна скорости изменения магнитного потока *ΦB*:

**«Правило» Ленца**

*Индукционный ток всегда направлен так, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.*

Или: *Индукционный ток направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.*

**Закон электромагнитной индукции (Фарадея – Максвелла)**

*Закон электромагнитной индукции Фарадея устанавливает, что ЭДС электромагнитной индукции в проводящем контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром:*

Знак минус соответствует договоренности обозначать направление индукционного тока, определяемое по правилу Ленца: ЭДС считается положительной, если направление индукционного тока составляет с вектором положительной нормали к поверхности, ограниченной контуром, «правовинтовую систему».

**Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции**

Электроны проводимости толкает, обеспечивая индукционный ток, в неподвижном контуре, помещённом в переменное магнитное поле вихревое электрическое поле, создаваемое магнитным, которое обеспечивает появление ЭДС за счёт работы сторонних сил, его удобно характеризовать вектором напряжённости. Максвелл формализовал всё это и закон ЭМИ цепочкой следующих соотношений: , .

22. Самоиндукция. Индуктивность. Пример применения теоремы о циркуляции вектора B̄ при расчёте индуктивности соленоида. Энергия магнитного поля.

Если в цепи изменяется ток, изменение потока магнитного поля этого тока через поверхность, ограниченную контуром ведёт к появлению ЭДС самоиндукции экстратоки появляются в строгом соответствии с законом электромагнитной индукции:

Так как и , а , можно сделать вывод

**(Опр.)** Индуктивностью контура L (или коэффициентом самоиндукции) называется отношение собственного магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром с током к силе тока в этом контуре:

**Пример. Найдём индуктивность L соленоида.**

Соленоидом называют длинную катушку – её длина много больше диаметра. Катушка состоит из большого количества одинаковых витков с током, каждый из которых дает свой вклад в результирующее магнитное поле. Итак, направление векторов индукции от симметричных витков может быть ***только параллельным оси*** катушки как вне, так и внутри неё.

Выберем контур 1–2–3–4 в виде прямоугольника. Циркуляция вектора *B̄* равна:

Второе и четвёртое слагаемое равны нулю, так как на любом участке сторон контура 2-3 и 4-1 векторы *B̄* и *dl̄* взаимно перпендикулярны. Участок 3-4 может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало (вспомним закон убывания индукции поля с расстоянием по закону БСЛ). Поэтому выражение для циркуляции практически полностью определяется индукцией поля внутри соленоида. Применяем теорему и получаем:

Модуль магнитной индукции поля ***внутри*** соленоида равен:

Магнитное поле соленоида практически однородно внутри него, и его индукция равна . Магнитный поток через все N витков соленоида равен:

Индуктивность зависит от размеров и формы контура, а также от магнитных свойств среды. ***Магнитная проницаемость среды***:

**ЭДС самоиндукции**

**Энергия магнитного поля**

При протекании экстратока самоиндукции, совершается работа по перемещению зарядов в проводниках, в итоге выделяется тепло. Источник работы и тепловой энергии – энергия магнитного поля, окружающего проводники с током. Элементарная работа сторонних сил по перемещению заряда равна:

Полная работа вычисляется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием выражения в пределах диапазона изменения исчезающего тока в контуре:

Эта работа определяет энергию, «запасённую» в магнитном поле:

**(Опр.)** Объёмной плотностью энергии магнитного поля:

В случае неоднородного поля эта величина позволяет определять энергию, заключённую в малых элементах пространства. А вот зная магнитную индукцию поля как функцию координат, можно рассчитать и полную энергию магнитного поля в той или иной области пространства Ω конечных размеров:

23. Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме.

**Элементы теории магнитного поля Максвелла**

**Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции**

Электроны проводимости толкает, обеспечивая индукционный ток, в неподвижном контуре, помещённом в переменное магнитное поле вихревое электрическое поле, создаваемое магнитным, которое обеспечивает появление ЭДС за счёт работы сторонних сил, его удобно характеризовать вектором напряжённости. Максвелл формализовал всё это и закон ЭМИ цепочкой следующих соотношений: , .

**Ток смещения**

Пока мы имеем дело с протеканием в цепи тока постоянного при применении теоремы о циркуляции нет необходимости заботиться о выборе конкретной поверхности ∑, ограниченной контуром С, охватывающим проводник с током. Теперь представим себе ситуацию при протекании переменного тока, например, в колебательном контуре. Постоянный ток в такой цепи протекать не может, поскольку диэлектрический промежуток между обкладками конденсатора представляет собой для неё разрыв. Контур С охватывает проводник, пересекающий поверхность ∑1, ограниченную этим контуром. Теорема о циркуляции даёт для них:

При этом интеграл в правой части равен силе протекающего в проводнике тока. В соответствии с теоремой вместо поверхности ∑1 можно выбрать и любую другую, охваченную контуром С. В частности, поверхность ∑2, проходящую между обкладками конденсатора. Через неё заряды не переносятся! Левая часть равенства от выбора поверхности не зависит. Вместе с поверхностью ∑1 поверхность ∑2 образует замкнутую поверхность ∑, внутри которой находится нескомпенсированный заряд q, равный заряду обкладки конденсатора. Сила тока равна скорости изменения этого заряда . По теореме Гаусса:

В таком случае можно утверждать, что сила тока равна

Последовательность дифференцирования и интегрирования в правой части в случае покоящихся контура и поверхности можно поменять местами. То, что после этого получается, Максвелл предложил называть «током смещения»:

Соответственно величина называется *плотностью тока смещения*. Ведь электрическим током мы называли направленное движение **заряженных частиц!** Здесь же никакие частицы через поверхность ∑2 не переносятся. Зато есть изменяющееся во времени электрическое поле, которое порождает магнитное. ***Изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое (вихревое) и, наоборот, изменяющееся во времени электрическое порождает магнитное***. То, что действительно обусловлено переносом заряженных частиц придётся снабжать теперь специальным термином «ток проводимости». Часто говорят, что токи смещения замыкают токи проводимости в «разорванных» цепях переменного тока.

**Уравнения Максвелла (в интегральной форме)**

теорема Гаусса – закон Кулона + принцип суперпозиции

теорема Гаусса для магнитного поля – магнитных зарядов в природе нет!

закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла

теорема о циркуляции с поправкой Максвелла

Вместе с законом силы, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле

эта система является основой классической электродинамики, фундаментом теории электромагнитного поля Максвелла.