Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Содержание

Лекция 1. Подпространства линейных пространств

1.1. Операции над множествами векторов

Определение (операции над множествами векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + Q_2 = \{x_1 + x_2 \colon x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\} = \big\{y \colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2 \wedge y = x_1 + x_2)\big\}.$$

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Обозначим:

$$\lambda Q = \{\lambda x \colon x \in Q\} = \big\{y \colon \exists x (x \in Q \wedge y = \lambda x)\big\}.$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

2. Пусть: r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r_1}$, $y_1, \ldots, y_{r_2} \in L$. Тогда:

$$L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

3. Пусть: Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) \leqslant \dim(Q_1) + \dim(Q_2)$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Тогда: $Q_k \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$ при $k = \overline{1, r}$.

5. Пусть: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Тогда $Q_1 + Q_2 = Q_1$.

Доказательство.

1. Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Так как Q_1, $Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$, $y_1 \in Q_1$, $y_2 \in Q_2$, $y = y_1 + y_2$. Следовательно:

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in Q_1 + Q_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

2. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют векторы u_1, u_2, удовлетворяющие условиям: $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, $u = u_1 + u_2$. Так как $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_1 = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}$. Так как $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, то существуют числа $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_2 = \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Тогда:

$$u = u_1 + u_2 = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) =$$
$$= \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Следовательно:

$$u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} =$$
$$= (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

3. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Пусть $N_1,\ N_2 \neq 0$. Так как $N_1 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Так как $N_2 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $f_1, \ldots, f_{N_2}$, удовлетворяющие условию $f_1, \ldots, f_{N_2}$ — базис подпространства Q_2. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) = \\ = \operatorname{rank}\bigl(\{e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2}\}\bigr) \leqslant N_1 + N_2.$$

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Следовательно:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть $N_2 = 0$. Тогда $Q_2 = \{\theta\}$. Следовательно:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

4. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Пусть $x \in Q_k$. Обозначим: $y_k = x$, $y_m = \theta$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \neq k$. Тогда: $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x = y_1 + \cdots + y_r$. Следовательно, $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Итак, $Q_k \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$.

5. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x_2 \in Q_2$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x_1 + x_2 \in Q_1$.

Пусть $x \in Q_1$. Так как $Q_2 \neq \varnothing$, то существует вектор x_2, удовлетворяющий условию $x_2 \in Q_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = \bigl(x + (-x_2)\bigr) + x_2 \in Q_1 + Q_2$. □

1.2. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств

Определение (линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L.

1. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, если:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \bigl(x_1 + \cdots + x_r = \theta \implies x_1 = \theta \wedge \cdots \wedge x_r = \theta\bigr).$$

2. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Обозначим, $\bigoplus\limits_{k=1}^{r} Q_k = \sum\limits_{k=1}^{r} Q_k$. Будем говорить, что $\bigoplus\limits_{k=1}^{r} Q_k$ — прямая сумма подпространств $Q_1, \ldots, Q_r$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Очевидно, Q — линейно независимое подпространство.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Подпространства $Q_1, \ldots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда:*

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r \\ \bigl(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\bigr).$$

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Тогда: $x_1 - y_1 \in Q_1, \ldots, x_r - y_r \in Q_r$, $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_r - y_r) = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $x_1 - y_1 = \theta, \ldots, x_r - y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$.

Пусть:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r$$
$$\big(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\big).$$

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Обозначим, $y_1, \ldots, y_r = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Следовательно: $x_1 = y_1 = \theta, \ldots, x_r = y_r = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*. Подпространства* Q_1*,* Q_2 *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$*.*

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$. Пусть $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $x \in Q_1$, $-x \in Q_2$, $x + (-x) = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства, то $x = \theta$. Итак, $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.

Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_1 + x_2 = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1$, $x_1 = -x_2 \in Q_2$; $x_2 = -x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 \in Q_1 \cap Q_2$, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$, то: $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta$. Итак, Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*.*

1. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $r_0 = \overline{1, r-1}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*. Тогда* $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ *— линейно независимые подпространства.*

2. Пусть: $r_0 = \overline{1, r-1}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $Q_m = \{\theta\}$ *при:* $m = \overline{1, r}$*,* $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$*. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

3. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $\sigma \in S_r$*. Тогда* $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть: $x_1 \in Q_{k_1}, \ldots, x_{r_0} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_1 + \cdots + x_{r_0} = \theta$. Обозначим: $y_{k_1} = x_1, \ldots, y_{k_{r_0}} = x_{r_0}$, $y_m = \theta$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда: $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $y_1 + \cdots + y_r = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $y_1, \ldots, y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_{k_1} = \theta, \ldots, x_{r_0} = y_{k_{r_0}} = \theta$. Итак, $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Фиксируем номер: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как: $x_m \in Q_m$, $Q_m = \{\theta\}$, то $x_m = \theta$. Тогда: $x_{k_1} \in Q_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_{k_1} + \cdots + x_{k_{r_0}} = \theta$. Так как $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства, то $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}} = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $x_1 \in Q_{\sigma(1)}, \ldots, x_r \in Q_{\sigma(r)}$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Тогда: $x_{\sigma^{-1}(1)} \in Q_1, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} \in Q_r$, $x_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Итак, $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $k_0 = \overline{1,r}$, Q_{k_0} — подпространство пространства L, $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \neq k_0$. Так как: Q_{k_0} — линейно независимое подпространство, $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \neq k_0$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$*.*

1. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*;* $x_{k,1}, \ldots, x_{k,N_k}$ *— линейно независимые векторы подпространства* Q_k *при* $k = \overline{1,r}$*. Тогда* $x_{1,1}, \ldots, x_{1,N_1}, \ldots, x_{r,1}, \ldots, x_{r,N_r}$ *— линейно независимые векторы.*

2. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*;* $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ *— базис подпространства* Q_k *при* $k = \overline{1,r}$*. Тогда* $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ *— базис подпространства* $Q_1 + \cdots + Q_r$*.*

3. Пусть: $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ *— линейно независимые векторы пространства* L*;* $Q_k = L(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ *при* $k = \overline{1,r}$*. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть: $\alpha^{k,m} \in \mathbb{K}$ при: $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$; $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$. Тогда: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} \in Q_k$ при $k = \overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как $x_{k,1}, \ldots, x_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при $m = \overline{1,N_k}$. Итак, $x_{1,1}, \ldots, x_{1,N_1}, \ldots, x_{r,1}, \ldots, x_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.

2. Очевидно:

$$Q_1 + \cdots + Q_r = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}) + \cdots + L(e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}) = \\ = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}).$$

Так как: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства; $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \in Q_k$, то существуют числа $\alpha^{k,1}, \ldots, \alpha^{k,N_k} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k = \alpha^{k,1} e_{k,1} + \cdots + \alpha^{k,N_k} e_{k,N_k}$. Тогда:

$$\theta = \sum_{k=1}^{r} x_k = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \sum_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} e_{k,m}.$$

Так как $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при: $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$. Тогда: $x_k = \alpha^{k,1} e_{k,1} + \cdots + \alpha^{k,N_k} e_{k,N_k} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_k) \in \mathbb{N}$ *при* $k = \overline{1, r}$*. Тогда* $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*.*

Доказательство. Обозначим: $N_k = \dim(Q_k)$ при $k = \overline{1, r}$. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Так как $N_k \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_k) \neq +\infty$ *при* $k = \overline{1, r}$*. Тогда* $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*.*

Доказательство. Обозначим: $N_k = \dim(Q_k)$ при $k = \overline{1, r}$. Обозначим через r_0 количество чисел k, удовлетворяющих условиям: $k = \overline{1, r}$, $N_k \neq 0$.

Пусть $r_0 = r$. Тогда: $N_k \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$. Так как: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $N_k \in \mathbb{N}$ при $k = \overline{1, r}$, то $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$.

Пусть $r_0 = \overline{2, r-1}$. Тогда существуют числа $k_1, \ldots, k_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \neq 0$, $N_m = 0$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как: $N_m = 0$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то: $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства. Так как $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \in \mathbb{N}$, то $\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}}$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}} = N_1 + \cdots + N_r.$$

Пусть $r_0 = 0, 1$. Тогда существует число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1, r}$, $N_m = 0$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \neq k_0$. Следовательно: $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \neq k_0$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_{k_0}) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r). \quad \square$$

1.3. Линейное дополнение одного подпространства до другого

Определение (линейное дополнение одного подпространства до другого). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$. Будем говорить, что D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2, если: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*,* $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$*. Тогда* $Q_1 = Q_2$*.*

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(Q_1)$. Тогда $\dim(Q_2) = N$.

Пусть $N \neq 0$. Так как: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(Q_1) = N$, то $e_1, \ldots, e_N$ — базис подпространства Q_1. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \ldots, e_N \in Q_2$. Так как: $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, $\dim(Q_2) = N$, то $e_1, \ldots, e_N$ — базис подпространства Q_2. Очевидно: $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_N) = Q_2$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$, то Q_1, $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда $Q_1 = Q_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда существует линейное дополнение* D *подпространства* Q_1 *до подпространства* Q_2.

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2$, то $N_1 \leqslant N_2$.

Пусть: $N_1 \neq 0$, $N_1 \neq N_2$. Так как $N_1 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Так как: $Q_1 \subseteq Q_2$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$, то существуют векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$, удовлетворяющие условию $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — базис подпространства Q_2. Обозначим, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$. Тогда: D — подпространство пространства L,

$$Q_1 + D = L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}) = L(e_1, \ldots, e_{N_2}) = Q_2.$$

Так как: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Обозначим, $D = Q_2$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = \{\theta\} + Q_2 = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть $N_1 = N_2$. Так как: $Q_1 \subseteq Q_2$, $N_2 \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$. Обозначим, $D = \{\theta\}$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = Q_2 + \{\theta\} = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Доказательство. Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение D подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 \cap Q_2 + D$; $Q_1 \cap Q_2$, D — линейно независимые подпространства. Следовательно: $D \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) = \dim(Q_1 \cap Q_2) + \dim(D)$, $(Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$.

Так как: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, то: $Q_1 + Q_2 = Q_1 + (Q_1 \cap Q_2 + D) = (Q_1 + Q_1 \cap Q_2) + D = Q_1 + D$.

Так как $D \subseteq Q_2$, то: $Q_1 \cap D = Q_1 \cap (D \cap Q_2) = (Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$. Тогда Q_1, D — линейно независимые подпространства. Следовательно: $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1 + D) = \dim(Q_1) + \dim(D) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$. □

Лекция 2. Тензорная алгебра

2.1. Числовые наборы

Замечание («прямоугольные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Обозначим через $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ множество всех функций A, удовлетворяющих условию: $A \colon \{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\} \implies \mathbb{K}$.

2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Будем говорить, что A — «прямоугольный» числовой набор степени r. **Иными словами, «прямоугольный» числовой набор степени r — это числовая функция r дискретных переменных.**

3. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A_{i_1, \ldots, i_r}$ вместо $A(i_1, \ldots, i_r)$.

4. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A^{i_1, \ldots, i_r}$ вместо $A(i_1, \ldots, i_r)$.

5. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $r = q + p$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p}$ вместо $A(j_1, \ldots, j_q, i_1, \ldots, i_p)$.

6. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(A+B)_{i_1, \ldots, i_r} = A_{i_1, \ldots, i_r} + B_{i_1, \ldots, i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.

7. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1, \ldots, i_r} = \lambda A_{i_1, \ldots, i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.

8. Очевидно, $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через N_* количество элементов множества $\{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\}$. Тогда: $\dim\bigl(\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}\bigr) = N_* = N_1 \cdots N_r$.

Замечание («квадратные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим: $N_1, \ldots, N_r = N$, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Пусть $r = 0$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$. Будем говорить, что A — «квадратный» числовой набор степени r.

3. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $\mathbb{K}^{(N,r)}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim\bigl(\mathbb{K}^{(N,r)}\bigr) = N^r$.

2.2. Геометрические объекты

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $x \in L$, e — базис пространства L. Очевидно, существует единственный упорядоченный набор чисел $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^k e_k$. Будем говорить, что $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$ — координаты вектора x в базисе e. Обозначим, $[x](e) = \tilde{x}$.

2. Пусть e — базис пространства L. Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Тогда $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$.

3. Пусть e, e' — базисы пространства L. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1, N}$. Очевидно, $\alpha(e, e') \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что $\alpha(e, e')$ — матрица перехода от базиса e к базису e'.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть e — базис пространства L. Тогда $\alpha(e, e) = I$ (здесь I — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N \times N}$).

2. Пусть e, e', e'' — базисы пространства L. Тогда $\alpha(e, e'') = \alpha(e, e')\alpha(e', e'')$.

3. Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда: $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \alpha(e', e)$.

4. Пусть: e — базис пространства L, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$, $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ при $i' = \overline{1,N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e,e') = A$.

5. Пусть: $x \in L$, e, e' — базисы пространства L. Тогда $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e',e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1,N}$ ($[x](e') = \alpha(e',e)[x](e)$).

Доказательство.

1. Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $\alpha^j_i(e,e) = [e_i]^j(e) = \delta^j_i$.
2. Пусть $i'' = \overline{1,N}$. Очевидно, $e''_{i''} = \alpha^i_{i''}(e,e'')e_i$. С другой стороны:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e',e'')e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e',e'')\bigl(\alpha^i_{i'}(e,e')e_i\bigr) = \bigl(\alpha^i_{i'}(e,e')\alpha^{i'}_{i''}(e',e'')\bigr)e_i = \bigl(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\bigr)^i_{i''}e_i.$$

Тогда: $\alpha^i_{i''}(e,e') = \bigl(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\bigr)^i_{i''}$ при $i = \overline{1,N}$.

3. Очевидно: $\alpha(e,e')\alpha(e',e) = \alpha(e,e) = I$. Тогда: $\det\bigl(\alpha(e,e')\bigr) \neq 0$, $\alpha(e,e')^{-1} = \alpha(e',e)$.
4. Так как: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$, то $A_1, \ldots, A_N$ — линейно независимые столбцы пространства $\mathbb{K}^N$. Так как: $\mathbb{K}^N \overset{h_e^{-1}}{\approx} L$, $e'_{i'} = h_e^{-1}A_{i'}$ при $i' = \overline{1,N}$, то $e'_1, \ldots, e'_N$ — линейно независимые векторы пространства L. Так как $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L.

   Пусть $i' = \overline{1,N}$. Очевидно, $e'_{i'} = \alpha^i_{i'}(e,e')e_i$. С другой стороны, $e'_{i'} = A^i_{i'}e_i$. Тогда: $\alpha^i_{i'}(e,e') = A^i_{i'}$ при $i = \overline{1,N}$.
5. Очевидно, $x = [x]^{j'}(e')e'_{j'}$. С другой стороны:

$$x = [x]^j(e)e_j = [x]^j(e)\bigl(\alpha^{j'}_j(e',e)e'_{j'}\bigr) = \bigl(\alpha^{j'}_j(e',e)[x]^j(e)\bigr)e'_{j'}.$$

Тогда: $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e',e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1,N}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — геометрический объект степени r в пространстве L, если A — это отображение, которое каждому базису e пространства L ставит в соответствие числовой набор $A(e) \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.
2. Обозначим через $(GL)_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве L.
3. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\bigl(A(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r}$.
4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A^{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\bigl(A(e)\bigr)^{i_1,\ldots,i_r}$.
5. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $r = q + p$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)$ вместо $\bigl(A(e)\bigr)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$.
6. Пусть A, $B \in (GL)_r$. Тогда: $(A+B)(e) = A(e) + B(e)$ при: e — базис пространства L; $(A+B)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = A_{i_1,\ldots,i_r}(e) + B_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,N}$.
7. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (GL)_r$. Тогда: $(\lambda A)(e) = \lambda A(e)$ при: e — базис пространства L; $(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = \lambda A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,N}$.
8. Очевидно, $(GL)_r$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

2.3. Тензоры

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L, если A — это геометрический объект степени $q+p$ в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e').$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$.

2. Обозначим через $(TL)^q_p$ множество всех тензоров порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда* $(TL)^q_p$ *— подпространство пространства* $(GL)_{q+p}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(TL)^q_p \subseteq (GL)_{q+p}$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $(GL)_{q+p}$. Докажем, что $\Theta \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\Theta^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = 0 = \Theta^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').$$

3. Пусть A, $B \in (TL)^q_p$. Докажем, что $A+B \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(A+B)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \big(A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) + B^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') + B^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = (A+B)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').\end{gathered}$$

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)^q_p$. Докажем, что $\lambda A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(\lambda A)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \big(\lambda A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \lambda A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = (\lambda A)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e'). \quad \square\end{gathered}$$

Замечание (примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $x \in L$. Очевидно, $[x] \in (TL)^1_0$.

2. Пусть: $\delta^j_i(e) = \delta^j_i$ при: e — базис пространства L, i, $j = \overline{1,N}$. Докажем, что $\delta \in (TL)^1_1$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, i', $j' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\delta^j_i(e)\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^j_i\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \alpha^{j'}_i(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^{j'}_{i'} = \delta^{j'}_{i'}(e').$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*,* e_0 *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: A*,* $B \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = B(e_0)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. Пусть $A_0 \in \mathbb{K}^{(N,q+p)}$*. Обозначим:*

$$A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) = (A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e).$$

Здесь: e *— базис пространства* L*,* $i_1,\dots,i_p$*,* $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$*. Тогда:* $A \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = A_0$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e, e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e, e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0, e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0, e) =$$
$$= B^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e, e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e, e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0, e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0, e) = B^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e).$$

2. Докажем, что $A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') =$$
$$= \big((A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e, e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e, e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0, e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0, e)\big)$$
$$\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') =$$
$$= (A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j'_1}_{j^0_1}(e', e_0)\cdots\alpha^{j'_q}_{j^0_q}(e', e_0)\alpha^{i^0_1}_{i'_1}(e_0, e')\cdots\alpha^{i^0_p}_{i'_p}(e_0, e') = A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\cdots,i'_p}(e').$$

Докажем, что $A(e_0) = A_0$. Пусть $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e_0) = (A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e_0, e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e_0, e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0, e_0)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0, e_0) =$$
$$= (A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\delta^{j_1}_{j^0_1}\cdots\delta^{j_q}_{j^0_q}\delta^{i^0_1}_{i_1}\cdots\delta^{i^0_p}_{i_p} = (A_0)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть e_0 — базис пространства L. Обозначим: $\varphi(A) = A(e_0)$ при $A \in (TL)^q_p$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $(TL)^q_p$ на пространство $\mathbb{K}^{(N,q+p)}$. Тогда: $\dim\big((TL)^q_p\big) = \dim\big(\mathbb{K}^{(N,q+p)}\big) = N^{q+p}$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$. Обозначим:

$$(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}$, $j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $A \otimes B$ — прямое произведение тензоров A, B.

2. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. Обозначим:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}$, $j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\langle A\rangle^m_k$ — свёртка тензора A.

3. Пусть: p, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Обозначим:

$$\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$ — результат транспонирования тензора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes B \in (TL)^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}$.

2. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A_1,\ A_2 \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B)$.

4. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B_1,\ B_2 \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$.

5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$.

6. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$, $p_3,\ q_3 \in \mathbb{Z}_+$, $C \in (TL)^{q_3}_{p_3}$. *Тогда* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

7. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle A \rangle^m_k \in (TL)^{q-1}_{p-1}$.

8. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A,\ B \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle A + B \rangle^m_k = \langle A \rangle^m_k + \langle B \rangle^m_k$.

9. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle \lambda A \rangle^m_k = \lambda \langle A \rangle^m_k$.

10. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} \in (TL)^q_p$.

11. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A,\ B \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A + B]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = [A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} + [B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

12. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[\lambda A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \lambda [A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

Доказательство.

1. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_{p_1+p_2}, j'_1, \ldots, j'_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e,e') = \\ = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e,e') = \\ = A^{j'_1,\ldots,j'_{q_1}}_{i'_1,\ldots,i'_{p_1}}(e')B^{j'_{q_1+1},\ldots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_{p_1+1},\ldots,i'_{p_1+p_2}}(e') = (A \otimes B)^{j'_1,\ldots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_1,\ldots,i'_{p_1+p_2}}(e').\end{gathered}$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big((A_1 + A_2) \otimes B\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \big((A_1)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e) + (A_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \\ = (A_1)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) + (A_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \\ = (A_1 \otimes B + A_2 \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).\end{gathered}$$

3. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big((\lambda A) \otimes B\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \big(\lambda A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \\ = \lambda\big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \big(\lambda(A \otimes B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).\end{gathered}$$

4. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big(A \otimes (B_1 + B_2)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big((B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) + (B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \\ = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) + A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = \\ = (A \otimes B_1 + A \otimes B_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).\end{gathered}$$

5. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}$, $j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A \otimes (\lambda B)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big(\lambda B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) =$$
$$= \lambda\big(A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \big(\lambda(A \otimes B)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

6. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2+p_3}$, $j_1, \dots, j_{q_1+q_2+q_3} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A \otimes B) \otimes C\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) = \big(A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)C^{j_{q_1+q_2+1},\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) =$$
$$= A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big(B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)C^{j_{q_1+q_2+1},\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)\big) = \big(A \otimes (B \otimes C)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e).$$

7. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_{p-1}$, $j'_1, \dots, j'_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e, e') =$$
$$= A^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e, e') =$$
$$= A^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e)\delta^i_j\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e, e') =$$
$$= A^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e)\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_j(e', e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e, e') =$$
$$= A^{j'_1,\dots,j'_{m-1},i',j'_m,\dots,j'_{q-1}}_{i'_1,\dots,i'_{k-1},i',i'_k,\dots,i'_{p-1}}(e') = \big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j'_1,\dots,j'_{q-1}}_{i'_1,\dots,i'_{p-1}}(e').$$

8. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p-1}$, $j_1, \dots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle A + B\rangle^m_k\big)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e) + B^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e) =$$
$$= \big(\langle A\rangle^m_k + \langle B\rangle^m_k\big)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e).$$

9. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p-1}$, $j_1, \dots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle \lambda A\rangle^m_k\big)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e) = \lambda A^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e) = \big(\lambda\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e).$$

10. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') =$$
$$= A^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p)}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') =$$
$$= A^{j'_{\sigma_2(1)},\dots,j'_{\sigma_2(q)}}_{i'_{\sigma_1(1)},\dots,i'_{\sigma_1(p)}}(e') = \big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').$$

11. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_p$, $j_1, \dots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big([A + B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p)}}(e) + B^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p)}}(e) = \big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} + [B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e).$$

12. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_p$, $j_1, \dots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big([\lambda A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) = \lambda A^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(p)}}(e) = \lambda\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e).$$

Утверждение (факультативный материал). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*.*

1. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+,\ A \in (TL)^{q_1}_{p_1},\ p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+,\ B \in (TL)^{q_2}_{p_2},\ \sigma_1(k) = k + p_2$ *при* $k = \overline{1, p_1}$*;* $\sigma_1(k) = k - p_1$ *при* $k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2}$*;* $\sigma_2(k) = k + q_2$ *при* $k = \overline{1, q_1}$*;* $\sigma_2(k) = k - q_1$ *при* $k = \overline{q_1 + 1, q_1 + q_2}$*. Тогда:* $\sigma_1 \in S_{p_1+p_2},\ \sigma_2 \in S_{q_1+q_2}$*,* $B \otimes A = [A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$*.*

2. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+,\ A,\ B \in (TL)^q_p,\ \sigma_1,\ \sigma_3 \in S_p,\ \sigma_2,\ \sigma_4 \in S_q$*. Тогда* $\big[[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big]^{\sigma_4}_{\sigma_3} = [A]^{\sigma_4\sigma_2}_{\sigma_3\sigma_1}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $\sigma_1 \in S_{p_1+p_2}$, $\sigma_2 \in S_{q_1+q_2}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}(B \otimes A)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) &= B^{j_1,\ldots,j_{q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_2}}(e) A^{j_{q_2+1},\ldots,j_{q_2+q_1}}_{i_{p_2+1},\ldots,i_{p_2+p_1}}(e) = A^{j_{1+q_2},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{1+p_2},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) B^{j_1,\ldots,j_{q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_2}}(e) = \\ &= A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1)}}(e) B^{j_{\sigma_2(q_1+1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(p_1+1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e) = \big([A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).\end{aligned}$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Big(\big[[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big]^{\sigma_4}_{\sigma_3}\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) &= \big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_{\sigma_4(1)},\ldots,j_{\sigma_4(q)}}_{i_{\sigma_3(1)},\ldots,i_{\sigma_3(p)}}(e) = A^{j_{\sigma_4(\sigma_2(1))},\ldots,j_{\sigma_4(\sigma_2(q))}}_{i_{\sigma_3(\sigma_1(1))},\ldots,i_{\sigma_3(\sigma_1(p))}}(e) = \\ &= A^{j_{(\sigma_4\sigma_2)(1)},\ldots,j_{(\sigma_4\sigma_2)(q)}}_{i_{(\sigma_3\sigma_1)(1)},\ldots,i_{(\sigma_3\sigma_1)(p)}}(e) = \big([A]^{\sigma_4\sigma_2}_{\sigma_3\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e). \quad \square\end{aligned}$$

Определение (факультативный материал). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, p_k, $q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1, r}$;

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)(A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$ — прямое произведение тензоров $A_1, \ldots, A_r$.

Утверждение (факультативный материал). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 3$*,* p_k*,* $q_k \in \mathbb{Z}_+$*,* $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ *при* $k = \overline{1, r}$*. Тогда:* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r$*,* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)$*.*

Доказательство. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1, r}$.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\big((A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r\big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) &= \Big((A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\cdots(A_{r-1})^{j_{\tilde{q}_{r-2}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_{r-1}}}_{i_{\tilde{p}_{r-2}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_{r-1}}}(e)\Big)(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = \\ &= (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).\end{aligned}$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\big(A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)\big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) &= (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\Big((A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e)\Big) = \\ &= (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e). \quad \square\end{aligned}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in (TL)^1_1$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: $\operatorname{tr}\big(A(e)\big) = A^i_i(e) = \langle A\rangle^1_1(e)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как $\langle A\rangle^1_1 \in (TL)^0_0$, то: $\operatorname{tr}\big(A(e')\big) = \langle A\rangle^1_1(e') = \langle A\rangle^1_1(e) = \operatorname{tr}\big(A(e)\big)$. Так как: $A^{j'}_{i'}(e') = A^j_i(e)\alpha^{j'}_j(e', e)\alpha^i_{i'}(e, e')$ при i', $j' = \overline{1, N}$, то $A(e') = \alpha(e', e)A(e)\alpha(e, e')$. Тогда:

$$\begin{aligned}\det\big(A(e')\big) &= \det\big(\alpha(e', e)A(e)\alpha(e, e')\big) = \det\big(\alpha(e', e)\big)\det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e, e')\big) = \\ &= \det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e, e')\alpha(e', e)\big) = \det\big(A(e)\big)\det(I) = \det\big(A(e)\big).\end{aligned}$$

Выберем базис e_0 пространства L. Обозначим: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big(A(e_0)\big)$, $\det(A) = \det\big(A(e_0)\big)$. Тогда: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big(A(e)\big)$, $\det(A) = \det\big(A(e)\big)$ при: e — базис пространства L.

2.4. Возможные обобщения

1. Можно рассматривать не наборы чисел из поля $\mathbb{K}$, а наборы объектов более сложной природы. Например, базис e линейного пространства L можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$.

2. Можно рассматривать геометрические объекты, определённые не для всех базисов линейного пространства.

3. Можно рассматривать геометрические объекты, у которых разные индексы относятся к разным пространствам. Например, матрицу линейного оператора $A\colon L_1 \implies L_2$ можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1 и тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2.

4. Можно рассматривать тензоры, у которых по крайней мере часть индексов преобразуется с помощью матриц $\bigl\{\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\bigr\}^{i=\overline{1,N}}_{i'=\overline{1,N}}$, $\bigl\{\overline{\alpha^{i'}_i(e',e)}\bigr\}^{i'=\overline{1,N}}_{i=\overline{1,N}}$ (здесь: $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ при $z \in \mathbb{C}$). Например, матрица полуторалинейной формы преобразуется по закону: $A_{i'j'}(e') = A_{ij}(e)\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\alpha^j_{j'}(e,e')$ при i', $j' = \overline{1,N}$.

Лекция 3. Общие сведения о линейных операторах. Матрица линейного оператора

3.1. Общие сведения о линейных операторах

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — функция, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Обозначим, $\ker(F) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\big\}$. Множество $\ker(F)$ называется ядром функции F или множеством нулей функции F или множеством корней функции F. Другое обозначение, $\mathrm{N}(F)$. Очевидно, $\ker(F) = \mathrm{D}\big(F, \{\theta\}\big)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — полулинейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ *— подпространство пространства* $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{Lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{Fun}(L_1, L_2)$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta \colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda \theta_2 = \lambda \Theta(x).$$

3. Пусть A, $B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $A + B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A + B \colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A + B) = L_1$, то $\mathrm{D}(A + B)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = \big(A(x) + A(y)\big) + \big(B(x) + B(y)\big) =$$
$$= \big(A(x) + B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A + B)(x) + (A + B)(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A + B)(x).$$

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\alpha A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\alpha A \colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\alpha A) = L_1$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$(\alpha A)(x + y) = \alpha A(x + y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y).$$

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B_1, B_2 \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$.
2. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.
3. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.
4. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x.$$

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x.$$

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\begin{aligned}\big(B(A_1 + A_2)\big)x = B\big((A_1 + A_2)x\big) = B\big(A_1x + A_2x\big) = B(A_1x) + B(A_2x) = \\ = (BA_1)x + (BA_2)x = (BA_1 + BA_2)x.\end{aligned}$$

4. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x. \quad \square$$

Определение (факультативный материал). Пусть: Q — множество, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть F_1, $F_2 \colon Q \to L$. Обозначим: $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)$. Очевидно: $F_1 + F_2 \colon Q \to L$, $\mathrm{D}(F_1 + F_2) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $F \colon Q \to L$. Обозначим: $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F)$. Очевидно: $\lambda F \colon Q \to L$, $\mathrm{D}(\lambda F) = \mathrm{D}(F)$.

Утверждение (факультативный материал)**.** *Пусть:* Q *— множество,* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*,* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Θ *— нулевой элемент пространства* $\mathrm{Fun}(Q, L)$*. Тогда:*

1. $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$ *при* F_1, $F_2 \colon Q \to L$*;*
2. $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$ *при* F_1, F_2, $F_3 \colon Q \to L$*;*
3. $F + \Theta = F$ *при* $F \colon Q \to L$*;*
4. $F + (-1)F = \Theta|_{\mathrm{D}(F)}$ *при* $F \colon Q \to L$*;*
5. $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$ *при:* α, $\beta \in \mathbb{K}$, $F \colon Q \to L$*;*
6. $1F = F$ *при* $F \colon Q \to L$*;*
7. $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$ *при:* α, $\beta \in \mathbb{K}$, $F \colon Q \to L$*;*
8. $\lambda(F_1 + F_2) = \lambda F_1 + \lambda F_2$ *при:* $\lambda \in \mathbb{K}$, F_1, $F_2 \colon Q \to L$.

Доказательство.

1. Пусть F_1, $F_2 \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}(F_1 + F_2) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2) = \mathrm{D}(F_2) \cap \mathrm{D}(F_1) = \mathrm{D}(F_2 + F_1)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1 + F_2)$. Тогда: $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) = F_2(x) + F_1(x) = (F_2 + F_1)(x)$.

2. Пусть F_1, F_2, $F_3 \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}\big((F_1 + F_2) + F_3\big) = \big(\mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)\big) \cap \mathrm{D}(F_3) = \mathrm{D}(F_1) \cap \big(\mathrm{D}(F_2) \cap \mathrm{D}(F_3)\big) = \mathrm{D}\big(F_1 + (F_2 + F_3)\big)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\big((F_1 + F_2) + F_3\big)$. Тогда: $\big((F_1 + F_2) + F_3\big)(x) = \big(F_1(x) + F_2(x)\big) + F_3(x) = F_1(x) + \big(F_2(x) + F_3(x)\big) = \big(F_1 + (F_2 + F_3)\big)(x)$.

3. Пусть $F \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}(F + \Theta) = \mathrm{D}(F) \cap Q = \mathrm{D}(F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(F + \Theta)$. Тогда: $(F + \Theta)(x) = F(x) + \Theta(x) = F(x) + \theta = F(x)$.

4. Пусть $F \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}\big(F + (-1)F\big) = \mathrm{D}(F) \cap \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\big(F + (-1)F\big)$. Тогда: $\big(F + (-1)F\big)(x) = F(x) + (-1)F(x) = \theta = \Theta(x)$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $F \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}\big((\alpha\beta)F\big) = \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}\big(\alpha(\beta F)\big)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\alpha\beta)F\big)$. Тогда: $\big((\alpha\beta)F\big)(x) = (\alpha\beta)F(x) = \alpha\big(\beta F(x)\big) = \big(\alpha(\beta F)\big)(x)$.

6. Пусть $F \colon Q \to L$. Очевидно, $\mathrm{D}(1F) = \mathrm{D}(F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(1F)$. Тогда: $(1F)(x) = 1F(x) = F(x)$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $F \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}\big((\alpha + \beta)F\big) = \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(\alpha F + \beta F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\alpha + \beta)F\big)$. Тогда: $\big((\alpha + \beta)F\big)(x) = (\alpha + \beta)F(x) = \alpha F(x) + \beta F(x) = (\alpha F + \beta F)(x)$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, F_1, $F_2 \colon Q \to L$. Очевидно: $\mathrm{D}\big(\lambda(F_1 + F_2)\big) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2) = \mathrm{D}(\lambda F_1 + \lambda F_2)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\big(\lambda(F_1 + F_2)\big)$. Тогда: $\big(\lambda(F_1 + F_2)\big)(x) = \lambda\big(F_1(x) + F_2(x)\big) = \lambda F_1(x) + \lambda F_2(x) = (\lambda F_1 + \lambda F_2)(x)$. $\square$

Утверждение (факультативный материал)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* Θ *— нулевой элемент пространства* $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$*. Тогда:*

1. $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$*;*
2. $\Theta \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*;*
3. $A + B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$ *при* A*,* $B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*;*
4. $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$ *при:* $\alpha \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.
1. Очевидно, $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.
2. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $\Theta\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть x, $y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.
Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.
3. Пусть A, $B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $A + B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $A + B\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A + B) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$. Так как $\mathrm{D}(A + B) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$, то $\mathrm{D}(A + B)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A+B)$. Тогда: $(A+B)(x+y) = A(x+y)+B(x+y) = \big(A(x)+A(y)\big) + \big(B(x)+B(y)\big) = \big(A(x)+B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A + B)(x) + (A + B)(y)$.
Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A + B)$. Тогда: $(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A + B)(x)$.
4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $\alpha A\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть x, $y \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(x + y) = \alpha A(x + y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y)$.
Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x)$. □

Утверждение (факультативный материал)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*
1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* B_1*,* $B_2 \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда:* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
2. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*
3. Пусть: A_1*,* $A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1+BA_2)} = BA_1 + BA_2$*.*
4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $\lambda \neq 0$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$*.*

Доказательство.
1. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1 + B_2)\big\} = \\ = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \big(Ax \in \mathrm{D}(B_1) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} = \\ = \Big\{x\colon \big(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1)\big) \wedge \big(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} = \\ = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(B_1A) \wedge x \in \mathrm{D}(B_2A)\big\} = \mathrm{D}(B_1A + B_2A).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big)$. Тогда: $\big((B_1 + B_2)A\big)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x$.
2. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\big((\lambda B)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(\lambda B)\big\} = \\ = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\lambda B)A\big)$. Тогда: $\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$.
3. Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(BA_1)$, $x \in \mathrm{D}(BA_2)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $A_1x \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_1x + A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $(A_1 + A_2)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$. Итак, $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$.
Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $(BA_1 + BA_2)x = (BA_1)x + (BA_2)x = B(A_1x) + B(A_2x) = B\big(A_1x + A_2x\big) = B\big((A_1 + A_2)x\big) = \big(B(A_1 + A_2)\big)x$.
4. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\lambda A) \wedge (\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)\big\} = \\ = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$. Тогда: $\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$*. Тогда* $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big)$*.*

Доказательство. Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение Q подпространства $\ker(A)$ до подпространства $\mathrm{D}(A)$. Тогда: Q — подпространство пространства L_1, $\mathrm{D}(A) = \ker(A) + Q$; $\ker(A)$, Q — линейно независимые подпространства. Следовательно: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) = \dim\big(\ker(A)\big) + \dim(Q)$, $\ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$.

Очевидно: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q = Q$, $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A)$, $\ker(A|_Q) = \ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$.

Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Так как: $x \in \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A) = \ker(A) \dot{+} Q$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $y = Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \theta_2 + A|_Q\, x_2 = A|_Q\, x_2 \in \mathrm{R}(A|_Q)$. Следовательно, $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(A|_Q)$. Так как $\mathrm{R}(A|_Q) \subseteq \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$.

Так как $\ker(A|_Q) = \{\theta_1\}$, то $A|_Q$ — обратимый оператор. Тогда: $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}(A|_Q)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A|_Q)\big) = \dim(Q) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_1)$. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big)$. Будем говорить, что $\mathrm{rank}(A)$ — ранг оператора A.

Очевидно:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim(L_2),$$
$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \leqslant \dim(L_1).$$

Пусть $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big).$$

Теорема (1-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$*,* $\dim(L_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = L_2 \iff \ker(A) = \{\theta_1\}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $\mathrm{R}(A) = L_2$. Так как $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$, то: $\dim\big(\ker(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim(L_1) - \dim(L_2) = 0$. Так как $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда A — обратимый оператор. Следовательно: $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\dim(L_2) \neq +\infty$, то $\mathrm{R}(A) = L_2$. □

3.2. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \colon L_1 \implies L_2$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Обозначим: $[A]_i^j(f, e) = [Ae_i]^j(f)$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Очевидно, $[A](f, e) \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $[A](f, e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисах f, e.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_i^j(e) = [Ae_i]^j(e)$ при i, $j = \overline{1, N}$. Очевидно, $[A](e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисе e.

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Докажем, что $[\Theta](f, e) = \tilde{\Theta}$ (здесь $\tilde{\Theta}$ — нулевая матрица из множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда: $[\Theta]_i^j(f, e) = [\Theta e_i]^j(f) = [\theta_2]^j(f) = 0$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, f — базисы пространства L. Докажем, что $[I](f,e) = \alpha(f,e)$. Пусть $i,\ j = \overline{1,N}$. Тогда: $[I]_i^j(f,e) = [Ie_i]^j(f) = [e_i]^j(f) = \alpha_i^j(f,e)$.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Тогда: $[I](e) = [I](e,e) = \alpha(e,e) = \tilde{I}$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N\times N}$).

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.*

1. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$.

2. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j$ при $x \in L_1$.

4. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $Ax = Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор, $[A](f,e) = Q$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = [x]^i(e)A(e_i) = [x]^i(e)\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j.$$

2. Докажем, что: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j[x+y]^i(e)f_j = Q_i^j\big([x]^i(e) + [y]^i(e)\big)f_j = Q_i^j[x]^i(e)f_j + Q_i^j[y]^i(e)f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j[\lambda x]^i(e)f_j = Q_i^j\big(\lambda[x]^i(e)\big)f_j = \lambda\big(Q_i^j[x]^i(e)f_j\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1,N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j[e_i]^k(e)f_j = Q_k^j\delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1,N_2}$.

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = \overline{[x]^i(e)}A(e_i) = \overline{[x]^i(e)}\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j.$$

4. Докажем, что: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j\overline{[x+y]^i(e)}f_j = Q_i^j\overline{\big([x]^i(e) + [y]^i(e)\big)}f_j = Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j + Q_i^j\overline{[y]^i(e)}f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j \overline{[\lambda x]^i(e)} f_j = Q_i^j \overline{\big(\lambda [x]^i(e)\big)} f_j = \overline{\lambda}\big(Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j\big) = \overline{\lambda} A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e) f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j \overline{[e_i]^k(e)} f_j = Q_k^j \overline{\delta_i^k} f_j = Q_k^j \delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.

Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$Q_i^j [x]^i(e) f_j = \big(Q[x](e)\big)^j f_j = \big(Q h_e(x)\big)^j f_j = \Big(\hat{Q}\big(h_e(x)\big)\Big)^j f_j = h_f^{-1}\Big(\hat{Q}\big(h_e(x)\big)\Big) = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x.$$

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $Q = [A](f,e)$. Тогда: $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ при $x \in L_1$. Следовательно: $Ax = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x$ при $x \in L_1$. Тогда $A = h_f^{-1}\hat{Q}h_e$.

Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $A = h_f^{-1}\hat{Q}h_e$. Тогда: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x$ при $x \in L_1$. Следовательно: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q = [A](e,f)$.

1. Докажем, что $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2$$

(здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2}$). Обозначим, $\tilde{x} = h_e x$. Тогда:

$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2,\ x = h_e^{-1}\tilde{x};$$
$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}),\ x = h_e^{-1}\tilde{x};$$
$$x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big].$$

Пусть $x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$. Тогда существует столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q})$, $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2,\ x = h_e^{-1}\tilde{x};$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$

$$x \in L_1,\ (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in \ker(A).$$

Пусть $N_1 = N_2$. Докажем, что $\ker(A) = \{\theta_1\} \iff \det(Q) \neq 0$. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда: $\ker(\hat{Q}) = h_e\big[\ker(A)\big] = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно, $\det(Q) \neq 0$.

Пусть $\det(Q) \neq 0$. Тогда $\ker(\hat{Q}) = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно: $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big] = \{\theta_1\}$.

2. Очевидно:

$$\mathrm{R}(A) = A[L_1] = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)[L_1] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[h_e[L_1]\big]\Big] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[\mathbb{K}^{N_1}\big]\Big] = h_f^{-1}\big[L(Q_1, \dots, Q_{N_1})\big] =$$
$$= L(h_f^{-1}Q_1, \dots, h_f^{-1}Q_{N_1}).$$

Так как $\mathbb{K}^{N_2} \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$, то:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\Big(h_f^{-1}\big[L(Q_1, \dots, Q_{N_1})\big]\Big) = \dim\big(L(Q_1, \dots, Q_{N_1})\big) = \mathrm{rank}(Q).$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^N$. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $[x]^j(e) = x^j$ при $j = \overline{1, N}$. Следовательно, $[x](e) = x$. Тогда $h_e x = x$. Следовательно, $h_e = I$ (здесь I — единичная функция на множестве $\mathbb{K}^N$).

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.*

1. Пусть: $A, B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = [B](f,e)$. Тогда $A = B$.

2. Пусть $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Существует оператор A, удовлетворяющий условиям: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть $A, B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Тогда $[A+B](f,e) = [A](f,e) + [B](f,e)$.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Тогда $[\lambda A](f,e) = \lambda[A](f,e)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = [B]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = Bx.$$

2. Обозначим: $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](e,f) = Q$.
3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(A+B)e_i = [A+B]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$(A+B)e_i = Ae_i + Be_i = [A]_i^j(f,e)f_j + [B]_i^j(f,e)f_j = \big([A]_i^j(f,e) + [B]_i^j(f,e)\big)f_j =$$
$$= \big([A](f,e) + [B](f,e)\big)_i^j f_j.$$

Тогда: $[A+B]_i^j(f,e) = \big([A](f,e) + [B](f,e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$.

4. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(\lambda A)e_i = [\lambda A]_i^j(f, e)f_j$. С другой стороны:

$$(\lambda A)e_i = \lambda A(e_i) = \lambda\big([A]_i^j(f, e)f_j\big) = \big(\lambda[A]_i^j(f, e)\big)f_j = \big(\lambda[A](f, e)\big)_i^j f_j.$$

Тогда: $[\lambda A]_i^j(f, e) = \big(\lambda[A](f, e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$.

Пусть: e_0 — базис пространства L_1, f_0 — базис пространства L_2. Обозначим: $\varphi(A) = [A](f_0, e_0)$ при $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ на пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $\dim\big(\mathrm{Lin}(L_1, L_2)\big) = \dim(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}) = N_1 N_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* L_3 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_3 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_3) = N_3$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*,* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*,* g *— базис пространства* L_3*. Тогда* $[BA](g, e) = [B](g, f)[A](f, e)$*.*

Доказательство. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(BA)e_i = [BA]_i^k(g, e)g_k$. С другой стороны:

$$(BA)e_i = B(Ae_i) = B\big([A]_i^j(f, e)f_j\big) = [A]_i^j(f, e)B(f_j) = [A]_i^j(f, e)\big([B]_j^k(g, f)g_k\big) =$$
$$= \big([B]_j^k(g, f)[A]_i^j(f, e)\big)g_k = \big([B](g, f)[A](f, e)\big)_i^k g_k.$$

Тогда: $[BA]_i^k(g, e) = \big([B](g, f)[A](f, e)\big)_i^k$ при $k = \overline{1, N_3}$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L_1*,* f*,* f' *— базисы пространства* L_2*.*

1. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— линейный оператор. Тогда* $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\alpha_{i'}^i(e, e')$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}$ ($[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\alpha(e, e')$).

2. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор. Тогда* $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}$ ($[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\overline{\alpha(e, e')}$).

Доказательство.

1. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha_{i'}^i(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \alpha_{i'}^i(e, e')[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$= \alpha_{i'}^i(e, e')\big(\alpha_j^{j'}(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\alpha_{i'}^i(e, e').$$

2. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha_{i'}^i(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$= \overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}\big(\alpha_j^{j'}(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

Пусть: e — базис пространства L_1, $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $\big\{[A]_i(f, e)\big\}_f \in (TL_2)_0^1$.

Пусть: f — базис пространства L_2, $j = \overline{1, N_2}$. Очевидно, $\big\{[A]^j(f, e)\big\}_e \in (TL_1)_1^0$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Очевидно, $\big\{[A](e)\big\}_e \in (TL)^1_1$. Тогда: $\operatorname{tr}\big([A](e')\big) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det\big([A](e')\big) = \det\big([A](e)\big)$ при: e, e' — базисы пространства L. Выберем базис e_0 пространства L. Обозначим: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big([A](e_0)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e_0)\big)$. Тогда: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e)\big)$ при: e — базис пространства L.

Лекция 4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

4.1. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$. Будем говорить, что Q — инвариантное подпространство оператора A, если: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] \subseteq Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L, L)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q = Q$, $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq Q$. Следовательно, $A|_Q \in \mathrm{Lin}(Q, Q)$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, Q — подпространство пространства L, $A|_Q \in \mathrm{Lin}(Q, Q)$. Тогда: Q — подпространство пространства L, $Q = \mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] = \mathrm{R}(A|_Q) \subseteq Q$. Следовательно, Q — инвариантное подпространство оператора A.

2. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — инвариантные подпространства оператора A. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r$ — инвариантное подпространство оператора A.

Очевидно, $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Следовательно: $x = x_1 + \cdots + x_r \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = A(x_1 + \cdots + x_r) = Ax_1 + \cdots + Ax_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$.

3. Пусть A, $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Будем говорить, что операторы A, B коммутируют, если $AB = BA$. Обозначим, $[A, B] = AB - BA$. Будем говорить, что $[A, B]$ — коммутатор операторов A, B. Очевидно, операторы A, B коммутируют тогда и только тогда, когда $[A, B] = \Theta$.

Пусть операторы A, B коммутируют. Тогда $\ker(B)$, $\mathrm{R}(B)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Очевидно: $\ker(B)$ — подпространство пространства L, $\ker(B) \subseteq L = \mathrm{D}(A)$. Пусть $x \in \ker(B)$. Тогда: $x \in L$, $Bx = \theta$. Следовательно: $Ax \in L$, $B(Ax) = A(Bx) = A\theta = \theta$. Тогда $Ax \in \ker(B)$.

Очевидно: $\mathrm{R}(B)$ — подпространство пространства L, $\mathrm{R}(B) \subseteq L = \mathrm{D}(A)$. Пусть $x \in \mathrm{R}(B)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = Bu$. Следовательно: $Au \in L$, $Ax = A(Bu) = B(Au)$. Тогда $Ax \in \mathrm{R}(B)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$.

1. Множество Q является инвариантным подпространством оператора A тогда и только тогда, когда: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда $e_{i_k} \in Q$. Следовательно, $Ae_{i_k} \in Q$. Тогда: $[Ae_{i_k}]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Следовательно: $\tilde{A}^j_{i_k} = [Ae_{i_k}]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Очевидно: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq L = \mathrm{D}(A)$. Пусть $x \in Q$. Тогда: $[x]^i(e) = 0$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Следовательно:

$$Ax = \tilde{A}^j_i [x]^i(e) e_j = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{N} \tilde{A}^j_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_j = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_{i_m} \in Q.$$

2. Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $\bigl[A|_Q\bigr]_k^m(e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) = \tilde{A}_{i_k}^{i_m}$ при k, $m=\overline{1,r}$.

Пусть $k=\overline{1,r}$. Очевидно, $A|_Q\,e_{i_k} = \sum\limits_{m=1}^{r}\bigl[A|_Q\bigr]_k^m(e_{i_1},\ldots,e_{i_r})e_{i_m}$. Так как Q — инвариантное подпространство оператора A, то: $\tilde{A}_{i_k}^{j}=0$ при: $j=\overline{1,N}$, $j\notin\{i_1,\ldots,i_r\}$. Тогда:

$$A|_Q\,e_{i_k} = Ae_{i_k} = \tilde{A}_{i_k}^{j}e_j = \sum_{m=1}^{r}\tilde{A}_{i_k}^{i_m}e_{i_m}.$$

Следовательно: $\bigl[A|_Q\bigr]_k^m(e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) = \tilde{A}_{i_k}^{i_m}$ при $m=\overline{1,r}$.

4.2. Собственные подпространства линейного оператора

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$.

1. Пусть $\lambda\in\mathbb{K}$. Тогда:

$$\mathrm{D}(A-\lambda I)=\mathrm{D}(A)\cap\mathrm{D}(I)=\mathrm{D}(A)\cap L=\mathrm{D}(A).$$

Пусть $x\in\mathrm{D}(A-\lambda I)$. Тогда:

$$(A-\lambda I)x = Ax-\lambda I(x) = Ax-\lambda x.$$

Очевидно:

$$\ker(A-\lambda I)=\bigl\{x\colon x\in\mathrm{D}(A-\lambda I)\wedge(A-\lambda I)x=\theta\bigr\}=\bigl\{x\colon x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax-\lambda x=\theta\bigr\}=$$
$$=\bigl\{x\colon x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax=\lambda x\bigr\}.$$

Обозначим: $H_A(\lambda)=\ker(A-\lambda I)$, $g_A(\lambda)=\dim\bigl(\ker(A-\lambda I)\bigr)$.

2. Пусть λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{K}$. Тогда $\ker(A-\lambda_2 I)$ — инвариантное подпространство оператора $A-\lambda_1 I$.

Очевидно: $\ker(A-\lambda_2 I)$ — подпространство пространства L,

$$\ker(A-\lambda_2 I)\subseteq\mathrm{D}(A-\lambda_2 I)=\mathrm{D}(A)=\mathrm{D}(A-\lambda_1 I).$$

Пусть $x\in\ker(A-\lambda_2 I)$. Тогда $Ax=\lambda_2 x$. Следовательно:

$$(A-\lambda_1 I)x = Ax-\lambda_1 x = \lambda_2 x-\lambda_1 x = (\lambda_2-\lambda_1)x\in\ker(A-\lambda_2 I).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$.

1. Будем говорить, что λ — регулярная точка оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$.
2. Будем говорить, что λ — точка спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}\vee\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.
3. Будем говорить, что λ — точка непрерывного спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$. Обозначим через $\mathrm{SC}(A)$ множество всех точек непрерывного спектра оператора A.
4. Будем говорить, что λ — собственное значение оператора A (λ — точка дискретного спектра оператора A), если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Обозначим через $\mathrm{SD}(A)$ множество

всех собственных значений оператора A. Очевидно, λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда:

$$\lambda \in \mathbb{K},\ \exists x\bigl(x \in \ker(A-\lambda I) \wedge x \neq \theta\bigr);$$
$$\lambda \in \mathbb{K},\ \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax-\lambda x = \theta \wedge x \neq \theta\bigr);$$
$$\lambda \in \mathbb{K},\ \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \lambda x \wedge x \neq \theta\bigr).$$

5. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x \in \ker(A-\lambda I)$, $x \neq \theta$. Очевидно, x является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, тогда и только тогда, когда:

$$x \in \mathrm{D}(A),\ Ax-\lambda x = \theta,\ x \neq \theta;$$
$$x \in \mathrm{D}(A),\ Ax = \lambda x,\ x \neq \theta.$$

6. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\ker(A-\lambda I)$ — собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.

7. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\dim\bigl(\ker(A-\lambda I)\bigr)$ — геометрическая кратность собственного значения λ. Очевидно, $\dim\bigl(\ker(A-\lambda I)\bigr) \in \overline{\mathbb{N}}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq +\infty$; $A \in \mathrm{Lin}(L,L)$. Тогда $\mathrm{SC}(A) = \varnothing$.

Предположим, что $\mathrm{SC}(A) \neq \varnothing$. Тогда существует число λ, удовлетворяющее условию $\lambda \in \mathrm{SC}(A)$. Следовательно: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I) = \{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I) \neq L$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(L) \neq +\infty$, $A-\lambda I \in \mathrm{Lin}(L,L)$, $\ker(A-\lambda I) = \{\theta\}$, то $\mathrm{R}(A-\lambda I) = L$. Итак, $\mathrm{SC}(A) = \varnothing$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L,L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, $i = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Справедливо утверждение: $e_i \in \ker(A-\lambda I)$ тогда и только тогда, когда: $\tilde{A}_i^j = \lambda\delta_i^j$ при $j = \overline{1,N}$.

Пусть $e_i \in \ker(A-\lambda I)$. Тогда $Ae_i = \lambda e_i$. Следовательно: $\tilde{A}_i^j = [Ae_i]^j(e) = [\lambda e_i]^j(e) = \lambda[e_i]^j(e) = \lambda\delta_i^j$ при $j = \overline{1,N}$.

Пусть: $\tilde{A}_i^j = \lambda\delta_i^j$ при $j = \overline{1,N}$. Тогда: $Ae_i = \tilde{A}_i^j e_j = (\lambda\delta_i^j)e_j = \lambda e_i$. Следовательно, $e_i \in \ker(A-\lambda I)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L,L)$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*,* $H_1, \ldots, H_r$ *— соответствующие собственные подпространства. Тогда* $H_1, \ldots, H_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Докажем утверждение, используя индукцию. Очевидно, утверждение справедливо при $r = 1$.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Рассмотрим утверждение при $r = r_0+1$. Пусть: $x_1 \in H_1, \ldots, x_{r_0+1} \in H_{r_0+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1} x_k = \theta$. Тогда:

$$(A-\lambda_{r_0+1}I)\sum_{k=1}^{r_0+1} x_k = (A-\lambda_{r_0+1}I)\theta,$$

$$\sum_{k=1}^{r_0}(\lambda_k - \lambda_{r_0+1})x_k = \theta.$$

Так как $H_1, \ldots, H_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то: $(\lambda_k - \lambda_{r_0+1})x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как: $\lambda_k \neq \lambda_{r_0+1}$ при $k = \overline{1, r_0}$, то: $x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1} x_k = \theta$, то $x_{r_0+1} = \theta$. □

4.3. Общие сведения о полиномах

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$. Очевидно, $F\colon \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$*,* $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$*,* $Q \subseteq \mathbb{K}$*,* Q *— бесконечное множество,* $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k x^k$ *при* $x \in Q$*. Тогда:* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N}$*.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N_1 \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$*,* $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$*,* $N_2 \in \mathbb{Z}_+$*,* $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$*,* $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$*,* $Q \subseteq \mathbb{K}$*,* Q *— бесконечное множество,* $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k x^k$ *при* $x \in Q$*. Тогда:* $N_1 = N_2$*,* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N_1}$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Очевидно, $F\colon \operatorname{Lin}(L, L) \implies \operatorname{Lin}(L, L)$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\operatorname{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L) \neq 0$*;* $N \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$*,* $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$*,* $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k A^k$ *при* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда:* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N}$*.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L) \neq 0$*;* $N_1 \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$*,* $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$*,* $N_2 \in \mathbb{Z}_+$*,* $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$*,* $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$*,* $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k A^k$ *при* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда:* $N_1 = N_2$*,* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N_1}$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; F — полином на множестве $\operatorname{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* F *— полином на множестве* $\mathbb{K}$*,* $\deg(F) \neq 0$*.*

1. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— различные корни полинома* F*,* $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие кратности. Тогда* $m_1 + \cdots + m_r \leqslant \deg(F)$*.*
2. *Справедливы утверждения:* $\ker(F)$ *— конечное множество,* $\operatorname{card}\bigl(\ker(F)\bigr) \leqslant \deg(F)$*.*

Определение. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Будем говорить, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, если для любой функции F, удовлетворяющей условиям: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$, справедливо утверждение: $\ker(F) \neq \varnothing$.

Замечание. Очевидно, $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым полем. Очевидно, $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым полем.

Теорема (основная теорема алгебры; будет доказана в 3-ем семестре)**.** *Справедливо утверждение: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле.*

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, F — полином на множестве $\mathbb{C}$, $\deg(F) \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_r$ — все различные корни полинома F, $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие кратности. Тогда $m_1 + \cdots + m_r = \deg(F)$.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}_2$. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$, если: $\tilde{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_1$, F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\lambda\tilde{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$. Функция $\tilde{F}$ является продолжением полинома F на множество $\mathbb{K}_2$ тогда и только тогда, когда: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, $\tilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathbb{K}_1$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда:

$$\ker(F) = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge F(x) = 0\bigr\} = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \mathbb{K}_2 \wedge \tilde{F}(x) = 0\bigr\} = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1.$$

Очевидно: $\ker(F) \subseteq \ker(\tilde{F})$; $\ker(F) = \ker(\tilde{F})$ тогда и только тогда, когда $\ker(\tilde{F}) \subseteq \mathbb{K}_1$. Пусть $x_0 \in \ker(F)$. Очевидно, число m является кратностью числа x_0 как корня полинома $\tilde{F}$ тогда и только тогда, когда число m является кратностью числа x_0 как корня полинома F.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\operatorname{Lin}(L, L)$, если: $\tilde{F}(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Пусть: F — полином на множестве $\operatorname{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}$, если: $\tilde{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\lambda\tilde{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\tilde{F}_1\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}$. Функция $\tilde{F}$ является продолжением полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$ тогда и только тогда, когда: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, $\tilde{F}(xI) = F(x)I$ при $x \in \mathbb{K}$.

4.4. Характеристический полином линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$.

Пусть $m = \overline{1, N}$. Обозначим: $X_{m,0}(\tilde{A}) = \tilde{A}_m$, $X_{m,1}(\tilde{A}) = \tilde{I}_m$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N\times N}$).

Обозначим через μ_N множество всех функций σ, удовлетворяющих условию: $\sigma \colon \{1, \ldots, N\} \Longrightarrow \{0, 1\}$.

Пусть $k = \overline{0, N}$. Обозначим через $\mu_{N,k}$ множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: $\sigma \in \mu_N$, $\sigma(1) + \cdots + \sigma(N) = k$. Обозначим:

$$\alpha_k(\tilde{A}) = (-1)^k \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr).$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*,* $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k$.

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \det\bigl(\tilde{A}_1 + (-\lambda)\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{A}_N + (-\lambda)\tilde{I}_N\bigr) = \\
= \sum_{\sigma\in\mu_N} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)(-\lambda)^{\sigma(1)+\cdots+\sigma(N)} = \\
= \sum_{k=0}^{N} \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)(-\lambda)^k = \\
= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \Biggl(\sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)\Biggr)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k. \quad \square
\end{gathered}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\alpha_0(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_N) = \det(\tilde{A}); \\
\alpha_{N-1}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_{m-1}, \tilde{A}_m, \tilde{I}_{m+1}, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \tilde{A}_m^m = \\
= (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(\tilde{A}); \\
\alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^N \det(\tilde{I}) = (-1)^N.
\end{gathered}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Обозначим: $F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\bigl([A - \lambda I](e)\bigr) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k.$$

Так как: $\alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N \neq 0$, то: F_A — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\deg(F_A) = N$. Обозначим через $a_0(A), \ldots, a_N(A)$ коэффициенты полинома F_A. Тогда:

$$a_k(A) = \alpha_k(\tilde{A}), \quad k = \overline{0, N};$$
$$a_0(A) = \alpha_0(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \det(A);$$
$$a_{N-1}(A) = \alpha_{N-1}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}(A);$$
$$a_N(A) = \alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N.$$

Будем говорить, что F_A — характеристический полином оператора A.

Обозначим через $\tilde{F}_A$ продолжение полинома F_A на множество $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde{F}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_k(A)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}).$$

Обозначим через $\hat{F}_A$ продолжение полинома F_A на $\mathrm{Lin}(L, L)$. Пусть $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\hat{F}_A(B) = \sum_{k=0}^{N} a_k(A)B^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})B^k.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Очевидно:

$$\mathrm{SD}(A) = \bigl\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}\bigr\} = \Bigl\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \det\bigl([A - \lambda I](e)\bigr) = 0\Bigr\} =$$
$$= \bigl\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge F_A(\lambda) = 0\bigr\} = \ker(F_A).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \ker(\tilde{F}_A)$. Обозначим, $m_A(\lambda) = 0$. Пусть $\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)$. Обозначим через $m_A(\lambda)$ кратность числа λ как корня полинома $\tilde{F}_A$. Тогда $m_A(\lambda) = \overline{1, N}$. Пусть $\lambda \in \ker(F_A)$. Тогда $m_A(\lambda)$ — кратность числа λ как корня полинома F_A. Будем говорить, что $m_A(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ.

Так как: $N \neq 0$, $\deg(\tilde{F}_A) = N$, то: $\ker(\tilde{F}_A)$ — конечное множество, $\operatorname{card}\bigl(\ker(\tilde{F}_A)\bigr) \leqslant N$.

Пусть $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$. Так как: $N \neq 0$, $\deg(\tilde{F}_A) = N$, то $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$.

Пусть $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**. Так как: $\tilde{F}_A$ — полином на множестве $\mathbb{C}$, $N \neq 0$, $\deg(\tilde{F}_A) = N$, то: $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$.

Так как: $N \neq 0$, $\deg(F_A) = N$, то: $\ker(F_A)$ — конечное множество, $\operatorname{card}\bigl(\ker(F_A)\bigr) \leqslant N$.

Пусть $\ker(F_A) \neq \varnothing$. Так как: $N \neq 0$, $\deg(F_A) = N$, то $\sum\limits_{\lambda \in \ker(F_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$.

Пусть: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$, $\ker(F_A) = \ker(\tilde{F}_A)$. Следовательно: $\ker(F_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(F_A)} m_A(\lambda) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* λ_0 *— собственное значение оператора* A*. Тогда* $g_A(\lambda_0) \leqslant m_A(\lambda_0)$*.*

Доказательство. Обозначим: $H = H_A(\lambda_0)$, $g = g_A(\lambda_0)$, $m = m_A(\lambda_0)$. Очевидно, $g = \overline{1, N}$. Так как: $g \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = g$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_g$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_g \in H$, $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы.

Пусть $g = N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N = g$, то $e_1, \ldots, e_g$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0 \delta_i^j$ при i, $j = \overline{1, g}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g.$$

Следовательно, $m = g$.

Пусть $g \neq N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы пространства L, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$, $g < N$, то существуют векторы $e_{g+1}, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0 \delta_i^j$ при: $i = \overline{1, g}$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g \det\Big(\{\tilde{A}_{g+i}^{g+j} - \lambda \delta_{g+i}^{g+j}\}_{i=\overline{1,N-g}}^{j=\overline{1,N-g}}\Big).$$

Следовательно, $m \geqslant g$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* Q_k *— подпространство пространства* L*,* $N_k \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q_k) = N_k$ *при* $k = \overline{1, r}$*;* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства. Справедливы утверждения:*

1. $Q_1 + \cdots + Q_r = L \iff N_1 + \cdots + N_r = N$*;*

2. $Q_1 + \cdots + Q_r = L$ *тогда и только тогда, когда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* $e_1, \ldots, e_N$ *— базис пространства* L*,* $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$*.*

Доказательство.

1. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то:

$$N_1 + \cdots + N_r = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(L) = N.$$

Пусть $N_1 + \cdots + N_r = N$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = N_1 + \cdots + N_r = N.$$

Так как: $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L, $N \neq +\infty$, $\dim(L) = N$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = L$.

2. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как: $N_k \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_k) = N_k$, то существуют векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r = L$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис пространства L. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, N_k}$. Так как $e_{k,m} \in Q_k$, то $e_{k,m} \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$.

Пусть: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$. Тогда: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Следовательно: $L = L(e_1, \ldots, e_N) \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq L$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*.*

1. Пусть: $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in \operatorname{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*. Тогда:* $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$*.*

2. Пусть: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$*. Тогда:* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in \operatorname{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Доказательство.

1. Так как: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$. Так как $\forall \lambda \in \operatorname{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$, то: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$. Тогда: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

2. Так как: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$, то: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \mathbb{K}$. Тогда: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \operatorname{SD}(A)$. Следовательно:

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \operatorname{SD}(A)$, $g_A(\lambda_0) \neq m_A(\lambda_0)$. Тогда:

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\forall \lambda \in \operatorname{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$. □

Теорема (теорема Гамильтона—Кэли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\hat{F}_A(A) = \Theta$*.*

Доказательство. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть k, $i = \overline{1, N}$. Обозначим: $M_i^k(\lambda) = (-1)^{k+i}\overline{\Delta}_i^k(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда M_i^k — полином на множестве $\mathbb{K}$. Обозначим через $\hat{M}_i^k$ продолжение полинома M_i^k на множество $\operatorname{Lin}(L, L)$.

Пусть: k, $j = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим:

$$Q = \begin{pmatrix} (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^1 \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k-1} \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k+1} \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^N \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\delta^j_k F_A(\lambda) = \det(Q) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i(Q) Q^k_i = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i (\tilde{A} - \lambda \tilde{I})(\tilde{A} - \lambda \tilde{I})^j_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)(\tilde{A}^j_i - \lambda \delta^j_i) = \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)(\tilde{A}^j_i \lambda^0 - \delta^j_i \lambda^1).$$

Пусть: $k,\ j = \overline{1, N}$, $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\delta^j_k \hat{F}_A(B) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)(\tilde{A}^j_i B^0 - \delta^j_i B^1) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i B).$$

Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A) e_j = \tilde{A}^j_i I(e_j) - \delta^j_i A(e_j) = \tilde{A}^j_i e_j - A e_i = \theta.$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A) e_k = \big(\delta^j_k \hat{F}_A(A)\big) e_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A) \right) e_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)\big((\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A) e_j\big) = \theta.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A) x = \hat{F}_A(A)\big([x]^k(e) e_k\big) = [x]^k(e) \hat{F}_A(A)(e_k) = \theta.$$

Итак, $\hat{F}_A(A) = \Theta$. $\square$

Лекция 5. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме

5.1. Циклический базис подпространства $\ker_\infty(A)$ для оператора A

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$.

Так как $Q_1 \subseteq Q_2$, то $\dim(Q_1) \leqslant \dim(Q_2)$.

Пусть $Q_1 = Q_2$. Тогда $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$.

Пусть $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$. Так как: $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $\ker_k(A) = \ker(A^k)$, $\mathrm{R}_k(A) = \mathrm{R}(A^k)$. Тогда $\ker_k(A)$, $\mathrm{R}_k(A)$ — подпространства пространства L. Так как: $N \neq +\infty$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A^k)\bigr) = \dim(L) = N$, то $\dim\bigl(\ker_k(A)\bigr) + \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr) = N$ (**это не значит, что** $\ker_k(A) + \mathrm{R}_k(A) = L$). Так как $[A, A^k] = \Theta$, то $\ker_k(A)$, $\mathrm{R}_k(A)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Очевидно:

$$\ker_0(A) = \ker(A^0) = \ker(I) = \{\theta\},$$
$$\mathrm{R}_0(A) = \mathrm{R}(A^0) = \mathrm{R}(I) = L,$$
$$\ker_1(A) = \ker(A^1) = \ker(A),$$
$$\mathrm{R}_1(A) = \mathrm{R}(A^1) = \mathrm{R}(A).$$

Обозначим: $\ker_\infty(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \ker_k(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{R}_k(A)$. Тогда $\ker_\infty(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) \subseteq L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*.*

1. Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $m = \overline{0, k}$*. Тогда* $A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr] = \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$*. Пусть:* $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $m \in \mathbb{Z}$*,* $m \geqslant k$*. Тогда* $A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr] = \{\theta\}$*. Пусть* k*,* $m \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда* $A^m\bigl[\mathrm{R}_k(A)\bigr] = \mathrm{R}_{k+m}(A)$*.*

2. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда:* $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$*,* $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subseteq \mathrm{R}_k(A)$*.*

3. Существует число h*, удовлетворяющее условиям:* $h \in \mathbb{Z}_+$*;* $\ker_k(A) \subset \ker_{k+1}(A)$*,* $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subset \mathrm{R}_k(A)$ *при* $k = \overline{0, h-1}$*;* $\ker_k(A) = \ker_{k+1}(A)$*,* $\mathrm{R}_{k+1}(A) = \mathrm{R}_k(A)$ *при:* $k \in \mathbb{Z}$*,* $k \geqslant h$*. Будем говорить, что* h *— высота оператора* A*. Очевидно, высота оператора* A *определяется однозначно.*

4. Пусть k*,* $m \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда:*

$$\dim\bigl(\ker_k(A) \cap R_m(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_{k+m}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_m(A)\bigr).$$

5. Пусть: $k \in \mathbb{N}$*,* $m = \overline{0, h-1}$*. Тогда* $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) \neq \{\theta\}$*. Пусть:* $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $m \in \mathbb{Z}$*,* $m \geqslant h$*. Тогда* $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$*. Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда* $\ker_0(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$*.*

6. Справедливы утверждения: $\ker_\infty(A) = \ker_h(A)$*,* $\mathrm{R}_\infty(A) = \mathrm{R}_h(A)$*;* $\ker_\infty(A)$*,* $\mathrm{R}_\infty(A)$ *— подпространства пространства* L*,* $\dim\bigl(\ker_\infty(A)\bigr) + \dim\bigl(\mathrm{R}_\infty(A)\bigr) = N$*,* $\ker_\infty(A)$*,* $\mathrm{R}_\infty(A)$ *— инвариантные подпространства оператора* A*;* $\ker_\infty(A)$*,* $\mathrm{R}_\infty(A)$ *— линейно независимые подпространства,* $\ker_\infty(A) + \mathrm{R}_\infty(A) = L$*.*

Доказательство.

1. Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m = \overline{0, k}$. Пусть $x \in A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$,

$x = A^m u$. Тогда: $x \in L$, $A^{k-m}x = A^{k-m}(A^m u) = A^k u = \theta$; $u \in L$, $x = A^m u$. Следовательно: $x \in \ker_{k-m}(A)$, $x \in \mathrm{R}_m(A)$. Тогда $x \in \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$.

Пусть $x \in \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$. Тогда: $x \in \ker_{k-m}(A)$, $x \in \mathrm{R}_m(A)$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k-m}x = \theta$; существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = A^m u$. Тогда: $u \in L$, $A^k u = A^{k-m}(A^m u) = A^{k-m}x = \theta$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Тогда $x \in A^m\big[\ker_k(A)\big]$. Итак, $A^m\big[\ker_k(A)\big] = \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$.

Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant k$. Пусть $x \in A^m\big[\ker_k(A)\big]$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$, $x = A^m u$. Тогда: $x = A^m u = A^{m-k}(A^k u) = A^{m-k}\theta = \theta$. Так как $A^m\big[\ker_k(A)\big]$ — подпространство пространства L, то $\theta \in A^m\big[\ker_k(A)\big]$. Итак, $A^m\big[\ker_k(A)\big] = \{\theta\}$.

Пусть k, $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $A^m\big[\mathrm{R}_k(A)\big] = A^m\big[A^k[L]\big] = A^{k+m}[L] = R_{k+m}(A)$.

2. Пусть $x \in \ker_k(A)$. Тогда: $x \in L$, $A^k x = \theta$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k+1}x = A(A^k x) = A\theta = \theta$. Тогда $x \in \ker_{k+1}(A)$. Итак, $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$.

Очевидно: $\mathrm{R}_{k+1}(A) = A^k\big[R_1(A)\big] \subseteq A^k[L] = \mathrm{R}_k(A)$.

3. Обозначим, $\mu = \Big\{k\colon k \in \mathbb{Z}_+ \wedge \dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)\Big\}$. Предположим, что $\mu = \varnothing$. Тогда: $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) < \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно: $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big) - 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя индукцию, получаем, что: $\dim\big(R_{k+m}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big) - m$ при: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\dim\big(\mathrm{R}_{N+1}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{R}_0(A)\big) - (N+1) = \dim(L) - (N+1) = N - (N+1) = -1$$

(что противоречит тому, что $\dim\big(\mathrm{R}_{N+1}(A)\big) \geqslant 0$). Итак, $\mu \neq \varnothing$. Обозначим, $h = \min(\mu)$. Тогда: $h \in \mathbb{Z}_+$; $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) < \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\dim\big(\mathrm{R}_{h+1}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}_h(A)\big)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Так как $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) < \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)$, то $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subset \mathrm{R}_k(A)$. Так как $\dim\big(\mathrm{R}_{h+1}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}_h(A)\big)$, то $\mathrm{R}_{h+1}(A) = \mathrm{R}_h(A)$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h+1$. Так как $\mathrm{R}_{h+1}(A) = \mathrm{R}_h(A)$, то: $\mathrm{R}_{k+1}(A) = A^{k-h}\big[\mathrm{R}_{h+1}(A)\big] = A^{k-h}\big[\mathrm{R}_h(A)\big] = \mathrm{R}_k(A)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Так как $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) < \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)$, то:

$$\dim\big(\ker_k(A)\big) = N - \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big) < N - \dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) = \dim\big(\ker_{k+1}(A)\big).$$

Тогда $\ker_k(A) \subset \ker_{k+1}(A)$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Так как $\dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big)$, то:

$$\dim\big(\ker_k(A)\big) = N - \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big) = N - \dim\big(\mathrm{R}_{k+1}(A)\big) = \dim\big(\ker_{k+1}(A)\big).$$

Тогда $\ker_k(A) = \ker_{k+1}(A)$.

4. Так как: $\ker_{k+m}(A) \subseteq L$, $\ker_m(A) \subseteq \ker_{k+m}(A)$, то:

$$\begin{gathered}\dim\big(\ker_k(A) \cap R_m(A)\big) = \dim\Big(A^m\big[\ker_{k+m}(A)\big]\Big) = \dim\Big(\mathrm{R}\Big(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Big)\Big) = \\ = \dim\Big(\mathrm{D}\Big(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Big)\Big) - \dim\Big(\ker\Big(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Big)\Big) = \\ = \dim\big(L \cap \ker_{k+m}(A)\big) - \dim\big(\ker_m(A) \cap \ker_{k+m}(A)\big) = \dim\big(\ker_{k+m}(A)\big) - \dim\big(\ker_m(A)\big).\end{gathered}$$

5. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $m = \overline{0, h-1}$. Предположим, что $\ker_k(A) \cap R_m(A) = \{\theta\}$. Тогда:

$$A^m\big[\ker_{k+m}(A)\big] = \ker_k(A) \cap R_m(A) = \{\theta\}.$$

Следовательно, $\ker_{k+m}(A) \subseteq \ker_m(A)$. С другой стороны, так как: $m = \overline{0, h-1}$, $k+m > m$, то $\ker_m(A) \subset \ker_{k+m}(A)$. Итак, $\ker_k(A) \cap R_m(A) \neq \{\theta\}$.

Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant h$. Так как: $m \geqslant h$, $k+m \geqslant m$, то $\ker_{k+m}(A) = \ker_m(A)$. Тогда:

$$\ker_k(A) \cap R_m(A) = A^m\big[\ker_{k+m}(A)\big] = A^m\big[\ker_m(A)\big] = \{\theta\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Так как $\{\theta\} \subseteq \mathrm{R}_m(A)$, то: $\ker_0(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\} \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$.

6. Очевидно: $\ker_k(A) \subset \ker_h(A)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\ker_k(A) = \ker_h(A)$ при: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Пусть $x \in \ker_\infty(A)$. Так как $\ker_\infty(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \ker_k(A)$, то существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \ker_k(A)$. Так как $\ker_k(A) \subseteq \ker_h(A)$, то $x \in \ker_h(A)$. Пусть $x \in \ker_h(A)$. Так как $\ker_\infty(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \ker_k(A)$, то $x \in \ker_\infty(A)$. Итак, $\ker_\infty(A) = \ker_h(A)$.

Очевидно: $\mathrm{R}_h(A) \subset \mathrm{R}_k(A)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\mathrm{R}_h(A) = \mathrm{R}_k(A)$ при: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Пусть $x \in \mathrm{R}_\infty(A)$. Так как $\mathrm{R}_\infty(A) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{R}_k(A)$, то $x \in \mathrm{R}_h(A)$. Пусть $x \in \mathrm{R}_h(A)$. Так как: $\mathrm{R}_h(A) \subseteq \mathrm{R}_k(A)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, то: $x \in \mathrm{R}_k(A)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Так как $\mathrm{R}_\infty(A) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{R}_k(A)$, то $x \in \mathrm{R}_\infty(A)$. Итак, $\mathrm{R}_\infty(A) = \mathrm{R}_h(A)$.

Так как: $\ker_\infty(A) = \ker_h(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) = \mathrm{R}_h(A)$, то: $\ker_\infty(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A)$ — подпространства пространства L, $\dim\big(\ker_\infty(A)\big) + \dim\big(\mathrm{R}_\infty(A)\big) = N$, $\ker_\infty(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Так как $h \in \mathbb{Z}_+$, то: $\ker_\infty(A) \cap \mathrm{R}_\infty(A) = \ker_h(A) \cap \mathrm{R}_h(A) = \{\theta\}$. Тогда $\ker_\infty(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A)$ — линейно независимые подпространства. Следовательно:

$$\dim\big(\ker_\infty(A) + \mathrm{R}_\infty(A)\big) = \dim\big(\ker_\infty(A)\big) + \dim\big(\mathrm{R}_\infty(A)\big) = N.$$

Так как: $\ker_\infty(A) + \mathrm{R}_\infty(A)$ — подпространство пространства L, $N \neq +\infty$, $\dim(L) = N$, то $\ker_\infty(A) + \mathrm{R}_\infty(A) = L$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, h — высота оператора A, $\ker(A) \neq \{\theta\}$.

Предположим, что $h = 0$. Тогда: $\ker(A) = \ker_1(A) = \ker_0(A) = \{\theta\}$ (что противоречит условию $\ker(A) \neq \{\theta\}$). Итак, $h \neq 0$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Так как: $\ker(A) = \ker_1(A) \subseteq \ker_k(A)$, $\ker(A) \neq \{\theta\}$, то $\ker_k(A) \neq \{\theta\}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, h — высота оператора A, $\ker(A) = \{\theta\}$.

Так как: $\ker_1(A) = \ker(A) = \{\theta\} = \ker_0(A)$, то $h = 0$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Так как $k \geqslant h$, то: $\ker_k(A) = \ker_h(A) = \ker_0(A) = \{\theta\}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_1 = \theta$, $Ax_j = x_{j-1}$ при $j = \overline{2, q}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A.

Пусть $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A. Пусть: $j = \overline{1, q}$, $m = \overline{0, j-1}$. Очевидно, $A^m x_j = x_{j-m}$. Пусть: $j = \overline{1, q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant j$. Тогда:

$$A^m x_j = A^{m-(j-1)}(A^{j-1}x_j) = A^{m-(j-1)}x_1 = A^{m-j}(Ax_1) = A^{m-j}\theta = \theta.$$

Пусть $j = \overline{1, q}$. Тогда: $x_j \in L$, $A^j x_j = \theta$; $x_q \in L$, $x_j = A^{q-j}x_q$. Следовательно: $x_j \in \ker_j(A)$, $x_j \in \mathrm{R}_{q-j}(A)$. Тогда $x_j \in \ker_j(A) \cap \mathrm{R}_{q-j}(A)$. Пусть: $x_1 \neq \theta$, h — высота оператора A. Предположим, что $q > h$. Тогда: $x_q \in \ker_q(A) = \ker_h(A)$. Так как $q - 1 \geqslant h$, то: $x_1 = A^{q-1}x_q = \theta$ (что противоречит условию $x_1 \neq \theta$). Итак, $q \leqslant h$.

Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $u \in \ker_q(A)$. Тогда: $u \in L$, $A^q u = \theta$. Обозначим: $x_j = A^{q-j}u$ при $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_j = A(A^{q-j}u) = A^{q-(j-1)}u = x_{j-1}$ при $j = \overline{2,q}$; $Ax_1 = A(A^{q-1}u) = A^q u = \theta$, $x_q = A^0 u = Iu = u$. Следовательно: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A, $x_q = u$.

Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x \in \ker(A) \cap \mathrm{R}_{q-1}(A)$. Тогда: $x \in \ker(A)$, $x \in \mathrm{R}_{q-1}(A)$. Следовательно: $x \in L$, $Ax = \theta$; существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = A^{q-1}u$. Обозначим: $x_j = A^{q-j}u$ при $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_j = A(A^{q-j}u) = A^{q-(j-1)}u = x_{j-1}$ при $j = \overline{2,q}$; $x_1 = A^{q-1}u = x$, $Ax_1 = Ax = \theta$, $x_q = A^0 u = Iu = u$. Следовательно: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A, $x_1 = x$.

Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Тогда: $\exists i = \overline{1,n}(q_i = \alpha)$, $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant \alpha)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k+1\}}\big\} =$$
$$= \big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}\big\} \cup \big\{(i,k+1)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\big\};$$
$$\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,q_i}\big\} =$$
$$= \big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}\big\} \cup \big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1 \wedge j = \overline{k+1, q_i}\big\}.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $x_{i,1}, \ldots, x_{i,q_i}$ *— циклическая серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1,n}$; $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Используя конечную индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $k = \overline{1,\alpha}$. Тогда $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Докажем, что утверждение справедливо при $k = 1$. Так как: $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $k_0 = \overline{1, \alpha - 1}$, утверждение справедливо при $k = k_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $k = k_0 + 1$. Пусть: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k_0+1\}}$; $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}} C^{i,j} x_{i,j} = \theta$. Так как $\alpha \geqslant k_0 + 1$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k_0 + 1)$. Тогда:

$$A^{k_0} \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}} C^{i,j} x_{i,j} = A^{k_0}\theta,$$
$$\sum_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1} C^{i,k_0+1} x_{i,1} = \theta.$$

Так как $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $C^{i,k_0+1} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k_0 + 1$. Следовательно, $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}} C^{i,j} x_{i,j} = \theta$. Так как $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k_0\}}$. Итак: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k_0+1\}}$.

Так как: $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}} = \{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, Q — подпространство пространства L.

Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$; $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q. Будем говорить, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q для оператора A.

Пусть $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q для оператора A. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Очевидно: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_\alpha(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$Q = L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Big) \subseteq \ker_\alpha(A).$$

Очевидно: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq L = \mathrm{D}(A)$. Пусть $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant 1)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$A[Q] = A\bigg[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Big)\bigg] = \{\theta\} \subseteq Q.$$

Пусть $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant 2)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$A[Q] = A\bigg[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Big)\bigg] = L\Big(\{e_{i,j-1}\}_{j=\overline{2,q_i}}^{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 2}\Big) \subseteq Q.$$

Итак, Q — инвариантное подпространство оператора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* h *— высота оператора* A*.*

Пусть $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A*.*

1. Справедливо утверждение: $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$*.*

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$*. Тогда* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_k(A)$ *для оператора* A*.*

3. Пусть $k = \overline{1,h}$*. Тогда* $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ *— циклический базис подпространства* $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ *для оператора* A*.*

4. Справедливы утверждения:

$$n = \dim\big(\ker(A)\big);$$
$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) = \dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big), \quad k \in \mathbb{N};$$
$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\big) = 2\dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда: число n ***определяется однозначно, числа*** $q_1, \ldots, q_n$ ***определяются однозначно, с точностью до перестановки.***

Доказательство.

1. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то: $e_{i,1} \neq \theta$ при $i = \overline{1,n}$. Тогда $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant h)$. Следовательно, $\alpha \leqslant h$. Предположим, что $\alpha \neq h$. Тогда $\alpha < h$. Следовательно, $\ker_\alpha(A) \subset \ker_h(A)$. С другой стороны, так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A, то $\ker_h(A) \subseteq \ker_\alpha(A)$. Итак, $\alpha = h$.

2. Пусть $k \geqslant h$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, $\ker_k(A) = \ker_h(A)$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_k(A)$ для оператора A.

Пусть $k \leqslant h-1$. Очевидно: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_k(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in \ker_k(A)$. Так как $\ker_k(A) \subseteq \ker_h(A)$, то $x \in \ker_h(A)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$, то существуют числа $\{C^{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, удовлетворяющие условиям: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$; $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j}$. Так как $h \geqslant k+1$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k+1)$. Тогда:

$$A^k x = A^k \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j},$$
$$\theta = \sum_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1} \sum_{j=\overline{k+1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j-k}.$$

Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j-k}\}_{j=\overline{k+1,q_i}}^{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k+1$, $j = \overline{k+1,q_i}$. Следовательно, $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j}$. Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$. Так как: $e_{i,1}, \ldots, e_{i,\min\{q_i,k\}}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_k(A)$ для оператора A.

3. Так как $h \geqslant k$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$, то:

$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = A^{k-1}\big[\ker_k(A)\big] = A^{k-1}\left[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}\Big)\right] = L\Big(\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}\Big).$$

Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — линейно независимые векторы. Тогда $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$. Так как $e_{i,1}$ — циклическая серия векторов оператора A при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — циклический базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ для оператора A.

4. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$. Тогда $n = \dim\big(\ker_1(A)\big)$.

Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h+1$. Так как $k-1 \geqslant h$, то: $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant k-1)$, $\ker_k(A) = \ker_{k-1}(A)$. Тогда:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) = 0 = \dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big).$$

Пусть $k = \overline{1,h}$. Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$, то:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) = \dim\big(\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)\big) = \dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big).$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\big) = \mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) - \mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\}\big) =$$

$$= \Big(\dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big)\Big) - \Big(\dim\big(\ker_{k+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_k(A)\big)\Big) =$$
$$= 2\dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, h *— высота оператора* A, $\ker(A) \neq \{\theta\}$.

Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ *— циклическая серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1,n}$; $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ *— базис подпространства* $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ *при* $k = \overline{1,h}$. *Тогда* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A.

Доказательство. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $e_{i,1} \neq \theta$ при $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant h)$. Тогда $\alpha \leqslant h$. Предположим, что $\alpha \neq h$. Тогда $\alpha < h$. Следовательно, $\forall i = \overline{1,n}(q_i < h)$. Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant h}$ — базис подпространства $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A)$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant h}$ — не пустое семейство векторов. Тогда $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant h)$. Итак, $\alpha = h$.

Так как: $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$; $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. Используя конечную индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $k = \overline{1,h}$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$.

Докажем, что утверждение справедливо при $k = 1$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$, $\ker_1(A) = \ker_1(A) \cap L = \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A)$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A)$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$.

Пусть: $k_0 = \overline{1,h-1}$, утверждение справедливо при $k = k_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $k = k_0 + 1$. Очевидно: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_{k_0+1}(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i, k_0+1\}}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_{k_0}(A)$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k_0}(A)$, то:

$$\mathrm{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}\big\}\Big) =$$
$$= \mathrm{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k_0\}}\big\}\Big) + \mathrm{card}\Big(\big\{(i,k_0+1)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k_0+1\big\}\Big) =$$
$$= \mathrm{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k_0\}}\big\}\Big) + \mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k_0+1\}\big) =$$
$$= \dim\big(\ker_{k_0}(A)\big) + \dim\big(\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k_0}(A)\big) =$$
$$= \dim\big(\ker_{k_0}(A)\big) + \Big(\dim\big(\ker_{k_0+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_{k_0}(A)\big)\Big) = \dim\big(\ker_{k_0+1}(A)\big).$$

Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_{k_0+1}(A)$.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$. Так как: $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A. $\square$

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* $\ker(A) \neq \{\theta\}$*. Существуют векторы* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$*, удовлетворяющие условию:* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A*.*

Доказательство. Обозначим через h высоту оператора A. Пусть $k = \overline{1,h}$. Обозначим, $N_k = \dim\bigl(\ker_k(A)\bigr)$. Очевидно, $N_k = \overline{1,N}$. Тогда существуют векторы $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$. Очевидно:

$$A^{k-1} f_{k,m}, \ldots, A^0 f_{k,m} \text{ — циклическая серия векторов оператора } A \text{ при } m = \overline{1,N_k};$$
$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = A^{k-1}\bigl[\ker_k(A)\bigr] = A^{k-1}\bigl[L(f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k})\bigr] = L(A^{k-1} f_{k,1}, \ldots, A^{k-1} f_{k,N_k}).$$

Пусть $k = \overline{1,h-1}$. Очевидно:

$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A) \subseteq \cdots \subseteq \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A);$$
$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = L(A^{h-1} f_{h,1}, \ldots, A^{h-1} f_{h,N_h}; \ldots; A^{k-1} f_{k,1}, \ldots, A^{k-1} f_{k,N_k}).$$

Рассмотрим последовательность подпространств:

$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A); \ldots; \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A).$$

Рассмотрим последовательность векторов:

$$A^{h-1} f_{h,1}, \ldots, A^{h-1} f_{h,N_h}; \ldots; A^0 f_{1,1}, \ldots, A^0 f_{1,N_1}.$$

Так как $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A) \neq \{\theta\}$, то, используя метод Гаусса, можно указать число $n = \overline{1, N_h + \cdots + N_1}$, можно указать числа q_1, m_1, … , q_n, m_n, удовлетворяющие условиям: $q_1 = h$, $m_1 = \overline{1, N_{q_1}}$, $q_2 = \overline{1, q_1}$, $m_2 = \overline{1, N_{q_2}}$, … , $q_n = \overline{1, q_{n-1}}$, $m_n = \overline{1, N_{q_n}}$, $\{A^{q_i-1} f_{q_i,m_i}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ при $k = \overline{1,h}$. Так как: $\ker(A) \neq \{\theta\}$, $A^{q_i-1} f_{q_i,m_i}, \ldots, A^0 f_{q_i,m_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{A^{q_i-j} f_{q_i,m_i}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_\infty(A)$ для оператора A. □

5.2. Базис Жордана пространства L для оператора A

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим, $Q_A(\lambda) = \ker_\infty(A - \lambda I)$.
2. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $Q_A(\lambda)$ — корневое подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.
3. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — корневой вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если $x \in Q_A(\lambda)$.
4. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — присоединённый вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x \in Q_A(\lambda)$, $x \notin H_A(\lambda)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\bigl[(A - \lambda_1 I)^{n_1}, (A - \lambda_2 I)^{n_2}\bigr] = \Theta$. Тогда $\ker_{n_2}(A - \lambda_2 I)$, $\mathrm{R}_{n_2}(A - \lambda_2 I)$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_1 I)^{n_1}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, λ_0 — *собственное значение оператора* A. *Тогда* $\dim\bigl(Q_A(\lambda_0)\bigr) = m_A(\lambda_0)$.

Доказательство. Так как λ_0 — собственное значение оператора A, то $\ker(A - \lambda_0 I) \neq \{\theta\}$. Тогда существуют векторы $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, удовлетворяющие условию: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_\infty(A - \lambda_0 I)$ для оператора $A - \lambda_0 I$. Обозначим: h — высота оператора $A - \lambda_0 I$, $Q = \ker_\infty(A - \lambda_0 I)$, $R = \mathrm{R}_\infty(A - \lambda_0 I)$, $m = m_A(\lambda_0)$, $\tilde{m} = \dim(Q)$. Очевидно: Q, R — линейно независимые подпространства, $Q + R = L$, $\tilde{m} = \overline{1, N}$, R — инвариантное подпространство оператора A, $\ker(A - \lambda_0 I) \cap R = \{\theta\}$.

Пусть $\tilde{m} = N$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N = \tilde{m}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}}.$$

Следовательно, $m = \tilde{m}$.

Пусть $\tilde{m} \neq N$. Тогда $\tilde{m} < N$. Следовательно: $\dim(R) = N - \tilde{m} > 0$. Тогда существуют векторы $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$, удовлетворяющие условию: $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$ — базис подпространства R. Так как: Q, R — линейно независимые подпространства, $Q + R = L$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,q_n}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,q_n}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} \det\Bigl(\bigl\{\tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j} - \lambda \delta_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}\bigr\}_{i=\overline{1,N-\tilde{m}}}^{j=\overline{1,N-\tilde{m}}}\Bigr).$$

Так как R — инвариантное подпространство оператора A, то: $A|_R \in \mathrm{Lin}(R, R)$, $\bigl[A|_R\bigr]_i^j(f) = \tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}$ при i, $j = \overline{1, N - \tilde{m}}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} \det\Bigl(\bigl[A|_R\bigr](f) - \lambda \bigl[I|_R\bigr](f)\Bigr) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} F_{A|_R}(\lambda).$$

Предположим, что $F_{A|_R}(\lambda_0) = 0$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \ker\bigl(A|_R - \lambda_0\, I|_R\bigr)$, $x \neq \theta$. Следовательно: $x \in \ker\bigl((A - \lambda_0 I)|_R\bigr)$, $x \neq \theta$. Тогда: $x \in \ker(A - \lambda_0 I) \cap R$, $x \neq \theta$. Так как $\ker(A - \lambda_0 I) \cap R = \{\theta\}$, то: $x = \theta$, $x \neq \theta$. Итак, $F_{A|_R}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $m = \tilde{m}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — *различные собственные значения оператора* A, $Q_1, \ldots, Q_r$ — *соответствующие корневые подпространства. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ — *линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Докажем утверждение, используя индукцию. Очевидно, утверждение справедливо при $r = 1$.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Рассмотрим утверждение при $r = r_0 + 1$. Пусть $k = \overline{1, r_0 + 1}$. Обозначим через h_k высоту оператора $A - \lambda_k I$.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r_0+1} \in Q_{r_0+1}$, $\sum\limits_{k=\overline{1,r_0+1}} x_k = \theta$. Предположим, что $x_1 \neq \theta$. Так как: $(A - \lambda_1 I)^0 x_1 = I x_1 = x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)^{h_1} x_1 = \theta$, то существует число $n_1 =$

$\overline{0, h_1 - 1}$, удовлетворяющее условиям: $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)^{n_1+1} x_1 = \theta$. Очевидно: $Q_1, \ldots, Q_{r_0+1}$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_1 I)^{n_1}$; $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)\big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1\big) = \theta$; $Q_1, \ldots, Q_{r_0+1}$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}}$; $(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} x_{r_0+1} = \theta$. Тогда:

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1} \sum_{k=\overline{1,r_0+1}} x_k = (A - \lambda_1 I)^{n_1} \theta,$$

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2,r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k = \theta,$$

$$(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \Big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2,r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k\Big) = (A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \theta,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} (x_1) + \sum_{k=\overline{2,r_0}} (A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k\big) = \theta.$$

Так как $Q_1, \ldots, Q_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то $(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} (x_1) = \theta$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_{r_0+1}$, то $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 = \theta$ (что противоречит тому, что $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$). Итак, $x_1 = \theta$. Тогда $\sum\limits_{k=\overline{2,r_0+1}} x_k = \theta$. Так как $Q_2, \ldots, Q_{r_0+1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_2, \ldots, x_{r_0+1} = \theta$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$.

Так как: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$. Очевидно, существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, удовлетворяющие условию: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A. Пусть: $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие алгебраические кратности, $Q_1, \ldots, Q_r$ — соответствующие корневые подпространства. Тогда: $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} m_k = N$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $\dim(Q_k) = m_k$ при $k = \overline{1, r}$.

Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Так как λ_k — собственное значение оператора A, то $\ker(A - \lambda_k I) \neq \{\theta\}$. Тогда существуют векторы $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$, удовлетворяющие условию: $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$ — циклический базис подпространства Q_k для оператора $A - \lambda_k I$. Так как: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} \dim(Q_k) = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} m_k = N$, то $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ — базис пространства L. Будем говорить, что $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ — базис Жордана пространства L для оператора A.

Лекция 6. Линейные, билинейные и квадратичные формы

6.1. Линейные и полулинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — линейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — линейный оператор.

2. Будем говорить, что A — полулинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — линейная (полулинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — набор компонент линейной (полулинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть A *— линейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $A(x) = [A]_k(e)[x]^k(e)$ *при* $x \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$*,* $A(x) = \tilde{A}_k[x]^k(e)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* A *— линейная форма в пространстве* L*,* $[A](e) = \tilde{A}$*.*

3. Пусть A *— полулинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $A(x) = [A]_k(e)\overline{[x]^k(e)}$ *при* $x \in L$*.*

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$*,* $A(x) = \tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)}$ *при* $x \in L$*. Тогда:* A *— полулинейная форма в пространстве* L*,* $[A](e) = \tilde{A}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e)e_k\big) = [x]^k(e)A(e_k) = [A]_k(e)[x]^k(e).$$

2. Докажем, что A — линейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$. Так как $\mathrm{D}(A) = L$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L.

Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k[x+y]^k(e) = \tilde{A}_k\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big) = \tilde{A}_k[x]^k(e) + \tilde{A}_k[y]^k(e) = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k[\lambda x]^k(e) = \tilde{A}_k\big(\lambda[x]^k(e)\big) = \lambda\big(\tilde{A}_k[x]^k(e)\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m[e_k]^m(e) = \tilde{A}_m\delta_k^m = \tilde{A}_k.$$

3. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e)e_k\big) = \overline{[x]^k(e)}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{[x]^k(e)}.$$

4. Докажем, что A — полулинейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \Longrightarrow \mathbb{K}$. Так как $\mathrm{D}(A) = L$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L.

Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k\overline{[x+y]^k(e)} = \tilde{A}_k\overline{\big([x]^k(e)+[y]^k(e)\big)} = \tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)} + \tilde{A}_k\overline{[y]^k(e)} = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k\overline{[\lambda x]^k(e)} = \tilde{A}_k\overline{\big(\lambda[x]^k(e)\big)} = \overline{\lambda}\big(\tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)}\big) = \overline{\lambda}A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m\overline{[e_k]^m(e)} = \tilde{A}_m\overline{\delta_k^m} = \tilde{A}_m\delta_k^m = \tilde{A}_k. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— линейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\alpha_{k'}^k(e,e')$ *при* $k' = \overline{1,N}$ $([A](e') = [A](e)\alpha(e,e'))$*.*

2. Пусть A *— полулинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}$ *при* $k' = \overline{1,N}$ $([A](e') = [A](e)\overline{\alpha(e,e')})$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha_{k'}^k(e,e')e_k\big) = \alpha_{k'}^k(e,e')A(e_k) = [A]_k(e)\alpha_{k'}^k(e,e').$$

2. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha_{k'}^k(e,e')e_k\big) = \overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}. \quad \square$$

Замечание (сопряжённое пространство, сопряжённый базис). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Обозначим через L^* множество всех линейных форм в пространстве L. Очевидно, L^* — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что L^* — сопряжённое пространство к пространству L.

2. Пусть e — базис пространства L. Обозначим: $\varphi(A) = [A](e)$ при $A \in L^*$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства L^* на пространство $\mathbb{K}^N$. Тогда: $\dim(L^*) = \dim(\mathbb{K}^N) = N$.

3. Пусть e — базис пространства L. Очевидно, следующие утверждения эквивалентны друг другу:

3.1. $\omega^1,\ldots,\omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1,N}$;

3.2. $\omega^1,\ldots,\omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1,N}$.

4. Пусть e — базис пространства L. Очевидно, существует единственный набор функций $\omega^1,\ldots,\omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1,\ldots,\omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда существует единственный набор функций $\omega^1,\ldots,\omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1,\ldots,\omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1,N}$.

5. Пусть e — базис пространства L. Пусть: $\omega^1,\ldots,\omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$. Тогда: $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$. Следовательно, $[\omega^1](e),\ldots,[\omega^N](e)$ — базис пространства $\mathbb{K}^N$. Тогда $\omega^1,\ldots,\omega^N$ — базис пространства L^*. Будем говорить, что $\omega^1,\ldots,\omega^N$ — сопряжённый базис к базису e пространства L.

Пусть: $x \in L$, $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\omega^m(x) = [\omega^m]_k(e)[x]^k(e) = \delta_k^m[x]^k(e) = [x]^m(e)$.

Пусть $A \in L^*$. Пусть $x \in L$. Тогда: $A(x) = [A]_k(e)[x]^k(e) = [A]_k(e)\omega^k(x)$. Следовательно, $A = [A]_k(e)\omega^k$.

6.2. Билинейные и полуторалинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — билинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

2. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — симметричная билинейная форма, если: $A(y, x) = A(x, y)$ при x, $y \in L$. Будем говорить, что A — антисимметричная билинейная форма, если: $A(y, x) = -A(x, y)$ при x, $y \in L$.

3. Пусть: A — билинейная форма в пространстве L, $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Будем писать, что $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x, x) > 0$ ($A(x, x) \geqslant 0$, $A(x, x) < 0$, $A(x, x) \leqslant 0$, $A(x, x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная билинейная форма, если: $\exists x \in L\bigl(A(x, x) > 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(A(x, x) < 0\bigr)$.

4. Будем говорить, что A — полуторалинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \overline{\lambda} A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

5. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — эрмитова полуторалинейная форма, если: $\overline{A(y, x)} = A(x, y)$ при x, $y \in L$. Будем говорить, что A — антиэрмитова полуторалинейная форма, если: $\overline{A(y, x)} = -A(x, y)$ при x, $y \in L$.

6. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Будем писать, что $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x, x) > 0$ ($A(x, x) \geqslant 0$, $A(x, x) < 0$, $A(x, x) \leqslant 0$, $A(x, x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная полуторалинейная форма, если: $\exists x \in L\bigl(A(x, x) > 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(A(x, x) < 0\bigr)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что Q — квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

2. Пусть: Q — квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Будем писать, что $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

3. Будем говорить, что Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

4. Пусть: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Будем писать, что $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная обобщённая квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

5. Будем говорить, что Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — квадратичная форма в пространстве L. Существует единственная функция A, удо-*

влетворяющая условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

Доказательство. По определению квадратичной формы, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x, y) = \frac{1}{2}\big(A_0(x, y) + A_0(y, x)\big)$ при $x,\ y \in L$. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть $x,\ y \in L$. Тогда:

$$A(y, x) = \frac{1}{2}\big(A_0(y, x) + A_0(x, y)\big) = \frac{1}{2}\big(A_0(x, y) + A_0(y, x)\big) = A(x, y).$$

Следовательно, A — симметричная билинейная форма. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x, x) = \frac{1}{2}\big(A_0(x, x) + A_0(x, x)\big) = A_0(x, x) = Q(x).$$

Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Пусть $x,\ y \in L$. Тогда:

$$Q(x + y) = A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y) = Q(x) + 2A(x, y) + Q(y);$$
$$A(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\big).$$

Очевидно, форма A определяется однозначно. □

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.*

Доказательство. По определению обобщённой квадратичной формы, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Пусть: $x,\ y \in L$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$Q(x + \lambda y) = A(x + \lambda y, x + \lambda y) = A(x, x) + A(x, \lambda y) + A(\lambda y, x) + A(\lambda y, \lambda y) =$$
$$= A(x, x) + \lambda A(x, y) + \overline{\lambda} A(y, x) + \overline{\lambda}\lambda A(y, y) = Q(x) + \lambda A(x, y) + \overline{\lambda} A(y, x) + |\lambda|^2 Q(y);$$
$$\lambda A(x, y) + \overline{\lambda} A(y, x) = Q(x + \lambda y) - Q(x) - |\lambda|^2 Q(y);$$
$$A(x, y) + A(y, x) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y),$$
$$iA(x, y) - iA(y, x) = Q(x + iy) - Q(x) - Q(y);$$
$$A(x, y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x + iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big).$$

Очевидно, форма A определяется однозначно. □

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.*

1. Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$.

2. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Тогда A — эрмитова полуторалинейная форма.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L$. Тогда $\overline{A(x,x)} = A(x,x)$. Следовательно, $A(x,x) \in \mathbb{R}$.

2. Обозначим: $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Так как A — полуторалинейная форма в пространстве L, то Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Обозначим: $A_0(x,y) = \frac{1}{2}\big(A(x,y) + \overline{A(y,x)}\big)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$\overline{A_0(y,x)} = \overline{\frac{1}{2}\big(A(y,x) + \overline{A(x,y)}\big)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A(y,x)} + A(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(A(x,y) + \overline{A(y,x)}\big) = A_0(x,y).$$

Следовательно, A_0 — эрмитова полуторалинейная форма. Пусть $x \in L$. Так как $A(x,x) \in \mathbb{R}$, то:

$$A_0(x,x) = \frac{1}{2}\big(A(x,x) + \overline{A(x,x)}\big) = \frac{1}{2}\big(A(x,x) + A(x,x)\big) = A(x,x) = Q(x).$$

Так как: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$; A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$, то $A = A_0$. Так как A_0 — эрмитова полуторалинейная форма, то A — эрмитова полуторалинейная форма. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — билинейная (полуторалинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица билинейной (полуторалинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Доказательство.

1. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x,y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = [x]^k(e)[y]^m(e)A(e_k,e_m) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e).$$

2. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k,e_m) = \tilde{A}_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

3. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x,y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)A(e_k,e_m) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e).$$

4. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k,e_m) = \tilde{A}_{i,j}\overline{[e_k]^i(e)}[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\overline{\delta^i_k}\delta^j_m = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}. \quad □$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Обозначим: $\Delta_0(\tilde{A}) = 1$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \det\bigl(\{\tilde{A}_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,k}}\bigr)$ при $k = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $\Delta_1(\tilde{A}), \dots, \Delta_N(\tilde{A})$ — угловые миноры матрицы $\tilde{A}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — симметричная матрица, если $\tilde{A}^T = \tilde{A}$. Будем говорить, что $\tilde{A}$ — антисимметричная матрица, если $\tilde{A}^T = -\tilde{A}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, если $\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{A}$. Будем говорить, что $\tilde{A}$ — антиэрмитова матрица, если $\overline{\tilde{A}^T} = -\tilde{A}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — ортогональная матрица, если $\tilde{A}\tilde{A}^T = \tilde{I}$. Пусть $\tilde{A}$ — ортогональная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$. Тогда $\tilde{A}$ — ортогональная матрица.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — унитарная матрица, если $\tilde{A}\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{I}$. Пусть $\tilde{A}$ — унитарная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$. Тогда $\tilde{A}$ — унитарная матрица.

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова матрица. Очевидно: $\tilde{A}_{k,k} = \overline{\tilde{A}_{k,k}}$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \Delta_k\Bigl(\overline{\tilde{A}^T}\Bigr) = \overline{\Delta_k(\tilde{A})}$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда: $\tilde{A}_{k,k}$, $\Delta_k(\tilde{A}) \in \mathbb{R}$ при $k = \overline{1,N}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — симметричная матрица, $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— билинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ *при* k'*,* $m' = \overline{1,N}$ $([A](e') = \alpha(e,e')^T[A](e)\alpha(e,e'))$*.*

2. Пусть A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ *при* $k', m' = \overline{1,N}$ $([A](e') = \overline{\alpha(e,e')^T}[A](e)\alpha(e,e'))$*.*

Доказательство.

1. Пусть k', $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\bigl(\alpha^k_{k'}(e,e')e_k, \alpha^m_{m'}(e,e')e_m\bigr) = \alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')A(e_k,e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e').$$

2. Пусть k', $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\bigl(\alpha^k_{k'}(e,e')e_k, \alpha^m_{m'}(e,e')e_m\bigr) = \overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')A(e_k,e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e'). \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — квадратичная форма в пространстве L, e — базис пространства L. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q](e)$ — симметричная матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: $[A](e)$ — симметричная матрица, $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$; $[Q](e) = [A](e)$, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Следовательно: $[Q](e)$ — симметричная матрица, $Q(x) = A(x, x) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x, y) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Так как $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, то: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e) = A(x, x)$ при $x \in L$. Так как A — симметричная билинейная форма в пространстве L, то: Q — квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = [A](e)$. Так как $[A](e) = \tilde{Q}$, то $[Q](e) = \tilde{Q}$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — квадратичная форма в пространстве L, e, e' — базисы пространства L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$ ($[Q](e') = \alpha(e, e')^T[Q](e)\alpha(e, e')$).*

Доказательство. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $[Q](e') = [A](e')$. Следовательно: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$. □

Определение. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, e — базис пространства L. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица обобщённой квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$; $[Q](e) = [A](e)$, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Следовательно: $Q(x) = A(x, x) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = A(x,x)$ при $x \in L$. Так как A — полуторалинейная форма в пространстве L, то: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = [A](e)$. Так как $[A](e) = \tilde{Q}$, то $[Q](e) = \tilde{Q}$. □

Замечание. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Очевидно: $[Q](e)$ — эрмитова матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Очевидно: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, e, e' — базисы пространства L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$ ($[Q](e') = \overline{\alpha(e,e')^T}[Q](e)\alpha(e,e')$).*

Доказательство. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $[Q](e') = [A](e')$. Следовательно: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$. □

Лекция 7. Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{Z}$*,* $N \geqslant 2$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*. Существует число* k_0*, существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* $k_0 = \overline{1, N}$*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— базис пространства* L*,* $[A]_{k_0,k}(e)$*,* $[A]_{k,k_0}(e) = 0$ *при:* $k = \overline{1, N}$*,* $k \neq k_0$*.*

Доказательство. Докажем вспомогательные утверждения.

1. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, $k_0 = \overline{1, N}$, $\tilde{A}_{k_0,k_0} \neq 0$. Докажем, что существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1, N}$, $k \neq k_0$.

Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$\begin{gathered}
A(x,x) = \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0}\right) + \\
+ \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \right. \\
\left. - \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m\right) + \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) + \\
+ \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.
\end{gathered}$$

Обозначим:

$$\begin{gathered}
\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = \tilde{A}_{k_0,k_0}, \\
\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k},\ \tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0 \text{ при: } k = \overline{1,N},\ k \neq k_0; \\
\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}} \text{ при: } k,\ m = \overline{1,N},\ k,\ m \neq k_0; \\
\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m, \\
\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j \text{ при: } j = \overline{1,N},\ j \neq k_0.
\end{gathered}$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k}$, $\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$; $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$, $A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m$.

Обозначим: $\beta^{k_0}_{k_0} = 1$, $\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$; $\beta^j_m = \delta^j_m$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \neq k_0$ и $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1 \neq 0$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Так как: e — базис пространства L, $\det(\beta^{-1}) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta^{-1}$. Тогда $\alpha(e',e) = \beta$. Так как $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$, то: $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x} = \alpha(e',e)[x](e) = [x](e')$. Тогда: $A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

2. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,k_0}$, $\tilde{A}_{m_0,m_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. Докажем, что существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$
$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{m_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{m_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0 \vee m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$
$$= \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \overline{\tilde{A}_{k_0,m_0}} \cdot \overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0 \vee m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Очевидно, существует столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$, удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{x}^{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right),$$
$$\tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$
$$\tilde{x}^j = \tilde{\tilde{x}}^j \text{ при: } j = \overline{1,N},\ j \neq k_0,\ m_0.$$

Тогда:

$$A(x,x) = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \left(\cdots\right) =$$
$$= 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^{m_0} + \left(\cdots\right).$$

Обозначим: $\beta^{k_0}_{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{|\tilde{A}_{k_0,m_0}|}$, $\beta^{k_0}_{m_0} = -\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{|\tilde{A}_{k_0,m_0}|}$, $\beta^{k_0}_m = 0$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$, m_0; $\beta^{m_0}_{k_0} = 1$, $\beta^{m_0}_{m_0} = 1$, $\beta^{m_0}_m = 0$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$, m_0; $\beta^j_m = \delta^j_m$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \neq k_0$, m_0 и $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{|\tilde{A}_{k_0,m_0}|} \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$. Так как: e — базис пространства L, $\det(\beta) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta$. Тогда $\alpha(e',e) = \beta^{-1}$. Так как $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$, то: $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x} = \alpha(e',e)[x](e) = [x](e')$. Тогда:

$$A(x,x) = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{[x]^{k_0}(e')}[x]^{k_0}(e') - 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{[x]^{m_0}(e')}[x]^{m_0}(e') + \left(\cdots\right) \text{ при } x \in L.$$

Очевидно, существует матрица $\tilde{\tilde{A}}$, удовлетворяющая условиям: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|$, $A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как: $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e')$ при $x \in L$, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $[A]_{k_0,k_0}(e') = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \neq 0$.

Согласно утверждению первого пункта, существуют векторы $e''_1, \ldots, e''_N$, удовлетворяющие условиям: $e''_1, \ldots, e''_N$ — базис пространства L, $[A]_{k_0,k}(e'')$, $[A]_{k,k_0}(e'') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Пусть $\exists k = \overline{1,N}(\tilde{A}_{k,k} \neq 0)$. Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $\tilde{A}_{k_0,k_0} \neq 0$. Согласно утверждению первого пункта, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Пусть: $\forall k = \overline{1,N}(\tilde{A}_{k,k} = 0)$, $\exists k = \overline{1,N} \exists m = \overline{1,N}(k < m \wedge \tilde{A}_{k,m} \neq 0)$. Выберем числа k_0, m_0, удовлетворяющие условиям: k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. Тогда: k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,k_0}$, $\tilde{A}_{m_0,m_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. Согласно утверждению второго пункта, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Пусть: $\forall k = \overline{1,N}(\tilde{A}_{k,k} = 0)$, $\forall k = \overline{1,N} \forall m = \overline{1,N}(k < m \implies \tilde{A}_{k,m} = 0)$. Тогда: $\tilde{A}_{k,m} = \overline{\tilde{A}_{m,k}} = \overline{0} = 0$ при: k, $m = \overline{1,N}$, $m < k$. Обозначим: $k_0 = 1$, $e' = e$. Тогда: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$. $\square$

Теорема (метод Лагранжа). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*. Существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* $e_1, \ldots, e_N$ *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_1)$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*,* $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$*. Существует вектор* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in Q_2$*,* $x \neq \theta$*,* $A(u,x) = 0$ *при* $u \in Q_1$*.*

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$. Так как $N_1 < N_2$, то $N_2 \in \mathbb{N}$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_2}$, удовлетворяющие условию: $e'_1, \ldots, e'_{N_2}$ — базис подпространства Q_2.

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Очевидно: $e'_1 \in Q_2$, $e'_1 \neq \theta$, $A(u, e'_1) = A(\theta, e'_1) = 0$ при $u \in Q_1$.

Пусть $N_1 \neq 0$. Тогда $N_1 \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Пусть: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,N_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$, $k = \overline{1,N_1}$. Тогда:

$$A(e_k, x) = A\Big(e_k, \sum_{k'=\overline{1,N_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}\Big) = \sum_{k'=\overline{1,N_2}} A(e_k, e'_{k'}) \tilde{\tilde{x}}^{k'}.$$

Пусть x — искомый вектор. Так как $x \in Q_2$, то существует столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,N_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}_2$. Так как: $A(u,x) = 0$ при $u \in Q_1$, то: $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1,N_1}$. Тогда:

$$\sum_{k'=\overline{1,N_2}} A(e_k, e'_{k'}) \tilde{\tilde{x}}^{k'} = 0, \quad k = \overline{1,N_1}.$$

Так как $N_1 < N_2$, то существует столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}_2$,

$$\sum_{k'=\overline{1,N_2}} A(e_k, e'_{k'})\tilde{\tilde{x}}^{k'} = 0, \quad k = \overline{1,N_1}.$$

Обозначим, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,N_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Тогда: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$, $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1,N_1}$. Очевидно, x — искомый вектор. □

Теорема (закон инерции для эрмитовых полуторалинейных форм)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица,* p_1 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*,* n_1 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*.*

Пусть: e' *— базис пространства* L*,* $[A](e')$ *— диагональная матрица,* p_2 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*,* n_2 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*. Тогда:* $p_1 = p_2$*,* $n_1 = n_2$*.*

Доказательство. Очевидно, p_1, p_2, n_1, $n_2 = \overline{0,N}$. Без ограничения общности можно считать, что: $[A]_{k,k}(e) > 0$ при $k = \overline{1,p_1}$; $[A]_{k,k}(e) < 0$ при $k = \overline{p_1+1, p_1+n_1}$; $[A]_{k,k}(e) = 0$ при $k = \overline{p_1+n_1+1, N}$; $[A]_{k',k'}(e') > 0$ при $k' = \overline{1,p_2}$; $[A]_{k',k'}(e') < 0$ при $k' = \overline{p_2+1, p_2+n_2}$; $[A]_{k',k'}(e') = 0$ при $k' = \overline{p_2+n_2+1, N}$. Обозначим: $\tilde{A} = [A](e)$, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$.

Предположим, что $p_1 < p_2$. Тогда: $p_1 = \overline{0, N-1}$, $p_2 = \overline{1,N}$.

Пусть $p_1 = 0$. Обозначим, $\tilde{x} = [e'_1](e)$. Тогда:

$$A(e'_1, e'_1) = \sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0;$$

$$A(e'_1, e'_1) = \tilde{\tilde{A}}_{1,1} > 0.$$

Итак, $p_1 \neq 0$.

Так как $p_1 \neq 0$, то $p_1 = \overline{1, N-1}$. Так как $p_1 < p_2$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, $A(u,x) = 0$ при $u \in L(e_1, \ldots, e_{p_1})$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k, x\Big) = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A\Big(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\Big)\overline{\tilde{x}^k} =$$
$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0.$$

Так как $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, то существует столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}_2$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Big(\sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}, \sum_{m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{m'} e'_{m'}\Big) = \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{A}}_{k',k'} \left|\tilde{\tilde{x}}^{k'}\right|^2 > 0.$$

Итак, $p_2 \leqslant p_1$.

Аналогично получаем, что $p_1 \leqslant p_2$. Так как: $p_1 \leqslant p_2$, $p_2 \leqslant p_1$, то $p_1 = p_2$. Аналогично получаем, что $n_1 = n_2$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица, p — количество положительных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$, n — количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$. Будем говорить, что (p, n) — сигнатура формы A.

Теорема (критерий Сильвестра). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*,* e *— базис пространства* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

1. Справедливо утверждение: $A > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\big(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\big)$.

2. Справедливо утверждение: $A < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\Big(\operatorname{sgn}\big(\Delta_k(\tilde{A})\big) = (-1)^k\Big)$.

3. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$*,* $\neg(A > 0)$*,* $\neg(A < 0)$*. Тогда* A *— знакопеременная форма.*

Доказательство. **Докажем вспомогательное утверждение.** Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, $N = N_0 + 1$, $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$. Существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$ — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $[A]_{N_0+1,k}(e')$, $[A]_{k,N_0+1}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$.

Так как $N_0 < N_0+1$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L$, $x \neq \theta$, $A(u, x) = 0$ при $u \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$. Предположим, что $e_1, \ldots, e_{N_0}$, x — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_{N_0}$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$. Тогда $A(x, x) = 0$. Так как: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$, то $A(x, x) > 0$. Итак, $e_1, \ldots, e_{N_0}$, x — линейно независимые векторы. Обозначим: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $e'_{N_0+1} = x$. Очевидно, $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$ — искомые векторы.

Докажем вспомогательное утверждение. Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, $N = N_0 + 1$, e' — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $[A]_{N_0+1,k}(e')$, $[A]_{k,N_0+1}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$. Тогда $\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) = \big|\det\big(\alpha(e', e)\big)\big|^2 \Delta_{N_0}(\tilde{A}) A(e'_{N_0+1}, e'_{N_0+1})$.

Очевидно:

$$\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \det\Big(\overline{\alpha(e', e)^T}[A](e')\alpha(e', e)\Big) = \big|\det\big(\alpha(e', e)\big)\big|^2 \det\big([A](e')\big) =$$
$$= \big|\det\big(\alpha(e', e)\big)\big|^2 \Delta_{N_0}\big([A](e')\big)[A]_{N_0+1,N_0+1}(e') = \big|\det\big(\alpha(e', e)\big)\big|^2 \Delta_{N_0}(\tilde{A}) A(e'_{N_0+1}, e'_{N_0+1}).$$

1. **Используя индукцию, докажем следующее утверждение.** Пусть $A > 0$. Тогда $\forall k = \overline{1, N}\big(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\big)$.

Рассмотрим утверждение при $N = 1$. Очевидно: $\Delta_1(\tilde{A}) = \tilde{A}_{1,1} = A(e_1, e_1) > 0$.

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Рассмотрим утверждение при $N = N_0 + 1$. Так как: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$, то: $\forall k = \overline{1, N_0}\big(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\big)$, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$ — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $[A]_{N_0+1,k}(e')$, $[A]_{k,N_0+1}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$. Тогда: $\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) = \big|\det\big(\alpha(e', e)\big)\big|^2 \Delta_{N_0}(\tilde{A}) A(e'_{N_0+1}, e'_{N_0+1}) > 0$.

Используя индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $\forall k = \overline{1, N}\big(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\big)$. Тогда $A > 0$.

Рассмотрим утверждение при $N = 1$. Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Тогда: $A(x, x) = \tilde{A}_{1,1} \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \Delta_1(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 > 0$.

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Рассмотрим утверждение при $N = N_0 + 1$. Так как $\forall k = \overline{1, N_0}\big(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\big)$, то: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$,

$x \neq \theta$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$ — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $[A]_{N_0+1,k}(e')$, $[A]_{k,N_0+1}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$. Следовательно:

$$A(e'_{N_0+1}, e'_{N_0+1}) = \frac{\Delta_{N_0+1}(\tilde{A})}{\left|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\right|^2 \Delta_{N_0}(\tilde{A})} > 0.$$

Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = [x](e')$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}$. Тогда:

$$A(x, x) = A\Bigl(\sum_{k=\overline{1, N_0+1}} \tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1, N_0+1}} \tilde{\tilde{x}}^m e'_m \Bigr) =$$
$$= A\Bigl(\sum_{k=\overline{1, N_0}} \tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1, N_0}} \tilde{\tilde{x}}^m e'_m \Bigr) + A(e'_{N_0+1}, e'_{N_0+1}) \left|\tilde{\tilde{x}}^{N_0+1}\right|^2 > 0.$$

2. Обозначим: $B(x, y) = -A(x, y)$ при x, $y \in L$. Тогда B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим, $\tilde{B} = [B](e)$. Тогда $\tilde{B} = -\tilde{A}$.

Пусть $A < 0$. Тогда $B > 0$. Следовательно $\forall k = \overline{1, N}\bigl(\Delta_k(\tilde{B}) > 0\bigr)$. Тогда: $\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = \operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(-\tilde{B})\bigr) = \operatorname{sgn}\bigl((-1)^k \Delta_k(\tilde{B})\bigr) = (-1)^k$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $\forall k = \overline{1, N}\Bigl(\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = (-1)^k\Bigr)$. Тогда: $\Delta_k(\tilde{B}) = \Delta_k(-\tilde{A}) = (-1)^k \Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, $B > 0$. Тогда $A < 0$.

3. Согласно теореме Лагранжа, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Тогда:

$$A(x, x) = \sum_{k=\overline{1, N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,k} \left|[x]^k(e')\right|^2 \text{ при } x \in L;$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{1,1} \cdots \tilde{\tilde{A}}_{N,N} = \det\bigl(\tilde{\tilde{A}}\bigr) = \det\Bigl(\overline{\alpha(e, e')^T} \tilde{A} \alpha(e, e')\Bigr) = \left|\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr)\right|^2 \det(\tilde{A}) \neq 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0 \text{ при } k = \overline{1, N}.$$

Предположим, что: $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда $A > 0$ (что противоречит тому, что $\neg(A > 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}\Bigl(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0\Bigr)$.

Предположим, что: $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда $A < 0$ (что противоречит тому, что $\neg(A < 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}\Bigl(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0\Bigr)$. Так как: $\exists k = \overline{1, N}\Bigl(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0\Bigr)$, $\exists k = \overline{1, N}\Bigl(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0\Bigr)$, то A — знакопеременная форма. $\square$

Лекция 8. Линейные евклидовы и линейные псевдоевклидовы пространства

8.1. Линейные евклидовы пространства

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $F\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $\overline{F(y,x)} = F(x,y)$ при x, $y \in L$. Пусть $x \in L$. Тогда $\overline{F(x,x)} = F(x,x)$. Следовательно, $F(x,x) \in \mathbb{R}$.

Пусть: $F\colon L \implies \mathbb{R}$, $F(\lambda x) = |\lambda|\, F(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $F(\theta) = F(0\theta) = |0|\, F(\theta) = 0F(\theta) = 0$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon L^2 \implies \mathbb{K}$. Далее будем писать (x,y) вместо $F(x,y)$. Пусть:

1. $\overline{(y,x)} = (x,y)$ при x, $y \in L$;
2. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$;
3. $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$;
4. $(x,x) > 0$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$.

Будем говорить, что F — скалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L,F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть F — скалярное произведение в пространстве L.

Пусть x_1, x_2, $y \in L$. Тогда: $(x_1 + x_2, y) = \overline{(y, x_1 + x_2)} = \overline{(y, x_1) + (y, x_2)} = \overline{(y, x_1)} + \overline{(y, x_2)} = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$. Тогда: $(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda (y,x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y,x)} = \overline{\lambda}(x,y)$.

Очевидно, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.

2. Пусть F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно, F — скалярное произведение в пространстве L.

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; x, $y \in H$.*

1. *Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.*
2. *Пусть x, y — линейно независимые векторы. Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.*

Доказательство.

1. Пусть $x = \theta$. Тогда (x,y), $(x,x) = 0$. Следовательно: $\bigl|(x,y)\bigr| = 0 = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Пусть $x \neq \theta$. Тогда x — линейно независимый вектор. Так как x, y — линейно зависимые векторы, то существует число $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее условию $y = \lambda x$. Тогда:

$$\bigl|(x,y)\bigr| = \bigl|(x,\lambda x)\bigr| = \bigl|\lambda(x,x)\bigr| = |\lambda|\,(x,x);$$

$$\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(x,x)}\sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = |\lambda|\,(x,x).$$

Следовательно, $\bigl|(x,y)\bigr| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

2. Так как x, y — линейно независимые векторы, то x, $y \neq \theta$. Тогда (x,x), $(y,y) > 0$.

Пусть $(x,y) = 0$. Тогда: $\bigl|(x,y)\bigr| = 0 < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Пусть $(x,y) \neq 0$. Пусть: $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}t$. Так как x, y — линейно независимые векторы, то $x + \lambda y \neq \theta$. Тогда:

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) > 0,$$

$$(x,x)+(x,\lambda y)+(\lambda y,x)+(\lambda y,\lambda y)>0,$$
$$(x,x)+\lambda(x,y)+\overline{\lambda}(y,x)+\overline{\lambda}\lambda(y,y)>0,$$
$$(x,x)+\lambda(x,y)+\overline{\lambda}\cdot\overline{(x,y)}+\overline{\lambda}\lambda(y,y)>0,$$
$$(x,x)+2\big|(x,y)\big|t+(y,y)t^2>0.$$

Так как $(y,y)\neq 0$, то, в силу произвольности выбора $t\in\mathbb{R}$:

$$4\big|(x,y)\big|^2-4(x,x)(y,y)<0,$$
$$\big|(x,y)\big|<\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $x\in H$. Обозначим, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Тогда $\|x\|\in\mathbb{R}$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x.

Докажем утверждения:

1. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ при: $\lambda\in\mathbb{K}$, $x\in H$;
2. $\|x\|>0$ при: $x\in H$, $x\neq\theta$;
3. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ при x, $y\in H$ (неравенство треугольника).

Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $x\in H$. Тогда:

$$\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{|\lambda|^2(x,x)}=|\lambda|\cdot\|x\|.$$

Пусть: $x\in H$, $x\neq\theta$. Тогда:

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}>0.$$

Пусть x, $y\in H$. Тогда:

$$\|x+y\|=\sqrt{(x+y,x+y)}=\sqrt{(x,x)+2\operatorname{Re}\big((x,y)\big)+(y,y)}\leqslant\sqrt{(x,x)+2\big|(x,y)\big|+(y,y)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)}=\sqrt{\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2}=\sqrt{\big(\|x\|+\|y\|\big)^2}=$$
$$=\|x\|+\|y\|.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть x, $y\in H$. Будем писать $x\perp y$, если $(x,y)=0$.
2. Пусть: $r\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r\in H$. Будем говорить, что $x_1,\dots,x_r$ — ортогональная последовательность векторов, если: $x_k\perp x_m$ при: k, $m=\overline{1,r}$, $k\neq m$. Будем говорить, что $x_1,\dots,x_r$ — ортонормированная последовательность векторов, если: $x_k\perp x_m$ при: k, $m=\overline{1,r}$, $k\neq m$; $\|x_k\|=1$ при $k=\overline{1,r}$.

Пусть: $r\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r$ — ортогональные векторы пространства H, $x_1,\dots,x_r\neq\theta$. Докажем, что $x_1,\dots,x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C^1,\dots,C^r\in\mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}}C^m x_m=\theta$. Фиксируем номер $k=\overline{1,r}$. Так как $x_k\neq\theta$, то:

$$\Big(x_k,\sum_{m=\overline{1,r}}C^m x_m\Big)=(x_k,\theta),$$
$$C^k(x_k,x_k)=0,$$
$$C^k=0.$$

Итак, $x_1,\dots,x_r$ — линейно независимые векторы.

3. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.

4. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H. Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\Bigl(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$

$$(x_k, x_k) = 0,$$

$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

6. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — ортогональное дополнение множества Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Докажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.

Пусть: x_1, $x_2 \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x, u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq Q^\perp$. Очевидно: $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$.

Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$. Очевидно, $Q_0 \subseteq Q^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp \perp Q$. Следовательно, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$, $Q_0 + Q = H$. Докажем, что $Q_0 = Q^\perp$.

Очевидно, $Q_0 \subseteq Q^\perp$. Пусть $x \in Q^\perp$. Тогда $x \in H$. Так как $Q_0 + Q = H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_0$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $(x, x_2) = 0$, $(x_1 + x_2, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) + (x_2, x_2) = 0$, $(x_2, x_2) = 0$, $x_2 = \theta$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_0$. Тогда $Q^\perp \subseteq Q_0$. Так как: $Q_0 \subseteq Q^\perp$, $Q^\perp \subseteq Q_0$, то $Q_0 = Q^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда: $Q^\perp \perp Q$, $Q + Q^\perp = H$. Следовательно: $Q \perp Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Будем говорить, что x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, если: $x' \in Q$, $x - x' \perp Q$. Будем говорить, что x'' — перпендикуляр вектора x к подпространству Q, если: $x'' \in H$, $x'' \perp Q$, $x - x'' \in Q$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Пусть x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x' \in Q$, $x - x' \perp Q$. Следовательно: $x - x' \in H$, $x - x' \perp Q$, $x - (x - x') = x' \in Q$. Тогда $x - x'$ — перпендикуляр вектора x к подпространству Q.

Пусть x'' — перпендикуляр вектора x к подпространству Q. Тогда: $x'' \in H$, $x'' \perp Q$, $x - x'' \in Q$. Следовательно: $x - x'' \in Q$, $x - (x - x'') = x'' \perp Q$. Тогда $x - x''$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x' \in Q$, $x - x' \in Q^\perp$. Следовательно: $x - x' \in Q^\perp$, $x - (x - x') = x' \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Тогда $x - x'$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$.

Пусть x_1', x_2' — ортогональные проекции вектора x на подпространство Q. Тогда: x_1', $x_2' \in Q$, $x - x_1'$, $x - x_2' \perp Q$. Следовательно:

$$(x_1' - x_2', x_1' - x_2') = \big((x - x_2') - (x - x_1'), x_1' - x_2'\big) =$$
$$= (x - x_2', x_1') - (x - x_2', x_2') - (x - x_1', x_1') + (x - x_1', x_2') = 0.$$

Тогда $x_1' - x_2' = \theta$. Следовательно, $x_1' = x_2'$.

Пусть Q — подпространство пространства H. Пусть: $x \in H$, x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, $y \in H$, y' — ортогональная проекция вектора y на подпространство Q. Тогда: x', $y' \in Q$, $x - x'$, $y - y' \in Q^\perp$. Следовательно: $x' + y' \in Q$, $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in Q^\perp$. Тогда $x'+y'$ — ортогональная проекция вектора $x + y$ на подпространство Q.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x' \in Q$, $x - x' \in Q^\perp$. Следовательно: $\lambda x' \in Q$, $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in Q^\perp$. Тогда $\lambda x'$ — ортогональная проекция вектора λx на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in Q$. Тогда: $x \in Q$, $x - x = \theta \perp Q$. Следовательно, x — ортогональная проекция вектора x на множество Q.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_m \in Q_m \subseteq Q_k^\perp$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \neq k$. Следовательно: $x_k \in Q_k$, $x - x_k = (x_1 + \cdots + x_r) - x_k = \sum\limits_{m=\overline{1,r},\, m\neq k} x_m \in Q_k^\perp$. Тогда x_k — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_k.

2. Пусть Q — подпространство пространства H. Будем говорить, что Q допускает проектирование, если $\forall x \in H \exists x' (x' \in Q \wedge x - x' \perp Q)$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, Q допускает проектирование. Пусть: $x \in H$, x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Обозначим, $P_Q(x) = x'$. Будем говорить, что P_Q — оператор ортогонального проектирования на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, Q допускает проектирование. Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, $P_Q x = x$ при $x \in Q$.

Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \in H$, $x = P_Q x$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(P_Q)$. Тогда $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$. Так как: $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$, то $\mathrm{R}(P_Q) = Q$.

Пусть $x \in H$. Тогда $P_Q x \in Q$. Следовательно: $(P_Q P_Q)x = P_Q\big(P_Q x\big) = P_Q x$. Тогда $P_Q P_Q = P_Q$.

3. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H.

Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = H$. Очевидно: $Q_1, \ldots, Q_r$ — допускают проектирование, $x = P_{Q_1} x + \cdots + P_{Q_r} x$ при $x \in H$. Тогда: $Q_1, \ldots, Q_r$ — допускают проектирование, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$.

Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ допускают проектирование, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$. Докажем, что $Q_1 + \cdots + Q_r = H$.

Очевидно, $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq H$. Пусть $x \in H$. Тогда: $P_{Q_1} x \in Q_1, \ldots, P_{Q_r} x \in Q_r$, $x = Ix = (P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r})x = P_{Q_1} x + \cdots + P_{Q_r} x$. Следовательно, $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда $H \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как: $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq H$, $H \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = H$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, Q допускает проектирование. Очевидно: $Q^\perp$ допускает проектирование, $P_{Q^\perp}(x) = x - P_Q x$ при $x \in H$. Тогда: $Q^\perp$ допускает проектирование, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$.

Так как: Q, $Q^\perp$ — ортогональные подпространства пространства H; Q, $Q^\perp$ допускают проектирование, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$, то $Q + Q^\perp = H$.

Так как $Q + Q^\perp = H$, то $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при $k,\ m = \overline{1, N}$. Тогда $g(e)$ — матрица скалярного произведения как полуторалинейной формы. Так как скалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. Согласно критерию Сильвестра, так как скалярное произведение есть положительная эрмитова полуторалинейная форма, то $\Delta_1\big(g(e)\big), \ldots, \Delta_N\big(g(e)\big) > 0$.

Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k) = \|e_k\|^2$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N \times N}$).

Пусть $g(e) = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $x,\ y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m.$$

Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, e_k)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} \|e_k\|^2\, \overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=\overline{1,N}} \overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Согласно теореме Лагранжа, так как скалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства H, $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис. Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|} e_k$ при $k = \overline{1, N}$. Очевидно, e' — ортонормированный базис.

2. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при $k',\ m' = \overline{1, N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства H.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Пусть e, e' — ортонормированные базисы. Тогда: $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e')$, $\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e')$, $\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e')$. Следовательно, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица.

Пусть: e — ортонормированный базис, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица. Тогда: $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e') = \tilde{I}$. Следовательно, e' — ортонормированный базис.

3. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\big\{g^{k,m}(e)\big\}^{k,m=\overline{1,N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\big(g(e)\big) > 0$, то $\det\big(g(e)^{-1}\big) > 0$.

Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{(e_k, e_k)} = \frac{1}{\|e_k\|^2}$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e)^{-1} = \tilde{I}$.

Пусть $g(e)^{-1} = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$. Пусть $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n (e_m, e_n) = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n,$$
$$g_{m,n}(e)\tilde{x}^n = (e_m, x).$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$g^{k,m}(e) g_{m,n}(e)\tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m, x),$$
$$\delta^k_n \tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m, x),$$
$$\tilde{x}^k = g^{k,m}(e)(e_m, x).$$

Очевидно:

$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k,$$
$$x = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k.$$

Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = g^{k,k}(e_k, x) = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} = \frac{(e_k, x)}{\|e_k\|^2}, \quad k = \overline{1, N};$$
$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} g^{k,k}(e_k, x)e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{\|e_k\|^2} e_k.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = (e_k, x), \quad k = \overline{1, N};$$
$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, x).$$

4. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \left(\overline{\alpha(e, e')^T} g(e) \alpha(e, e')\right)^{-1} = \alpha(e', e) g(e)^{-1} \overline{\alpha(e', e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha^{k'}_k(e', e)\overline{\alpha^{m'}_m(e', e)}$ при k', $m' = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\left\{g(e)^{-1}\right\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства H.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) = 0$. Очевидно: Q допускает проектирование, $P_Q x = \theta$ при $x \in H$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* H*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q) = N_1$*;* G *— ковариантный метрический тензор подпространства* Q*,* e *— базис подпространства* Q*. Тогда:* Q *допускает проектирование,* $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ *при* $x \in H$*.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Обозначим, $x' = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$. Очевидно, $x' \in Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда:

$$(x - x', u) = (x, u) - (x', u) = (x, u) - \left(G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha, u\right) = (x, u) - \overline{G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)}(e_\alpha, u) =$$
$$= (x, u) - G^{\beta,\alpha}(x, e_\beta)(e_\alpha, u) = (x, u) - \left(x, G^{\beta,\alpha}(e_\alpha, u)e_\beta\right) = (x, u) - (x, u) = 0.$$

Следовательно, $x - x' \perp Q$. Так как: $x' \in Q$, $x - x' \perp Q$, то x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Очевидно: Q допускает проектирование, $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ при $x \in H$. □

Теорема (процесс ортогонализации Грама—Шмидта)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in H$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$*.*

Существуют векторы $y_1, \ldots, y_r$*, удовлетворяющие условиям:* $y_1, \ldots, y_k$ *— ортогональный базис подпространства* $L(x_1, \ldots, x_k)$ *при* $k = \overline{1, r}$*;* $y_1 = \lambda_1 x_1$*,* $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$*.*

Доказательство. Докажем утверждение, используя индукцию. Рассмотрим утверждение при $r = 1$. Обозначим, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Очевидно, y_1 — искомая последовательность векторов.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Рассмотрим утверждение при $r = r_0 + 1$. Так как утверждение справедливо при $r = r_0$, то существуют векторы $y_1, \ldots, y_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \ldots, y_k$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_k)$ при $k = \overline{1, r_0}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$ при $k = \overline{2, r_0}$.

Обозначим, $y_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1}\Big(x_{r_0+1} - \sum\limits_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$. Так как $y_1, \ldots, y_{r_0} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0})$, то $y_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$. Пусть $k = \overline{1, r_0}$. Так как $y_1, \ldots, y_{r_0}$ — ортогональные векторы, то:

$$(y_k, y_{r_0+1}) = \left(y_k, \lambda_{r_0+1}\left(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\right)\right) =$$
$$= \lambda_{r_0+1}\left((y_k, x_{r_0+1}) - \frac{(y_k, x_{r_0+1})}{(y_k, y_k)}(y_k, y_k)\right) = 0.$$

Предположим, что $y_{r_0+1} = \theta$. Так как: $\lambda_{r_0+1} \neq 0$, $y_1, \ldots, y_{r_0} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0})$, то:

$$\lambda_{r_0+1}\left(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\right) = \theta,$$
$$x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m = \theta,$$
$$x_{r_0+1} = \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m,$$
$$x_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0}).$$

Тогда $x_1, \ldots, x_{r_0+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $y_{r_0+1} \neq \theta$.

Очевидно: $y_1, \ldots, y_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$, $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — ортогональные векторы, $y_1, \ldots, y_{r_0+1} \neq \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_{r_0+1}$ — линейно независимые векторы, то $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})\big) = r_0 + 1$. Тогда $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$. Так как: $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$, $y_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1}\Big(x_{r_0+1} - \sum\limits_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$, то $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — искомая последовательность векторов. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in H$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$*.*

Пусть: $y_1, \ldots, y_r \in H$, $y_1, \ldots, y_r \neq \theta$, $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Bigl(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m,x_k)}{(y_m,y_m)} y_m\Bigr)$ *при* $k = \overline{2,r}$.

Пусть: $z_1, \ldots, z_r \in H$, $z_1, \ldots, z_r \neq \theta$, $z_1 = \lambda_1 x_1$, $z_k = \lambda_k\Bigl(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(z_m,x_k)}{(z_m,z_m)} z_m\Bigr)$ *при* $k = \overline{2,r}$.

Тогда: $y_1 = z_1, \ldots, y_r = z_r$.

8.2. Линейные псевдоевклидовы пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства L. Далее будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$. Будем говорить, что F — псевдоскалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L, F) — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Будем говорить, что x — изотропный вектор, если $(x, x) = 0$. Будем говорить, что x — неизотропный вектор, если $(x, x) \neq 0$.

2. Пусть $Q \subseteq H$. Будем говорить, что Q — изотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \land x \neq \theta \implies (x, x) = 0\bigr)$. Будем говорить, что Q — неизотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \land x \neq \theta \implies (x, x) \neq 0\bigr)$.

3. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$; $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональные векторы пространства H, $x_1, \ldots, x_r$ — неизотропные векторы. Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как x_k — неизотропный вектор, то:

$$\Bigl(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

5. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q(x \perp u)$.

6. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

7. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональные подпространства пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ — неизотропные подпространства. Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как Q_k — неизотропное подпространство, то:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

8. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — псевдоортогональное дополнение множества Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Докажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.

Пусть: x_1, $x_2 \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x, u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq Q^\perp$. Очевидно: $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$.

Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$. Очевидно, $Q_0 \subseteq Q^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp \perp Q$. Следовательно, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$, Q — неизотропное множество; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$, $Q_0 + Q = H$. Докажем, что $Q_0 = Q^\perp$.

Очевидно, $Q_0 \subseteq Q^\perp$. Пусть $x \in Q^\perp$. Тогда $x \in H$. Так как $Q_0 + Q = H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_0$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $(x, x_2) = 0$, $(x_1 + x_2, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) + (x_2, x_2) = 0$, $(x_2, x_2) = 0$, $x_2 = \theta$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_0$. Тогда $Q^\perp \subseteq Q_0$. Так как: $Q_0 \subseteq Q^\perp$, $Q^\perp \subseteq Q_0$, то $Q_0 = Q^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Тогда: $Q^\perp \perp Q$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Следовательно: $Q \perp Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда $g(e)$ — матрица псевдоскалярного произведения как полуторалинейной формы. Так как псевдоскалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. По определению псевдоскалярного произведения, $\det\big(g(e)\big) \neq 0$.

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k)$ при $k = \overline{1,N}$. Так как $\det\big(g(e)\big) \neq 0$, то $e_1, \ldots, e_N$ — неизотропные векторы.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: x, $y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m.$$

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда:

$$(x,y) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k,e_k)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Согласно теореме Лагранжа, так как псевдоскалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то существуют векторы $e_1,\ldots,e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1,\ldots,e_N$ — базис пространства H, $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис. Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\sqrt{|(e_k,e_k)|}}e_k$ при $k=\overline{1,N}$. Очевидно, e' — псевдоортонормированный базис.

2. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m'=\overline{1,N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e,e')^T}g(e)\alpha(e,e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства H.

3. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\left\{g^{k,m}(e)\right\}^{k,m=\overline{1,N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\bigl(g(e)\bigr) \ne 0$, то $\det\bigl(g(e)^{-1}\bigr) \ne 0$.

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{(e_k,e_k)}$ при $k=\overline{1,N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \pm 1$ при $k=\overline{1,N}$.

Пусть: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e)=\pm 1$ при $k=\overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$. Пусть $m=\overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m,x) = (e_m,\tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n(e_m,e_n) = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n,$$
$$g_{m,n}(e)\tilde{x}^n = (e_m,x).$$

Пусть $k=\overline{1,N}$. Тогда:

$$g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)\tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m,x),$$
$$\delta^k_n\tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m,x),$$
$$\tilde{x}^k = g^{k,m}(e)(e_m,x).$$

Очевидно:

$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k,$$
$$x = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k.$$

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = g^{k,k}(e_k,x) = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)};$$
$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} g^{k,k}(e_k,x)e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}e_k.$$

4. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \left(\overline{\alpha(e,e')^T} g(e)\alpha(e,e')\right)^{-1} = \alpha(e',e)g(e)^{-1}\overline{\alpha(e',e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha_k^{k'}(e',e)\overline{\alpha_m^{m'}(e',e)}$ при k', $m' = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $\left\{g(e)^{-1}\right\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства H.

Лекция 9. Сопряжённый оператор

9.1. Связь между векторами и линейными формами в евклидовых пространствах

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $x_1,\ x_2 \in H$*,* $\forall y \in H\big((x_1, y) = (x_2, y)\big)$*. Тогда* $x_1 = x_2$*.*

Доказательство. Очевидно: $(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = 0$. Тогда $x_1 - x_2 = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$. □

Замечание (дираковский формализм). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Обозначим: $\langle x|\,(u) = (x, u)$ при $u \in H$. Очевидно, $\langle x|$ — линейная форма в пространстве H.

Пусть: $x_1,\ x_2 \in H$, $\langle x_1| = \langle x_2|$. Пусть $u \in H$. Тогда: $(x_1, u) = \langle x_1|\,u = \langle x_2|\,u = (x_2, u)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x_1,\ x_2 \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle x_1 + x_2|\,u = (x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = \langle x_1|\,u + \langle x_2|\,u = \big(\langle x_1| + \langle x_2|\big)u$. Следовательно, $\langle x_1 + x_2| = \langle x_1| + \langle x_2|$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle \lambda x|\,u = (\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = \overline{\lambda}\,\langle x|\,(u) = \big(\overline{\lambda}\,\langle x|\big)u$. Следовательно, $\langle \lambda x| = \overline{\lambda}\,\langle x|$.

Пусть $x \in H$. Обозначим, $|x\rangle = x$.

Пусть $x,\ y \in H$. Тогда: $\langle x|\,|y\rangle = \langle x|\,y = (x, y)$.

2. Пусть $x \in H$. Обозначим: $F_x(u) = (u, x)$ при $u \in H$. Очевидно, F_x — полулинейная форма в пространстве H.

Пусть: $x_1,\ x_2 \in H$, $F_{x_1} = F_{x_2}$. Пусть $u \in H$. Тогда: $(u, x_1) = F_{x_1}u = F_{x_2}u = (u, x_2)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x_1,\ x_2 \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $F_{x_1+x_2}u = (u, x_1 + x_2) = (u, x_1) + (u, x_2) = F_{x_1}u + F_{x_2}u = (F_{x_1} + F_{x_2})u$. Следовательно, $F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $F_{\lambda x}u = (u, \lambda x) = \lambda(u, x) = \lambda F_x(u) = (\lambda F_x)u$. Следовательно, $F_{\lambda x} = \lambda F_x$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $x \in H$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \overline{[x](e)^T}g(e)$*).*

2. Пусть: F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \overline{[x](e)^T}g(e)$*). Тогда:* $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*.*

3. Пусть: $F(u) = (u, x)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— полулинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k}}(e) = g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \big(g(e)[x](e)\big)^T$*).*

4. Пусть: F *— полулинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k}}(e) = g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \big(g(e)[x](e)\big)^T$*). Тогда:* $F(u) = (u, x)$ *при* $u \in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — линейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[F]_k(e) = F(e_k) = (x, e_k) = \big([x]^m(e)e_m, e_k\big) = \overline{[x]^m(e)}(e_m, e_k) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e).$$

2. Пусть $u \in H$. Тогда:

$$F(u) = [F]_k(e)[u]^k(e) = \big(\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)\big)[u]^k(e) = g_{\overline{m},k}(e)\overline{[x]^m(e)}[u]^k(e) = (x,u).$$

3. Очевидно, F — полулинейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_{\overline{k}}(e) = F(e_k) = (e_k, x) = \big(e_k, [x]^m(e)e_m\big) = [x]^m(e)(e_k, e_m) = g_{\overline{k},m}[x]^m(e).$$

4. Пусть $u \in H$. Тогда:

$$F(u) = [F]_{\overline{k}}(e)\overline{[u]^k(e)} = \big(g_{\overline{k},m}[x]^m(e)\big)\overline{[u]^k(e)} = g_{\overline{k},m}\overline{[u]^k(e)}[x]^m(e) = (u,x). \quad \square$$

Замечание (построение вектора по линейной форме). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; e — базис пространства H.

1. Пусть F — линейная форма в пространстве H. Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = \overline{[F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)}$ при $m = \overline{1,N}$ ($[x](e) = \overline{\big([F](e)g(e)^{-1}\big)^T}$). Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e) = \overline{\overline{\big([F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)\big)}}g_{\overline{m},k}(e) = \big([F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)\big)g_{\overline{m},k}(e) = [F]_n(e)\delta_k^n = [F]_k(e).$$

Следовательно: $F(u) = (x,u)$ при $u \in H$.

2. Пусть F — полулинейная форма в пространстве H. Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = g^{m,\overline{n}}(e)[F]_{\overline{n}}(e)$ при $m = \overline{1,N}$ ($[x](e) = g(e)^{-1}[F](e)^T$). Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e) = g_{\overline{k},m}(e)\big(g^{m,\overline{n}}(e)[F]_{\overline{n}}(e)\big) = \delta_{\overline{k}}^{\overline{n}}[F]_{\overline{n}}(e) = [F]_{\overline{k}}(e).$$

Следовательно: $F(u) = (u,x)$ при $u \in H$.

9.2. Связь между линейными операторами и полуторалинейными формами в евклидовых пространствах

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H,H)$. Обозначим: $F_A(y,x) = (y,Ax)$ при x, $y \in H$. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: A_1, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H,H)$, $F_{A_1} = F_{A_2}$. Пусть x, $y \in H$. Тогда: $(y,A_1x) = F_{A_1}(y,x) = F_{A_2}(y,x) = (y,A_2x)$. В силу произвольности выбора $y \in H$ получаем, что $A_1x = A_2x$. В силу произвольности выбора $x \in H$ получаем, что $A_1 = A_2$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(H,H)$, e — базис пространства H.*

1. Пусть: $F(y,x) = (y,Ax)$ при x, $y \in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F]_{\overline{k},m}(e) = g_{\overline{k},n}(e)[A]_m^n(e)$ при k, $m = \overline{1,N}$ ($[F](e) = g(e)[A](e)$).

2. Пусть: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F]_{\overline{k},m}(e) = g_{\overline{k},n}(e)[A]_m^n(e)$ при k, $m = \overline{1,N}$ ($[F](e) = g(e)[A](e)$). Тогда: $F(y,x) = (y,Ax)$ при x, $y \in H$.

Доказательство.

1. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H. Пусть k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_{\overline{k},m}(e) = F(e_k,e_m) = (e_k,Ae_m) = (e_k,[A]_m^n(e)e_n) = [A]_m^n(e)(e_k,e_n) = g_{\overline{k},n}(e)[A]_m^n(e).$$

2. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$F(y,x) = [F]_{\overline{k},m}(e)\overline{[y]^k(e)}[x]^m(e) = \big(g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)\big)\overline{[y]^k(e)}[x]^m(e) =$$
$$= g_{\overline{k},n}(e)\overline{[y]^k(e)}\big([A]^n_m(e)[x]^m(e)\big) = g_{\overline{k},n}(e)\overline{[y]^k(e)}[Ax]^n(e) = (y, Ax). \quad \square$$

Замечание (построение линейного оператора по полуторалинейной форме). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; F — полуторалинейная форма в пространстве H, e — базис пространства H.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $[A]^n_m(e) = g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)$ при n, $m = \overline{1, N}$ ($[A](e) = g(e)^{-1}[F](e)$). Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e) = g_{\overline{k},n}(e)\big(g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)\big) = \delta^{\overline{i}}_{\overline{k}}[F]_{\overline{i},m}(e) = [F]_{\overline{k},m}(e).$$

Следовательно: $F(y,x) = (y, Ax)$ при x, $y \in H$.

9.3. Сопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что B — формально сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2 \to H_1$, $(y, Ax) = (By, x)$ при: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y \in \mathrm{D}(B)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A_1 \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2 \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Очевидно: $A_1 + A_2 \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, $B_1 + B_2\colon H_2 \to H_1$. Пусть: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $y \in \mathrm{D}(B_1 + B_2)$. Тогда:

$$\big(y, (A_1 + A_2)x\big) = (y, A_1x + A_2x) = (y, A_1x) + (y, A_2x) = (B_1y, x) + (B_2y, x) =$$
$$= (B_1y + B_2y, x) = \big((B_1 + B_2)y, x\big).$$

Итак: $A_1 + A_2 \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, $B_1 + B_2$ — формально сопряжённый оператор к оператору $A_1 + A_2$.

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A. Очевидно: $\lambda A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, $\overline{\lambda}B\colon H_2 \to H_1$. Пусть: $x \in \mathrm{D}(\lambda A)$, $y \in \mathrm{D}(\overline{\lambda}B)$. Тогда:

$$\big(y, (\lambda A)x\big) = \big(y, \lambda A(x)\big) = \lambda(y, Ax) = \overline{\overline{\lambda}}(By, x) = \big(\overline{\lambda}B(y), x\big) = \big((\overline{\lambda}B)y, x\big).$$

Итак: $\lambda A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, $\overline{\lambda}B$ — формально сопряжённый оператор к оператору λA.

3. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A. Пусть: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y \in \mathrm{D}(B)$. Тогда:

$$(Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = \overline{(By, x)} = (x, By).$$

4. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A, B — линейный оператор. Очевидно: $B \in \mathrm{lin}(H_2, H_1)$, $A\colon H_1 \to H_2$, $(x, By) = (Ax, y)$ при: $y \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда: $B \in \mathrm{lin}(H_2, H_1)$, A — формально сопряжённый оператор к оператору B.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A_1 \in \mathrm{lin}(H_1, H_2)$, B_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2 \in \mathrm{lin}(H_2, H_3)$, B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Очевидно: $A_2A_1 \in \mathrm{lin}(H_1, H_3)$, $B_1B_2\colon H_3 \to H_1$. Пусть: $x \in \mathrm{D}(A_2A_1)$, $y \in \mathrm{D}(B_1B_2)$. Тогда:

$$\big(y, (A_2A_1)x\big) = \big(y, A_2(A_1x)\big) = (B_2y, A_1x) = \big(B_1(B_2y), x\big) = \big((B_1B_2)y, x\big).$$

Итак: $A_2A_1 \in \mathrm{lin}(H_1, H_3)$, B_1B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2A_1.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что B — сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2 \implies H_1$, $(y, Ax) = (By, x)$ при: $x \in H_1$, $y \in H_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, B_1, B_2 — сопряжённые операторы к оператору A. Пусть: $x \in H_1$, $y \in H_2$. Тогда: $(B_1 y, x) = (y, Ax) = (B_2 y, x)$. В силу произвольности выбора $x \in H_1$ получаем, что $B_1 y = B_2 y$. В силу произвольности выбора $y \in H_2$ получаем, что $B_1 = B_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$, $\dim(H_1) = 0 \vee \dim(H_2) = 0$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$.

Очевидно: $Ax = \theta_2$ при $x \in H_1$. Пусть: $By = \theta_1$ при $y \in H_2$. Очевидно: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$, B — сопряжённый оператор к оператору A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* G *— ковариантный метрический тензор пространства* H_1*,* e *— базис пространства* H_1*,* g *— ковариантный метрический тензор пространства* H_2*,* f *— базис пространства* H_2*.*

Пусть: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$*,* $[B]^{\alpha}_{k}(e, f) = \overline{g_{\overline{k},m}(f)[A]^{m}_{\beta}(f, e)G^{\beta,\overline{\alpha}}(e)}$ *при:* $\alpha = \overline{1, N_1}$*,* $k = \overline{1, N_2}$ $\Bigl([B](e, f) = \overline{\bigl(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\bigr)^{T}}\Bigr)$*. Тогда* B *— сопряжённый оператор к оператору* A*.*

Доказательство. Пусть: $x \in H_1$, $y \in H_2$. Тогда:

$$\begin{gathered}(By, x) = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{[By]^{\alpha}}[x]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\bigl([B]^{\alpha}_{k}[y]^{k}\bigr)}[x]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\Bigl(\overline{\bigl(g_{\overline{k},m}[A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}\bigr)}[y]^{k}\Bigr)}[x]^{\gamma} = \\ = G_{\overline{\alpha},\gamma}\Bigl(\bigl(g_{\overline{k},m}[A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}\bigr)\overline{[y]^{k}}\Bigr)[x]^{\gamma} = g_{\overline{k},m}\overline{[y]^{k}}\bigl([A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}G_{\overline{\alpha},\gamma}[x]^{\gamma}\bigr) = \\ = g_{\overline{k},m}\overline{[y]^{k}}\bigl([A]^{m}_{\beta}\delta^{\beta}_{\gamma}[x]^{\gamma}\bigr) = g_{\overline{k},m}\overline{[y]^{k}}\bigl([A]^{m}_{\beta}[x]^{\beta}\bigr) = g_{\overline{k},m}\overline{[y]^{k}}[Ax]^{m} = (y, Ax).\end{gathered}$$

Следовательно, B — сопряжённый оператор к оператору A. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$, $\dim(H_1), \dim(H_2) \neq +\infty$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Обозначим через A^* оператор, удовлетворяющий условию: A^* — сопряжённый оператор к оператору A.

Теорема (2-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1*,* H_2 *— линейные евклидовы пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(H_1)$*,* $\dim(H_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^{\perp}$*.*

Доказательство. Докажем, что $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Пусть: $x \in \ker(A^*)$, $v \in \mathrm{R}(A)$. Тогда: $x \in H_2$, $A^* x = \theta_1$; существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in H_1$, $v = Au$. Следовательно: $x \in H_2$, $(x, v) = (x, Au) = (A^* x, u) = (\theta_1, u) = 0$. Тогда $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Пусть $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Тогда: $x \in H_2$, $A^* x \in H_1$, $A(A^* x) \in \mathrm{R}(A)$. Следовательно:

$$\begin{gathered}(A^* x, A^* x) = \bigl(x, A(A^* x)\bigr) = 0, \\ A^* x = \theta_1, \\ x \in \ker(A^*).\end{gathered}$$

Итак, $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Так как $\dim(H_2) \neq +\infty$, то: $\mathrm{R}(A) = \bigl(\mathrm{R}(A)^{\perp}\bigr)^{\perp} = \ker(A^*)^{\perp}$. □

9.4. Самосопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(H, H)$. Будем говорить, что A — самосопряжённый оператор, если: $(y, Ax) = (Ay, x)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A \in \operatorname{lin}(H, H)$. Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда: $(y, Ax) = (Ay, x)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Следовательно: $A\colon H \to H$, $(y, Ax) = (Ay, x)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Тогда A — формально сопряжённый оператор к оператору A.

   Пусть A — формально сопряжённый оператор к оператору A. Тогда: $A\colon H \to H$, $(y, Ax) = (Ay, x)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Следовательно: $(y, Ax) = (Ay, x)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Тогда A — самосопряжённый оператор.

2. Пусть: $A_1 \in \operatorname{lin}(H, H)$, A_1 — самосопряжённый оператор, $A_2 \in \operatorname{lin}(H, H)$, A_2 — самосопряжённый оператор. Тогда: $A_1 \in \operatorname{lin}(H, H)$, A_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2 \in \operatorname{lin}(H, H)$, A_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Следовательно: $A_1 + A_2 \in \operatorname{lin}(H, H)$, $A_1 + A_2$ — формально сопряжённый оператор к оператору $A_1 + A_2$. Тогда: $A_1 + A_2 \in \operatorname{lin}(H, H)$, $A_1 + A_2$ — самосопряжённый оператор.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \operatorname{lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор. Тогда: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \operatorname{lin}(H, H)$, A — формально сопряжённый оператор к оператору A. Следовательно: $\lambda A \in \operatorname{lin}(H_1, H_2)$, $\overline{\lambda} A$ — формально сопряжённый оператор к оператору λA. Так как $\overline{\lambda} = \lambda$, то: $\lambda A \in \operatorname{lin}(H_1, H_2)$, λA — формально сопряжённый оператор к оператору λA. Тогда: $\lambda A \in \operatorname{lin}(H_1, H_2)$, λA — самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* $F(y, x) = (y, Ax)$ *при* x*,* $y \in H$*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* F *— эрмитова форма.*

Доказательство. Пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$\overline{F(x, y)} = \overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, Ax) = F(y, x).$$

Следовательно, F — эрмитова форма.

Пусть F — эрмитова форма. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$(y, Ax) = F(y, x) = \overline{F(x, y)} = \overline{(x, Ay)} = (Ay, x).$$

Следовательно, A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* e *— базис пространства* H*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* $g(e)[A](e)$ *— эрмитова матрица.*

Доказательство. Обозначим: $F(y, x) = (y, Ax)$ при x, $y \in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F](e) = g(e)[A](e)$.

Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда F — эрмитова форма. Следовательно, $[F](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица.

Пусть $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $[F](e)$ — эрмитова матрица. Следовательно, F — эрмитова форма. Тогда A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: Q — подпространство пространства H, Q — допускает проектирование. Тогда: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$, $P_Q P_Q = P_Q$, P_Q — самосопряжённый оператор.

2. Пусть: $P \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $PP = P$, P — самосопряжённый оператор. Тогда: $\mathrm{R}(P)$ *— подпространство пространства H,* $\mathrm{R}(P)$ *— допускает проектирование, $P_{\mathrm{R}(P)} = P$.*

Доказательство.

1. Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$, $P_Q P_Q = P_Q$. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$(y, P_Q x) = \big(P_Q y + (y - P_Q y), P_Q x\big) = (P_Q y, P_Q x) + (y - P_Q y, P_Q x) = (P_Q y, P_Q x) = \\ = (P_Q y, P_Q x) + (P_Q y, x - P_Q x) = \big(P_Q y, P_Q x + (x - P_Q x)\big) = (P_Q y, x).$$

Следовательно, P_Q — самосопряжённый оператор.

2. Очевидно, $\mathrm{R}(P)$ — подпространство пространства H. Пусть $x \in H$. Тогда $Px \in \mathrm{R}(P)$. Пусть $v \in \mathrm{R}(P)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in H$, $v = Pu$. Следовательно:

$$(x - Px, v) = (x - Px, Pu) = \big(P(x - Px), u\big) = \big(Px - P(Px), u\big) = \big(Px - (PP)x, u\big) = \\ = (Px - Px, u) = (\theta, u) = 0.$$

Тогда $x - Px \perp \mathrm{R}(P)$. Так как: $Px \in \mathrm{R}(P)$, $x - Px \perp \mathrm{R}(P)$, то Px — ортогональная проекция вектора x на подпространство $\mathrm{R}(P)$. Очевидно: $\mathrm{R}(P)$ допускает проектирование, $P_{\mathrm{R}(P)} = P$. □

9.5. Унитарный оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — унитарный оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при x, $y \in H_1$.

Определение. Пусть: H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{R}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — ортогональный оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при x, $y \in H_1$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A — унитарный оператор. Очевидно, $\lambda A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\big((\lambda A)x, (\lambda A)y\big) = \big(\lambda A(x), \lambda A(y)\big) = |\lambda|^2 (Ax, Ay) = (x, y)$. Итак: $\lambda A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, λA — унитарный оператор.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A_1 — унитарный оператор, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H_2, H_3)$, A_2 — унитарный оператор. Очевидно, $A_2 A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\big((A_2 A_1)x, (A_2 A_1)y\big) = \big(A_2(A_1 x), A_2(A_1 y)\big) = (A_1 x, A_1 y) = (x, y)$. Итак: $A_2 A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1, H_3)$, $A_2 A_1$ — унитарный оператор.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является унитарным тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$.*

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Тогда: $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$ при $x \in H_1$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при x, $y \in H_1$; $Q_1(x) =$

(x,x), $Q_2(x) = (Ax,Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — симметричные билинейные формы в пространстве H_1, Q_1, Q_2 — квадратичные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x,x)$, $Q_2(x) = F_2(x,x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax,Ay) = F_2(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q_2(x+y) - Q_2(x) - Q_2(y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q_1(x+y) - Q_1(x) - Q_1(y)\big) = \\ = F_1(x,y) = (x,y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Тогда: $(Ax,Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x,x)$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x,y) = (x,y)$, $F_2(x,y) = (Ax,Ay)$ при x, $y \in H_1$; $Q_1(x) = (x,x)$, $Q_2(x) = (Ax,Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве H_1, Q_1, Q_2 — эрмитовы квадратичные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x,x)$, $Q_2(x) = F_2(x,x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax,Ay) = F_2(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q_2(x+y) - Q_2(x) - Q_2(y) - i\big(Q_2(x+iy) - Q_2(x) - Q_2(y)\big)\Big) = \\ = \frac{1}{2}\Big(Q_1(x+y) - Q_1(x) - Q_1(y) - i\big(Q_1(x+iy) - Q_1(x) - Q_1(y)\big)\Big) = F_1(x,y) = (x,y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1, H_2 *— линейные евклидовы пространства над полем* $\mathbb{K}$, $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, $\dim(H_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$. *Оператор* A *является унитарным тогда и только тогда, когда:* A *— обратимый оператор,* $A^{-1} = A^*$.

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Очевидно, $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$(x,x) = (Ax,Ax) = (\theta_2,\theta_2) = 0, \\ x = \theta_1.$$

Следовательно, $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, $\dim(H_2) \neq +\infty$, $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$, $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $\mathrm{R}(A) = H_2$.

Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\big(A^*(Ax), y\big) = (Ax,Ay) = (x,y)$. В силу произвольности выбора $y \in H_1$ получаем, что $A^*(Ax) = x$. Так как: $\mathrm{D}(A^*) = H_2 = \mathrm{R}(A)$, то: A — обратимый оператор, $A^{-1} = A^*$.

Пусть: A — обратимый оператор, $A^{-1} = A^*$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $(Ax,Ay) = \big(A^*(Ax), y\big) = \big(A^{-1}(Ax), y\big) = (x,y)$. Следовательно, A — унитарный оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1, H_2 *— линейные евклидовы пространства над полем* $\mathbb{K}$, $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H_2) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$, G *— ковариантный метрический тензор пространства* H_1, e *— базис пространства* H_1, g *— ковариантный метрический тензор пространства* H_2, f *— базис пространства* H_2. *Оператор* A *является унитарным тогда и только тогда, когда* $\overline{\big(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\big)^T}[A](f,e) = \tilde{I}$ *(здесь* $\tilde{I}$ *— единичная матрица из множества* $\mathbb{K}^{N\times N}$*).*

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$\big((A^*A)x, y\big) = \big(A^*(Ax), y\big) = (Ax,Ay) = (x,y) = (I_1x,y)$$

(здесь I_1 — единичная функция на множестве H_1). В силу произвольности выбора $y \in H_1$ получаем, что $(A^*A)x = I_1 x$. В силу произвольности выбора $x \in H_1$ получаем, что $A^*A = I_1$. Тогда:

$$[A^*A](e,e) = [I_1](e,e),$$
$$[A^*](e,f)[A](f,e) = [I_1](e,e),$$
$$\overline{\big(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\big)^T}[A](f,e) = \tilde{I}.$$

Пусть $\overline{\big(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\big)^T}[A](f,e) = \tilde{I}$. Тогда:

$$[A^*](e,f)[A](f,e) = [I_1](e,e),$$
$$[A^*A](e,e) = [I_1](e,e),$$
$$A^*A = I_1.$$

Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = \big(A^*(Ax), y\big) = \big((A^*A)x, y\big) = (I_1 x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор. $\square$

Лекция 10. Самосопряжённый оператор. Спектральная теория

10.1. Самосопряжённый оператор

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор.*

1. Пусть: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*,* $A[Q] \subseteq Q$*. Тогда:* $Q^{\perp}$ *— подпространство пространства* H*,* $A[Q^{\perp}] \subseteq Q^{\perp}$*.*

2. Справедливо утверждение: $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$*.*

3. Пусть: λ_1*,* λ_2 *— собственные значения оператора* A*,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*,* H_1*,* H_2 *— соответствующие собственные подпространства. Тогда* $H_1 \perp H_2$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $Q^{\perp}$ — подпространство пространства H. Пусть $x \in \mathrm{D}(A) \cap Q^{\perp}$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $u \in \mathrm{D}(A)$, $Au \in Q$. Следовательно: $(Ax, u) = (x, Au) = 0$. Тогда $Ax \in Q^{\perp}$. Итак, $A[Q^{\perp}] \subseteq Q^{\perp}$.

2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathrm{SD}(A)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Следовательно:

$$
\begin{gathered}
(x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda (x, x), \\
(x, Ax) = (Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda} (x, x); \\
(\overline{\lambda} - \lambda)(x, x) = 0, \\
\overline{\lambda} - \lambda = 0, \\
\overline{\lambda} = \lambda, \\
\lambda \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Итак, $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

3. Пусть: $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \\
(x_1, Ax_2) = (Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda_1} (x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2); \\
(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.
\end{gathered}
$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Итак, $H_1 \perp H_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда $\tilde{F}_A = F_A$. Так как A — самосопряжённый оператор, то: $\ker(\tilde{F}_A) = \ker(F_A) = \mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Очевидно, существуют объекты e, $H_{\mathbb{C}}$, f, $A_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющие условиям: e — ортонормированный базис пространства H, $H_{\mathbb{C}}$ — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim(H_{\mathbb{C}}) = N$, f — ортонормированный базис пространства $H_{\mathbb{C}}$, $A_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Lin}(H_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$, $[A_{\mathbb{C}}](f) = [A](e)$.

Очевидно, $\mathrm{D}(\tilde{F}_A)$, $\mathrm{D}(F_{A_\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $[A](e) = [A_\mathbb{C}](f)$, то:

$$\tilde{F}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A](e)\big)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A_\mathbb{C}](f)\big)\lambda^k = F_{A_\mathbb{C}}(\lambda).$$

Тогда $\tilde{F}_A = F_{A_\mathbb{C}}$.

Так как: A — самосопряжённый оператор, e — ортонормированный базис, то $[A](e)$ — эрмитова матрица. Так как $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$, то $[A_\mathbb{C}](f)$ — эрмитова матрица. Так как f — ортонормированный базис, то $A_\mathbb{C}$ — самосопряжённый оператор.

Так как: $\tilde{F}_A = F_{A_\mathbb{C}}$, $A_\mathbb{C}$ — самосопряжённый оператор, то: $\ker(\tilde{F}_A) = \ker(F_{A_\mathbb{C}}) = \mathrm{SD}(A_\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, Q — подпространство пространства H, $A[Q] \subseteq Q$.

Очевидно: $A|_Q \in \mathrm{lin}(Q, Q)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q$. Пусть $x, y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $(y, A|_Q\, x) = (y, Ax) = (Ay, x) = (A|_Q\, y, x)$. Следовательно, $A|_Q$ — самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* $e_1, \ldots, e_N$ *— ортогональный базис пространства* H*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A*.*

Доказательство. Используя конечную индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $r = \overline{1, N}$. Существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_r \in H$, $e_1, \ldots, e_r$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_r \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r}$.

Докажем, что утверждение справедливо при $r = 1$. Так как: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$, A — самосопряжённый оператор, то: $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$. Тогда существует число λ_1, существует вектор e_1, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Следовательно: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, e_1 — ортогональная последовательность векторов, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Пусть: $r_0 = \overline{1, N-1}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $r = r_0 + 1$. Так как утверждение справедливо при $r = r_0$, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0}$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_{r_0} \in H$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{r_0} \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r_0}$.

Обозначим, $H_{r_0} = L(e_1, \ldots, e_{r_0})$. Тогда H_{r_0} — подпространство пространства H. Так как: $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{r_0} \neq \theta$, то $\dim(H_{r_0}) = r_0$. Так как: $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r_0}$, то H_{r_0} — инвариантное подпространство оператора A.

Очевидно, $H_{r_0}^\perp$ — подпространство пространства H. Так как $\dim(H_{r_0}) \neq +\infty$, то $H_{r_0} + H_{r_0}^\perp = H$. Так как H_{r_0}, $H_{r_0}^\perp$ — ортогональные подпространства, то $\dim(H_{r_0}^\perp) = N - r_0$. Так как: A — самосопряжённый оператор, H_{r_0} — инвариантное подпространство оператора A, то $H_{r_0}^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A.

Так как: A — самосопряжённый оператор, $H_{r_0}^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A, то: $A|_{H_{r_0}^\perp} \in \mathrm{Lin}(H_{r_0}^\perp, H_{r_0}^\perp)$, $A|_{H_{r_0}^\perp}$ — самосопряжённый оператор. Так как: $N - r_0 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_{r_0}^\perp) = N - r_0$, $A|_{H_{r_0}^\perp}$ — самосопряжённый оператор, то: $\ker(\tilde{F}_{A|_{H_{r_0}^\perp}}) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Так как

$\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то $\mathrm{SD}(A|_{H_{r_0}^{\perp}}) \neq \varnothing$. Тогда существует число λ_{r_0+1}, существует вектор e_{r_0+1}, удовлетворяющие условиям: $\lambda_{r_0+1} \in \mathbb{K}$, $e_{r_0+1} \in H_{r_0}^{\perp}$, $e_{r_0+1} \neq \theta$, $A|_{H_{r_0}^{\perp}} e_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1} e_{r_0+1}$. Следовательно: $\lambda_{r_0+1} \in \mathbb{K}$, $e_{r_0+1} \in H$, $e_1, \ldots, e_{r_0} \perp e_{r_0+1}$, $e_{r_0+1} \neq \theta$, $Ae_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1} e_{r_0+1}$. Тогда: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0+1} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_{r_0+1} \in H$, $e_1, \ldots, e_{r_0+1}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{r_0+1} \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r_0 + 1}$.

Согласно доказанному утверждению, существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_N \in H$, $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, N}$. Очевидно: $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональный базис пространства H, $e_1, \ldots, e_N$ — собственные векторы оператора A. □

Теорема (спектральная теорема для линейных самосопряжённых операторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R}$*,* $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A) \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Замечание (спектральное разложение линейного самосопряжённого оператора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор.

Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, A — самосопряжённый оператор, то: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A) \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = H$. Очевидно, существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, удовлетворяющие условию: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A. Пусть $H_1, \ldots, H_r$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k = H$. Так как A — самосопряжённый оператор, то $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства.

Так как: $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k = H$, то: $H_1, \ldots, H_r$ — допускают проектирование, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_{H_k} = I$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_k = I$.

Пусть $x \in H$. Тогда:

$$Ax = A(Ix) = A\left(\left(\sum_{k=\overline{1,r}} P_k\right)x\right) = A\left(\sum_{k=\overline{1,r}} P_k x\right) = \sum_{k=\overline{1,r}} A(P_k x) = \sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k(x) =$$
$$= \left(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k\right)x.$$

Следовательно, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k = H$. Тогда: $H_1, \ldots, H_r$ — допускают проектирование, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_{H_k} = I$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_k = I$.

Пусть: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$. Тогда $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$.

Пусть $n = 0$. Тогда:

$$A^n = I = \sum_{k=\overline{1,r}} P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть $n = 1$. Тогда:

$$A^n = A = \sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Тогда:

$$A^n = \left(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k\right)^n = \sum_{k_1,\ldots,k_n=\overline{1,r}} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_n} P_{k_1} \cdots P_{k_n} = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j x^j$ при $x \in \mathbb{K}$; $\hat{F}(B) = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j B^j$ при $B \in \mathrm{Lin}(H, H)$. Тогда:

$$\hat{F}(A) = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j A^j = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^j P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} \left(\sum_{j=\overline{0,n}} a_j (\lambda_k)^j\right) P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k.$$

Пусть: $F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathrm{D}(F)$. Обозначим, $\hat{F}(A) = \sum_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k$.

10.2. Эрмитовы полуторалинейные формы в евклидовом пространстве

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве H. Докажем, что существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — ортонормированный базис пространства H, $[A](e')$ — диагональная матрица.

Очевидно, существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(y, x) = (y, \hat{A}x)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Так как e' — ортонормированный базис, то $g(e') = \tilde{I}$. Тогда: $[A](e') = g(e')[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$.

Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как $[A](e') = [\hat{A}](e')$, то $[A](e')$ — диагональная матрица.

Пусть e — ортонормированный базис пространства H. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; $\tilde{x} = h_e x$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$
$$\big([A](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Пусть e — базис пространства H. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; $\tilde{x} = h_e x$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$
$$\big(g(e)^{-1}[A](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Пусть e — базис пространства H. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; $\tilde{x} = h_e x$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$
$$g(e)\Big(\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x}\Big) = g(e)\tilde{\theta},$$
$$\big([A](e) - \lambda g(e)\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, A, B — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве L, $B > 0$. Докажем, что существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \dots, e'_N$ — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица, $[B](e') = \tilde{I}$.

Так как: B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $B > 0$, то B — скалярное произведение в пространстве L. Обозначим, $H = (L, B)$. Тогда H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Очевидно, существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(y, x) = (y, \hat{A}x)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \dots, e'_N$ — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \dots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Так как e' — ортонормированный базис, то $[B](e') = \tilde{I}$. Тогда: $[A](e') = [B](e')[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$.

Так как $e'_1, \dots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как $[A](e') = [\hat{A}](e')$, то $[A](e')$ — диагональная матрица.

Пусть e — базис пространства H. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; $\tilde{x} = h_e x$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$
$$\big([B](e)^{-1}[A](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Пусть e — базис пространства H. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; $\tilde{x} = h_e x$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$
$$[B](e)\Big(\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x}\Big) = [B](e)\tilde{\theta},$$
$$\big([A](e) - \lambda[B](e)\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Лекция 11. Кривые и поверхности второго порядка

11.1. Аффинное пространство

Определение (аффинное пространство). Пусть: M — множество; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon M \times M \implies L$. Далее обычно будем писать $\overrightarrow{p_1p_2}$ вместо $F(p_1, p_2)$.

Пусть справедливы утверждения:

1. $M \neq \varnothing$;
2. $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_1p_3}$ при p_1, p_2, $p_3 \in M$;
3. $\forall p_0 \in M \forall x \in L \exists! p \in M \big(\overrightarrow{p_0p} = x\big)$.

Будем говорить, что (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что M — носитель пространства (M, L, F). Будем говорить, что L — присоединённое линейное пространство к аффинному пространству (M, L, F). Будем говорить, что p — точка пространства (M, L, F), если $p \in M$. Будем говорить, что x — вектор пространства (M, L, F), если $x \in L$. Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Внимание! Далее обычно не будем различать множество M и пространство (M, L, F).

Замечание (операция откладывания вектора от точки). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. По определению аффинного пространства, существует единственная точка p, удовлетворяющая условиям: $p \in Q$, $\overrightarrow{p_0p} = x$. Обозначим, $p_0 \oplus x = p$. Далее часто будем писать $p_0 + x$ вместо $p_0 \oplus x$.

Пусть $p_0 \in Q$. Обозначим: $\varphi_{p_0}(p) = \overrightarrow{p_0p}$ при $p \in Q$. Очевидно, $\varphi_{p_0}\colon Q \implies \vec{Q}$. Так как $\forall x \in \vec{Q} \exists! p \in Q (\overrightarrow{p_0p} = x)$, то: φ_{p_0} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi_{p_0}) = Q$, $\mathrm{R}(\varphi_{p_0}) = \vec{Q}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Очевидно, $\varphi_{p_0}\big(\varphi_{p_0}^{-1}(x)\big) = x$. Тогда $\overrightarrow{p_0\varphi_{p_0}^{-1}(x)} = x$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_0(p_0 \oplus x)} = x$. Тогда $\varphi_{p_0}^{-1}(x) = p_0 \oplus x$.

Пусть p_0, $p \in Q$. Очевидно, $\varphi_{p_0}^{-1}\big(\varphi_{p_0}(p)\big) = p$. Тогда $p_0 \oplus \overrightarrow{p_0p} = p$.

Замечание (аффинная система координат в аффинном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Пусть $O \in Q$. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что $\overrightarrow{Op}$ — радиус-вектор точки p относительно точки O.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим: $h_{O,e}(p) = [\overrightarrow{Op}](e)$ при $p \in Q$. Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^N$; $h_{O,e}^{-1}(x) = O + x^k e_k$ при $x \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q, O — начало отсчёта координатной карты $h_{O,e}$, e — базис координатной карты $h_{O,e}$. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что $h_{O,e}^1(p), \ldots, h_{O,e}^r(p)$ — координаты точки p в координатной карте $h_{O,e}$. Очевидно: $h_{O,e}^m(O) = [\overrightarrow{OO}]^m(e) = [\theta]^m(e) = 0$ при $m = \overline{1, N}$; $h_{O,e}^m(O + e_k) = \big[\overrightarrow{O(O + e_k)}\big]^m(e) = [e_k]^m(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$.

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q; $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$x = [\overrightarrow{Op}](e) = \big[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}\big](e) = \big[\overrightarrow{OO'}\big](e) + \big[\overrightarrow{O'p}\big](e) = \big[\overrightarrow{OO'}\big](e) + \alpha(e, e')\big[\overrightarrow{O'p}\big](e') = \\ = h_{O,e}(O') + \alpha(e, e')\tilde{x}.$$

11.2. Кривые и поверхности второго порядка

Замечание. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Будем говорить, что F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, если существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in Q$, e — базис пространства Q, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^N$ (точнее $B \in \mathbb{R}^{1\times N}$), $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m} h^k_{O,e}(p) h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Будем говорить, что F — полином степени 2 в пространстве Q, если существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in Q$, e — базис пространства Q, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $A \neq \tilde{\Theta}$, $B \in \mathbb{R}^N$, $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m} h^k_{O,e}(p) h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Пусть F — полином степени не выше 2 в пространстве Q. Очевидно, $F\colon Q \implies \mathbb{R}$. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Будем говорить, что A, B, C — коэффициенты полинома F в координатной карте $h_{O,e}$, если: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^N$, $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m} h^k_{O,e}(p) h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Будем говорить, что σ — поверхность второго порядка в пространстве Q, если существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $\sigma = \ker(F)$.

Пусть σ — поверхность второго порядка в пространстве Q. Очевидно, $\sigma \subseteq Q$.

Определение. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$.

Будем говорить, что l — кривая второго порядка в пространстве Q, если существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F)$.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A_1, A_2 — симметричные матрицы, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^N$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$; $(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2$ при $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.*

Доказательство. Очевидно:

$$(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2, \quad x = \tilde{\theta};$$
$$C_1 = C_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m = (A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m$ при $x \in \mathbb{R}^N$.

Очевидно:

$$(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m = (A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m} (tx)^k (tx)^m + 2(B_1)_m (tx)^m = (A_2)_{k,m} (tx)^k (tx)^m + 2(B_2)_m (tx)^m,$$
$$t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$
$$t(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m = t(A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m, \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$
$$\lim_{t\to 0}\big(t(A_1)_{k,m} x^k x^m + 2(B_1)_m x^m\big) = \lim_{t\to 0}\big(t(A_2)_{k,m} x^k x^m + 2(B_2)_m x^m\big), \quad x \in \mathbb{R}^N;$$

$$2(B_1)_m x^m = 2(B_2)_m x^m, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$B_1 = B_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m} x^k x^m = (A_2)_{k,m} x^k x^m$ при $x \in \mathbb{R}^N$. Так как A_1, A_2 — симметричные матрицы, то $A_1 = A_2$. □

Замечание. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

1. Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Обозначим:

$$\beta(O, e; O', e') = \begin{pmatrix} \alpha(e, e') & h_{O,e}(O') \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $\beta(O, e; O', e') \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det\bigl(\beta(O, e; O', e')\bigr) = \det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$; $\beta(O, e; O', e') = \tilde{I}$ тогда и только тогда, когда: $O = O'$, $e = e'$.

Пусть: O, O', $O'' \in Q$, e, e', e'' — базисы пространства Q. Докажем, что $\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'') = \beta(O, e; O'', e'')$.

Пусть k, $k'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'')\bigr)^k_{k''} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') + \beta^k_{N+1}(O, e; O', e')\beta^{N+1}_{k''}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^{k'}_{k''}(e', e'') = \alpha^k_{k''}(e, e'') = \beta^k_{k''}(O, e; O'', e'').$$

Пусть $k'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'')\bigr)^{N+1}_{k''} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') + \beta^{N+1}_{N+1}(O, e; O', e')\beta^{N+1}_{k''}(O', e'; O'', e'') = 0 =$$
$$= \beta^{N+1}_{k''}(O, e; O'', e'').$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'')\bigr)^k_{N+1} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{N+1}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{N+1}(O', e'; O'', e'') + \beta^k_{N+1}(O, e; O', e')\beta^{N+1}_{N+1}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \alpha^k_{k'}(e, e')h^{k'}_{O',e'}(O'') + h^k_{O,e}(O') = h^k_{O,e}(O'') = \beta^k_{N+1}(O, e; O'', e'').$$

Очевидно:

$$\bigl(\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'')\bigr)^{N+1}_{N+1} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{N+1}(O', e'; O'', e'') =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{N+1}(O', e'; O'', e'') + \beta^{N+1}_{N+1}(O, e; O', e')\beta^{N+1}_{N+1}(O', e'; O'', e'') = 1 =$$
$$= \beta^{N+1}_{N+1}(O, e; O'', e'').$$

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Тогда: $\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O, e) = \beta(O, e; O, e) = \tilde{I}$. Следовательно, $\beta(O, e; O', e')^{-1} = \beta(O', e'; O, e)$.

2. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим:

$$\psi_{O,e}(p) = \begin{pmatrix} h_{O,e}(p) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p \in Q.$$

Очевидно, $\psi_{O,e} \colon Q \implies \mathbb{R}^{N+1}$.

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q; $p \in Q$. Докажем, что $\psi_{O,e}(p) = \beta(O, e; O', e')\psi_{O',e'}(p)$.

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\psi^k_{O,e}(p) = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) + \beta^k_{N+1}(O, e; O', e')\psi^{N+1}_{O',e'}(p) = \alpha^k_{k'}(e, e')h^{k'}_{O',e'}(p) + h^k_{O,e}(O') =$$

$$= h^k_{O,e}(p) = \psi^k_{O,e}(p).$$

Очевидно:

$$\psi^{N+1}_{O,e}(p) = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) + \beta^{N+1}_{N+1}(O, e; O', e')\psi^{N+1}_{O',e'}(p) = 1 = \psi^{N+1}_{O,e}(p).$$

3. Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^N$, $C \in \mathbb{R}$. Обозначим:

$$D = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Тогда: $D \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D — симметричная матрица, $D_{k,m} = A_{k,m}$ при k, $m = \overline{1, N}$; $D_{N+1,m} = B_m$ при $m = \overline{1, N}$; $D_{k,N+1} = B_k$ при $k = \overline{1, N}$; $D_{N+1,N+1} = C$. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q; $p \in Q$. Тогда:

$$\sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) + \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}\psi^{N+1}_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) +$$

$$+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}\psi^k_{O,e}(p)\psi^{N+1}_{O,e}(p) + D_{N+1,N+1}\psi^{N+1}_{O,e}(p)\psi^{N+1}_{O,e}(p) =$$

$$= A_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C.$$

Пусть: $D \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D — симметричная матрица. Обозначим: $A_{k,m} = D_{k,m}$ при k, $m = \overline{1, N}$; $B_m = D_{N+1,m}$ при $m = \overline{1, N}$; $C = D_{N+1,N+1}$. Тогда: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^N$, $C \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} = D.$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.

Очевидно, существуют объекты O_0, e_0, A_0, B_0, C_0, удовлетворяющие условиям: $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства Q, $A_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A_0 — симметричная матрица, $B_0 \in \mathbb{R}^N$, $C_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = (A_0)_{k_0,m_0}h^{k_0}_{O_0,e_0}(p)h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + 2(B_0)_{m_0}h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + C_0, \quad p \in Q.$$

1. Обозначим:

$$D_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0^T \\ B_0 & C_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда: $D_0 \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D_0 — симметричная матрица,

$$F(p) = \sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0} \psi^{k_0}_{O_0,e_0}(p) \psi^{m_0}_{O_0,e_0}(p), \quad p \in Q.$$

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим:

$$D_{k,m}(O,e) = \sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e) \beta^{m_0}_m(O_0,e_0;O,e), \quad k,\, m = \overline{1,N+1}.$$

Тогда: $D(O,e) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $D(O,e)$ — симметричная матрица,

$$F(p) =$$

$$= \sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0} \left(\sum_{k=\overline{1,N+1}} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e) \psi^k_{O,e}(p) \right) \sum_{m=\overline{1,N+1}} \beta^{m_0}_m(O_0,e_0;O,e) \psi^m_{O,e}(p) =$$

$$\sum_{k,m=\overline{1,N+1}} \left(\sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e) \beta^{m_0}_m(O_0,e_0;O,e) \right) \psi^k_{O,e}(p) \psi^m_{O,e}(p) =$$

$$= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e) \psi^k_{O,e}(p) \psi^m_{O,e}(p), \quad p \in Q.$$

Так как $\beta(O_0,e_0;O_0,e_0) = \tilde{I}$, то $D(O_0,e_0) = D_0$.

Пусть: $O,\, O' \in Q$, $e,\, e'$ — базисы пространства Q. Очевидно:

$$D_{k',m'}(O',e') = \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e) \beta^k_{k'}(O,e;O',e') \beta^m_{m'}(O,e;O',e'), \quad k',\, m' = \overline{1,N+1}.$$

2. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим: $A_{k,m}(O,e) = D_{k,m}(O,e)$ при k, $m = \overline{1,N}$; $B_m(O,e) = D_{N+1,m}(O,e)$ при $m = \overline{1,N}$; $C(O,e) = D_{N+1,N+1}$. Тогда: $A(O,e) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A(O,e)$ — симметричная матрица, $B(O,e) \in \mathbb{R}^N$, $C(O,e) \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m}(O,e) h^k_{O,e}(p) h^m_{O,e}(p) + 2B_m(O,e) h^m_{O,e}(p) + C(O,e), \quad p \in Q.$$

Очевидно: $A(O_0,e_0) = A_0$, $B(O_0,e_0) = B_0$, $C(O_0,e_0)$.

Пусть: $O,\, O' \in Q$, $e,\, e'$ — базисы пространства Q. Докажем, что:

$$A_{k',m'}(O',e') = A_{k,m}(O,e) \alpha^k_{k'}(e,e') \alpha^m_{m'}(e,e'), \quad k',\, m' = \overline{1,N};$$
$$B_{m'}(O',e') = \big(A_{k,m}(O,e) h^k_{O,e}(O') + B_m(O,e)\big) \alpha^m_{m'}(e,e'), \quad m' = \overline{1,N};$$
$$C(O',e') = A_{k,m}(O,e) h^k_{O,e}(O') h^m_{O,e}(O') + 2B_m(O,e) h^m_{O,e}(O') + C(O,e).$$

Пусть $k',\, m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$A_{k',m'}(O',e') = D_{k',m'}(O',e') =$$

$$= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e) \beta^k_{k'}(O,e;O',e') \beta^m_{m'}(O,e;O',e') =$$

$$
\begin{gathered}
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{m}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{m}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') = \\
= A_{k,m}(O,e)\alpha^{k}_{k'}(e,e')\alpha^{m}_{m'}(e,e').
\end{gathered}
$$

Пусть $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
B_{m'}(O',e') = D_{N+1,m'}(O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{m'}(O,e;O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') = \\
= \big(A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O') + B_{m}(O,e)\big)\alpha^{m}_{m'}(e,e').
\end{gathered}
$$

Очевидно:

$$
\begin{gathered}
C(O',e') = D_{N+1,N+1}(O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{N+1}(O,e;O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{N+1}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{m}_{N+1}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e') + \\
+ D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e') = \\
= A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O')h^{m}_{O,e}(O') + 2B_{m}(O,e)h^{m}_{O,e}(O') + C(O,e).
\end{gathered}
$$

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q, $A(O,e) \neq \tilde{\Theta}$. Очевидно, $A(O',e') \neq \tilde{\Theta}$.

Замечание. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.

Пусть $O \in Q$. Существует единственная функция A_O, удовлетворяющая условиям: A_O — билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[A_O](e) = A(O,e)$ при: e — базис пространства Q. Выберем базис e пространства Q. Так как $A(O,e)$ — симметричная матрица, то A_O — симметричная билинейная форма.

Пусть $O \in Q$. Существует единственная функция B_O, удовлетворяющая условиям: B_O — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[B_O](e) = B(O,e)$ при: e — базис пространства Q.

Пусть $O \in Q$. Существует единственное число C_O, удовлетворяющее условию: $C_O = C(O,e)$ при: e — базис пространства Q. Выберем базис e пространства Q. Так как $C(O,e) \in \mathbb{R}$, то $C_O \in \mathbb{R}$.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q; $p \in Q$. Тогда:

$$A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) = [A_O]_{k,m}(e)\big[\overrightarrow{Op}\big]^k(e)\big[\overrightarrow{Op}\big]^m(e) = A_O\big(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}\big);$$
$$B_m(O,e)h^m_{O,e}(p) = [B_O]_m(e)\big[\overrightarrow{Op}\big]^m(e) = B_O\big(\overrightarrow{Op}\big);$$
$$F(p) = A_O\big(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}\big) + 2B_O\big(\overrightarrow{Op}\big) + C_O.$$

Пусть O, $O' \in Q$. Очевидно:

$$A_{O'} = A_O;$$
$$B_{O'}(x) = A_O\big(\overrightarrow{OO'}, x\big) + B_O(x), \quad x \in \vec{Q};$$
$$C_{O'} = A_O\big(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OO'}\big) + 2B_O\big(\overrightarrow{OO'}\big) + C_O.$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.

Пусть $O \in Q$. Существует единственный оператор $\hat{A}_O$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A}_O \in \operatorname{Lin}(\vec{Q}, \vec{Q})$, $A_O(y,x) = (y, \hat{A}_O x)$ при x, $y \in \vec{Q}$. Так как A_O — симметричная билинейная форма, то $\hat{A}_O$ — самосопряжённый оператор. Существует единственный вектор $\vec{B}_O$, удовлетворяющий условиям: $\vec{B}_O \in \vec{Q}$, $B_O(x) = (\vec{B}_O, x)$ при $x \in \vec{Q}$. Очевидно:

$$F(p) = \big(\overrightarrow{Op}, \hat{A}_O\overrightarrow{Op}\big) + 2\big(\vec{B}_O, \overrightarrow{Op}\big) + C_O, \quad p \in Q.$$

Пусть O, $O' \in Q$. Очевидно:

$$\hat{A}_{O'} = \hat{A}_O;$$
$$\vec{B}_{O'} = \hat{A}_O\overrightarrow{OO'} + \vec{B}_O;$$
$$C_{O'} = \big(\overrightarrow{OO'}, \hat{A}_O\overrightarrow{OO'}\big) + 2\big(\vec{B}_O, \overrightarrow{OO'}\big) + C_O.$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, F — полином степени 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.

Пусть $O' \in Q$. Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\hat{A}_{O'}$ — самосопряжённый оператор, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: $e'_1, \ldots, e'_N$ — ортонормированный базис пространства Q, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$.

Так как e' — ортонормированный базис, то $g(e') = \tilde{I}$. Тогда: $A(O', e') = [A_{O'}](e') = g(e')[\hat{A}_{O'}](e') = [\hat{A}_{O'}](e')$.

Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$, то $[\hat{A}_{O'}](e')$ — диагональная матрица. Так как $A(O', e') = [\hat{A}_{O'}](e')$, то $A(O', e')$ — диагональная матрица.

Пусть: $\tilde{A} = A(O', e')$, $\tilde{B} = B(O', e')$, $\tilde{C} = C(O', e')$; $p \in Q$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$F(p) = \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m + 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} = \sum_{k=1}^{N} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C}.$$

Так как $\tilde{A} \neq \tilde{\Theta}$, то без ограничения общности можно считать, что существует число r, удовлетворяющее условиям: $r = \overline{1, N}$, $\tilde{A}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{A}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A};$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k = 0, \quad k = \overline{1, r};$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{B}_k, \quad k = \overline{r+1, N};$$

$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}};$$

$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}, \quad k = \overline{1, r};$$

$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k, \quad k = \overline{r+1, N}.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$; $\tilde{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{\tilde{B}}_k = 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{\tilde{C}} \in \mathbb{R}$; $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^N$,

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m + 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k + \tilde{\tilde{C}}.$$

Обозначим, $e'' = e'$. Тогда: e'' — базис пространства Q, $\alpha(e'', e') = \tilde{I}$. Обозначим: $\xi^k = \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}$ при $k = \overline{1, r}$; $\xi^k = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$. Тогда: $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \xi$. Очевидно, существует точка O'', удовлетворяющая условиям: $O'' \in Q$, $h_{O',e'}(O'') = -\xi$. Тогда: $h_{O'',e''}(O') = \left[\overrightarrow{O''O'}\right](e'') = \left[\overrightarrow{O''O'}\right](e') = -\left[\overrightarrow{O'O''}\right](e') = -h_{O',e'}(O'') = \xi$. Так как $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \xi$, то: $\tilde{\tilde{x}} = \xi + \tilde{x} = h_{O'',e''}(O') + \alpha(e'', e')h_{O',e'}(p) = h_{O'',e''}(p)$. Тогда:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}h^k_{O'',e''}(p)h^m_{O'',e''}(p) + 2\tilde{\tilde{B}}_k h^k_{O'',e''}(p) + \tilde{\tilde{C}}, \quad p \in Q.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то: $A(O'', e'') = \tilde{\tilde{A}}$, $B(O'', e'') = \tilde{\tilde{B}}$, $C(O'', e'') = \tilde{\tilde{C}}$. Тогда: $A(O'', e'')$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O'', e'') \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $A_{k,k}(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$; $B_k(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{1, r}$.

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\{A(O, e)\}_{O,e}$, $\{B(O, e)\}_{O,e}$, $\{C(O, e)\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.

Пусть: $O \in Q$, e — ортонормированный базис пространства Q. Обозначим: $I_k(O,e) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O,e)\big)$ при $k = \overline{1,N}$; $I_{N+1}(O,e) = \det\big(D(O,e)\big)$. Очевидно:

$$I_1(O,e) = (-1)^{N-1}\alpha_{N-1}\big(A(O,e)\big) = (-1)^{N-1}(-1)^{N-1}\operatorname{tr}\big(A(O,e)\big) = \operatorname{tr}\big(A(O,e)\big),$$
$$I_N(O,e) = \alpha_0\big(A(O,e)\big) = \det\big(A(O,e)\big).$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.*

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q. Тогда: $I_k(O,e) = I_k(O',e')$ при $k = \overline{1, N+1}$.

Доказательство. Пусть $k = \overline{1,N}$. Так как e, e' — ортонормированные базисы, то: $A(O,e) = [\hat{A}_O](e)$, $A(O',e') = [\hat{A}_{O'}](e')$. Тогда:

$$I_k(O',e') = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O',e')\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_{O'}](e')\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_O](e')\big) =$$
$$= (-1)^{N-k}a_{N-k}(\hat{A}_O) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_O](e)\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O,e)\big) = I_k(O,e).$$

Так как e, e' — ортонормированные базисы, то: $\alpha(e,e')^T\alpha(e,e') = \tilde{I}$, $\det\big(\alpha(e,e')\big)^2 = 1$. Тогда:

$$I_{N+1}(O',e') = \det\big(D(O',e')\big) = \det\big(\beta(O,e;O',e')^T D(O,e)\beta(O,e;O',e')\big) =$$
$$= \det\big(\beta(O,e;O',e')\big)^2 \det\big(D(O,e)\big) = \det\big(\alpha(e,e')\big)^2 I_{N+1}(O,e) = I_{N+1}(O,e). \quad \square$$

11.3. Классификация кривых второго порядка

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$, Q — ориентированное пространство; l — кривая второго порядка в пространстве Q.

Очевидно, существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F)$. Пусть $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов полинома F.

Очевидно, существует точка O, существуют векторы e_1, e_2, существует число r, удовлетворяющие условиям: $O \in Q$, e_1, e_2 — правый ортонормированный базис пространства Q, $r = \overline{1,2}$, $A(O,e)$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O,e) \neq 0$ при $k = \overline{1,r}$; $A_{k,k}(O,e) = 0$ при $k = \overline{r+1,2}$; $B_k(O,e) = 0$ при $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} A_{k,k}\big(h^k_{O,e}(p)\big)^2 + \sum_{k=r+1}^{2} 2B_k h^k_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$\sum_{k=1}^{r} A_{k,k}(x^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{2} 2B_k x^k + C = 0.$$

1. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}$, $A_{2,2} \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$

$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{-C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} + \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}} \leqslant \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}$. Тогда l — эллипс.

2. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}$, $A_{2,2} \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $C = 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $A_{2,2} < 0$ либо $A_{1,1}$, $A_{2,2} > 0$, то l — множество, состоящее из одной точки.

3. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}$, $A_{2,2} \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $C < 0$ либо $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $C > 0$, то $l = \varnothing$.

4. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C \neq 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}$, $A_{2,2} \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $C \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Тогда в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} - \frac{(x^2)^2}{\frac{C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} - \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, l — гипербола.

5. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}$, $A_{2,2} \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $C = 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0;$$
$$|A_{1,1}|\,(x^1)^2 - |A_{2,2}|\,(x^2)^2 = 0;$$
$$\left(\sqrt{|A_{1,1}|}\cdot x^1 - \sqrt{|A_{2,2}|}\cdot x^2\right)\left(\sqrt{|A_{1,1}|}\cdot x^1 + \sqrt{|A_{2,2}|}\cdot x^2\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{|A_{1,1}|}$, $\sqrt{|A_{2,2}|} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.

6. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 \neq 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 \neq 0$. Пусть: $\delta = \operatorname{sgn}(A_{1,1}B_2)$; $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 + C = A_{1,1}(\delta x^1)^2 - 2\delta B_2\left(-\delta x^2 - \frac{C}{2\delta B_2}\right).$$

Обозначим: $\tilde{x}^1 = -\delta x^2 - \frac{C}{2\delta B_2}$, $\tilde{x}^2 = \delta x^1$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2\delta B_2 \tilde{x}^1.$$

Обозначим: $\beta_1^1 = 0$, $\beta_2^1 = -\delta$, $\beta_1^2 = \delta$, $\beta_2^2 = 0$, $\xi^1 = -\frac{C}{2\delta B_2}$, $\xi^2 = 0$. Тогда: $\beta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, β — ортогональная матрица, $\det(\beta) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{x} = \beta x + \xi$. Так как: e — правый ортонормированный базис пространства Q, β^{-1} — ортогональная матрица, $\det(\beta^{-1}) > 0$, то существуют векторы e'_1, e'_2, удовлетворяющие условиям: e'_1, e'_2 — правый ортонормированный базис пространства Q, $\alpha(e, e') = \beta^{-1}$. Тогда $\alpha(e', e) = \beta$. Очевидно, существует точка O', удовлетворяющая условиям: $O' \in Q$, $h_{O,e}(O') = -\beta^{-1}\xi$. Тогда: $h_{O',e'}(O) = \big[\overrightarrow{O'O}\big](e') = -\big[\overrightarrow{OO'}\big](e') = -\alpha(e', e)\big[\overrightarrow{OO'}\big](e) = -\beta h_{O,e}(O') = \xi$. Так как $\tilde{x} = \beta x + \xi$, то: $\tilde{x} = \xi + \beta x = h_{O',e'}(O) + \alpha(e', e) h_{O,e}(p) = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}\big(h^2_{O',e'}(p)\big)^2 - 2\delta B_2 h^1_{O',e'}(p), \quad p \in Q.$$

Следовательно, в координатной карте $h_{O',e'}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2\delta B_2 \tilde{x}^1 = 0;$$
$$(\tilde{x}^2)^2 = 2\delta \frac{B_2}{A_{1,1}} \tilde{x}^1.$$

Так как $\delta \frac{B_2}{A_{1,1}} > 0$, то l — парабола.

7. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0;$$
$$(x^1)^2 - \frac{-C}{A_{1,1}} = 0;$$
$$\left(x^1 - \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\,\right)\left(x^1 + \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\,\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, не имеющих общих точек.

8. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C = 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 = 0;$$
$$x^1 = 0.$$

Тогда l — прямая.

9. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $C < 0$ либо $A_{1,1}$, $C > 0$, то $l = \varnothing$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.