

**А.М. Салецкий, А.И. Слепков**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ  
ПРАКТИКУМ  
ПО МЕХАНИКЕ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА**

УДК 530.10  
ББК 22.3

Рецензенты:  
канд. физ.-мат. наук М.В. Семенов,  
канд. физ.-мат. наук А.П. Штыркова

Салецкий А.М., Слепков А.И. **Лабораторный практикум по механике твердого тела.** — М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2005. — 100 с.

ISBN 5-8279-0057-5

В учебное пособие включены описания лабораторных работ по механике твердого тела раздела «Механика» общего физического практикума физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Описание каждой практической работы содержит краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки и порядок выполнения упражнений.

Для студентов физических специальностей университетов.



Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
2005

ISBN 5-8279-0057-5

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005 г.  
© Салецкий, А.М., Слепков А.И., 2005 г.

# Содержание

<b>Предисловие</b> .....	6
<b>Введение</b> .....	7
Кинематика твердого тела .....	7
Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси .....	8
Тензор инерции .....	11
Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции ...	13
Литература .....	16
<b>Лабораторная работа 1. Изучение вращательного движения     твердого тела</b> .....	17
Цель работы .....	17
Идея эксперимента .....	17
Теория .....	17
Экспериментальная установка .....	19
Проведение эксперимента .....	20
Упражнение 1. Проверка закона движения .....	20
Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маят- ника (момента инерции) от момента внешних сил .....	22
Упражнение 3. Проверка основного уравнения вращательного движе- ния для различных моментов инерции .....	24
Основные итоги работы .....	27
Контрольные вопросы .....	27
Литература .....	27
<b>Лабораторная работа 2. Определение момента инерции и проверка     теоремы Гюйгенса–Штейнера методом крутильных     колебаний</b> .....	28
Цель работы .....	28
Идея эксперимента .....	28
Теория .....	28
Экспериментальная установка .....	31
Проведение эксперимента .....	32
Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера .....	32
Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний .....	33
Основные итоги работы .....	35
Контрольные вопросы .....	35
Литература .....	35

<b>Лабораторная работа 3. Определение момента инерции тел простой     формы</b> .....	36
Цель работы .....	36
Идея эксперимента .....	36
Теория .....	36
Экспериментальная установка .....	38
Проведение эксперимента .....	39
Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника .....	39
Упражнение 2. Определение моментов инерции тел простой формы .	41
Основные итоги работы .....	43
Контрольные вопросы .....	43
Литература .....	43
<b>Лабораторная работа 4. Определение момента инерции колеса</b> .....	44
Цель работы .....	44
Идея эксперимента .....	44
Теория .....	44
Экспериментальная установка .....	49
Проведение эксперимента .....	50
Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний .....	50
Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения .....	51
Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса. Основные итоги работы .....	52
Основные итоги работы .....	54
Контрольные вопросы .....	54
Литература .....	55
<b>Лабораторная работа 5. Изучение тензора инерции твердого тела</b> .....	56
Цель работы .....	56
Идея эксперимента .....	56
Теория .....	56
Экспериментальная установка .....	57
Проведение эксперимента .....	59
Упражнение 1. Изучение тензора инерции динамическим методом ...	59
Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний .....	65
Основные итоги работы .....	70
Контрольные вопросы .....	70
Литература .....	70
<b>Лабораторная работа 6. Определение тензора инерции твердого тела</b> ..	71
Цель работы .....	71

Идея эксперимента .....	71
Теория .....	71
Экспериментальная установка .....	76
Проведение эксперимента .....	77
Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки .....	77
Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции .....	78
Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции .....	79
Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров .....	81
Основные итоги работы .....	82
Контрольные вопросы .....	82
Литература .....	83

<b>Приложения. Определение моментов инерции тел, имеющих простейшую геометрическую форму .....</b>	<b>84</b>
Приложение 1. Определение момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину ....	84
Приложение 2. Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей .....	85
Приложение 3. Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости .....	86
Приложение 4. Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей .....	88
Приложение 5. Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей .....	89
Приложение 6. Момент инерции цилиндра с центральным отверстием, относительно его продольной оси .....	89
Приложение 7. Момент инерции шара .....	90
Приложение 8. Моменты инерции параллелепипеда со сторонами $a$ , $b$ и $c$ относительно его главных осей .....	91
Приложение 9. Моменты инерции равнобедренной треугольной призмы относительно ее главных осей .....	92
Приложение 10. Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей .....	94
Приложение 11. Моменты инерции тел, рассмотренных в приложениях .....	96
Литература .....	98

## Предисловие

Настоящее пособие содержит описания работ лаборатории механики твердого тела раздела «Механика» практикума по общей физике физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. Подбор лабораторных работ соответствует программе курса общей физики и является логическим продолжением соответствующего теоретического курса, читаемого на физическом факультете МГУ.

Включенные в пособие материалы достаточны для подготовки к выполнению работ без привлечения дополнительной литературы. Однако в конце каждой задачи дан список литературы, позволяющий более глубоко познакомиться с теоретическим материалом, изучаемым в работе. В пособии выделено общее теоретическое введение, более подробное изложение теории содержится в описании к каждой лабораторной работе. Описания работ написаны в едином стиле: в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов, в разделе «основные итоги работы» перечислены основные физические результаты, которые должны быть получены и проанализированы студентом. Такой подход, по мнению авторов, приучает студентов к правильной организации проведения эксперимента и вполне уместен в первом семестре 1-го курса.

По объему отдельные задачи неодинаковы. На большинстве установок можно осуществить целый ряд опытов, выполнить которые за одно занятие затруднительно. В этих случаях преподаватель имеет возможность определить необходимый объем работы каждого студента. Прежде всего, это замечание относится к работам 5 и 6. В работе 5 рекомендуется за одно занятие выполнить одно из двух упражнений. В работе 6 оптимальным, по-видимому, является выполнение трех упражнений из четырех.

В постановке и модернизации отдельных работ совместно с авторами пособия принимали участие Е.И.Васильев (работа 6), А.В.Червяков (создание, изготовление и наладка электронных схем), Р.Н.Лазаренко, О.И.Старостина (наладка экспериментального оборудования).

Авторы выражают благодарность Е.И. Васильеву, В.Ю. Иванову, В.А.Караваеву, А.С. Нифанову, А.А.Якуте и другим сотрудникам кафедры, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд важных замечаний. Мы выражаем искреннюю признательность М.В.Семенову и А.П. Штырковой, вложившим свой труд в неформальное рецензирование рукописи, способствующее существенному его улучшению.

*А.М.Салецкий  
А.И.Слепков*

# Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является *абсолютно твердым*. Это означает, что расстояние между двумя любыми точками не изменяется со временем, т.е. твердое тело не деформируется. В дальнейшем мы будем вместо термина "абсолютно твердое тело" использовать термин "твердое тело".

**Кинематика твердого тела.** Любое произвольное движение твердого тела можно представить как суперпозицию *поступательного и вращательного* движений. *Поступательным* называется такое движение, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям. В этом случае скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы, и его движение можно характеризовать движением одной лишь точки тела. Анализ такого движения производится по законам, справедливым для движения материальной точки.

*Вращательным движением относительно оси* называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами, лежащими на одной прямой, называемой *осью вращения*. При вращении твердого тела проекция радиуса-вектора каждой его точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения, за малый промежуток времени  $dt$  поворачивается на один и тот же угол  $d\varphi$ . Здесь  $d\varphi$  – вектор, длина которого равна углу поворота  $d\varphi$ , а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения.

Скорость изменения угла

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \quad (\text{B.1})$$

называется *угловой скоростью* и, так же как  $d\boldsymbol{\varphi}$ , является вектором.

Угловая скорость связана с линейной скоростью любой точки тела  $\mathbf{v}_i$  соотношением

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (\text{B.2})$$

где  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор любой указанной точки.

Изменение  $\boldsymbol{\omega}$  со временем определяется величиной *углового ускорения*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (\text{B.3})$$

Совместим начало системы координат, движущейся поступательно, с какой-либо точкой  $A$  твердого тела (точкой отсчета). Тогда скорость любой другой точки  $B$  тела можно представить как векторную сумму скорости движения системы координат  $\mathbf{v}_0$  (скорость точки  $A$ ) и  $\mathbf{v}'$  – относительной скорости точки  $B$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \quad (\text{B.4})$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем), поэтому и разложение (B.4) будет неоднозначным. Однако угол поворота  $d\boldsymbol{\varphi}$  за малый промежуток времени  $dt$  не зависит от выбора точки отсчета и является одинаковым для всех точек твердого тела.

С учетом (B.2) выражение (B.4) может быть представлено в следующем виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (\text{B.5})$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения твердого тела (не зависящая от выбора точки отсчета),  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, начало которого лежит в точке  $A$ . Поступательная скорость тела  $\mathbf{v}_0$  зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку  $A$  можно выбрать таким образом, чтобы  $\mathbf{v}_0$  была равна нулю. Для плоского, движения твердого тела\*) ось вращения, проходящая через точку  $A$ , является *мгновенной осью вращения\*\*)*. Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение вокруг некоторой мгновенной оси.

**Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси.** Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения для  $i$ -й материальной точки массы  $m_i$ , в лабораторной системе координат имеет вид:

\*) *Плоским движением твердого тела* называется движение, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях.

\*\*) *Мгновенная ось вращения* твердого тела – ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю.

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (\text{B.6})$$

где  $\mathbf{F}_i$  – сумма всех внешних сил, действующих на  $i$ -ю материальную точку,  $\mathbf{f}_{ij}$  – сила, действующая на  $i$ -ю материальную точку со стороны  $j$ -й материальной точки, т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы  $\mathbf{f}_{ij}$  и  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  коллинеарны.

Умножим обе части уравнения движения (B.6) на радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (\text{B.7})$$

С учетом того, что  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$  (так как  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$ , то  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$ ), в результате суммирования по всем точкам системы получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (\text{B.8})$$

Величина  $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  ( $\mathbf{p}_i$  – импульс  $i$ -й материальной точки) называется *моментом импульса* системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат;  $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  – *момент внешних сил* относительно той же точки; величина  $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$  является моментом всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (\text{B.9})$$

В связи с тем, что для центральных сил  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$ , уравнение (B.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (\text{B.10})$$

Это уравнение называется *уравнением моментов*.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение (B.10) сведется к скалярному уравнению. В частности, если ось вращения совпадает с осью координат  $z$ , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (\text{B.11})$$

где  $L_z$ ,  $M_z$  – соответственно проекции  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  на ось  $z$ .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$  скорость каждой материальной точки  $m_i$  тела будет равна,  $v_i = \omega \cdot \rho_i$  где  $\rho_i$  – ее расстояние до оси  $z$ . Проекция моментов импульса на ось  $z$  для этих точек будут равны  $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$ . В связи с тем, что  $\omega$  одинакова для всех точек твердого тела момент импульса всего тела относительно оси  $z$  будет равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (\text{B.12})$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (\text{B.13})$$

называют *моментом инерции твердого тела относительно закрепленной оси*, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (B.12) в (B.11), получаем *основное уравнение вращательного движения* тела вокруг закрепленной оси  $z$ :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (\text{B.14})$$

В связи с тем, что взаимное расположение точек в твердом теле не изменяется со временем, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (B.14) может быть представлено в следующем виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = J \varepsilon = M_z. \quad (\text{B.15})$$

При непрерывном распределении массы по объему для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегри-

рованием по всему объему тела, и тогда (В.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (\text{В.16})$$

Если известен момент инерции  $J_0$  относительно некоторой оси, проходящей через центр масс – точку с радиусом-вектором  $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i$ , ( $m_i$  – масса точки тела,  $\mathbf{r}_i$  – ее радиус-вектор), то в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера момент инерции тела  $J$  относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии  $a$  от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (\text{В.17})$$

где  $m$  – масса тела.

**Тензор инерции.** Предположим, что твердое тело закреплено таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки  $O$ . Введем в лабораторной системе отсчета декартову систему координат  $XYZ$  с началом в этой точке. Произвольная  $i$ -я точка твердого тела массы  $m_i$  будет иметь скорость  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости вращения твердого тела, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где в данный момент времени находится  $i$ -я материальная точка. Момент импульса этой точки равен по определению

$$\mathbf{L}_i \equiv m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i]] = m_i [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})].$$

Векторы  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}_i$  можно рассматривать как в лабораторной системе координат  $XYZ$ , так и в системе координат  $xuz$ , жестко связанной с телом.

Перепишем выражение для  $\mathbf{L}_i$  в проекциях на оси системы координат  $xuz$ , начало которой лежит в точке  $O$ . Учитывая, что

$$(\mathbf{r}_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad \text{а} \quad (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z,$$

получаем

$$\begin{aligned} L_{ix} &= m_i \left[ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] = \\ &= m_i \left[ \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iy} &= m_i \left[ \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iz} &= m_i \left[ \omega_z (x_i^2 + y_i^2) - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y \right]. \end{aligned} \quad (\text{В.18})$$

Момент импульса всего твердого тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных масс:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \left[ \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \right]. \quad (\text{В.19})$$

Учитывая (В.18), соотношение (В.19) можно переписать в проекциях на координатные оси

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z, \\ L_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (\text{В.20})$$

Совокупность девяти величин  $J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}$  определяет тензор инерции

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{В.21})$$

Проекции момента импульса на оси координат (В.20) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой  $O$  (центром вращения), поэтому из (В.18) и (В.20) получаем

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Отметим, что выражение (B.19) принимает точно такой же вид, если векторы  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}_i$  проецировать на оси лабораторной системы координат  $XYZ$ . Отличие заключается в том, что в покоящейся лабораторной системе координат постоянно меняются координаты  $x_i, y_i, z_i$  каждого бесконечно малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора  $\hat{J}$  меняются со временем. В выбранной системе координат  $xuz$  радиус-вектор  $\vec{r}_i$  — неизменная величина, а проекции угловой скорости  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  меняются со временем.

Диагональные элементы тензора  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  называются *осевыми моментами инерции*. Недиagonальные элементы  $J_{xy}, J_{yx}, J_{xz}, J_{zx}, J_{yz}, J_{zy}$  называются *центробежными моментами инерции*.

Тензор инерции является симметричным, так как  $J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}, J_{yz} = J_{zy}$ . Симметричный тензор всегда можно привести к диагональному виду, т.е. выбрать такую систему координат, определяемую формой тела, в которой все недиагональные элементы будут равны нулю. Соответствующие направления координатных осей называются *главными осями инерции*, а величины  $J_x \equiv J_{xx}, J_y \equiv J_{yy}, J_z \equiv J_{zz}$  — *главными моментами инерции*. Оси, проходящие через центр масс тела, будем называть *центрными осями*, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, будем называть *главными центральными осями*.

**Связь между моментом инерции и компонентом тензора инерции.** Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой закрепленной оси  $AA'$ , имеющей произвольное направление в пространстве. Представим радиус-вектор  $i$ -й материальной точки

массы  $dm$  в виде  $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\rho}_i$ , где  $\mathbf{d}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_i \perp \boldsymbol{\omega}$  (вектор  $\boldsymbol{\omega}$  направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта) (рис.1). Так как ось  $AA'$  закреплена, то линейная скорость точки перпендикулярна этой оси и равна  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ . Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат  $xuz$  ось  $AA'$  (рис.1) лежит в плоскости  $xu$ , а тензор инерции имеет диагональный вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Вектор угловой скорости будет иметь компоненты  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$ . В соответствии с (B.20)  $L_x = J_x \omega_x, L_y = J_y \omega_y, L_z = 0$ .

Отсюда следует, что в общем случае ( $J_x \neq J_y$ ) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, не совпадает с направлением вектора угловой скорости. Кроме того (см. B.19), в рассматриваемом случае положение вектора  $\mathbf{L}$  жестко связано с телом. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси  $AA'$ . Вектор

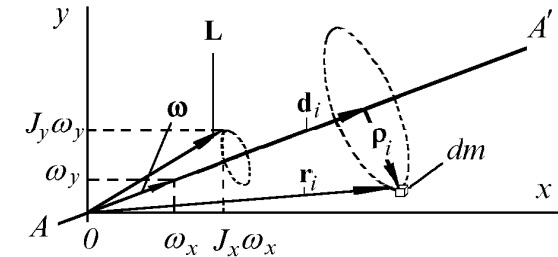


Рис. 1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси

$\mathbf{L}$  так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие — одну, совпадающую с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , и другую, перпендикулярную к нему, т.е.  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{AA'} + \mathbf{L}_\perp$ . В этом случае векторное уравнение моментов (B.10) можно разбить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{dL_{\perp}}{dt} = M_{\perp}. \quad (\text{B.24})$$

В уравнении (B.23)  $M_{AA'}$  — это проекция момента внешних сил на ось  $AA'$  (включая силы трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг закрепленной оси. В уравнении (B.24)  $M_{\perp}$  — это перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил, включая силы упругости, действующие на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора  $\mathbf{L}$  вокруг  $AA'$ . Уравнение (B.24) необходимо решать, если встает вопрос о деформациях, возникающих в оси.

Уравнение (B.23) совпадает с рассмотренным выше уравнением (B.11). Из него следует основное уравнение (B.15) вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Значение момента инерции  $J$  твердого тела относительно некоторой оси, можно найти, зная направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора инерции. Выразим момент инерции относительно закрепленной оси  $AA'$ , проходящей через начало координат, через компоненты тензора  $\hat{J}$ . Пусть система координат  $x, y, z$  расположена произвольным образом относительно тела так, что все компоненты тензора  $\hat{J}$  являются ненулевыми.

Воспользуемся соотношением  $L_{AA'} = \omega J$ . С учетом (B.20) и того, что

$$L_{AA'} = L_x \cdot \cos \alpha + L_y \cdot \cos \beta + L_z \cdot \cos \gamma, \quad \omega_x = \omega \cdot \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cdot \cos \beta,$$

$\omega_z = \omega \cdot \cos \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, определяющие положение оси  $AA'$  относительно осей координат (см. рис. 2), получим

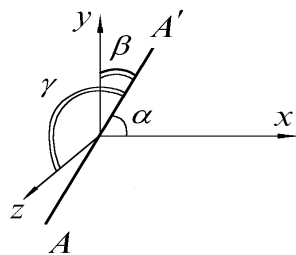


Рис. 2. Положение оси  $AA'$  относительно системы координат

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yx} \cos \beta \cos \gamma. \quad (\text{B.25})$$

Уравнение (B.25) может быть использовано и для решения обратной задачи — определения компонент тензора инерции  $\hat{J}$  через известные значения моментов инерции  $J$  относительно нескольких различных закрепленных осей.

### Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М: Высшая школа, 1986, гл. 8.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. 3-е изд. М: Наука, 1989.
3. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Механика: Учебн. для студ. вузов / Под ред. В.А. Алешкевича.— М.:Академия, 2004. Разд. 3.



# 1 Изучение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси

## Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

## Идея эксперимента

В эксперименте исследуется вращательное движение закрепленной на оси системы тел, у которой может меняться момент инерции под действием различных моментов внешних сил.

## Теория

Основное уравнение вращательного движения твердого тела с моментом инерции  $J$  вокруг неподвижной оси  $z$  имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  — угловое ускорение,  $M$  — момент внешних сил.

Для экспериментального доказательства этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 3). Он состоит из четырех стержней  $A$  и двух шкивов различного радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , укрепленных на одной горизонтальной оси. По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении четыре (по одному на каждом стержне) груза одинаковой массы  $m'$ . При помощи груза массы  $m$ , прикрепленного к концу намотанной на тот или иной шкив нити, маятник может приводиться во вращение.

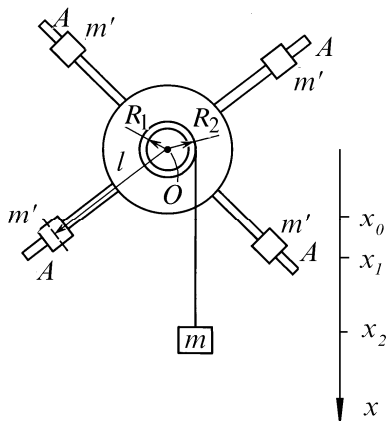


Рис. 3. Устройство маятника Обербека

Пренебрегая силами трения и считая нить невесомой и нерастяжимой, можем записать:

уравнение вращательного движения маятника

$$J\varepsilon = M \equiv RT, \quad (1.2)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T, \quad (1.3)$$

уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R. \quad (1.4)$$

Здесь  $R$  — радиус шкива,  $T$  — натяжение нити,  $a$  — линейное ускорение груза массы  $m$ ,  $g$  — ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (1.2–1.4) следует, что груз  $m$  должен двигаться с постоянным ускорением, равным

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g. \quad (1.5)$$

Основное уравнение вращательного движения (1.1) было записано без учета момента сил трения в оси маятника и момента сил вязкого трения о воздух. Для доказательства правомерности такого подхода в процессе выполнения работы необходимо убедиться, что суммарный момент сил трения  $M_{\text{тр}}$  много меньше момента силы натяжения нити  $M$ , который равен:

$$M = RT = Rm(g - a) = mgR \frac{J}{J + mR^2}.$$

С учетом неравенства  $mR^2 \ll J$  можно записать, что  $M \approx mgR$ .

Оценить величину момента сил трения можно, если предположить, что он остается неизменным во время движения. При опускании груза  $m$  с отметки  $x_0$  на полную длину нити до отметки  $x_3$  и при последующем подъеме до отметки  $x_4$  изменение его потенциальной энергии будет равно работе силы трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = M_{\text{тр}}\Phi,$$

где  $\Phi$  — полный угол поворота маятника Обербека. При этом

$$R\Phi = (x_3 - x_0) + (x_3 - x_4),$$

поэтому

$$M_{\text{тр}} = mgR \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)}.$$

Таким образом, условие записи основного уравнения вращательного движения без учета момента сил трения окончательно имеет вид

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} \ll 1. \quad (1.6)$$

### Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 4) состоит из основания (1), вертикальной колонны (2) с закрепленными на ней двумя подвижными кронштейнами (3, 4), на которых крепятся оптические датчики положения. На колонне закреплены два неподвижных кронштейна (5, 6).

На нижнем кронштейне (5) закреплен двухступенчатый вал (7). На верхнем кронштейне (6) закреплен подшипниковый узел (8) и блок (9). Через блок перекинута нить (10), один конец которой намотан на двухступенчатый вал (7), а на втором конце закреплен груз (11). На двухступенчатом валу крепится тело маятника (12).

Кронштейны с фотодатчиками могут крепиться на разной высо-

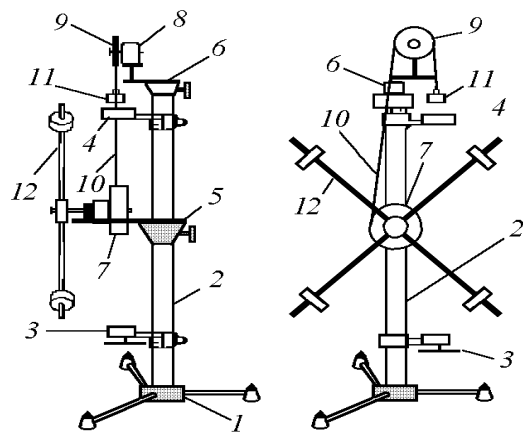


Рис. 4. Схема установки для изучения вращательного движения твердого тела

те. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на колонне. Время движения грузов определяют с помощью электронного таймера. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Проверка закона движения

Из (1.2)–(1.4) следует, что вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением  $\epsilon$ , при этом груз  $m$  опускается с постоянным линейным ускорением  $a$ . Координата  $x$  груза, отпущенного без начальной скорости с отметки  $x_0$  меняется по закону (ось  $x$  системы координат направлена вниз (см. рис. 3))

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (1.7)$$

Используя (1.7), определим время  $\Delta t$  пролета груза между двумя отметками  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}). \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что в случае равнопеременного движения ( $a = \text{const}$ ) и фиксированных положений  $x_0$  и  $x_2$ , зависимость времени  $\Delta t$  от  $\sqrt{x_1 - x_0}$  является линейной и изображается на графике прямой линией.

#### Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками.

2. Установить грузы  $m'$  в среднее положение, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начало движения груза  $m$  всегда осуществляют от одного и того же положения  $x_0$ , которое необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на вал большего диаметра виток к витку.

3. Опустить груз  $m$  и произвести измерение времени  $\Delta t$  пролета груза между фотодатчиками. Данные записать в таблицу 1.1. Провести измерения времени  $\Delta t$  для нескольких положений  $x_1$  верхнего датчика (рекомендуется менять  $x_1$  с шагом 5 см). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее трех раз.

4. Для 5–7 первых опытов измерить значения  $x_4$  — отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 1.1

5. Определить значение  $x_3$  — максимальной отметки, до которой опускается груз  $m$  при своем движении.

Таблица 1.1

$N$	$x_{1i}$	$x_4$	$\sqrt{x_{1i} - x_0}$	$\Delta t_{ij}$	$\langle \Delta t_i \rangle$	$S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								

## Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения фотодатчика  $x_1$  рассчитать среднее значение величины  $\Delta t_i$  по формуле

$$\langle \Delta t_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta t_{ij},$$

где  $N$  — число измерений при каждом фиксированном положении датчика  $x_1$ .

2. Вычислить погрешность измерения (выборочное стандартное отклонение)  $\langle \Delta t_i \rangle$

$$S_{\langle \Delta t_i \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{j=1}^N (\Delta t_{ij} - \langle \Delta t_i \rangle)^2}.$$

Результаты вычислений внести в табл. 1.1.

3. Построить зависимость  $\Delta t$  от  $\sqrt{x_1 - x_0}$ , которая должна быть линейной. Близость получившейся зависимости к линейной указывает на то, что движение тела является равнопеременным.

4. Найти среднее значение  $\langle x_4 \rangle$  и оценить величину  $M_{\text{тр}}/(mgR)$  по формуле (1.6). Убедиться в малости момента сил трения по сравнению с начальным моментом силы натяжения нити.

### Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил

В данном упражнении экспериментально показывается, что инерционные свойства маятника, а именно — момент инерции — не зависят от момента внешних сил.

Из уравнения (1.2) имеем

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.5), (1.8) следует, что

$$J = mR^2 \left( \frac{g\Delta t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (1.10)$$

В уравнение (1.10) входят величины, определяемые экспериментально.

## Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы  $R_1$  и  $R_2$  шкивов, результаты занести в рабочую тетрадь.

2. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Занести в рабочий журнал координаты фотодатчиков  $x_1, x_2$  и значение  $x_0$ .

3. Установить грузы  $m'$  в среднее положение, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

4. На конец нити, намотанной на шкив радиуса  $R_1$ , прикрепить груз массы  $m_1$  и измерить время прохождения груза между двумя фотодатчиками  $\Delta t$ . Одновременно измерить отметку  $x_4$ , до которой поднимается груз. Измерение провести 3 раза и результаты внести в табл. 1.2.

5. Перебросить нить на другой шкив (радиуса  $R_2$ ) и измерить время  $\Delta t$  и значение  $x_4$  (3 раза). Результаты занести в табл. 1.2.

6. Провести аналогичные измерения (пп.4–5), прикрепив к концу нити груз массы  $m_2$ . Результаты измерений занести в табл.1.2.

Таблица 1.2

Комбинации значений радиусов шкивов и масс при измерениях	$N$	$\Delta t_{ij}$	$x_4$	$\langle \Delta t_i \rangle$ , $S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	$J_i$ , $S_{J_i}$	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
$R_1, m_1$	1						
	2						
	3						
$R_2, m_1$	4						
	5						
	6						
$R_1, m_2$	7						
	8						
	9						
$R_2, m_2$	10						
	11						
	12						

	1						
	2						

## Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения величин  $\Delta t$  и ошибки их измерений для четырех различных опытов. Результаты вычислений занести в табл. 1.2.

2. Вычислить значения моментов инерции  $J_1 \div J_4$  по формуле (1.10).

3. Определить значение  $\langle x_4 \rangle$  для каждого опыта.

4. Найти отношение  $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$  аналогично тому, как

это было сделано в упр. 1. Результаты занести в табл. 1.2.

5. Произвести оценку погрешностей полученных результатов. Так как экспериментальные значения  $J_i$  являются результатом косвенных измерений, то стандартное отклонение функции нескольких независимых переменных находится через погрешности

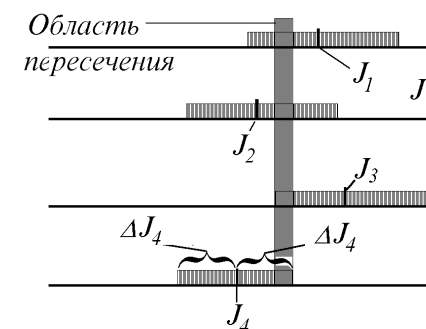


Рис. 5. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов

прямых измерений по методу, описанному в 1-й части.

6. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции  $J_1 \div J_4$  с учетом погрешностей на числовых осях (рис. 5). Пересечение этих областей будет указывать на выполнение соотношения (1.9), что свидетельствует о независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.

### Упражнение 3. Проверка основного уравнения вращательного движения и теоремы Гюйгенса–Штейнера

Пусть  $J'_0$  — суммарный момент инерции четырех грузов с массами  $m'$  относительно осей, проходящих через их центры масс. При удалении центров грузов на расстояние  $l = l_1$ , от оси враще-

ния (см. рис. 3), согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, момент инерции  $J'_1$  будет равен

$$J'_1 = J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (1.11)$$

Если  $J_0$  — момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника будет равен

$$J_1 = J_0 + J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (1.12)$$

При удалении центров масс грузов на расстояние  $l_2$  соответственно имеем

$$J_2 = J_0 + J'_0 + 4m'l_2^2. \quad (1.13)$$

С учетом уравнений (1.2)–(1.4) и (1.10) зависимость квадрата времени пролета груза между двумя отметками  $x_1$  и  $x_2$  от расстояния центра грузов  $m'$  от оси вращения  $l$  имеет вид

$$\Delta t^2 = \frac{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{g} \cdot \left[ 1 + \frac{J_0 + J'_0}{mR^2} + \frac{4m'}{mR^2} l^2 \right]. \quad (1.14)$$

Если  $l_1 > l_2$ , то

$$J_1 - J_2 = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (1.15)$$

Уравнения (1.14) и (1.15) дают

$$\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 = 8 \frac{m'}{m} \frac{l_1^2 - l_2^2}{R^2 g} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2, \quad (1.16)$$

где  $\Delta t_1, \Delta t_2$  — времена пролета груза между датчиками для случаев  $l = l_1, l = l_2$  соответственно.

В это уравнение входят величины, определяемые экспериментально.

#### Измерения

1. На конец нити, намотанной на шкив радиуса  $R_2$  (большого по размеру), прикрепить груз наибольшей массы. Фотодатчики оставить в том же положении, что и в упражнении 2.

2. Установить минимальное значение момента инерции маятника. Для этого грузы  $m'$  установить в положение, наиболее близкое к

оси. Измерить расстояние от грузов до оси. Занести это значение в табл. 1.3.

3. Определить величину  $\Delta t$  — время прохождения груза  $m$  между двумя фотодатчиками и  $x_4$  — отметку, до которой он поднимается в процессе движения. Измерения проводят 3 раза. Результаты заносят в табл. 1.3.

Таблица 1.3

$N$	$\Delta t_{ij}$	$x_4$	$\Delta t_i, S_{\Delta t_i}$	$(\Delta t_i)^2, S_{(\Delta t_i)^2}$	$l$	$l^2$	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
1								
2								
3								
. . . . .								

4. Изменяя положение грузов  $m'$  на стержнях с шагом 3 см, каждый раз измеряют время  $\Delta t$ . Результаты измерения и соответствующие им расстояния  $l$  от оси маятника до центров грузов записывать в табл. 1.3. Одновременно для каждого опыта измеряют и заносят в табл. 1.3 значения величины  $x_4$ .

#### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения грузов  $m'$  найти средние значения величин  $\Delta t_i$ .

2. Вычислить погрешности измерения  $\Delta t_i$  и  $(\Delta t_i)^2$ .

3. Построить график зависимости квадрата времени опускания груза  $(\Delta t)^2$  от  $l^2$  — это должна быть прямая линия.

4. Проверить соотношение (1.16) для нескольких пар значений  $\Delta t^2$  и  $l^2$ .

5. Для каждого момента инерции определить  $\langle x_4 \rangle$  и отношение  $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$ . Убедиться в выполнении приближения  $\frac{M_{\text{тр}}}{mR} \ll 1$ .

### Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть осуществлена экспериментальная проверка выполнения основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов. Должны быть проверены соотношения (1.9) и (1.16) и установлена линейная зависимость  $(\Delta t)^2$  от  $l^2$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений требуется для описания движения твердого тела?
2. Почему угловая скорость является вектором? Куда направлен этот вектор?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Куда он направлен? Что такое момент силы относительно закрепленной оси?
4. Что такое момент импульса системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
7. Как получить уравнение моментов и основное уравнение вращательного движения относительно закрепленной оси?

### Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986. §§ 31, 32, 34.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. М.: Наука, 1989. §§ 30,35.
3. Митин И.В., Русаков В.С. Обработка и анализ экспериментальных данных. — М.: НЭВЦ ФИПТ, 1998.— 48 с.

## 2 Определение моментов инерции тел простой формы и проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера методом крутильных колебаний

### Цель работы

Экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение моментов инерции тел простой формы.

### Идея эксперимента

В эксперименте используется связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника выбрана круглая платформа, подвешенная в поле тяжести на трех длинных нитях (трифилярный подвес). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. На платформу помещаются тела различной формы, измеряются периоды колебаний маятника и определяются значения моментов инерции этих тел. Теорема Гюйгенса–Штейнера проверяется по соответствию между экспериментальной и теоретической зависимостями моментов инерции грузов от их расстояния до центра платформы.

### Теория

*Теорема Гюйгенса–Штейнера.* Если момент инерции тела относительно некоторой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение  $J_0$ , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии  $a$  от первой и параллельной ей, он будет равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса тела.

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера в данной работе исследуются крутильные колебания твердого тела на трифилярном подвесе.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу радиуса  $R$ , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях одинаковой длины, укрепленных у ее краев (рис. 6). Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего размера (радиуса  $r$ ). Платформа может совершать кру-

тильные колебания вокруг вертикальной оси  $OO'$ , перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее центр. Такое движение платформы приводит к изменению положения ее центра тяжести по высоте.

Если платформа массы  $m$ , вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту  $h$ , то приращение потенциальной энергии будет равно

$$E_1 = mgh, \quad (2.2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Вращаясь в другом направлении, платформа придет в положение равновесия ( $h = 0$ ) с кинетической энергией, равной

$$E_2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2, \quad (2.3)$$

где  $J$  — момент инерции платформы,  $\omega_0$  — угловая скорость вращения платформы в момент прохождения ею положения равновесия.

Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$mgh = \frac{1}{2} J \omega_0^2. \quad (2.4)$$

Считая, что платформа совершает гармонические крутильные колебания, можно записать зависимость углового смещения платформы  $\alpha$  от времени  $t$  в виде

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad (2.5)$$

где  $\alpha$  — угловое смещение платформы,  $\alpha_0$  — угол максимального поворота платформы, т.е. амплитуда углового смещения,  $T$  — период колебаний. Для угловой скорости  $\omega$ , являющейся первой производной по времени от величины углового смещения, можно записать

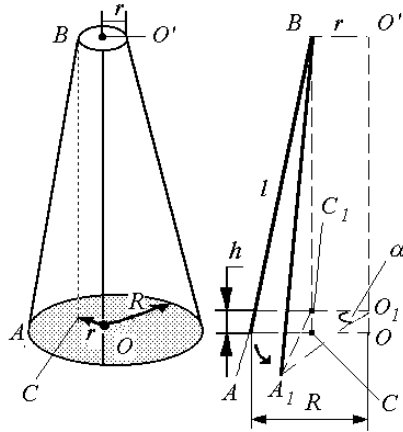


Рис. 6. Устройство трифилярного подвеса

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi a_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (2.6)$$

В моменты прохождения платформы через положение равновесия ( $t = 0; 0,5T; \dots$ ) величина  $\omega(t)$  будет максимальна и равна по модулю

$$\omega_0 = \frac{2\pi a_0}{T}. \quad (2.7)$$

Из выражений (2.4) и (2.7) следует, что

$$mgh = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi a_0}{T}\right)^2. \quad (2.8)$$

Если  $l$  — длина нитей подвеса,  $R$  — расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней,  $r$  — радиус верхнего диска (рис. 6), то легко видеть, что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (2.9)$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (2.10)$$

а при максимальном отклонении платформы от положения равновесия

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha_0), \quad (2.11)$$

то

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha_0)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1}. \quad (2.12)$$

При малых углах отклонения  $\alpha_0$  значение синуса этого угла можно заменить просто значением  $\alpha_0$ . Учитывая также, что при  $R \ll l$  величину знаменателя можно положить равной  $2l$ , получаем

$$h = \frac{Rr \alpha_0^2}{2l}. \quad (2.13)$$

При этом закон сохранения энергии (2.8) примет вид:

$$mg \frac{Rr \alpha_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi a_0}{T}\right)^2. \quad (2.14)$$

откуда следует, что

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (2.15)$$

По формуле (2.15) можно экспериментально определить момент инерции пустой платформы или платформы с телом, положенным на нее, так как все величины в правой части формулы непосредственно измеряются. Следует помнить, что  $m$  — это суммарная масса платформы и исследуемого тела, положенного на нее.

Соотношение (2.15) используется в лабораторной работе для определения моментов инерции тел простой формы и подтверждения справедливости теоремы Гюйгенса–Штейнера.

### Экспериментальная установка

Вид установки показан на рис. 6. Отношение радиуса платформы к длине нитей подвеса составляет  $R/l \leq 0,05$ , что соответствует приближениям, используемым при выводе формулы (2.15).

Тела на платформу необходимо устанавливать строго симметрично, так, чтобы не было перекоса платформы. Для облегчения определения положения грузов и более точной их установки на платформе нанесены концентрические окружности на определенном расстоянии друг от друга (5 мм).

Вращательный импульс, необходимый для запуска крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего диска вокруг его оси. Это достигается с помощью шнура, связанного с рычагом, закрепленным на верхнем диске. При таком возбуждении колебаний почти полностью отсутствуют другие типы колебаний, наличие которых затрудняет измерения<sup>1)</sup>.

Система измерения времени включает в себя электронный таймер с фотодатчиком, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

<sup>1)</sup> При измерениях недопустимо пользоваться амплитудами колебаний, большими  $10^\circ$ .

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера

#### Измерения

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера выбирают два одинаковых тела (в данной работе они имеют цилиндрическую форму). Перед каждым измерением следует остановить колебания платформы.

1. Произвести взвешивание грузов.

2. Установить грузы в центре платформы, положив их один на другой. Создать крутильные колебания платформы. Измерить время  $t_n$  нескольких колебаний ( $n = 15\text{--}20$ ). Данные занести в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер опыта	$a$	$a^2$	$n$	$t_n$	$T_i = \frac{t_n}{n}$	$J_i$
1						
2						
3						
.....						

3. Расположить грузы симметрично на платформе. Провести измерения времени колебаний  $t_n$  для 5–7 положений грузов, постепенно перемещая их к краям платформы. Рекомендуется проводить измерения через 1 см. Занести в табл. 2.1 значения расстояний от центра масс каждого тела до центра платформы, число колебаний  $n$  и значения времени этих колебаний  $t_n$ .

#### Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов определить период колебаний грузов  $T_i$ .

2. Занести в таблицу значения  $a^2$ .

3. Для каждого положения грузов найти значения момента инерции платформы с грузами  $J_i$  по формуле (2.15).



4. Полученные значения  $J_i$  нанести на график зависимости момента инерции системы тел от квадрата расстояния центра масс каждого груза до оси вращения  $J(a^2)$  (схематично эта зависимость представлена на рис. 7).

Как следует из теоремы Гюйгенса–Штейнера, этот график должен быть прямой линией, с угловым коэффициентом численно равным  $2m_{гр}$ .

5. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) построить зависимость  $J$  от  $a^2$ ,  $J = B + Aa^2$ . Определить погрешности определения значений  $A$  и  $B$  по формулам МНК.

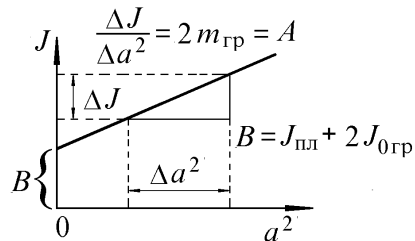


Рис. 7. Схематическое представление зависимости  $J$  от  $a^2$

Из зависимости  $J(a^2)$  определить значение  $m_{гр} = A/2$ . Сравнить полученное значение с массами грузов  $m_{гр}$ , найденными при взвешивании. Совпадение этих величин (с учетом погрешностей вычислений) также указывает на выполнимость теоремы Гюйгенса–Штейнера.

### Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний

#### Измерения

1. Сообщают платформе вращательный импульс и измеряют время  $t_n$  некоторого числа ( $n = 15-20$ ) полных колебаний, что дает возможность достаточно точно определить величину периода колебаний пустой платформы  $T_{пл}$ . Такие измерения проводят 3–5 раз. Полученные результаты заносят в табл. 2.2. Для того, чтобы облегчить оценку погрешностей эксперимента, для каждой серии экспериментов значения  $n$  выбирают одинаковыми.

2. Платформу поочередно нагружают исследуемыми телами таким образом, чтобы их центр масс совпадал с осью вращения платформы (совпадали отверстия в теле и на платформе). Масса этих

тел известна или может быть определена с помощью взвешивания. В качестве исследуемых тел выбирают пластины, имеющие форму квадрата и равностороннего треугольника. Измеряют время  $t_n$  нескольких колебаний всей системы. Для каждого тела проводят измерения 3–5 раз. Результаты измерений заносят в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Тело	№ эксп.	$n$	$t_n$	$T_n$	$T$	$S_T$	$J$	$S_J$
1. Пустая платформа	1							
	2							
	3							
2. Платформа с квадратной пластиной	1							
	2							
	3							
3. Платформа с треугольной пластиной	1							
	2							
.....								

#### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого опыта найти значение величины периода крутильных колебаний

$$T_{ni} = \frac{t_{ni}}{n}.$$

2. Найти средние арифметические значения и среднеквадратичные отклонения для периодов колебаний пустой платформы ( $T_{пл}$ ) и платформы с исследуемыми телами ( $T_2$  и  $T_3$ ).

3. По формуле (2.15) определить величины  $J_{пл}$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и среднеквадратичные отклонения этих величин.

4. Вычислить моменты инерции квадратной и треугольной пластин по формулам:

$$J_{кв} = J_2 - J_{пл}, \quad J_{тр} = J_3 - J_{пл}. \quad (2.16)$$

Найти среднеквадратичные отклонения этих величин.

5. Провести сравнение экспериментально полученных значений  $J_{кв}$  и  $J_{тр}$  с рассчитанными теоретически (см. Приложение) по формулам:

$$J_{\text{кв}} = \frac{1}{6}md^2 \quad (2.17)$$

для квадрата и

$$J_{\text{тр}} = \frac{1}{12}md^2 \quad (2.18)$$

для равностороннего треугольника, где  $m$  — масса пластины,  $d$  — его сторона.

6. Провести сопоставление величины  $J_{\text{пл}}$  с величиной  $B$ , полученной в упр.1, таким образом проверить соотношение  $B = J_{\text{пл}} + 2\left(\frac{md^2}{2}\right)$  ( $\frac{md^2}{2}$ ) — момент инерции дисков, используемых при выполнении упр.1).

### Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть проведена проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера. Должно быть также проведено сравнение экспериментально найденного значения момента инерции для тела заданной формы с соответствующим значением, рассчитанным теоретически.

### Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры?
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

### Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986. §31,32,34.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. М.: Наука, 1989. §30,35.
3. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика: Учебн. для студ. вузов / Под ред. В.А. Алешкевича.— М.: Академия, 2004. Лекция 12.

## 3 Определение моментов инерции тел простой формы

### Цель работы

Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.

### Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью, крутильного маятника. В процессе эксперимента находится период колебаний маятника и коэффициент жесткости пружины. Моменты инерции исследуемых тел определяются из этих данных.

### Теория

Соотношение между моментом количества движения  $L$  твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, и моментом внешних сил  $M$  имеет вид:

$$\frac{d}{dt}L = M. \quad (3.1)$$

В свою очередь, момент количества движения относительно одной из главных осей вращения абсолютно твердого тела связан с осевым моментом инерции  $J$  угловой скоростью  $\omega$  следующим соотношением

$$L = J\omega. \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) соотношение (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.3)$$

где  $\varphi$  — угол поворота тела вокруг оси.

Рассмотрим случаи, когда тело, закрепленное на оси, совершает крутильные колебания под действием спиральной пружины (рис. 8). В соответствии с законом Гука для небольших отклонений от

положения равновесия для вращающего момента упругой пружины можно записать

$$M = -D\varphi, \quad (3.4)$$

где  $D$  – жесткость пружины.

С учетом (3.3) и (3.4) можно записать уравнение движения тела:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0 \quad (3.5)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{J}\varphi = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) для частоты колебаний крутильного маятника  $\omega_0$  ( $\omega_0 = 2\pi/T$ ) получаем

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}. \quad (3.7)$$

Период колебаний  $T$ , в свою очередь, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad (3.8)$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях  $a$  от оси вращения. В этом случае момент инерции маятника в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$J = J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}}a^2 + 2J_{\text{гр}}, \quad (3.9)$$

где  $J_0$  – момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов,  $J_c$  – момент инерции стержня,  $J_{\text{гр}}$  – момент инерции груза относительно его центра масс,  $m_{\text{гр}}$  – масса груза. Тогда период колебаний (см. (3.8)) запишется так:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}}a^2 + 2J_{\text{гр}}}{D}}, \quad (3.10)$$

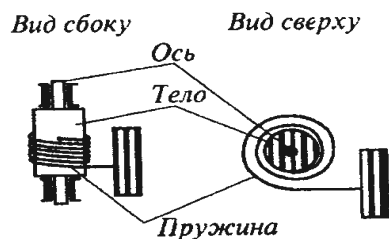


Рис. 8. Схематическое представление крутильного маятника

т.е. квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния  $a$

$$T^2 = 4\pi^2 \left( \frac{J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}}}{D} \right) + \frac{4\pi^2 \cdot 2m_{\text{гр}}}{D} a^2. \quad (3.11)$$

На рис. 9 схематично представлена зависимость  $T^2$  от  $a^2$ . Зная эту зависимость, можно легко определить коэффициент жесткости пружины  $D$  (через угловой коэффициент прямой  $A = 8\pi^2 m_{\text{гр}}/D$  и величину  $J_0$  (используя значение  $B$  (см. рис.9) и рассчитанные значения  $J_c$  и  $J_{\text{гр}}$ ).

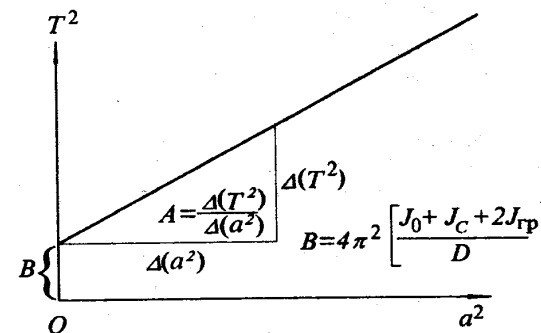


Рис. 9. Схематичное представление зависимости квадрата колебаний крутильного маятника от квадрата расстояния до центра масс груза  $m_{\text{гр}}$ , укрепленного на стержне

Если теперь вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело с неизвестным моментом инерции  $J_x$ , то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_x}{D}}, \quad (3.12)$$

откуда

$$J_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_0. \quad (3.13)$$

### Экспериментальная установка

Установка состоит из крутильного маятника, системы для измерения времени колебаний и набора образцов, для которых производят измерения моментов инерции (рис. 10).

Крутильный маятник может вращаться вокруг вертикальной оси. Пружина маятника изготовлена из упругой стальной проволоки.

Система измерения времени включает в себя электронный таймер с фотодатчиком, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка – кнопкой "Стоп". При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки "Сброс".

В наборе съемных образцов имеются стержень с цилиндрическими грузами, цилиндр, шар, диск. Образцы крепятся на вертикальной оси маятника.

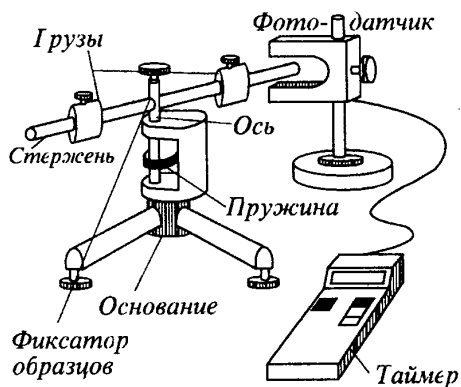


Рис.10. Блок-схема экспериментальной установки

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Производят измерения периода малых колебаний маятника для различных положений грузов, строят зависимость квадрата периода колебаний от квадрата расстояния  $a$ .

### Измерения

1. Определить массу стержня  $m_c$ , массу груза  $m_{гр}$ , длину стержня  $l_c$ , радиус отверстия  $R_1$ , внешний радиус  $R_2$  и длину цилиндрических грузов  $l_{гр}$ , крепящихся на нем. Данные занести в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$m_c$	$m_{гр}$	$l_c$	$R_1$	$R_2$	$l_{гр}$
-------	----------	-------	-------	-------	----------

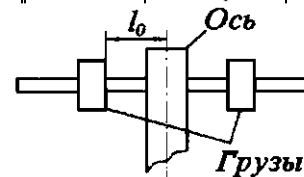


Рис.11. Положение грузов на стержне крутильного маятника

--	--	--	--	--	--

2. Закрепить на маятнике стержень с цилиндрическими грузами, расположив его симметрично относительно оси вращения так, как показано на рис. 11.

3. Установить грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Записать расстояние от грузов до оси  $l_0$  (см. рис. 11) в табл. 3.2.

4. Измерить время  $t_n$  нескольких колебаний\*) ( $n=10-20$ ). Данные занести в табл. 3.2.

5. Произвести измерения времени колебаний  $t_n$  для 7–9 положений грузов, постепенно перемещая их к краям стержня. Рекомендуется проводить измерения через каждые 2 см.

### Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов вычислить период колебаний  $T$  и квадрат этой величины. Результаты занести в табл. 3.2.

\*) Угловые амплитуды колебаний маятника должны быть  $\sim 5-7^\circ$ .

Таблица 3.2

Номер измерения	$l_0$	$n$	$t_n$	$T$	$T^2$	$a^2$
1						
2						
3						
.						

2. Определить значения  $a^2 = (l_0 + l_{гр}/2)^2$  для каждого положения грузов.

3. Построить зависимость  $T^2$  от  $a^2$ . С помощью метода наименьших квадратов (МНК) определить коэффициенты  $A$  и  $B$  в зависимости  $T^2 = B + Aa^2$  по соответствующим формулам МНК. Определить ошибки значений  $A$  и  $B$ . Результаты занести в табл. 3.3.

4. По наклону этой прямой (см. рис. 9) в соответствии с (3.11) определить коэффициент жесткости пружины

$$D = 4\pi^2 (2m_{гр}/A).$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

$A$	$S_A$	$B$	$S_B$	$D$	$S_D$	$J_c$	$S_{J_c}$	$J_{гр}$	$S_{J_{гр}}$	$J_0$	$S_{J_0}$

5. Определить стандартное отклонение значения коэффициента жесткости –  $S_D$ . Результаты записать в табл. 3.3.

6. Определить моменты инерции стержня и грузов по формулам (см. Приложение)

$$J_c = \frac{1}{12} m_c l_c^2; \quad J_{гр} = \frac{1}{12} m_{гр} l_{гр}^2 + \frac{1}{4} m_{гр} (R_1^2 + R_2^2)$$

и стандартные отклонения для этих величин. Результаты вычислений внести в табл. 3.3.

7. В соответствии с (3.11)  $B = 4\pi^2 (J_0 + J_c + 2J_{гр})/D$ , т.е.

$$J_0 = \frac{BD}{4\pi^2} - J_c - 2J_{гр}.$$

Определить величину момента инерции тела маятника  $J_0$  и ее стандартное отклонение<sup>\*</sup>). Результаты вычислений занести в табл. 3.3.

### Упражнение 2. Определение моментов инерции тел простой формы.

В этом упражнении проводится измерение моментов инерции цилиндра, шара и тонкого диска.

#### Измерения

1. Определить массу (путем взвешивания) и геометрические размеры цилиндра, шара и диска. Оценить погрешности измерений. Результаты измерений занести в табл. 3.4.

2. Закрепить цилиндр на оси маятника. Три раза измерить время  $t_n$  нескольких колебаний ( $n = 10-15$ ). Данные занести в табл. 3.5.

Таблица 3.4

Тело	$m$	$S_m$	$R$	$S_R$	$h$	$S_h$
Цилиндр						
Шар						
Диск						

Таблица 3.5

Тело	$N$	$n$	$t_n$	$T$	$\langle T \rangle$	$S_T$	$J_{эксп}$	$S_{J_{эксп}}$	$J_{теор}, \pm S_{J_{теор}}$
Цилиндр									
Шар									
Диск									

<sup>\*</sup>) Момент инерции маятника незначителен, поэтому при больших погрешностях его определения (большие амплитуды колебаний и т.д.) вычисления могут давать отрицательные значения его величины.

4. Провести аналогичные измерения для шара и диска. Данные измерений занести в табл. 3.4 и 3.5.

### Обработка результатов

1. Для каждого опыта вычислить значение периода колебаний.
2. Определить выборочные средние значения (средние арифметические значения) периода колебаний  $\langle T \rangle$  для каждого тела. Результаты внести в табл. 3.5.
3. Вычислить выборочные стандартные отклонения (среднеквадратичные ошибки) для  $\langle T \rangle$ . Результаты вычислений внести в табл. 3.5.
4. По формуле (3.13) определить значения моментов инерции цилиндра, шара и диска (соответственно  $J_{ц}^{эксп}$ ,  $J_{ш}^{эксп}$ ,  $J_{д}^{эксп}$ ). Занести эти значения в табл. 3.5.
5. Найти стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 3.5.
6. Рассчитать теоретические значения моментов инерции цилиндра, шара и диска по формулам (см. Приложение):

$$J_{ц}^{теор} = \frac{1}{2} m_{ц} R_{ц}^2; \quad J_{ш}^{теор} = \frac{2}{5} m_{ш} R_{ш}^2; \quad J_{д}^{теор} = \frac{1}{2} m_{д} R_{д}^2.$$

7. Сравнить экспериментальные и теоретические значения моментов инерции всех исследованных тел (должны перекрываться области  $J_{эксп} - S_{J_{эксп}}$ ,  $J_{эксп} + S_{J_{эксп}}$ ) и ( $J_{теор} - S_{J_{теор}}$ ,  $J_{теор} + S_{J_{теор}}$ ).

### Основные итоги работы

*В процессе выполнения работы должны быть определены коэффициент жесткости пружины, момент инерции маятника, шара, цилиндра, диска и проведено сравнение последних трех значений со значениями, рассчитанными теоретически.*

### Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989. гл.V.
2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика: Учебн. для студ. вузов / Под ред. В.А. Алешкевича.— М.: Академия, 2004. Лекция 12.

# 4 Определение момента инерции колеса

## Цель работы

Знакомство с методами определения момента инерции твердого тела.

## Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй — на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Кроме того, проводится прямой расчет момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

## Теория

Уравнение вращательного движения для твердого тела, закрепленного на оси, имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (4.1)$$

где  $J$  — момент инерции твердого тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $M$  — момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением массы тела. В частности, для тела, состоящего из конечного числа элементарных (малых) масс  $m_i$

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (4.2)$$

где  $\rho_i$  расстояние от элементарной массы до оси вращения. В общем случае, для сплошных тел, суммирование заменяется интегрированием:

$$J = \int \rho^2 dm.$$

Для некоторых тел простой формы, возможен прямой расчет момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью анализа колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело, и с помощью изучения вращательного движения этого тела.

**Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника.** Если закрепить исследуемое тело  $A$  на горизонтальной оси  $O$ , проходящей через центр масс (рис. 12), то момент сил тяготения будет равен нулю, и тело остается в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении  $L$  от оси малое тело  $B$  с известной массой  $m$ , то равновесие перестанет быть безразличным — при равновесии момент силы тяжести, действующий на тело  $B$  будет равен нулю. Такую систему тел можно рассматривать как физический маятник.

Уравнение движения такого маятника имеет вид

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi, \quad (4.3)$$

где  $J, J_B$  — моменты инерции твердого тела  $A$  и дополнительного грузика  $B$  относительно оси  $O$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\varphi$  — угол отклонения тела от положения равновесия,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  — его угловое ускорение.

Если углы отклонения малы ( $\varphi \leq 10^\circ$ ), то  $\sin \varphi \approx \varphi$  и можно записать

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgL\varphi = 0. \quad (4.4)$$

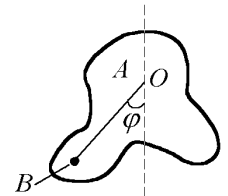


Рис. 12.  
Схематическое представление физического маятника

Данное уравнение является уравнением собственных (свободных) гармонических колебаний, его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (4.5)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  — собственная циклическая частота,  $T$  — период колебаний,  $\varphi_0$  — амплитуда колебаний,  $\theta_0$  — начальная фаза колебаний.

Дважды дифференцируя соотношение (4.5) по времени, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \varphi. \quad (4.6)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.6), находим, что

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + J_B}. \quad (5.7)$$

В связи с тем, что размеры малого тела  $B$  во много раз меньше расстояния до оси  $L$ , можно считать его материальной точкой и положить

$$J_B = mL^2. \quad (4.8)$$

Тогда из уравнений (4.7) и (4.8) получаем

$$J = mL \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (4.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции твердого тела можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нем добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние  $L$ , по формуле (4.9) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (4.9) не учитывалось влияние момента сил трения ( $M_{\text{тр}}$ ) в оси. Это приближение обусловлено тем, что при достаточно малом  $M_{\text{тр}}$  его воздействие приводит прежде всего к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и практически не влияет на их период.

**Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения.** Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело  $A$ , закрепленное на оси  $O$ ,

проходящей через центр масс (рис.13). Соосно с телом закреплен цилиндр  $C$ , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом  $B$ .

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело  $A$  во вращение. Уравнение движения груза  $B$ , уравнение вращательного движения тела  $A$  и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (4.10)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (4.11)$$

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (4.12)$$

где  $m$  — масса груза  $B$ ,  $J$  — момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром  $C$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $T$  — натяжение нити,  $r$  — радиус цилиндра, на который намотана нить,  $M_{\text{тр}}$  — момент сил трения,  $a$  — ускорение тела  $B$ .

Из уравнений (4.10)–(4.12) получаем

$$J = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}. \quad (4.13)$$

Таким образом, если известно ускорение груза  $B$  и момент сил трения в оси, то по формуле (4.13) мы можем определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться с отметки  $x_0 = 0$ , а мы измеряем время  $\Delta t$  прохождения его между двумя точками  $x_1$  и  $x_2$ . Движение груза на участке  $x_1 - x_2$  является равноускоренным, и можно записать

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (4.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \quad (4.15)$$

где  $t_1$  — время прохождения участка  $x_1 - x_0$ ,  $\Delta t$  — время прохождения участка  $x_2 - x_1$ .

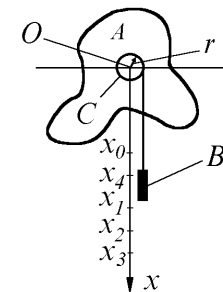


Рис. 13. Схематическое представление твердого тела, закрепленного на оси и вращающегося



Из (4.14) и (4.15) следует:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}). \quad (4.16)$$

Решая это уравнение относительно ускорения  $a$ , находим

$$a = 2 \frac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{\Delta t^2}. \quad (4.17)$$

Таким образом, для определения  $a$  нам нужно знать  $x_0, x_1, x_2$  и время  $\Delta t$  прохождения грузика между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассмотрим соотношения, позволяющие определить момент сил трения.

При опускании груза с отметки  $x_0$  на полную длину нити до отметки  $x_3$  его потенциальная энергия переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, по величине равное работе сил трения,

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi \cdot M_{\text{тр}}, \quad (4.18)$$

где  $\Phi$  — полный угол поворота тела при его опускании,  $E_k$  — кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того, как груз опустится на полную длину нити до отметки  $x_3$ , тело будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки  $x_4$ . Очевидно,

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 \cdot M_{\text{тр}}, \quad (4.19)$$

где  $\Phi_1$  — полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что  $(x_3 - x_0) = r\Phi$  и  $(x_3 - x_4) = r\Phi_1$ , получаем величину момента силы трения

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (4.20)$$

### Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное колесо (рис. 14), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен груз. Помещая груз в устройство для его крепления, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной шкале. В том случае, когда груз освобожден (при этом устройство для его крепления снимается с колеса), под действием силы тяжести он начинает опускаться, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации периода колебаний колеса и времени опускания груза.

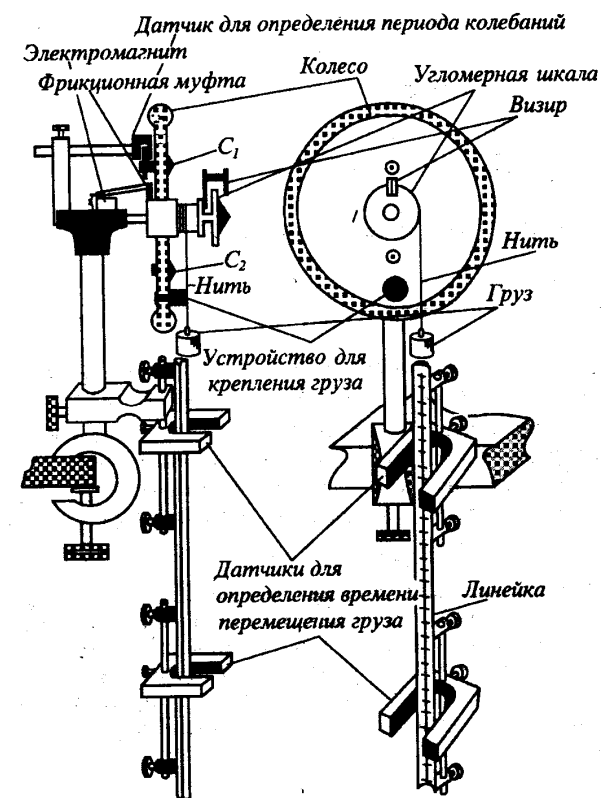


Рис. 14. Блок-схема установки для определения момента инерции колеса

Для регистрации периода колебаний на колесе симметрично расположены два легких одинаковых по массе тела  $C_1$  и  $C_2$ . На теле  $C_1$  закреплен стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний. В исходном положении система зафиксирована с помощью фрикционной муфты, управляемой электромагнитом (при таком положении муфты светится лампа индикации на кнопке управления электромагнитом). При выключении электромагнита фрикционная муфта освобождает колесо, и оно начинает движение (колебательное или вращательное). Время колебаний колеса определяется с помощью электронного таймера. Время перемещения груза при вращательном движении колеса определяется с помощью того же таймера, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков определяется с помощью линейки (рис. 14).

Запуск таймера в режиме измерения периодов колебаний осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При измерении времени опускания груза нажимают на кнопку «Пуск», после чего на индикаторе электронного таймера высвечивается время прохождения груза между двумя датчиками положения. Переключение таймера в тот или иной режим работы осуществляется тумблером «Колеб.–Вращ.». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло нажатием кнопки «Сброс».

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний

##### Измерения

1. На краю колеса закрепляют устройство для крепления груза, в которое устанавливают груз. Колесо выводят из положения равновесия на угол, не превышающий  $10^\circ$ . С помощью секундомера определяют время  $t_n$   $n$  полных колебаний ( $n=10 \div 15$ ). Такое измерение проводят 3–5 раз. Результаты измерений времени заносятся в табл. 4.1.

2. После этого не менее трех раз измеряют расстояние  $L$  от оси вращения до центра масс груза (это есть расстояние от оси враще-

ния до центра винта, закрепляющего устройство крепления груза на колесе). Результаты заносятся в табл. 4.1.

3. Взвешивают устройство для крепления груза и сам груз. Значение масс этих тел  $m_k$  и  $m_{гр}$  заносят в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$N$	$n$	$t_n$	$T_n$	$\langle T \rangle$	$S_T$	$L_N$	$\langle L \rangle$	$S_L$	$m_k, m_{гр}$	$J$	$S_J$
1											
2											
3											
4											
5											

### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить выборочные средние значения (средние арифметические значения) величин периода  $T$  и расстояния  $L$ .

2. Вычислить выборочные стандартные отклонения (среднеквадратичные ошибки среднего арифметического) для  $T$  и  $L$ .

3. По полученным данным, пользуясь уравнением (4.9) и учитывая, что в этом уравнении  $m = m_k + m_{гр}$ , определить момент инерции колеса  $J$ .

4. Оценить погрешности для  $J$ , используя следующую формулу для расчета погрешностей косвенных измерений:

$$S_J(L, T, m, g) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial L} S_L\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} S_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m} S_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial g} S_g\right)^2}, \quad (4.21)$$

где  $S_m$  дана в описании используемых весов, а  $S_g$  находится из таблиц физических постоянных.

#### Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения

##### Измерения

1. Снять с колеса устройство для крепления груза.

2. Измерить время  $\Delta t$  прохождения груза между отметками  $x_1$  и  $x_2$ . Измерения провести не менее 5–7 раз для фиксированных значений  $x_0$ ,  $x_2$  и разных  $x_1$ , каждый раз занося данные в табл. 4.2. Измеряют также координату  $x_3$  точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координату  $x_4$  точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться.

3. Несколько раз измерить радиус  $r$  цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 4.2

$N$	$x_1$	$x_2$	$\Delta t$	$a_N$	$\langle a \rangle$	$S_a$	$x_0$	$x_3$	$x_4$	$M_{\text{тр}}$	$\langle M_{\text{тр}} \rangle$	$S_{M_{\text{тр}}}$
1												
2												
3												
.....												

#### Обработка результатов

1. По формулам (4.17) и (4.20) определить ускорения  $a_n$  и моменты сил трения  $M_{\text{тр}}$  для каждого измерения. Результаты измерений занести в табл. 4.2.

2. Поскольку  $a_N$ ,  $M_{\text{тр}}$  определяются для различных значений  $x_1$ , то будем считать полученные значения ускорений и моментов сил трения независимыми. Найти выборочные средние значения ускорения и момента сил трения и выборочные стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 4.2.

3. Вычислить выборочное среднее значение радиуса цилиндра  $\langle r \rangle$  и среднеквадратичную ошибку этой величины.

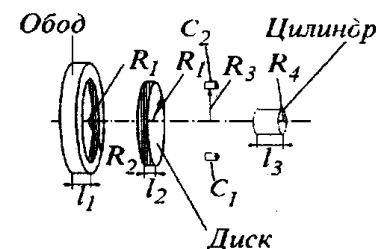
4. По формуле (4.13) определить значение момента инерции колеса и его погрешность.

#### Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса

##### Измерения

Используемое в установке колесо можно представить как совокупность тел простой формы (рис.15): диска радиуса  $R_1$ , толщины

$l_1$ ; обода толщины  $l_2$  с внешним и внутренним радиусами  $R_2, R_1$ ; двух малых тел  $C_1, C_2$ , расположенных на расстоянии  $R_3$  от оси;



цилиндра, имеющего радиус  $R_4$  и толщину  $l_3$ . Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать.

Известно, что момент инерции диска массы  $m_D$  относительно оси равен (см. Приложение 4)

$$J_D = \frac{1}{2} m_D R_1^2, \quad (4.22)$$

Рис. 15. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой фор-

а для обода массы  $m_{\text{об}}$  (см. Приложение 5)

$$J_{\text{об}} = \frac{1}{2} m_{\text{об}} (R_1^2 + R_2^2). \quad (4.23)$$

Учитывая, что диск, обод и цилиндр сделаны из одного материала с плотностью  $\rho$ , получаем окончательно выражение для момента инерции колеса

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho l_1 R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \rho l_2 (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho l_3 R_4^4 + m_C R_3^2, \quad (4.24)$$

где  $m_C$  — суммарная масса тел  $C_1$  и  $C_2$ .

С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры каждой выделенной части колеса по несколько раз. Результаты измерений заносят в таблицу 4.3.

Таблица 4.3

$N$	1	2	3	4	5
$R_{1n}$					
$\langle R_1 \rangle$					
$S_{R_1}$					
$R_{2n}$					
$\langle R_2 \rangle$					
$S_{R_2}$					

$R_{3n}$					
$\langle R_3 \rangle$					
$S_{R_3}$					
$R_{4n}$					
$\langle R_4 \rangle$					
$S_{R_4}$					
$l_{1n}$					
$\langle l_1 \rangle$					
$S_{l_1}$					
$l_{2n}$					
$\langle l_2 \rangle$					
$S_{l_2}$					
$l_{3n}$					
$\langle l_3 \rangle$					
$S_{l_3}$					

#### Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения  $R_1, R_2, R_3, R_4, l_1, l_2, l_3$ . Результаты заносят в таблицу 4.3.
2. Вычисляют выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты заносят в таблицу 4.3.
3. По формуле (4.24) рассчитывают значение момента инерции колеса и определяют погрешность.
4. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравнивают с значениями, полученными экспериментально в упражнениях 1 и 2.

#### Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должен быть определен момент инерции колеса двумя способами. Следует сопоставить эти результаты с величиной вычисленного по (4.24) момента инерции.

#### Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

#### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е М.: Наука, 1989. Гл. V.
2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Механика. Учебн. для студ. вузов / Под ред. В.А. Алешкевича.— М.: Академия, 2004. Лекция 12.

# 5 Изучение тензора инерции твердого тела

## Цель работы

Знакомство с понятием “тензор инерции”.

## Идея эксперимента

Идея эксперимента заключается в исследовании вращательного и колебательного движений твердого тела правильной формы относительно различных осей, проходящих через центр масс и определения на основе данных эксперимента главных моментов инерции. В процессе работы устанавливается связь между моментом инерции относительно произвольной фиксированной оси и компонентами тензора инерции.

## Теория

Рассмотрим твердое тело, закрепленное таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки  $O$ . Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с твердым телом. Существует связь между моментом импульса  $\mathbf{L}$  твердого тела и угловой частотой  $\boldsymbol{\omega}$  (см. введение)

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (5.1)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i \Delta m_i (x_i y_i) & -\sum_i \Delta m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i \Delta m_i (y_i x_i) & \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i \Delta m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i \Delta m_i (z_i x_i) & -\sum_i \Delta m_i (z_i y_i) & \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

В том случае, когда вращение твердого тела происходит относительно произвольной закрепленной оси  $AA'$ , проходящей через точку  $O$ , проекция момента импульса на эту ось равна (см. рис. 16)

$$(\mathbf{L})_{AA'} \equiv \left( \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right)_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega} = J \boldsymbol{\omega}, \quad (5.3)$$

где  $\rho_i$  — расстояние от  $i$ -го элемента тела до оси  $AA'$ , а величина

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \quad (5.4)$$

является моментом инерции относительно закрепленной оси.

Значение момента инерции  $J$  твердого тела относительно оси, имеющей произвольное направление, связано с компонентами тензора инерции соотношением (B.25)

В дальнейшем будем использовать такую систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции.

В этом случае тензор инерции будет иметь диагональный вид, а соотношение (B.25) запишется так:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma, \quad (5.5)$$

## Экспериментальная установка

Экспериментальная установка смонтирована на основании, на котором установлены две стойки с направляющими для винтов, положение одного из которых может регулироваться. Эти винты вставляются в подшипники, которые закреплены в рамке специальной конструкции, в результате этого рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси (на рис.17 это ось  $OO'$ ). Рамка состоит из двух планок, одна из которых (на рис.17 – левая) соединена с цилиндром  $C$ , другая — со шкивом  $Q$ . Эти планки закреплены на фиксированном расстоянии двумя направляющими. На планке с цилиндром закреплен конус  $K$  для крепления исследуемого тела. По направляющим перемещается планка. Эта планка может фикси-

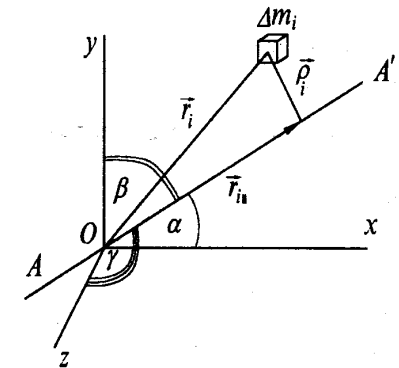


Рис. 16. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси

роваться на направляющих с помощью цанговых зажимов (для этого необходимо повернуть винты на них). В центре подвижной планки имеется винт с конусным наконечником. Исследуемое тело закрепляется между конусом неподвижной левой и конусным винтом подвижной планок, для чего в исследуемых телах имеются специальные углубления.

Закрепление исследуемых тел в рамке может осуществляться передвижением подвижной планки (при отжатых винтах цангового зажима) и вращением винта с коническим наконечником (этим вращением осуществляется более точная установка).

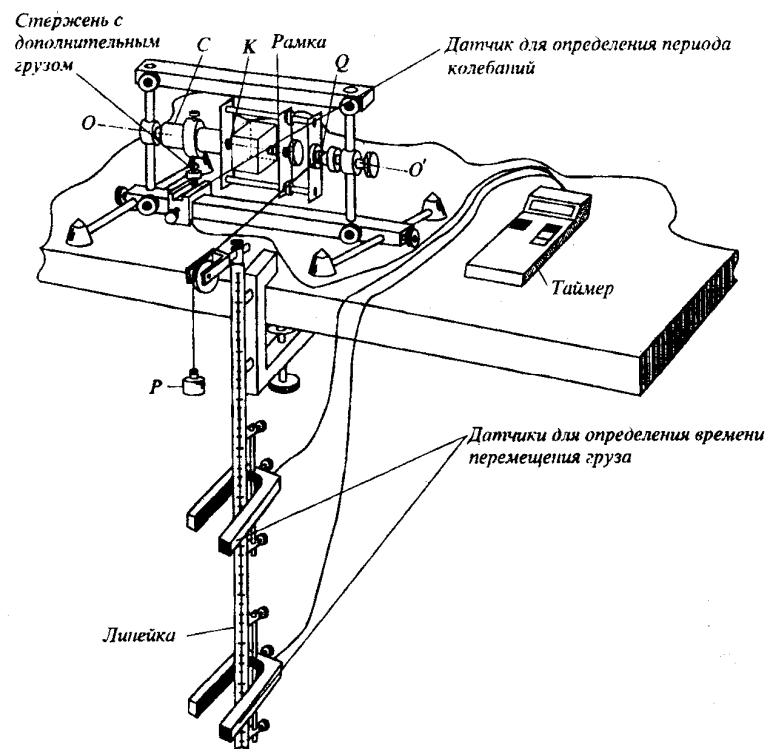


Рис.17. Общий вид установки для экспериментального определения тензора инерции

Рамка с исследуемым телом может совершать как вращательное, так и колебательное движение. Вращение происходит при

опускании груза  $P$ , висящего на нити, намотанной на шкив  $Q$ . Масса груза и радиус шкива указываются на установке.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени, включающей в себя таймер и два фотоэлектронных датчика для определения времени перемещения груза. Расстояние между датчиками определяется по линейке, укрепленной на установке.

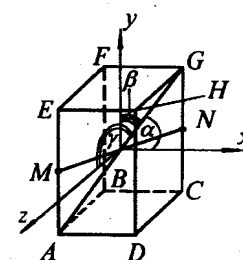


Рис. 18. Схематическое представление параллелепипеда

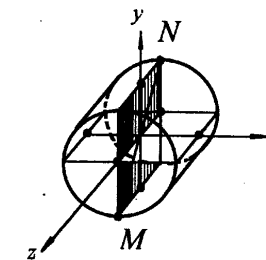


Рис. 19. Схематическое представление цилиндра

Для определения периодов колебаний рамки с исследуемым грузом на цилиндре  $C$  закрепляется кольцо со стержнем, на котором закреплен дополнительный груз, устанавливаемый в различных положениях. Установка снабжена системой автоматического отсчета периода, включающей в себя таймер и фотоэлектронный датчик для определения периода колебаний.

В работе определяются компоненты тензора инерции однородного металлического параллелепипеда (рис.18) и цилиндра (рис.19).

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Изучение тензора инерции динамическим методом

Рассмотрим вращение тела правильной формы, закрепленного в рамке, вокруг некоторой оси под действием момента внешних сил. Момент внешних сил создается с помощью нити, намотанной на шкив, к концу которой подвешен груз массы  $m$  (рис.20) В качестве исследуемого тела используется параллелепипед.

Пусть груз начал движение от отметки  $x_0$ , затем прошел отметку  $x_1$  со скоростью  $v_1$  и, через время  $\Delta t$  после этого — отметку  $x_2$  со скоростью  $v_2$ . На основании закона сохранения механической энергии можно записать:

$$mg(x_1 - x_2) = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + \frac{J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2} + M_{\text{тр}}\Delta\varphi, \quad (5.6)$$

где  $mg(x_1 - x_2)$  — изменение потенциальной энергии груза,  $m(v_2^2 - v_1^2)/2$  — изменение его кинетической энергии,

$J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)/2$  — изменение кинетической энергии вращательного движения рамки с телом,  $M_{\text{тр}}\Delta\varphi$  — работа сил трения в оси рамки,  $m$  — масса груза, подвешенного на нити,  $J' = J + J_0$  — момент инерции ( $J$ ) тела и ( $J_0$ ) рамки,  $\omega_1, \omega_2$  — угловые скорости вращения рамки для положений груза в точках  $x = x_1$  и  $x = x_2$  соответственно,  $g$  — ускорение свободного падения,  $M_{\text{тр}}$  — момент сил трения,  $\Delta\varphi = (x_2 - x_1)/r$  — угол, на который повернулась рамка при прохождении груза между отметками  $x_1$  и  $x_2$ ,  $r$  — радиус шкива.

Рис. 20. Схема установки для определения тензора инерции динамическим

Учитывая, что  $v = \omega r$ ,  $v_2 = \sqrt{2a(x_2 - x_0)}$ ,  $x_2 = x_1 + v_1 t + at^2/2$ , где  $a$  — ускорение груза,  $t$  — время прохождения грузом расстояния  $x_2 - x_1$ , получаем:

$$J' = \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{a} r^2 - mr^2 = r^2 \left( \frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right). \quad (5.7)$$

Для момента инерции пустой рамки (без тела) имеем:

$$J_0 = r^2 \left( \frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t_0^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right), \quad (5.8)$$

где  $t_0$  — время прохождения грузом расстояния  $x_2 - x_1$ . Из двух последних уравнений момента инерции тела относительно оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = r^2 \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} (t^2 - t_0^2), \quad (5.9)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей. Это можно сделать, в частности для главных центральных осей, совпадающих с выбранными осями координат ( $J_x, J_y, J_z$ ), а также для осей, совпадающих с одной из диагоналей параллелепипеда, например  $AG(J_{AG})$  или  $MN(J_{MN})$  (см. рис.18), выразив их соответственно через времена опускания груза  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$ .

Момент сил трения, входящий в (5.9), можно оценить следующим образом. Если опустить груз на отметке  $x_0$ , то он после опускания до нижней точки  $x_3$  поднимется затем до отметки  $x_4$ . Разность значений потенциальной энергии груза в точках  $x_4$  и  $x_0$  и будет равна работе сил трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0) + \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4), \quad (5.10)$$

где  $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0)$  — работа сил трения при движении груза вниз от

верхней точки до полного разматывания нити,  $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4)$  — работа сил трения при подъеме груза. Из (5.10) следует

$$\frac{M_{\text{тр}}}{r} = mg \frac{(x_4 - x_0)}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (5.11)$$

Пусть размер параллелепипеда по оси  $Ox$  равен  $a$ , по оси  $Oy$  —  $b$ , по оси  $Oz$  —  $c$ . Квадраты направляющих косинусов для его диагонали  $AG$  соответственно равны





## Обработка результатов

1. Определяют среднее арифметические значения  $a, b, c, r$  и выборочные стандартные отклонения для этих величин. Данные заносят в табл. 5.1.

2. Находят средние арифметические значения и выборочные стандартные отклонения для  $t_0$  и  $x_4$ . Данные заносят в табл. 5.2. По формуле (5.11) находят величину  $M_{\text{тр}}/r$  и погрешность ее определения.

3. Находят средние арифметические значения  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$  и погрешности их определения. Результаты заносят в табл. 5.3.

4. По формуле (5.9) находят экспериментальные значения величин  $J_x, J_z, J_{MN}$  и погрешности их определения. Данные заносят в табл. 5.4.

Таблица 5.4

$J_x$	$S_{J_x}$	$J_z$	$S_{J_z}$	$J_{MN}$	$S_{J_{MN}}$	$J_{MN}^{\text{теор}}$	$S_{J_{MN}^{\text{теор}}}$

5. Так как ось  $MN$  лежит в плоскости  $xz$ , то соотношение (5.5) для  $J_{MN}$  принимает вид

$$J_{MN} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_z \cdot \cos^2 \gamma,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Подставляя в это выражение определенные в п.4 значения  $J_x, J_y$  вычисляют теоретическое значение  $J_{MN}^{\text{теор}}$  и сравнивают его с экспериментальным (табл. 5.4).

6. Подставляя в (5.13) определенные экспериментально геометрические размеры  $a, b, c$  и времена  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}$  опускания груза для различных способов крепления тела в рамке, убеждаются в правильности (в пределах погрешности измерений) соотношения (5.13), а следовательно, и уравнения (5.5).

## Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний

Рассмотрим малые колебания физического маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленного на стержне дополнительного груза и исследуемого тела, в качестве которого выбран параллелепипед (рис.18) или цилиндр (рис.19). колебания происходят вокруг оси, проходящей через центр масс рамки и исследуемого тела. Действие моментов сил тяжести, приложенных к стержню и добавочному грузу, закрепленному на нем, приводит к возникновению колебаний всей системы. Основное уравнение вращательного движения в этом случае имеет вид

$$J' \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = mgl\varphi + \frac{1}{2} m_0 gl_0 \varphi, \quad (5.14)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения рамки от положения равновесия,  $m$  — масса груза,  $l$  — расстояние от центра масс груза до оси вращения,  $m_0, l_0$  — масса и длина стержня, на котором закреплен дополнительный груз,  $J' = J + J_0$  — момент инерции физического маятника, включающего в себя исследуемое тело ( $J$ ), рамку со стержнем и дополнительным грузом ( $J_0$ ).

Уравнение (5.14) является уравнение колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (5.15)$$

где циклическая частота колебаний определяется из соотношения

$$\omega_0^2 = \frac{\left( mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0 \right)}{J'}.$$

Так как  $\omega_0 = 2\pi/T$ , то

$$J' = \frac{\left( mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0 \right) T^2}{4\pi^2}. \quad (5.16)$$

Определив период колебаний рамки без тела  $T_0$ , можно найти момент инерции маятника без тела —  $J_0$ .

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:  $J = J' - J_0$ , или

$$J = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T^2 - T_0^2)}{4\pi^2}. \quad (5.17)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей.

В частности, для параллелепипеда можно определить  $J_x, J_y, J_z$  для осей, совпадающих с главными центральными осями (рис.18), а также момент инерции относительно оси, совпадающей с одной из диагоналей параллелепипеда — например  $AG$ , выразив  $J_x, J_y, J_z, J_{AG}$  в соответствии с (5.17) через периоды колебаний  $T_x, T_y, T_z, T_{AG}$  и период колебаний пустой рамки  $T_0$ .

Выразим момент инерции тела относительно оси  $AG$  в соответствии с уравнением (5.9) через  $J_x, J_y, J_z$ :

$$J_{AG} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma,$$

или

$$\frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T_{AG}^2 - T_0^2)}{4\pi^2} = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T_x^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \alpha + \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T_y^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \beta + \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T_z^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \gamma.$$

Учитывая, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получаем

$$T_{AG}^2 = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma,$$

или

$$T_{AG}^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.18)$$

Это уравнение может быть проверено экспериментально.

Рассматривая колебания цилиндра относительно осей  $Oy, Oz, MN$  можно найти величины  $J_y, J_z, J_{MN}$  определяя, соответственно, периоды колебаний  $T_y, T_z, T_{MN}$ .

Рассмотрим колебания цилиндра относительно оси  $MN$  (рис.19). Направляющие косинусы для этой оси равны

$$\cos^2 \gamma = \frac{d^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{4R^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos^2 \alpha = 0, \quad (5.19)$$

где  $R$  — радиус цилиндра,  $d$  — его длина.

Момент инерции цилиндра относительно оси  $MN$ , как и в предыдущем уравнении, можно выразить через компоненты тензора инерции  $J_z, J_y$ , записанного в главных осях (см.5.5):

$$J_{MN} = J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (5.20)$$

и, следовательно

$$T_{MN}^2 = \frac{T_y^2 \cdot 4R^2 + T_z^2 d^2}{4R^2 + d^2}. \quad (5.21)$$

Отметим, что уравнение (5.14) было записано без учета сил трения в оси маятника. Это обстоятельство, однако, практически не сказывается на уравнении (5.17), так как силы трения слабо влияют на период колебаний физического маятника.

### Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить массы и размеры тел: радиус  $R$  и длину  $d$  цилиндра, ребра параллелепипеда  $a, b, c$ , а также массу груза  $m$ , массу и длину стержня  $m_0, l_0$ . Рекомендуется проводить измерения каждой величины не менее трех раз, а линейные величины измерять в различных сечениях тела. Данные заносят в табл.5.5.

2. Дополнительный груз закрепляют в крайнем нижнем положении. Параллелепипед закрепляют в рамке в разных положениях и измеряют время  $t_n$ ,  $n = 3-5$  колебаний маятника. Для каждого положения тела проводят не менее трех измерений. Значения  $n$  и  $t_n$  заносят в таблицу 5.6.



5. Подставляя в (5.20) определенные в п.4 значения  $J_z, J_y$ , находят теоретическое значение момента инерции  $J_{MN}$ , сравнивают его с экспериментальным (найденным в п.4).

### Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть проверено соотношение (5.13) или (5.18) для параллелепипеда и (5.21) для цилиндра и проведено сравнение экспериментального и теоретического значений величины момента инерции при вращении тела относительно оси  $AG$  (для параллелепипеда) и оси  $MN$  (для цилиндра).

### Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.
2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?
3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем тонкая палочка, система материальных точек.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения при вращении тела вокруг закрепленной оси
  - а) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
  - б) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
6. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
7. Что такое эллипсоид инерции? как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

### Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986. §49.
2. Сивухин В. Общий курс физики. Том 1. Механика, 3-е изд. М.: Наука, 1989, §53.

## 6 Определение тензора инерции твердого тела

### Цель работы

Изучение тензора инерции твердого тела.

### Идея эксперимента

С помощью крутильного маятника, представляющего собой рамку с исследуемым телом, закрепленную на упругом подвесе, определяется момент инерции тела относительно закрепленной оси. Сравнивая период колебания маятника без тела и с телом, можно найти момент инерции тела относительно фиксированной оси. Компоненты тензора инерции относительно системы координат, жестко связанной с телом, определяются из нескольких таких опытов, отличающихся направлением оси вращения тела при колебаниях маятника.

### Теория

Рассмотрим колебания крутильного маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленной на вертикальной упругой проволоке, и исследуемого тела (рис. 21). Действие момента сил упругости приводит к возникновению колебаний всей системы с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{D}}, \quad (6.1)$$

где  $D$  — коэффициент упругости подвеса,  $J'$  — момент инерции рамки с исследуемым телом.

Из соотношения (6.1) можно найти момент инерции  $J'$ :

$$J' = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 D. \quad (6.2)$$

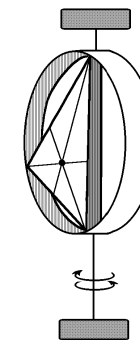


Рис. 21. Устройство крутильного маятника

Определяя период колебаний пустой рамки  $T_0$ , можно найти момент инерции маятника без тела  $J_0$ :

$$J_0 = \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 D. \quad (6.3)$$

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0. \quad (6.4)$$

Меняя положение тела относительно рамки, можно определять моменты инерции для осей вращения, имеющих различное направление относительно тела.

Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с твердым телом. При этом, как показано во введении,

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (6.5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, определяющие положение оси вращения тела относительно системы координат, связанной с исследуемым телом.

Используемая в задаче установка удобна для определения моментов инерции “плоских тел” — т.е. таких тел, толщина которых значительно меньше их поперечных размеров. При этом одну из осей (например, ось  $Oz$ ), связанную с телом системы координат, удобно направить перпендикулярно плоскости тела. Оси  $Ox$  и  $Oy$  находятся в плоскости тела и их направления произвольны, начало координат совпадает с центром масс тела и находится на оси вращения (рис. 22). При этом один из направляющих

косинусов ( $\cos \gamma$ ) равен нулю, и вместо (6.5) получим

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (6.6)$$

Величина  $J$  — момент инерции данного тела относительно оси, проходящей через его центр масс. При повороте системы координат (осей  $Ox$  и  $Oy$  в своей плоскости), величина момента инерции  $J$  не изменяется, но каждой ориентации осей соответствуют свои значения компонент тензора инерции  $J_{xx}, J_{yy}$  и  $J_{xy} = J_{yx}$ .

При определенном выборе системы координат, когда направления осей  $Ox'$  и  $Oy'$  совпадают с главными осями инерции тела,  $J_{xy} = J_{yx} = 0$ , и вместо (6.6) имеем

$$J = J'_x \cos^2 \alpha' + J'_y \cos^2 \beta'. \quad (6.6a)$$

В последнем соотношении  $\cos \alpha'$  и  $\cos \beta'$  — направляющие косинусы выбранной ранее оси вращения в новых осях координат  $Ox', Oy', J'_x$  и  $J'_y$  — компоненты тензора инерции в системе координат, оси которой совпадают по направлению с главными осями инерции.

Выберем на оси вращения некоторую точку  $P$ , находящуюся на расстоянии  $R$  от начала координат и имеющую координаты  $x'$  и  $y'$ . Пусть величина  $R$  численно равна  $1/\sqrt{J}$ . При этом  $\cos \alpha' = x'/R$ ;  $\cos \beta' = y'/R$ . Подставив эти величины в (6.6a), получим

$$J = J'_x \frac{x'^2}{R^2} + J'_y \frac{y'^2}{R^2},$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (6.6b)$$

где  $a^2 = \frac{JR^2}{J'_x}$ ,  $b^2 = \frac{JR^2}{J'_y}$ ,  $a$  и  $b$  являются постоянными величинами.

Уравнение (6.6b) является каноническим уравнением эллипса в координатах  $x', y'$ , полуоси которого  $a = 1/\sqrt{J'_x}$ ,  $b = 1/\sqrt{J'_y}$ .

Эллипс (6.6b) является сечением эллипсоида инерции плоскостью  $x'y'$ . Эллипсоидом инерции называется поверхность, характеризующая величины моментов инерции твердого тела относительно множества возможных осей вращения, проходящих через

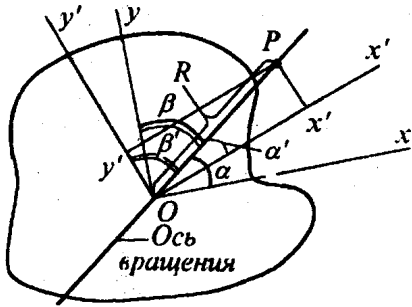


Рис. 22. Схематическое представление твердого тела и систем координат  $xOy, x'Oy'$ . Ось вращения  $OP$  и системы координат лежат в плоскости чертежа

одну точку (в данном случае через центр масс тела). При этом для каждого направления вдоль оси  $l$  откладываются отрезки, численно равные величине  $\frac{1}{\sqrt{J_l}}$ , где  $J_l$  — момент инерции тела

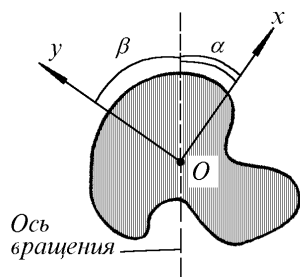


Рис. 23. Форма и положение тела относительно оси вращения

относительно оси  $l$ . Концы этих отрезков образуют поверхность, называемую *эллипсоидом инерции* (трехмерное уравнение эллипсоида инерции может быть получено из (6.5)).

Пусть исследуемое тело имеет форму, показанную на рис. 23. Точка  $O$  — центр масс тела. Оси  $Ox$  и  $Oy$  выбраны произвольно. Тело закреплено в рамке крутильного маятника так, что точка  $O$  лежит на оси вращения, а положение тела характеризуется углом  $\alpha$  ( $\beta = \pi/2 - \alpha$ ).

Если тело закреплено в рамке так, как показано на рис. 24а, то  $\alpha = 0$  и  $\beta = \pi/2$ . Из (6.6) получаем

$$J = J_l = J_{xx}. \quad (6.7)$$

При закреплении тела, соответствующем рис. 24б,  $\alpha = \pi/2$  и  $\beta = 0$ . И, следовательно, из (6.6)

$$J = J_2 = J_{yy}. \quad (6.8)$$

При повороте тела в своей плоскости на угол  $\alpha_0$  (рис. 24в) и  $-\alpha_0$  (рис. 24г) относительно оси вращения получаем, соответственно,

$$J = J_3 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0, \quad (6.9)$$

$$J = J_4 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что

$$J_3 - J_4 = 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 \quad \text{или} \quad J_{xy} = \frac{J_3 - J_4}{2 \sin 2\alpha_0}. \quad (6.11)$$

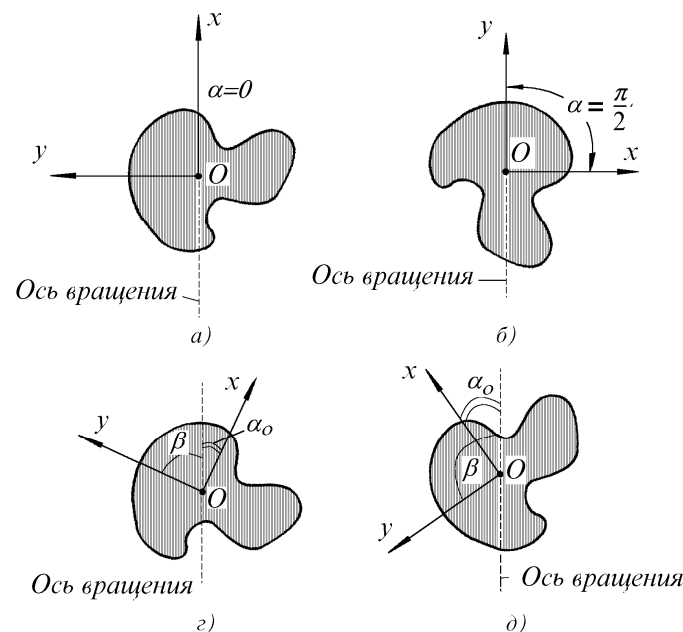


Рис. 24. Положения тела относительно оси вращения

Из (6.6) можно получить, что при  $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$

$$J = J_5 = J_{xx} \sin^2 \alpha_0 + J_{yy} \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (6.12)$$

Складывая (6.9) и (6.12), получаем

$$J_3 + J_5 = J_1 + J_2. \quad (6.13)$$

Экспериментальное определение величин  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и  $J_4$  дает возможность найти четыре отличных от нуля компоненты тензора инерции плоского тела:  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{xy} = J_{yx}$  для заданной системы координат. Если оси координат  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с главными осями инерции тела, то  $J_{xy} = J_{yx} = 0$ . Соотношение (6.13) может служить проверкой правильности проведенного эксперимента.

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 25. Она состоит из стойки и рамки, закрепленной на упругом подвесе. Исследуемые тела поочередно крепятся в рамке с помощью винта. Конструкция крепления рамки на подвесе такова, что рамка может поворачи-

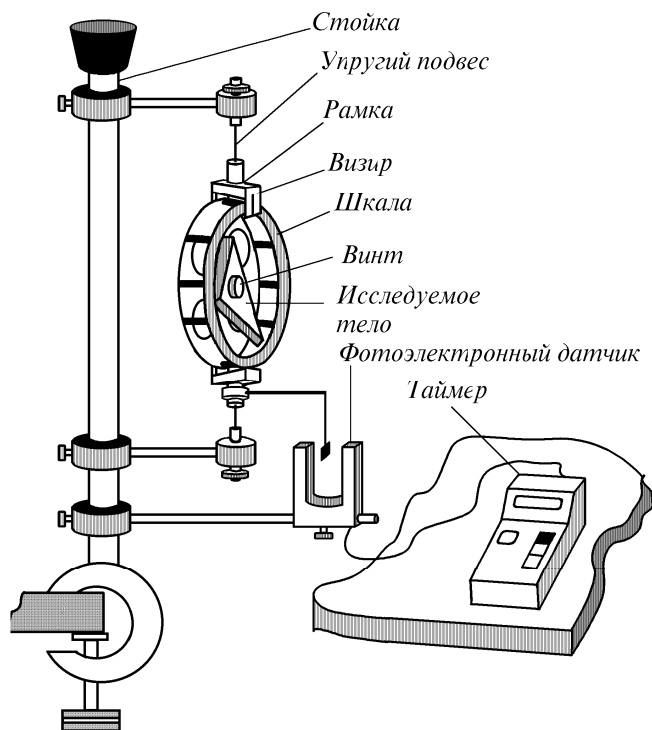


Рис. 25. Устройство установки для изучения тензора инерции твердого тела

ваться вокруг горизонтальной оси и фиксироваться в различных положениях. В работе изучаются тензоры инерции для нескольких “плоских” тел, имеющих разную форму: малых по толщине параллелепипеда, треугольной призмы, полудиска, а также для тел, конфигурация которых может меняться в процессе эксперимента. Система координат, относительно которой определяется момент инерции тела, жестко связана с телом, а, следовательно, и с рамкой. На

рамке имеется шкала, позволяющая определять углы между осью вращения и осями системы координат, связанной с телом.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени и числа периодов, включающей в себя таймер и фотоэлектронный датчик.

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки

Определение упругости подвеса осуществляется из результатов изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного с помощью специального приспособления в рамке перпендикулярно оси вращения. Предполагается, что предварительно измерена его длина и масса и вычислен его момент инерции, а также определены погрешности этих величин (результаты измерений и расчетов необходимо внести в табл.6.1)

Таблица 6.1

Длина стержня $L =$	$S_L =$
Масса стержня $m =$	$S_m =$
Момент оси стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, $J =$	$S_J =$

#### Измерения

1. Измерить время  $t_n$   $n = 10-20$  колебаний пустой рамки. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл.6.2.
2. Закрепить стержень в рамке симметрично. Измерить время  $t_n$   $10-20$  колебаний рамки со стержнем. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл.6.2.

#### Обработка результатов

1. Для каждого опыта определить периоды колебаний пустой рамки  $T_0$  и рамки со стержнем  $T_2$ .
2. Найти средние арифметические значения  $\langle T_0 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$  и выборочные стандартные отклонения для этих величин  $S_{T_0}$ ,  $S_{T_2}$ . Результаты вычислений внести в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Колебания без стержня					Колебания со стержнем						
$N$	$t_n$	$n$	$T_0$	$\langle T_0 \rangle$	$S_{T_0}$	$N$	$t_n$	$n$	$T_2$	$\langle T_2 \rangle$	$S_{T_2}$
1						1					
2						2					
3						3					
.....											

3. Учитывая, что период колебаний крутильного маятника связан с моментом инерции соотношением (6.1), получаем, что

$$T_2^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\text{ст}}}{D},$$

где  $J_{\text{ст}}$  — вычисленный ранее момент инерции стержня.

Отсюда следует, что

$$D = \frac{4\pi^2 J_{\text{ст}}}{T_2^2 - T_0^2}.$$

Используя последнее соотношение, определить коэффициент упругости подвеса, а затем по формуле (6.3) — момент инерции пустой рамки  $J_0$ .

### Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции

#### Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить размеры одного из тел по указанию преподавателя (ребра параллелепипеда, стороны треугольной призмы, радиус полудиска). Данные занести в табл. 6.3.

2. Все тела, исследуемые в данной задаче, закрепляются в рамке благодаря ее конструкции, таким образом, что центр масс лежит на оси вращения. Закрепив в рамке выбранное тело, измеряют время  $t_n$   $n = 10$ – $20$  колебаний. Проводят несколько таких измерений. Поворачивают рамку на небольшой угол (например, на  $15^\circ$ ), и вновь измеряют время  $t_n$ . Снова поворачивают рамку на тот же угол и проводят измерения  $t_n$ . Так поступают до полного поворота рамки на  $180^\circ$ . Результаты каждого измерения заносят в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Формы и размеры исследуемого тела								
$N$	$\alpha_i$	$t_n$	$n$	$T$	$\langle T_\alpha \rangle$	$S_{T_\alpha}$	$J_\alpha$	$\sqrt{1/J_\alpha}$
1								
2								
3								
1								
2								
3								
.....								

#### Обработка результатов

1. Найти периоды колебаний маятника для каждого значения  $\alpha$ , их среднее значение  $\langle T_\alpha \rangle$  и выборочные стандартные отклонения  $S_{T_\alpha}$ . Величины занести в табл. 6.3.

2. Определяют моменты инерции исследуемого тела по формулам (6.2)–(6.4) для различных значений  $\alpha$ . Данные заносят в табл. 6.3.

3. Построить в полярных координатах  $R(\alpha)$  сечение эллипсоида инерции  $R = 1/\sqrt{J(\alpha)}$  для исследованного тела, считая, что  $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$ . На этом же графике необходимо нарисовать и исследуемое тело.

4. Определить положения рамки, при которых момент инерции принимает максимальное и минимальное значения. Эти положения соответствуют главным центральным осям инерции изучаемого тела.

5. Используя известные формулы (см. Приложение), рассчитать величины моментов инерции тела относительно всех трех главных центральных осей и сравнить полученные значения с экспериментальными. При этом теоретическое значение  $J_z$  сравнивается с суммой значений  $J_x, J_y$ , полученной экспериментально, поскольку для плоских тел (см. Приложение)  $J_z = J_x + J_y$ .

### Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции

Для выполнения этого упражнения используется то же тело, что и в упр. 2. На поверхности всех тел, входящих в комплект установки нанесены прямые, проходящие через точку, соответствующую его центру масс и повернутые относительно друг друга на



15°. Каждая из этих прямых может быть выбрана за ось  $Ox$  системы координат, связанной с телом. Вначале любую из этих прямых принимают за направление  $Ox$ .

#### Измерения

1. Определить четыре величины момента инерции тела  $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}, J_4^{(1)}$ , для случая, когда выбранная ось  $Ox$ , соответственно, совпадает, перпендикулярна, составляет угол  $\alpha_0$  и  $-\alpha_0$  с осью вращения ( $\alpha_0$  — произвольный угол, например 30° или 45°). Для выполнения этого пункта необходимо произвести измерения, аналогичные проведенным в упр.2. Результаты занести в табл. 6.4.

Приняв за ось  $Ox$  другую прямую, нанесенную на поверхности тела, повторить все измерения п.1 и получить новые значения величин  $J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}, J_4^{(2)}$ . Полученные результаты занести в таблицу, аналогичную табл. 6.4.

#### Обработка результатов

Воспользовавшись измеренными величинами  $J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, J_3^{(i)}, J_4^{(i)}$  и соотношениями (6.17)–(6.10) определить  $J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$  для двух систем координат, которые использовались в п. 1 и п. 2. Убедиться, что компоненты тензора инерции зависят от выбора системы координат и занести их в табл. 6.4, указать ориентацию системы координат, для которой они получены.

Таблица 6.4

Формы и размеры тела										
		$N$	$t_n$	$n$	$T$	$\langle T \rangle$	$S_{\langle T \rangle}$	$J_i$	$S_{J_i}$	
1	Ось $Ox$ параллельна оси вращения	1								$J_{xx} =$
		2								
		3								
2	Ось $Ox$ перпендикулярна оси вращения	1								$J_{yy} =$
		2								
		3								
3	Ось $Ox$ составляет угол $\alpha_0$ с осью вращения	1								$J_{xy} =$
		2								
		3								
4	Ось $Ox$ составляет угол $\alpha_0$ с осью вращения	1								$J_{xy} =$
		2								
		3								

#### Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров\*)

Изучаемое тело представляет собой крестовину из стержней заданной массы и длины и шаров. Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. В упражнении по указанию преподавателя исследуется одна из трех конфигураций тел, показанных на рис. 26.

#### Измерения

Закрепить тело в рамке. Измерить периоды колебаний маятника для нескольких заданных положений рамки, изменяя угол, определяющий ее положение относительно оси вращения на 15°, начиная от положения при котором два шара находятся на одной вертикали (аналогично п.2 упражнения 2). Результаты измерений занести в табл.6.5.

Таблица 6.5

Выбранная конфигурация системы тел:									
$\alpha_i$	$N$	$t_n$	$n$	$T$	$\langle T \rangle$	$S_{T\alpha}$	$J_\alpha$	$\sqrt{J_\alpha}$	$(\sqrt{J_\alpha})_{\text{теор}}$
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								
.....									

#### Обработка результатов

1. Определить моменты инерции маятников относительно выбранной оси для всех рассмотренных случаев (аналогично п.2 упражнения 2).

2. Определить компоненты тензора инерции выбранного тела  $J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$  для системы координат, оси которой направлены вдоль крестовины.

3. Используя известные формулы для моментов инерции стержня и шара (см. Приложение), определить моменты инерции тела относительно вертикальной оси для использованных значений  $\alpha$ .

\*) Данное упражнение выполняется по указанию преподавателя.

Построить в полярной системе координат сечения эллипсоидов инерции  $\sqrt{I/J_\alpha}$  и  $(\sqrt{I/J_\alpha})_{\text{теор}}$  по найденным экспериментальным и теоретическим данным.

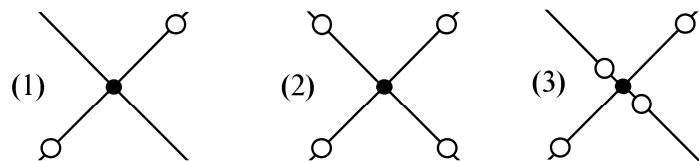


Рис. 26. Конфигурации тел, исследуемые в данной работе

### Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть экспериментально получено сечение эллипсоида инерции плоскостью  $xOy$  исследованного тела. Определены направления главных центральных осей инерции и определены компоненты тензора инерции для двух ориентаций осей  $Ox$  и  $Oy$ . Следует провести сравнение данных эксперимента с теорией. Для тела в виде крестовины для одного расположения системы координат должны быть определены экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции, построены экспериментально и теоретически определенные сечения эллипсоидов инерции.

### Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.
2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?
3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения тела вокруг закрепленной оси
  - 1) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
  - 2) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?

6. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

### Литература

#### Основная:

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. М.: Наука, 1989.

#### Дополнительная:

1. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981, гл. VI, §1.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Из-во Моск. ун-та, 1974, §38.

# Приложения

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПРОСТЕЙШУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ФОРМУ

При определении момента инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси его обычно представляют в виде совокупности малых элементов, находят момент инерции каждого элемента относительно выбранной оси и, затем, проводят суммирование (или интегрирование) по всему объему тела. Если форма тела является правильной геометрической фигурой, то процесс вычисления величины момента инерции значительно упрощается, а иногда могут быть использованы некоторые специальные способы, которые на отдельных примерах будут рассмотрены ниже.

**Приложение 1. Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину.** Пусть тонкий стержень имеет длину  $l$  и массу  $m$ . Разделим его на малые элементы длины  $dx$  (рис. 27), масса которых  $dm = (m/l)dx$ . Если выбранный элемент находится на расстоянии  $x$  от оси, то его момент инерции  $dJ = x^2 dm$ , т.е.

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до  $l/2$  и удваивая полученное выражение (для учета левой половины стержня), получим

$$J = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = 2 \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}. \quad (\text{п.1})$$

Это выражение может быть получено и другим способом, с помощью метода подобия. Будем считать, что рассматриваемый стержень состоит из двух половин (рис.28). Каждая из них имеет массу  $m/2$  и длину  $l/2$ . Выражение для момента инерции стержня должно включать его массу и длину, так как это единственные параметры, определяющие его инерционные свойства при вращении. Пусть

$$J = kml^2, \quad (\text{п.2})$$

где  $k$  — неизвестный коэффициент.

Для каждой из половин стержня при вращении вокруг оси  $AA'$  можно найти момент инерции, используя (п.2) и теорему Гюйгенса–Штейнера:

$$J_1 = k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4}\right)^2. \quad (\text{п.3})$$

Полный момент инерции стержня

$$J = 2J_1 = 2 \left( k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4}\right)^2 \right). \quad (\text{п.4})$$

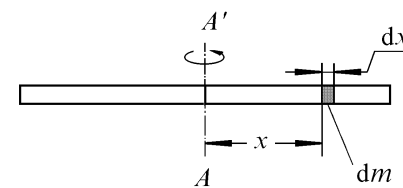


Рис. 27. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину, в виде совокупности малых элементов  $dx$

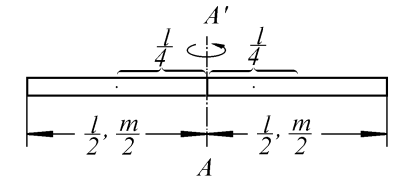


Рис. 28. К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину с помощью метода подобия

Но этот же момент инерции, согласно (п.2), равен  $kml^2$ . Приравнявая (п.4) и (п.2), имеем

$$2k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2 \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4}\right)^2 = kml^2 \quad (\text{п.5})$$

или  $\frac{k}{4} + \frac{1}{16} = k$  и, следовательно,

$$k = \frac{1}{12}, \quad (\text{п.6})$$

т.е.  $J = \frac{1}{12} ml^2$ , что совпадает с (п.1)

**Приложение 2. Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей.** Для расчета моментов инерции прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$  и массой  $m$  выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 29). Для прямоугольной пластинки легко вычислить моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ . Рассмотрим, например, расчет  $J_x$ . Пластинку можно представить как совокупность тонких полосок, для ка-

ждой из которых момент инерции вычисляется так же, как для тонкой палочки длины  $a$ . Момент инерции пластинки относительно оси  $x$  равен сумме моментов инерции этих полосок, т.е.

$$J_x = \sum J_{x_i} = \sum \frac{1}{12}(dm)a^2 = \frac{1}{12}ma^2. \quad (\text{п.7})$$

Аналогично вычисляется момент инерции пластинки относительно оси  $y$

$$J_y = \frac{1}{12}mb^2. \quad (\text{п.8})$$

Для вычисления момента инерции пластинки относительно оси  $z$  воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим малый элемент массы  $\delta m$  (рис. 30). Его момент инерции  $\delta J_z$  относительно оси  $z$  равен

$$\delta J_z = \delta m(x^2 + y^2), \quad (\text{п.9})$$

т.е. можно записать, что

$$\delta J_z = \delta mx^2 + \delta my^2 = \delta J_x + \delta J_y, \quad (\text{п.10})$$

где  $\delta J_y, \delta J_x$  — моменты инерции этого малого элемента относительно осей  $y$  и  $x$ .

Это же соотношение справедливо не только для отдельного элемента, но и для любого плоского тела в целом. В этом легко убедиться, представляя плоское тело как совокупность отдельных малых элементов (рис.30) и производя суммирование по всем этим элементам.

Таким образом, используя (п.7), (п.8) и (п.10), получим

$$J_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2). \quad (\text{п.11})$$

**Приложение 3. Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости.** Определим момент инерции треугольной пластины с помощью метода подобия. Этот метод используется обычно в тех случаях, когда изначально ясен общий вид формулы, определяющей момент инерции. В частности,

если тело является правильной фигурой, например, квадратом, равнобедренным треугольником, то в конечном выражении для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости фигуры, войдет масса тела и квадрат его характерного размера. Действительно — это единственные параметры, которые могут характеризовать инерционные свойства тела при его вращении вокруг выбранной оси. Таким образом можно записать

$$J = kma^2, \quad (\text{п.12})$$

где  $J$  — момент инерции тела,  $m$  — его масса,  $a$  — характерный размер (сторона квадрата или треугольника),  $k$  — неизвестный коэффициент, который определяется формой тела.

Для пластины, имеющей вид правильного треугольника  $A'B'C'$  (рис. 31), момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластины и проходящей через точку  $O$ , может быть выражен формулой (п.12).

Проведем геометрическое построение (рис. 31) и рассмотрим треугольную пластину  $ABC$  со стороной  $2a$ . Очевидно, что ее масса будет равна  $4m$ , а формула для момента инерции будет иметь вид

$$J_1 = k(4m) \cdot (2a)^2 = k \cdot 16 \cdot ma^2. \quad (\text{п.13})$$

Пластина  $ABC$  состоит из четырех одинаковых треугольников со стороной  $a$  каждая. В этом случае момент инерции треугольника  $ABC$  можно представить в виде суммы моментов инерции четырех треугольных пластин. Для вычисления этих моментов инерции воспользуемся тем, что центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Обозначим через  $d$  расстояние от центров  $\Delta AA'C'$ ,  $\Delta A'B'B'$ ,  $\Delta B'C'C'$  до точки  $O$  — центра масс пластины  $ABC$ . Используя теорему Гюйгенса-Штейнера, получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= (J_{AA'C'} + md^2) + (J_{A'B'B'} + md^2) + (J_{C'B'C} + md^2) + J_{A'B'C'} = \\ &= 4k \cdot ma^2 + 3md^2. \end{aligned} \quad (\text{п.14})$$

Учитывая, что  $d = a/\sqrt{3}$ , и сравнивая (п.14) с (п.13), находим, что

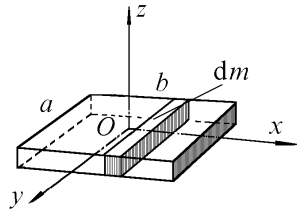


Рис. 29. Выбор системы координат и представление пластинки в виде совокупности тонких полосок

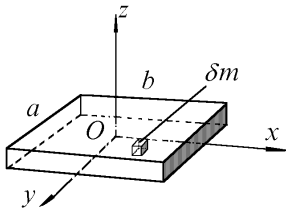


Рис. 30. Представление пластинки в виде этих элементов.

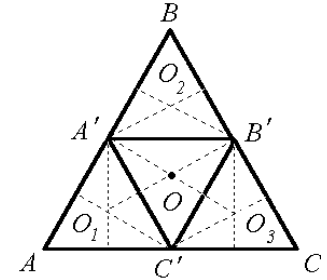


Рис. 31. Схематичное представление применения принципа подобия для определения момента инерции тела, имеющего форму равностороннего треугольника

$$4kma^2 + 3m\frac{a^2}{3} = 16kma^2, \quad (\text{п.15})$$

откуда следует

$$k = \frac{1}{12}. \quad (\text{п.16})$$

Таким образом момент инерции плоского тела, имеющего форму равностороннего треугольника, относительно оси, проходящей через центр масс (точку  $O$ ) перпендикулярно его плоскости, равен

$$J = \frac{1}{12} ma^2. \quad (\text{п.17})$$

**Приложение 4. Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей.** Для расчета моментов инерции тонкого

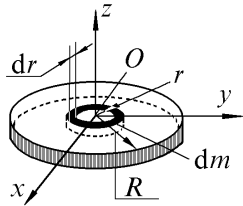


Рис. 32. Выбор системы координат и представление диска в виде наборов тонких

дисков  $dJ = dmr^2$ . Момент инерции всего диска определяется интегралом

$$J_z = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2. \quad (\text{п.18})$$

Для определения  $J_x$  воспользуемся симметрией диска ( $J_x = J_y$ ) и утверждением (п.10), полученным при расчете момента инерции прямоугольной пластины. При этом из (п.10) получаем

$$J_z = 2J_x, \quad (\text{п.19})$$

откуда

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2. \quad (\text{п.20})$$

**Приложение 5. Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей.** Выберем оси системы координат, совпадающие с главными центральными осями так, как показано на рис. 33. Определим момент инерции цилиндра относительно оси  $z$ . Цилиндр представляет собой набор тонких дисков с массами  $dm$  и моментами инерции  $dJ_z = \frac{1}{2} dmR^2$ . Момент инерции цилиндра равен сумме моментов инерций  $dJ_z$  тонких дисков

$$J_z = \sum dJ_z = \frac{1}{2} mR^2, \quad (\text{п.21})$$

где  $R$  — радиус цилиндра,  $m$  — его масса.

Пусть теперь ось вращения проходит через центр масс цилиндра перпендикулярно его продольной оси (рис.П.7) и совпадает с осью координат  $x$ . Представим цилиндр как совокупность тонких дисков толщины  $dz$  и массы  $dm = (m/l) \cdot dz$

( $l$  — длина цилиндра). Момент инерции тонкого диска  $dJ'_x$  относительно оси  $Ox$  в соответствии с (п.20) и теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{4} dmR^2 + dmz^2, \quad (\text{п.22})$$

где  $z$  — расстояние от диска до центра цилиндра.

Момент инерции всего цилиндра найдем после интегрирования по  $z$  (по всей длине цилиндра):

$$J_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 \frac{m}{l} dz + \frac{1}{4} mR^2, \quad (\text{п.23})$$

откуда получаем

$$J_x = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \quad (\text{п.24})$$

**Приложение 6. Момент инерции цилиндра с центральным отверстием относительно его продольной оси.** Однородный цилиндр массы  $m$  с внешним радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$  (рис. 34) можно рассматривать как сплошной цилиндр радиуса  $R_2$ , массы  $m_2$ , из которого

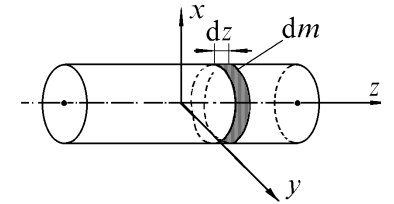


Рис. 33. Выбор системы координат и представление цилиндра в

вырезано отверстие — цилиндр радиуса  $R_1$ , массы  $m_1$ . Очевидно, что

$$J = J_2 - J_1 = \frac{1}{2}(m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2) \text{ и, так как } m = m_2 - m_1 \text{ и } \frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}, \text{ то}$$

$$J = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \quad (\text{п.25})$$

**Приложение 7. Момент инерции шара.** Сплошной шар массы  $m$  и радиуса  $R$  можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами  $dm$ , радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  (рис. 35).

Рассмотрим малый элемент сферического слоя  $\delta m$  с координатами  $x, y, z$ . Его моменты инерции относительно осей  $x, y, z$ , проходящих через центр слоя —  $\delta J_x, \delta J_y, \delta J_z$ , равны

$$\delta J_x = \delta m (y^2 + z^2), \delta J_y = \delta m (x^2 + z^2), \delta J_z = \delta m (x^2 + y^2).$$

Таким образом можно записать

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{п.26})$$

Так как для элементов сферического слоя  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , то

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m r^2.$$

После интегрирования по всему объему слоя получим

$$dJ_x + dJ_y + dJ_z = 2 dm r^2. \quad (\text{п.27})$$

Так как, в силу симметрии для сферического слоя  $dJ_x = dJ_y = dJ_z = dJ$ , а

$$dm = m \frac{dV}{V} = m \frac{4\pi r^2 dr}{(4/3)\pi R^3}, \text{ то } dJ = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

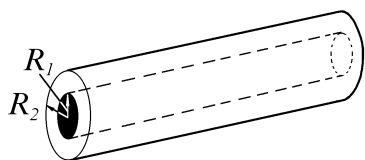


Рис. 34. Схематическое представление цилиндра с центральным отверстием

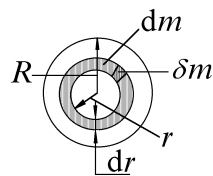


Рис. 35. Схематическое представление шара как совокупности сферических слоев

Интегрируя по всему объему шара, получаем

$$J = \int dJ = \int_0^R 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Окончательно (после интегрирования) получим, что момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр равен

$$J = \frac{2}{5} m R^2. \quad (\text{п.28})$$

**Приложение 8. Моменты инерции параллелепипеда со сторонами  $a, b$  и  $c$  относительно его главных осей.** Выберем оси системы координат  $(x, y, z)$  совпадающими с главными центральными осями. Начало системы координат совпадает с центром параллелепипеда. Для определения момента инерции относительно оси  $Ox$  представим параллелепипед как совокупность тонких прямоугольных пластинок

(рис. 36) массой  $dm = (m/c) dy$  и толщиной  $dy$ . Момент инерции  $dJ'_x$  каждой такой пластинки относительно оси  $Ox$  в соответствии с (п.7) и теоремой Гюйгенса—Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{12} dm b^2 + y^2 \cdot dm. \quad (\text{п.29})$$

Момент инерции всего параллелепипеда получим, интегрируя по всему объему

$$J_x = \int_{-c/2}^{c/2} \frac{1}{12} (b^2) \frac{m}{c} dy + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{m}{c} y^2 dy = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2). \quad (\text{п.30})$$

Аналогично вычисляются моменты инерции относительно осей  $y$  и  $x$ :

$$J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2), \quad (\text{п.31})$$

$$J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2). \quad (\text{п.32})$$

**Приложение 9. Моменты инерции равнобедренной треугольной призмы относительно ее главных осей.** Рассмотрим предварительно моменты инерции тонкой равнобедренной треугольной пластины  $HPQ$

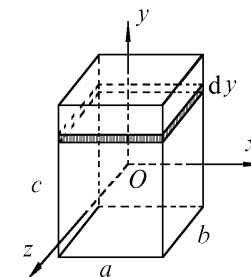


Рис. 36. Выбор системы координат и представление параллелепипеда в виде тонких пластинок

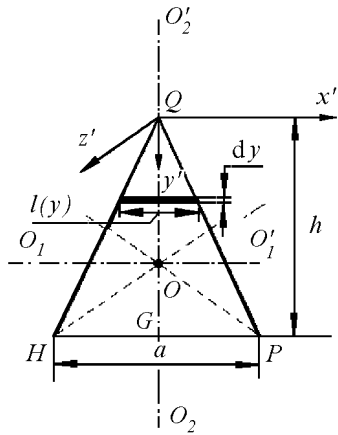


Рис. 37. Выбор системы координат и представление пластины в виде тонких полосок

Представим пластину как набор тонких полосок толщиной  $dy$ , с массами  $dm$  и длинами  $l(y)$ , причем  $l(y) = \frac{a}{h} \cdot y$  ( $a$  — основание треугольника)

$$dm = \frac{m_1}{ha/2} \cdot dy \cdot l(y) = \frac{m_1}{ha/2} \cdot dy \cdot \frac{a}{h} \cdot y = \frac{2m_1}{h^2} \cdot y \cdot dy. \quad (\text{п.33})$$

Момент инерции  $dJ_y$  каждой такой полоски относительно оси  $O_2O_2'$  (совпадающей с осью  $y'$ ) равен (см.п.1)

$$dJ_y = \frac{1}{12} dm \cdot l^2(y) = \frac{1}{12} \frac{2m_1}{h^2} \cdot y dy \cdot \left(\frac{a}{h} y\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{m_1 \cdot a^2}{h^4} \cdot y^3 \cdot dy. \quad (\text{п.34})$$

Полный момент инерции пластины  $J_2$  относительно оси  $O_2O_2'$  получаем после интегрирования:

$$J_2 = \int_0^h \frac{1}{6} \frac{m_1 a^2}{h^4} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{1}{6} \frac{m_1 a^2}{h^4} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^4 \Big|_0^h = \frac{1}{24} m_1 a^2. \quad (\text{п.35})$$

Момент инерции  $dJ'_x$  каждой полоски относительно оси  $x'$  равен

$$dJ'_x = dm \cdot y^2 = \frac{2m_1}{h^2} \cdot y^3 \cdot dy. \quad (\text{п.36})$$

(рис. П.37) массы  $m_1$  относительно ее главных осей.

Центр пластины лежит на пересечении медиан, причем  $OG = \frac{1}{3} QG = \frac{1}{3} h$  ( $h$  — высота треугольника). Главные центральные оси  $O_1O_1'$  и  $O_2O_2'$  такой пластины расположены так, как показано на рис. 37 (ось  $O_3O_3'$  проходит через точку  $O$  перпендикулярно плоскости пластины). Для удобства интегрирования введем систему координат  $x', y', z'$  с началом в точке  $Q$ , так что  $Qz'$  перпендикулярна плоскости пластины, а оси  $Ox'$  и  $Oy'$  лежат в плоскости пластины и ось  $Ox'$  перпендикулярна высоте треугольника.

Для всей пластины

$$J'_x = \int_0^h \frac{2m_1}{h^2} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{m_1}{2} \cdot h^2. \quad (\text{п.37})$$

Момент инерции  $J_1$  относительно главной оси  $O_1O_1'$  связан с  $J'_x$  с помощью соотношения (теорема Гюйгенса—Штейнера)

$$J'_x = J_1 + m_1 \left(\frac{2}{3} h\right)^2, \quad (\text{п.38})$$

откуда получаем

$$J_1 = J'_x - m_1 \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = m_1 \cdot h^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{18} m_1 \cdot h^2. \quad (\text{п.39})$$

Для определения момента инерции пластины относительно оси  $O_3O_3'$ , перпендикулярной плоскости пластины, воспользуемся соотношением (п.10), верным для плоских тел

$$J_3 = J_1 + J_2, \quad (\text{п.40})$$

т. е.

$$J_3 = \frac{1}{24} m_1 \cdot a^2 + \frac{1}{18} m_1 \cdot h^2 = \frac{1}{6} m_1 \left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{3} h^2\right). \quad (\text{п.41})$$

Очевидно, что для пластины в форме плоского равностороннего треугольника, когда  $h = a \cdot (\sqrt{3}/2)$ , выражение (п.41) совпадает с (п.17), полученным более простым способом.

При определении моментов инерции равнобедренной призмы толщины  $b$  и массы  $m$  представим ее как набор тонких треугольных пластин с массами  $dm_1 = (m/b) \cdot dz$ . Систему координат выберем так, чтобы оси  $x, y, z$  совпадали с главными центральными осями призмы (см. рис. 38). Момент инерции призмы относительно оси  $Oz$  равен сумме моментов инерции отдельных пластин:

$$J_z = \frac{1}{6} m \left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{3} h^2\right). \quad (\text{п.42})$$

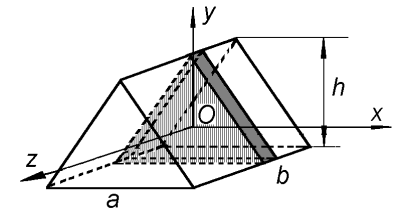


Рис. 38. Выбор системы координат и представление равнобедренной призмы в виде тонких треугольных пластин

Получим теперь выражение для  $J_x$  и  $J_y$ . Момент инерции отдельной пластины  $dJ'_1$  относительно оси  $Ox$  в соответствии с (п.39) и теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$dJ'_1 = dJ_1 + dm_1 \cdot z^2 = \frac{1}{18} dm_1 h^2 + dm_1 z^2 = \frac{1}{18} \frac{m}{b} h^2 dz + \frac{m}{b} z^2 dz. \quad (\text{п.43}).$$

Интегрируя по всей высоте призмы, получаем момент инерции  $J_x$  относительно  $Ox$ :

$$J_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{1}{18} \frac{m}{b} h^2 + \frac{m}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{18} m h^2 + \frac{1}{3} \frac{m}{b} z^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{18} m h^2 + \frac{1}{12} m b^2. \quad (\text{п.44})$$

Для оси  $Oy$  имеем

$$dJ'_2 = \frac{1}{24} m_1 a^2 + m_1 z^2 = \frac{1}{24} \frac{m}{b} a^2 dz + \frac{m}{b} z^2 dz, \quad (\text{п.45})$$

откуда

$$J_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{1}{24} \frac{m}{b} a^2 + \frac{m}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{24} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2. \quad (\text{п.46})$$

**Приложение 10. Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей.** Определим предварительно моменты инерции для тонкой полукруглой пластины, имеющей массу  $m_1$  (рис. 39).

Найдем положение центра масс (т.  $A$ ) этого тела, т. е. расстояние  $d$ . По определению центра масс имеем

$$d = \frac{\int dm (r \sin \varphi)}{m_1} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r dr d\varphi r \sin \varphi = \left( -\frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot r^3 \Big|_0^R \right) \left( \cos \varphi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{3\pi} R. \quad (\text{п.47})$$

Выберем декартову систему координат  $x', y', z'$  с центром в точке  $O$  (рис. 39). Проводя прямое интегрирование так же, как для диска, и учитывая, что  $J'_x = J'_y$ , получаем

$$J'_x = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.48})$$

$$J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.49})$$

$$J'_z = \frac{1}{2} m_1 R^2. \quad (\text{п.50})$$

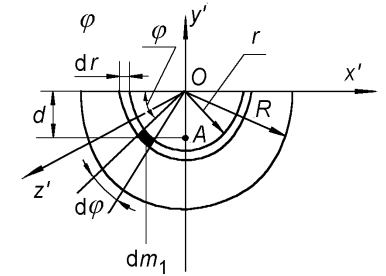


Рис. 39. Выбор системы координат для определения момента инерции

Моменты инерции, относительно главных центральных осей получаем, используя теорему Гюйгенса–Штейнера:

$$J_{1x} = J'_x - m_1 d^2 = m_1 R^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{п.51})$$

$$J_{1y} = J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.52})$$

$$J_{1z} = J_x + J_y = m_1 R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{п.53})$$

При рассмотрении моментов инерции полудиска массы  $m$ , радиуса  $R$  и толщины  $b$  представим его в виде набора тонких пластин так, как показано на рис. 40.

Систему координат выберем так, чтобы ее центр совпадал с центром масс полудиска, а направление осей координат — с направлением соответствующих главных центральных осей.

Моменты инерции  $dJ'_x, dJ'_y, dJ'_z$  тонких пластин с массами  $dm_1 = (m/b) \cdot dz$ , относительно осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  получаем на основании (п.51)–(п.53) и теоремы Гюйгенса–Штейнера:

$$dJ_x = dm_1 R^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + dm_1 z^2. \quad (\text{п.54})$$

$$dJ_y = \frac{1}{4} dm_1 R^2 + dm_1 z^2, \quad (\text{п.55})$$

$$dJ_z = dm_1 R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{п.56})$$

где  $z$  — расстояние пластины от центра масс полудиска.

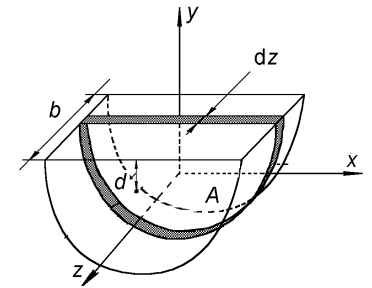


Рис. 40. Выбор системы координат и представление полудиска толщины  $b$  в виде тонких полукруглых пластин



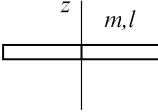
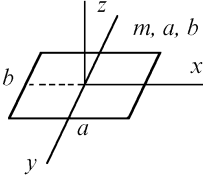
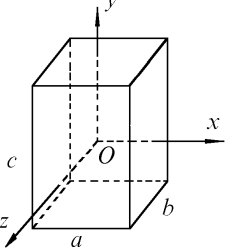
Выражения для моментов инерции полудиска получаем после интегрирования по всему объему:

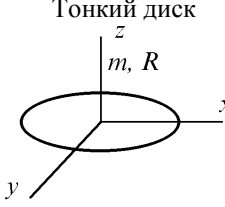
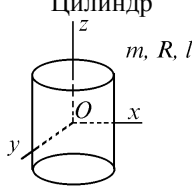
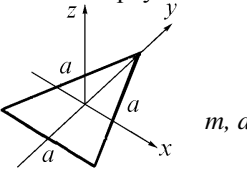
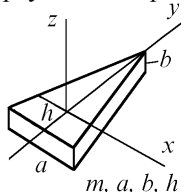
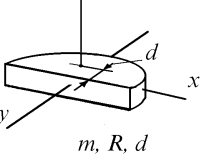
$$J_x = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \int_{-b/2}^{b/2} \frac{m}{b} z^2 dz = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12} mb^2, \quad (\text{п.57})$$

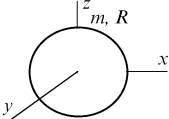
$$J_y = \frac{1}{4} mR^2 + \int_{-b/2}^{b/2} 2 \frac{m}{b} z^2 dz = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mb^2, \quad (\text{п.58})$$

$$J_z = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{п.59})$$

**Приложение 11. Моменты инерции тел, рассмотренных в приложениях (относительно осей, указанных на рисунках)**

Форма тела	Моменты инерции
Тонкий однородный стержень 	$J = \frac{ml^2}{12}$
Тонкая прямоугольная пластинка 	$J_x = \frac{mb^2}{12}$ $J_y = \frac{ma^2}{12}$ $J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
Параллелепипед 	$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$ $J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$ $J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$

Форма тела	Моменты инерции
Тонкий диск 	$J_x = \frac{1}{4} mR^2$ $J_y = \frac{1}{4} mR^2$ $J_z = \frac{1}{2} mR^2$
Цилиндр 	$J_x = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$ $J_y = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$ $J_z = \frac{1}{2} mR^2$
Плоский треугольник 	$J_x = \frac{ma^2}{24}$ $J_y = \frac{ma^2}{24}$ $J_z = \frac{ma^2}{12}$
Треугольная призма 	$J_x = \frac{mh^2}{18} + \frac{mb^2}{12}$ $J_y = \frac{ma^2}{24} + \frac{mb^2}{12}$ $J_z = \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18}$
Полудиск 	$J_x = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12} mb^2$ $J_y = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mb^2$ $J_z = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$

Форма тела	Моменты инерции
<p data-bbox="293 204 349 228">Шар</p>  <p data-bbox="293 236 360 260"><math>m, R</math></p>	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2$

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. 3-е изд. М.: Наука, 1989. § 53.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986.

Учебное издание

САЛЕЦКИЙ Александр Михайлович  
СЛЕПКОВ Александр Иванович

### ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Подписан в печать 22 .07.2005 г.  
Формат 60x90 1/16. Объем 6,25 п.л.  
Тираж 500 экз. Заказ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
119992, Москва ГСП-2, Ленинские горы, 1, к.2

Отпечатано в Типографии Московского университета