

**А.В. Быков, И.В. Митин, А.М. Салецкий**

# **ОПТИКА. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению 010700.62 «Физика»  
и по специальности 010701.65 «Физика»*



Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
2010

## **К читателям серии пособий «УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ»**

На кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова создан и готовится к изданию «Университетский курс общей физики», предназначенный для студентов физических специальностей вузов.

Курс охватывает четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электромагнетизм» и «Оптика». Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум» и «Методика решения задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент».

Пособием, позволяющим развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач», которое составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельной работы. Весь материал разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

*Салецкий А.М.*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Предисловие.....  | 6   |
| Глава 1. Геометрическая оптика и простые оптические системы.....      | 7   |
| 1.1. Теоретическое введение .....                                     | 7   |
| 1.2. Основные типы задач и решений.....                               | 13  |
| 1.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 30  |
| 1.4. Литература .....   | 33  |
| Глава 2. Уравнения Максвелла. Электромагнитные (световые) волны. .... |     |
| Давление и интенсивность схемы.....                                   | 34  |
| 2.1. Теоретическое введение .....                                     | 34  |
| 2.2. Основные типы задач и решения.....                               | 44  |
| 2.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 52  |
| 2.4. Литература .....   | 54  |
| Глава 3. Двухлучевая интерференция света. Интерференционные           |     |
| схемы .....   | 55  |
| 3.1. Теоретическое введение .....                                     | 55  |
| 3.2. Основные типы задач и решений.....                               | 63  |
| 3.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 80  |
| 3.4. Литература .....   | 83  |
| Глава 4. Дифракция Френеля .....                                      | 84  |
| 4.1. Теоретическое введение .....                                     | 84  |
| 4.2. Основные типы задач и решения.....                               | 91  |
| 4.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 108 |
| 4.4. Литература .....   | 110 |
| Глава 5. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка как спек-       |     |
| тральный прибор .....   | 111 |
| 5.1. Теоретическое введение .....                                     | 111 |
| 5.2. Основные типы задач и решений.....                               | 115 |
| 5.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 130 |
| 5.4. Литература .....   | 131 |
| Глава 6. Оптические явления на границе раздела диэлектриков .....     | 132 |
| 6.1. Теоретическое введение .....                                     | 132 |
| 6.2. Основные типы задач и решений.....                               | 137 |
| 6.3. Задачи для самостоятельного решения .....                        | 152 |
| 6.4. Литература .....   | 153 |
| Глава 7. Дисперсия света. Зависимость показателя преломления и коэф-  |     |
| фициента поглощения света от частоты. Фазовая и групповая             |     |
| скорости света. ....  | 154 |

|   |     |
|---|-----|
| 7.1. Теоретическое введение .....   | 154 |
| 7.2. Основные типы задач и решения .....  | 162 |
| 7.3. Задачи для самостоятельного решения .....  | 174 |
| 7.4. Литература .....   | 175 |
| Глава 8. Поляризация света. Интерференция поляризованных пучков                                       | 177 |
| 8.1. Теоретическое введение .....   | 177 |
| 8.2. Основные типы задач и решений .....  | 182 |
| 8.3. Задачи для самостоятельного решения .....  | 191 |
| 8.4. Литература .....   | 193 |
| Глава 9. Распространение света в анизотропных средах.   |     |
| Оптические свойства одноосных кристаллов .....  | 194 |
| 9.1. Теоретическое введение .....   | 194 |
| 9.2. Основные типы задач и решений .....  | 203 |
| 9.3. Задачи для самостоятельного решения .....  | 209 |
| 9.4. Литература .....   | 210 |
| Глава 10. Распространение света в анизотропных средах. Оптические свойства одноосных кристаллов ..... | 211 |
| 10.1. Теоретическое введение .....  | 211 |
| 10.2. Основные типы задач и решений .....   | 218 |
| 10.3. Задачи для самостоятельного решения .....   | 228 |
| 10.4. Литература .....  | 230 |
| Глава 11. Тепловое излучение .....  | 231 |
| 11.1. Теоретическое введение .....  | 231 |
| 11.2. Основные типы задач и решений .....   | 236 |
| 11.3. Задачи для самостоятельного решений .....   | 244 |
| 11.4. Литература .....  | 245 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова «Университетский курс общей физики».

Содержание пособия разделено на главы с максимально возможной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по оптике в курсе общей физики для студентов 2-го курса. По традиции каждая глава в пособии начинается с краткого изложения соответствующего теме теоретического материала, которое сопровождается необходимыми с методической точки зрения комментариями и пояснениями. В раздел «Задачи с решениями» в первую очередь были отобраны те задачи, ознакомление с предлагаемыми решениями которых (как и в случае с типовыми задачами) будет способствовать по мнению авторов лучшему пониманию и усвоению учебного материала. В конце каждой главы приведены формулировки задач для самостоятельного решения, а также список рекомендуемой учебной литературы.

При работе над пособием авторы постарались максимально учесть многолетний опыт преподавания кафедрой курса общей физики и выражают искреннюю благодарность своим коллегам за поддержку, участие в обсуждениях содержания пособия и полезные замечания.

Авторы заранее признательны также всем, кто поспособствует улучшению в дальнейшем этого учебно-методического пособия.

## Глава 1

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И ПРОСТЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

## 1.1. Теоретическое введение

Многие оптические явления, имеющие важное практическое значение, удастся объяснить в рамках геометрической оптики, в которой распространение света описывается с помощью светового луча – линии, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения световой энергии. Поэтому решение задач геометрической оптики сводится к определению хода световых лучей в оптических системах.

К **основным законам** геометрической оптики относят:

1. **Закон прямолинейного распространения света:** в однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. **Закон отражения:** на границе раздела двух сред луч падающий (1), луч отраженный (1') и нормаль (N) к отражающей поверхности в точке падения O лежат в одной плоскости; угол падения  $\theta_1$  равен углу отражения  $\theta_0$  (рис. 1.1):

$$\theta_1 = \theta_0. \quad (1.1)$$

3. **Закон преломления света:** на границе раздела двух сред луч падающий (1), луч преломленный (2) и нормаль (N) к преломляющей поверхности в точке падения O лежат в одной плоскости; угол падения  $\theta_1$  и угол преломления  $\theta_2$  связаны соотношением (см. рис. 1.1):

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2, \quad (1.2)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления соответственно первой и второй сред.

4. **Закон независимого распространения световых лучей:** лучи не влияют друг на друга и распространяются независимо.

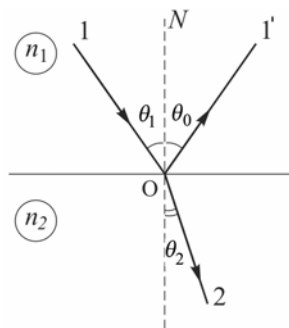


Рис. 1.1. Отражение и преломление светового луча на границе раздела двух сред ( $n_1 < n_2$ )

### Преломление света на сферической границе раздела двух сред

Пусть сферическая поверхность, радиус которой  $OC = R$ , разделяет среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 1.2 и 1.3). В параксиальном приближении (при малых углах между световым лучом и оптической осью  $Ox$ )  $x$ -координаты точек  $S_1$  (предмет) и  $S_2$  (изображение), отсчитываемые от вершины поверхности  $O$ , связаны соотношением:

$$n_1 \left( \frac{1}{x_{S_1}} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{x_{S_2}} - \frac{1}{R} \right), \quad (1.3)$$

или

$$\frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (1.4)$$

Для оптической системы, показанной на рис. 1.2:  $n_2 > n_1$ ,  $R > 0$ ,  $x_{S_1} < 0$ ,  $x_{S_2} > 0$ ; для оптической системы, представленной на рис. 1.3:  $n_2 > n_1$ ,  $R < 0$ ,  $x_{S_1} < 0$ ,  $x_{S_2} < 0$ .

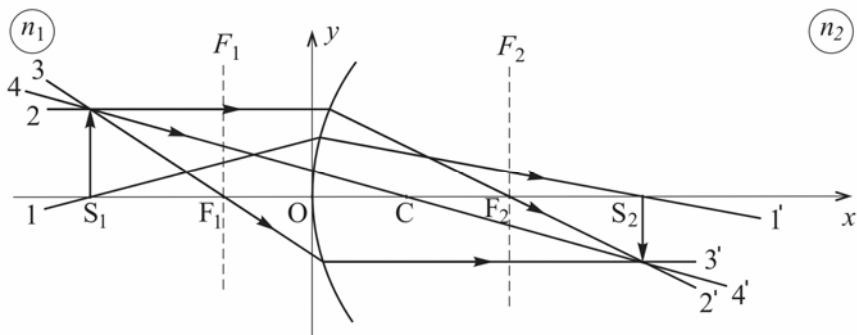


Рис. 1.2. Преломление лучей на сферической границе раздела двух сред ( $n_2 > n_1$ )

Величина

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (1.5)$$

называется *оптической силой* сферической преломляющей поверхности. Если  $\Phi > 0$  (рис. 1.2), то луч 2, параллельный главной оптической оси  $Ox$ , после преломления (луч 2') пересекает ее в точке  $F_2$  (задний фокус), а луч 3, проходящий через передний фокус  $F_1$ , после преломления (луч 3') параллелен оптической оси. В случае

$\Phi < 0$  (рис. 1.3) задний ( $F_2$ ) и передний ( $F_1$ ) фокусы соответствуют точкам пересечения с оптической осью продолжений лучей 2' и 3.

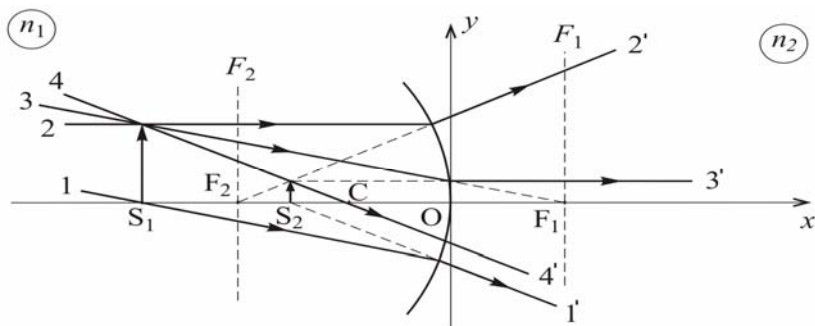


Рис. 1.3. Преломление лучей на сферической границе двух сред ( $n_2 > n_1$ )

Полагая в формуле (1.3) поочередно  $x_{S_2} = \infty$  и  $x_{S_1} = \infty$ , для фокусных расстояний сферической преломляющей поверхности получим соответственно:

$$f_1 \equiv x_{F_1} = -\frac{n_1}{\Phi} = -\frac{R}{n-1}, \quad (1.6)$$

$$f_2 \equiv x_{F_2} = \frac{n_2}{\Phi} = \frac{n \cdot R}{n-1},$$

где  $n = \frac{n_2}{n_1}$  – относительный показатель преломления. Как следует из (1.6),

$$f_2 = -n \cdot f_1. \quad (1.7)$$

Плоскости, перпендикулярные оптической оси и пересекающие ее в точках  $S_1$  и  $S_2$ , называют *сопряженными*, а параллельные им плоскости  $F_1$  и  $F_2$  – соответственно передней и задней *фокальной плоскостью*.

С учетом (1.6) формулу (1.4) можно представить в виде:

$$\frac{f_2}{x_{S_2}} + \frac{f_1}{x_{S_1}} = 1. \quad (1.8)$$

Кроме того, справедливо соотношение:

$$(x_{S_1} - f_1) \cdot (x_{S_2} - f_2) = f_1 f_2. \quad (1.9)$$



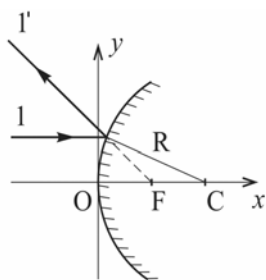


Рис. 1.4. Отражение луча от сферического зеркала

### Отражение света от сферического зеркала

Если в формуле (1.4) для луча, отраженного от сферической поверхности радиуса  $R$ , положить  $n_2 = -n_1$ , то получим формулу сферического зеркала:

$$\frac{1}{x_{S_2}} + \frac{1}{x_{S_1}} = \frac{2}{R}, \quad (1.10)$$

для которого фокусное расстояние равно (см. рис. 1.4)

$$x_F \equiv f = \frac{R}{2}. \quad (1.11)$$

### Формулы для центрированной оптической системы

Совместим координатную ось  $Ox$  с *главной оптической осью* системы – прямой линией, на которой лежат центры кривизны всех преломляющих поверхностей.

Характеристики такой *центрированной* оптической системы можно полностью описать, задав положения ее *кардинальных элементов* – *главных* ( $H_1$  и  $H_2$ ) и *фокальных* ( $F_1$  и  $F_2$ ) плоскостей, которые перпендикулярны главной оптической оси и пересекаются с ней соответственно в *главных точках* ( $H_1$  и  $H_2$ ) и в *фокусах* ( $F_1$  и  $F_2$ ), а также *узловых точек*  $N_1$  и  $N_2$  (см. рис. 1.5).

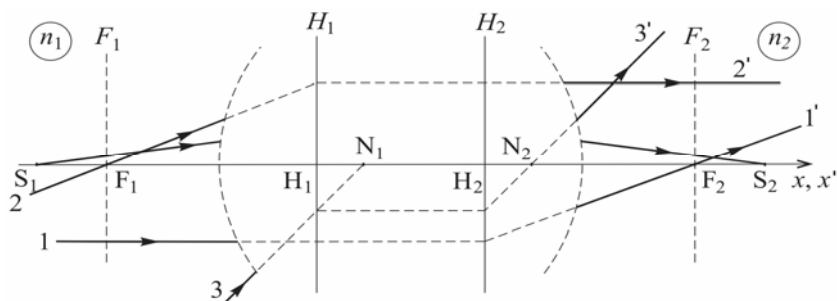


Рис. 1.5. Кардинальные элементы центрированной оптической системы и ход лучей в ней

Если координаты  $x$  точек с индексом 1 ( $S_1$ ,  $F_1$  и  $N_1$ ) отсчитывать от главной точки  $H_1$ , а координаты  $x'$  точек с индексом 2 ( $S_2$ ,  $F_2$

и  $N_2$ ) – от главной точки  $H_2$ , то в парапаксиальном приближении для центрированной оптической системы справедлива формула:

$$\frac{n_2}{x'_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \Phi, \quad (1.12)$$

где

$$\Phi = \frac{n_2}{x'_{F_2}} = -\frac{n_1}{x_{F_1}} \quad (1.13)$$

– *оптическая сила* центрированной системы,  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления сред соответственно слева и справа от крайних преломляющих поверхностей оптической системы.

Координаты узловых точек  $N_1$  и  $N_2$  (через них проходят продолжения параллельных лучей 3 и 3' на рис. 1.5) могут быть найдены по формулам (рис. 1.6):

$$x_{N_1} = x_{F_1} + x'_{F_2}, \quad (1.14)$$

$$x'_{N_2} = x'_{F_2} + x_{F_1}. \quad (1.15)$$

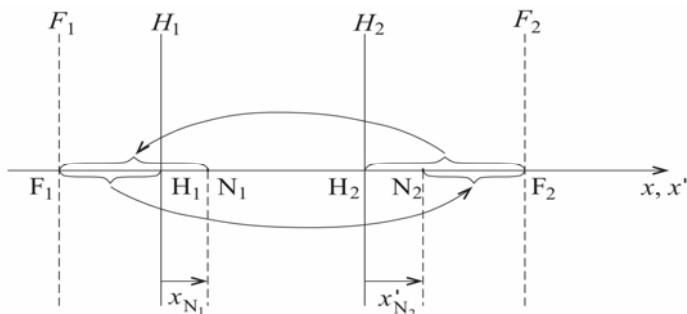


Рис. 1.6. Положения узловых точек  $N_1$  и  $N_2$  центрированной оптической системы

Если  $x_{F_1} = -x'_{F_2}$ , то узловые точки  $N_1$  и  $N_2$  совпадают с соответствующими главными точками  $H_1$  и  $H_2$ .

### **Толстая линза**

Для линзы толщиной  $O_1O_2 = d$  (толстая линза), изготовленной из материала с показателем преломления  $n$  (рис. 1.7), оптическая сила  $\Phi$  находится по формуле:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2, \quad (1.16)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – оптические силы (1.5) сферических преломляющих поверхностей линзы.

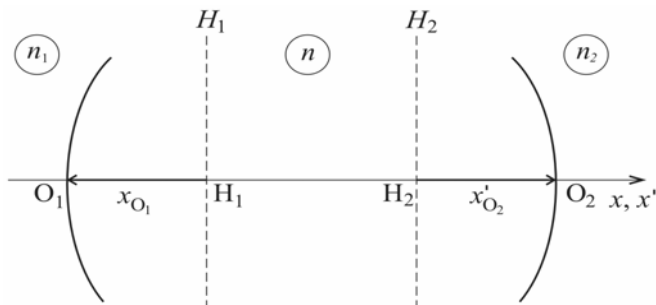


Рис. 1.7. Схематическое представление толстой линзы

Координаты вершин линзы  $O_1$  и  $O_2$ , отсчитываемые соответственно от главных точек  $H_1$  и  $H_2$  (рис. 1.7), могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} x_{O_1} &= -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}, \\ x_{O_2} &= \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Линза называется *собирающей*, если  $\Phi > 0$ , и *рассеивающей*, если  $\Phi < 0$ .

### Тонкие линзы

В случае *тонкой* линзы ( $d = 0$ ) из материала с показателем преломления  $n$  ее оптическая сила  $\Phi$  равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{n - n_1}{R_1}, \\ \Phi_2 &= \frac{n_2 - n}{R_2}. \end{aligned}$$

Если тонкая линза окружена средой с показателем преломления  $n_0$ , то в этом случае:

$$\Phi = (n - n_0) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.19)$$

Главные и узловые точки тонкой линзы совпадают с ее оптическим центром.

Для системы из двух тонких линз с оптическими силами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{l}{n_0} \Phi_1 \Phi_2, \quad (1.20)$$

где  $l$  – расстояние между линзами,  $n_0$  – показатель среды между ними.

## 1.2. Задачи с решениями

**Задача 1.2.1.** В каких пределах может изменяться угол отклонения луча  $\varphi$  при его прохождении через стеклянную призму с преломляющим углом  $\alpha = 60^\circ$ ? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

### Решение

В соответствии с законом преломления (1.2) луч, падающий на боковую грань призмы под углом  $\theta_1$  (рис.1.8), после двукратного преломления выйдет из призмы под углом  $\theta_2'$ , отклонившись от первоначального направления на угол  $\varphi$ .

Так как сумма внутренних углов четырехугольника ABCD равна  $2\pi$ , то

$$\theta_1 + \theta_2' + (\pi - \varphi) + (\pi - \alpha) = 2\pi,$$

или

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2' - \alpha,$$

а с учетом закона преломления и соотношения  $\theta_1' + \theta_2 = \alpha$  :

$$\varphi = \arcsin(n \sin \theta_2) + \arcsin[n \sin(\alpha - \theta_2)] - \alpha. \quad (1.21)$$

Для призмы с преломляющим углом  $\alpha = 60^\circ$  из условий  $\sin(\alpha - \theta_1) \leq 1/n$  и  $n \cdot \sin \theta_1 \leq 1$  получаем  $18,2^\circ \leq \theta_1 \leq 41,8^\circ$ .

Производная

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = \frac{n \cdot \cos \theta_2}{\sqrt{1 - (n \cdot \sin \theta_2)^2}} - \frac{n \cdot \cos(\alpha - \theta_2)}{\sqrt{1 - [n \cdot \sin(\alpha - \theta_2)]^2}}$$

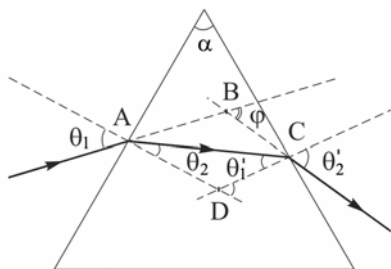


Рис. 1.8. Ход луча через стеклянную призму

обращается в нуль, если  $\alpha - \theta_2 = \theta_2$ , т.е. при  $\theta_2 = \alpha/2 = 30^\circ$  (преломленный луч АС параллелен основанию призмы).

Подставив в (1.21) значения  $\theta_2 = 18,2^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $41,8^\circ$ , получим  $\varphi \approx 58^\circ$ ,  $37^\circ$  и  $58^\circ$  соответственно.

Таким образом, угол отклонения луча может изменяться в пределах от  $37^\circ$  до  $58^\circ$ , а его минимальное значение  $\varphi_{\min}$  связано с углом  $\alpha$  соотношением:

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2} = n \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

В частности, для стеклянной призмы  $\varphi_{\min} = \alpha$ , если  $\alpha \approx 83^\circ$ .

**Задача 1.2.2.** Световой луч падает на выпуклое сферическое зеркало (рис. 1.9 а; F – фокус, OO' – оптическая ось). С помощью геометрических построений найти направление отраженного луча.

### Решение

Построим вспомогательный луч 2, падающий на зеркало параллельно лучу 1 «с прицелом на фокус F» (рис. 1.9 б). Отраженный в точке В луч 2' должен быть параллелен оптической оси OO'.

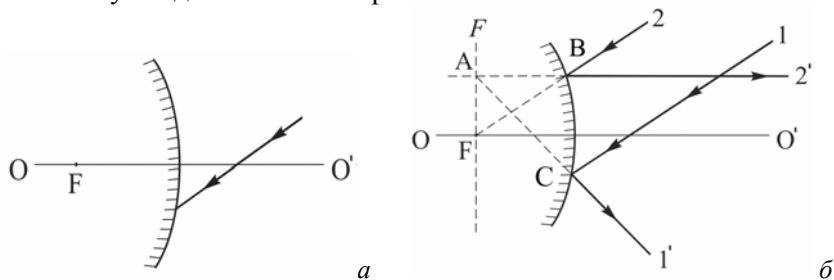


Рис. 1.9. Заданное направление луча, падающего на выпуклое зеркало с фокусным расстоянием F (а), и построение отраженного луча 1' (б)

Продолжение луча 2' (влево) пересекает фокальную плоскость F в точке А. Следовательно, отраженный в точке С луч 1' должен лежать на прямой, пересекающей фокальную плоскость F в той же точке А.

**Задача 1.2.3.** Найти с помощью геометрических построений положение сферического зеркала и его фокуса, если Р и Р' – сопряженные точки, а OO' – оптическая ось (рис. 1.10 а).

**Решение**

Проведем через точки  $P$  и  $P'$  прямую 1. Она пересечет оптическую ось в точке  $C$ , являющейся центром кривизны зеркала.

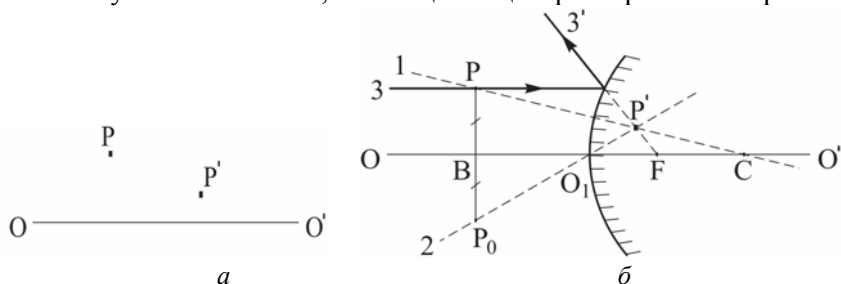


Рис. 1.10. Положения сопряженных точек  $P$  и  $P'$  относительно оптической оси  $OO'$  сферического зеркала ( $a$ ) и вспомогательные построения при определении положения зеркала и его фокуса ( $b$ )

Из точки  $P$  опустим перпендикуляр на оптическую ось  $OO'$  (рис. 1.10  $b$ ) и продолжим его до точки  $P_0$  ( $PB = BP_0$ ). Проведем через точки  $P'$  и  $P_0$  прямую 2 в направлении на вершину зеркала  $O_1$ . Таким образом, точка  $P'$  – мнимое изображение точки  $P$  в выпуклом сферическом зеркале с радиусом  $O_1C$ . Луч 3, параллельный оптической оси  $OO'$ , отражается в направлении луча  $3'$ , который лежит на прямой, проходящей через точку  $P'$  и фокус  $F$ .

В соответствии с формулой (1.11):  $O_1F = FC = R/2$ .

**Задача 1.2.4.** Луч света падает из воздуха на стеклянную пластину со сферической поверхностью (рис. 1.11  $a$ ; точками отмечены положения фокусов). С помощью геометрических построений найти направление преломленного луча.

**Решение**

В соответствии с (1.5) оптическая сила сферической преломляющей поверхности

$$\Phi = \frac{n-1}{R} < 0,$$

поскольку  $R < 0$  (луч падает на вогнутую сферическую поверхность). Следовательно, задний фокус  $F'$  находится слева от вершины  $O$  преломляющей поверхности, а передний фокус  $F$  – справа (рис. 1.11  $b$ ).

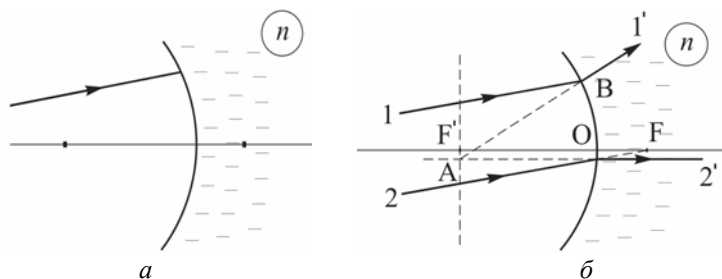


Рис. 1.11. Падение луча света 1 на стеклянную сферическую поверхность и положения фокусов (а); построение преломленного луча 1' (б)

Проведем луч 2 параллельно заданному лучу 1 в направлении на передний фокус  $F$ . Преломленный луч 2' будет параллелен главной оптической оси, а его продолжение (влево) пересечет заднюю фокальную плоскость  $F'$  в точке  $A$ . Искомый луч 1' будет лежать на прямой  $AB$ .

**Задача 1.2.5.** Точечный источник света  $S$  находится на расстоянии  $a = 20$  см от передней поверхности стеклянной симметричной двояковыпуклой линзы (рис.1.12 а): толщина линзы  $d = 5$  см, радиус кривизны поверхностей  $R = 5$  см. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ . На каком расстоянии от задней поверхности линзы находится изображение источника?

### Решение

**1-й способ.** Пусть промежуточное изображение  $S'$  точки  $S$ , даваемое первой преломляющей поверхностью, находится на расстоянии  $b = O_1S'$  от вершины  $O_1$  (рис. 1.12 а). Полагая в формуле (1.3)  $x_{S_2} = b$  и  $x_{S_1} = -a$ , получим:

$$\frac{n}{b} + \frac{1}{a} = \Phi_1, \quad (1.22)$$

где  $\Phi_1 = (n-1)/R_1 > 0$  – оптическая сила первой преломляющей поверхности ( $R_1 = R > 0$ ).

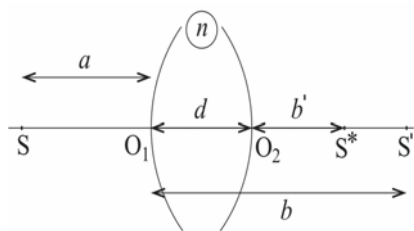
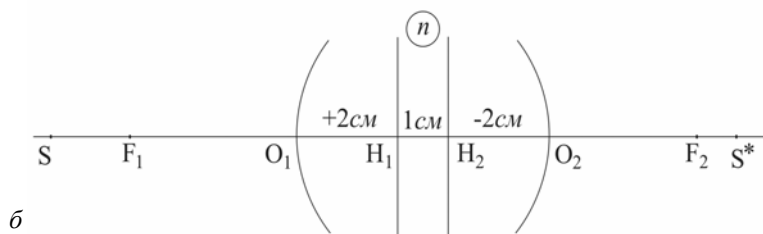


Рис. 1.12.  $a$  – принятые обозначения;  $b$  – положение кардинальных точек оптической системы

$a$



$b$

Подставляя в (1.22) значения  $a$ ,  $R$  и  $n$ , получаем:

$$b = \frac{a \cdot n \cdot R}{a \cdot (n-1) - R} = 30 \text{ см.}$$

Для второй преломляющей поверхности с вершиной в точке  $O_2$ :

$$\frac{1}{b'} - \frac{n}{a'} = \Phi_2,$$

или

$$b' = \frac{a'}{\Phi_2 a' + n}, \quad (1.23)$$

где  $b' = O_2 S^*$ ,  $a' = O_2 S' = O_1 S' - d = b - d = 25$  см ( $S'$  – мнимый по отношению ко второй преломляющей поверхности источник),  $\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2} > 0$  – оптическая сила второй преломляющей поверхности ( $R_2 = -R < 0$ ).

В соответствии с (1.23) изображение  $S^*$  точечного источника  $S$  находится на расстоянии  $b' = 6,25$  см от задней поверхности линзы.

**2-й способ.** Найдем положения кардинальных точек оптической системы (рис. 1.12 б).



Поскольку оптические силы преломляющих плоскостей равны  $\Phi_1 = \Phi_2 = (n-1)/R = 10$  дптр, то согласно (1.13) оптическая сила  $\Phi$  толстой линзы толщиной  $d = 5$  см из стекла ( $n = 1,5$ ) равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 = 50/3 \text{ дптр.}$$

Согласно (1.14) расстояния от главных плоскостей  $H_1$  и  $H_2$  соответственно до вершин  $O_1$  и  $O_2$  равны (рис. 1.12 б):

$$x_{O_1} = H_1 O_1 = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi} = -2 \text{ см,}$$

и

$$x'_{O_2} = H_2 O_2 = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi} = 2 \text{ см.}$$

В соответствии с (1.6) передний ( $F_1$ ) и задний ( $F_2$ ) фокусы отстоят от соответствующих главных плоскостей ( $H_1$  и  $H_2$ ) на расстоянии

$$f_1 = -\frac{n_0}{\Phi} = -6 \text{ см}$$

и

$$f_2 = \frac{n_0}{\Phi} = 6 \text{ см,}$$

то есть  $O_1 F_1 = -4$  см,  $O_2 F_2 = 4$  см.

Зная положения кардинальных точек оптической системы, можно найти положение  $b' = S^* O_2$  изображения  $S^*$ :

а) в соответствии с формулой (1.12):  $\frac{1}{S^* H_2} - \frac{1}{S H_1} = \Phi$ , где

$S H_1 = -a + H_1 O_1 = -26$  см,  $S^* H_2 = O_2 H_2 + b'$ , и  $b' = 6,25$  см;

б) по аналогии с (1.8), для центрированной оптической системы:  $\frac{f_2}{S^* H_2} + \frac{f_1}{S H_1} = 1$ , и  $b' = S H_2 - O_2 H_2 = 6,25$  см;

в) по аналогии с формулой (1.9):  $S F_1 \cdot S^* F_2 = f_1 \cdot f_2$ , но тогда  $b' = F_2 O_2 + S^* F_2 = 4 + 2,25 = 6,25$  см.

**Ответ:** 6,25 см.

**Задача 1.2.6.** С помощью построений найти положение тонкой стеклянной линзы в однородной среде и ее фокусов, если известны

положения сопряженных точек  $S$  и  $S^*$  относительно оптической оси  $OO'$  (см. рис. 1.13 *a*).

### Решение

Проведем через точки  $S$  и  $S^*$  прямую 1 до пересечения с осью  $OO'$  в точке  $O_1$  (рис. 1.13 *б*). Так как для тонкой линзы в однородной среде узловые ( $N_1$  и  $N_2$ ) и главные ( $H_1$  и  $H_2$ ) точки совпадают с центром линзы, то точка  $O_1$  и является таковым.

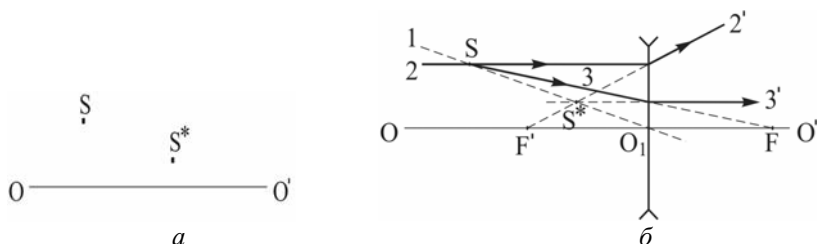


Рис. 1.13. Положение сопряженных точек  $S$  и  $S^*$  относительно оси  $OO'$  (*a*); ход лучей при преломлении в тонкой стеклянной линзе (*б*)

Поскольку источник  $S$  и его изображение  $S^*$  находятся по одну сторону от линзы и, кроме того, расстояние от источника до линзы больше, чем от изображения до линзы, поэтому линза – рассеивающая. Лучу 2, параллельному оси  $OO'$ , соответствует преломленный луч  $2'$ , продолжение которого проходит через точку  $S^*$  и пересекает ось  $OO'$  в заднем фокусе  $F'$  линзы. Для определения положения переднего фокуса  $F$  проведем через точку  $S^*$  параллельный оси  $OO'$  луч  $3'$ , а через источник света  $S$  – луч 3, продолжение которого пересекает ось  $OO'$  в точке  $F$ . Так как по обе стороны от линзы среда одна и та же, то  $|F'O_1| = FO_1$ .

**Задача 1.2.7.** С помощью построений найти ход луча 2 после преломления в собирающей тонкой линзе, находящейся в однородной среде, если известно положение линзы (и ее оптической оси  $OO'$ ) и задан ход луча 1 (рис. 1.14 *a*).

### Решение

Проведем через оптический центр  $O_1$  линзы вспомогательный луч 3, параллельный лучу 1. Луч 3 проходит через линзу, не преломляясь, и пересекается с лучом  $1'$  в задней фокальной плоскости  $F'$  (рис. 1.14 *б*). Для нахождения луча  $2'$  построим

вспомогательный луч 4, параллельный лучу 2 и проходящий через оптический центр линзы  $O_1$ . Луч 4 пересечет фокальную плоскость  $F'$  в точке, через которую должен проходить и луч 2'.

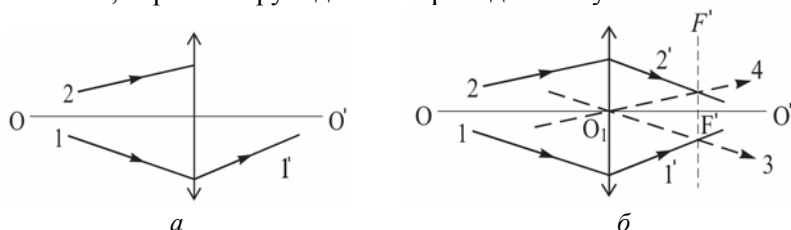


Рис. 1.14. Положение тонкой собирающей линзы и ход луча 1 (а); построение хода луча 2 за линзой (б)

**Задача 1.2.8.** Две тонкие симметричные линзы с одинаковыми радиусами кривизны преломляющих поверхностей  $R = 5$  см (одна – собирающая, из кронгласа SK1 с показателем преломления  $n_1 = 1,61$ , а другая – рассеивающая, из кварцевого стекла с  $n_2 = 1,46$ ) прижали вплотную друг к другу и погрузили в воду с  $n_0 = 1,33$ . Найти фокусное расстояние  $f$  этой оптической системы.

### Решение

В соответствии с формулой (1.19) оптическая сила каждой из тонких линз в воде:

$$\Phi_1 = \frac{2 \cdot (n_1 - n_0)}{R}, \quad \Phi_2 = -\frac{2 \cdot (n_2 - n_0)}{R}.$$

Согласно (1.20):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n_0} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2.$$

Полагая  $d = 0$ , для оптической силы системы получаем:

$$\Phi = \frac{2(n_1 - n_2)}{R}.$$

В соответствии с (1.6):

$$f = \frac{n_0}{\Phi} = \frac{n_0 \cdot R}{2(n_1 - n_2)} = 22,2 \text{ см}.$$

**Ответ:**  $f = 22,2$  см.

**Задача 1.2.9.** Труба Галилея представляет собой телескопическую систему и состоит из собирающей (объектив) и рассеивающей

(окуляр) линз. При установке на бесконечность труба имеет длину  $l = 70$  см и дает 15-кратное угловое увеличение. Определить: а) фокусные расстояния объектива и окуляра трубы; б) на какое расстояние  $\Delta l$  надо передвинуть окуляр трубы, чтобы четко видеть предметы, находящиеся на расстоянии  $a = 50$  м?

### Решение

а) При установке на бесконечность задний фокус  $F'_{об}$  объектива совмещен с передним фокусом  $F_{ок}$  окуляра (см. рис. 1.15 а). Если  $l$  – длина трубы, то

$$l = f_{об} - f_{ок} . \quad (1.24)$$

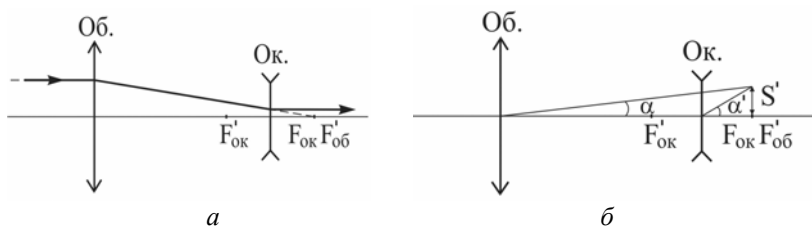


Рис. 1.15. Оптическая схема трубы Галлея (а) и к вопросу об определении углового увеличения трубы Г (б)

Угловое увеличение трубы (см. рис. 1.15 б)

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{f_{об}}{f_{ок}} \quad (1.25)$$

равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра.

Из (1.24) и (1.25) получаем:

$$f_{ок} = \frac{l}{\Gamma - 1} = 5 \text{ см},$$

$$f_{об} = \Gamma \cdot f_{ок} = 75 \text{ см}.$$

б) Положение даваемого объективом изображения предмета, находящегося от объектива на расстоянии  $a$ , можно найти с помощью формулы (1.9):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_{об}} .$$

Отсюда расстояние  $x$  равно

$$x = \frac{a \cdot f_{\text{ок}}}{a - f_{\text{об}}} = 83,1 \text{ см.}$$

Следовательно, чтобы четко видеть предмет, необходимо отодвинуть окуляр от объектива на расстояние  $\Delta l = x - f_{\text{об}} = 13,1 \text{ см.}$

**Ответ:** а)  $f_{\text{об}} = 75 \text{ см}$ ,  $f_{\text{ок}} = 5 \text{ см}$ ;

б)  $\Delta l = 13,1 \text{ см}$

**Задача 1.2.10.** Зрительная труба Кеплера состоит из двух собирающих линз – объектива и окуляра (рис. 1.16). Найти увеличение  $\Gamma$ , даваемое трубой при установке на бесконечность, если диаметр  $D$  оправы объектива и диаметр  $d$  изображения оправы, которое дает окуляр, соотносятся как  $d = 0,05 D$ .

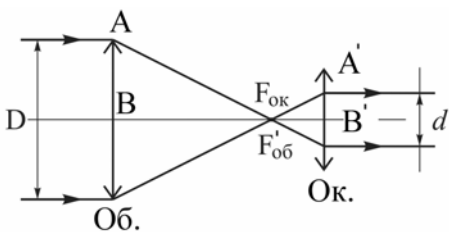


Рис. 1.16. Оптическая схема трубы Кеплера

### Решение

При установке трубы Кеплера на бесконечность задний фокус объектива  $F'_{\text{об}}$  совпадает с передним фокусом окуляра  $F_{\text{ок}}$ . Согласно (1.25) увеличение трубы равно

$$\Gamma = \frac{f_{\text{об}}}{f_{\text{ок}}}.$$

Как видно из рис. 1.16,

$$\Gamma = \frac{D}{d} = 20.$$

**Ответ:**  $\Gamma = 20$ .

**Задача 1.2.11.** Две тонкие линзы из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  и радиусами кривизны сферических поверхностей  $R_{\text{об}} = 1 \text{ см}$  и  $R_{\text{ок}} = 5 \text{ см}$  используются в качестве соответственно объектива и окуляра микроскопа, дающего увеличение  $\Gamma = 50$ . После изменения расстояния между объективом и окуляром на  $\Delta l$  увеличение стало равным  $\Gamma' = 60$ . Определить расстояние  $\Delta l$ .

### Решение

При наблюдении с помощью микроскопа малоразмерных объектов предмет АВ располагают вблизи переднего фокуса объектива  $F'_{об}$  (рис. 1.17). Объектив дает увеличенное действительное перевернутое изображение  $A'B'$  вблизи фокуса окуляра  $F_{ок}$ . В свою очередь окуляр переводит  $A'B'$  в увеличенное мнимое изображение  $A^*B^*$ , которое находится на расстоянии наилучшего зрения от окуляра (глаза):  $O'B^* = L_0 = 25$  см. Рас-

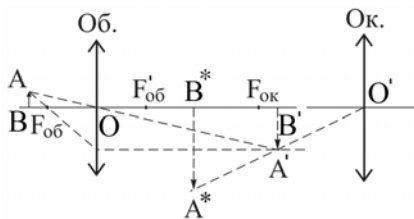


Рис. 1.17. Ход лучей в микроскопе

стояние  $X$  между точками  $F'_{об}$  и  $F_{ок}$  называют *оптической длиной микроскопа*. При расчетах принимается, что расстояние от предмета АВ до объектива приближенно равно фокусному расстоянию объектива  $f_{об}$ , а расстояние от изображения  $A'B'$  до окуляра равно фокусному расстоянию окуляра  $f_{ок}$ .

Из подобия треугольников АОВ и ОА'В' следует, что даваемое объективом увеличение равно

$$\Gamma_{об} \approx \frac{A'B'}{AB} \approx \frac{f_{об} + X}{f_{об}} = 1 + X \cdot \Phi_{об}, \quad (1.26)$$

где  $\Phi_{об} = 1/f_{об}$  – оптическая сила объектива.

Из подобия треугольников А'О'В' и А\*О'В\* находим увеличение, даваемое окуляром:

$$\Gamma_{ок} = \frac{B^*A^*}{B'A'} = \frac{L_0}{O'B'} \approx \frac{L_0}{f_{ок}} = L_0 \cdot \Phi_{ок}.$$

Следовательно, исходное увеличение  $\Gamma$  микроскопа равно

$$\Gamma = \Gamma_{об} \cdot \Gamma_{ок} = (1 + X \cdot \Phi_{об}) \cdot L_0 \cdot \Phi_{ок}.$$

При изменении расстояния между объективом и окуляром на  $\Delta l$  увеличение микроскопа становится равным

$$\Gamma' = [1 + (X + \Delta l) \cdot \Phi_{об}] \cdot L_0 \cdot \Phi_{ок} = \Gamma + \Delta l \cdot L_0 \cdot \Phi_{об} \cdot \Phi_{ок}.$$

Таким образом,

$$\Delta l = \frac{\Gamma' - \Gamma}{L_0 \cdot \Phi_{об} \cdot \Phi_{ок}}. \quad (1.27)$$

Согласно (1.19), оптические силы каждой из тонких линз равны соответственно

$$\Phi_{об} = \frac{2 \cdot (n - n_0)}{R_{об}} \quad (1.28)$$

и

$$\Phi_{ок} = \frac{2 \cdot (n - n_0)}{R_{ок}}. \quad (1.29)$$

С учетом (1.27)–(1.29) окончательно получаем:

$$\Delta l \approx \frac{(\Gamma' - \Gamma) R_{об} R_{ок}}{4L_0 (n - n_0)^2} = 2 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $\Delta l = 2 \text{ см.}$

**Задача 1.2.12.** Найти с помощью геометрических построений положения фокусов и главных плоскостей для толстой выпукловогнутой линзы толщиной  $d = 4 \text{ см}$  с показателем преломления  $n = 1,5$ , если оптические силы преломляющих поверхностей линзы в воздухе равны  $\Phi_1 = 50 \text{ дптр}$ ,  $\Phi_2 = -50 \text{ дптр}$  (рис. 1.18, а).

**Решение**

Так как по условию  $\Phi_1 = -\Phi_2$ , то в соответствии с (1.5)

$$R_1 = R_2 = \frac{n - 1}{\Phi_1} = 1 \text{ см}, \text{ а в соответствии с (1.6) } f_1 = f_2' = -\frac{n_0}{\Phi_1} = 2 \text{ см},$$

$$f_1' = f_2 = \frac{n_0}{\Phi_1} = 3 \text{ см.}$$

Положение фокусов сферических преломляющих поверхностей 1 и 2 показано на рис. 1.18 а.

Положение переднего  $F$  и заднего  $F'$  фокусов линзы найдем с помощью лучей, падающих на линзу параллельно главной оптической оси  $OO'$ . Положение главных плоскостей  $H$  и  $H'$  будем искать, исходя из того, что они – сопряженные, а коэффициент поперечного увеличения для них равен 1.

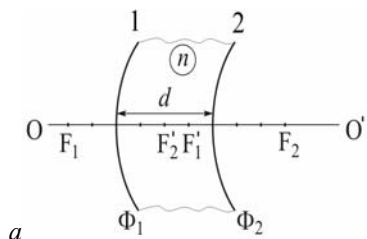
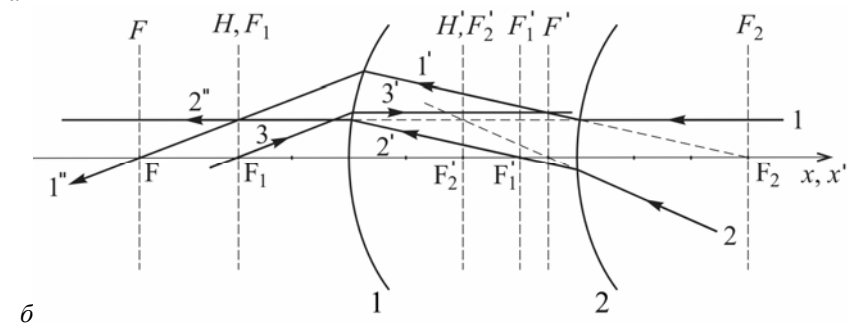


Рис. 1.18. *a* – оптическая схема толстой выпукло-вогнутой линзы;  
*б* – ход лучей через толстую выпукло-вогнутой линзу



Направим луч 1 (рис. 1.18 *б*) параллельно главной оптической оси. После преломления на поверхности 2 он переходит в луч 1', который как бы выходит из фокуса  $F_2$ . Параллельно лучу 1' построим луч 2', который пересекает оптическую ось в фокусе  $F'_1$  и после преломления на поверхности 1 переходит в луч 2'', параллельный оптической оси. Так как лучи 1' и 2' – параллельные, поэтому

а) луч 1'' пересекается с лучом 2'' в фокальной плоскости  $F_1$ , а с главной оптической осью – в фокусе  $F$  линзы;

б) луч 2 (а точнее – его продолжение) пересекается с оптической осью в фокусе  $F'$ , с продолжением луча 1 – в фокальной плоскости  $F'_2$ , а с продолжением луча 2'' – в главной плоскости  $H'$ . Таким образом, плоскости  $H'$  и  $F'_2$  совпадают. Совпадают и плоскости  $H$  и  $F_1$ , поскольку им принадлежит точка пересечения продолжения луча 1 и луча 1''.

Для иллюстрации возможности использования других лучей, на рис. 1.18*б* показан ход луча 3.

Относительно вершины  $O_1$  координаты найденных точек  $F$ ,  $H$ ,  $H'$  и  $F'$  равны соответственно – 3,5 см, – 2 см, + 2 см и + 3,5 см. Эти результаты подтверждаются расчетами по соответствующим формулам.



**Задача 1.2.13.** Найти с помощью геометрических построений положение точки  $S^*$ , сопряженной с точкой  $S$ , если для оптической системы в воздухе заданы положения главной оптической оси  $OO'$ , передней главной плоскости  $H$  и сопряженных точек  $P$  и  $P^*$  (рис. 1.19 а).

**Решение**

Поскольку среда по обе стороны от оптической системы одна и та же (воздух), то узловые точки совпадают с главными.

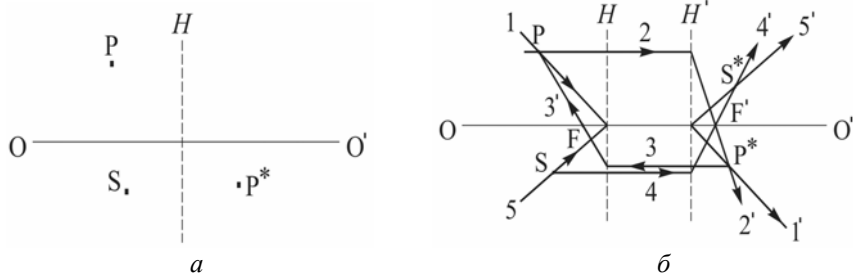


Рис.1.19. Положения главной оптической оси  $OO'$ , передней главной плоскости  $H$ , точки  $S$  и сопряженных точек  $P$  и  $P^*$  (а); построения для нахождения положения точки  $S^*$ , сопряженной с точкой  $S$  (б)

Направим из точки  $P$  два луча: луч 1 – в направлении на главную точку  $H$ , в которой главная плоскость  $H$  пересекается с осью  $OO'$ , а луч 2 – параллельно оси  $OO'$ . Проведем через точку  $P^*$  луч  $1'$ , параллельный лучу 1. Луч  $1'$  пересечет ось  $OO'$  в узловой точке  $N'$  (она же – главная точка  $H'$ , лежащая в главной плоскости  $H'$ ). Луч 2 после пересечения с плоскостью  $H'$  пойдет как луч  $2'$  в направлении на точку  $P^*$ . Точка пересечения луча  $2'$  с осью  $OO'$  совпадает с фокусом  $F'$ . Чтобы найти положение фокуса  $F$ , направим из точки  $P^*$  луч 3 параллельно оси  $OO'$  до пересечения с главной плоскостью  $H$ . Тогда луч  $3'$ , направленный на точку  $P$ , пересечет ось  $OO'$  в фокусе  $F$  системы.

Найдем положение точки  $S^*$ , сопряженной с точкой  $S$ . Луч 4, выходящий из точки  $S$  параллельно оси  $OO'$ , после пересечения с плоскостью  $H'$  изменит направление и пойдет через фокус  $F'$  (луч 4'). Луч 5, выходящий из точки  $S$  в направлении на главную точку  $H$  (она же – узловая точка  $N$ ), позволяет построить параллельный ему луч  $5'$ , выходящий из главной точки  $H'$  (она же – узловая точка  $N'$ ). Лучи 4' и 5' пересекаются в точке  $S^*$ .

**Задача 1.2.14.** С помощью построений найти положение изображения  $S'$  точки  $S$ , если для оптической системы задано относительное расположение точки  $S$ , фокусов  $F'$  и  $F$ , а также плоскостей  $H$  и  $H'$  (рис. 1.20).

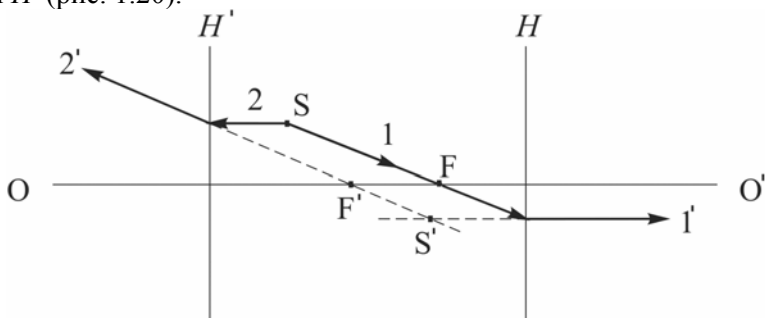


Рис.1.20. Построение изображения  $S'$  точки  $S$

### Решение

Чтобы найти положение изображения  $S'$  точки  $S$  построим два вспомогательных луча, исходящих из точки  $S$ : луч 1, проходящий через фокус  $F$ , после пересечения с плоскостью  $H$  будет параллелен оси  $OO'$  (луч  $1'$ ); луч 2, параллельный оси  $OO'$ , после пересечения с плоскостью  $H'$  изменит свое направление так (луч  $2'$ ), что продолжение луча  $2'$  пересекает ось  $OO'$  в фокусе  $F'$ . Точка пересечения лучей  $1'$  и  $2'$  дает искомое положение изображения  $S'$ .

**Задача 1.2.15.** Центрированная оптическая система состоит из двух тонких линз с фокусными расстояниями  $f_1$  и  $f_2$ ; расстояние между линзами равно  $d$ . Найти положение и фокусное расстояние  $f$  тонкой линзы, которая при любом положении объекта будет обеспечивать такое же поперечное увеличение, как и система из двух линз.

### Решение

Согласно (1.17) оптическая сила  $\Phi$  системы из двух тонких линз в воздухе равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}.$$

Изобразим эту систему (рис. 1.21), задав положения главных плоскостей ( $H$  и  $H'$ ) и фокусов ( $F$  и  $F'$ ). Как видно из рисунка,

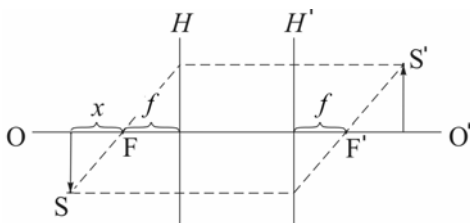


Рис.1.21. Схематическое представление оптической системы из двух тонких линз

поперечное увеличение, даваемое оптической системой, равно

$$\Gamma = \frac{S'}{S} = \frac{f}{x} = \frac{1}{x \cdot \Phi},$$

где  $S$  – поперечный размер объекта, а  $S'$  – поперечный размер изображения. Поэтому, если взять тонкую линзу с фокусным расстоянием

$$f = \frac{1}{\Phi} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

и поместить ее в передней главной плоскости  $H$  оптической системы, то она будет обеспечивать такое же поперечное увеличение, как и система из двух линз. В соответствии с (1.14) главная плоскость  $H$  находится от первой линзы на расстоянии

$$\Delta l = \left| d \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi} \right| = \left| \frac{d \cdot f}{f_1 + f_2 - d} \right|.$$

**Ответ:**  $f = \frac{1}{\Phi} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$

**Задача 1.2.16.** На сколько радиус кривизны  $R_1$  выпуклой поверхности выпукло-вогнутой стеклянной ( $n = 1,5$ ) линзы толщиной  $d = 3$  см должен быть больше радиуса кривизны  $R_2$  вогнутой поверхности, чтобы в воздухе линза была телескопической?

### Решение

Толстая выпукло-вогнутая стеклянная линза в воздухе будет телескопической при условии:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 = 0,$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – оптические силы сферических поверхностей линзы,  $d$  – толщина линзы,  $n$  – показатель преломления материала, из которого сделана линза.

Поскольку  $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1}$  и  $\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2}$ , то, решая уравнение, по-

лучим  $\Delta R = R_1 - R_2 = \frac{d(n-1)}{n} = 1$  см.

**Ответ:** На 1 см.

**Задача 1.2.17.** Телескопическая система образована двумя стеклянными шарами, расстояние между центрами которых равно  $L = 9$  см. Радиус большого шара равен  $R_1 = 5$  см. Найти радиус  $R_2$  малого шара и увеличение системы, если объективом служит большой шар. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

### Решение

Система из двух шаров будет телескопической, если задний фокус первого шара совпадает с передним фокусом второго.

Согласно (1.16) оптическая сила шара (как толстой линзы) равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{2R}{n} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2,$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – оптические силы преломляющих поверхностей:

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{R}; \quad \Phi_2 = \frac{1-n}{-R} = \frac{n-1}{R} = \Phi_1.$$

Поэтому

$$\Phi = \frac{2(n-1)}{R} - \frac{2R(n-1)^2}{nR^2} = \frac{2(n-1)}{nR}.$$

В соответствии с (1.17) и (1.6) расстояния от каждой из вершин сферической поверхности до ближайшего фокуса равны соответственно:

$$x_1 = -\frac{2R_1}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} = \frac{nR_1}{2(n-1)} \left( 1 - \frac{2R_1}{n} \cdot \frac{n-1}{R} \right) = \frac{R_1(2-n)}{2(n-1)}$$

и

$$x_2 = \frac{R_2(2-n)}{2(n-1)}.$$

Таким образом, расстояние  $L$  между центрами шаров равно

$$L = R_1 + x_1 + x_2 + R_2 = \frac{n(R_1 + R_2)}{2(n-1)}.$$

Отсюда радиус малого шара равен

$$R_2 = \frac{2L(n-1)}{n} - R_1 = 1 \text{ см},$$

а искомое увеличение телескопической системы:

$$\Gamma = f_1/f_2 = R_1/R_2 = 5.$$

**Ответ:**  $R_2 = 1 \text{ см}, \Gamma = 5$ .

### 1.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.3.1.** Для трёхгранной призмы с преломляющим углом  $\theta = 60^\circ$  угол наименьшего отклонения луча в воздухе  $\varphi_{\min} = 37^\circ$ . Найти угол наименьшего отклонения для этой призмы в воде.

**Ответ:**  $8,7^\circ$ .

**Задача 1.3.2.** С помощью построений найти ход луча 1 после отражения в вогнутом сферическом зеркале (рис. 1.22; F – фокус, OO' – оптическая ось).

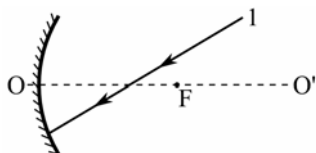


Рис. 1.22. Направление луча 1 при падении на вогнутое сферическое зеркало

**Задача 1.3.3.** С помощью построений найти положение сферического зеркала и его фокуса, если P и P' – сопряженные точки, а OO' – оптическая ось (рис. 1.23).

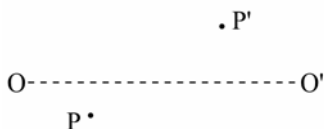


Рис. 1.23. К задаче 1.3.3

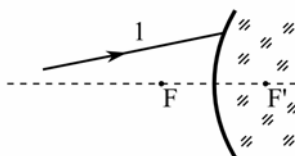


Рис. 1.24. К задаче 1.3.4

**Задача 1.3.5.** Изображение предмета, находящегося перед выпуклой поверхностью стеклянной выпукло-плоской линзы толщиной  $d = 9$  см, образуется на плоской поверхности линзы. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы  $R = 2,5$  см. Найти поперечное увеличение  $V$ .

**Ответ:**  $V = 1 - \frac{d(n-1)}{nR} = -0,2$ .

**Задача 1.3.6.** Найти построением положение тонкой линзы в однородной среде и ее фокусов, если известны положения сопряженных точек  $S$  и  $S'$  относительно оптической оси  $OO'$  (рис.1.25).

**Задача 1.3.7.** Построить продолжение луча 2 за рассеивающей тонкой линзой в однородной среде, если известны положение линзы и ход луча 1 (рис.1.26).

**Задача 1.3.8.** Центрированная система из трех тонких линз находится в воздухе (рис.1.27). Найти: а) положение заднего фокуса системы и б) расстояние от первой линзы до точки на оси слева от системы, при котором эта точка и ее изображение расположены симметрично относительно системы.

**Ответ:** а) справа от третьей линзы на расстоянии 3,3 см; б) 17 см.

**Задача 1.3.9.** Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива  $f = 50$  см установлена на бесконечность. На какое расстояние  $\Delta l$  надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии 50 м?

**Ответ:**  $\Delta l = 0,5$  см.

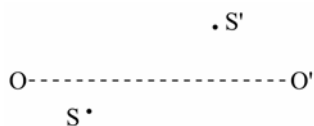


Рис.1.25. Положение сопряженных точек  $S$  и  $S'$  относительно оси  $OO'$  тонкой линзы

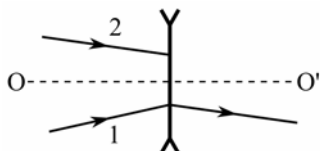


Рис.1.26. Направления лучей 1 и 2 относительно тонкой рассеивающей линзы

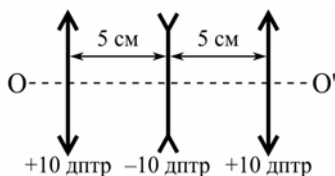


Рис.1.27. Центрированная система из трех тонких линз

**Задача 1.3.10.** Зрительную трубу кеплеровского типа с увеличением  $\Gamma = 15$  погрузили в воду, которая заполнила и ее внутреннюю часть. Чтобы система при тех же размерах стала опять телескопической, потребовалось заменить объектив на другой. Найти новое увеличение  $\Gamma'$  трубы в воде.

**Ответ:**  $\Gamma' = \frac{(\Gamma + 1)(n - n_0)}{n_0(n - 1)} - 1 = 3,1.$

**Задача 1.3.11.** В микроскопе объектив с фокусным расстоянием  $f_1 = 1$  см и окуляр с фокусным расстоянием  $f_2 = 3$  см находятся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга. На каком расстоянии  $l_1$  от объектива должен находиться объект, чтобы даваемое микроскопом изображение находилось на расстоянии  $l_2 = 25$  см от глаза? Каково при этом поперечное увеличение  $\Gamma$  микроскопа?

**Ответ:**  $l_1 = f_1 + \frac{(f_2 + l_2)f_1^2}{(d - f_1)(f_2 + l_2) - f_2l_2} = 0,06$  см;

$$\Gamma = \frac{f_1 d}{d(l_1 - f_1) - l_1 f_1} = 150.$$

**Задача 1.3.12.** Найти положение главных плоскостей, фокусов и узловых точек двояковыпуклой тонкой симметричной стеклянной линзы с радиусом кривизны поверхностей  $R = 7,5$  см, если с одной стороны от линзы – воздух, а с другой – вода.

**Задача 1.3.13.** Найти с помощью построений положения заднего фокуса  $F'$  и задней главной точки  $H'$  оптической системы в воздухе, если известны положения главной оптической оси  $OO'$  и сопряженных точек  $S$  и  $S'$  (рис. 1.27).

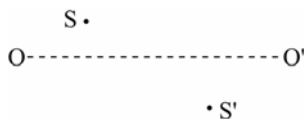


Рис.1.27. Положение сопряженных точек  $S$  и  $S'$  относительно главной оптической оси  $OO'$

**Задача 1.3.14.** Найти с помощью построений положение изображения  $S'$  точки  $S$ , если для оптической системы задано относительное расположение точек:  $F', H', S, H, F$ .

**Задача 1.3.15.** Система состоит из тонкой симметричной собирающей стеклянной линзы (радиус кривизны поверхностей  $R = 38$  см) и плоского зеркала, расположенного перпендикулярно оптической оси линзы. Расстояние между линзой и зеркалом  $l = 12$  см. Найти оптическую силу  $\Phi$  этой системы, если пространство между линзой и зеркалом заполнено водой.

**Ответ:**  $\Phi = 3,0$  дптр.

**Задача 1.3.16.** При какой толщине  $d$  толстая выпукло-вогнутая стеклянная линза в воздухе будет иметь оптическую силу  $-1$  дптр, если радиусы кривизны ее выпуклой и вогнутой поверхностей равны соответственно 10 и 7,5 см?

**Ответ:**  $d = 3$  см.

**Задача 1.3.17.** Найти положение главных плоскостей, фокусные расстояния и знак оптической силы выпукло-вогнутой толстой стеклянной линзы в воздухе, толщина которой равна  $d$ , а радиусы кривизны поверхностей одинаковы и равны  $R$ .

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, гл. XII.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, гл. II.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§21-23.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, разд. 7.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §1.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М., Санкт-Петербург, Краснодар, ЛАНЬ, 2005, §4.1.
7. Ильичева Е.Н., Кудяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под. ред. А.Н.Матвеева. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1981, раздел II.



## Глава 2

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ИНТЕНСИВНОСТЬ И ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

## 2.1. Теоретическое введение

Основные свойства света как распространяющихся в пространстве электромагнитных волн вытекают из фундаментальных законов для электромагнитного поля (*уравнения Максвелла*) и соотношений, описывающих отклик среды на воздействие электромагнитного излучения (*материальные уравнения*).

В системе СИ *уравнения Максвелла* (в дифференциальной форме) имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  – напряженность и индукция соответственно электрического и магнитного полей,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  – плотности электрического заряда и тока проводимости.

В соответствии с (2.1) и (2.2) переменное магнитное поле  $\mathbf{B}$  порождает *вихревое* электрическое поле  $\mathbf{E}$ , а источником поля  $\mathbf{H}$ , наряду с токами проводимости  $\mathbf{j}$ , может быть и изменяющееся во времени поле  $\mathbf{D}$ .

В интегральной форме взаимосвязь характеристик электромагнитного поля (в том числе и в среде) отражают следующие законы:

*закон электромагнитной индукции Фарадея:*

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{s}$$

– циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру  $L$  равна с противоположным знаком скорости изменения потока вектора  $\mathbf{B}$  через поверхность  $\Sigma$ , опирающуюся на этот контур;

*теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ :*

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) d\mathbf{s}$$

– циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  на замкнутом контуре  $L$  равна сумме токов проводимости и смещения через поверхность  $\Sigma$ , опирающуюся на этот контур ( $\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  – плотность тока смещения);

*теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ :*

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} ds = \int_V \rho dV$$

– поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность  $\Sigma$  равен заряду в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $\Sigma$ ;

*аналог теоремы Гаусса для вектора  $\mathbf{B}$ :*

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0$$

– отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов (линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  всегда замкнутые).

*Материальные уравнения* обычно записывают в виде:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}). \quad (2.6)$$

В этих уравнения отражена связь между характеристиками электромагнитного поля в среде и откликом среды (поляризация  $\mathbf{P}$  и намагниченность  $\mathbf{J}$ ) на воздействие со стороны поля.

Если магнитные свойства среды проявляются намного слабее, чем электрические, то в первом приближении можно считать, что  $\mathbf{J} = 0$ , и тогда

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.7)$$

Как известно, на движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  точечный заряд  $q$  со стороны электромагнитного поля действует *сила Лоренца*:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]).$$

Пусть среда – *электрически нейтральная* ( $\rho = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ ). Под действием электрического поля в такой среде могут индуцироваться поляризационные (связанные) заряды с объемной плотностью  $\rho_{св}$ . Плотность  $\rho_{св}$  и электрический дипольный момент этих зарядов в расчете на единицу объема (вектор поляризации  $\mathbf{P}$ ) связаны соотношением:

$$\rho_{св} = -\text{div } \mathbf{P}.$$

Изменение плотности  $\rho_{\text{св}}$  во времени определяет плотность тока связанных зарядов  $\mathbf{j}_{\text{св}}$ :

$$\mathbf{j}_{\text{св}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Связь между  $\mathbf{j}_{\text{св}}$  и  $\rho_{\text{св}}$  описывается уравнением непрерывности:

$$\text{div } \mathbf{j}_{\text{св}} + \frac{\partial \rho_{\text{св}}}{\partial t} = 0.$$

По характеру зависимости  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  различают среды линейные и нелинейные, изотропные и анизотропные, диспергирующие и без дисперсии, однородные и неоднородные и т.д.

Среда называется *линейной*, если ее отклик  $\mathbf{P}(\mathbf{E}) \sim \mathbf{E}$ , или

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

где  $\chi$  – линейная *диэлектрическая восприимчивость* среды, не зависящая от  $\mathbf{E}$ . В этом случае уравнения Максвелла линейны по  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , и их решения удовлетворяют *принципу суперпозиции*. Особый интерес представляет случай, когда  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  зависят от времени по *гармоническому* закону.

В *сильных* световых полях (например, лазерного излучения) восприимчивость среды  $\chi$  может зависеть от  $\mathbf{E}$  (такие среды называют *нелинейными*).

В простейшем случае, когда *линейная* среда – *изотропная* и *однородная*, ее восприимчивость  $\chi$  – *скалярная* величина, не зависящая от  $\mathbf{r}$ . Для изотропных сред (2.5) может быть записано в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

( $\varepsilon = 1 + \chi$  – диэлектрическая проницаемость среды), то есть  $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$ .

Если отклик среды  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  зависит только от  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  в той же точке  $\mathbf{r}$  и в тот же момент времени  $t$  (отклик *локальный* и *мгновенный*), то среда – *недиспергирующая*.

### 1. Волновые уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

Продифференцируем обе части уравнения (2.2) по времени  $t$ :

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}.$$

Согласно (2.1),

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

поэтому

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mu_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \right].$$

Пусть  $\varepsilon$  не зависит от  $\mathbf{r}$ , и  $\rho = 0$ . Учитывая, что  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$  ( $\Delta$  – оператор Лапласа), а  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , получаем уравнение:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

где учтено также, что  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ . Если  $\varepsilon$  не зависит от времени  $t$ , то среда называется *стационарной*, и в этом случае

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Аналогично, дифференцируя по  $t$  уравнение (2.1), получим уравнение:

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (2.12)$$

где учтено, что для немагнитной среды  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ .

Уравнения (2.11) и (2.12) называются *волновыми уравнениями* для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в линейной, однородной, изотропной, стационарной, электрически нейтральной, немагнитной среде.

## 2. Электромагнитные волны в диэлектрической непроводящей среде

Если среда – *непроводящая* ( $\mathbf{j} = 0$ ), то волновые уравнения (2.11) и (2.12) принимают вид:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.13)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.14)$$

Решениями этих уравнений могут быть, в частности, *плоские монохроматические волны*  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  типа

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi) \quad (2.15)$$

с не зависящей от времени амплитудой  $\mathbf{A}_0$ , круговой частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_k$  ( $\lambda$  — длина волны,  $\mathbf{e}_k$  — единичный вектор). Если амплитуда  $\mathbf{A}_0 = \text{const}$ , то есть не зависит от  $\mathbf{r}$ , то волна (2.15) называется *однородной*. Волновой вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен фронту волны (поверхности одинаковой фазы) и, как и  $\lambda$ , характеризует пространственную периодичность поля волны. Плоский фронт волны перемещается в направлении вектора  $\mathbf{k}$  с фазовой скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (2.16)$$

*Замечание.* Уравнения (2.13) и (2.14) допускают также и решения в виде, например, *сферических* гармонических волн:

$$\mathbf{A}(r, t) = \mathbf{A}_0(r) \cos(\omega t - kr + \varphi),$$

где  $\mathbf{A}_0(r) = \mathbf{A}_0(1)/r$ .

Плоские гармонические волны  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  типа (2.15) являются решениями уравнений (2.13) и (2.14) лишь при условии, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  и  $\omega$  удовлетворяют *дисперсионному уравнению*:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad (2.17)$$

или

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad (2.18)$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon}$  — *показатель преломления* среды. С учетом (2.18) фазовая скорость волны зависит от  $n$ :

$$\mathbf{v} = \frac{c}{n} \mathbf{e}_k. \quad (2.19)$$

Этим, в частности, можно объяснить отражение и преломление волн на границе двух сред с разными показателями преломления (см. гл. 7).

Чтобы найти связь между  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоской гармонической электромагнитной волне с частотой  $\omega$ , подставим решения волновых уравнений  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  в виде (2.15) в уравнения Максвелла (2.1)–(2.4). При  $\mathbf{j} = 0$  получим:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{H},$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{E}) = 0,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = 0.$$

Согласно этим формулам, векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  (а также  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$ ) в рассматриваемой среде взаимно ортогональны (образуют так называемую "правую тройку", см. рис. 2.1), а фазы  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  совпадают.

Амплитуды волн  $E_0$  и  $H_0$  в линейной изотропной среде связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0. \quad (2.24)$$

Плотность потока энергии в поле электромагнитной волны характеризует **вектор Пойнтинга**

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (2.25)$$

Для рассматриваемой среды

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \mathbf{v}, \quad (2.26)$$

поэтому интенсивность равна

$$I = \left\langle |\mathbf{S}| \right\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} \nu. \quad (2.27)$$

**Плотность потока импульса  $\mathbf{G}$** , переносимого электромагнитной волной, и вектор Пойнтинга связаны соотношением:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{S}}{\nu}. \quad (2.28)$$

Если среда – *вакуум* ( $\varepsilon = 1$ ), то для плоской гармонической волны с амплитудой  $E_0$ :

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0, \quad (2.29)$$

или

$$c \varepsilon_0 E_0 = H_0, \quad (2.30)$$

а интенсивность волны равна

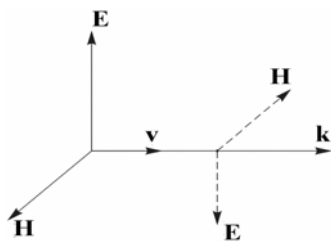


Рис. 2.1. Направления векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  в бегущей электромагнитной волне (в вакууме)

$$I = \langle |S| \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c. \quad (2.31)$$

В среде с дисперсией  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты:  $v = \frac{c}{n(\omega)}$  (см. гл. 8). Это позволяет

на практике осуществлять пространственное разделение световых волн по частоте (например, с помощью призмы). Однако в такой среде по мере распространения волны ее амплитуда должна уменьшаться. Если дисперсия среды не очень большая, то затухание волны – слабое, и среда относительно прозрачная.

Если диэлектрическая среда линейна, но *анизотропна*, то  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \hat{\chi} \mathbf{E}$ , где  $\hat{\chi}$  – тензор оптической восприимчивости. В такой среде направление  $\mathbf{P}$  зависит от направления  $\mathbf{E}$  (см. гл. 9).

### 3. Электромагнитные волны в проводящей среде ( $\varepsilon = 1$ )

В этом случае уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Полагая, что применим локальный закон Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.32)$$

где  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость среды, получим волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Уравнения такого типа называют *телеграфными уравнениями*. Если интересоваться решениями в виде гармонических волн, то уместно ввести в рассмотрение *комплексную диэлектрическую проницаемость*:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (2.33)$$

где  $\varepsilon'$  определяет фазовую скорость, а  $\varepsilon''$  обусловлена проводимостью и определяет диссипацию. В нашем случае

$$\varepsilon(\omega) = 1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (2.34)$$

т.е. диэлектрическая восприимчивость  $\chi(\omega)$  – чисто мнимая.

Используя комплексную форму записи, уравнение волны (2.16) можно представить в виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{A}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] \right\}, \quad (2.35)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 \exp(i\phi)$  – комплексная амплитуда. Такое представление значительно упрощает выполнение операции дифференцирования, поскольку  $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow i\omega$ ;  $\text{div} \Rightarrow (-i\mathbf{k})$ ;  $\text{rot} \Rightarrow [-i\mathbf{k}]$ .

Плоские волны  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  в виде (2.35) будут решениями телеграфных уравнений при условии:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega), \quad (2.36)$$

где волновой вектор  $\mathbf{k}$  может быть представлен в виде:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}'' . \quad (2.37)$$

Если среда однородная и изотропная, то векторы  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  коллинеарны и сонаправлены. Подставляя (2.37) в (2.36) и учитывая (2.34), получим:

$$k'^2 - k''^2 - 2ik'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\sigma \omega}{\varepsilon_0 c},$$

или

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \\ k'k'' = \frac{\sigma \omega}{\varepsilon_0 c^2}. \end{cases}$$

Полагая  $k' = \frac{\omega}{c} n'$  и  $k'' = \frac{\omega}{c} n''$ , получаем:

$$\begin{cases} (n')^2 - (n'')^2 = 1, \\ n'n'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}. \end{cases}$$



Решением этой системы уравнений являются такие действительная ( $n'$ ) и мнимая ( $n''$ ) части комплексного показателя преломления  $n = n' - in''$ , зависимость которых от частоты  $\omega$  определяется формулами:

$$(n')^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^2} + 1 \right],$$

$$(n'')^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^2} - 1 \right].$$

С учетом (2.37) уравнения для волн  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  представимы в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}''\mathbf{r})}. \quad (2.39)$$

Амплитуды волн (2.38) и (2.39)

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}}$$

экспоненциально убывают в направлении  $\mathbf{k}''$ . Фазовая скорость волн (2.38) и (2.39) определяется действительной частью показателя преломления:

$$\mathbf{v} = \frac{c}{n'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'},$$

тогда как мнимая часть характеризует глубину  $\Delta$  проникновения волны в проводящую среду:

$$\Delta = \frac{1}{k''} = \frac{c}{n''\omega}. \quad (2.40)$$

Если  $\sigma = \text{const}$ , то по мере увеличения частоты  $\omega$  показатель  $n''$  убывает, стремясь к нулю, и прозрачность проводящей среды повышается.

В соответствии с (2.36) и (2.37) вектор  $\mathbf{k}$  вещественный, если проницаемость  $\varepsilon(\omega)$  вещественная и положительная, или  $\mathbf{k}' \perp \mathbf{k}''$  (как в случае полного внутреннего отражения света на границе сред, см. гл. 7). Если векторы  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  неколлинеарны, то плоские волны (2.38) и (2.39) *неоднородные*.

Чтобы найти связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  для электромагнитной волны в проводящей среде, подставим (2.38) и (2.39) в уравнения Максвелла. В результате получим:

$$-[\mathbf{k}, \mathbf{H}] = \omega \varepsilon_0 \mathbf{E} \left( 1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right),$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{H},$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{E}) = 0,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае электромагнитная волна – поперечная, т.е. векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}' \uparrow \uparrow \mathbf{k}''$ ) взаимно ортогональны, однако волна  $\mathbf{E}$  опережает по фазе волну  $\mathbf{H}$  на

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{n''}{n'}.$$

В частности, если  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \gg 1$ , то  $\frac{n''}{n'} \approx 1$  и  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

В соответствии с формулой (2.24):

$$\sqrt{\mu_0} H_0 = n \sqrt{\varepsilon_0} E_0,$$

или

$$\sqrt{\mu_0} H_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \left( (n')^2 + (n'')^2 \right)} E_0.$$

Интенсивность световой волны в проводящей среде убывает по закону

$$I = I_0 e^{-2\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}},$$

где

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{(n')^2 + (n'')^2} E_0^2}{2} \cos \varphi \cdot c.$$

С формальной точки зрения затухание волны имеет место, если  $\varepsilon'' \neq 0$ . В диэлектрической среде без дисперсии поляризация  $\mathbf{P}$  (а следовательно, и смещение связанных зарядов из положения равновесия) и поле  $\mathbf{E}$  изменяются синфазно, а скорость зарядов и  $\mathbf{E}$  сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$ . Поэтому средняя по времени мощность сил электрического поля равна нулю. В случае же проводящей среды скорость свободных зарядов и  $\mathbf{E}$  из-

меняются в фазе, поэтому затухание волн обусловлено так называемыми «потерями на Джоулево тепло».

#### 4. Электромагнитные волны в проводящей среде ( $\epsilon \neq 1$ )

В этом случае

$$\epsilon(\omega) = \epsilon' - i\epsilon'' = (1 + \chi) - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}.$$

Для действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления ( $n = n' - in''$ ) имеем:

$$(n')^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\epsilon'^2 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)^2} + \epsilon' \right],$$

$$(n'')^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\epsilon'^2 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)^2} - \epsilon' \right].$$

*Замечание.* Если  $\epsilon'' = 0$ , а  $\epsilon' < 0$ , то  $k' = 0$ , а  $k'' \neq 0$ . В этом случае диссипация энергии отсутствует, однако волна вглубь среды не распространяется (как, например, в случае отражения от плазмы при низких частотах). Если же  $\epsilon'' \neq 0$  (инерционность отклика среды), то затухание интенсивности будет обусловлено работой электрического поля  $\mathbf{E}$ , затрачиваемой на индуцирование токов связанных зарядов.

## 2.2. Задачи с решениями

**Задача 2.2.1.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kx})$  с частотой  $\omega = 1,5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ , где  $\mathbf{e}_y$  – орт вдоль оси  $y$ . Найти амплитуду  $E_0$  напряженности электрического поля волны в точке с координатой  $x = 10 \text{ м}$  в момент  $t = 40 \text{ нс}$ , если в той же точке и в тот же момент времени  $\mathbf{H} = 0,2 \mathbf{e}_z [\text{А} \cdot \text{м}^{-1}]$ .

### Решение

В соответствии с (2.30):

$$c\epsilon_0 E_0 = H_0.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{k}$  ориентирован вдоль оси  $x$ , то

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H_0 \cos(\omega t - kx) = \mathbf{e}_z H_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = \mathbf{e}_z H_0 \cos\varphi,$$

где  $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = 1,5 \cdot 10^8 \left(40 \cdot 10^{-9} - \frac{10}{3 \cdot 10^8}\right) = 1$ , и следовательно,  $\cos\varphi \approx 0,54$ .

Таким образом,

$$H_0 = \frac{|\mathbf{H}|}{\cos\varphi} = \frac{0,2}{0,54} = 0,37 \text{ А/м},$$

а искомая амплитуда:

$$E_0 = \frac{0,37}{3 \cdot 10^8 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11}} = 139 \text{ В/м}.$$

**Ответ:**  $E_0 = 139 \text{ В/м}$ .

**Задача 2.2.2.** Шар, находящийся в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 4,0$ , облучается плоской электромагнитной волной с амплитудой  $E_0 = 200 \text{ В/м}$ . Найти радиус шара  $R$ , если за время  $\Delta t = 1 \text{ мин}$  на него падает энергия  $5 \text{ кДж}$ . Длина волны  $\lambda \ll R$ .

### Решение

Энергия, падающая на шар за время  $\Delta t$ , равна

$$W = I \cdot S \Delta t,$$

где  $I$  – интенсивность световой волны,  $S = \pi R^2$  – площадь большого круга шара. Согласно (2.31) интенсивность световой волны равна

$$I = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} v,$$

где  $v = c/\sqrt{\varepsilon}$  – скорость света в среде. Таким образом,

$$R = \sqrt{\frac{2W}{\pi \Delta t \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon} E_0^2 c}},$$

или

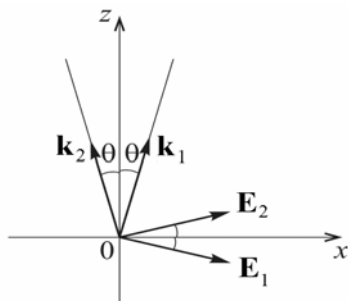
$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^8}} = 0,5 \text{ м}.$$

**Ответ:**  $R = 0,5 \text{ м}$ .

**Задача 2.2.3.** Исследовать структуру светового поля, создаваемого двумя плоскими, линейно поляризованными, когерентными волнами, бегущими в вакууме под углом  $\alpha$  друг к другу.

**Решение**

Пусть волновые векторы  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  лежат в координатной плоскости  $xOz$  под углом  $\theta$  к оси  $Oz$  ( $\alpha = 2\theta$ , см. рис. 2.2). Тогда



$$\mathbf{k}_1 = \{k_x, 0, k_z\},$$

$$\mathbf{k}_2 = \{-k_x, 0, k_z\},$$

где  $k_x = k \cdot \sin \theta$ ,  $k_z = k \cdot \cos \theta$ ,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме.

Рис. 2.2. Ориентация волновых векторов  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  в плоскости  $xOz$

Уравнения для компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  каждой из волн могут быть записаны (при соответствующем выборе начала отсчета) следующим образом:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})},$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{20} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда плоскости поляризации обеих волн совпадают с плоскостью  $xOz$  (рис. 2.2). Так как электромагнитные волны – поперечные, то:

$$\mathbf{E}_{10} = \{E_0 \cos \theta, 0, -E_0 \sin \theta\},$$

$$\mathbf{E}_{20} = \{E_0 \cos \theta, 0, E_0 \sin \theta\}$$

$$\mathbf{H}_{10} = \{0, H_0, 0\},$$

$$\mathbf{H}_{20} = \{0, H_0, 0\},$$

причем  $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = c \epsilon_0 E_0$ . Поскольку  $\mathbf{k}_1 \mathbf{r} = k_x x + k_z z$  и

$\mathbf{k}_2 \mathbf{r} = -k_x x + k_z z$ , то проекции векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на координатные оси:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_0 \cos \theta \cdot (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} = E_0 \sin \theta \cdot (e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

$$H_y = H_{1y} + H_{2y} = H_0 \left( e^{ik_x x} + e^{-ik_x x} \right) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

Переходя от комплексной формы записи к вещественной, получим:

$$E_x = 2E_0 \cos\theta \cdot \cos(k_x x) \cdot \cos(\omega t - k_z z),$$

$$E_z = -2E_0 \sin\theta \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(\omega t - k_z z),$$

$$H_y = 2H_0 \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z).$$

Эти уравнения позволяют рассматривать результирующее поле как суперпозицию двух волн: *неоднородной* ( $E_x, H_y$ )-волны, бегущей вдоль оси  $Oz$ , и *стоячей* ( $E_z, H_y$ )-волны.

На рис. 2.3 показана ориентация векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в некоторых точках плоскости  $xOz$  в момент времени  $t = 0$ . Фазовая скорость бегущей ( $E_x, H_y$ )-волны

$$v_z = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k \cos\theta} = \frac{c}{\cos\theta}$$

больше скорости света (при  $\theta \neq 0$ ), а скорость переноса энергии вдоль оси  $Oz$

$$u_z = c \cdot \cos\theta$$

меньше скорости света, причем  $u_z \cdot v_z = c^2$ . Вектор Пойнтинга, характеризующий мгновенное распределение плотности потока энергии в пространстве:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \{-E_z H_y, 0, E_x H_y\},$$

лежит в плоскости  $xOz$  и изменяется с удвоенной частотой  $2\omega$ :

$$S_x = E_0 H_0 \sin\theta \cdot \sin(2k_x x) \cdot \sin[2(\omega t - k_z z)],$$

$$S_z = 4E_0 H_0 \cos\theta \cdot \cos^2(k_x x) \cdot \cos^2(\omega t - k_z z).$$

Для соответствующих направлений интенсивность поля равна:

$$I_x = \langle S_x \rangle_T = 0,$$

$$I_z = \langle S_z \rangle_T = 2E_0 H_0 \cos\theta \cdot \cos^2(k_x x).$$

Таким образом,  $I_z$  достигает максимума в плоскостях  $k_x x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  (см. рис. 2.4), которые являются узловыми для стоячей ( $E_z, H_y$ )-волны, т.е. для этих плоскостей тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}$  всегда равна нулю.

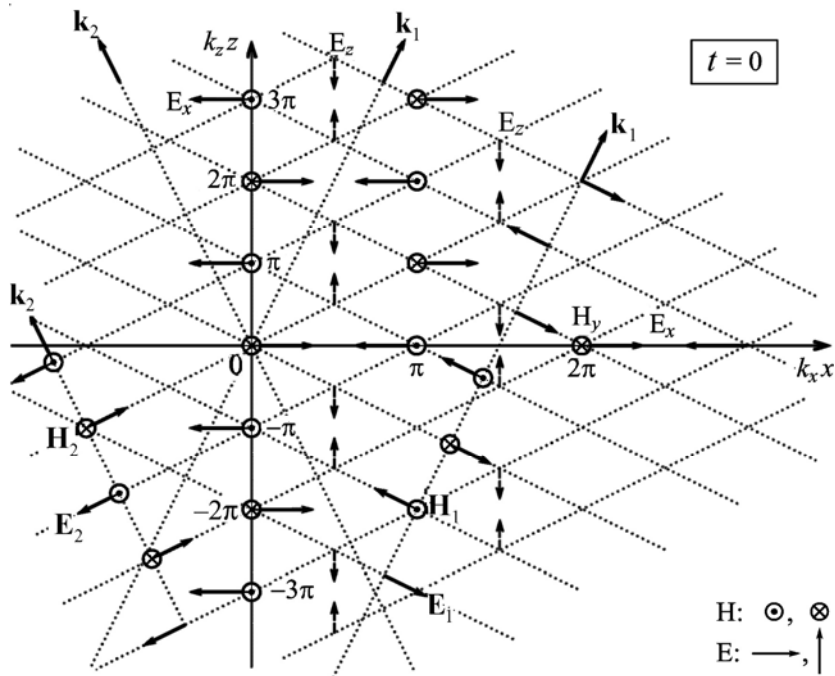


Рис.2.3. Ориентация векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в различных точках пространства в момент времени  $t=0$

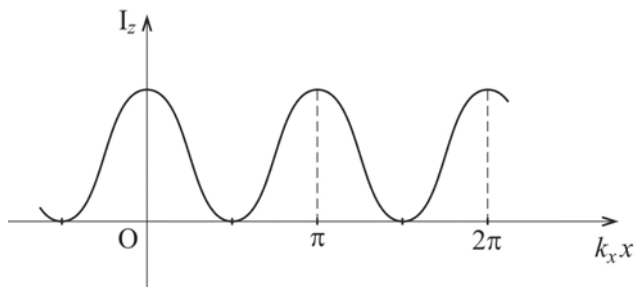


Рис. 2.4. Распределение интенсивности светового поля  $I_z$  вдоль оси  $x$

Эта особенность структуры электромагнитного поля в рассматриваемом случае может быть положена в основу анализа распространения волн в металлических волноводах (концепция Бриллюэна). В частности, при фиксированном расстоянии  $a$  между двумя узловыми плоскостями незатухающее распространение волн вдоль оси  $0z$  возможно, только если  $\sin(k_x a) = 0$ , т.е. для дискрет-

ного набора  $k_x = n \frac{\pi}{a}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). А так как  $k_x = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$  и

$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2a} \leq 1$ , то длина волны не может быть больше  $2a$ . Если

$\lambda < 2a$ , то для фиксированных  $a$  и  $\lambda$  угол  $\theta$  может принимать лишь

$n_m$  дискретных значений:  $n_m = \left[ \frac{2a}{\lambda} \right]$  ( $[ ]$  – целая часть  $\frac{2a}{\lambda}$ ).

В случае, когда векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  параллельны оси  $Oy$ , структура светового поля аналогична описанной выше, но координаты  $x$  узловых плоскостей стоячей волны оказываются иными. (Найдите их самостоятельно!)

Расстояние между двумя соседними максимумами  $I_z$  (рис. 2.4) равно:

$$\Delta x = \frac{\pi}{k_x} = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)},$$

а при малых углах  $\alpha$  –  $\Delta x \approx \lambda/\alpha$ .

**Задача 2.2.4.** Найти силу давления  $F$  плоской световой волны на шар радиусом  $R$ , если интенсивность волны равна  $I_0$ , а поверхность шара рассеивает падающее излучение равномерно по всем направлениям.

### Решение

Рассмотрим сначала случай, когда плоская световая волна падает на пластинку площадью  $\sigma$  под углом  $\theta$  (рис. 2.5).

Так как интенсивность световой волны равна  $I_0$ , то среднее значение объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{I_0}{c},$$

где  $c$  – скорость волны, а среднее значение объемной плотности импульса:

$$w_P = \frac{I_0}{c^2} = \frac{w}{c}.$$

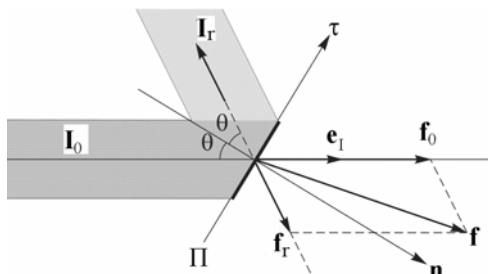


Рис. 2.5. Падающий и отраженный световые пучки и силы, действующие на пластинку  $\Pi$



Следовательно, за время  $\Delta t$  волна «приносит» к пластинке импульс

$$\Delta \mathbf{P} = w_P \cdot c \Delta t \cdot (\sigma \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{I_0}{c} \Delta t \sigma \cos \theta \cdot \mathbf{e}_1,$$

где  $\mathbf{e}_1$  – единичный вектор в направлении распространения света.

Если свет, падающий на пластинку, *полностью поглощается*, то на пластинку будет действовать сила

$$\mathbf{f}_0 = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{I_0}{c} \sigma \cos \theta \cdot \mathbf{e}_1,$$

проекции которой на направления  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  равны соответственно

$$f_n = f_0 \cos \theta \text{ и } f_\tau = f_0 \sin \theta,$$

а давление света на пластинку:

$$p = \frac{f_n}{\sigma} = \frac{I_0}{c} \cos^2 \theta.$$

При *частичном отражении* света от пластинки под углом  $\theta$  ( $I_r = \rho I_0$ ,  $\rho \leq 1$  – коэффициент отражения по интенсивности) пластинка будет получать дополнительный импульс («импульс отдачи»), причем

$$f_r = r f_0.$$

В результате сила давления  $\mathbf{f}$  (см. рис. 2.5) равна

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_r,$$

а формулы для проекций этой силы на различные направления имеют вид:

$$f_n = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) = (1 + \rho) \frac{I_0}{c} \sigma \cos^2 \theta,$$

$$f_\tau = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\tau) = (1 - \rho) \frac{I_0}{c} \sigma \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

В случае *рассеяния* пластинкой падающего на нее света *равномерно по всем направлениям* сила  $\mathbf{f}_r$  (в силу симметрии геометрии рассеяния) будет направлена вдоль нормали  $\mathbf{n}$ . Найдем величину этой силы.

Пусть пластинка площадью  $\sigma$  рассеивает за время  $\Delta t$  энергию  $\Delta W$  равномерно по всем направлениям в телесном угле  $2\pi$  (левое полупространство на рис. 2.6). В направлении  $(\theta, \varphi)$  в телесный угол  $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$  за это время «уносится» импульс

$$d\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \frac{\Delta W}{c\Delta t} \frac{d\Omega}{2\pi} \mathbf{e}_\theta.$$

Суммируя проекции  $d\mathbf{P}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$ , получим:

$$\Delta P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} dP \cdot \cos\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\Delta W}{c} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{c}.$$

(φ) (θ)

Следовательно, при рассеянии света сила «отдачи» равна

$$f_r = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{c\Delta t}$$

и направлена вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к пластинке.

Теперь для получения ответа на вопрос, сформулированный в задаче, рассмотрим элемент поверхности шара, ориентированный под углом  $\theta$  к вектору  $\mathbf{I}_0$  (см. рис. 2.7). Площадь этого элемента равна

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Так как элементом  $d\sigma$  за время  $\Delta t$  рассеивается энергия  $\Delta W = I_0 \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot \Delta t$ , то на него действует сила:

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_0 + d\mathbf{f}_r,$$

причем

$$d\mathbf{f}_0 = \frac{I_0}{c} d\sigma \cos\theta \cdot \mathbf{e}_1,$$

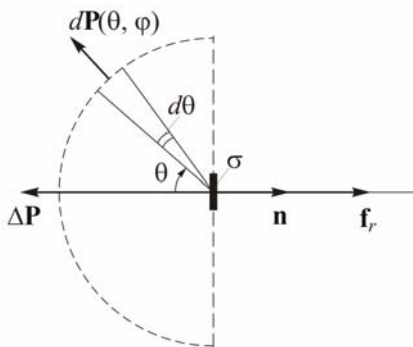


Рис. 2.6. Рассеяние падающего на пластинку света в направлении  $(\theta, \varphi)$

$$d\mathbf{f}_r = \frac{1}{2} \frac{I_0}{c} d\sigma \cos\theta \cdot \mathbf{e}_n.$$

Очевидно, что результирующая всех  $d\mathbf{f}_0$  равна

$$\mathbf{F}_0 = \frac{I_0}{c} \pi R^2 \mathbf{e}_1.$$

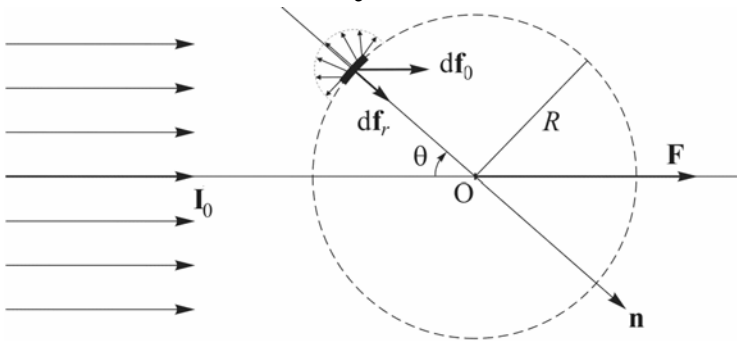


Рис. 2.7. Рассеяние энергии элементом поверхности шара, ориентированном под углом  $\theta$  к вектору  $\mathbf{I}_0$

Силу  $F_r$  найдем, суммируя проекции сил  $d\mathbf{f}_r$  на направление  $\mathbf{I}_0$  по всем элементам освещенной поверхности:

$$F_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\mathbf{f}_r \cdot \cos\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I_0}{2c} R^2 \sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{I_0}{c}.$$

Таким образом,

$$F = F_0 + F_r = \frac{4}{3} \pi R^2 \frac{I_0}{c}.$$

**Ответ:**  $F = \frac{4}{3} \pi R^2 \frac{I_0}{c}.$

### 2.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.3.1.** Электрический пробой в воздухе наступает, если напряженность электрического поля достигает 3 МВ/м. При какой минимальной плотности потока энергии плоской электромагнитной волны можно наблюдать появление искры в воздухе?

**Ответ:**  $1,2 \cdot 10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup>.

**Задача 2.3.2.** Найти амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в плоской линейно-поляризованной волне, если плотность потока энергии равна  $1 \text{ Вт/м}^2$ .

**Ответ:**  $27,45 \text{ В/м}; 0,073 \text{ А/м}$ .

**Задача 2.3.3.** Найти давление  $p$  изотропного излучения с плотностью энергии  $w$  на идеальное зеркало.

**Ответ:**  $p = w/3$ .

**Задача 2.3.4.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой  $\nu = 100 \text{ МГц}$  и амплитудой электрической составляющей  $E_0 = 50 \text{ мВ/м}$ . Найти средние по времени значения модуля плотности тока смещения  $\langle j_{\text{см}} \rangle$  и плотности потока энергии  $\langle S \rangle$ .

**Ответ:**  $\langle j_{\text{см}} \rangle = 4\epsilon_0\nu E_0 = 0,18 \text{ мА/м}^2; \langle S \rangle = 3,3 \text{ мкВт/м}^2$ .

**Задача 2.3.5.** Найти проекцию вектора Пойнтинга на ось  $x$  и ее среднее (за период световых колебаний) значение для плоской электромагнитной волны  $E = E_0 \cos kx \cos \omega t$  в вакууме.

**Задача 2.3.6.** Лазерный импульс длительностью  $\tau = 0,13 \text{ мс}$  с энергией  $W = 10 \text{ Дж}$  падает нормально на плоскую поверхность с коэффициентом отражения  $\rho = 0,5$ . Найти среднее значение давления  $\langle p \rangle$  лазерного импульса на поверхность, если диаметр светового пятна равен  $d = 10 \text{ мкм}$ .

**Ответ:**  $\langle p \rangle = \frac{4(1+\rho)W}{\pi d^2 c \tau} \approx 5,0 \text{ МПа}$ .

**Задача 2.3.7.** Короткий световой импульс с энергией  $W = 7,5 \text{ Дж}$  падает под углом  $\theta = 30^\circ$  на пластинку с коэффициентом отражения  $\rho = 0,6$ . Найти импульс  $P$ , переданный пластинке.

**Ответ:**  $P = \frac{W}{c} \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\theta} = 35 \text{ нН}\cdot\text{с}$ .

**Задача 2.3.8.** На оси круглой, зеркально отражающей пластинки находится точечный изотропный источник света с мощностью

излучения  $P$ . Расстояние между источником и пластинкой в  $\eta$  раз больше ее радиуса. Найти силу  $f$  светового давления на пластинку.

**Ответ:**  $f = \frac{P}{2c(1 + \eta^2)}$ .

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, гл. II.
2. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§1.1, 1.3–1.4, 3.5.
3. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел I.
4. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: Физматлит; ЛАНЬ, 2006, §10.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §4.4.
6. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел I.

## Глава 3

**ДВУХЛУЧЕВАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ.  
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СХЕМЫ****3.1. Теоретическое введение**

Интерференцией света называется явление возникновения устойчивого, пространственно неоднородного распределения интенсивности волнового электромагнитного поля в области перекрывания световых пучков.

Рассмотрим вначале простейший случай – интерференцию излучения от двух точечных источников. Пусть две когерентные, линейно поляризованные в одном направлении, электромагнитные волны, интенсивности которых равны  $I_1$  и  $I_2$ , возбуждают в некоторой точке пространства световые колебания, фазы которых отличаются на  $\varphi$ . Тогда интенсивность света в данной точке равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos\varphi, \quad (3.1)$$

или

$$I = 2I_0(1 + \cos\varphi), \quad (3.2)$$

если  $I_1 = I_2 = I_0$ .

Для двух лучей от одного точечного источника, приходящих в точку наблюдения с разностью хода  $\Delta r = r_1 - r_2$ , сдвиг по фазе равен:

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda},$$

где  $\lambda$  – длина волны. При распространении света в среде с показателем преломления  $n$  длина волны равна  $\lambda' = \lambda/n$  и

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda'} = 2\pi \frac{n \cdot \Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = k\Delta, \quad (3.3)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\Delta = n \cdot \Delta r$  – оптическая разность хода.

С учетом (3.3) формулу (3.2) можно записать в виде:

$$I = 2I_0(1 + \cos k\Delta). \quad (3.4)$$

В опытах по двухлучевой интерференции свет от источника S делится на два пучка, которые разными путями достигают некото-

рой области пространства (*область интерференции*). По способу разделения исходного пучка различают: 1) метод *деления волнового фронта* (задачи 3.2.1–3.2.6) и 2) метод *деления амплитуды волны* (задачи 3.2.7–3.2.12). В первом случае интерferируют лучи, которые идут от источника к точке наблюдения разными путями (схемы Юнга, Френеля, Бийе, Ллойда). Во втором – сначала луч от источника делится по амплитуде (в результате, например, отражений или преломлений) на два луча, которые затем приходят в точку наблюдения разными путями (схемы Поля, Майкельсона и др.).

### 3.1.1. Интерференционная схема Юнга (метод деления волнового фронта)

В качестве примера интерференционной схемы, в которой реализуется метод деления волнового фронта, рассмотрим схему Юнга (рис. 3.1). Если в схеме используется *точечный источник света*, то

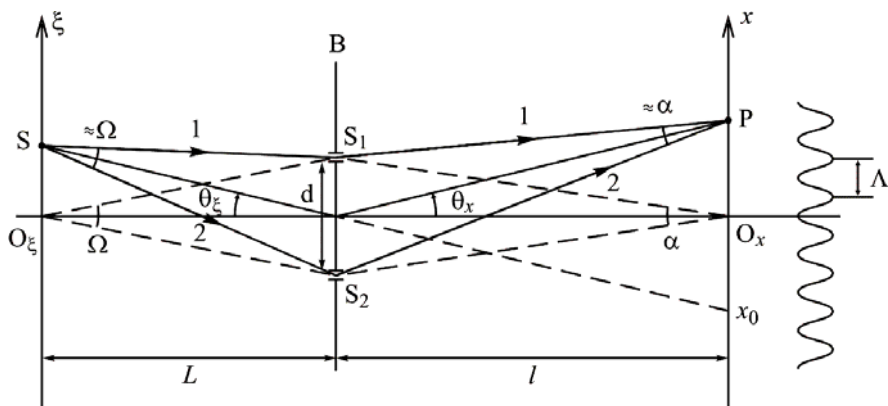


Рис.3.1. Интерференционная схема Юнга (метод деления фронта волны) для точечного источника света

для лучей 1 и 2 оптическая разность хода  $\Delta_{\xi} = SS_1 - SS_2$  (от источника S до щелей  $S_1$  и  $S_2$  на экране B соответственно) равна (при условии  $\xi_S \ll L$ )

$$\Delta_{\xi} \approx d \cdot \theta_{\xi} \approx d \cdot \frac{\xi_S}{L} \approx \Omega \xi_S, \quad (3.5)$$

где  $d = S_1S_2$  – расстояние между щелями (*база интерференции*);  $\Omega = d/L$  – *угловая апертура интерференции*;  $\theta_\xi = \xi_S/L$  – угол, под которым источник S виден из центра экрана со щелями.

Аналогично, оптическая разность хода  $\Delta_x = S_2P - S_1P$  от щелей  $S_1$  и  $S_2$  до точки наблюдения  $P(x)$  (при условии, что  $x_P \ll l$ ) равна

$$\Delta_x \approx d \cdot \theta_x \approx d \cdot \frac{x_P}{l} \approx \alpha \cdot x_P, \quad (3.6)$$

где  $\theta_x = x_P/l$  – угол, под которым видна точка наблюдения P из центра экрана B со щелями;  $\alpha \approx d/l$  – угол схождения интерферирующих лучей 1 и 2 в точке P.

В итоге оптическая разность хода  $\Delta$  лучей 1 и 2 от источника S до точки наблюдения P равна

$$\Delta = \Delta_\xi + \Delta_x = d \left( \theta_\xi + \theta_x \right) = d \left( \frac{\xi_S}{L} + \frac{x_P}{l} \right) = \Omega \xi_S + \alpha x_P. \quad (3.7)$$

а) Точечный источник S – *монохроматический* (длина волны  $\lambda$ ). В соответствии с (3.4) распределение интенсивности света  $I$  вдоль оси  $x$  (рис. 3.2 а) описывается формулой:

$$I(x) = 2I_0 [1 + \cos k\Delta],$$

где  $I_0$  – интенсивность света в точке P, когда одна из щелей закрыта. Если для точки наблюдения  $\Delta = m\lambda$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – *порядок интерференции*), то  $I = I_{\max} = 4I_0$ . Если оптическая разность хода  $\Delta$  равна нечетному числу  $\lambda/2$ , т.е. лучи приходят в точку P со сдвигом по фазе  $\varphi = \pm\pi$ , то  $I = I_{\min} = 0$ . Центр интерференционной картины ( $m = 0$ ) находится в точке с координатой

$$x_0 = -\xi_S \frac{l}{L} = -\xi_S \frac{\Omega}{\alpha}. \quad (3.8)$$

Период интерференционной картины определяется как расстояние (или угол) между соседними максимумами (или минимумами):

$$\Lambda = |x_{m+1} - x_m| \approx \frac{\lambda \cdot l}{d} \approx \frac{\lambda}{\alpha}, \quad (3.9)$$



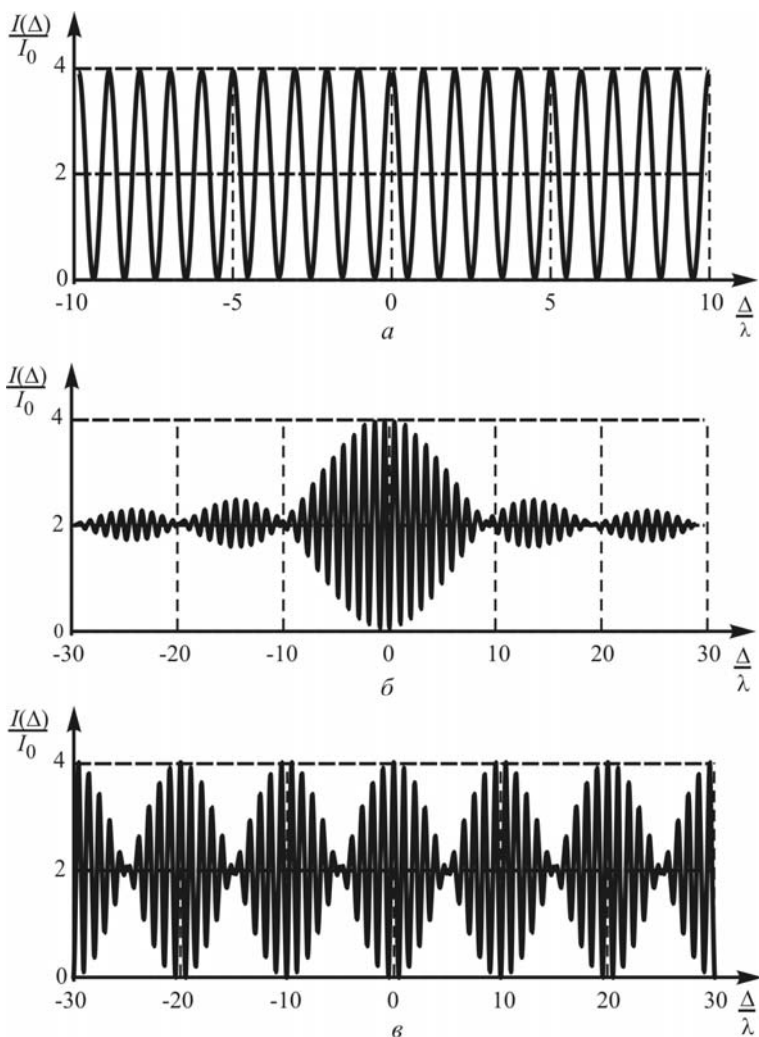


Рис. 3.2. Распределение интенсивности в интерференционной картине для точечных источников света: монохроматического (а), квазимонохроматического с непрерывным спектром (б) и со спектром из двух близких спектральных линий (в)

$$\Delta\theta_x = |\theta_{m+1} - \theta_m| \approx \frac{\lambda}{d}. \quad (3.10)$$

б) Если точечный источник  $S$  квазимонохроматический и излучает равномерно в диапазоне  $\delta\lambda$  вблизи некоторой длины волны  $\lambda$  (условие квазимонохроматичности  $\delta\lambda \ll \lambda$ ), то распределение

интенсивности  $I$  вдоль оси  $x$  имеет вид, показанный на рис. 3.2 б, и описывается формулой

$$I(x) = 2I_0 [1 + \gamma(\Delta) \cdot \cos k\Delta], \quad (3.11)$$

где

$$\gamma(\Delta) = \text{sinc} \left( \frac{\delta k \cdot \Delta}{2} \right) = \text{sinc} \left( \pi \frac{\Delta}{\lambda^2 / \delta \lambda} \right), \quad (3.12)$$

и

$$\text{sinc } x \equiv \frac{\sin x}{x}.$$

Как видно из рис. 3.2 б, по мере увеличения  $\Delta$  разность между максимальным  $I_{\max}$  и минимальным  $I_{\min}$  значениями интенсивности вблизи точки наблюдения уменьшается. Видность  $V$ , характеризующая контрастность интерференционной картины в точке наблюдения, определяется как

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.13)$$

и связана с  $\gamma(\Delta)$  соотношением

$$V(x) = |\gamma(\Delta)|. \quad (3.14)$$

Для рассматриваемого квазимонохроматического источника видность  $V(x)$  первый раз обращается в нуль, когда

$$|\Delta| = \frac{\lambda^2}{\delta \lambda} = l_{\text{ког}},$$

где  $l_{\text{ког}}$  – так называемая *длина когерентности* излучения. Разности хода  $\Delta = l_{\text{ког}}$  соответствует порядок интерференции

$$m_{\max} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta \lambda}. \quad (3.15)$$

Если спектр излучения источника – *две узкие спектральные линии*  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , причем  $\delta \lambda = |\lambda_1 - \lambda_2| \ll \lambda_1, \lambda_2$ , то в формуле (3.11)

$$\gamma(\Delta) = \cos \frac{\delta k \cdot \Delta}{2}. \quad (3.16)$$

В этом случае видность интерференционной картины  $V(\Delta)$  периодически изменяется от 1 до 0, первый раз обращаясь в нуль, когда

$$|\Delta| = \frac{\lambda^2}{2\delta \lambda}, \quad (3.17)$$

что соответствует порядку интерференции

$$m_1 = \frac{\lambda}{2\delta\lambda}.$$

Проанализируем теперь интерференционную картину в схеме Юнга с *протяженным* источником света S. Если линейный размер источника вдоль оси  $\xi$  равен  $D = |\xi_1 - \xi_2|$ , а сам источник – совокупность точечных монохроматических, но не когерентных источников (рис. 3.3), то

$$I(x) = 2I_0 [1 + \gamma(\Delta_D) \cos k\Delta], \quad (3.18)$$

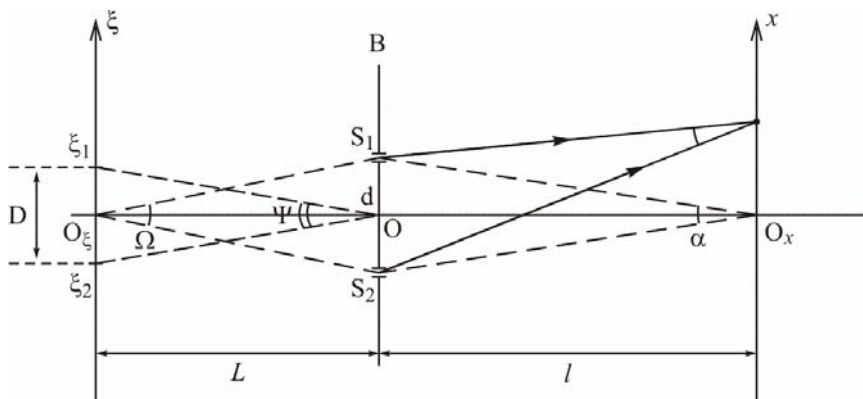


Рис.3.3. Интерференционная схема Юнга с протяженным источником света

где  $\Delta$  – оптическая разность хода лучей 1 и 2, выходящих из центральной точки  $O_\xi$  источника,

$$\gamma(\Delta_D) = \text{sinc} \frac{k\Delta_D}{2}, \quad (3.19)$$

а  $\Delta_D = \Delta_{\xi_1} - \Delta_{\xi_2}$  и можно считать, что

$$\Delta_D \approx \frac{Dd}{L} \approx \Omega \cdot D \approx d \cdot \Psi, \quad (3.20)$$

где  $\Psi = D/L$  – угол, под которым виден источник S из центра экрана B со щелями;  $\Delta_\xi$  задается формулой (3.5). В этом случае видимость  $V$  интерференционной картины не зависит от  $x$  и первый раз обращается в нуль, когда

$$\Delta_D = \lambda. \quad (3.21)$$

### 3.1.2. Интерференционная схема Поля (метод деления амплитуды волны)

Рассмотрим схему *опыта Поля*, в котором реализован *метод деления амплитуды* (рис. 3.4). Точечный монохроматический источник  $S$  находится над тонкой прозрачной плоскопараллельной пластинкой. Для любой точки наблюдения  $P$  есть два луча, которые приходят в нее, отразившись соответственно от верхней и от нижней поверхности пластинки.

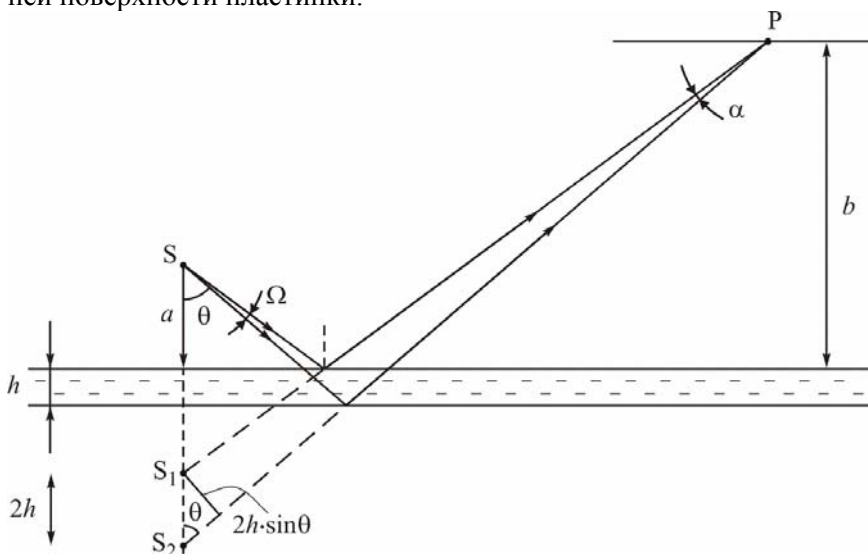


Рис.3.4. Интерференционная схема Поля  
(метод деления амплитуды световой волны)

Следовательно, область интерференции – все полупространство над пластинкой, то есть интерференционная картина *не локализована*. На удаленном экране, параллельном пластинке, можно наблюдать интерференционную картину в виде концентрических колец.

Если толщина пластинки  $h \ll a + b$ , то угол  $\alpha$  схождения интерферирующих лучей достаточно мал, так же как и угол  $\Omega$  между этими лучами на выходе из источника. Поэтому поперечные размеры источника могут быть в принципе достаточно большими ( $D \leq \lambda/\Omega$ ).

При наблюдении в опыте Поля интерференционной картины на бесконечности (например, в фокальной плоскости собирающей линзы, см. рис. 3.5) апертура интерференции  $\Omega \approx 0$ , что означает отсутствие ограничений на размер  $D$  источника. В этом случае, с учетом закона преломления ( $n \sin \theta' = \sin \theta$ ), оптическая разность хода интерферирующих лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = 2nh \cos \theta' = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \quad (3.22)$$

и не зависит от угла  $\theta$  и от положения источника S.

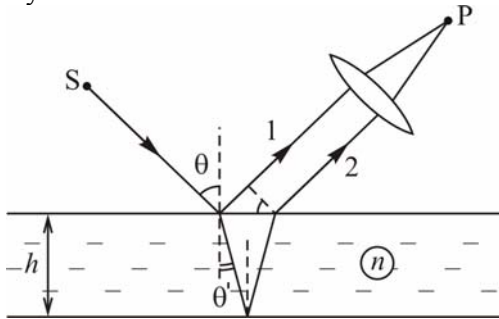


Рис. 3.5. Схема наблюдения локализованной на бесконечности интерференционной картины в опыте с пластинкой

С учетом изменения на  $\pi$  фазы волны при отражении от верхней границы (луч 1 отражается от оптически более плотной среды), для разности фаз  $\varphi$  интерферирующих лучей имеем:

$$\varphi(\theta) = k\Delta \pm \pi = \frac{4h\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \pi. \quad (3.23)$$

Соответствующая интерференционная картина получила название "полос равного наклона".

В случае протяженного источника интерференционная картина локализована в бесконечности. Если, однако, пластинка достаточно тонкая, то можно наблюдать интерференционную картину вблизи передней отражающей поверхности пластинки (рис. 3.6). Для лучей 1 и 2 разность фаз  $\varphi$  в точке P (при условии  $h \ll a$ ) может быть оценена с помощью формулы (3.23) для различных точек протяженного источника. Впрочем, если  $\theta$  изменяется в достаточно узком интервале  $\Delta\theta$ , то  $\varphi = \varphi(h)$ , а наблюдаемую интерференционную картину называют "полосами равной толщины". В белом

свете полосы окрашены (цвета тонких пленок). Наблюдают полосы равной толщины либо невооруженным глазом, либо с помощью лупы или микроскопа.

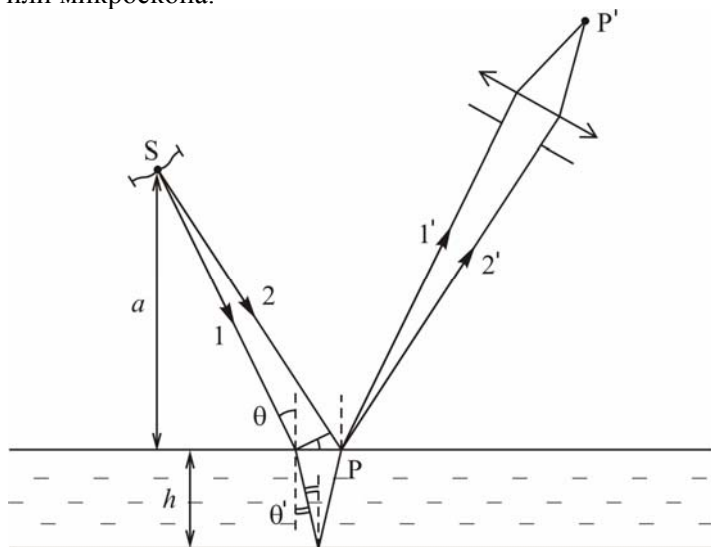


Рис. 3.6. Схема наблюдения интерференции света от протяженного источника света, локализованной вблизи передней отражающей поверхности

Чтобы на практике обеспечить условие малости  $\Delta\theta$ , можно вести наблюдение в направлении  $\theta \approx 0$ . Если наблюдение ведется под углом, то следует ограничивать входной зрачок объектива. Поэтому, например, видны невооруженным глазом радужные цвета масляных пятен на поверхности воды.

### 3.2. Задачи с решениями

**Задача 3.2.1.** Свет от протяженного монохроматического источника  $S$  размером  $D = 1$  мм падает на непрозрачный экран  $\mathcal{E}$ , в котором имеются два маленьких отверстия (рис. 3.7). Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается в точке  $P$ . Источник света  $S$  и точка  $P$  находятся на одинаковом расстоянии  $L$  от экрана. Если смещать верхнее отверстие, увеличивая расстояние  $d$  ( $d \ll L$ ), то интенсивность в точке  $P$  периодически убывает и возрастает. Определить расстояние  $d_1$  между отверстиями, которо-

му соответствует 1-й минимум интенсивности в точке Р, если амплитуда осцилляций уменьшается до нуля при  $d_2 = 20d_1$ .

### Решение

В соответствии с формулами (3.18) и (3.19) интенсивность  $I$  света в точке Р равна

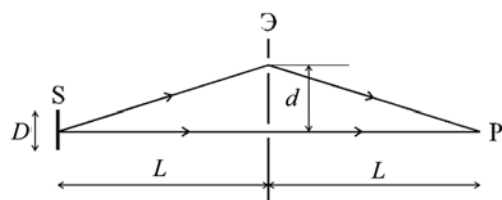
$$I(P) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc} \frac{k \cdot \Delta_D}{2} \cdot \cos k\Delta \right],$$

где соответствующая разность хода (3.7)

$$|\Delta| \cong \frac{d^2}{L}.$$

Первый минимум в точке Р будет тогда, когда для лучей, вышедших из центра источника S, разность хода  $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ , поэтому

$$\frac{d_1^2}{L} = \frac{\lambda}{2}.$$



С другой стороны, согласно (3.20) и (3.21):

$$\frac{d_2 \cdot D}{\lambda \cdot L} = 1.$$

Рис. 3.7. Схема наблюдения интерференции света от протяженного источника S

Из двух последних формул получаем:

$$d_1 = 10D = 1 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $d_1 = 1 \text{ см.}$

**Задача 3.2.2.** В интерференционной схеме (рис. 3.8) используется квазимонохроматический источник света S. Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и экрана Э, на котором наблюдается интерференция. Ширина интерференционной полосы на экране Э равна  $\Lambda = 0,02 \text{ мм}$ . Параметры схемы:  $L = 1 \text{ м}$ ;  $d = 2,5 \text{ см}$ ;  $W = 20 \text{ см}$ . Найти: 1) среднее значение длины волны  $\lambda$  излучения источника; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный  $m_{\max}$  и минимальный  $m_{\min}$  порядки интерференции и число  $N$  наблюдаемых полос; 4) степень непо-

нохроматичности  $\delta\lambda$ , при которой число наблюдаемых полос максимально; 5) допустимый размер источника  $D$ .

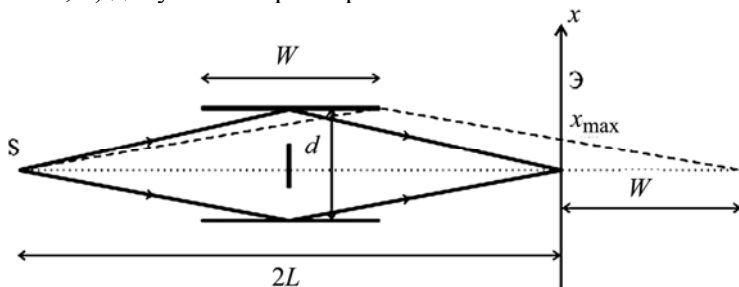


Рис. 3.8. Схема наблюдения интерференционной картины от источника света S

### Решение

1) Поскольку угол схождения интерферирующих лучей

$$\alpha \approx d/L,$$

то с учетом (3.9) период интерференционной картины на экране равен

$$\Lambda \approx \frac{\lambda}{\alpha} \approx \frac{\lambda L}{d},$$

а следовательно,

$$\lambda = \frac{\Lambda d}{L} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{1} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 500 \text{ нм}.$$

2) Как видно из рис. 3.8,

$$\frac{|x_{\max}|}{W} = \frac{d/2}{L + W/2},$$

поэтому область локализации полос на экране:

$$|x| \leq \frac{d \cdot W}{2(L + W/2)} = \frac{2,5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{2(1 + 0,1)} \approx 0,23 \text{ см}.$$

3) Очевидно, что  $m_{\max} = \frac{|x_{\max}|}{\Lambda} \approx 115$  и  $m_{\min} = 0$ , а число наблюдаемых полос:

$$N \approx 2m_{\max} = 230.$$

4) Так как в соответствии с (3.15) максимальное значение  $|\Delta|$  должно удовлетворять условию



$$|\Delta|_{\max} \leq l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda},$$

а в нашем случае –

$$|\Delta|_{\max} = \lambda \cdot m_{\max},$$

поэтому

$$m_{\max} \leq \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

или

$$\delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{115} \approx 4,35 \text{ нм.}$$

5) Согласно (3.20) и (3.21), допустимый размер источника может быть найден из условия

$$D \cdot \Omega \leq \lambda,$$

где  $\Omega = \frac{d}{L}$  – апертура интерференции. Следовательно,

$$D \leq \frac{\lambda L}{d} \approx \frac{\lambda}{\alpha} = \Lambda = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

**Ответ:** 1)  $\lambda \approx \frac{\Lambda d}{L} = 500 \text{ нм}$ ; 2)  $|x| \leq \frac{d \cdot W}{2(L+W)} \approx 2,3 \text{ мм}$ ;

3)  $m_{\max} = \frac{|x_{\max}|}{\Lambda} \approx 115$ ,  $m_{\min} = 0$ ,  $N \approx 2m_{\max} = 230$ ;

4)  $\delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx 4,35 \text{ нм}$ ; 5)  $D \leq \frac{\lambda L}{d} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ .

**Задача 3.2.3.** В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля угол между зеркалами  $\varphi = 12'$  (рис. 3.9). Расстояния от бизеркала до источника света S и экрана Э равны соответственно  $a = 10 \text{ см}$  и  $b = 90 \text{ см}$ . Ширина интерференционных полос на экране равна  $\Lambda = 1 \text{ мм}$ . Найти: 1) длину волны  $\lambda$  излучения источника и число  $N$  интерференционных полос на экране; 2) сдвиг  $\delta x$  интерференционной картины на экране при смещении источника на  $\delta l = 0,1 \text{ мм}$  по дуге радиуса  $a$  с центром в точке O на ребре бизеркала; 3) ширину  $D$  источника, при которой полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо.

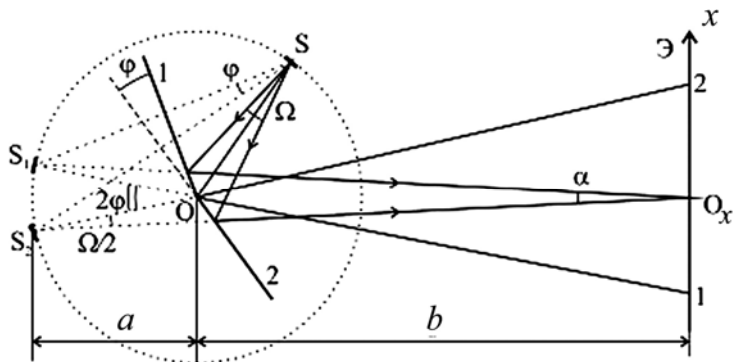


Рис. 3.9. Интерференционная схема с бизеркалом Френеля

**Решение**

1) Как видно из рис. 3.9, в центре экрана Э (точка  $O_x$ ) интерферирующие лучи сходятся под углом

$$\alpha = \frac{S_1 S_2}{a+b} = \frac{a \cdot 2\varphi}{a+b}.$$

С учетом (3.9) период интерференционной картины на экране равен

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda(a+b)}{a \cdot 2\varphi},$$

поэтому

$$\lambda = \frac{\Lambda a 2\varphi}{a+b} = 696 \text{ нм.}$$

Число наблюдаемых на экране интерференционных полос:

$$N \approx \frac{2 \cdot x_{\max}}{\Lambda},$$

где  $x_{\max}$  — полуширина интерференционной картины. Так как  $x_{\max} \approx b \cdot \varphi$ , то

$$N = \frac{2b \cdot \varphi}{\Lambda} \approx 6.$$

2) При смещении источника S на  $\delta l$  (например, по часовой стрелке), изображения  $S_1$  и  $S_2$  сместятся по дуге на такое же расстояние (но против часовой стрелки). В результате центр интерференционной картины на экране сместится вниз относительно точки  $O_x$  на расстояние

$$\delta x \approx \delta l \cdot \frac{b}{a} = 0,9 \text{ мм.}$$

3) В соответствии с формулами (3.20) и (3.21)

$$D \leq \lambda / \Omega .$$

Чтобы полосы на экране наблюдались достаточно отчетливо, потребуем, чтобы

$$D \leq \frac{\lambda}{2\Omega} .$$

Поскольку

$$\Omega \approx \frac{\alpha \cdot b}{a} ,$$

то, подставляя полученное ранее выражение для  $\alpha$ , получим:

$$\Omega = 2\varphi \left( 1 - \frac{a}{a+b} \right) .$$

Согласно условию задачи можно считать, что  $a \ll b$ , поэтому

$$D \leq \frac{\lambda}{4\varphi} = 0,16 \text{ мм.}$$

**Ответ:** 1)  $\lambda = \frac{\Lambda a 2\varphi}{a+b} = 696 \text{ нм}$ ,  $N = \frac{2b \cdot \varphi}{\Lambda} \approx 6$ ;

2)  $\delta x \approx \delta l \cdot \frac{b}{a} = 0,9 \text{ мм}$ ; 3)  $D \leq \frac{\lambda}{4\varphi} = 0,16 \text{ мм}$ .

**Задача 3.2.4.** Параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$  падает на бипризму с преломляющим углом  $\varphi = 10^{-2} \text{ рад}$  и шириной  $H = 2 \text{ см}$ , сделанную из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  (рис. 3.10).

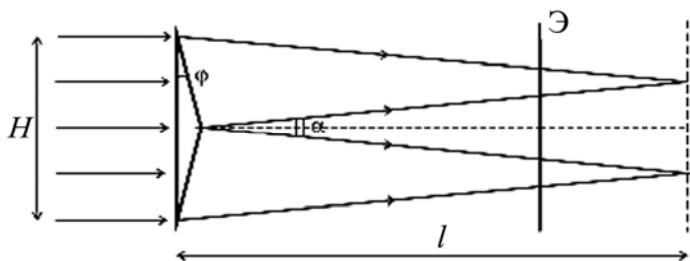


Рис. 3.10. Наблюдение интерференционной картины с помощью бипризмы

1) На каком расстоянии  $l$  от бипризмы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос?

2) Оценить допустимую некохерентность  $\delta\lambda$  света, при которой можно наблюдать все полосы. 3) Оценить допустимый угловой размер  $\psi$  источника в этом интерференционном опыте.

### Решение

После прохождения через призму исходный пучок разделится на два параллельных пучка, идущих за призмой под углом  $\alpha = 2(n-1)\varphi$  друг к другу.

1) Из рис. 3.10 видно, что ширина зоны интерференции максимальна на расстоянии

$$l \approx \frac{H/2}{\alpha} = \frac{H}{4(n-1)\varphi} = 1 \text{ м.}$$

Согласно (3.9) период интерференционной картины равен

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2(n-1)\varphi} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см,}$$

поэтому максимальный порядок интерференции:

$$m_{\max} = \frac{H/4}{\Lambda} = 100.$$

2) В соответствии с (3.15) допустимая некохерентность света  $\delta\lambda$  равна

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{l_{\text{ког}}} = \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{4\lambda\Lambda}{H} = 5 \text{ нм.}$$

3) В соответствии с формулами (3.20) и (3.21) для допустимого углового размера источника получаем:

$$\psi \leq \frac{\lambda}{d},$$

где  $d$  – расстояние между двумя точками бипризмы, через которые пройдут лучи, пришедшие в центральную точку экрана (см. рис. 3.3).

Так как  $d = \alpha \cdot l = H/2$ , то

$$\psi \leq \frac{\lambda}{d} = \frac{2\lambda}{H} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

**Ответ:** 1)  $l \approx \frac{H}{4(n-1)\varphi} = 1 \text{ м};$  2)  $\delta\lambda \leq \frac{4\lambda\Lambda}{H} = 5 \text{ нм};$   
 3)  $\psi \leq \frac{2\lambda}{H} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$

**Задача 3.2.5.** Билинза Бийе изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f = 10 \text{ см}$ . На расстоянии  $a = 3f/2$  от нее помещен источник света в виде щели, освещаемой широкоугольным пучком света с длиной волны  $\lambda = 5790 \text{ \AA}$ . Экран для наблюдения интерференционных полос установлен с противоположной стороны билинзы на расстоянии  $L = 330 \text{ см}$  от нее. При какой минимальной ширине щели  $D$  интерференционные полосы на экране пропадут? Считать, что различные точки щели излучают световые волны некогерентно. Расстояние между половинками билинзы  $h = 0,5 \text{ мм}$ .

### Решение

В соответствии с формулой для тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

поэтому за билинзой на расстоянии  $b = 3f$  формируются два действительных, перевернутых, увеличенных в  $\Gamma = b/a = 2$  раза изображения  $S_1$  и  $S_2$  щели  $S$ . С учетом формулы (3.9) период интерференционной картины на экране равен

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha},$$

где  $\alpha \approx \frac{3h}{L-b} = \frac{3h}{L-3f}$  - угол схождения интерферирующих лучей (см. рис. 3.11).

В соответствии с формулами (3.20) и (3.21) для минимальной ширины щели  $D$  имеем:

$$D \leq \frac{\lambda a}{d},$$

где  $d$  – расстояние между двумя точками билинзы, через которые пройдут лучи, вышедшие из центральной точки источника и прошедшие в центральную точку экрана (см. рис. 3.3).

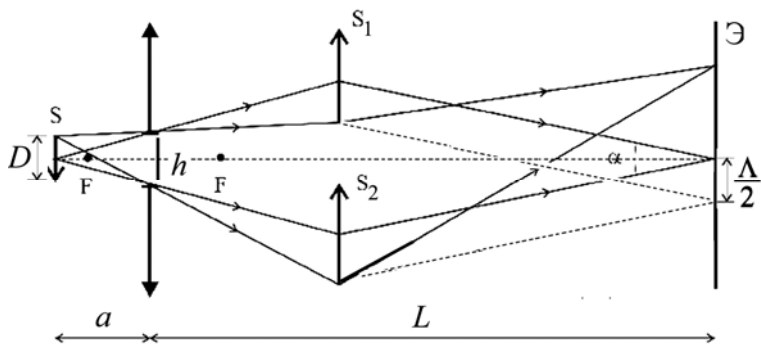


Рис. 3.11. Схема наблюдения интерференционной картины с помощью билинзы Бийе

Из рис. 3.11 следует:

$$d = L \cdot \alpha = \frac{3hL}{L - 3f},$$

поэтому

$$D_{min} = \frac{\lambda a(L - 3f)}{3hL} \approx 0,052 \text{ мм}$$

**Ответ:**  $D_{min} = \frac{\lambda a(L - 3f)}{3hL} \approx 0,052 \text{ мм.}$

**Задача 3.2.6.** Свет от далекого точечного источника S падает на фотоприемник (ФП) непосредственно и после отражения от горизонтальной плоскости (рис. 3.12). При вертикальном перемещении источника ФП регистрирует периодическое изменение интенсивности попадающего в него света. Оценить угол  $\alpha$  возвышения источника над горизонтом, при котором изменения фототока практически исчезают, если перед ФП установлен светофильтр СФ с полосой пропускания  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{11}$  Гц. Входное отверстие ФП находится на высоте  $h = 1$  см над отражающей плоскостью.

**Решение**

Как видно из рис. 3.12, данную схему (аналог опыта Ллойда) удобно анализировать, используя соотношения, полученные для схемы Юнга, если рассматривать источник S и его мнимое изображение в зеркале S' как щели S<sub>1</sub> и S<sub>2</sub> в опыте Юнга (при этом  $\Delta\varepsilon = 0$ ). В этом случае изменение угла  $\alpha$  возвышения источника S

над горизонтом следует рассматривать как изменение базы интерференции  $d$  в схеме Юнга.

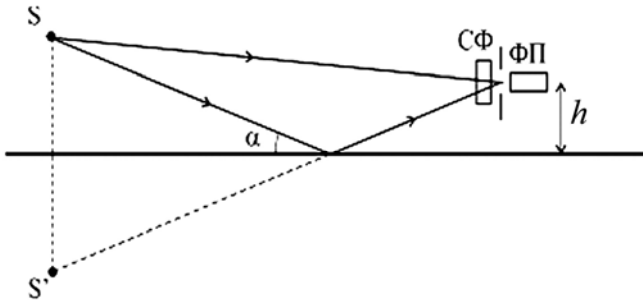


Рис. 3.12. Схема измерения интенсивности (фототока) в интерференционной картине от точечного источника света  $S$  с использованием плоского зеркала

В соответствии с формулой (3.6) разность хода  $\Delta_x$  равна

$$\Delta_x = 2\alpha \cdot h.$$

Согласно условию задачи она не должна превышать длину когерентности  $l_{\text{ког}}$  прошедшего через фильтр света:

$$l_{\text{ког}} = \frac{c}{\Delta\nu}.$$

Таким образом, искомый угол возвышения источника равен

$$\alpha = \frac{c}{2h \cdot \Delta\nu} \approx 0,05 \text{ рад.}$$

*Замечание.* В опыте Ллойда апертура интерференции  $\Omega$  зависит от положения  $x$  точки  $P$  на экране. Это следует учитывать при оценке видности  $V$  интерференционной картины, если используется протяженный источник.

**Ответ:**  $\alpha = 0,05$  рад.

**Задача 3.2.7.** Источник света  $S$  расположен на расстоянии  $H = 1$  м от тонкой слюдяной пластинки толщиной  $h = 0,1$  мм с показателем преломления  $n = 1,4$  (рис. 3.13 а). Для наблюдения интерференционных полос на таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран  $\mathcal{E}$ , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам. Угол  $\theta = 60^\circ$ . 1) Найти толщину пластинки  $h$  и ширину  $\Delta$  интерференционных полос на экране  $\mathcal{E}$ , если порядок интерференционной полосы в центре экрана равен  $m = 500$ . 2) Оце-

нить допустимый размер  $D$  и допустимую некогерентность  $\delta\lambda$  источника, если  $\lambda = 600$  нм.

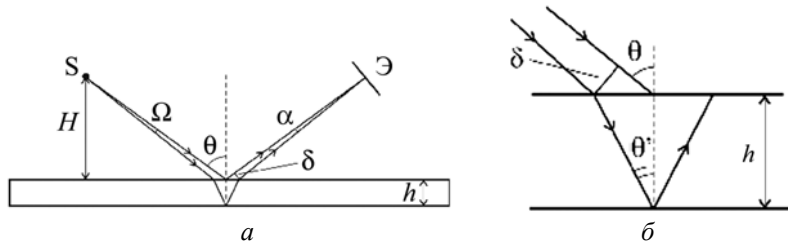


Рис. 3.13. Схема получения интерференционной картины от точечного источника  $S$  с помощью тонкой слюдяной пластинки ( $a$ ); ход лучей в пластинке ( $b$ )

В соответствии с формулой (3.22):

$$h = \frac{\Delta}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = \frac{m\lambda}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,14 \text{ мм.}$$

Согласно (3.9) ширина интерференционных полос равна

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha},$$

а угол схождения интерферирующих лучей:

$$\alpha \cong \frac{\delta}{H/\cos \theta},$$

где (см. рис. 3.13б)

$$\delta \cong h \cdot \operatorname{tg} \theta' \cdot \cos \theta.$$

С учетом закона преломления

$$\sin \theta = n \sin \theta'$$

получаем:

$$\delta = h \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}},$$

$$\alpha = \frac{h}{H} \frac{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,27 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

и

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} \approx 2,2 \text{ см.}$$

2) Согласно (3.20) и (3.21) допустимый размер источника:



$$D \leq \frac{\lambda}{\Omega},$$

где  $\Omega$  – апертура интерференции. Поскольку в силу симметрии  $\Omega = \alpha$ , то

$$D \leq \Lambda = 2,2 \text{ см.}$$

В соответствии с (3.15) допустимая некогерентность источника:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta} = \frac{\lambda}{m} \approx 1,2 \text{ нм.}$$

#### Замечания

1) В случае точечного монохроматического источника интерференционная картина *не локализована*.

2) При  $H \gg h$  справедливо  $\Omega \rightarrow 0$ , поэтому принципиальных ограничений на размер источника нет.

**Ответ:** 1)  $h \cong 0,14$  мм,  $\Lambda \cong 2,2$  см; 2)  $D \leq 2,2$  см;  $\delta\lambda \cong 1,2$  нм.

**Задача 3.2.8.** С помощью зрительной трубы, установленной «на бесконечность», наблюдают интерференционные полосы в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной  $h$  с показателем преломления  $n = 1,4$ ; при этом угол наблюдения  $\theta$  может изменяться от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (рис. 3.14). 1) Найти толщину пластинки  $h$ , если разность между максимальным  $m_{\max}$  и минимальным  $m_{\min}$  порядками интерференции равна  $\Delta m = 300$ . 2) Оценить допустимую некогерентность  $\delta\lambda$  источника, при которой будут достаточно четко наблюдаться все интерференционные полосы. 3) Каков допустимый размер  $D$  источника света в этом интерференционном эксперименте? Используется свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм.

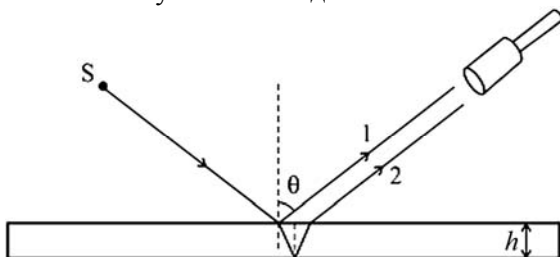


Рис. 3.14. Наблюдение интерференционной картины в опыте с тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинкой

**Решение**

1) В соответствии с (3.22) для лучей 1 и 2 (см. рис. 3.14) оптическая разность хода равна

$$\Delta_{12} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}.$$

При изменении  $\theta$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$   $\Delta_{12}$  изменяется от  $\Delta_{\max} = 2nh$  до  $\Delta_{\min} = 2h\sqrt{n^2 - 1}$ . Следовательно,

$$m_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\lambda} = \frac{2nh}{\lambda},$$

$$m_{\min} = \frac{\Delta_{\min}}{\lambda} = \frac{2h\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\Delta m = m_{\max} - m_{\min} = \frac{2h}{\lambda} \left( n - \sqrt{n^2 - 1} \right),$$

а искомая толщина пластинки

$$h = \frac{\lambda \cdot \Delta m}{2 \left( n - \sqrt{n^2 - 1} \right)} \approx 0,21 \text{ мм.}$$

2) Согласно (3.15) допустимая некогерентность источника равна

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2nh} = 0,64 \text{ нм.}$$

3) В связи с тем, что апертура интерференции  $\Omega \ll 1$ , принципиальных ограничений на размер источника нет.

**Ответ:** 1)  $h = 0,21$  мм; 2)  $\delta\lambda \leq 0,64$  нм; 3) ограничений на размер источника нет.

**Задача 3.2.9.** Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на поверхности воздушного клина между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине  $\varepsilon = 1'$ . Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны  $\lambda = 546,1$  нм и шириной  $\delta\lambda = 0,01$  нм. Определить: 1) расстояние  $\Lambda$  между двумя соседними полосами; 2) максимальное число  $N$  полос, которые можно было бы увидеть, если бы размеры клина не были ограничены; 3) расстояние  $x$  от вершины клина до последней наблюдаемой полосы и толщину  $h$  клина в этом месте; 4) максимально допусти-

мое угловое расхождение  $\delta\varphi_{\max}$  лучей, при котором возможно наблюдение всех полос.

### Решение

Будем считать, что наблюдение полос на поверхности клина ведется при его освещении параллельным пучком света, перпендикулярным поверхности (см. рис. 3.15).

1) Так как угол между интерферирующими лучами 1 и 2 равен  $\alpha = 2\varepsilon$ ,

то согласно (3.9) расстояние между двумя полосами интерференционной картины на поверхности клина равно

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = 0,94 \text{ мм.}$$

2) Поскольку источник света – квазимонохроматический, то максимальный порядок интерференции (а значит, и максимальное число полос) равен

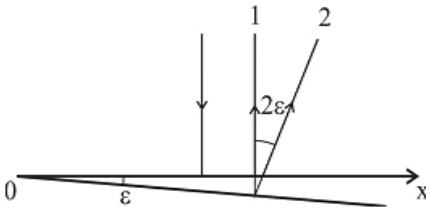


Рис.3.15. Формирование интерференционной картины на клиновидном воздушном зазоре с углом  $\varepsilon$  между двумя стеклянными пластинами

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 54600 .$$

3) Последняя из наблюдаемых полос отстоит от вершины клина на расстоянии

$$x = m_{\max} \cdot \Lambda \approx 51,3 \text{ м,}$$

а толщина клина в этом месте равна

$$h = m_{\max} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2 \cdot \delta\lambda} \approx 14,9 \text{ см.}$$

4) Максимально допустимое угловое расхождение лучей  $\delta\varphi_{\max}$  найдем из условия:

$$2h(1 - \cos\delta\varphi) \leq \lambda ,$$

или

$$2h \cdot \frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 \leq \lambda .$$

С учетом формулы для  $h$  окончательно получаем:

$$\delta\varphi_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \delta\lambda}{\lambda}} \approx 21' .$$

**Ответ:** 1)  $\Lambda = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = 0,94 \text{ мм}$ ; 2)  $N = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 54600$  ;

3)  $x = m_{\max} \cdot \Lambda \approx 51,3 \text{ м}$ ;  $h = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \approx 14,9 \text{ см}$ ;

4)  $\delta\varphi_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \delta\lambda}{\lambda}} \approx 21'$  .

**Задача 3.2.10.** Наблюдаются "полосы равной толщины" в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения  $L_0 = 25$  см в направлении, перпендикулярном к поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно ребру клина. 1) Оценить максимальное число  $N$  интерференционных полос, наблюдаемых в монохроматическом свете, если диаметр зрачка  $d = 5$  мм. 2) Оценить степень немонахроматичности света  $\delta\lambda$ , при которой можно наблюдать такое максимальное число полос.

### Решение

В соответствии с условием задачи невооруженный глаз регистрирует интенсивность световых колебаний в точке  $P$  на передней поверхности клина (см. рис. 3.16), формируя ее изображение  $P'$  на сетчатке.

Как видно из рис. 3.16, в формировании изображения  $P'$  будут участвовать лучи, выходящие из точки  $P$  под углами  $\alpha$  от 0 до  $d/2L_0$ . По мере удаления от ребра клина (вдоль оси  $Ox$ ) видность интерференционной картины уменьшается и становится равной нулю, когда при изменении угла от нуля до  $\alpha$  разность хода интерферирующих лучей изменяется на

$$\Delta(0) - \Delta(\alpha) = \lambda .$$

С учетом формулы (3.22)

$$2nh(1 - \cos\alpha) = \lambda ,$$

или при малых  $\alpha$ :

$$2nh \frac{\alpha^2}{2} = \lambda ,$$

где  $n = 1$ .

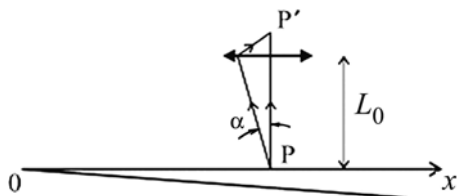


Рис. 3.16. Наблюдение интерференционной картины на поверхности клина

Следовательно, максимальное число полос  $N$  определяется соответствующим порядком интерференции:

$$N = m_{\max} = \frac{2h}{\lambda} \approx \frac{2}{\alpha^2} = \frac{8L_0^2}{d^2} \approx 2 \cdot 10^4.$$

Такое число полос можно наблюдать при условии:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{m_{\max}} = \frac{d^2}{8L_0^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

**Ответ:**  $N = 2 \cdot 10^4$ ;  $\frac{\delta\lambda}{\lambda} \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 3.2.11.** Какую ширину  $D$  может иметь источник света в интерферометре Майкельсона при наблюдении полос равной толщины, если зеркала интерферометра расположены на неодинаковых расстояниях от делительной пластинки ( $\Delta l = 2$  см)? Фокусное расстояние коллиматора равно  $f = 25$  см; длина волны света  $\lambda = 0,5$  мкм.

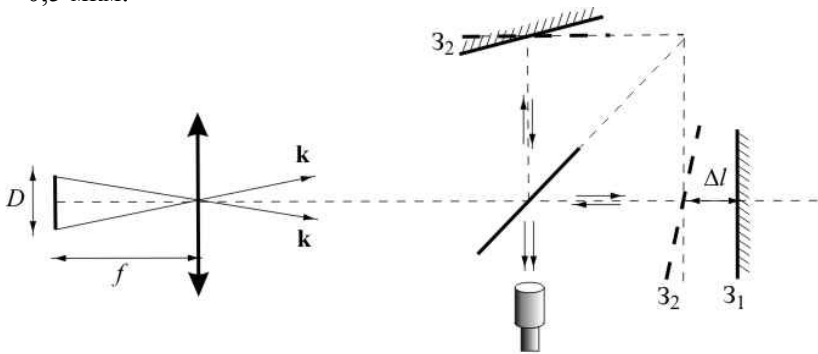


Рис. 3.17. Оптическая схема интерферометра Майкельсона

### Решение

Как видно из рис. 3.17, свет от источника падает на зеркало  $3_1$  интерферометра под углами от  $0$  до  $\alpha = D/(2f)$ . Как показано в решении задачи 3.2.10, видность интерференционной картины равна нулю, если

$$2\Delta l \frac{\alpha^2}{2} = \lambda.$$

Таким образом, интерференционная картина наблюдается при условии:

$$\alpha \leq \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta l}}.$$

Отсюда допустимая ширина источника:

$$D \leq 2f \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta l}} = 2,5 \text{ мм.}$$

**Ответ:**  $D \leq 2,5$  мм.

**Задача 3.2.12.** Две тонкие симметричные линзы (двояковыпуклая и двояковогнутая) придвинуты вплотную друг к другу (рис. 3.18 а). Вблизи точки их соприкосновения в отраженном свете с длиной волны 0,5 мкм наблюдают интерференционные кольца Ньютона. Найти радиус четвертого темного кольца, если оптическая сила системы из двух линз равна 5,0 дптр. Обе линзы сделаны из материала с коэффициентом преломления  $n = 1,5$ .

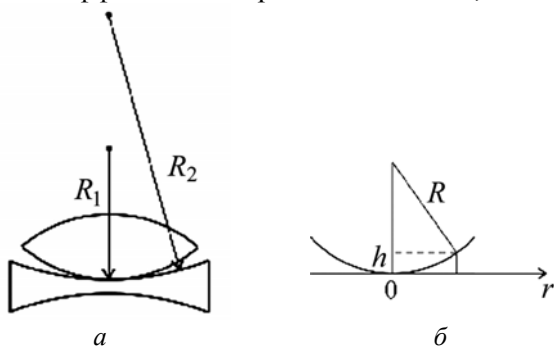


Рис. 3.18. Оптическая система из двух тонких симметричных линз (а); к вопросу об определении толщины зазора  $h$  (б)

### Решение

Толщина зазора  $h$  (см. рис. 3.18 б) между сферической и плоской поверхностями на расстоянии  $r$  от точки их соприкосновения при условии  $r \ll R$  приближенно равна

$$h(r) \approx \frac{r^2}{2R},$$

где  $R$  – радиус кривизны сферической поверхности. Поэтому толщина зазора между линзами

$$h(r) \approx \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Темные интерференционные кольца находятся там, где оптическая разность хода для двух лучей, отраженных от разных границ воздушного зазора между линзами, равна целому числу длин волн:

$$\Delta(r) = 2h(r) = m\lambda.$$

С другой стороны, оптическая сила системы из двух тонких симметричных линз, прижатых вплотную друг к другу, равна (см. главу 1)

$$D = D_1 + D_2 = 2(n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Таким образом, для радиуса  $m$ -го темного кольца получаем:

$$r_m = \sqrt{\frac{2(n-1)m\lambda}{D}}.$$

По условию задачи  $n = 1,5$ ,  $m = 4$ ,  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м,  $D = 5,0$  дптр. Поэтому

$$r_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,5 - 1) \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{5}} \approx 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**Ответ:**  $r_4 = 0,63$  мм.

### 3.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.3.1.** Полученное при помощи линзы с фокусным расстоянием  $f = 50$  мм изображение Солнца в точности совпадает с отверстием в экране, за которым расположен другой экран с двумя узкими параллельными щелями. Расстояние между щелями  $d = 1$  мм. При каком расстоянии  $L$  между экранами можно наблюдать интерференционные полосы за экраном со щелями? Угловой диаметр Солнца  $\psi \approx 0,01$  рад.

**Ответ:**  $L > \frac{fd\psi}{\lambda} \approx 100$  см.

**Задача 3.3.2.** В интерференционной схеме (см. рис. 3.19) используется квазимонохроматический ( $\lambda = 0,5$  мкм;  $\delta\lambda = 2,8$  нм)

протяженный источник света  $S$ . Отражающее зеркало  $З$  расположено симметрично относительно источника  $S$  и точки  $O$  на экране  $\mathcal{E}$ . Найти: 1) ширину  $\Lambda$  интерференционных полос на экране; 2) количество  $N$  наблюдаемых полос; 3) область локализации  $\Delta x$  полос на экране; 4) максимальный  $m_{\max}$  и минимальный  $m_{\min}$  порядки интерференционных полос; 5) допустимый размер  $D$  источника.

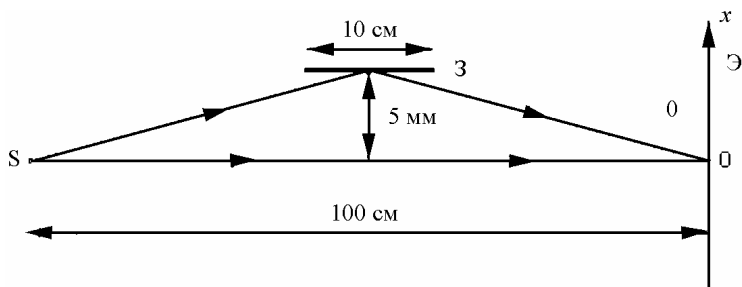


Рис. 3.19. Интерференционная схема

**Ответ:** 1)  $\Lambda \approx 0,05$  мм; 2)  $N \approx 100$ ; 3)  $-0,4$  см  $< x < 0,1$  см; 4)  $m_{\max} \approx 180$ ,  $m_{\min} \approx 80$ ; 5)  $D \leq 50$  мкм.

**Задача 3.3.3.** Плоская световая волна падает на бизеркало Френеля. Угол между зеркалами равен  $2'$ . Ширина интерференционных полос на экране равна  $0,55$  мм. Определить длину волны света.

**Ответ:**  $\lambda = 0,64$  мкм.

**Задача 3.3.4.** В интерференционной схеме с бипризмой Френеля (преломляющий угол  $\varepsilon = 20'$ , показатель преломления  $n = 1,5$ ) экран и источник света ( $\lambda = 600$  нм;  $\delta\lambda = 20$  нм) находятся на одинаковых расстояниях от бипризмы. 1) Оценить число  $N$  интерференционных полос на экране. 2) На каком расстоянии  $\Delta x$  от центра интерференционной картины интерференционные полосы размываются? 3) Каков допустимый размер  $D$  источника, при котором можно наблюдать все интерференционные полосы?

**Ответ:** 1)  $N \approx 60$ ; 2)  $\Delta x \approx 6$  мм; 3)  $D \leq 0,2$  мм.

**Задача 3.3.5.** Из тонкой собирающей линзы диаметром  $50$  см вырезана центральная полоска шириной  $5$  мм, после чего обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. Источник света с дли-



ной волны 500 нм находится на оси системы в фокальной плоскости линзы. 1) На каком расстоянии  $r$  от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? Определить ширину  $\Lambda$  интерференционных полос и их число  $N$ . 2) Оценить допустимую некогерентность  $\delta\lambda$  источника света, чтобы можно было наблюдать все полосы. 3) Оценить допустимый размер  $D$  источника света.

**Ответ:** 1)  $r \approx 1$  м,  $\Lambda \approx 0,05$  мм,  $N \approx 200$ ; 2)  $\delta\lambda \leq 5$  нм; 3)  $D \leq 25$  мкм.

**Задача 3.3.6.** Рассеянный монохроматический свет с длиной волны 0,6 мкм падает на тонкую стеклянную пластинку с показателем преломления 1,5. Угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами, близкими к  $45^\circ$ , равно  $3^\circ$ . Определить толщину пластинки.

**Ответ:** 15 мкм.

**Задача 3.3.7.** Полосы равной толщины, получающиеся при освещении тонкого стеклянного клина (показатель преломления 1,5) рассеянным монохроматическим светом с длиной волны 500 нм, проецируются линзой на экран. Перед линзой находится квадратная диафрагма со стороной 1 см, которая отстоит от клина на расстоянии 50 см. Главная оптическая ось проецирующей системы приблизительно перпендикулярна поверхности клина. Чему равен максимальный порядок интерференционной картины на экране?

**Ответ:**  $\approx 5600$ .

**Задача 3.3.8.** Свет с длиной волны  $\lambda = 550$  нм от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете ширина интерференционных полос на поверхности клина равна 0,21 мм. Найти: 1) угол между гранями клина; 2) степень некогерентности света  $\delta\lambda/\lambda$ , если интерференционные полосы исчезают на расстоянии 1,5 см от вершины клина.

**Ответ:** 1)  $3'$ ; 2) 0,014.

**Задача 3.3.9.** С помощью плосковыпуклой линзы из материала с показателем преломления 1,6 наблюдают кольца Ньютона в от-

раженном свете с длиной волны 589 нм. Найти фокусное расстояние линзы, если радиус третьего светлого кольца равен 1,1 мм.

**Ответ:** 137 см.

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, главы IV, VI, VII.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, глава III.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§26,27.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 5.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика / Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §3.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика/ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §§3–5.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §4.2.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел IV.

## Глава 4

## ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

## 4.1. Теоретическое введение

При распространении монохроматической световой волны с достаточно широким (по сравнению с длиной волны) фронтом в однородной среде форма фронта волны практически не изменяется. Если на пути такой волны возникают препятствия, которые модифицируют фронт волны (по форме или размеру) или модулируют его по фазе, то структура светового поля за такими объектами может существенно отличаться от той, которая была бы в их отсутствие. Такие явления обусловлены волновой природой света, и их принято объединять общим названием – *дифракция света*.

Точное решение задачи о дифракции света даже в простейших случаях сопряжено с большими трудностями. Поэтому широкое применение нашли приближенные методы расчета дифракционной картины.

Среди таких методов можно выделить метод *зон Френеля*. В его основе – *принцип Гюйгенса*, согласно которому каждая точка волнового фронта может рассматриваться как источник вторичных (сферических) волн. Френель дополнил этот принцип условием, что вторичные волны *когерентны* и потому могут *интерферировать* друг с другом. Таким образом, согласно *принципу Гюйгенса–Френеля* для некоторой точки наблюдения Р действие светящейся точки Р<sub>0</sub> эквивалентно действию источников вторичных волн на любой волновой поверхности (рис. 4.1).

Относительно точки наблюдения Р сферический фронт световой волны можно мысленно разбить на так называемые *полуволновые зоны Френеля* (см. рис. 4.1). В этом случае волны от вторичных источников, находящихся на границах зон Френеля, будут приходить в точку наблюдения Р со сдвигом по фазе, равным  $\pi$ , а интенсивность света в точке Р будет зависеть от числа открытых зон Френеля (см. ниже).

Принято различать *дифракцию Френеля* (или дифракцию в ближней зоне), когда для точки Р открыты одна и более зон Френеля, и *дифракцию Фраунгофера* (или дифракцию в дальней зоне), когда открыта лишь часть первой зоны (в этом случае дифрагиро-

ванный свет характеризуется устойчивой угловой структурой, см. гл. 5).

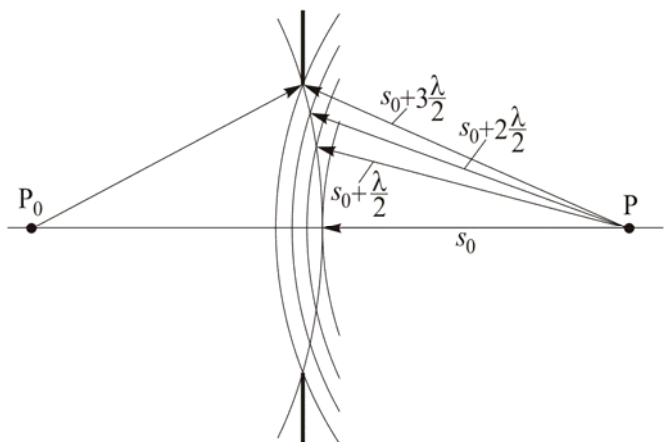


Рис. 4.1. Построение зон Френеля

Пусть между точечным источником  $P_0$  монохроматического света с длиной волны  $\lambda$  и точечным приемником излучения  $P$  расположен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса  $R$ , центр которого находится на линии  $P_0P$  (рис. 4.2).

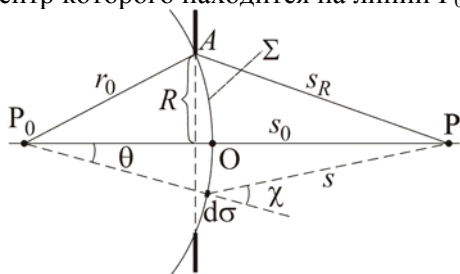


Рис.4.2. Распространение световой волны от точечного источника  $P_0$  через отверстие в экране радиуса  $R$

Если радиус сферической волновой поверхности  $\Sigma$ , касающейся границы круглого отверстия в экране, равен  $r_0$ , то комплексная амплитуда  $U_\Sigma$  светового поля, возбуждаемого источником  $P_0$ , в любой точке на поверхности  $\Sigma$  равна

$$U_\Sigma = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0},$$

где  $U_0$  – величина, численно равная амплитуде волны на единичном расстоянии от источника;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число. Вклад в

амплитуду поля  $U$  в точке  $P$  от элемента площади  $d\sigma$  на поверхности  $\Sigma$  равен

$$dU(P) = U_{\Sigma} \cdot \frac{e^{iks}}{s} d\sigma \cdot K(\chi), \quad (4.1)$$

где  $s$  – расстояние от элемента  $d\sigma$  до точки  $P$ ,  $K(\chi)$  – угловой коэффициент, учитывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла  $\chi$  между нормалью к волновому фронту и направлением на точку  $P$ . В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля комплексная амплитуда поля в точке  $P$  равна

$$U(P) = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) d\sigma. \quad (4.2)$$

В сферических координатах

$$d\sigma = r_0^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta, \quad (4.3)$$

а по теореме косинусов:

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0)\cos\theta,$$

или

$$2s \cdot ds = -2r_0(r_0 + s_0) \cdot d(\cos\theta) = 2r_0(r_0 + s_0)\sin\theta \cdot d\theta. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.2), получим:

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} s ds d\varphi = \\ &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} \cdot 2\pi \int_{s_0}^{s_R} K(\chi) \cdot e^{iks} ds. \end{aligned}$$

Если для точки наблюдения  $P$  открыты всего несколько зон Френеля, то в первом приближении можно считать, что  $K(\chi) = K_0 = \text{const}$ , поэтому

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks} \Big|_{s_0}^{s_R} =$$

$$= U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks_0} \cdot \left( e^{ik(s_R - s_0)} - 1 \right).$$

Пусть  $\Delta s = s_R - s_0$  – разность хода для крайнего и центрального лучей, приходящих в точку Р соответственно из точек А и О, а  $\psi = k \cdot \Delta s$  – соответствующая разность фаз. Тогда

$$\begin{aligned} U(P) &= U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot e^{iks_0} \cdot \left( e^{i\psi} - 1 \right) = \\ &= U_0 \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \lambda \cdot \left( \frac{e^{i\psi} - 1}{i} \right) = C \cdot \Gamma, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $C = U_0 K_0 \cdot \lambda \cdot \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0}$ , а  $\Gamma = \frac{e^{i\psi} - 1}{i} = i \cdot (1 - e^{i\psi})$  – фазовый

множитель, который на комплексной плоскости изображается суммой двух единичных векторов (рис. 4.3): вектора  $\mathbf{O1}$  и вектора с началом в точке  $(0, 1)$ , направление которого задается углом  $\psi$  (отсчитывается от вертикальной оси в направлении против часовой стрелки).

Как видно из рис. 4.3, если  $\psi_{\max} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \pi(2n+1)$ , или  $\Delta s_{\max} = \frac{\psi_{\max}}{k} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda}{2}(2n+1)$ , то  $|\Gamma| = 2$  (вектор  $\mathbf{OO}_1$ ), при этом комплексная амплитуда волны максимальна и равна  $U_{\max} = 2C$ . Если  $\psi_{\min} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi n$ , или разность хода равна  $\Delta s_{\min} = \frac{\psi_{\min}}{k} = \lambda n$ ,

то амплитуда волны в точке Р равна нулю.

С учетом полученных результатов можно выполнить следующее построение (см. рис. 4.1). Построим концентрические сферы с центром в т. Р и радиусами  $s_0, s_0 + \lambda/2, s_0 + 2(\lambda/2), \dots, s_0 + n(\lambda/2)$ , которые разобьют сферическую поверхность  $\Sigma$  на кольцевые зоны, называемые *зонами Френеля*. Соответствующие границам зон Френеля значения разности фаз  $\psi$  будут равны

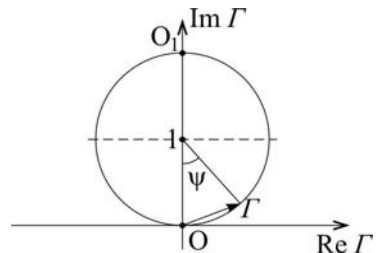


Рис. 4.3. Представление множителя  $\Gamma$  на комплексной плоскости

$\psi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, n\pi, \dots$ . Если для т. Р отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда волны в т. Р будет максимальной, если же открыто четное число зон Френеля, то амплитуда равна нулю.

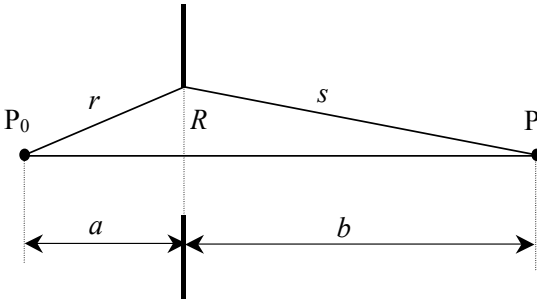


Рис. 4.4. К выводу формулы для радиуса зон Френеля

Найдем радиус  $R_n$   $n$ -й зоны Френеля при заданных расстояниях  $a$  (от источника  $P_0$  до экрана) и  $b$  (от экрана до приемника Р). Полагая  $R \ll a, b$ , получим:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2} = a \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} \approx a \left( 1 + \frac{R^2}{2a^2} \right),$$

$$s = \sqrt{R^2 + b^2} \approx b \left( 1 + \frac{R^2}{2b^2} \right),$$

$$\Delta s_R = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (4.6)$$

где  $r$  и  $s$  – соответственно расстояния от источника  $P_0$  и от приемника Р до вторичного источника, расположенного в плоскости экрана на расстоянии  $R$  от оси  $P_0P$ ;  $\Delta s_R$  – разность хода до точки Р для крайнего и центрального лучей.

Для луча, идущего от внешней границы  $n$ -й зоны Френеля,  $\Delta s_R = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ , поэтому

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{1/a + 1/b}. \quad (4.7)$$

Отсюда площадь  $n$ -й зоны Френеля

$$S_n = \pi R_n^2 - \pi R_{n-1}^2 = \pi \left( \frac{n\lambda}{1/a+1/b} - \frac{(n-1)\lambda}{1/a+1/b} \right) = \frac{\pi\lambda}{1/a+1/b} = \text{const}$$

не зависит от номера зоны, а значит, площади всех зон Френеля одинаковы. С учетом (4.6) можем записать:

$$\psi_R = k \cdot \Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (4.8)$$

т.е. разность фаз  $\psi_R$  для крайнего и центрального лучей пропорциональна квадрату радиуса отверстия. Формулу (4.8) можно преобразовать к виду:

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}. \quad (4.9)$$

Разобьем теперь первую зону Френеля на достаточно большое число  $m$  подзон таким образом (рис. 4.5), чтобы разность фаз  $d\psi_m$  для лучей, идущих от соседних межподзонных границ была равна

$$d\psi_m = \frac{\pi}{m}.$$

Так как в соответствии с (4.8)  $d\psi \sim d(R^2) = R \cdot dR$ , то при таком разбиении площади всех подзон будут одинаковы.

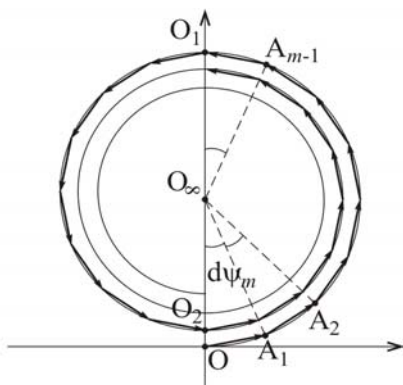


Рис. 4.5. Построение векторной диаграммы для нахождения амплитуды светового поля в точке Р

На векторной диаграмме (рис. 4.5) вкладам в амплитуду дифрагировавшей волны от 1-й, 2-й, ...,  $m$ -й подзон соответствуют векторы  $\mathbf{OA}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{O}_1$ , которые имеют одинаковую длину (вследствие равенства площадей подзон) и повернуты друг относительно друга на одинаковый угол  $d\psi_m$  (из-за разбиения дуги  $\mathbf{OO}_1$  на



$m$  равных частей). При увеличении  $m$  ломаная  $OA_1A_2..A_{m-1}O_1$  может быть заменена соответствующей полуокружностью.

Выполняя аналогичное разбиение второй зоны, получим вторую ломаную, которая замкнула бы первую, если бы длины составляющих ее элементарных векторов были равны. Но поскольку при увеличении  $\chi$  коэффициент  $K(\chi)$  монотонно уменьшается, то уменьшается и амплитуда вторичных волн. Поэтому конец ломаной для второй зоны (точка  $O_2$ ) не совпадает с точкой  $O$ , а суммарный вклад от второй зоны представлен вектором  $O_1O_2$ , длина которого чуть меньше длины вектора  $OO_1$ . Так как направления векторов  $OO_1$  и  $O_1O_2$  противоположны, суммарный вклад в  $U(P)$  от первой и второй зон Френеля ничтожно мал (длина вектора  $OO_2$  много меньше, чем длины векторов  $OO_1$  и  $O_1O_2$ ).

Очевидно, что учитывая вклады от всех других зон, получим векторную диаграмму, которая имеет вид скручивающейся спирали (*спираль Френеля*)  $OO_1O_2O_3..O_\infty$  с центром в точке  $O_\infty$ . Вектор  $OO_\infty$  соответствует случаю, когда для точки  $P$  открыты все зоны Френеля. Как видно из рис. 4.5, длина вектора  $OO_\infty$  в два раза меньше длины вектора  $OO_1$ . Следовательно, если для точки  $P$  открыта только первая зона Френеля, то амплитуда электрического поля в точке  $P$  в два раза больше, чем в отсутствие препятствия, а интенсивность – в четыре, так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля.

Поскольку при  $R \rightarrow \infty$  коэффициент  $\Gamma \rightarrow i$ , а в отсутствие препятствия амплитуда волны в точке  $P$  равна

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0 + s_0},$$

из формулы (4.5) находим:

$$K_0 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}.$$

Теперь становится понятной роль коэффициента  $C$  в формуле (4.5): модуль  $|C|$  равен амплитуде, а квадрат модуля  $|C|^2$  пропорционален интенсивности  $I_0$  поля в точке наблюдения  $P$  в отсутствие препятствия. Кроме того, длина вектора  $OO_\infty$  на рис. 4.5 равна

$|C|^1$ . Если число открытых зон Френеля относительно небольшое ( $n \sim 5 \div 10$ ), то можно считать, что радиус спирали приближенно равен  $|C|$ , и интенсивность в точке наблюдения Р равна

$$I = I_0 \cdot |\Gamma|^2.$$

Для заданных  $a$ ,  $b$  и  $R$  по формуле (4.8) находим  $\psi_R$ . Как видно из рис. 4.5,

$$\operatorname{Re} \Gamma = \sin \psi$$

и

$$\operatorname{Im} \Gamma = 1 - \cos \psi,$$

поэтому

$$|\Gamma|^2 = \sin^2 \psi + (1 - \cos \psi)^2 = 2(1 - \cos \psi),$$

а следовательно,

$$I(\psi) = 2I_0 \cdot (1 - \cos \psi).$$

Как будет показано ниже, с помощью спирали Френеля часто удается существенно упростить решение задач по дифракции света на круглых отверстиях и дисках.

## 4.2. Задачи с решениями

**Задача 4.2.1.** Диафрагма с круглым отверстием радиуса  $R$  находится между точечным источником света и экраном, на котором наблюдают дифракционную картину. Найти длину волны  $\lambda$  излучения источника, если при смещении экрана в сторону диафрагмы освещенность в центре дифракционной картины осциллирует и достигает максимума, когда расстояние от экрана до диафрагмы равны  $b_1$  и  $b_2$  ( $b_1 > b_2$ ).

### Решение

В соответствии с формулой (4.7):

$$R^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b_1}} = \frac{(n+2)\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b_2}},$$

---

<sup>1</sup> В дальнейшем для упрощения записи длину вектора  $\mathbf{OO}_\infty$  будем обозначать  $|C| = \sqrt{I_0}$

откуда

$$(n+2)\lambda = R^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b_2} \right), \quad (4.10)$$

$$n\lambda = R^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} \right), \quad (4.11)$$

Вычитая (4.11) из (4.10), для искомой длины волны получаем:

$$\lambda = \frac{R^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} \right).$$

**Ответ:**  $\lambda = \frac{R^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} \right)$

**Задача 4.2.2.** Плоская световая волна с длиной  $\lambda = 0,48$  мкм и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на экран с круглым отверстием радиуса  $R = 0,6$  мм. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на расстоянии  $b = 1,5$  м от экрана.

**Решение**

**1-й способ.** Поскольку падающая на экран волна – плоская ( $1/a = 0$ ), то формула (4.7) принимает вид:

$$R_n^2 = n\lambda b,$$

откуда

$$n = \frac{R^2}{\lambda b} = \frac{(0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м})^2}{0,48 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot 1,5 \text{ м}} = 0,5.$$

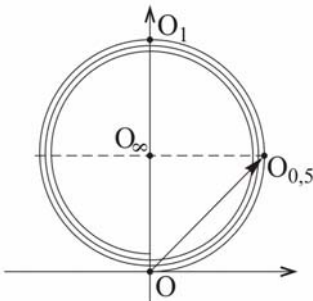


Рис. 4.6. Определение комплексной амплитуды светового поля первым способом

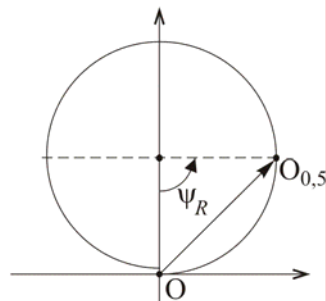


Рис. 4.7. Определение комплексной амплитуды светового поля вторым способом

Так как  $n \sim R^2$ , то делаем вывод, что для точки Р открыта внутренняя половина (по площади) первой зоны Френеля. Этому случаю на векторной диаграмме (рис. 4.6) соответствует вектор  $OO_{0,5}$ , длина которого в  $\sqrt{2}$  раз больше длины вектора  $OO_{\infty}$ . Следовательно, интенсивность в центре дифракционной картины в 2 раза больше, чем интенсивность  $I_0$  падающей волны.

**2-й способ.** В соответствии с формулой (4.8) разность фаз

$$\Psi_R = \frac{\pi \cdot r^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{r^2}{\lambda b} = 0,5\pi,$$

что соответствует точке  $O_{0,5}$  на векторной диаграмме (рис. 4.7). Далее решать как 1-м способом.

**Ответ:**  $I = 2I_0$ .

**Задача 4.2.3.** Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на экран с отверстием, форма которого показана на рис. 4.8. Характерные радиусы объекта равны соответственно  $r_1 = R_1$ ,  $r_2 = \sqrt{2}R_1$ ,  $r_3 = \sqrt{3}R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы первой и второй зон Френеля. Найти интенсивность  $I$  света в точке наблюдения.

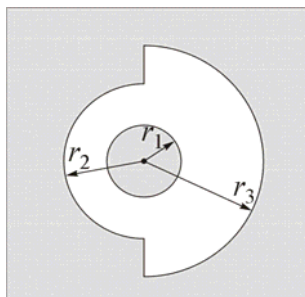


Рис. 4.8. Форма отверстия в экране

**Решение**

Найдем на векторной диаграмме (рис. 4.9) положения точек  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , соответствующих радиусам  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . В соответствии с условием задачи, точка  $A_1$  соответствует границе первой зоны Френеля. Поскольку площадь отверстия радиуса  $r_2$  равна

$$S(A_2) = \pi r_2^2 = 2\pi R_1^2 = 2S_1,$$

а согласно (4.9)

$$\Psi_R = \frac{kR^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1},$$

поэтому

$$\psi_2 = \pi \frac{S(A_2)}{S_1} = 2\pi,$$

и следовательно, точка  $A_2$  соответствует границе второй зоны Френеля. Аналогично,

$$S(A_3) = \pi r_3^2 = 3\pi R_2^2 = 3S_2 = 6S_1,$$

и точка  $A_3$  соответствует границе шестой зоны Френеля.

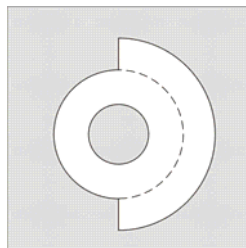
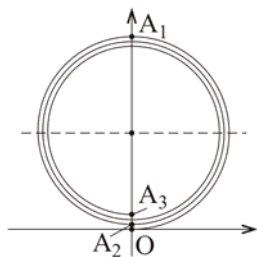


Рис. 4.9. Фрагмент спирали Френеля и положение на ней точек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$

Рис.4.10. Разбиение отверстия в экране на простые объекты

Исходное отверстие можно рассматривать как совокупность кольца и полукольца (см. рис. 4.10). Изобразим с помощью спирали Френеля векторы, соответствующие вкладам от отдельных участков волнового фронта.

Так как в центре экрана – непрозрачный диск радиуса  $R_1$ , то участок спирали  $OA_1$  "не работает". Кольцо с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  открыто полностью, что соответствует участку спирали от  $A_1$  до  $A_2$  (вектор  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ ). Область от  $r_2$  до  $r_3$  открыта наполовину (по диаметру). Напомним, что при выводе формулы (4.5) выполнялось интегрирование по углу  $\varphi$ , и для полностью открытой области это давало множитель  $2\pi$ . В рассматриваемом случае интегрирование по  $\varphi$  дает множитель  $\pi$ , поэтому длина соответствующего вектора в два раза меньше, чем длина вектора  $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ . Таким образом, амплитуда  $U(P)$  в точке наблюдения определяется суммой двух векторов:

$$U(P) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3.$$

Поскольку  $|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2| = 2|\mathbf{OO}_\infty|$  и  $|\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3| \approx 0$  (для нескольких первых зон Френеля радиус спирали считаем неизменным), интенсивность в точке наблюдения равна:

$$I(P) = 4I_0.$$

**Замечание.**

Разбиение на простые объекты можно выполнить и по-другому (рис. 4.11). В этом случае

$$U(P) = \frac{1}{2}A_1A_2 + \frac{1}{2}A_1A_3,$$

что приводит к тому же результату, поскольку  $A_1A_2 \approx A_1A_3$ .

**Ответ:**  $I(P) = 4I_0$ .

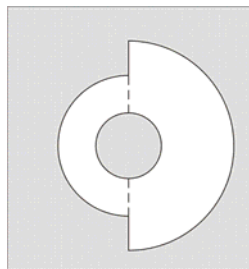


Рис.4.11. Разбиение отверстия в экране на простые объекты

**Задача 4.2.4.** Плоская световая волна с длиной  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на экран (рис. 4.12). Перед экраном на некотором расстоянии  $b$  устанавливают стеклянную пластинку радиуса  $R$  с показателем преломления  $n$ . Найти расстояние  $b$  и толщину пластинки  $d$ , при которых интенсивность дифракционной картины в точке  $P$ : 1) максимальна; 2) равна нулю.

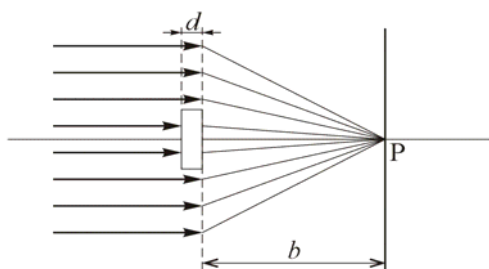


Рис.4.12. Формирование дифракционной картины при наличии стеклянной пластинки

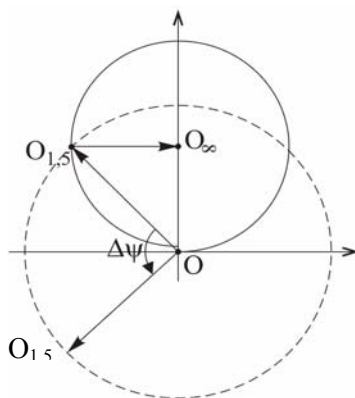


Рис.4.13. Определение комплексной амплитуды с помощью векторной диаграммы для случая  $m=1,5$

**Решение**

Для точки  $P$  пластинка перекрывает  $m = R^2/(\lambda b)$  зон Френеля и вносит дополнительную разность фаз  $\Delta\psi = k(n-1)d = \frac{2\pi d}{\lambda}(n-1)$ .

Следовательно, варьируя  $b$  и  $d$ , можно получить любые значения  $m$  и  $\Delta\psi$ .

Пусть, например, пластинка закрывает  $m$  зон Френеля. Если в отсутствие пластинки комплексная амплитуда поля  $U(P)$  представима в виде суммы (на рис. 4.13  $m = 1,5$ ):

$$U(P) = \mathbf{OO}_m + \mathbf{O}_m \mathbf{O}_\infty = \mathbf{OO}_\infty,$$

то дополнительную разность фаз можно учесть, повернув вектор  $\mathbf{OO}_m$  против часовой стрелки на угол  $\Delta\psi$  (конец вектора  $\mathbf{OO}'_m$  будет лежать на окружности радиуса  $|\mathbf{OO}_m| = |\mathbf{OO}'_m|$ ). Поэтому после установки пластинки амплитуда поля  $U'(P)$  равна:

$$U'(P) = \mathbf{OO}'_m + \mathbf{O}_m \mathbf{O}_\infty.$$

1) Амплитуда  $U'(P)$  будет максимальной, если, во-первых, векторы  $\mathbf{OO}'_m$  и  $\mathbf{O}_m \mathbf{O}_\infty$  сонаправлены, и во-вторых, длина вектора  $\mathbf{OO}_m$  максимальна (длина вектора  $\mathbf{O}_m \mathbf{O}_\infty$  при малых  $m$  не зависит от  $m$  и всегда равна  $|\mathbf{OO}_\infty| = \sqrt{I_0}$ ).

Следовательно,

$$m = 1, 3, 5, \dots, 2l + 1, \dots \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$$

$$|\mathbf{OO}_m| = 2|\mathbf{OO}_\infty| = 2\sqrt{I_0},$$

$$\Delta\psi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \pi(2q + 1), \dots$$

$$(q = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда

$$b = \frac{R^2}{\lambda m} = \frac{R^2}{\lambda(2l + 1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$$

$$d = \frac{\lambda(2q + 1)}{2(n - 1)} \quad (q = 0, 1, 2, \dots),$$

$$I_{\max} = (2\sqrt{I_0} + \sqrt{I_0})^2 = 9I_0.$$

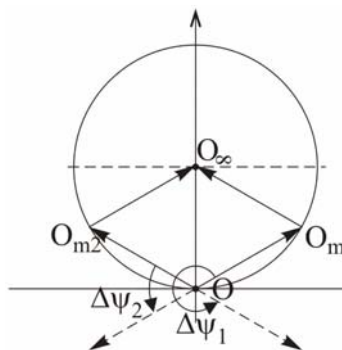


Рис.4.14. Два возможных случая направления вектора  $\mathbf{OO}_{m1}$  и  $\mathbf{OO}_{m2}$

2) Амплитуда  $U'(P)$  будет минимальна (равна нулю), если, во-первых, векторы  $\mathbf{OO}'_m$  и  $\mathbf{O}_m \mathbf{O}_\infty$  направлены в

противоположные стороны и, во-вторых, их длины равны. На рис. 4.14. показаны два возможных случая:

$$m_1 = \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}, \dots, \left(\frac{1}{3} + 2l\right), \dots (l = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_2 = 1\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}, 5\frac{2}{3}, \dots, \left(1\frac{2}{3} + 2l\right), \dots (l = 0, 1, 2, \dots)$$

(треугольники  $OO_{m1}O_\infty$  и  $OO_{m2}O_\infty$  – равносторонние). Отсюда

$$\Delta\psi_1 = \frac{5}{3}\pi + 2\pi q \quad (q = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\Delta\psi_2 = \frac{1}{3}\pi + 2\pi q \quad (q = 0, 1, 2, \dots),$$

**Ответ:** 1)  $b = \frac{R^2}{\lambda m} = \frac{R^2}{\lambda(2l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$

$$d = \frac{\lambda(2q+1)}{2(n-1)} \quad (q = 0, 1, 2, \dots),$$

2)  $b_{1,2} = \frac{R^2}{\lambda m_{1,2}}, \quad d_{1,2} = \frac{\lambda}{n-1} \cdot \frac{\Delta\psi_{1,2}}{2\pi}.$

**Задача 4.2.5.** Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Для точки наблюдения Р, находящейся на расстоянии  $b$  от экрана, отверстие открывает три зоны Френеля. В отверстие вставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f$ . Найти:

1) интенсивность света в точке Р, если: а)  $f = b$ ; б)  $f = 2b$ ; в)  $f = b/2$ ;

2) распределение интенсивности вдоль оси линзы, если  $f = b$ .

### Решение

1) Для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии  $r$  от его центра, разность хода  $\Delta s_0(r)$  в соответствии с (4.6) равна:

$$\Delta s_0(r) = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r^2}{2b}$$

(для плоской волны  $a = \infty$ ).



Учитывая, что собирающая линза вносит дополнительную разность хода

$$\Delta s_{\text{л}}(r) = -\frac{r^2}{2f} < 0$$

(поскольку толщина собирающей линзы в центре больше, чем на периферии), для суммарной разности хода получаем:

$$\Delta s(r) = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right).$$

1а) Если  $f = b$ , то для *всех* вторичных источников разность хода  $\Delta s_a(r) = 0$ , т.е. участок спирали  $OO_3$  «вытянут» в прямую линию  $OO_{3a}$  (рис. 4.15). Полагая, что радиус спирали  $R$  пропорционален  $\sqrt{I_0}$  и длина участка спирали  $OO_3$  (а не вектора  $OO_3$ ) равна  $3\pi R$ , для интенсивности в точке  $P$  (в фокальной плоскости линзы) получаем:

$$I_a = (3\pi R)^2 = 9\pi^2 \cdot I_0 \approx 89I_0.$$

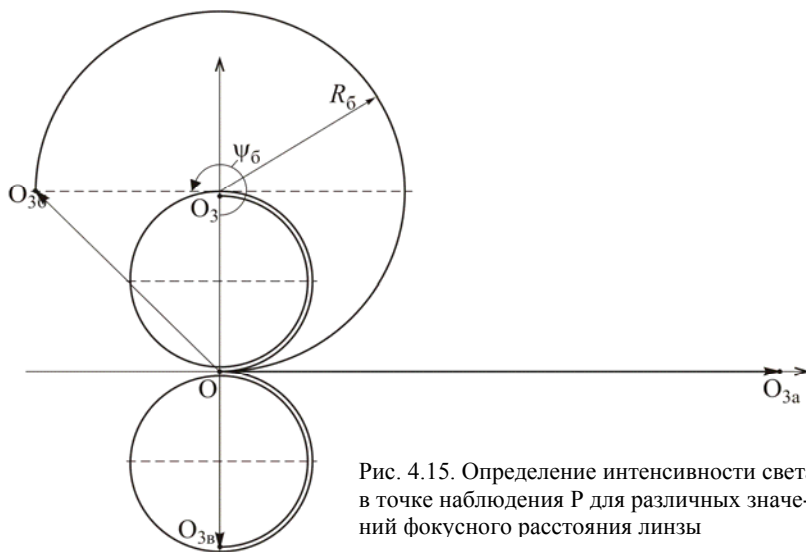


Рис. 4.15. Определение интенсивности света в точке наблюдения  $P$  для различных значений фокусного расстояния линзы

1б) Если  $f = 2b$ , то разность хода (при  $r = r_0$ ):

$$\Delta s_6(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{2b} \right) = \frac{r_0^2}{4b} = \frac{\Delta s(r_0)}{2} = \frac{1}{2} \frac{3\lambda}{2},$$

а соответствующая разность фаз –

$$\psi_6(r_0) = k \cdot \Delta s_6(r_0) = \frac{k \cdot \Delta s(r_0)}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

так как отверстие открывает три зоны Френеля. Следовательно, участок спирали  $OO_3$  "раскрутится" (но не до конца, рис. 4.15), при этом длина дуги  $OO_{36}$  останется равной длине участка спирали  $OO_3$  (число вторичных источников не изменилось). Чтобы найти амплитуду  $A_6$  в точке Р (она равна длине вектора  $OO_{36}$ ), необходимо найти радиус  $R_6$  дуги соответствующей окружности:

$$3\pi R = \frac{3\pi}{2} R_6,$$

откуда  $R_6 = 2R$ .

Для длины  $|OO_{36}|$  получаем:

$$|OO_{36}| = 2R_6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi - \psi_6}{2}\right) = 4R \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 4R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}R,$$

поэтому при  $f = 2b$  интенсивность в точке Р равна

$$I_6 = |OO_{36}|^2 = 8I_0.$$

1в) Если  $f = b/2$ , то

$$\Delta s_B(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{1}{b} - \frac{2}{b} \right) = -\frac{r_0^2}{2b} = -\Delta s_0(r_0),$$

$$\psi_B(r_0) = -\psi_0(r_0) = -3\pi.$$

Как видно из рис. 4.15, в этом случае участок спирали  $OO_3$  "перераскручивается", и спираль  $OO_{3B}$  представляет собой симметричное отражение спирали  $OO_3$  относительно горизонтальной оси. Поэтому

$$R_B = 2R, \quad I_B = 4I_0,$$

т.е. интенсивность такая же, как и в отсутствие линзы.

2) Для исследования распределения интенсивности света вдоль оси линзы выберем в качестве начала отсчета на оси  $x$  (совпадает с осью линзы) положение точки Р. В отсутствие линзы зависимость разности фаз  $\psi(x)$  для крайнего и центрального лучей (4.8) при  $x > -b$  имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{k \cdot r_0^2}{2} \cdot \frac{1}{(b+x)} = \psi(0) \cdot \frac{b}{b+x},$$

где  $\psi(0) = \frac{k \cdot r_0^2}{2b} = \frac{\pi r_0^2}{\lambda b}$  – разность фаз в точке Р ( $x=0$ ). На спирали Френеля (рис. 4.16 а и 4.16 б) этой разности фаз  $\psi(x)$  соответствует точка  $O_x$ .

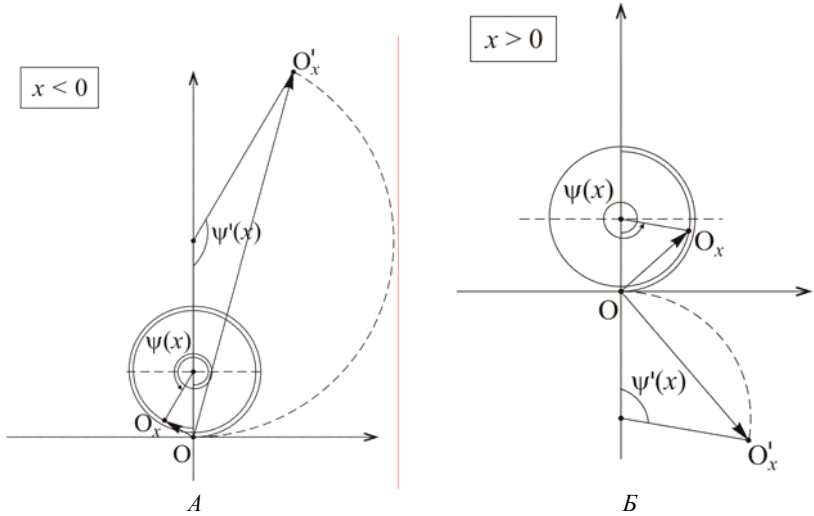


Рис.4.16. К вопросу о разности фаз для крайнего и центрального лучей с учетом действия линзы:  $x < 0$  (а) и  $x > 0$  (б)

При установке линзы с фокусным расстоянием  $f = b$  возникает дополнительная разность фаз  $\psi_{\text{л}} = -k r_0^2 / (2b) = -\psi(0) < 0$ , поэтому суммарная разность фаз  $\psi'(x)$  становится равной

$$\psi'(x) = \psi(x) + \psi_{\text{л}} = -\psi(0) \cdot \frac{x}{b+x},$$

при этом  $\psi'(x) > 0$ , если  $-b < x < 0$ , и  $\psi'(x) < 0$ , если  $x > 0$ .

Участок спирали  $OO_x$  "раскрутится" (рис. 4.16) и трансформируется в дугу окружности  $OO'_x$ . Так как длины дуг  $OO_x$  и  $OO'_x$  одинаковы (число вторичных источников не изменилось), то для радиуса  $R'(x)$  дуги  $OO'_x$  получаем:

$$R'(x) = R \cdot \frac{|\psi(x)|}{|\psi'(x)|} = R \cdot \frac{b}{|x|}.$$

Амплитуда  $A'(x)$  равна длине вектора  $OO'_x$ , поэтому

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2R'(x) \cdot \sin \left| \frac{\psi'(x)}{2} \right| = 2R \cdot \frac{b}{|x|} \cdot \sin \left| \psi(0) \cdot \frac{x}{2(b+x)} \right| = \\ &= R \cdot \psi(0) \cdot \frac{b}{b+x} \cdot \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

где  $\varphi(x) = \left| \psi(0) \cdot \frac{x}{2(b+x)} \right|$ .

Так как по условию задачи  $\psi(0) = 3\pi$ , то для интенсивности на оси линзы получаем:

$$I = I_a \cdot \left( \frac{b}{b+x} \right)^2 \left( \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^2,$$

где  $I_a = 9\pi^2 \cdot I_0$ .

Заметим наперед, что похожая зависимость имеет место в случае дифракции Фраунгофера на щели. Примерный вид зависимости  $I(x)$  показан на рис. 4.17 а. Для сравнения на рис. 4.17 б приведена зависимость  $I(x)$  в случае  $\psi(0) = 15\pi$ .

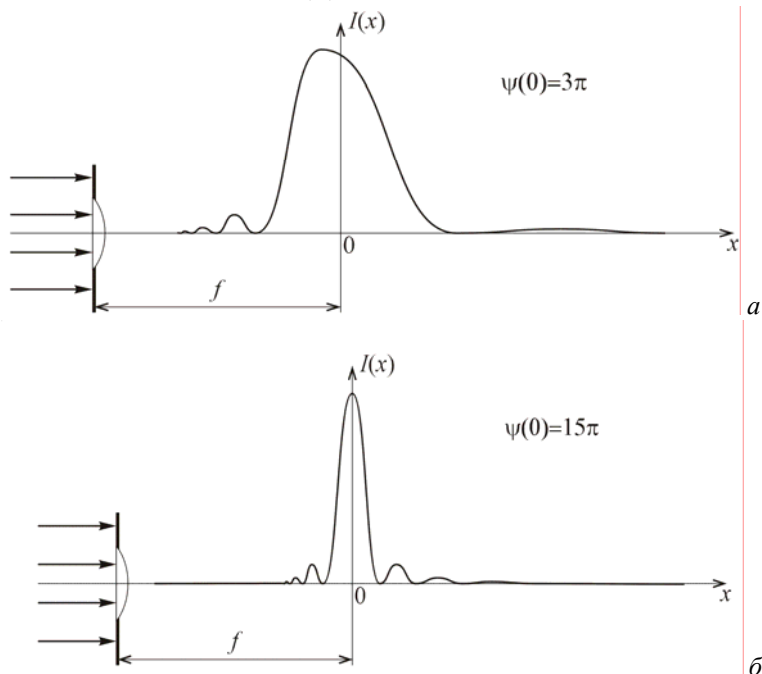


Рис. 4.17. Распределение интенсивности  $I(x)$

Размер  $H$  (вдоль оси  $x$ ) яркого дифракционного максимума в фокальной плоскости линзы ( $x=0$ ) можно оценить, исходя из условия  $\varphi(x_{1,2}) = \pm\pi$  ( $x_{1,2}$  – координаты ближайших к максимуму минимумов):

$$x_1 = \frac{2b}{r_0^2/(\lambda b) - 2} > 0; \quad x_2 = \frac{-2b}{r_0^2/(\lambda b) + 2} < 0;$$

$$H = x_1 - x_2 = \frac{4b \cdot \frac{r_0^2}{\lambda b}}{\left(\frac{r_0^2}{\lambda b}\right)^2 - 4} = \frac{4b \cdot m}{m^2 - 4},$$

где  $m = \psi(0)/\pi$ . Если  $m = 3$ , то  $H = 2,4b$ ; если  $m=15$ , то  $H = 0,27b$ . С ростом  $m$  размер "пятна" стремится к нулю по закону:  $H \approx 4b/m$ .

**Ответ:**

1а)  $I_a = 89I_0$ ; 1б)  $I_\sigma \approx I_0$ ; 1в)  $I_\epsilon = 4I_0$ .

2)  $I = I_a \cdot \left(\frac{b}{b+x}\right)^2 \left(\frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}\right)^2$ .

**Задача 4.2.6.** Плоская монохроматическая волна падает на *зонную пластинку* – экран с последовательно чередующимися прозрачными и непрозрачными кольцами (рис. 4.18), площади которых одинаковы и равны  $S_0$ . Исследовать особенности дифракции света на таком объекте.



Рис. 4.18. Зонная пластинка

**Решение**

Пусть центральная зона пластинки прозрачна. Найдем расстояние  $b_1$  от пластинки, на котором эта зона для точки Р будет совпадать с первой зоной Френеля (рис. 4.19).

В соответствии с формулой (4.7):

$$b_1 = \frac{r_1^2}{\lambda},$$

где  $r_1 = \sqrt{S_0/\pi}$  – радиус центральной зоны. Вклад в комплексную амплитуду  $U(P)$  поля от этого участка определяется вектором

$\mathbf{OO}_1$ . Так как площади всех колец зонной пластинки одинаковы, то для точки P будут открыты все нечетные зоны Френеля и закрыты все четные (рис. 4.20), поэтому

$$U(P) = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_2\mathbf{O}_3 + \mathbf{O}_4\mathbf{O}_5 + \dots + \mathbf{O}_{2m-2}\mathbf{O}_{2m-1},$$

где  $m$  – число прозрачных колец в пластинке. Все эти векторы имеют одно и то же направление, а их длину можно считать приблизительно равной удвоенному радиусу  $R$  спирали Френеля (напомним, что радиус спирали  $R$  пропорционален  $\sqrt{I_0}$ ).

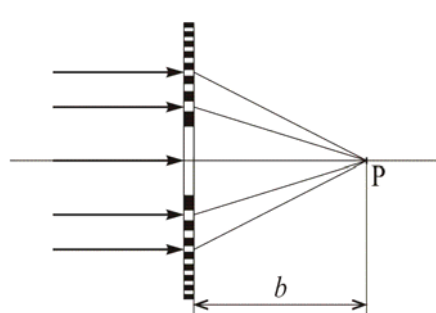


Рис. 4.19. Положение точки P относительно зонной пластинки

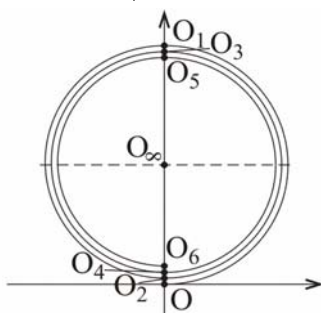


Рис. 4.20. Фрагмент спирали Френеля

Следовательно,

$$|U(P)| \approx 2mR,$$

$$I(P) \approx 4m^2 \cdot I_0 \gg I_0,$$

т.е. зонная пластинка действует как собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = b_1$ . (Заметим, однако, что в случае линзы такого же размера интенсивность будет в  $\pi^2$  раз больше.)

Если приближать точку наблюдения к зонной пластинке, то число зон Френеля в пределах центральной прозрачной зоны пластинки будет возрастать и для некоторой точки  $P_3$  достигнет трех. А это значит, что для точки  $P_3$  первые три зоны Френеля открыты, следующие три – закрыты, и т.д.:

$$U(P_3) = \mathbf{OO}_3 + \mathbf{O}_6\mathbf{O}_9 + \mathbf{O}_{12}\mathbf{O}_{15} + \dots$$

Точку  $P_3$  также называют фокусом зонной пластинки:

$$f_2 = \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{\lambda} = \frac{f}{3},$$

однако интенсивность света в точке  $P_3$  будет меньше, чем в первом фокусе.

При дальнейшем приближении точки  $P$  к зонной пластинке можно обнаружить и другие фокусы, для которых центральная зона пластинки открывает нечетное число первых зон Френеля:

$$f_m = \frac{f}{2m-1}, \quad m=1, 2, \dots$$

**Задача 4.2.7.** На расстоянии  $a$  от точечного монохроматического источника света расположен непрозрачный экран с узкой щелью шириной  $d \ll a$ . Дифракционную картину наблюдают на экране, который находится за щелью на расстоянии  $b=a$ .

1) При какой длине волны  $\lambda$  источника в центре картины будет наиболее интенсивный максимум?

2) Чему равно отношение интенсивности в центре картины и на границе геометрической тени?

3) Как изменится интенсивность в центре картины, если  $b$  уменьшить в два раза?

### Решение

Схема эксперимента показана на рис. 4.21 ( $P_0$  – источник света,  $P$  – центр дифракционной картины,  $A_1$  и  $A_2$  – границы щели,  $P_1$  – граница геометрической тени на экране,  $\xi$  – координаты точек в плоскости щели).

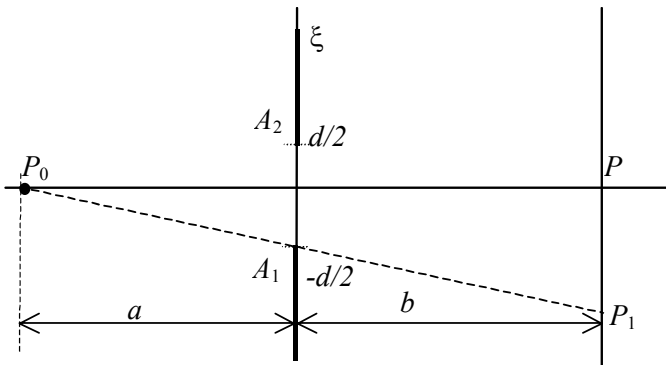


Рис. 4.21. Схема эксперимента

Для нахождения амплитуды поля в т. Р, как и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии, разобьем щель на равные по площади подзоны в виде узких бесконечно длинных полосок одинаковой ширины  $\Delta\xi$ .

В этом случае векторы, характеризующие вклад каждой подзоны в комплексную амплитуду поля в т. Р, будут иметь одинаковую длину, однако разность фаз для соседних подзон уже не будет одной и той же, как это было при расчете дифракции на круглом отверстии. Эта разность фаз будет практически равна нулю для подзон, близких к центру щели, и растет по мере удаления от него. В результате векторная диаграмма имеет вид спирали (рис. 4.22), называемой *спиралью Корню*. С помощью спирали Корню достаточно просто рассчитывать распределение поля не только при дифракции Френеля на щели, но и на крае экрана, проволоке.

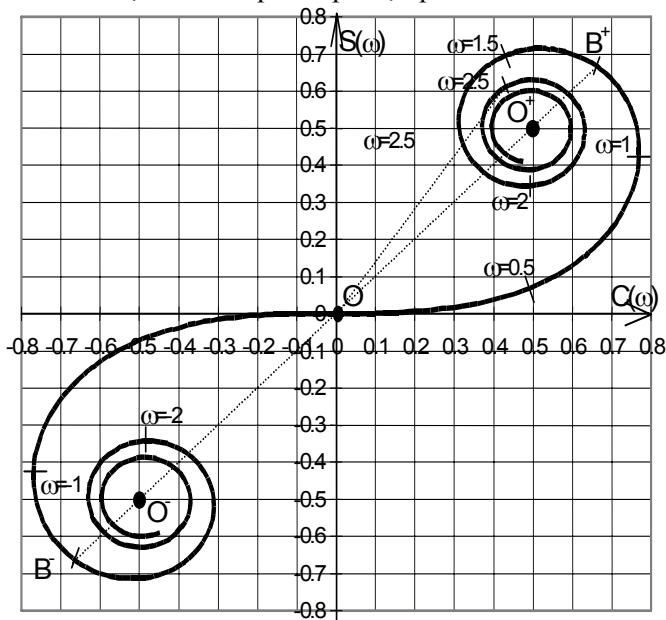


Рис. 4.22. Спираль Корню

Спираль Корню задается в параметрическом виде с помощью интегралов Френеля:

$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau,$$



$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau,$$

где  $\omega$  — параметр спирали Корню (обоснованность применения этих формул для дифракции в данном случае можно найти в литературе). Интегралы Френеля не могут быть вычислены аналитически, для них существуют таблицы.

Спираль Корню строится следующим образом. В качестве декартовых координат берутся значения интегралов  $C(\omega)$  и  $S(\omega)$ . Выбирается произвольное значение  $\omega$ , вычисляются значения интегралов Френеля, тем самым находится точка с координатами  $C(\omega)$  и  $S(\omega)$ , которая и является точкой на спирали. Параметр  $\omega$  изменяется на всей числовой оси. Поскольку

$$C(\infty) = -C(-\infty) = \frac{1}{2}; \quad S(\infty) = -S(-\infty) = \frac{1}{2},$$

то точки  $O^{“+”}$  и  $O^{“-”}$  с координатами  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  и  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  являются *фокусами* спирали Корню. Как видно из рис. 4.22, спираль Корню проходит через начало координат и асимметрична относительно обеих осей. Она имеет две ветви (положительную и отрицательную), каждая из которых выходит из начала координат и приходит в свой фокус.??????

Так как спираль образует векторы, соответствующие вкладам от соответствующих подзон, то длина участка спирали от начала координат до любой ее точки пропорциональна координате  $\xi$  (см. рис. 4.21) в плоскости щели. Можно показать, что безразмерный параметр  $\omega$  равен длине участка спирали, отсчитываемой от начала координат, при этом он связан с координатой  $\xi$  следующим соотношением (вывод этого соотношения можно найти в литературе):

$$\omega(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot \xi. \quad (4.12)$$

1) Для нахождения амплитуды поля в центре дифракционной картины поступают следующим образом. Для известных значений координат  $\xi_1$  и  $\xi_2$  точек  $A_1$  и  $A_2$  на краях щели по формуле (4.12) находят соответствующие значения параметров  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Длина

вектора, соединяющего эти точки на спирали, пропорциональна амплитуде поля в центре дифракционной картины.

По условию задачи в центре дифракционной картины наиболее интенсивный максимум. Из рис. 4.22 следует, что в этом случае края щели должны соответствовать точкам  $B^-$  и  $B^+$  на спирали Корню с координатами  $\omega_1 \approx -1,25$  и  $\omega_2 \approx 1,25$ . Так как  $\xi_1 = -d/2$ ,  $\xi_2 = -\xi_1 = d/2$ ,  $a = b$ , то из формулы (4.12) получим:

$$\lambda = 2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \left( \frac{\xi_2}{\omega_2} \right)^2 = \frac{4}{a} \cdot \left( \frac{d}{2,5} \right)^2 \approx \frac{16d^2}{25a} = 0,64 \frac{d^2}{a}.$$

2) В отличие от спирали Френеля, спираль Корню позволяет находить поле в любой точке дифракционной картины. Найдем поле в точке  $P_1$ , соответствующей границе геометрической тени (рис. 4.21). Соединим точки  $P_0$  и  $P_1$  и найдем точку пересечения этой прямой с плоскостью щели (в данном случае это будет точка  $A_1$ ). Так как  $d \ll a, b$ , то можно считать, что прямая  $P_0P_1$  перпендикулярна плоскости щели, поэтому разбиение на подзоны и построение спирали Корню следует начать именно от точки пересечения  $A_1$ . С этой точкой можно совместить и начало координат оси  $O\xi$ , т.е.  $\xi_n = 0$ . Тогда новые значения координат краев щели будут равны соответственно  $\xi_{1n} = 0$  и  $\xi_{2n} = d$ , а следовательно  $\omega_{n1} = 0$  и  $\omega_{2n} = 2\omega_2 \approx 2,5$ . (Отметим, что  $\omega_{2n} - \omega_{n1} = \omega_2 - \omega_1$ , т.к. число открытых подзон осталось неизменным.)

Измерив линейкой длины отрезков от  $\omega_1 \approx -1,25$  до  $\omega_2 \approx 1,25$  и от  $\omega_{1n} = 0$  до  $\omega_{2n} \approx 2 \cdot 1,25 = 2,5$ , которые пропорциональны амплитудам поля в точках  $P$  и  $P_1$ , для отношения интенсивностей получим:

$$\frac{I_n}{I} \approx (0,41)^2 \approx 0,17.$$

3) Если  $b_n = a/2$ , то соответствующая координата  $\omega'$  на спирали может быть найдена с помощью (4.12) из отношения:

$$\frac{\omega'}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} = \sqrt{\frac{3/a}{2/a}} = \sqrt{1,5} \approx 1,2; \quad \omega' \approx 1,2 \cdot 1,25 = 1,5.$$

Измерив длины отрезков от  $\omega_1 \approx -1,25$  до  $\omega_2 \approx 1,25$  и от  $\omega_3 = -\omega' \approx -1,5$  до  $\omega_4 = \omega' \approx 1,5$ , которые пропорциональны амплитудам поля в центре картины, для отношения интенсивностей получим:

$$I'/I \approx (0,89)^2 \approx 0,78.$$

**Ответ:** 1)  $\lambda = 0,64 \frac{d^2}{a}$ ; 2)  $\frac{I_H}{I} \approx 0,17$ ; 3)  $\frac{I'}{I} \approx 0,78$ .

### 4.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.3.1.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный экран с отверстием радиуса  $r$ , которое открывает для точки наблюдения  $P$  первую зону Френеля. Как следует изменить радиус отверстия, чтобы в точке  $P$  наблюдался: а) первый минимум; б) второй максимум?

**Ответ:** увеличить до а)  $r\sqrt{2}$ ; б)  $r\sqrt{3}$ .

**Задача 4.3.2.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения  $P$  первые три зоны Френеля. Как изменится интенсивность в точке  $P$ , если расстояние до диска: а) уменьшить в три раза; б) увеличить в два раза?

**Ответ:** не изменится в обоих случаях.

**Задача 4.3.3.** Точечный источник  $P_0$  монохроматического света с длиной волны  $\lambda$  находится на расстоянии  $a$  перед непрозрачным экраном с круглым отверстием, а точка наблюдения  $P$  – за экраном на расстоянии  $b$ . Каким должен быть минимальный радиус отверстия, чтобы интенсивность в точке наблюдения была такой же, как и в отсутствие экрана?

**Ответ:**  $\sqrt{\frac{\lambda \cdot a \cdot b}{3(a+b)}}$ .

**Задача 4.3.4.** Диск из стекла с показателем преломления  $n$  закрывает внутреннюю половину (по площади) первой зоны Френеля. При какой толщине  $d$  диска освещенность в центре картины будет минимальной?

**Ответ:**  $\frac{\lambda \cdot (7/4 + m)}{n - 1}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

**Задача 4.3.5.** Плоская световая монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на задней стороне которой сделана круглая выемка. Для точки наблюдения Р радиус выемки равен радиусу первых полутора зон Френеля. Какое минимальное значение интенсивности можно получить, изменяя глубину выемки?

**Ответ:**  $(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot I_0 \approx 0,17 \cdot I_0$ .

**Задача 4.3.6.** Интенсивность света в точке Р в отсутствие каких-либо препятствий равна  $I_0$ . На пути светового пучка ставят кольцо, внешний край которого совпадает с краем первой зоны Френеля для точки Р, а площадь кольца равна половине площади первой зоны Френеля. Верхняя половина кольца сделана из непрозрачного материала, а нижняя – из материала, вносящего дополнительную разность хода  $\lambda/2$ . Найти интенсивность света в точке Р.

**Ответ:**  $2,5 \cdot I_0$ .

**Задача 4.3.7.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения Р первые три зоны Френеля. Как изменится интенсивность в точке Р, если в отверстие вставить линзу с фокусным расстоянием, равным расстоянию от отверстия до точки Р?

**Ответ:** увеличится в  $9\pi^2/4$  раз.

**Задача 4.3.8.** Плоская световая волна падает нормально на круглое отверстие. Если увеличивать радиус отверстия от нулевого значения до  $r_0$ , интенсивность света в точке наблюдения возрастает до значения  $I_0$ , равного интенсивности падающего излучения в отсутствие препятствия. Найти ближайшее к  $r_0$  значение радиуса  $r$  отверстия, при котором интенсивность в точке наблюдения вновь окажется равной  $I_0$ .

**Ответ:**  $r = r_0 \sqrt{5}$ .

**Задача 4.3.9.** Точечный монохроматический источник света и точка наблюдения находятся на одинаковых расстояниях  $a$  по разные стороны от непрозрачного экрана с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения  $m$  зон Френеля. Как изменится число открытых зон Френеля, если экран передвинуть в направлении источника на расстояние  $a/2$ ?

**Ответ:** увеличится в  $4/3$  раз.

**Задача 4.3.10.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на узкую длинную щель. В центре дифракционной картины, наблюдаемой на экране, расположенном на расстоянии  $b$  от плоскости щели, находится наиболее глубокий минимум. На какое расстояние и в каком направлении следует переместить экран, чтобы в центре картины оказался наиболее интенсивный максимум?

**Ответ:**  $\Delta b = b_{\max} - b = b \cdot \left( \left( \frac{\omega_{\min}}{\omega_{\max}} \right)^2 - 1 \right) > 0$ , где  $\omega_{\max} \approx 1,25$ ,

$\omega_{\min} \approx 1,9$ .

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, глава VIII.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, §§39 -43.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§31,32.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, §§61,62.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §4.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §6.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §4.3.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел V.

## Глава 5

## ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

## 5.1. Теоретическое введение

Дифракцию света в дальней зоне, т.е. на таких расстояниях от объекта, когда для точки наблюдения открыто менее одной (первой) зоны Френеля, называют *дифракцией Фраунгофера*. Отличительной особенностью дифракции Фраунгофера является устойчивость углового распределения интенсивности в поле дифрагировавшего света. В этой связи обычно используют собирающую линзу, в фокальной плоскости которой и наблюдают дифракционную картину.

Пусть плоская монохроматическая световая волна с длиной  $\lambda$  падает нормально на экран, в котором вырезана узкая длинная щель ширины  $b$  с прямыми параллельными границами (рис. 5.1). Разобьем пространство щели на  $N$  элементарных длинных полосок одинаковой ширины  $dx = b/N$ . Каждую из таких полосок можно рассматривать как источник вторичных (цилиндрических) волн.

Вклад в комплексную амплитуду поля в точке наблюдения  $P$  (в фокальной плоскости линзы) от  $i$ -ой полоски будет изображаться на комплексной плоскости вектором  $d\mathbf{A}_i$ , длина которого пропорциональна произведению амплитуды падающей волны на ширину полоски  $dx$  (рис. 5.2). При этом разность фаз  $d\psi$  между волнами, излучаемыми соседними полосками под углом  $\varphi$  к направлению па-

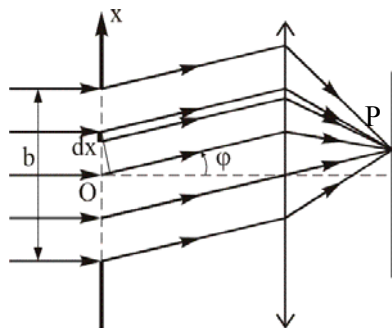


Рис. 5.1. Наблюдение дифракции Фраунгофера на щели с помощью собирающей линзы

дающей волны, будет равна

$$d\psi = k \cdot dx \cdot \sin \varphi, \quad (5.1)$$

где  $k$  – волновое число.

Комплексная амплитуда поля  $A(\varphi)$  равна сумме векторов:

$$\mathbf{A}(\varphi) = \sum_{i=1}^N d\mathbf{A}_i .$$

В центре дифракционной картины ( $\varphi = 0$ ), куда вторичные волны приходят в одной фазе (рис. 5.2, *a*), модуль вектора  $A(0)$  максимален, а его значение пропорционально амплитуде падающей волны и ширине щели  $b$ .

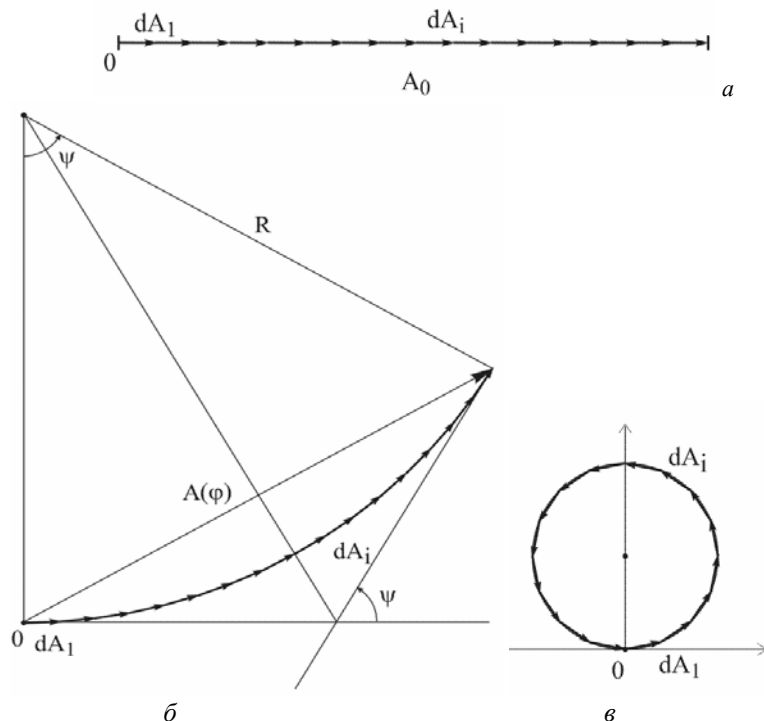


Рис. 5.2. Векторные диаграммы: *a* – для центра дифракционной картины ( $\varphi = 0$ ), *б* – для угла дифракции  $\varphi$ , *в* – для направления  $\varphi_m$  на дифракционный минимум  $m$ -го порядка

Для угла дифракции  $\varphi$  каждый из одинаковых по длине векторов  $d\mathbf{A}_i$  будет повернут относительно предыдущего вектора на один и тот же угол  $d\psi$  (рис. 5.2б). В результате получившаяся цепочка векторов образует дугу окружности, длина которой примерно равна  $A_0$ , а угол  $\psi$  между крайними векторами равен

$$\psi = k \cdot b \cdot \sin \varphi . \quad (5.2)$$

Хорда, стягивающая получившуюся дугу, и будет являться комплексной амплитудой поля  $A(\varphi)$ . Из рис. 5.2б несложно получить выражение для амплитуды:

$$A(\varphi) = 2R \cdot \sin(\psi/2) = 2 \frac{A_0}{\psi} \cdot \sin(\psi/2) = A_0 \cdot \frac{\sin(\psi/2)}{\psi/2} = A_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{kb \sin \varphi}{2}}.$$

Поскольку интенсивность света  $I \sim A^2$ , то

$$I(\varphi) = I(0) \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{b \sin \varphi}{\lambda}\right). \quad (5.4)$$

График зависимости  $I(\varphi)$  показан на рис. 5.3. В центре дифракционной картины интенсивность  $I(0)$  максимальна и пропорциональна квадрату ширины щели. Функция  $I(\varphi)$  обращается в нуль при условии

$$\sin \varphi_m = \pm m \frac{\lambda}{b}, \quad (5.5)$$

которое соответствует замыканию дуги фиксированной длины  $A_0$  в окружность после  $m$  оборотов, при этом разность фаз между волнами, идущими от крайних точек щели, равна  $\psi_m = 2\pi m$  (см. рис. 5.2в).

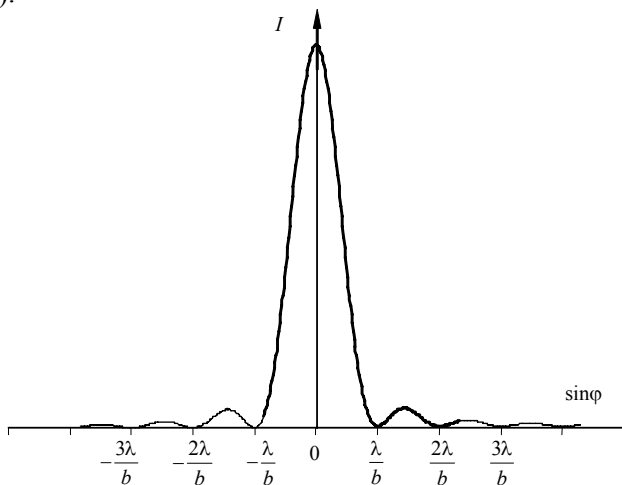


Рис. 5.3. Зависимость интенсивности  $I(\sin \varphi)$  при дифракции Фраунгофера на щели



При дифракции плоской волны с длиной  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  на круглом отверстии радиуса  $R$ , угловое распределение интенсивности поля за отверстием в дальней зоне описывается формулой:

$$I(\varphi) = I(0) \left[ \frac{J_1(2\pi R\varphi/\lambda)}{\pi R\varphi/\lambda} \right]^2, \quad (5.6)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка, а  $I(0) \sim I_0\pi R^2$ . Угловой радиус центрального дифракционного максимума в этом случае равен

$$\Delta\psi = 0,61 \frac{\lambda}{R}. \quad (5.7)$$

При нормальном падении плоской монохроматической волны на дифракционную решетку зависимость интенсивности от угла  $\varphi$  в дальней зоне дифракции имеет вид:

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2. \quad (5.8)$$

Здесь  $u = (kb \sin \varphi)/2 = (\pi b \sin \varphi)/\lambda$ ;  $\delta = (kd \sin \varphi)/2 = (\pi d \sin \varphi)/\lambda$ ;  $b$  – ширина щели;  $d$  – период решетки;  $N$  – число задействованных штрихов (щелей);  $I_0$  – интенсивность в центре картины, если открыта только одна щель. График зависимости  $I(\varphi)$  показан на рис. 5.4).

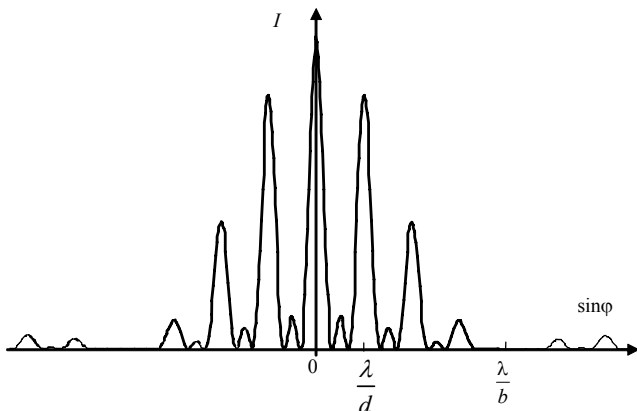


Рис. 5.4. Зависимость интенсивности  $I(\sin\varphi)$  при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке с  $N=3$  щелями.

Заметим, что поскольку  $I_0 \sim b^2$ , то  $I(\varphi=0) = N^2 I_0 \sim (Nb)^2$ .

## 5.2. Задачи с решениями

**Задача 5.2.1.** Одну половину длинной узкой щели шириной  $b$  перекрывают тонкой прозрачной пластиной с показателем преломления  $n$ . В результате интенсивность света в центре дифракционной картины уменьшается в два раза (рис. 5.5.). Найти толщину  $d$  пластины и интенсивность света в направлениях, соответствующих направлениям на дифракционные минимумы в отсутствие пластины.

**Решение**

При наличии стеклянной пластины волны от перекрытых ею вторичных источников испытывают дополнительную задержку по фазе на  $\delta = kd(n-1)$ . Следовательно, для угла дифракции  $\varphi = 0$  на векторной диаграмме (рис. 5.6) вектор  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ , равный половине вектора  $\mathbf{OO}_2$ , следует повернуть на угол  $\delta$  против часовой стрелки.

Так как по условию задачи  $I'(\varphi = 0) = I_0/2$ , то в центре картины амплитуда поля должна быть в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем в случае без пластины, т.е. длина вектора  $\mathbf{OO}'_2$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше длины вектора  $\mathbf{OO}_2$ . Из рис. 5.6. видно что,

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$d = \frac{\delta}{k(n-1)} = \frac{1+2m}{4(n-1)} \cdot \lambda. \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

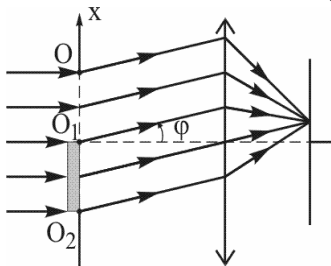


Рис. 5.5. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели

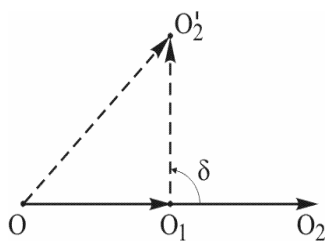


Рис. 5.6. Векторная диаграмма для угла дифракции  $\varphi = 0$

По аналогии для произвольного угла дифракции  $\varphi$  на такой же угол  $\delta$  следует повернуть вектор  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$  (рис. 5.7а, б), при этом ди-

фракционная картина окажется несимметричной относительно  $\varphi$  (рис. 5.7а соответствует случаю  $\varphi > 0$ , рис. 5.7б – случаю  $\varphi < 0$ ).

В отсутствие пластины для направлений на первый дифракционный минимум ( $\sin \varphi_{\pm 1} = \pm \lambda/b$ ) векторная диаграмма имеет вид окружности, длина которой равна длине вектора  $OO_2$  на рис. 5.6, и, следовательно, пропорциональна амплитуде поля в центре картины  $A_0$ . При наличии пластины, как видно из рис. 5.7в, амплитуда поля равна

$$A_{\pm 1} = 2\sqrt{2}R_1,$$

где  $R_1 = \frac{A_0}{2\pi}$  – радиус окружности векторной диаграммы. Для интенсивности  $I_{\pm 1}$  получим:  $I_{\pm 1} = A_{\pm 1}^2 = 8R_1^2 = 2I_0/\pi^2$ .

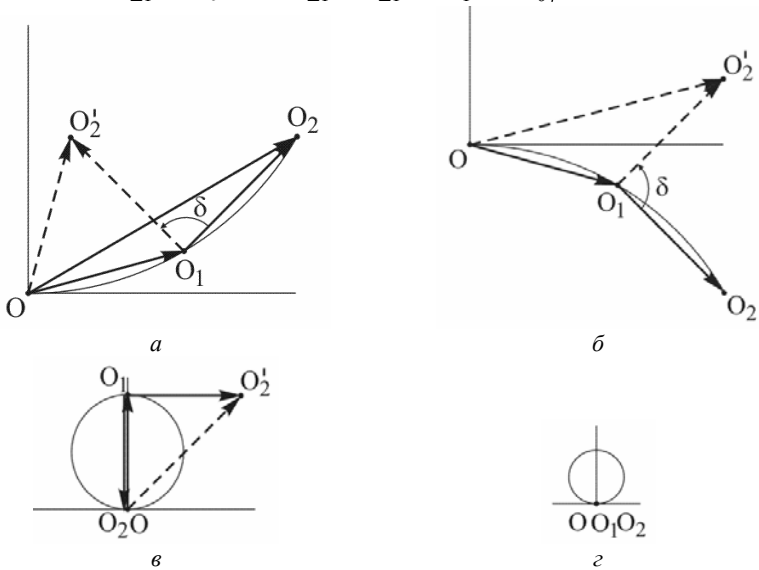


Рис. 5.7. Векторные диаграммы: для произвольного угла дифракции  $\varphi > 0$  (а) и  $\varphi < 0$  (б), для направлений на первый (в) и второй (з) дифракционный минимум

Для направлений на второй дифракционный минимум ( $\sin \varphi_{\pm 2} = \pm 2(\lambda/b)$ ) амплитуда поля остается равной нулю, так как на векторной диаграмме точки  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  совпадают (рис. 5.7з).

Аналогично, для всех последующих нечетных «минимумов» ( $m$  – номер минимума):

$$I_{\pm m} = A_{\pm m}^2 = 8R_m^2 = \frac{2I_0}{(m\pi)^2},$$

а для всех четных  $I_{\pm m} = 0$ .

**Ответ:**  $I_{\pm m} = \frac{2I_0}{(m\pi)^2}$ , если  $m$  – нечетное;

$I_{\pm m} = 0$ , если  $m$  – четное.

**Задача 5.2.2.** При выводе формул, описывающих дифракцию Фраунгофера, обычно рассматривают формирование дифракционной картины в фокальной плоскости собирающей линзы. Однако в реальных экспериментах зачастую обходятся без неё. На каком расстоянии от объекта (щель, отверстие) следует установить экран, чтобы дифракционная картина на нем описывалась теми же формулами, как и в случае с линзой?

### Решение

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны, например, на узкой щели. Если для получения дифракционной картины используется собирающая линза, то лучи от вторичных источников приходят в фокус линзы в одной фазе. Если линзу убрать, то разность хода для центрального и крайнего лучей будет равна

$$ds_0 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - L \approx L \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2L} \right)^2 \right) - L \approx \frac{b^2}{8L},$$

где  $b$  – ширина щели,  $L$  – расстояние от щели до экрана (рис. 5.8).

Принято считать, что амплитуда поля в центре картины изменится мало, если разность хода  $ds_0$  существенно меньше длины волны  $\lambda$ . Так, например, если  $ds_0 = \lambda/8$ , то справедливо соотношение  $b \leq \sqrt{L\lambda} = R_1$ , где  $R_1$  – радиус первой зоны Френеля.

Для произвольного угла дифракции  $\varphi$  разность хода  $\Delta s_0(\varphi)$  между крайними лучами при наличии линзы равна

$$\Delta s_0(\varphi) = b \cdot \sin \varphi.$$

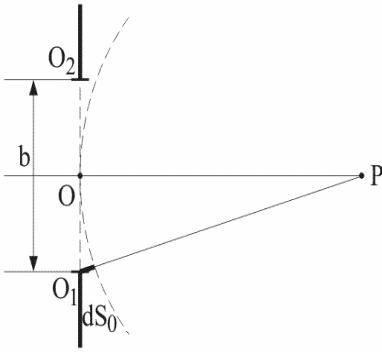


Рис. 5.8. Формирование дифракционной картины от щели в дальней зоне

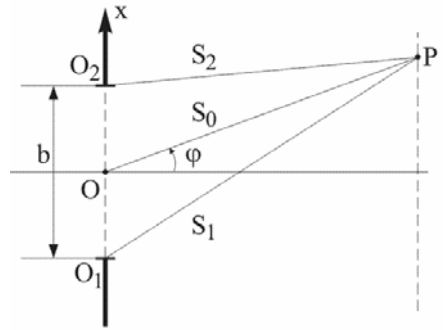


Рис. 5.9. К расчету разности хода  $\Delta s(\varphi)$  в отсутствие линзы

Рассчитаем разность хода  $\Delta s(\varphi)$  в отсутствие линзы (рис. 5.9). Так как

$$S_{1,2}^2 = S_0^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm 2S_0 \frac{b}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = S_0^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm S_0 b \cdot \sin \varphi$$

и

$$S_1^2 - S_2^2 = (S_1 - S_2)(S_1 + S_2) = 2S_0 b \cdot \sin \varphi,$$

то

$$\Delta s(\varphi) = S_1 - S_2 = \frac{2S_0}{S_1 + S_2} b \cdot \sin \varphi.$$

С другой стороны,

$$S_{1,2} = S_0 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2S_0}\right)^2 \pm \frac{b}{S_0} \sin \varphi} \approx S_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2S_0}\right)^2 \pm \frac{b}{2S_0} \sin \varphi\right),$$

поэтому

$$S_1 + S_2 = 2S_0 + \frac{b^2}{4S_0}$$

и

$$\Delta s(\varphi) = \frac{2S_0}{2S_0 + b^2/(4S_0)} b \cdot \sin \varphi \approx \left(1 - \frac{b^2}{8S_0^2}\right) \cdot b \cdot \sin \varphi.$$

Следовательно,  $\Delta s(\varphi) \approx \Delta s_0(\varphi)$ , если  $\frac{b^2}{8S_0^2} \approx \frac{b^2}{8L^2} \ll 1$ . Это условие

автоматически выполняется при  $b \leq \sqrt{L\lambda} = R_1$ .

Следовательно, приближение Фраунгофера применимо, если для данного  $L$  характерный размер объекта меньше ширины первой зоны Френеля.

При наличии линзы дифракционная картина локализована в фокальной плоскости. В этом случае при падении плоской монохроматической волны на препятствие радиус первой зоны Френеля бесконечно большой, и при любых размерах препятствия «работает» приближение Фраунгофера.

Таким образом, искомое расстояние  $L$  определяется из условия:

$$L > \frac{b^2}{\lambda}.$$

Например, при дифракции света с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм на объекте с характерным размером  $b = 100$  мкм, экран следует устанавливать на расстоянии не менее  $L = 2$  см, а при  $b = 1$  мм расстояние  $L$  от препятствия до экрана должно быть не менее 2 метров.

**Замечание.** При отсутствии линзы распределение поля на экране может быть оценено с помощью спирали Корню (рис. 5.10). Положение точки на спирали задается так называемым параметром спирали  $\omega$ , значение которого равно длине дуги спирали, отсчитываемой от начала координат (точка  $O$  на спирали). Можно показать (см. гл. 4), что если ширина щели равна радиусу первой зоны Френеля, то вектор, характеризующий амплитуду поля в центре картины, соединяет точки  $\omega_1 = -1/\sqrt{2}$  и  $\omega_2 = 1/\sqrt{2}$  (рис. 5.11а), при этом амплитуда поля (длина вектора) примерно равна амплитуде в отсутствие препятствия (длине вектора  $O^-O^+$ , соединяющего фокусы спирали).

Первому дифракционному минимуму соответствует вектор, соединяющий точки  $\omega_2 = 1/\sqrt{2}$  и  $\omega_3 = 3/\sqrt{2}$ , эти точки располагаются на соседних витках скручивающейся части спирали (рис. 5.11б). Длина вектора примерно на порядок меньше длины вектора  $O^-O^+$  и соответственно, интенсивность меньше на два порядка, хотя длина участка спирали такая же ( $\omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{2}$ ).

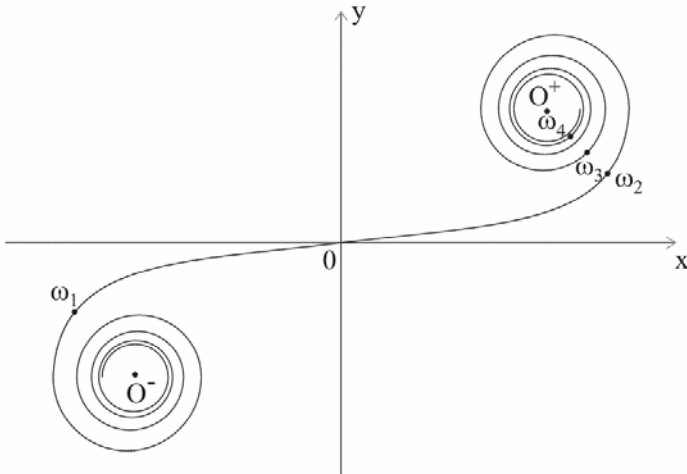


Рис. 5.10. Спираль Корню

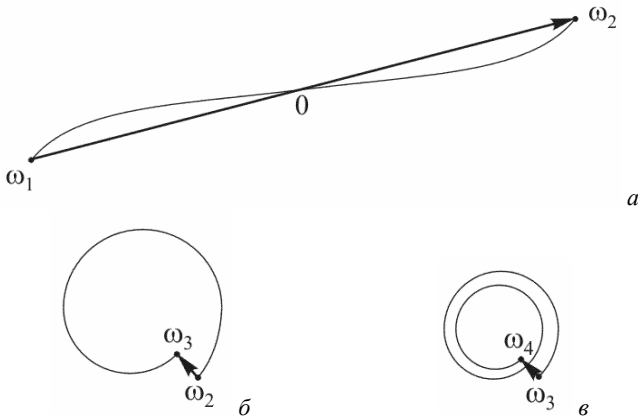


Рис. 5.11. Векторные диаграммы, характеризующие амплитуды поля в центре дифракционной картины (а), в первом (б) и втором (в) дифракционном минимуме в случае, когда ширина щели равна радиусу первой зоны Френеля

Второму дифракционному минимуму соответствует вектор между точками  $\omega_3 = 3/\sqrt{2}$  и  $\omega_4 = 5/\sqrt{2}$ , эти точки располагаются через один виток на скручивающейся части спирали (рис. 5.11в). Длина этого вектора значительно меньше длины вектора  $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$ , хотя длина участка спирали по-прежнему такая же ( $\omega_4 - \omega_3 = \sqrt{2}$ ). Уме-

стно обратить внимание на сходство векторных диаграмм, полученных с помощью спирали Корню и в ходе решения задачи 5.2.1.

**Ответ:**  $L > \frac{b^2}{\lambda}$ .

**Задача 5.2.3.** Плоская монохроматическая волна с длиной  $\lambda = 0,6$  мкм интенсивностью  $I = 10$  мВт/см<sup>2</sup> падает нормально на узкую длинную щель шириной  $b = 60$  мкм. Оценить интенсивность в центре дифракционной картины на экране, который находится за щелью на расстоянии  $L = 60$  см.

**Решение**

Поскольку при заданных в условии параметрах число открытых зон Френеля

$$m = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} = 0,01$$

много меньше 1, то справедливо приближение Фраунгофера. Угловой радиус центрального максимума (нулевого порядка) равен

$$\Delta\varphi \approx \lambda/b,$$

поэтому ширина этого максимума на экране равна:

$$\Delta x = 2L \cdot \Delta\varphi.$$

В единицу времени через щель (в расчете на единицу длины щели) свет переносит энергию

$$W = b \cdot I_0.$$

Так как более 90 процентов энергии сосредоточено в центральном максимуме, то в первом приближении

$$W \approx \frac{I_{\text{экр}}}{2} \cdot \Delta x = I_{\text{экр}} \cdot L \cdot \Delta\varphi = I_{\text{экр}} \cdot \frac{L\lambda}{b},$$

где  $I_{\text{экр}}$  – интенсивность в центре экрана. ( $I_{\text{экр}}/2$  – «среднее» значение интенсивности в пределах максимума)

Таким образом, для оценки интенсивности в центре экрана получаем:

$$I_{\text{экр}} = I_0 \cdot \frac{b^2}{L\lambda} = m \cdot I_0.$$

Из полученной формулы следует, что если ширина щели равна радиусу первой зоны Френеля, то интенсивность в центре



экрана равна интенсивности падающей волны. Этот вывод согласуется с результатами, полученными при решении задачи 5.2.2.

**Ответ:**  $I_{\text{экр}} = I_0 \cdot \frac{b^2}{L\lambda} = m \cdot I_0 = 0,1 \text{ мВт/см}^2$ .

**Задача 5.2.4.** Оценить максимальное расстояние, с которого еще могут быть видны раздельно светящиеся фары автомобиля.

**Решение**

Глаз человека можно рассматривать как оптическую систему, состоящую из круглой диафрагмы (зрачка диаметром  $d$  от 2 до 8 мм), собирающей линзы (хрусталика с фокусным расстоянием до 2 см) и экрана для наблюдения (сетчатки глаза). Изображение удаленного объекта формируется вблизи фокальной плоскости хрусталика. В приближении геометрической оптики угловые размеры объекта и изображения одинаковы и равны:

$$\Delta\theta = \frac{D}{L},$$

где  $D$  – поперечный размер объекта,  $L$  – расстояние от объекта до глаза. Вследствие дифракции на зрачке угловой размер изображения увеличивается.

Так как в соответствии с (5.7) угловой радиус центрального дифракционного максимума равен

$$\Delta\psi = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

то для наблюдателя две светящиеся некогерентные точки будут сливаться в одну, если

$$\Delta\theta \leq \Delta\psi.$$

Таким образом, фары автомобиля будут видны раздельно с расстояния

$$L \leq \frac{Dd}{1,22\lambda}.$$

Например, при  $d=3$  мм,  $D=1$  м и  $\lambda=0,6$  мкм максимальное расстояние  $L \approx 4$  км.

**Ответ:**  $L \leq \frac{Dd}{1,22\lambda}$

**Задача 5.2.5.** Дифракционное изображение удаленного точечного источника получено в фокальной плоскости объектива. Оценить, как изменится освещенность в центре изображения, если диаметр входной диафрагмы увеличить в два раза.

**Решение**

Так как в центр изображения излучение от всех вторичных источников приходит в фазе, то амплитуда поля в этой точке пропорциональна площади волновой поверхности, открываемой диафрагмой. При увеличении диаметра входной диафрагмы в два раза площадь возрастает в четыре раза.

Учитывая, что интенсивность поля пропорциональна квадрату амплитуды, делаем вывод, что освещенность в центре картины увеличится приблизительно в 16 раз.

По-другому: при увеличении диаметра входной диафрагмы в два раза световая энергия, проходящая через объектив, увеличивается в четыре раза. Так как при этом угловой размер изображения уменьшается в два раза, то в четыре раза уменьшится площадь изображения. Поскольку большая часть энергии сосредоточена в центральном дифракционном максимуме, то освещенность в центре картины увеличится приблизительно в 16 раз.

**Ответ:** освещенность в центре изображения увеличится в  $\approx 16$  раз.

**Задача 5.2.6.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на объект с функцией пропускания

$$\tau(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right), & |x| \leq b/2, \\ 0, & |x| > b/2. \end{cases}$$

Найти распределение интенсивности в фокальной плоскости установленной за объектом собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$ .

**Решение**

По определению, *комплексной функцией пропускания* объекта  $\tau(x, y)$  называют отношение комплексной амплитуды  $E_2(x, y)$  светового поля сразу за препятствием к комплексной амплитуде  $E_1(x, y)$  падающей волны непосредственно перед объектом (объект считается бесконечно тонким). В случае дифракции плоской волны

с амплитудой  $U_0$  комплексная амплитуда поля непосредственно за объектом с функцией пропускания  $\tau(x)$  равна  $\tau(x) \cdot U_0$  (там, где  $\tau(x) < 0$ , фаза волны меняется на  $\pi$ ).

Лучи, идущие от вторичных источников за объектом под некоторым углом  $\varphi$  к первоначальному направлению, соберутся в некоторой точке  $N_\varphi$  фокальной плоскости линзы. Вклад в амплитуду поля в этой точке от некоторого элемента волновой поверхности шириной  $dx$  может быть представлен в виде (приближение Френеля-Кирхгофа, см. гл. 4):

$$\begin{aligned} dU(N_\varphi) &= \tau(x) \cdot U_0 \cdot \frac{e^{iks}}{s} dx \cdot K(\varphi) \approx \\ &\approx \tau(x) \cdot U_0 \cdot \frac{e^{iks_0}}{s_0} K_0 \cdot e^{ik(s-s_0)} dx, \end{aligned}$$

где  $(s - s_0) = x \cdot \sin \varphi$  – разность хода для лучей, выходящих соответственно из точки с координатой  $x$  и из начала координат. Кроме того учтено, что при малых углах  $\varphi$  коэффициент  $K(\varphi) \approx K_0$ , а  $s \approx s_0$ ).

Интегрируя по всей поверхности  $\Sigma$  объекта, получим:

$$U(N_\varphi) = U_0 \cdot \frac{e^{iks_0}}{s_0} K_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) \cdot e^{ikx \sin \varphi} dx = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) \cdot e^{ik_x x} dx.$$

Таким образом,  $U(N_\varphi)$  можно рассматривать как *пространственное преобразование Фурье* для функции пропускания  $\tau(x)$  по «пространственным частотам»  $k_x = k \cdot \sin \varphi$ .

Для заданной в условии задачи функции  $\tau(x)$

$$U(N_\varphi) = A \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right) \cdot e^{ik_x x} dx.$$

Поскольку

$$\sin \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i},$$

и

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{i\gamma x} dx = \frac{e^{i\gamma x}}{i\gamma} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{e^{i\gamma b/2} - e^{-i\gamma b/2}}{i\gamma} = 2 \frac{\sin(\gamma b/2)}{\gamma} = b \operatorname{sinc}\left(\frac{\gamma b}{2}\right),$$

для  $U(N_\varphi)$  получаем:

$$\begin{aligned} U(N_\varphi) &= \frac{A}{2i} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \left( e^{i(k_x + 2\pi/b)x} - e^{i(k_x - 2\pi/b)x} \right) dx = \\ &= \frac{Ab}{2i} \cdot \left( \operatorname{sinc}\left(\left(k_x + \frac{2\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\left(k_x - \frac{2\pi}{b}\right)\frac{b}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{Ab}{2i} \cdot \left( \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{b \sin \varphi}{\lambda} + 1\right)\pi\right) - \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{b \sin \varphi}{\lambda} - 1\right)\pi\right) \right). \end{aligned}$$

В частности, при дифракции плоской волны на щели шириной  $b$  зависимость амплитуды от угла дифракции имеет вид:

$$U_0(N_\varphi) = A \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik_x x} dx = Ab \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right).$$

Поэтому график для найденной зависимости  $U(N_\varphi)$  можно получить, сложив два графика функции  $U_0(N_\varphi)$  с вдвое меньшим значением в максимуме и сдвинутых относительно  $\sin \varphi = 0$  соответственно на  $\sin \varphi = \pm \lambda/b$  (см. рис. 5.12).

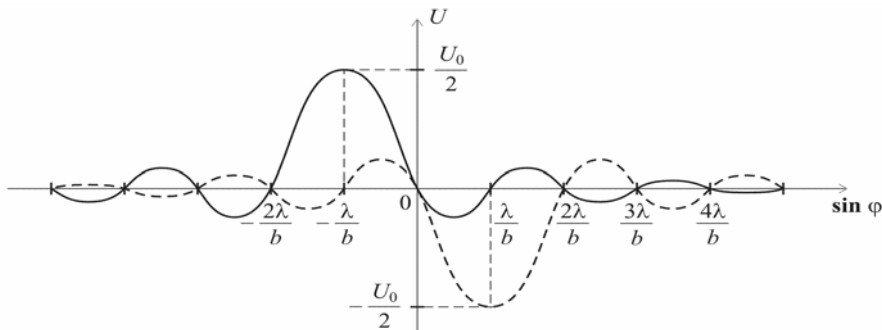
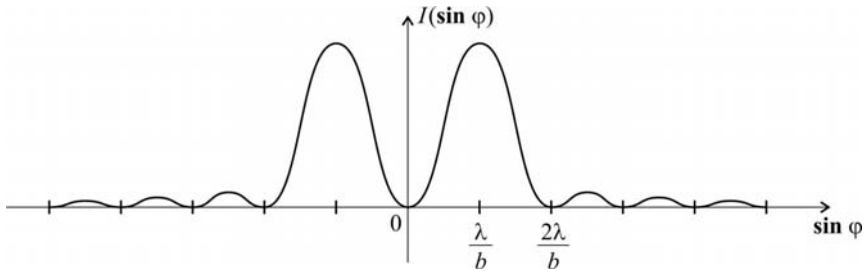


Рис. 5.12. Графики двух функций типа  $U_0(\sin \varphi)$ , сумма которых определяет функцию  $U(\sin \varphi)$ .

Рис. 5.13. График зависимости  $I(\sin \varphi)$ 

Распределение интенсивности описывается формулой:

$$I(N_\varphi) = |U(N_\varphi)|^2$$

и показано на рис 5.13.

**Задача 5.2.7.** Плоская монохроматическая волна с длиной  $\lambda$  падает нормально на простую дифракционную решетку. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости установленной за решеткой собирающей линзы.

**А.** Найти, как изменится дифракционная картина, если увеличить в два раза 1) число щелей  $N$ ; 2) ширину щели  $b$  ( $2b < d$ ); 3) период решетки  $d$ ; 4) длину волны  $\lambda$ .

**Б.** Как изменится дифракционная картина, если свет будет падать на решетку под углом  $\theta$ ?

### Решение

В соответствии с (5.8) угловое распределение интенсивности за дифракционной решеткой описывается формулой:

$$I_\varphi = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2,$$

где  $I_0 \sim b^2$ . В этой формуле так называемый *дифракционный* множитель

$$I_{\text{дифр}} = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

описывает дифракцию на одной щели шириной  $b$ , а *интерференционный* множитель

$$I_{\text{инт}} = \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2$$

описывает многолучевую интерференцию излучения от  $N$  щелей.

Характерными элементами дифракционной картины в этом случае являются:

1) главные дифракционные минимумы ( $\sin u = 0$ ), направление на которые определяется из условия  $b \sin \varphi = m\lambda$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;

2) главные дифракционные максимумы ( $\sin \delta = 0$ ) в направлениях, для которых  $d \sin \varphi = m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ );

3) дополнительные интерференционные минимумы ( $\sin N\delta = 0$ ,  $\sin \delta \neq 0$ ), направление на которые отвечает условию  $Nd \sin \varphi = m\lambda$ ,  $m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots$ .

Между главными максимумами находится  $N-1$  дополнительных минимумов. Направления  $\varphi_{m,\min}$  на минимумы, примыкающие к  $m$ -му главному максимуму, находятся из условия  $\sin N\delta = 0$ , откуда

$$d \sin \varphi_{m,\min} = (m \pm 1/N)\lambda.$$

Под *угловым размером*  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка понимают угол между направлением на максимум и направлением на ближайший к нему дополнительный минимум. Выражение для  $\Delta\varphi_m$  может быть получено, если взять дифференциал от обеих частей условия для главного максимума  $d \sin \varphi = m\lambda$  по переменным  $\varphi_m$  и  $m$  при постоянных  $d$  и  $\lambda$ :

$$d \cdot \delta(\sin \varphi_m) = \delta m \cdot \lambda.$$

Так как  $\delta(\sin \varphi_m) = \cos \varphi_m \cdot \Delta\varphi_m$  и  $\delta m = \pm 1/N$ , то

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m}.$$

Для направлений на главные максимумы интерференционный множитель  $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 \rightarrow N^2$ , поэтому интенсивность в центре дифракционной картины приблизительно в  $N^2$  раз больше интенсивности  $I_0$ .

**А.** На рис 5.14 *a* в качестве примера приведена картина распределения интенсивности при дифракции на  $N = 4$  щелях.

1) При увеличении числа щелей в два раза (рис 5.14 *z*):

— положение главных максимумов не меняется;

- число дополнительных минимумов увеличивается с  $N-1$  до  $2N-1$ ;
- угловой размер  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка уменьшается в два раза;
- интенсивность в центре дифракционной картины увеличивается в 4 раза.

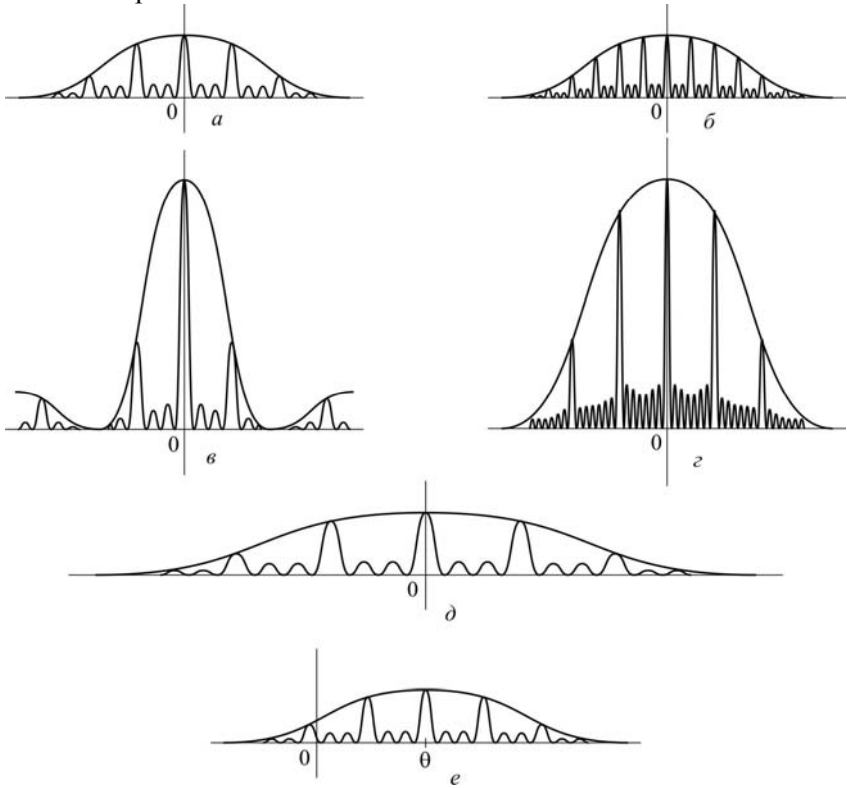


Рис. 5.14. Распределение интенсивности света при дифракции на 4 щелях (*a*), при увеличении периода решетки  $d$  в два раза (*б*), при увеличении ширины щели  $b$  в два раза (*в*), при увеличении числа щелей в два раза (*г*), при увеличении длины волны света в два раза (*д*) и при наклонном падении света на решетку (*е*)

2) При увеличении ширины щели  $b$  в два раза (рис 5.14 *в*):

- положение интерференционных максимумов и минимумов, их число и угловой размер  $\Delta\varphi_m$  максимумов не меняются;
- главные дифракционные минимумы сдвигаются к центру картины;

— интенсивность в центре дифракционной картины увеличивается в 4 раза ( $I_0 \sim b^2$ ).

3) При увеличении периода решетки  $d$  в два раза (рис 5.14 б):

— главные максимумы сдвигаются к центру картины (если  $\sin \varphi_m \approx \varphi_m$ , то углы  $\varphi_m$  уменьшаются в два раза);

— число добавочных минимумов не меняется;

— угловой размер  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка уменьшается примерно в два раза ( $\cos \varphi_m$  изменяется незначительно);

— интенсивность в центре дифракционной картины не меняется.

4) При увеличении длины волны  $\lambda$  в два раза (рис 5.14 в):

— главные максимумы сдвигаются по направлению от центра картины (если  $\sin \varphi_m \approx \varphi_m$ , то углы  $\varphi_m$  увеличиваются в два раза);

— число добавочных минимумов не меняется;

— угловой размер  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка увеличивается примерно в два раза ( $\cos \varphi_m$  изменяется незначительно);

— интенсивность в центре дифракционной картины не изменяется (при условии неизменной интенсивности источника).

**Б.** При наклонном падении плоской волны на дифракционную решетку (под углом  $\theta$ ) необходимо учитывать дополнительную разность хода для лучей, идущих от соседних щелей:

$\Delta s_{\text{доп}} = -d \sin \theta$ . В этом случае выражения для  $u$  и  $\delta$  в формуле (5.8) принимают вид:

$$u = \frac{kb(\sin \varphi - \sin \theta)}{2} = \frac{\pi b(\sin \varphi - \sin \theta)}{\lambda},$$

$$\delta = \frac{kd(\sin \varphi - \sin \theta)}{2} = \frac{\pi d(\sin \varphi - \sin \theta)}{\lambda},$$

а условие для направлений (углов  $\varphi_m$ ) на главные максимумы —

$$d \cdot (\sin \varphi_m - \sin \theta) = m\lambda.$$

Так как для углов дифракции  $\varphi$ , близких к  $\theta$ ,

$$\sin \varphi \approx \sin \theta + \cos \theta \cdot (\varphi - \theta),$$

то

$$d \cdot \cos \theta \cdot (\varphi_m - \theta) \approx m\lambda.$$

Аналогично, для направлений на дифракционные минимумы:

$$b \cdot \cos \theta \cdot (\varphi - \theta) \approx m\lambda.$$



Таким образом, при наклонном падении максимум нулевого порядка дифракционной картины будет наблюдаться под углом  $\varphi = \theta$  (рис. 5.14 *e*), а параметры картины – как в случае нормального падения на решетку с периодом  $d_n = d \cos \theta < d$  и шириной щели  $b_n = b \cos \theta < b$ .

### 5.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.3.1.** Найти отношение интенсивностей в максимумах первого и нулевого порядков при дифракции Фраунгофера на щели.

**Ответ:** 0,047.

**Задача 5.3.2.** Плоская монохроматическая волна ( $\lambda = 0,5$  мкм) падает нормально на экран с узкой щелью шириной  $b=0,1$  мм. Найти угловую и линейную ширину максимума нулевого порядка в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием  $F = 20$  см.

**Ответ:** 0,005 рад; 2 мм.

**Задача 5.3.3.** На экран с узкой щелью шириной  $b=3$  мкм падает под прямым углом плоская монохроматическая волна ( $\lambda = 0,5$  мкм). Какое число дифракционных максимумов можно наблюдать в фокальной плоскости линзы?

**Ответ:** 11.

**Задача 5.3.4.** Плоская монохроматическая волна ( $\lambda = 0,5$  мкм) падает нормально на узкую щель шириной  $b$ . В центре дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии  $L=1$  м от щели, интенсивность в  $n=50$  раз меньше интенсивности падающей волны. Оценить ширину щели.

**Ответ:** 100 мкм.

**Задача 5.3.5.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на узкую щель. Дифракционную картину наблюдают в фокальной плоскости собирающей линзы. Расстояние между максимумами нулевого и первого порядков равно 3 мм. Считая, что углы дифракции малы, оценить расстояние между максимумами первого и второго порядков.

**Ответ:** 2 мм.

**Задача 5.3.6.** На дифракционную решетку с плотностью штрихов  $50 \text{ мм}^{-1}$ , падает нормально параллельный пучок белого света. Найти угол между направлением на первый максимум для красного света ( $\lambda_{кр} = 0,76 \text{ мкм}$ ) и направлением на второй максимум для фиолетового света ( $\lambda_{ф} = 0,4 \text{ мкм}$ ).

**Ответ:**  $0,002 \text{ рад}$ .

**Задача 5.3.7.** При каком соотношении между периодом решетки  $d$  и шириной щели  $b$  интенсивность главного максимума  $m$ -го порядка будет равна нулю?

**Ответ:**  $\frac{d}{b} = \frac{m}{n} > 1, n = 1, 2, 3 \dots$

**Задача 5.3.8.** Плоская монохроматическая волна ( $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ ) падает под углом  $\theta = 30^\circ$  на дифракционную решетку с периодом  $d = 6,2 \text{ мкм}$ . Какой максимальный порядок спектра можно наблюдать?

**Ответ:** 18.

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, глава VIII
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, §§39 -43.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§31,32.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, §§61,62.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §4.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §7.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §5.3.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. унта, 1981, раздел V.

## Глава 6

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ СПЕКТРА

### 6.1. Теоретическое введение

Изучение атомов и молекул, анализ свечения различных веществ требуют знания их спектров испускания или поглощения. В экспериментах разложение сложного излучения в спектр осуществляется с помощью спектральных приборов, действие которых может быть основано на разных физических принципах. Основной частью спектрального прибора является *диспергирующий элемент*, который осуществляет пространственное разделение излучения разных длин волн.

Спектральные приборы подразделяют на 3 группы.

1) В *призменных* спектральных приборах используется зависимость показателя преломления от длины волны (дисперсия).

2) Диспергирующим элементом *дифракционных* спектральных приборов служит дифракционная решетка.

3) В *интерференционных* приборах с высокой разрешающей силой используется многолучевая интерференция.

Принципиальная схема спектрального прибора представлена на рис. 6.1. Источник излучения  $L$  через осветительную систему (в нашем случае это линза  $O_1$ ) освещает узкую входную щель  $S$ , находящуюся в фокальной плоскости объектива  $O_2$  (называемого *коллиматорным*). Параллельный пучок света падает на диспергирующий элемент  $D$ . С помощью объектива  $O_3$  (называемого *камерным*) получают монохроматические изображения щели в его фокальной плоскости  $P$ .

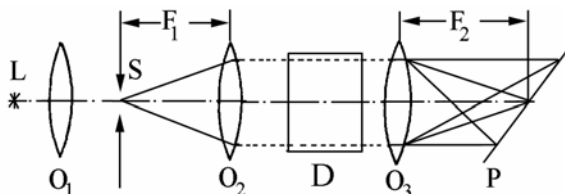


Рис. 6.1. Принципиальная схема спектрального прибора

В данной главе мы будем рассматривать только дифракционные и интерференционные спектральные приборы.

Основными характеристиками спектральных приборов являются *угловая* и *линейная дисперсия*, *разрешающая способность* и *область свободной дисперсии*.

**Дисперсия прибора** характеризует изменение угла отклонения светового пучка в приборе при изменении длины волны. Различают *угловую* и *линейную дисперсию* прибора.

Угловая дисперсия прибора определяется отношением

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где  $d\varphi$  – угол между лучами с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda+d\lambda$  в фокальной плоскости камерного объектива.

Линейная дисперсия

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda},$$

где  $dl$  – расстояние между спектральными линиями с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda+d\lambda$ .

**Разрешающая сила или разрешающая способность прибора.** Так называется отношение длины волны  $\lambda$  к наименьшей разности  $\delta\lambda$  длин двух монохроматических спектральных линий, при которой спектральный прибор еще позволяет наблюдать их раздельно. Для сравнения разрешающих сил различных спектральных приборов используют *критерий Рэлея*, согласно которому две спектральные линии считаются разрешенными, если максимум распределения интенсивности одной линии соответствует первому минимуму другой (рис.6.2). Если эти линии имеют одинаковую интенсивность, то провал между ними должен быть не менее 20% от максимальной интенсивности.

**Область свободной дисперсии** (важна для интерференционных спектральных приборов с высокой разрешающей силой) соответствует разности длин волн  $\Delta\lambda$ , при которой наступает перекрытие интерференционных полос соседних порядков.

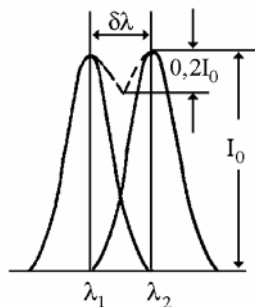


Рис. 6.2. Разрешающая способность спектрального прибора по Рэлею

**Дифракционная решетка.** При дифракции на дифракционной решетке угловое распределение интенсивности имеет вид:

$$I_{\varphi} = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2 \quad (6.1)$$

где

$$u = \frac{kb \sin \varphi}{2} = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}; \quad \delta = \frac{kd \sin \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda};$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $b$  – ширина щели;  $d$  – период решетки;  $N$  – число штрихов (щелей) решетки;  $\varphi$  – угол дифракции;  $I_0$  – интенсивность в центре картины при дифракции на одной щели шириной  $b$ .

Условие образования главных максимумов при дифракции на решетке:

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.2)$$

Направления на главные дифракционные максимумы (углы  $\varphi_m$ ) могут быть найдены графически, как показано на рис. 6.3.

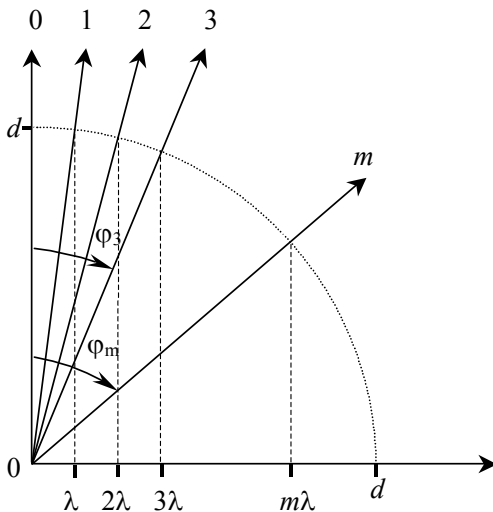


Рис. 6.3. Графическое определение направлений на главные дифракционные максимумы решетки

**Таблица спектральных характеристик  
прибора с дифракционной решеткой**  
(подробнее см. в решении задач)

| Условие для нахождения дифракционных максимумов прибора с дифракционной решеткой:<br>$d \sin \varphi_m = m\lambda$ |              |                    |   |
|--|--------------|--------------------|---|
| Параметр   | Константы    | Переменные         | Формулы   |
| Угловая дисперсия<br>$D_\varphi$   | $d, m$       | $\lambda, \varphi$ | $d \cdot \delta(\sin \varphi_m) = m \cdot \delta\lambda$ $d \cdot \cos \varphi_m \cdot \delta\varphi_m = m \cdot \delta\lambda,$ $D_\varphi = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}$                       |
| Угловая ширина дифракционного максимума<br>$\Delta\varphi_m$   | $d, \lambda$ | $\varphi, m$       | $d \cdot \delta(\sin \varphi_m) = \lambda \cdot \delta m$ $d \cdot \cos \varphi_m \cdot \Delta\varphi_m = \lambda \cdot \frac{1}{N}$ $\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m}$  |
| Разрешающая способность $R$  | $d, \varphi$ | $m, \lambda$       | $0 = m\delta\lambda + \lambda\delta m;$ $\delta m = -1/N;$ $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = -\frac{m}{\delta m};$ $\delta\lambda = \frac{\Delta\varphi_m}{D_\varphi} = \frac{\lambda}{mN}$ $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$ |
| Свободная область дисперсии<br>$\Delta\lambda$   | $d, \varphi$ | $m, \lambda$       | $0 = m\Delta\lambda + \lambda\delta m;$ $\delta m = -1;$ $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda,$ $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$   |

### Интерферометр Фабри–Перо

Интенсивность монохроматического излучения, прошедшего через интерферометр Фабри–Перо (ИФП), описывается формулой Эйри:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (6.3)$$

где  $R$  – коэффициент отражения (по интенсивности) каждого из зеркал интерферометра<sup>1</sup>;  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \cos \theta = \frac{4\pi \cdot h}{\lambda} \cos \theta$  – разность фаз между соседними лучами;  $h$  – расстояние между зеркалами (или база ИФП);  $\theta$  – угол падения света на зеркала.

Направления  $\theta_m$  на интерференционные максимумы могут быть найдены из условия:

$$2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda, \quad (m = 1, 2, \dots, m_{\max} = \left\lfloor \frac{2h}{\lambda} \right\rfloor). \quad (6.4)$$

Направления на интерференционные максимумы (углы  $\theta_m$ ) в проходящем свете могут быть найдены графически, как показано на рис. 6.4.

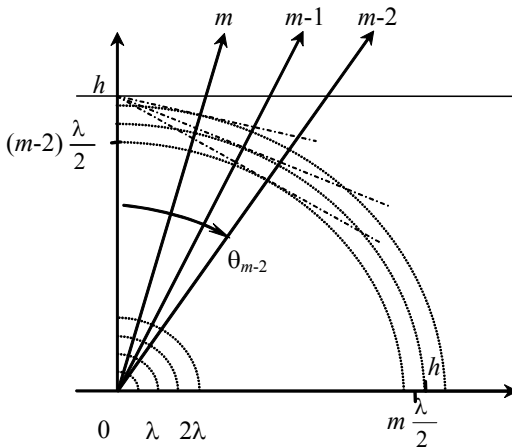


Рис. 6.4 Графическое определение направлений на интерференционные максимумы ИФП

<sup>1</sup> Если коэффициенты отражения зеркал различны и равны  $R_1$  и  $R_2$ , то  $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$ .

**Таблица спектральных характеристик  
интерферометра Фабри–Перо**  
(подробнее см. в решении задач)

| Условие для нахождения интерференционных максимумов в интерферометре Фабри–Перо:<br>$2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda$ |              |                   |  |
|---|--------------|-------------------|--|
| Параметр  | Константы    | Переменные        | Формулы  |
| Угловая дисперсия $D_\theta$  | $h, m$       | $\lambda, \theta$ | $2h \cdot \sin \theta_m \cdot \delta\theta_m = m \cdot \delta\lambda,$<br>$D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \sin \theta_m}$  |
| Угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\theta_m$  | $h, \lambda$ | $\theta, m$       | $2h \cdot \sin \theta_m \cdot \Delta\theta_m = \delta m \cdot \lambda$<br>$\delta m = \frac{1}{F} = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}$<br>$\Delta\theta_m = \frac{\lambda \cdot (1-R)}{2\pi \cdot h \sin \theta_m \cdot \sqrt{R}}$ |
| Разрешающая способность $R$   | $h, \theta$  | $m, \lambda$      | $0 = m\delta\lambda + \lambda\delta m;$<br>$\delta m = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}};$<br>$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m}{\delta m} = mF$  |
| Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$   | $h, \theta$  | $m, \lambda$      | $0 = m\Delta\lambda + \lambda\delta m;$<br>$\delta m = -1;$<br>$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda,$<br>$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2h}$                 |

## 6.2. Задачи с решениями

**Задача 6.2.1** Какой должна быть минимальная ширина  $L_{\min}$  дифракционной решетки с периодом  $d = 2$  мкм, чтобы с ее помощью можно было разрешить две линии  $\lambda_1 = 500$  нм и  $\lambda_2 = 500,05$  нм во втором порядке спектра?



**Решение**

В соответствии с критерием Рэлея две спектральные линии могут быть разрешены, если главный максимум одной линии совпадает с ближайшим к главному максимуму первым минимумом для другой линии. В этом случае угловой размер  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка равен угловому расстоянию  $\delta\varphi_m$  между максимумами  $m$ -го порядка для двух близких длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_2, \lambda_1$ ).

Угловую дисперсию решетки  $D_\varphi = d\varphi/d\lambda$  можно найти, взяв дифференциал от обеих частей условия для главных максимумов  $d\sin\varphi = m\lambda$  по переменным  $\varphi_m$  и  $\lambda$  при постоянных  $d$  и  $m$ :

$$d \cdot \delta(\sin\varphi_m) = m \cdot \delta\lambda.$$

Следовательно,

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi_m},$$

а угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями ( $\Delta\lambda \ll \lambda$ ) в  $m$ -м порядке спектра равно:

$$\delta\varphi_m = D_\varphi \cdot \Delta\lambda = \frac{m \cdot \Delta\lambda}{d\cos\varphi_m}.$$

Говоря об угловом размере  $\Delta\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка, имеют в виду угол между направлениями на максимум и на ближайший к нему минимум. В задаче 5.7 (глава 5) показано, что направления  $\varphi_{m,\min}$  на минимумы, ближайшие к главным максимумам, находятся из условия:

$$d \cdot \sin\varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Так как  $\Delta\varphi_m = |\varphi_m - \varphi_{m,\min}|$ , то, взяв дифференциал от обеих частей условия для главного максимума  $d\sin\varphi = m\lambda$  по переменным  $\varphi_m$  и  $m$  при постоянных  $d$  и  $\lambda$ , получим:

$$d \cdot \delta(\sin\varphi_m) = \delta m \cdot \lambda.$$

Поскольку  $\delta(\sin\varphi_m) = \cos\varphi_m \cdot \Delta\varphi_m$  и  $\delta m = \pm \frac{1}{N}$ ,

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m} = \frac{\lambda}{L\cos\varphi_m},$$

где  $L = Nd$  – ширина дифракционной решетки.

Из условия  $\Delta\varphi_m = \delta\varphi_m$  получаем:

$$L_{\min} = \frac{\lambda d}{m\Delta\lambda} = 10 \text{ мм}.$$

**Ответ:**  $L_{\min} = 10 \text{ мм}$

**Задача 6.2.2** Найти разрешающую способность  $R$  дифракционной решетки, содержащей  $N$  штрихов, в  $m$ -м порядке дифракции. Сколько штрихов должна иметь решетка, чтобы в первом порядке можно было разрешить две близкие спектральные линии  $\lambda_1 = 600 \text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 600,12 \text{ нм}$ ?

**Решение**

Разрешающая способность  $R$  спектрального прибора определяется как отношение длины волны  $\lambda$  к наименьшей разности  $\Delta\lambda$  длин волн двух спектральных линий, которые могут быть разрешены в соответствии с критерием Рэлея:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

При решении задачи 6.2.1 было получено, что две линии разрешены, если угловой размер  $\Delta\varphi_m$  дифракционного максимума  $m$ -го порядка не превосходит углового расстояния  $\delta\varphi_m$  между двумя близкими линиями. Из соотношений:

$$\delta\varphi_m = D_\varphi \Delta\lambda = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\varphi_m}$$

и

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m}$$

следует, что разрешающая способность дифракционной решетки равна

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\varphi_m / D_\varphi} = mN.$$

Это же соотношение можно получить, взяв дифференциал от обеих частей условия для главных максимумов ( $d\sin\varphi = m\lambda$ ) по

переменным  $m$  и  $\lambda$  при постоянных  $d$  и  $\varphi_m$  (направления  $\varphi_m$  на максимум для  $\lambda_1$  и минимум для  $\lambda_2$  совпадают):

$$\delta(d \sin \varphi_m) = 0 = m \cdot \delta \lambda + \delta m \cdot \lambda,$$

Отсюда

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = -\frac{m}{\delta m} = mN,$$

так как  $\delta m = -1/N$ .

Для разрешения двух линий  $\lambda_1 = 600$  нм и  $\lambda_2 = 600,12$  нм разрешающая способность решетки должна быть не менее, чем

$$R = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 5000,$$

а следовательно, при работе в первом порядке число штрихов решетки должно быть не менее 5000.

**Замечание.** Разрешающая способность дифракционной решетки не зависит от периода решетки  $d$ , а определяется количеством  $N$  задействованных штрихов решетки.

**Ответ:**  $R = mN$ ;  $N = 5000$ .

**Задача 6.2.3.** На рис. 6.5 приведены спектры источника, излучающего две близкие спектральные линии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , ( $\Delta \lambda_2 \ll \lambda_1, \lambda_2$ ), полученные с помощью трех различных дифракционных решеток. Считая порядки дифракции одинаковыми, а углы дифракции малыми, сравнить параметры решеток:

- 1) число штрихов  $N$ ;
- 2) период решетки  $d$ ;
- 3) ширину решетки  $L$ ;
- 4) угловую дисперсию решетки  $D_\varphi$ ;
- 5) разрешающую способность  $R$ .

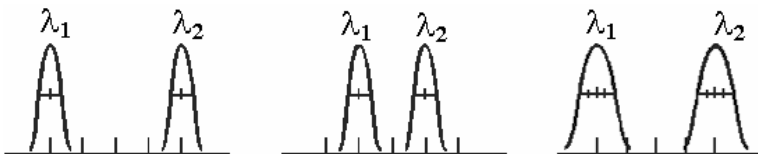


Рис. 6.5. Спектры источника, излучающего две близкие спектральные линии, полученные с помощью трех различных дифракционных решеток

**Решение**

Из рис.6.5 видно, что угловые размеры  $\Delta\varphi_m$  дифракционных максимумов связаны соотношением:

$$\Delta\varphi_{m1} = \Delta\varphi_{m2} = \frac{\Delta\varphi_{m3}}{2}.$$

Так как  $\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m} \approx \frac{\lambda}{Nd}$ , а ширина решетки  $L = Nd$ , то

$$N_1d_1 = N_2d_2 = 2N_3d_3, \quad (6.5)$$

или

$$L_1 = L_2 = 2L_3.$$

В свою очередь, угловые расстояния  $\delta\varphi_m$  между двумя близкими линиями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  связаны соотношением (см. рис.6.5):

$$\delta\varphi_{m1} = 2\delta\varphi_{m2} = \delta\varphi_{m3}.$$

Так как  $\delta\varphi_m = D_\varphi\Delta\lambda = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\varphi_m} \approx \frac{m\Delta\lambda}{d}$ , то

$$d_1 = \frac{d_2}{2} = d_3. \quad (6.6)$$

Используя соотношение (6.5) из (6.6), получаем:

$$N_1 = 2N_2 = 2N_3$$

Поскольку  $D_\varphi = m/d$ , то

$$D_{\varphi1} = 2D_{\varphi2} = D_{\varphi3}.$$

Так как разрешающая способность дифракционной решетки равна  $R = Nm$ , то

$$R_1 = 2R_2 = 2R_3.$$

**Ответ:**

1)  $N_1 = 2N_2 = 2N_3$ ; 2)  $d_1 = d_2/2 = d_3$ ; 3)  $L_1 = L_2 = 2L_3$ ; 4)  $D_{\varphi1} = 2D_{\varphi2} = D_{\varphi3}$ ; 5)  $R_1 = 2R_2 = 2R_3$ .

**Задача 6.2.4.** Дифракционная решетка содержит  $n = 200$  штрихов на миллиметр длины. Найти зависимость угловой дисперсии решетки от длины волны в первом порядке дифракции, если свет падает на решетку: а) нормально; б) под углом  $\theta = 45^\circ$  к нормали.

**Решение**

При наклонном падении света на решетку угловое положение  $\varphi_m$  главных дифракционных максимумов находится из условия:

$$d(\sin\varphi_m - \sin\theta) = m\lambda, \quad (6.7)$$

т.е. разность хода между лучами от соседних щелей кратна целому числу длин волн. По условию задачи период решетки равен

$$d = \frac{1}{n} = 5 \text{ мкм.}$$

При постоянных  $d$  и  $m$  из (6.7) следует, что

$$d \cdot \delta(\sin\varphi_m - \sin\theta) = m \cdot \delta\lambda,$$

откуда для угловой дисперсии получаем:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi_m}.$$

Так как

$$\cos\varphi_m = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_m} = \sqrt{1 - \left(\sin\theta + \frac{m\lambda}{d}\right)^2},$$

то

$$D_\varphi(\theta) = \frac{m}{d\sqrt{1 - \left(\sin\theta + \frac{m\lambda}{d}\right)^2}}.$$

При  $\theta = 45^\circ$

$$D_\varphi(45^\circ) = \frac{1}{d\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\lambda}{d}\right)^2}}.$$

При нормальном падении в приближении  $\left(\frac{m\lambda}{d} \ll 1\right)$

$$D_\varphi(0) \approx \frac{m}{d} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right).$$

Для видимого диапазона ( $\lambda=0,5$  мкм) в первом порядке  $m\lambda/d \approx 0,1$ . Следовательно,

$$D_\varphi(0) \approx \frac{m}{d} = mn = 200 \text{ мм}^{-1},$$

т.е. угловая дисперсия не зависит от длины волны.

**Ответ:** а)  $D_{\varphi}(0) \approx 200 \text{ мм}^{-1}$

$$\text{б) } D_{\varphi}(45^{\circ}) = \frac{1}{d \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\lambda}{d} \right)^2}}.$$

**Задача 6.2.5.** Экран с щелью находится в фокальной плоскости собирающей линзы объектива с фокусным расстоянием  $F$ . За объективом расположена дифракционная решетка с периодом  $d$  и числом штрихов  $N$ . При какой ширине  $b$  щели будет полностью использована разрешающая способность решетки для длин волн вблизи  $\lambda$ ?

**Решение**

При конечном значении ширины щели  $b$  свет от различных точек щели падает на решетку под углами  $\theta$  в диапазоне  $|\delta\theta| \leq \frac{b}{F}$ .

При наклонном падении света на решетку условие для главных дифракционных максимумов имеет вид:

$$d(\sin\varphi_m - \sin\theta) = m\lambda,$$

поэтому диапазон изменения  $\delta\varphi_m$  углового положения  $\varphi_m$  максимума  $m$ -го порядка и  $\delta\theta$  связаны соотношением:

$$\cos\varphi_m \cdot \delta\varphi_m - \cos\theta \cdot \delta\theta = 0,$$

или

$$\delta\varphi_m = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi_m} \cdot \delta\theta = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi_m} \cdot \frac{b}{F}.$$

С другой стороны, угловой размер максимума  $m$ -го порядка (см. задачу 6.2.1)

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m}$$

и не зависит от угла падения.

Можно считать, что разрешающая способность решетки использована полностью, если  $\delta\varphi_m \leq \Delta\varphi_m$ . Полагая, что  $\cos\theta \approx 1$ , получим

$$b \leq \frac{\lambda F}{Nd\cos\theta} = \frac{\lambda F}{Nd} = \frac{\lambda F}{L},$$

где  $L = Nd$  – ширина дифракционной решетки. В спектроскопии найденное значение  $b$  принято называть *нормальной шириной щели*.

**Ответ:**  $b \leq \frac{\lambda F}{L}$ .

**Задача 6.2.6.** Используя формулу Эйри (6.3) для интерферометра Фабри–Перо, получить:

- 1) условие максимума;
- 2) угловой радиус;
- 3) угловую ширину интерференционных колец;
- 4) угловую дисперсию;
- 5) разрешающую способность;
- 6) свободную область дисперсии интерферометра.

**Решение**

Согласно формуле Эйри, интенсивность монохроматического излучения, прошедшего через интерферометр Фабри–Перо (ИФП), равна:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

где  $R$  – коэффициент отражения (по интенсивности) каждого из зеркал интерферометра;  $\delta$  – разность фаз между соседними лучами. В свою очередь,

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \cos\theta = \frac{4\pi \cdot h}{\lambda} \cos\theta, \quad (6.8)$$

где  $h$  – расстояние между зеркалами (или база) ИФП,  $\theta$  – угол падения света на зеркала ИФП.

Интенсивность максимальна и равна  $I_0$ , если  $\sin(\delta/2) = 0$ , т.е. когда  $(2\pi h/\lambda) \cos\theta = m\pi$ . Отсюда получаем условие для направлений  $\theta_m$  на интерференционные максимумы:

$$2h \cdot \cos\theta_m = m\lambda, \quad (6.9)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$  – порядок интерференции.

При выполнении условия  $\sin^2(\delta/2) = 1$  значение интенсивности минимально и равно

$$I_{\min} = I_0 \cdot \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}.$$

В реальных интерферометрах коэффициент отражения зеркал  $R$  близок к единице, поэтому  $I_{\min} \rightarrow 0$ , а интерференционная картина от монохроматического источника представляет собой совокупность concentрических светлых и темных колец. Расположенное в центре светлое кольцо (или светлое пятно) соответствует максимальному порядку интерференции  $m_{\max}$ , равному целой части отношения  $2h/\lambda$ . Все другие кольца соответствуют меньшим порядкам:  $(m_{\max} - 1)$  для второго кольца,  $(m_{\max} - 2)$  – для третьего, и т.д. Таким образом, в соответствии с формулой (6.9) угловой радиус  $\theta_n$   $n$ -го светлого кольца удовлетворяет условию:

$$\theta_n = \arccos\left(\frac{(m_{\max} - n + 1)\lambda}{2h}\right). \quad (6.10)$$

Говоря о ширине колец, подразумевают ширину области между находящимися по разные стороны от максимума точками, в которых интенсивность уменьшается в два раза. Из формулы (6.3) следует, что для границ этой области справедливо соотношение:

$$\frac{4R}{(1-R)^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1.$$

Записав выражение для разности фаз  $\delta$  в этих точках в виде:

$$\delta = \delta_m \pm \frac{\varepsilon}{2} = 2\pi m \pm \frac{\varepsilon}{2},$$

получим соотношение для дополнительной разности фаз  $\varepsilon$ :

$$\left| \sin \frac{(\delta_m \pm \varepsilon/2)}{2} \right| = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}},$$

$$\left| \sin \left( \pm \frac{\varepsilon}{4} \right) \right| = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}}.$$

Если  $R \approx 1$ , то

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

Угловая ширина  $d\theta_m$  максимума  $m$ -го порядка находится из соотношения (6.8):



$$\varepsilon = d\delta = \frac{4\pi \cdot h}{\lambda} \sin\theta_m \cdot d\theta_m,$$

$$d\theta_m = \frac{\varepsilon \cdot \lambda}{4\pi \cdot h \sin\theta_m}.$$

Так как изменению разности фаз на  $2\pi$  соответствует изменение порядка интерференции на единицу, то для разности фаз, равной  $\varepsilon \ll 2\pi$ , изменение порядка  $\delta m$  составляет

$$\delta m = \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}. \quad (6.11)$$

Эта формула будет в дальнейшем использована для нахождения спектральных характеристик ИФП. Величину, обратную  $\delta m$ , называют *резкостью полос F*:

$$F = \frac{1}{\delta m} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}. \quad (6.12)$$

Для анализа спектральных характеристик ИФП поступим так же, как в случае с дифракционной решеткой. Запишем условие образования интерференционных максимумов:

$$2h \cdot \cos\theta_m = m\lambda. \quad (6.9)$$

Взяв дифференциал от обеих частей этого соотношения по переменным  $\theta_m$  и  $\lambda$ , для *угловой дисперсии* ИФП  $D_\theta$  получим:

$$2h \cdot \sin\theta_m \cdot d\theta_m = m \cdot d\lambda,$$

$$D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{2h \sin\theta_m}. \quad (6.13)$$

Как видно из формулы (6.13), угловая дисперсия максимальна в центре интерференционной картины ( $D_\theta \rightarrow \infty$ , если  $\theta_m \rightarrow 0$ ).

*Угловую ширину* интерференционного максимума  $\Delta\theta_m$  найдем, взяв дифференциал от обеих частей соотношения (6.9) по переменным  $\theta_m$  и  $m$ :

$$2h \cdot \sin\theta_m \cdot \Delta\theta_m = \delta m \cdot \lambda$$

С учетом (6.11) получаем

$$\Delta\theta_m = \frac{\varepsilon \cdot \lambda}{4\pi \cdot h \sin\theta_m} = \frac{\lambda \cdot (1-R)}{2\pi \cdot h \sin\theta_m \cdot \sqrt{R}}.$$

Чтобы оценить разрешающую способность  $R$  ИФП, возьмем дифференциал от обеих частей соотношения (6.9) по переменным  $\lambda$  и  $m$ :

$$0 = m \cdot \delta\lambda + \lambda \cdot \delta m,$$

где  $\delta m$  по-прежнему определяется формулой (6.11), а  $\delta\lambda$  — диапазон длин волн, разрешаемый интерферометром. Отсюда получаем:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda \cdot m}{\lambda \cdot \delta m} = \frac{m}{\delta m} = mF, \quad (6.14)$$

где  $F$  — резкость полос.

Формула (6.14) имеет сходство с формулой для разрешающей способности дифракционной решетки:  $R_{\text{др}} = mN$ . Напомним, что для повышения разрешающей способности решетки необходимо увеличить общее число штрихов  $N$  (обычно работа ведется в первом порядке  $m = 1$ ). Для ИФП  $R$  можно повысить, увеличивая толщину интерферометра  $\left(m_{\text{max}} = \frac{2h}{\lambda}\right)$  и(или) коэффициент отражения зеркал  $\left(F = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}\right)$ .

Одной из важных характеристик ИФП как спектрального прибора является область свободной дисперсии, т.е. диапазон длин волн  $\Delta\lambda$ , для которого не происходит перекрытия соседних порядков интерференции. Вывод формулы аналогичен выводу для случая дифракционной решетки:

$$\begin{aligned} 0 &= m\Delta\lambda + \lambda dm; \quad dm = -1; \\ m(\lambda + \Delta\lambda) &= (m + 1)\lambda, \\ \Delta\lambda &= \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\text{max}}} = \frac{\lambda^2}{2h}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

**Ответ:**

1) Направления  $\theta_m$  на интерференционные максимумы:

$$2h \cdot \cos\theta_m = m\lambda,$$

2) угловой радиус  $\theta_n$   $n$ -го светлого кольца равен

$$\theta_n = \arccos\left(\frac{(m_{\text{max}} - n + 1)\lambda}{2h}\right),$$

3) Угловая ширина дифракционного максимума:

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda \cdot (1-R)}{2\pi \cdot h \sin \theta_m \cdot \sqrt{R}},$$

4) Угловая дисперсия  $D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \sin \theta_m}$ ,

5) Разрешающая способность  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mF$ ,

6) Свободная область дисперсии  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2h}$ .

**Задача 6.2.7.** Излучение от точечного монохроматического источника света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм падает на ИФП с базой  $h = 1$  мм. Интерференционную картину наблюдают в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием  $F = 80$  мм. Найти радиус  $r_3$  третьего светлого кольца.

### Решение

Максимальный порядок интерференции  $m_{\max}$  равен целой части отношения  $2h/\lambda$ . Так как

$$\frac{2h}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0,001}{500 \cdot 10^{-9}} = 4 \cdot 10^3$$

– целое число, то в центре интерференционной картины будет светлое пятно порядка  $m_{\max} = 4 \cdot 10^3$ . Считая это пятно первым светлым кольцом, для  $n$ -го кольца получим

$$m_n = m_{\max} - (n-1).$$

Угловой радиус  $\theta_n$   $n$ -го светлого кольца найдем по формуле (6.10):

$$\theta_n = \arccos\left(\frac{(m_{\max} - n + 1)\lambda}{2h}\right) = \arccos\left(1 - \frac{(n-1)\lambda}{2h}\right).$$

При условии  $\lambda \ll h$  радиус  $r_n$   $n$ -го кольца равен:

$$\begin{aligned} r_n &= F \cdot \operatorname{tg}\theta_n = F \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta_n} - 1} \approx \\ &\approx F \cdot \sqrt{1 + \frac{2(n-1)\lambda}{2h} - 1} = F \cdot \sqrt{\frac{(n-1)\lambda}{h}}. \end{aligned}$$

Подставляя исходные данные, для радиуса третьего кольца получаем:

$$r_3 = 80 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0,001}} \text{ мм} = 80 \cdot \sqrt{10^{-3}} \text{ мм} \approx 2,5 \text{ мм}.$$

**Ответ:**  $r_3 \approx 2,5$  мм.

**Задача 6.2.8.** Определить параметры ИФП, обеспечивающего возможность исследования участка спектра шириной  $\Delta\lambda = 0,2$  нм вблизи длины волны  $\lambda \approx 500$  нм с разрешением не хуже  $\delta\lambda = 0,001$  нм.

**Решение**

Область свободной дисперсии ИФП должна быть больше ширины исследуемого спектра (в этом случае для всех длин волн максимальный порядок интерференции будет одним и тем же). Используя формулу (6.15), для базы интерферометра получим:

$$h \leq \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = \frac{600 \cdot 600}{2 \cdot 0,2} \text{ нм} = 0,9 \text{ мм}.$$

Разрешающая способность ИФП должна быть не меньше

$$R \geq \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{600}{0,001} = 6 \cdot 10^5.$$

Согласно формулам (6.14) и (6.12),

$$R = mF = \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\pi}{(1-R)},$$

откуда для коэффициента отражения зеркал получаем:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\pi}{(1-R)} \geq \frac{\lambda}{\delta\lambda};$$

$$\frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \pi \geq 1 - R;$$

$$R \geq 1 - \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \pi \approx 1 - \frac{0,001}{0,2} \cdot 3,14 \approx 0,984.$$

**Ответ:** Параметры ИФП:  $h = 0,9$  мм,  $R \approx 0,984$ .

**Задача 6.2.9.** Интерферометр Фабри–Перо используется в качестве оптического резонатора лазера, излучающего на длине вол-

ны  $\lambda \approx 632$  нм. Зеркала ИФП с коэффициентами отражения  $R_1 = 99,8\%$  и  $R_2 = 98\%$  расположены на расстоянии  $L = 1$  м. Определить частотный интервал  $\Delta\nu$  (в мегагерцах) между двумя соседними продольными модами излучения, а также ширину  $\delta\nu$  (в мегагерцах) каждой моды.

### Решение

В случае оптического резонатора лазера условие (6.9) для нахождения интерференционных максимумов принимает вид:

$$L = m \frac{\lambda}{2}$$

(на длине резонатора должно укладываться целое число полуволн). В этом случае в резонаторе формируются стоячие волны, называемые продольными модами, причем

$$\lambda_i = \frac{2L}{m_i}, \quad (6.16)$$

где  $m_i$  – порядок интерференции для  $i$ -й моды,  $m_i \approx 2L/\lambda_{\text{изл}}$ . Используя соотношение между длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu$  ( $c$  – скорость света)

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

запишем соотношение (6.16) в виде:

$$\nu_i = m_i \cdot \frac{c}{2L},$$

Так как для соседних мод  $\Delta m = m_{i+1} - m_i = 1$ , поэтому для частотного интервала  $\Delta\nu$  между продольными модами получаем:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1} \text{ Гц} = 150 \text{ МГц} \quad (6.17)$$

Поскольку для диапазона длин волн  $\delta\lambda$  (или диапазона частот  $\delta\nu$ ), излучаемых (разрешаемых) ИФП, справедливо соотношение:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{m}{\delta m} = mF,$$

то в соответствии с формулой (6.12), определяющей резкость интерференционных полос, для ширины  $\delta\nu$  излучения каждой моды получим:

$$\delta\nu = \delta m \cdot \frac{c}{2L} = \frac{1}{F} \cdot \frac{c}{2L} = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}} \cdot \frac{c}{2L} = 0,0035 \cdot 150 \text{ МГц} = 0,5 \text{ МГц}.$$

**Ответ:**  $\Delta\nu = 150 \text{ МГц}$ ,  $\delta\nu = 0,5 \text{ МГц}$

**Задача 6.2.10.** Оптический резонатор лазера, излучающего на длине волны  $\lambda \approx 632 \text{ нм}$ , имеет длину  $L_{\text{лаз}} = 0,7 \text{ м}$ . Подобрать параметры ИФП для исследования спектрального состава излучения лазера, чтобы число разрешаемых продольных мод лазера было не менее  $N = 7$ .

### Решение

Согласно формуле (6.17) для межмодового расстояния  $\Delta\nu_{\text{лаз}}$  лазерного излучения, область свободной дисперсии  $\Delta\nu$  ИФП должна быть не менее

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L_{\text{ИФП}}} \geq N \cdot \Delta\nu_{\text{лаз}} = \frac{N \cdot c}{2L_{\text{лаз}}}.$$

Следовательно, база ИФП должна удовлетворять условию:

$$L_{\text{ИФП}} \leq \frac{L_{\text{лаз}}}{N} = 0,1 \text{ м}.$$

Разрешающая способность ИФП должна обеспечивать разрешение отдельных продольных мод лазера, т.е.

$$R_{\text{ИФП}} \geq \frac{\nu_{\text{лаз}}}{\delta\nu_{\text{лаз}}} = \frac{\nu_{\text{лаз}} \cdot 2L_{\text{лаз}}}{c}. \quad (6.18)$$

С другой стороны, согласно формуле (6.14) для разрешающей способности ИФП:

$$R_{\text{ИФП}} = mF = \frac{2L_{\text{ИФП}}}{\lambda_{\text{лаз}}} \cdot F = \frac{2L_{\text{ИФП}} \cdot \nu_{\text{лаз}}}{c} \cdot \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}. \quad (6.19)$$

Сопоставляя формулы (6.18) и (6.19), получим:

$$R_{\text{ИФП}} = \frac{2L_{\text{ИФП}} \cdot \nu_{\text{лаз}}}{c} \cdot \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \geq \frac{\nu_{\text{лаз}} \cdot 2L_{\text{лаз}}}{c};$$

$$\frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \geq \frac{L_{\text{лаз}}}{L_{\text{ИФП}}} = N.$$

$$\frac{\pi^2 R}{N^2} \geq (1-R)^2; R^2 - 2 \left( 1 + \frac{\pi^2}{2N^2} \right) R + 1 \leq 0.$$

Так как  $\pi^2/(2N^2) \approx 0,1$ , то корни квадратного уравнения равны:

$$R_{1,2} = 1,1 \pm \sqrt{1,21 - 1} \approx 1,1 \pm 0,45,$$

откуда

$$R \geq 0,65.$$

**Ответ:**  $L_{\text{иФП}} \leq 0,1\text{ м}; R \geq 0,65$ .

### 6.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.3.1.** На дифракционную решетку падает монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda = 0,5\text{ мкм}$ . Найти угловую дисперсию решетки для угла дифракции  $30^\circ$ .

**Ответ:**  $1,15\text{ мкм}^{-1}$ .

**Задача 6.3.2.** На дифракционную решетку с периодом  $d = 2\text{ мкм}$ , имеющую  $N = 25000$  штрихов, падает монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda = 0,5\text{ мкм}$ . Найти разрешающую способность решетки при угле дифракции  $30^\circ$ .

**Ответ:**  $5 \cdot 10^4$ .

**Задача 6.3.3.** Дифракционная решетка с числом штрихов  $N=1000$  освещается параллельным пучком света от натриевой лампы. В каком минимальном порядке спектра может быть разрешен желтый дублет натрия ( $589,0\text{ нм}$  и  $589,6\text{ нм}$ )?

**Ответ:** в первом.

**Задача 6.3.4.** Найти ширину спектральной линии водорода ( $\lambda = 656,3\text{ нм}$ ) на негативе спектрального прибора, в котором использованы решетка шириной  $L = 3\text{ см}$  и объектив с фокусным расстоянием  $F = 15\text{ см}$ .

**Ответ:**  $\approx 3,3\text{ мкм}$ .

**Задача 6.3.5.** Удаленный протяженный источник испускает две близкие спектральные линии  $\lambda_1 = 500,0\text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 500,2\text{ нм}$  равной интенсивности. Оценить угловой размер источника, при котором линии могут быть разрешены.

**Ответ:**  $\psi = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_{\text{сред}}} \approx 0,0004$  рад.

**Задача 6.3.6.** База интерферометра Фабри–Перо равна  $h=1$  см. Определить область дисперсии ИФП и максимальный порядок интерференции для длины волны  $\lambda=600$  нм.

**Ответ:** 0,018 нм; 33333.

**Задача 6.3.7.** База интерферометра Фабри–Перо и коэффициент отражения его зеркал равны соответственно  $h=1$  мм и  $R=0,9$ . Какой минимальный диапазон длин волн  $\delta\lambda$  в области  $\lambda=500$  нм можно разрешить с помощью такого ИФП?

**Ответ:**  $4 \cdot 10^{-3}$  нм.

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, глава IX.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, §§ 47–50.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §28.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 6.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §4.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §8.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §§5.2, 5.3.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел VI.



## Глава 7

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА  
ДИЭЛЕКТРИКОВ

## 7.1. Теоретический материал

В этой главе рассматриваются линейные изотропные диэлектрические среды, прозрачные в оптическом диапазоне. В таких средах могут распространяться *плоские гармонические* электромагнитные волны (см. гл):

$$\begin{cases} \mathbf{E}(r, t) = \text{Re} \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}(r, t) = \text{Re} \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \end{cases} \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  – комплексные амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Связь между частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  в формулах (7.1) определяется в соответствии с *дисперсионным уравнением*:

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{v} \quad (7.2)$$

где  $n$  и  $\varepsilon$  – действительные показатель преломления и диэлектрическая проницаемость среды ( $n = \sqrt{\varepsilon}$ ),  $v = \frac{c}{n}$  – фазовая скорость волны в среде.

Векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  в волнах (7.1) взаимно ортогональны, причем:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{H}.$$

Пусть линейно-поляризованная световая волна

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} \quad (7.2)$$

падает на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  под углом  $\theta_1$  (угол между волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и нормалью к границе раздела). Если *плоскость поляризации* падающей волны (в которой лежат векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{k}_1$ ) ориентирована под углом  $\alpha_1$  (*азимут поляризации*,  $-\pi/2 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$ ) к *плоскости падения* (в которой лежат вектор  $\mathbf{k}_1$  и нормаль  $0z$ ), то:

$$\mathbf{E}_{10} = \mathbf{E}_{10}^s + \mathbf{E}_{10}^p, \quad E_{10}^s = E_{10} \sin \alpha_1, \quad E_{10}^p = E_{10} \cos \alpha_1$$

(компонента  $\mathbf{E}_{10}^s$  перпендикулярна к плоскости падения, компонента  $\mathbf{E}_{10}^p$  – лежит в плоскости падения).

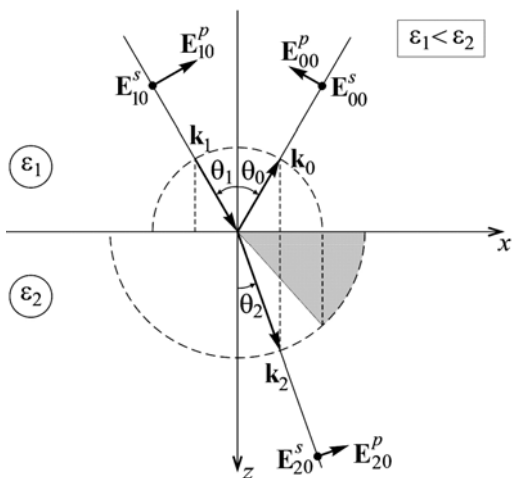


Рис. 7.1. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с проницаемостями  $\epsilon_1 < \epsilon_2$

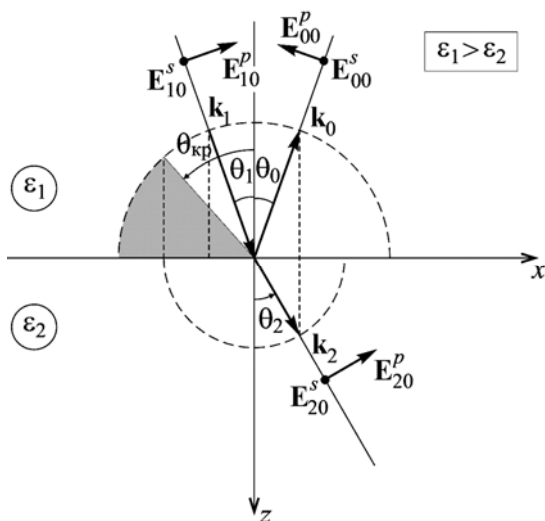


Рис. 7.2. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с проницаемостями  $\epsilon_1 > \epsilon_2$

В общем случа падающая волна (7.2) порождает две другие волны (см. рис. 7.1 и 7.2): отраженную

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{00} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} \quad (7.3)$$

и преломленную

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{20} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}. \quad (7.4)$$

Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границе двух сред (*граничные условия*) волновые векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}_2$  падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости  $xOz$  с нормалью к поверхности раздела и, кроме того,

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. \quad (7.5)$$

Отсюда следует:

$$\theta_1 = \theta_0 \text{ (закон отражения)} \quad (7.6)$$

и, с учетом (7.2),

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2 \text{ (закон преломления)}. \quad (7.7)$$

Заметим, что поскольку

$$k_{1x} = k_{0x} = \frac{\omega}{c} n_1 \cdot \sin \theta_1 = \frac{\omega}{v_1 / \sin \theta_1}$$

и

$$k_{2x} = \frac{\omega}{v_2 / \sin \theta_2},$$

то в соответствии с (7.6), равны и скорости распространения фаз падающей, отраженной и преломленной волн вдоль границы (в направлении оси  $x$ ).

Если волна (7.3) падает на границу со стороны оптически менее плотной среды ( $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ), то при любом угле падения  $\theta_1$  ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ) во второй среде распространяется преломленная волна (7.4). Если же свет падает из оптически более плотной среды ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ), то при углах падения  $\theta_1 \geq \theta_{\text{кр}} = \arcsin(n_2/n_1)$  будет иметь место *полное внутреннее отражение* (преломленной волны нет). Так, для границы "стекло – воздух" ( $n_1 = 1,5$ ;  $n_2 = 1$ ) *критический угол* полного внутреннего отражения  $\theta_{\text{кр}} \approx 41^\circ$ .

Соотношения между амплитудами  $E_{10}$ ,  $E_{00}$  и  $E_{20}$  в зависимости от  $\theta_1$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  называют *формулами Френеля*:

$$r_s \equiv \frac{E_{00}^S}{E_{10}^S} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \quad (7.8)$$

$$t_s \equiv \frac{E_{20}^S}{E_{10}^S} = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \quad (7.9)$$

$$r_p \equiv \frac{E_{00}^P}{E_{10}^P} = \frac{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} - \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}} = \frac{u_{1z} - u_{2z}}{u_{1z} + u_{2z}}, \quad (7.10)$$

$$t_p \equiv \frac{E_{20}^P}{E_{10}^P} = \frac{2 \frac{k_{1z}}{\varepsilon_1}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{2u_{1z}}{u_{1z} + u_{2z}}. \quad (7.11)$$

где  $r_{s,p}$  и  $t_{s,p}$  – амплитудные коэффициенты отражения и пропускания,  $u = \omega/k$  – лучевая скорость (скорость переноса энергии).

Учитывая дисперсионное соотношение (7.2), формулы Френеля можно записать в виде:

$$r_s = \frac{n_1 \cdot \cos\theta_1 - n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1 + n_2 \cdot \cos\theta_2}, \quad (7.12)$$

$$t_s = \frac{2n_1 \cdot \cos\theta_1}{n_1 \cdot \cos\theta_1 + n_2 \cdot \cos\theta_2}, \quad (7.13)$$

$$r_p = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_1 - n_1 \cdot \cos\theta_2}{n_2 \cdot \cos\theta_1 + n_1 \cdot \cos\theta_2}, \quad (7.14)$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cdot \cos\theta_1}{n_2 \cdot \cos\theta_1 + n_1 \cdot \cos\theta_2}. \quad (7.15)$$

Наконец, после тригонометрических преобразований (с учетом закона преломления) получаем:

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (7.16)$$

$$t_s = \frac{2\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (7.17)$$

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (7.18)$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (7.19)$$

Примерные графики зависимостей (7.12)–(7.15) приведены на рис. 7.3 ( $n_1 < n_2$ ) и рис. 7.4 ( $n_1 > n_2$ ).

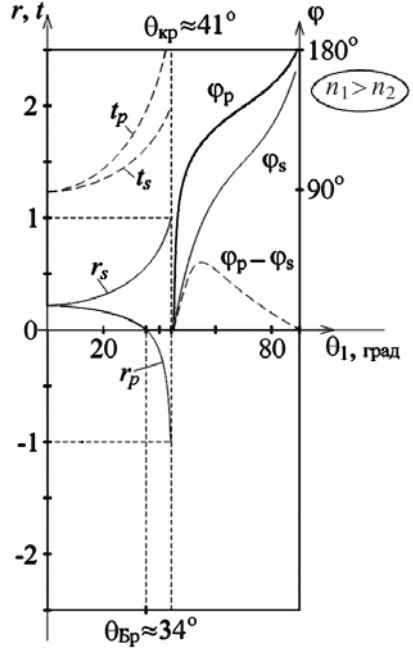
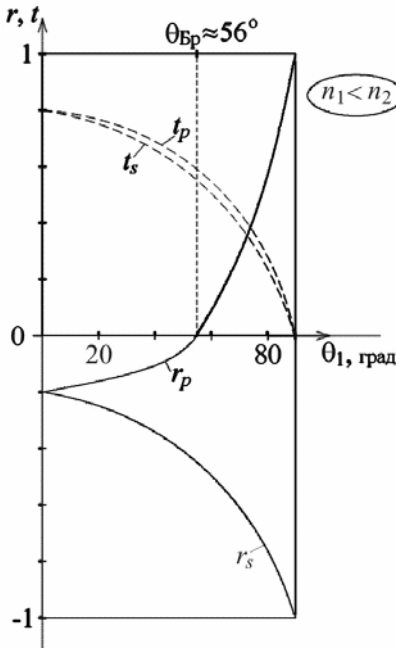


Рис. 7.3. Коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  для волн с  $s$ - и  $p$ -поляризацией в зависимости от угла падения  $\theta_1$  на поверхность раздела двух сред ( $n_1 < n_2$ ,  $n_2 = 1,5 n_1$ )

Рис. 7.4. Коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  для волн с  $s$ - и  $p$ -поляризацией в зависимости от угла падения  $\theta_1$  на поверхность раздела двух сред ( $n_1 > n_2$ ,  $n_1 = 1,5 n_2$ );  $\varphi_p$  и  $\varphi_s$  – набег фазы при полном внутреннем отражении.

В случае  $n_1 < n_2$  на границе раздела фазы комплексных амплитуд  $E_{10}^{S,P}$  и  $E_{20}^{S,P}$  всегда совпадают, фазы  $E_{10}^S$  и  $E_{00}^S$  при любых  $\theta_1$

отличаются на  $\pi$ , а фазы  $E_{10}^P$  и  $E_{00}^P$  отличаются на  $\pi$ , если  $0 \leq \theta_1 < \theta_{\text{Бр}}$ , и совпадают, если  $\theta_{\text{Бр}} < \theta_1 \leq \pi/2$ . Угол  $\theta_1 = \text{arctg}(n_2/n_1) \equiv \theta_{\text{Бр}}$  ( $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ) называют *углом Брюстера* или *углом полной поляризации* отраженного света. При падении волны на границу раздела под этим углом  $p$ -компонента волны  $\mathbf{E}_1^P(\mathbf{r}, t)$  не отражается и, кроме того,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Так, для границы "воздух – стекло"  $\theta_{\text{Бр}} \approx 56^\circ$  (рис. 7.3).

Если  $n_1 > n_2$  (рис. 7.4), то на границе сред фазы амплитуд  $E_{10}^{S,P}$  и  $E_{20}^{S,P}$ , а также  $E_{10}^S$  и  $E_{00}^S$  совпадают, если  $\theta_1 \leq \theta_{\text{кр}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ ,

тогда как фазы комплексных амплитуд  $E_{10}^P$  и  $E_{00}^P$  совпадают, если  $\theta_1 \leq \theta_{\text{Бр}}$ , и отличаются на  $\pi$ , если  $\theta_{\text{Бр}} < \theta_1 \leq \theta_{\text{кр}}$ .

Поскольку

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \cdot \sin\theta_1)^2}, \quad (7.20)$$

то при  $\theta_1 > \theta_{\text{кр}}$ :

$$k_{2z} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \cdot \sin\theta_1)^2 - n_2^2} = \pm ik_{2z}'' , \quad (7.20a)$$

и уравнение преломленной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_2 = k_{1x} \mathbf{e}_x - ik_{2z}'' \mathbf{e}_z$  имеет вид:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{20} e^{-k_{2z}'' z} e^{i(\omega t - k_{1x} x)}. \quad (7.21)$$

(Знак «+» в формуле (7.21) отброшен по физическим соображениям.)

Таким образом, при полном внутреннем отражении преломленная волна  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$  – это плоская *неоднородная* волна (7.21), бегущая вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $v_{2x} = \omega/k_{1x}$ . Амплитуда этой волны экспоненциально затухает вдоль оси  $z$ . Глубина  $\Delta z$  проникновения света в среду с  $n_2 < n_1$ , соответствующая уменьшению амплитуды в  $e$  раз:

$$\Delta z = \frac{1}{k_{2z}''} = \frac{c}{\omega \sqrt{(n_1 \cdot \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}. \quad (7.22)$$

В соответствии с формулами (7.8) и (7.10) при полном внутреннем отражении:

$$r_s = \frac{k_{1z} + ik_{2z}''}{k_{1z} - ik_{2z}''} = e^{i\varphi_s}, \quad (7.23)$$

$$r_p = \frac{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + i \frac{k_{2z}''}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} - i \frac{k_{2z}''}{\varepsilon_2}} = e^{i\varphi_p}, \quad (7.24)$$

т.е. при любом азимуте поляризации  $\alpha_1$  падающей волны:

$$|r_s| = |r_p| = 1.$$

Однако, согласно (7.23) и (7.24), между отраженной и падающей волнами на границе возникает сдвиг по фазе (см. рис. 7.4):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{k_{2z}''}{k_{1z}} = \frac{\sqrt{(n_1 \cdot \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_1 \cdot \cos \theta_1}, \quad (7.25)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_p}{2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{n_1 \sqrt{(n_1 \cdot \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cdot \cos \theta_1}. \quad (7.26)$$

Для определения коэффициентов отражения  $R$  и преломления  $T$  по энергии при прохождении света через границу раздела двух сред поступим следующим образом: выберем на этой границе единичную площадку и сравним энергии падающей, преломленной и отраженной волн в пределах этой площадки.

По закону сохранения энергии для нормальных компонент вектора Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  справедливо соотношение:

$$S_{1n} = S_{0n} + S_{2n}.$$

Так как интенсивность света  $I$  равна среднему по времени значению вектора Пойнтинга, то:

$$I_1 \cdot \cos \theta_1 = I_0 \cdot \cos \theta_1 + I_2 \cdot \cos \theta_2,$$

или

$$I_1 = I_0 + I_2 \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}. \quad (7.27)$$

По определению, коэффициенты отражения  $R$  и преломления  $T$  равны отношению энергии соответственно отраженной и преломленной волн, покидающих площадку на границе раздела, к энергии волны, падающей на эту площадку:

$$R = \frac{S_{n0}}{S_{n1}} = \frac{I_0}{I_1}, \quad (7.28)$$

$$T = \frac{S_{n2}}{S_{n1}} = \frac{I_2 \cdot \cos\theta_2}{I_1 \cdot \cos\theta_1}. \quad (7.29)$$

Как показано в задаче 7.2.2, коэффициенты отражения  $R$  и пропускания  $T$  (по энергии) находятся по формулам:

$$R = \frac{S_{n0}}{S_{n1}} = r^2 \quad (7.30)$$

и

$$T = \frac{S_{n2}}{S_{n1}} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot t^2. \quad (7.31)$$

При этом

$$\frac{I_0}{I_1} = r^2 = R \quad (7.32)$$

и

$$\frac{I_2}{I_1} = T \cdot \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot t^2. \quad (7.33)$$

Подставляя формулы Френеля для  $s$ - и  $p$ -компонент в формулы (7.30) и (7.31), можно убедиться в справедливости соотношения:

$$R + T = 1.$$

В соответствии с определением степени поляризации  $\Delta$ , для отраженного света

$$\Delta_0 = \frac{I_0^s - I_0^p}{I_0^s + I_0^p} = \frac{r_s^2 \cdot I_1^s - r_p^2 \cdot I_1^p}{r_s^2 \cdot I_1^s + r_p^2 \cdot I_1^p}, \quad (7.34)$$

а для преломленного –

$$\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot (t_s^2 \cdot I_1^s - t_p^2 \cdot I_1^p)}{\frac{n_2}{n_1} \cdot (t_s^2 \cdot I_1^s + t_p^2 \cdot I_1^p)} = \frac{t_s^2 \cdot I_1^s - t_p^2 \cdot I_1^p}{t_s^2 \cdot I_1^s + t_p^2 \cdot I_1^p}. \quad (7.35)$$



Если на границу раздела падает естественный свет ( $I_1^s = I_1^p = I_1/2$ ), то:

$$\Delta_0 = \frac{r_s^2 - r_p^2}{r_s^2 + r_p^2}, \quad (7.36)$$

$$\Delta_2 = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2}. \quad (7.37)$$

## 7.2. Задачи с решениями

**Задача 7.2.1.** Исходя непосредственно из граничных условий для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границе двух диэлектриков найти коэффициент отражения  $R$  и коэффициент пропускания  $T$  при нормальном падении света.

### Решение

Пусть плоская линейно – поляризованная волна  $\mathbf{E}_1$  падает нормально на плоскую границу раздела двух сред с показателями

преломления  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 7.5). Интенсивность этой волны:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{10}^2}{2} \cdot \frac{c}{n_1} = n_1 \frac{\varepsilon_0 E_{10}^2}{2} c.$$

Так как (в силу граничных условий) должно выполняться:

$$E_{1x} = E_{2x},$$

то если бы существовала только преломленная волна  $\mathbf{E}_2$ , интенсивность света во второй среде (при  $E_{20} = E_{10}$ ) была бы равна

$$I_2 = \frac{n_2}{n_1} I_1 > I_1,$$

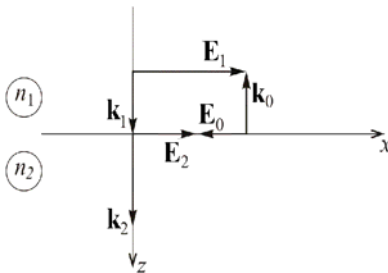


Рис. 7.5. Схема расположения векторов  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_0$  и амплитуд электрического поля в падающей, отраженной и преломленной волнах

что противоречит закону сохранения энергии. Однако все становится на свои места, если часть энергии падающей волны уносится отраженной волной  $\mathbf{E}_0$  ( $\mathbf{k}_0 = -\mathbf{k}_1$ ), амплитуда которой  $E_0 = -rE_1$ , а отражательная способность  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) определяется из условия энергетического баланса:

$$I_1 - I_0 = I_2,$$

или

$$n_1(1-r^2) = n_2(1-r)^2,$$

откуда

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (7.38)$$

С учетом (7.28):

$$R \equiv \frac{I_0}{I_1} = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (7.39)$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1n_2}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (7.40)$$

В частности, для границы «воздух–вода» ( $n_1 = 1$  и  $n_2 = 1,33$ )  $R = 0,02$  и  $T = 0,98$ , а для границы «воздух–стекло» ( $n_2 = 1,5$ )  $R = 0,04$  и  $T = 0,96$ .

**Замечание 1.** При нормальном падении света на границу раздела двух диэлектриков коэффициент отражения  $R$  не зависит от направления перехода границы.

**Замечание 2.** Формула (7.32) может быть получена непосредственно из (7.12) или (7.14), если положить  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

**Ответ:**

$$R \equiv \frac{I_0}{I_1} = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1n_2}{(n_2 + n_1)^2}.$$

**Задача 7.2.2.** Получить формулы Френеля, используя так называемый "энергетический" подход.

**Решение**

Если на границу двух прозрачных сред падает плоская монохроматическая световая волна, то в соответствии с законом сохранения энергии:

$$S_1 \cos \theta_1 \cdot \sigma - S_0 \cos \theta_0 \cdot \sigma = S_2 \cos \theta_2 \cdot \sigma,$$

где  $\mathbf{S}=[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  – вектор Пойнтинга,  $\sigma$  – площадь участка границы (рис.7.6).

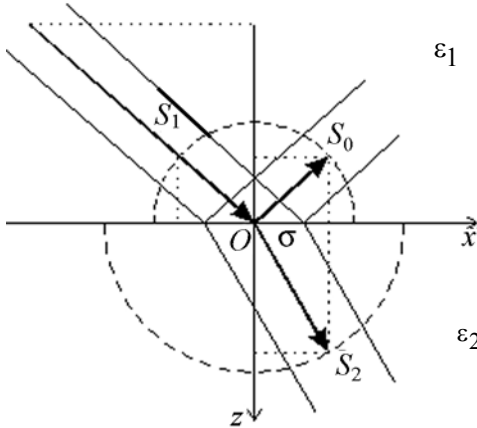


Рис. 7.6. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с проницаемостями  $\epsilon_1 < \epsilon_2$

Поскольку для электрической и магнитной компонент волны в однородной изотропной диэлектрической среде

$$nE \sim H,$$

модуль вектора Пойнтинга

$$S \sim nE^2$$

или

$$S \sim n^{-1}H^2,$$

а следовательно, для модуля нормальной (по отношению к границе) компоненты этого вектора:

$$S_z \sim k_z E^2,$$

или

$$S_z = u_z H^2,$$

где  $u = c/n$  – лучевая скорость волны (не путать с фазовой!).

Как показано в Задаче 7.2.1, в случае  $n_1 < n_2$  при нормальном падении ( $\theta_1=0$ ):

$$E_1 - E_0 = E_2,$$

$$H_1 + H_0 = H_2,$$

поэтому для коэффициентов Френеля  $r$  и  $t$  получаем:

$$\begin{aligned} r_E &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ t_E &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \\ r_H &= \frac{1/n_1 - 1/n_2}{1/n_1 + 1/n_2}, \\ t_H &= \frac{2/n_1}{1/n_1 + 1/n_2}. \end{aligned}$$

При этом учитывалось, что в случае  $\theta_1=0$   $t=1-r$ .

Если  $\theta_1 \neq 0$ , то для линейно поляризованной  $s$ -волны ( $\mathbf{E} \parallel Oy$ ):

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \\ t_s &= \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \end{aligned}$$

а для  $p$ -волны ( $\mathbf{H} \parallel Oy$ ):

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{u_{1z} - u_{2z}}{u_{1z} + u_{2z}}, \\ t_p &= \frac{2u_{1z}}{u_{1z} + u_{2z}}. \end{aligned}$$

**Задача 7.2.3.** Найти азимут  $\alpha_0$  отраженной волны и азимут  $\alpha_2$  преломленной волны, если азимут падающей волны  $\alpha_1$ , а угол падения и угол преломления равны соответственно  $\theta_1$  и  $\theta_2$ .

**Решение**

Поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_1^s}{E_1^p}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{E_0^s}{E_0^p}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_2^s}{E_2^p},$$

то, с учетом формул Френеля (7.16)–(7.19), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{r_s E_1^s}{r_p E_1^p} = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{t_s E_1^S}{t_p E_1^P} = \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Так как  $|\cos(\theta_1 + \theta_2)| < 1$ , то

$$|\operatorname{tg} \alpha_2| < |\operatorname{tg} \alpha_1| < |\operatorname{tg} \alpha_0|,$$

а, следовательно, при отражении азимут поляризации увеличивается, тогда как при преломлении – уменьшается.

**Ответ:**  $\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \operatorname{tg} \alpha_1,$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$$

**Задача 7.2.4.** Естественный свет с интенсивностью  $I$  падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . Найти: а) коэффициент отражения  $R$  света; б) степень поляризации  $\Delta$  преломленного света.

### Решение

Так как естественный свет можно рассматривать как суперпозицию двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны, то

$$I^S = I^P = \frac{I}{2}.$$

а) При  $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$ :

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \theta_2 = \sin \theta_1,$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = n.$$

Поэтому в соответствии с (7.14) и (7.12):

$$r_p = 0,$$

$$r_s = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Следовательно, интенсивность отраженного света:

$$I_0 = I_0^S = r_s^2 I_1^S = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 I,$$

а коэффициент отражения:

$$R = \frac{I_0}{I} = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = 0,74.$$

б) По определению, степень поляризации преломленного света:

$$\Delta = \frac{I_2^S - I_2^P}{I_2^S + I_2^P}.$$

Так как  $I_2^S = (t_s)^2 n I_1^S$ ,  $I_2^P = (t_p)^2 n I_1^P$  и  $I_1^S = I_1^P$ , то:

$$\Delta = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2}.$$

Поскольку при  $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$ :

$$t_s = \frac{2}{1+n^2}, \quad t_p = \frac{1}{n},$$

в итоге получаем:

$$\Delta = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2} = -0,08.$$

**Ответ:**  $R = 0,74$ ,  $\Delta = -0,8$

**Задача 7.2.5.** Естественный свет с интенсивностью  $I$  падает под углом Брюстера из воздуха на плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления  $n = 1,5$ . Найти интенсивность и степень поляризации каждого из пучков 1–4 (рис. 7.7).

### Решение

Рассматривая естественный свет как суперпозицию двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны, можно записать

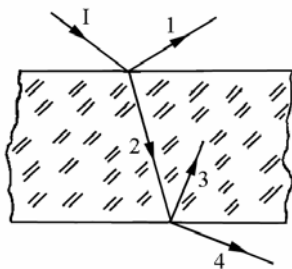


Рис.7.7. Ход лучей через плоско-параллельную стеклянную пластинку

$$I_s^{(0)} = I_p^{(0)} = \frac{I}{2}.$$

На границе *воздух-стекло* при  $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$ :

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\theta_2 = \sin\theta_1, \quad \text{tg } \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = n.$$

Поэтому в соответствии с формулами Френеля:

$$r_s = \frac{n_1 - n_2 \cdot \text{tg}\theta_1}{n_1 + n_2 \cdot \text{tg}\theta_1} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} = \frac{1 - n^2}{1 + n^2},$$

$$t_s = \frac{2n_1}{n_1 + n_2 \cdot \text{tg}\theta_1} = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2} = \frac{2}{1 + n^2},$$

$$r_p = \frac{n_2 - n_1 \cdot \text{tg}\theta_1}{n_2 + n_1 \cdot \text{tg}\theta_1} = 0,$$

$$t_p = \frac{2n_1}{n_2 + n_1 \cdot \text{tg}\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}.$$

На границе *стекло-воздух* при  $\theta'_1 = \theta'_{\text{Бр}} = \theta_2$ :

$$\theta'_1 + \theta'_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\theta'_2 = \sin\theta'_1,$$

$$\text{tg } \theta'_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}.$$

$$r'_s = \frac{n^2 - 1}{1 + n^2}, \quad t'_s = \frac{2n^2}{1 + n^2}; \quad r'_p = 0, \quad t'_p = n.$$

Для пучка 1:

$$I^{(1)} = I_s^{(1)} + I_p^{(1)} = r_s^2 \cdot I_s^{(0)} + r_p^2 \cdot I_p^{(0)} = \left( \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)^2 \cdot \frac{I_0}{2};$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{I_s^{(1)} - I_p^{(1)}}{I_s^{(1)} + I_p^{(1)}} = 1.$$

Для пучка 2:

$$I^{(2)} = I_s^{(2)} + I_p^{(2)} = nt_s^2 \cdot I_s^{(0)} + nt_p^2 \cdot I_p^{(0)} = n \left( \frac{2}{1+n^2} \right)^2 \cdot \frac{I_0}{2} + n \frac{1}{n^2} \cdot \frac{I_0}{2} =$$

$$= n \frac{4n^2 + (1+n^2)^2}{n^2(1+n^2)^2} \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{1+6n^2+n^4}{n(1+n^2)^2} \cdot \frac{I_0}{2}.$$

$$\Delta^{(2)} = \frac{I_s^{(2)} - I_p^{(2)}}{I_s^{(2)} + I_p^{(2)}} = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2} = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2} = -0,08.$$

Для пучка 3:

$$I^{(3)} = I_s^{(3)} + I_p^{(3)} = (r'_s)^2 \cdot I_s^{(2)} + (r'_p)^2 \cdot I_p^{(2)} =$$

$$= n(r'_s)^2 \cdot t_s^2 \cdot I_s^{(0)} + n(r'_p)^2 \cdot t_p^2 \cdot I_p^{(0)} =$$

$$= n \cdot \left( \frac{n^2 - 1}{1+n^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{2}{1+n^2} \right)^2 \cdot \frac{I_0}{2} + 0 \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{2n(n^2 - 1)^2}{(1+n^2)^4} \cdot I_0;$$

$$\Delta^{(3)} = \frac{I_s^{(2)} - I_p^{(2)}}{I_s^{(2)} + I_p^{(2)}} = 1.$$

Для пучка 4:

$$I^{(4)} = I_s^{(4)} + I_p^{(4)} = \frac{1}{n}(t'_s)^2 \cdot I_s^{(2)} + \frac{1}{n}(t'_p)^2 \cdot I_p^{(2)} =$$

$$= (t'_s)^2 \cdot t_s^2 \cdot I_s^{(0)} + (t'_p)^2 \cdot t_p^2 \cdot I_p^{(0)} =$$

$$= \left( \frac{2n^2}{1+n^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{2}{1+n^2} \right)^2 \cdot \frac{I_0}{2} + 1 \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{16n^4 + (1+n^2)^4}{(1+n^2)^4} \cdot \frac{I_0}{2};$$



$$\begin{aligned} \Delta^{(4)} &= \frac{I_s^{(4)} - I_p^{(4)}}{I_s^{(4)} + I_p^{(4)}} = \frac{(t'_s)^2 \cdot t_s^2 - (t'_p)^2 \cdot t_p^2}{(t'_s)^2 \cdot t_s^2 + (t'_p)^2 \cdot t_p^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{2n^2}{1+n^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{1+n^2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2n^2}{1+n^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{1+n^2}\right)^2 + 1} = \frac{16n^4 - (1+n^2)^4}{16n^4 + (1+n^2)^4} = -0,16. \end{aligned}$$

Если на пути пучка естественного света установить  $N$  таких пластинок (**стопа Столетова**), то степень поляризации прошедшего света будет равна:

$$\Delta_N = \frac{(t'_s)^{2N} \cdot t_s^{2N} - (t'_p)^{2N} \cdot t_p^{2N}}{(t'_s)^{2N} \cdot t_s^{2N} + (t'_p)^{2N} \cdot t_p^{2N}} = \frac{(4n^2)^N - (1+n^2)^{4N}}{(4n^2)^N + (1+n^2)^{4N}}.$$

**Ответ:**  $I^{(1)} = \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2 \cdot \frac{I_0}{2}$ ,  $\Delta^{(1)} = 1$ ,

$$I^{(2)} = \frac{1+6n^2+n^4}{n(1+n^2)^2} \cdot \frac{I_0}{2}$$
,  $\Delta^{(2)} = -0,08$ .

$$I^{(3)} = \frac{2n(n^2-1)^2}{(1+n^2)^4} \cdot I_0$$
,  $\Delta^{(3)} = 1$

$$I^{(4)} = \frac{16n^4 + (1+n^2)^4}{(1+n^2)^4} \cdot \frac{I_0}{2}$$
,  $\Delta^{(4)} = -0,16$

**Задача 7.2.6.** Найти толщину  $d$  воздушного зазора между двумя прямоугольными призмами из стекла с  $n = 1,5$  (см. рис. 7.8), при которой поляризованное перпендикулярно плоскости падения лазерное излучение с длиной волны  $\lambda = 0,63$  мкм проходит через них с потерями амплитуды не более чем в 2,7 раза.

**Решение**

Так как для границы «стекло – воздух» критический угол  $\theta_{\text{кр}} = \arcsin(1/n) \approx 42^\circ$  меньше, чем  $\theta = 45^\circ$ , то для падающего на границу 2 луча выполняются условия полного внутреннего отражения.

Очевидно, что амплитудный коэффициент пропускания всей системы:

$$t = t_1 \cdot |t_2| \cdot |t_0| \cdot |t_3| \cdot t_4.$$

В соответствии с (7.13) при нормальном падении света на границы 1 и 4:

$$t_1 = \frac{2}{1+n} = 0,8;$$

$$t_4 = \frac{2n}{1+n} = 1,2;$$

а для границ 2 и 3:

$$|t_2| = \frac{2n \cos \theta}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1,9;$$

$$|t_3| = \frac{2\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{\sqrt{n^2 - 1}} = 0,63.$$

Согласно (7.22) для воздушного зазора 2-3:

$$|t_0| = e^{-d/\Delta},$$

где  $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} = 0,28 \text{ мкм}$ .

Так как по условию задачи:  $t \geq 1/2,7$ ,

то получаем:

$$d = \Delta \cdot \ln [2,7 \cdot t_1 \cdot |t_2| \cdot |t_3| \cdot t_4] \approx 0,32 \text{ мкм}.$$

**Ответ:**  $d \approx 0,32 \text{ мкм}$

**Задача 7.2.7.** Найти фазовый сдвиг  $\phi$  между  $p$ - и  $s$ -компонентами отраженной волны при полном внутреннем отражении.

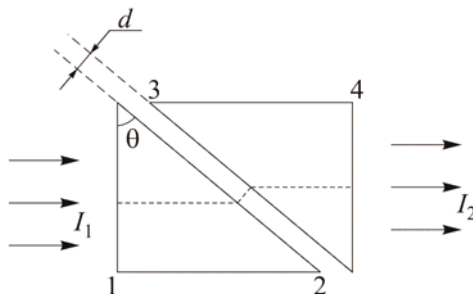


Рис. 7.8. Прохождение лазерного излучения через две прямоугольные призмы с зазором

**Решение**

При полном внутреннем отражении ( $\theta_1 \geq \arcsin(n_2/n_1)$ ) сдвиг по фазе  $p$ - и  $s$ -компонент относительно падающей волны может быть рассчитан по формулам (7.25) и (7.26):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} &= \frac{\sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_1^2 \cos \theta_1}, \\ \operatorname{tg} \frac{\varphi_p}{2} &= \frac{n_1 \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_1}. \end{aligned}$$

Используя формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}},$$

для искомого сдвига  $\varphi = \varphi_p - \varphi_s$  получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta_1}, \quad (7.41)$$

где  $n_{21} = n_2/n_1$ .

**Ответ:** 
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta_1}$$

**Задача 7.2.8.** При каком угле полного внутреннего отражения фазовый сдвиг между  $p$ - и  $s$ -компонентами отраженной волны максимален?

**Решение**

В соответствии с формулой (7.33):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta_1},$$

где  $\arcsin(n_2/n_1) \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ,  $n_{21} = n_2/n_1 < 1$ . Так как  $\varphi(\theta_1) = 0$  при  $\theta_1 = \arcsin(n_2/n_1)$  и  $\theta_1 = \pi/2$ , то исследуя  $\varphi(\theta_1)$  на экстремум, получим, что максимальное значение:

$$\varphi_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}} \quad (7.42)$$

достигается при угле падения:

$$\theta_{1\max} = \arcsin \sqrt{\frac{2n_{21}^2}{1 + n_{21}^2}}.$$

В частности для границы стекло–воздух ( $n_{21} = 1/1,5$ ):

$$\varphi_{\max} = 45^\circ 36' \text{ при } \theta_{1\max} = 51^\circ 20',$$

а  $\varphi = 45^\circ = \pi/4$  при  $\theta_1 = (48^\circ 37' \text{ и } 54^\circ 37')$ .

Чтобы при однократном полном внутреннем отражении света достичь  $\varphi \geq \pi/2$ , необходимо иметь материал с  $n \geq 2,41$  (у алмаза  $n = 2,42$ ).

**Ответ:**  $\theta_{1\max} = \arcsin \sqrt{\frac{2n_{21}^2}{1 + n_{21}^2}}$

**Задача 7.2.9.** Рассчитать преломляющий угол  $\theta$  для параллелепипеда Френеля, сделанного из стекла с  $n = 1,7$ .

### Решение

Луч света, проходя через параллелепипед Френеля, испытывает двукратное полное внутреннее отражение на границе «стекло – воздух» (рис. 7.9). Угол  $\theta$  выбирается таким, чтобы в выходящем луче разность фаз  $2\varphi = \varphi_p - \varphi_s = \pi/2$ , т.е. при однократном отражении:  $\varphi = \pi/4$ .

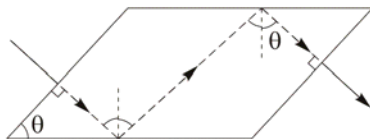


Рис. 7.9. Прохождение луча света через параллелепипед Френеля

Используя формулу (7.33), получим уравнение:

$$\sin^4 \theta - \frac{n^2 + 1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sin^2 \theta + \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0,$$

решение которого при  $n = 1,7$ :

$$\theta = 38^\circ 42' \text{ и } 60^\circ 32'.$$

**Ответ:**  $\theta = 38^\circ 42'$  и  $60^\circ 32'$ .

**Задача 7.2.10.** Каким должен быть минимальный показатель преломления у материала для параллелепипеда Френеля, чтобы обеспечить на выходе сдвиг фаз между  $p$ - и  $s$ -компонентами  $\varphi = \varphi_p - \varphi_s = 3\pi/2$ ?

**Решение**

Согласно (7.34), для материала с показателем преломления  $n$  при однократном полном внутреннем отражении на границе с воздухом разность фаз не может превышать значения:

$$\varphi_{1m} = 2 \operatorname{arctg} \frac{n^2 - 1}{2n},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{1m}}{2} = \frac{n^2 - 1}{2n}.$$

Решая последнее уравнение относительно  $n$ , получим:

$$n = \frac{1 + \sin \frac{\varphi_{1m}}{2}}{\cos \frac{\varphi_{1m}}{2}}.$$

Поскольку по условию задачи  $\varphi_{1m} = \varphi/2 = 3\pi/4$ , то

$$n = \frac{1 + \sin \frac{3\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{8}} = 5,028.$$

(Материалов с таким значением  $n$  в оптическом диапазоне нет!)

**Ответ:**  $n = 5,028$

### 7.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.3.1.** Под каким углом нужно отразить свет с естественной поляризацией от кристалла каменной соли ( $n = 1,544$ ), чтобы получить максимальную степень поляризации отраженного света?

**Ответ:**  $57^\circ 05'$ .

**Задача 7.3.2.** Узкий пучок неполяризованного света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из  $N$  толстых плоскопараллельных стеклянных пластин. Найти степень поляризации прошедшего света, если  $N = 1, 2, 5$  и  $10$ .

**Ответ:** 0,16, 0,31; 0,67 и 0,92.

**Задача 7.3.3.** При каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы с преломляющим углом  $60^\circ$ , проходит через нее без потерь на отражение?

**Ответ:** 1) свет поляризован в плоскости падения; 2) показатель преломления призмы равен 1,73.

**Задача 7.3.4.** Неполяризованный свет падает под углом  $45^\circ$  на поверхность стекла с показателем преломления 1,53. Найти степень поляризации отраженного света.

**Ответ:** 0,82.

**Задача 7.3.5.** Найти степень поляризации луча, прошедшего через стеклянную пластинку с показателем преломления 1,5 при углах падения  $20, 45, 60$  и  $80^\circ$ , если изначально свет не был поляризован.

**Ответ:**  $-0,015; -0,091; -0,176; -0,402$ .

**Задача 7.3.6.** Какой показатель преломления должен быть у вещества, чтобы в результате однократного полного внутреннего отражения на его границе с воздухом линейно-поляризованный свет с азимутом поляризации  $45^\circ$  преобразовывался в циркулярно-поляризованный?

**Ответ:**  $\approx 2,41$ .

**Задача 7.3.7.** При каком показателе преломления  $n$  среды коэффициент отражения неполяризованного света достигает минимума для углов падения от  $0$  до  $90^\circ$ ?

**Ответ:**  $n > 3,732$ .

## Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, главы XXIII, XXIV, XXV.

2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, глава V.
3. *Матвеев А.Н.* Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§16,17.
4. *Бутиков Е.И.* Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 3.
5. *Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А.* Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §6.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §2.
7. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §5.4.
8. *Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н.* Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел III.

## Глава 8

## ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ЗАВИСИМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ЧАСТОТЫ. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

## 8.1. Теоретическое введение

Как уже отмечалось в гл. 2, в однородной линейной изотропной среде могут распространяться плоские монохроматические электромагнитные волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

причем частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  связаны друг с другом дисперсионным соотношением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon,$$

или

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad (8.2)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (8.3)$$

– комплексная (в общем случае) диэлектрическая проницаемость среды, а

$$n = \sqrt{\varepsilon} = n' - in'' \quad (8.4)$$

– комплексный показатель преломления.

В связи с тем, что  $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_0$ , модуль проницаемости

$$|\varepsilon| = \sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} \quad (8.4)$$

определяет амплитуду электрической индукции  $\mathbf{D}_0$ , а

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (8.5)$$

характеризует разность фаз между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  ( $\delta$  – так называемый угол диэлектрических потерь).



В соответствии с (8.3) волновой вектор  $\mathbf{k}$  может быть представлен в виде:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}'' , \quad (8.5)$$

где  $k' = \frac{\omega}{c} n'$  и  $k'' = \frac{\omega}{c} n''$ .

С учетом (8.5), уравнение плоской волны, (например, для E) принимает вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} . \quad (8.6)$$

Согласно (8.7), плоская монохроматическая волна распространяется в направлении  $\mathbf{k}'$  с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{k'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'} = \frac{c}{n'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'}, \quad (8.7)$$

где  $n'$  – показатель преломления.

Вектор  $\mathbf{k}''$  указывает направление максимального изменения амплитуды волны. При  $n'' = \frac{ck''}{\omega} > 0$  амплитуда волны экспоненциально уменьшается в направлении  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}''}$ , поэтому  $n''$  иногда называют показателем поглощения.

Поскольку интенсивность  $I$  волны в среде пропорциональна квадрату ее амплитуды, то в случае  $n'' > 0$ :

$$I = I_0 e^{-\alpha \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}''}} , \quad (8.8)$$

где  $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n''$  – коэффициент поглощения, не зависящий от интенсивности световой волны (закон Бугера).

В соответствии с (8.3) и (8.4):

$$n' - in'' = \sqrt{\varepsilon' - i\varepsilon''} ,$$

поэтому

$$(n')^2 = \frac{1}{2} \varepsilon' \cdot \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)$$

и

$$(n'')^2 = \frac{1}{2} \varepsilon' \cdot \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right) .$$

Если  $\text{tg}^2\delta \ll 1$  (среда – диэлектрик), то  $n' \approx \sqrt{\varepsilon'}$  и  $n'' = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon'}|\text{tg}\delta|$ ; если  $\text{tg}^2\delta \gg 1$  (среда – проводник), то  $n' \approx n'' = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}|\text{tg}\delta|}$ .

Совокупность явлений, обусловленных зависимостью характеристик среды  $n'$  и  $n''$  от частоты  $\omega$  световой волны, получила название *дисперсии света*.

Основные закономерности распространения света в среде зачастую удается описать с помощью простой классической модели, в которой среда рассматривается как ансамбль гармонических осцилляторов (*модель Лоренца*).

В рамках этой модели зависимость линейной оптической восприимчивости  $\chi$  среды от частоты  $\omega$  имеет вид:

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}, \quad (8.9)$$

где  $\omega_0$  и  $\Gamma$  – собственная частота и коэффициент затухания энергии колебаний осцилляторов (как правило,  $\Gamma \ll \omega_0$ ),  $\omega_p$  – так называемая *плазменная частота*:

$$\omega_p^2 = \frac{N \cdot e^2}{\varepsilon_0 m}, \quad (8.10)$$

$e$  и  $m$  – заряд и масса осцилляторов,  $N$  – их концентрация.

Для *разреженных* газов вблизи резонансной частоты ( $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ):

$$n'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4},$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4c} \cdot \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Графики зависимостей  $n'(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$  приведены на рис. 8.1.

Как видно из рисунка, вне полосы поглощения (шириной  $\Delta\omega \approx \Gamma \ll \omega_0$ ) производная  $\partial n/\partial\omega > 0$  – область *нормальной дисперсии*.

Если  $\omega \ll \omega_0$ , то в соответствии с (8.15):

$$n - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) \quad (8.11)$$

– дисперсионная формула Коши, которая хорошо описывает дисперсию газов в видимой и ИК-областях спектра.

Для плотных сред в области прозрачности ( $|\omega - \omega_0| \gg \Gamma$ ) закон дисперсии хорошо описывается формулой Лоренца–Лоренца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.12)$$

Так как, согласно (8.10),

$$\omega_p^2 = \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 m},$$

а плотность вещества  $\rho \sim N$ , то удельная рефракция вещества:

$$r = \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \cdot \frac{1}{\rho} \quad (8.13)$$

не должна зависеть от плотности.

В области высоких частот ( $\omega \gg \omega_0$ ):

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (8.14)$$

В случае конденсированных сред ( $N \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ) соответствующая плазменной частоте длина волны

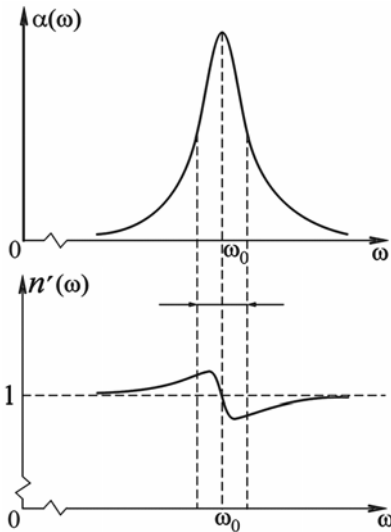


Рис. 8.1. Зависимости  $\alpha$  и  $n'$  от частоты  $\omega$

$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 0,3 \text{ мкм}$  (УФ-область спектра), поэтому при  $\lambda < 0,1 \text{ мкм}$

излучение и вещество взаимодействуют слабо.

Для ионизованного газа (плазмы):  $\omega_0 = 0$ ,  $N_e = N_{\text{ion}}$ ,

$m_e \ll m_{\text{ion}}$  и

$$n^2 = 1 - \frac{(\omega p)_e^2}{\omega^2}. \quad (8.15)$$

Поскольку фазовая скорость (8.7) зависит от показателя преломления  $n'$ , то в среде с дисперсией  $n = n(\omega)$ :

$$v = v(\omega) = \frac{c}{n'(\omega)} = \frac{\omega}{k'(\omega)}. \quad (8.16)$$

А это значит, что при распространении светового импульса конечной длительности в среде с дисперсией его форма может существенно исказиться.

Для узкополосных сигналов в прозрачных средах ( $n'' \ll 1$ ) вводится понятие *групповой скорости*:

$$u = \frac{d\omega}{dk}, \quad (8.17)$$

которая характеризует скорость движения огибающей волнового пакета (а следовательно, и скорость переноса волной энергии), которая, вообще говоря, отличается от фазовой скорости (см. рис. 8.2). Кроме того, с позиций формализма (8.17) в области аномальной дисперсии ( $dn/d\omega < 0$ ) групповая скорость  $u$  должна быть больше скорости света в вакууме. Однако из-за сильного поглощения света в этой области понятие групповой скорости теряет смысл.

В случае *плазмы* дисперсионное уравнение, с учетом (8.15) и (8.16), имеет вид:

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2.$$

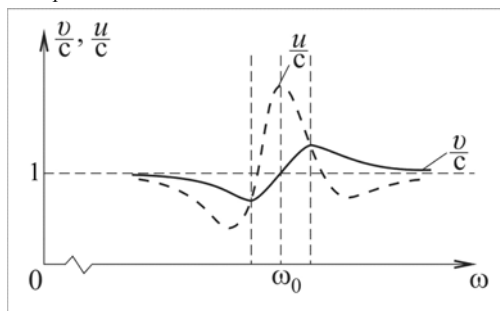


Рис. 8.2. Зависимости нормированных  $v$  и  $u$  от частоты  $\omega$

Если  $\omega < \omega_p$ , то проницаемость  $\varepsilon = c^2 k^2 / \omega^2 < 0$ , а следовательно,  $\mathbf{k} = -i\mathbf{k}''$  и волна в плазму не проходит (отражается). В области прозрачности ( $\omega > \omega_p$ ) фазовая скорость

$$v = \frac{c}{n} > c$$

(поскольку  $n < 1$ ), а групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v} = cn, \quad (8.18)$$

или

$$u \cdot v = c^2. \quad (8.19)$$

Так как в общем случае:

$$ck = \omega n(\omega),$$

то

$$cdk = d\omega \cdot n(\omega) + \omega dn(\omega)$$

и

$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right),$$

или

$$u = v \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}. \quad (8.20)$$

Если закон дисперсии задан в виде:  $v = v(\lambda)$ , то

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (8.21)$$

— формула Рэлея.

## 8.2. Задачи с решениями

**Задача 8.2.1.** Определить показатель преломления углекислоты при нормальных условиях. Поляризуемость молекулы  $\text{CO}_2$  равна  $\beta = 3,3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$ .

### Решение

Показатель преломления  $n$  и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  связаны соотношением (8.4):

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

В свою очередь

$$\varepsilon = 1 + \chi,$$

а диэлектрическая восприимчивость  $\chi$  пропорциональна концентрации  $N$  молекул газа:

$$\chi = N \cdot \beta,$$

где  $\beta$  – поляризуемость одной молекулы.

Таким образом,

$$n = \sqrt{1 + N\beta}.$$

При нормальных условиях концентрация молекул  $\text{CO}_2$  равна  $N = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ , поэтому

$$n = \sqrt{1 + 2,687 \cdot 10^{25} \cdot 3,3 \cdot 10^{-29}} = 1,00044.$$

**Ответ:** 1,00044.

**Задача 8.2.2.** При нормальных условиях плотность газообразного водорода  $\rho_{\Gamma} = 0,0000896 \text{ г/см}^3$ , а его показатель преломления  $n_{\Gamma} = 1,000138$ . Определить плотность жидкого водорода  $\rho_{\text{ж}}$ , если его показатель преломления  $n_{\text{ж}} = 1,107$ .

### Решение

Поскольку в области прозрачности удельная рефракция вещества практически не зависит от плотности, то в соответствии с (8.13):

$$\left( \frac{n_{\Gamma}^2 - 1}{n_{\Gamma}^2 + 2} \right) \frac{1}{\rho_{\Gamma}} = \left( \frac{n_{\text{ж}}^2 - 1}{n_{\text{ж}}^2 + 2} \right) \frac{1}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Отсюда получаем

$$\rho_{\text{ж}} = \left( \frac{n_{\Gamma}^2 + 2}{n_{\Gamma}^2 - 1} \right) \left( \frac{n_{\text{ж}}^2 - 1}{n_{\text{ж}}^2 + 2} \right) \rho_{\Gamma},$$

или

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{\left( (1,000138)^2 + 2 \right) \cdot \left( (1,1107)^2 - 1 \right)}{\left( (1,000138)^2 - 1 \right) \cdot \left( (1,1107)^2 + 2 \right)} \cdot 0,0000896 = 0,07 \text{ г/см}^3.$$

**Ответ:**  $\rho_{\text{ж}} = 0,07 \text{ г/см}^3$ .

**Задача 8.2.3.** Концентрация электронов на Солнце на расстоянии  $r = 0,06R$  от границы фотосферы ( $R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$  – радиус Солнца) примерно равна  $N = 2 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ . Найти максимальную длину волн, которые могут достигать Земли из этой области Солнца.

**Решение**

В соответствии с (8.15) граница области прозрачности плазмы может быть найдена из условия:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \geq 0,$$

где  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$  – плазменная частота,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,

$\varepsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$ ,  $m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ .

Таким образом,

$$\omega \geq \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}},$$

или

$$\lambda \leq \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 2,3 \text{ м}.$$

**Ответ:** 2,3 м.

**Задача 8.2.4.** Исследования прохождения плоской электромагнитной волны частотой  $\nu = 8 \text{ МГц}$  через плоский однородный слой плазмы с концентрацией свободных электронов  $N = 10^{12} \text{ м}^{-3}$  показали, что при увеличении толщины слоя  $d$  в  $\eta_d = 2$  раза энергетический коэффициент пропускания  $\tau$  изменяется в  $\eta_\tau = 10$  раз. Пренебрегая отражением волны на границах, найти толщину  $d$  слоя плазмы.

**Решение**

В соответствии с законом Бугера (8.8):

$$I(d) = I_0 e^{-\alpha d}$$

и

$$I(\eta_d d) = I_0 e^{-\alpha \eta_d d},$$

где  $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n''$  – коэффициент поглощения.

По условию задачи:

$$\frac{I(d)}{I(\eta_d d)} = \eta_\tau.$$

При концентрации свободных электронов  $N = 10^{12} \text{ м}^{-3}$  плазменная частота равна:

$$\omega_p = \frac{e}{\sqrt{\epsilon_0 m}} \sqrt{N} = 56,7 \sqrt{N} = 56,7 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Так как частота волны  $\omega = 2\pi\nu = 50,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ , то диэлектрическая проницаемость плазмы на этой частоте, согласно (8.15), равна

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -0,272 < 0,$$

следовательно,  $n' = 0$ ,  $n'' = \sqrt{|\epsilon|}$

Таким образом,

$$d = \frac{\ln \eta_r}{\eta_d \alpha} = \frac{\ln 10}{2 \frac{\omega}{c} n''} \approx 13,5 \text{ м}.$$

**Ответ:**  $d \approx 13,5 \text{ м}$ .

**Задача 8.2.5.** Импульсное излучение от одного из пульсаров на частоте  $\nu_1 = 80 \text{ МГц}$  достигает Земли на  $\Delta t = 7 \text{ с}$  позже, чем импульс на частоте  $\nu_2 = 2000 \text{ МГц}$ . Оценить расстояние  $L$  до пульсара, если средняя концентрация электронов в межзвездном пространстве  $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$ .

**Решение**

В соответствии с (8.18) в области прозрачности плазмы ( $\omega > \omega_p = 56,7 \sqrt{N} \approx 2,0 \text{ кГц}$ ) групповая скорость излучения в межзвездном пространстве равна:



$$u = c \cdot n(\omega),$$

где  $n^2 = 1 - (v_p/v)^2$ .

Следовательно, задержка  $\Delta t$  между импульсами:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{L}{c} \left( \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right),$$

а расстояние до пульсара:

$$L = \frac{c \cdot \Delta t}{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}.$$

Так как  $v_1, v_2 \gg v_p$ , то

$$n \approx 1 - \frac{v_p^2}{2v^2}, \quad \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{v_p^2}{2v^2},$$

и

$$L = \frac{c \cdot \Delta t}{v_p^2} \cdot \frac{2v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ м} \approx 700 \text{ св. лет.}$$

**Ответ:**  $L \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ м} \approx 700 \text{ св. лет.}$

**Задача 8.2.6.** Найти зависимости фазовой  $v(\lambda)$  и групповой  $u(\lambda)$  скоростей от длины волны для следующих законов дисперсии:

а)  $\omega^2 = gk$  (для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде,  $g$  – ускорение свободного падения);

б)  $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3$  (для капиллярных волн,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  – плотность жидкости);

в)  $\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$  (для волн де Бройля,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  – масса частицы).

**Решение**

$$\text{а) } v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}};$$

$$u = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{1}{2\omega/g} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi} \lambda};$$

т.е. групповая скорость в два раза меньше фазовой:  $u = \frac{v}{2}$ .

$$\text{б) } v = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho k^2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda};$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3\sigma k^2}{2\rho\omega} = \frac{3\sigma}{2\rho} \frac{k^2}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k^3} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Следовательно,  $u = \frac{3}{2}v$ .

$$\text{в) } v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar}{2m} k = \frac{\hbar}{2m} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{2m\lambda};$$

$$u = \frac{\hbar}{m} k = \frac{h}{m\lambda}.$$

Таким образом,  $u = 2v$ .

**Ответ:**

$$\text{а) } v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \lambda;$$

$$\text{б) } v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda}; \quad u = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda};$$

$$\text{в) } v = \frac{h}{2m\lambda}; \quad u = \frac{h}{m\lambda}.$$

**Задача 8.2.7.** Найти групповую скорость  $u$  рентгеновского излучения в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения для границы "среда – воздух" равен  $\theta_{\text{кр}}$ .

**Решение**

Для рентгеновского излучения ( $\omega \gg \omega_0 \gg \Gamma$ ) применима формула (8.14):

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

В области прозрачности среды ( $\omega > \omega_p$ ):

$$n < 1,$$

поэтому фазовая скорость

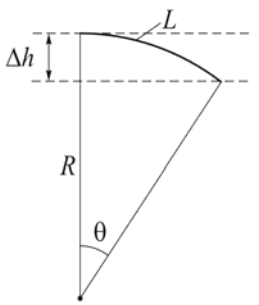


Рис. 8.3. К вопросу об изгибе луча света вблизи поверхности Земли

**Ответ:**  $u = c \cdot \sin\theta_{\text{кр}}$ .

**Задача 8.2.8.** Световой луч распространяется параллельно поверхности Земли. Считая воздух неподвижным, найти отклонение луча  $\Delta h$  на пути  $L = 1$  км, если давление воздуха  $p_0 = 1$  атм, температура  $T = 300$  К, а коэффициент преломления воздуха в этих условиях  $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$ .

**Решение**

В оптически неоднородной среде  $n = n(\mathbf{r})$  луч света не прямолинеен и изгибается в область с бóльшим значением показателем преломления. Радиус кривизны  $R_{\text{кр}}$  луча в такой среде обратно пропорционален градиенту показателя преломления:

$$\frac{1}{R_{\text{кр}}} = \frac{|\nabla n|}{n} \quad (8.22)$$

Для воздуха показатель преломления (см. Задачу 8.1):

$$n(h) = 1 + \frac{N(h)\beta}{2},$$

где  $N$  – концентрация молекул воздуха на высоте  $h$  от поверхности Земли,  $\beta$  – поляризуемость воздуха в расчете на одну молекулу. В соответствии с барометрической формулой:

$$v = \frac{c}{n} > c,$$

а групповая скорость равна

$$u = c \cdot n,$$

поскольку согласно (8.19):

$$u \cdot v = c^2.$$

Для границы «воздух–среда» по закону преломления:

$$n_{\text{возд}} \cdot \sin\theta_{\text{кр}} = n \cdot \sin\frac{\pi}{2},$$

а так как  $n_{\text{возд}} \approx 1$ , то  $n \approx \sin\theta_{\text{кр}}$  и, следовательно:

$$u = c \cdot \sin\theta_{\text{кр}}.$$

$$N(h) = N(0) e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

где  $\mu$  – молярная масса воздуха,  $N(0) = \frac{p_0}{kT}$ . Учитывая, что

$$\mu = 28 \text{ г/моль}, \quad \frac{\mu gh}{RT} = \frac{28 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3}{8,3 \cdot 300} \approx 0,11, \text{ а по условию зада-}$$

чи  $\frac{\beta p_0}{2kT} = 3 \cdot 10^{-4}$ , можем записать:

$$n(h) = 1 + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{p_0}{kT} e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \approx 1 + \frac{\beta p_0}{2 kT} \left( 1 - \frac{\mu gh}{RT} \right),$$

а

$$|\nabla n| = \left| \frac{dn}{dh} \right| = \frac{\mu g}{RT} \frac{\beta p_0}{2 kT}.$$

В соответствии с (8.22) радиус кривизны светового луча на высоте  $h$ :

$$R_{\text{кр}} = \frac{n}{|\Delta n|} \approx \frac{1 + \frac{\beta p_0}{2kT}}{\frac{\beta_0 p_0}{2} \frac{\mu g}{kT RT}} \approx \frac{2kT}{\beta_0 p_0} \cdot \frac{RT}{\mu g} \approx 30 \cdot 10^6 \text{ м} > R_3,$$

где  $R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$  – радиус Земли.

При прохождении светом расстояния  $L = 1 \text{ км}$  его отклонение по направлению к поверхности Земли (см. рис. 8.3) составит:

$$\Delta h = R_{\text{кр}} (1 - \cos \theta) \approx R_{\text{кр}} \frac{\theta^2}{2} = \frac{L^2}{2R} = \frac{10^6}{2 \cdot 30 \cdot 10^6} \approx 1,7 \text{ см}.$$

**Ответ:**  $\Delta h = 1,7 \text{ см}$ .

**Задача 8.2.9.** Показатель преломления некоторой прозрачной среды вблизи частоты  $\omega^*$  изменяется по закону  $n(\omega) = n_0 - \frac{A}{\omega - \omega_0}$ ,

где  $n_0 = 1,5$ ,  $\omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $A = \text{const}$ ,  $\omega < \omega_0$ . Через слой такого вещества толщиной  $l = 3 \text{ см}$  проходит короткий световой импульс, спектральный состав  $(\omega^* - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega^* + \frac{\Delta\omega}{2})$  которого достаточно

узок:  $\Delta\omega \ll |\omega^* - \omega_0|$ . Оценить время  $\tau$  прохождения импульса через слой, если  $|\omega^* - \omega_0| \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$  и  $|n(\omega^*) - n_0| = 0,01$ .

### Решение

Так как искомое время

$$\tau = \frac{l}{u},$$

где  $u$  – групповая скорость света в среде, то воспользуемся формулой (8.20):

$$u = \frac{c}{n + \omega^* \frac{dn}{d\omega}}.$$

Используя данные из условия задачи, получим:

$$\frac{dn}{d\omega} \approx \frac{n_0 - n^*}{\omega^* - \omega_0} = \frac{0,01}{10^{12}} = 10^{-14} \text{ с},$$

$$\omega^* \approx \omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

В этом приближении групповая скорость равна:

$$u = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5 + 4 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-14}} = \frac{3 \cdot 10^8}{5,5} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

а искомое время прохождения импульса через слой:

$$\tau = \frac{0,03 \cdot 5,5}{3 \cdot 10^8} = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

**Ответ:**  $\tau = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ .

**Задача 8.2.10.** Плазма заполняет полупространство  $x > 0$ , в котором концентрация электронов нарастает по закону  $N(x) = \mu x$  ( $\mu = \text{const}$ ). Электромагнитный волновой пакет со средней частотой  $\omega^*$  падает нормально на границу  $x = 0$ , проходит в плазму и возвращается через некоторое время  $\tau$ . Найти это время.

### Решение

В соответствии с (8.15) глубина  $\Delta x$  проникновения пакета в плазму определяется значением критической концентрации электронов  $N_{\text{кр}}$ , при которой  $\omega^* = \omega_p$ :

$$\omega_p^2 = \frac{\mu \cdot \Delta x \cdot e^2}{\varepsilon_0 m} = \omega^{*2},$$

откуда

$$\Delta x = \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{\mu e^2}.$$

Поскольку

$$d t = \frac{d x}{u},$$

а для плазмы:

$$u = c \cdot n = c \sqrt{1 - \frac{\mu e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot x},$$

то для искомого времени  $\tau$  получаем:

$$\tau = 2 \int_0^{\Delta x} dt = \frac{2}{c} \int_0^{\Delta x} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\mu e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot x}} = \frac{4}{c} \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{\mu e^2}.$$

**Ответ:**  $\tau = \frac{4}{c} \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{\mu e^2}.$

### 8.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 8.3.1.** Найти показатель преломления атмосферы на поверхности Венеры. Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа, поляризуемость молекул которого равна  $3,3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$ . Давление на Венере 100 атм, температура  $500^\circ\text{C}$ .

**Ответ:**  $\approx 1,015$ .

**Задача 8.3.2.** Определить число  $N_1$  свободных электронов (в расчете на атом) в пленке серебра, если она прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии 5 эВ. Плотность серебра  $10,5 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ , атомная масса 108 г/моль.

**Ответ:**  $N_1 \approx 1/6$ .

**Задача 8.3.3.** Для радиоволн с частотой 10 МГц показатель преломления ионосферы равен 0,9. Найти фазовую  $v$  и групповую

$u$  скорости для этих радиоволн, а также концентрацию  $N$  электронов в ионосфере.

**Ответ:**  $v \approx 3,3 \cdot 10^8$  м/с;  $u \approx 2,7 \cdot 10^8$  м/с;  $N \approx 2,4 \cdot 10^9$  м<sup>-3</sup>.

**Задача 8.3.4.** Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны 62 пм проходит через алюминиевый экран толщиной 2,6 см. Какой толщины должен быть свинцовый экран, чтобы ослаблять этот пучок в той же степени? Массовые показатели ослабления для Al и Pb равны соответственно 3,48 и 72,0 см<sup>2</sup>/г.

**Ответ:** 0,3 мм.

**Задача 8.3.5.** Найти групповую скорость  $u$  для волнового пакета ( $\lambda$ ,  $\delta\lambda \ll \lambda$ ), если зависимость фазовой скорости  $v$  от длины волны  $\lambda$  имеет вид:

а)  $v = a = \text{const}$ ;

б)  $v = a\sqrt{\lambda}$ ;

в)  $v = a/\sqrt{\lambda}$ ;

г)  $v = a/\lambda$ ;

д)  $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$  ( $c$  – скорость света в вакууме,  $b = \text{const}$ ).

**Ответ:** а)  $u = a$ ; б)  $u = a\sqrt{\lambda}/2$ ; в)  $u = 3a/(2\sqrt{\lambda})$ ; г)  $u = 2a/\lambda$ ;

д)  $u = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}}$ .

**Задача 8.3.6.** Найти радиус кривизны светового луча, пущенного горизонтально вблизи поверхности Венеры. Ускорение свободного падения на Венере равно 0,84 g ( $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>).

**Ответ:**  $\approx 1145$  км.

**Задача 8.3.7.** На плоско-выпуклую стеклянную линзу с радиусом кривизны поверхности 100 см падает плоская монохроматическая волна, частота которой возрастает со временем по закону  $\omega = \omega_0(1 + at)$ ,  $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ ,  $\lambda_0 = 1$  мкм. Определить постоянную  $a$ , если фокус перемещается со скоростью 3 км/с.

Показатель преломления линзы  $n(\lambda_0) = 1,5$ ; дисперсия линзы  $\frac{dn}{d\lambda} = -10^3 \text{ см}^{-1}$ .

**Ответ:**  $a = 0,75 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

**Задача 8.3.8.** Определить время прохождения светового импульса через слой прозрачного вещества толщиной 1 см, для которого показатель преломления вблизи средней частоты  $\bar{\omega}$  импульса:  $n(\omega) = n_0 - A(\omega - \omega_0)$ , где  $n_0 = 1,5$ ;  $A = \text{const}$ , а  $\omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  – резонансная частота для атомов вещества. Рассмотреть случай, когда  $\bar{\omega} < \omega_0$ ,  $|\bar{\omega} - \omega_0| \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $|n(\bar{\omega}) - n_0| \approx 0,1$ ; спектральная ширина импульса  $\Delta\omega \ll |\bar{\omega} - \omega_0|$ .

**Ответ:**  $\approx 1,4 \text{ нс}$ .

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, глава XXVIII.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Физматлит, 1980, глава VIII.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §15.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 2.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §§.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §5.5.



## Глава 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.  
ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

## 9.1. Теоретическое введение

Как уже отмечалось в гл.2, в диэлектрической среде могут распространяться *плоские гармонические волны*  $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  типа

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi) \quad (9.1)$$

с независимой от времени амплитудой  $\mathbf{A}_0$ .

Если подставить  $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  в виде (9.1) в уравнения Максвелла (2.1) – (2.4), то получим:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{H} \quad ,$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \mathbf{D} \quad ,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = 0 \quad ,$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = 0 \quad .$$

Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  взаимно ортогональны, вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{H}$ , а кроме того, векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k}$  и удовлетворяют уравнению:

$$k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k}, \mathbf{E}) \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{D} = 0 \quad . \quad (9.2)$$

Если среда *линейная и изотропная*, то ее восприимчивость  $\chi$  и проницаемость  $\varepsilon = 1 + \chi$  – скалярные величины, поэтому:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad , \quad (9.3)$$

а кроме того,  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ . В среде без дисперсии фазы волн  $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  совпадают. Круговая частота  $\omega$  и волновое число  $k$  в (9.1) связаны дисперсионным уравнением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \quad , \quad (9.4)$$

а фазовая скорость волны (в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ )

$$\mathbf{v} = \frac{c}{n} \mathbf{N} \quad (9.5)$$

зависит от показателя преломления  $n = \sqrt{\varepsilon}$  ( $\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_k$  – единичный вектор волновой нормали). Если среда изотропная, то фазовая скорость не зависит от направления  $\mathbf{N}$  распространения волны и состояния ее поляризации.

В случае *анизотропной* среды связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в общем случае более сложная:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (9.6)$$

где  $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$  – вещественный (если нет дисперсии) симметричный ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ) тензор диэлектрической проницаемости второго ранга.

В волне, распространяющейся в такой анизотропной среде, векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  не обязательно коллинеарны, но лежат в одной плоскости – *плоскости поляризации* световой волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = |[\mathbf{E}, \mathbf{H}]| \times \mathbf{s}$ , где  $\mathbf{s}$  – единичный лучевой вектор в направлении потока энергии (рис 9.1).

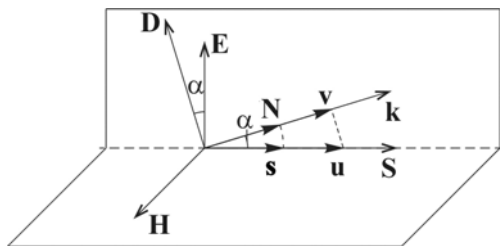


Рис. 9.1. Взаимная ориентация векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{k}$  при распространении световой волны в анизотропной среде

Соответствующим выбором декартовой системы координат симметричный тензор  $\varepsilon_{ij}$  может быть приведен к диагональному виду. В этом случае координатные оси совпадают с так называемыми *главными направлениями* среды (кристалла). В проекциях на эти направления векторное материальное уравнение (9.3) распадается на три скалярных:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i. \quad (9.7)$$

Значения диагональных компонент тензора  $\varepsilon_i$  называют его *главными значениями* или *главными диэлектрическими проницае-*

мостями. Если  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ , то среда называется *двуосной*. Если  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$  ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y \equiv \varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$ ), то среда *одноосная (положительная, если  $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$ , и отрицательная, если  $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$ )*. В случае изотропной среды:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ .

С учетом (9.4), (9.5) и (9.7) из уравнения (9.2) может быть получена система уравнений:

$$(\mathbf{N}, \mathbf{E}) N_i - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_i \right) E_i = 0$$

или

$$D_i = \frac{\varepsilon_0 (\mathbf{N}, \mathbf{E}) N_i}{1/\varepsilon_i - v^2/c^2}. \quad (9.8)$$

где  $N_i$  – направляющие косинусы волновой нормали  $\mathbf{N}$ . Поскольку  $(\mathbf{N}, \mathbf{D}) = 0$ , из системы (9.8) можно получить уравнение

$$\sum_i \frac{N_i^2}{i v^2 - v_i^2} = 0, \quad (9.9)$$

которое описывает зависимость фазовой скорости  $v$  плоской монохроматической волны от направления  $\mathbf{N}$  и характеристик  $v_i$  анизотропной среды. Уравнение (9.9) называют *уравнением волновых нормалей Френеля*. Главные скорости  $v_i \equiv c/\sqrt{\varepsilon_i}$ , как и главные показатели преломления  $n_i \equiv \sqrt{\varepsilon_i}$ , являются характеристиками среды.\*)

Анализ уравнения Френеля (9.9) показывает, что в общем случае в *анизотропной* среде в заданном направлении  $\mathbf{N}$  могут распространяться плоские волны лишь с определенной поляризацией.

Для описания оптических свойств анизотропных сред часто используют вспомогательные поверхности – оптическую индикатрису, эллипсоид Френеля, лучевую поверхность и др.

Поскольку в соответствии с (2.25) среднее значение объемной плотности энергии в световой волне равно

$$w = \frac{\varepsilon_0 (\mathbf{E}, \mathbf{D})}{2},$$

\*) Отметим, что  $v_i$  есть скорость волны, *поляризованной* вдоль  $i$ -го главного направления

то в системе главных осей:

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right)$$

или

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1, \quad (9.10)$$

где  $x = \frac{D_x}{\sqrt{2w}}$  и т.д.

Уравнение (9.10) описывает поверхность эллипсоида с полуосями  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , который получил название *оптической индикатрисы*. Центральное сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной заданному направлению  $\mathbf{N}$ , – эллипс (в частном случае – окружность), главные оси которого и определяют две возможные (взаимно ортогональные) ориентации вектора  $\mathbf{D}$  в плоской волне, а длина каждой из полуосей равна показателю преломления для волны с соответствующей поляризацией. Если из некоторой точки (как из начала координат) в каждом направлении отложить отрезки, длины которых равны значениям фазовых скоростей волн, то получим двойную поверхность – так называемую *поверхность нормалей*. Следует отметить, что каждая из двух таких поверхностей не является эллипсоидом.

Поскольку в анизотропной среде векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  коллинеарны только тогда, когда плоская волна распространяется вдоль одного из главных направлений, то в общем случае фазовая скорость  $\mathbf{v}$  (в направлении волновой нормали  $\mathbf{N}$ ) и лучевая скорость  $\mathbf{u}$  (в направлении лучевого вектора  $\mathbf{s}$ ) неколлинеарны (см. рис 9.1), причем в отсутствие дисперсии:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{N}, \mathbf{s}) = \mathbf{u} \cdot \cos \alpha, \quad (9.11)$$

где  $\alpha$  – угол поляризации.

Для заданного направления  $\mathbf{s}$  ориентация вектора  $\mathbf{E}$  может быть найдена с помощью *эллипсоида лучевых скоростей*, называемого также *эллипсоидом Френеля*:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1, \quad (9.12)$$

где  $x = \frac{\varepsilon_0 E_x}{\sqrt{2w}}$  и т.д.

Уравнение (9.12) описывает поверхность эллипсоида с полуосями  $1/n_x$ ,  $1/n_y$  и  $1/n_z$ , который получил название *эллипсоида лучевых скоростей*. Центральное сечение этого эллипсоида плоскостью, перпендикулярной лучу  $\mathbf{s}$ , является в общем случае эллипсом, главные оси которого определяют возможную ориентацию вектора  $\mathbf{E}$ , а длины полуосей пропорциональны соответствующим лучевым скоростям.

По аналогии с уравнением (9.9) для фазовых скоростей, можно получить *уравнение для лучевых скоростей*:

$$\sum_i \frac{s_i^2 \cdot v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0 \quad (9.13)$$

и построить так называемую *лучевую поверхность*. В отличие от поверхностей нормалей, каждая из двух лучевых поверхностей имеет форму эллипсоида. Можно показать, что лучевая поверхность является поверхностью равных фаз для волн, исходящих одновременно из центра эллипсоида во всех направлениях. Поэтому с помощью лучевой поверхности удобно решать задачи на построение Гюйгенса (см. задачу 9.2.4).

В *одноосной* среде (с главными значениями проницаемости  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \equiv \varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_z \equiv \varepsilon_{\parallel}$ ) вдоль оптической оси (т.е. вдоль оси  $z$ ) могут распространяться плоские волны с любой поляризацией. Однако в направлении  $\mathbf{N}$  под углом  $\varphi$  к оптической оси могут распространяться только волны, линейно поляризованные в одном из двух возможных (взаимно перпендикулярных) направлений: *перпендикулярно плоскости главного сечения* (в которой лежат оптическая ось и вектор волновой нормали  $\mathbf{N}$ ) – *обыкновенная* волна с фазовой скоростью

$$v_0 = \frac{c}{n_0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}, \quad (9.14)$$

и в плоскости главного сечения – *необыкновенная* волна с зависящей от  $\varphi$  фазовой скоростью

$$v_e = \frac{c}{n(\varphi)},$$

или

$$v_e(\varphi) = c \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}}}. \quad (9.15)$$

На рис 9.2 показаны сечения (эллипсы) *оптической индикатрисы* плоскостью главного сечения для *одноосных* ( $a$  – положительного,  $b$  – отрицательного) кристаллов.

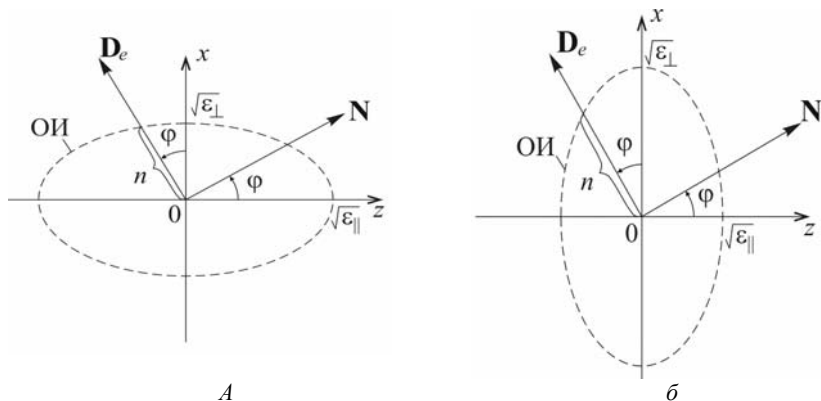


Рис. 9.2. Сечения оптической индикатрисы (ОИ) для одноосных положительного (а) и отрицательного (б) кристаллов

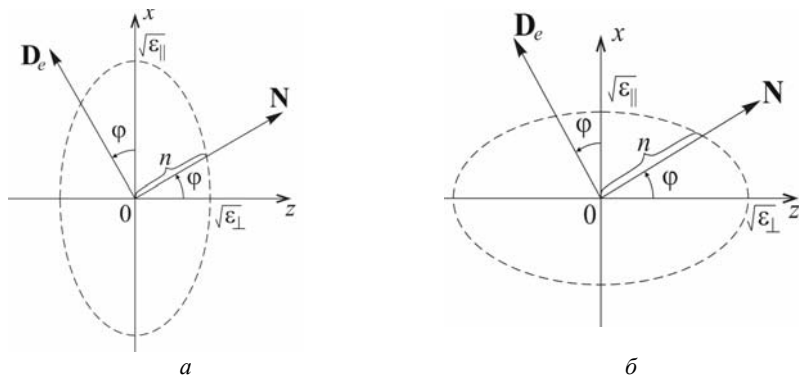


Рис. 9.3. Сечения эллипсоида показателя преломления для одноосных положительного (а) и отрицательного (б) кристаллов

Если повернуть сечение оптической индикатрисы плоскостью  $xOz$  вокруг оси  $y$  на  $90^\circ$  (оси системы координат при этом остаются на месте), то получим сечение *эллипсоида показателя преломления*  $n(\varphi)$  (рис. 9.3). Подобный ему эллипсоид  $k(\varphi) = \frac{\omega}{c} n(\varphi)$  называют *эллипсоидом волновых векторов*. С его помощью удобно описывать преломление волновых векторов на границе с анизотропной сре-

дой, как это показано на рис 9.4 для случая отрицательного кристалла (оптическая ось  $Oz$  лежит в плоскости падения).

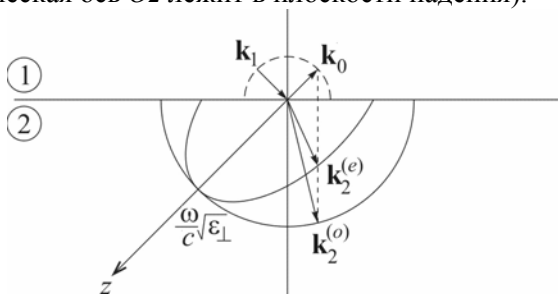


Рис. 9.4. Описание преломления света на границе отрицательного кристалла с помощью эллипсоида волновых векторов

Если для необыкновенной волны задано направление (угол  $\varphi$ ) волновой нормали  $\mathbf{N}_e$  (а значит, и вектора  $\mathbf{D}_e$ ), то направление (угол  $\theta$ ) векторов  $\mathbf{E}_e$  и  $\mathbf{S}_e$  для этой волны можно найти с помощью оптической индикатрисы или эллипсоида показателя преломления соответственно (рис. 9.5): вектор  $\mathbf{E}_e$  перпендикулярен плоскости  $AA$ , касающейся *оптической индикатрисы* в точке ее пересечения с направлением  $\mathbf{D}_e$  (рис 9.5 а); в свою очередь луч  $\mathbf{S}_e$  перпендикулярен плоскости  $BB$ , касающейся *эллипсоида показателя преломления* в точке его пересечения с направлением нормали  $\mathbf{N}$  (рис 9.5 б).

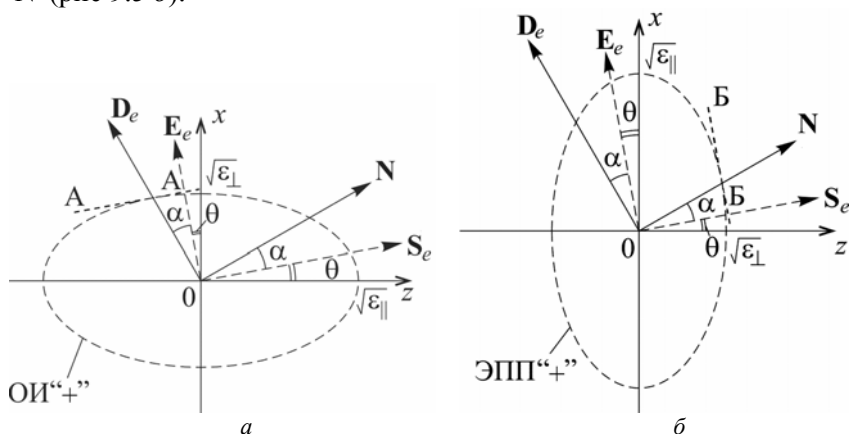


Рис. 9.5. Определение ориентации векторов  $\mathbf{E}_e$  и  $\mathbf{S}_e$  с помощью оптической индикатрисы (а) и эллипсоида показателя преломления (б) для положительного кристалла

Так как для необыкновенной волны углы  $\varphi$  и  $\theta$  связаны соотношением:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{D_z}{D_x} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} E_z}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} E_x} = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \operatorname{tg}\theta, \quad (9.16)$$

то для угла поляризации  $\alpha$  имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha \equiv \operatorname{tg}(\varphi - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta} = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \operatorname{tg}\theta}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \operatorname{tg}^2\theta} \quad (9.17)$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \operatorname{tg}^2\theta}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} \operatorname{tg}^2\theta}. \quad (9.18)$$

На рис 9.6 показаны центральные сечения (эллипсы) лучевого эллипсоида

$$\varepsilon_{\perp} (x^2 + y^2) + \varepsilon_{\parallel} z^2 = 1 \quad (9.19)$$

для одноосных кристаллов ( $a$  – положительного,  $b$  – отрицательного) и взаимная ориентация векторов  $\mathbf{E}_e$  и  $\mathbf{S}_e$ .

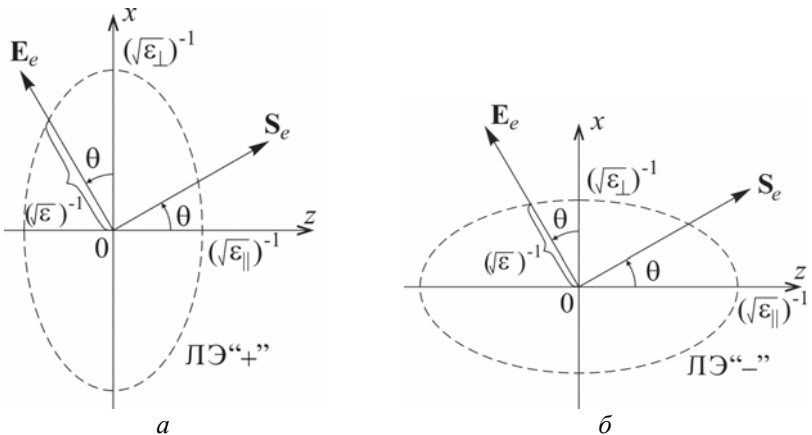


Рис. 9.6. Сечения лучевого эллипсоида и взаимная ориентация векторов  $\mathbf{E}_e$  и  $\mathbf{S}_e$  для положительного ( $a$ ) и отрицательного ( $b$ ) одноосных кристаллов

Как следует из (9.19), при  $y = 0$

$$\varepsilon_{\perp} \sin^2\theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2\theta = \varepsilon, \quad (9.20)$$



поэтому зависимость лучевой скорости необыкновенной волны  $u_e$  от угла  $\theta$  (между  $\mathbf{S}_e$  и оптической осью  $z$ ) имеет вид:

$$u_e(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta}}. \quad (10.21)$$

Очевидно, что если повернуть сечение лучевого эллипсоида плоскостью  $xOz$  вокруг оси  $Oy$  на  $90^\circ$  (оси системы координат при этом остаются на месте), то получим сечение эллипсоида, подобно-го эллипсоиду лучевых скоростей для необыкновенной волны. Вместе со сферой радиуса  $u_o(\theta) = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$  эту сложную поверхность называют *лучевой*.

На рис 9.7 показаны сечения *лучевой поверхности* для положительного (а) и отрицательного (б) одноосных кристаллов, а также способ определения с помощью лучевой поверхности ориентации  $\mathbf{D}_e$  (или  $\mathbf{N}_e$ ), если известна ориентация  $\mathbf{E}_e$  (или  $\mathbf{S}_e$ ).

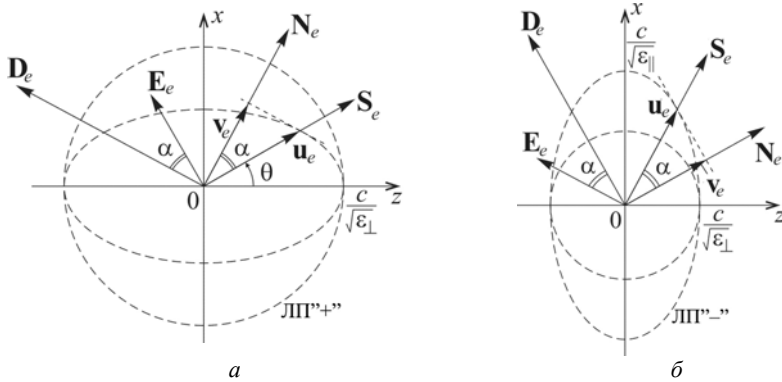


Рис. 9.7. Сечения лучевых поверхностей для положительного (а) и отрицательного (б) одноосных кристаллов

Напомним, что в соответствии с (9.11):

$$v = u_e \cos \alpha,$$

где, как видно из (9.17) и (9.18), угол поляризации  $\alpha$  зависит от  $\theta$  (или  $\varphi$ ).

## 9.2. Задачи с решениями

**Задача 9.2.1.** Найти фазовые скорости плоских гармонических волн с частотой  $\nu$ , бегущих в направлении  $\mathbf{N} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$  в анизотропном материале с главными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_x = 2$ ,  $\epsilon_y = 2,5$ ,  $\epsilon_z = 3$ . Записать уравнения этих волн.

**Решение**

Так как по условию задачи  $N_z = 0$ , уравнение нормалей Френеля (9.9) преобразуется к виду:

$$N_x^2(v^2 - v_y^2)(v^2 - v_z^2) + N_y^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_z^2) = 0,$$

где  $v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$ ,  $v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$ ,  $v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$  – главные скорости,  $N_x$  и  $N_y$

– направляющие косинусы.

Для фазовой скорости  $v$  получаем два значения:

$$v_1 = v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$$

и

$$v_2 = c \sqrt{\frac{N_x^2}{\epsilon_y} + \frac{N_y^2}{\epsilon_x}},$$

где  $N_x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $N_y = \frac{1}{2}$ .

Таким образом,  $\mathbf{D}_1 = D_1\mathbf{e}_z$ , а вектор  $\mathbf{D}_2$  лежит в плоскости  $xOy$  под углом  $\varphi = 30^\circ$  к оси  $Oy$  (см. рис 9.8). Поэтому уравнения волн можно записать в виде:

$$\mathbf{D}_1 = D_1\mathbf{e}_z \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y}{v_1} \right) \right],$$

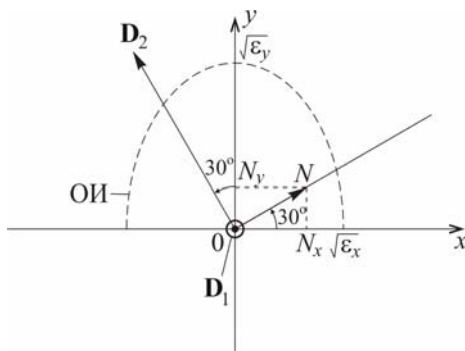


Рис.9.8. Расположение векторов  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  относительно оптической индикатрисы

$$\mathbf{D}_2 = D_2 \left( -\frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_y \right) \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y}{v_2} \right) \right].$$

**Ответ:**  $v_1 = c/\sqrt{3}$  (волна поляризована вдоль оси  $z$ ),  
 $v_1 = c\sqrt{1,7}/2$  (волна линейно поляризована в плоскости  $xOy$ ).

**Задача 9.2.2.** Для некоторой среды уравнение эллипсоида волновых нормалей (оптической индикатрисы) имеет вид:  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2,5} + \frac{z^2}{3} = 1$ . Найти лучевые скорости волн с частотой  $\nu$  в на-

правлении  $\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y$ , и записать уравнения для волн вектора  $\mathbf{E}$ .

### Решение

В соответствии с условием задачи главные диэлектрические проницаемости среды равны  $\epsilon_x = 2$ ,  $\epsilon_y = 2,5$  и  $\epsilon_z = 3$ , а главные скорости —  $v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$ ,  $v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$ ,  $v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$ . Поскольку  $s_z = 0$ , то

вектор  $\mathbf{s}$  с направляющими косинусами  $s_x = s_y = 1/\sqrt{2}$  лежит в плоскости  $xOy$ , а лучевое уравнение Френеля (9.13) приводится к виду:

$$s_x^2 v_x^2 (u^2 - v_y^2)(u^2 - v_z^2) + s_y^2 v_y^2 (u^2 - v_x^2)(u^2 - v_z^2) = 0$$

Решая его, получим два значения:

$$u_1 = v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{s_x^2/v_y^2 + s_y^2/v_x^2}},$$

В связи с тем, что  $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z$ , а вектор  $\mathbf{E}_2$  лежит в плоскости  $xOy$  под углом  $45^\circ$  к оси  $Oy$  (см. рис 9.9), то уравнения волн можно записать в виде:

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}}{u_1} \right) \right],$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y \right) \times \cos \left[ 2\pi \nu \left( t - \frac{\sqrt{2}(5x+4y)}{u_2} \right) \right],$$

поскольку (см. рис 9.10):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D_x}{D_y} = \frac{\varepsilon_x E_x}{\varepsilon_y E_y} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \operatorname{tg} \theta = 0,8,$$

а

$$\frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})}{v_2} = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{u_2 \cos \alpha} = \frac{x + y \operatorname{tg} \varphi}{u_2 (\cos \theta - \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\sqrt{2}(5x+4y)}{u_2}.$$

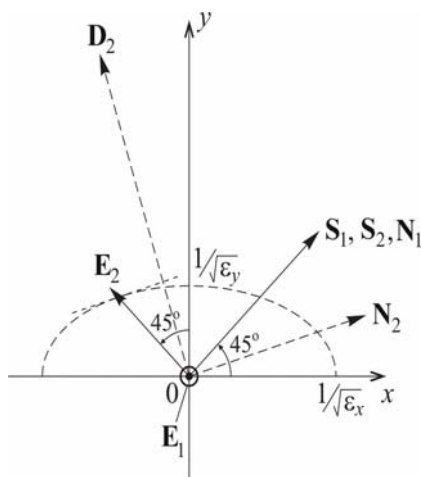


Рис. 9.9. Относительная ориентация векторов  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$

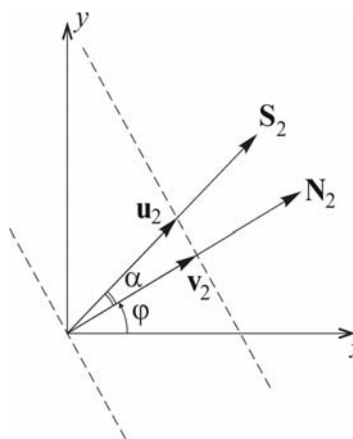


Рис. 9.10. К вопросу об углах  $\varphi$  и  $\alpha$

**Ответ:**  $u_1 = c/\sqrt{3}$  (волна линейно поляризована вдоль оси  $z$ ),  
 $u_2 = 2c/\sqrt{4,5}$  (волна линейно поляризована в плоскости  $xOy$ ).

**Задача 9.2.3.** Для анизотропной среды с главными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_x = 3$ ,  $\varepsilon_y = 2$ ,  $\varepsilon_z = 2,5$  найти направления, вдоль которых лучевая скорость  $u$  не зависит от ориентации вектора  $\mathbf{E}$ .

**Решение**

Сечение лучевого эллипсоида (9.13), перпендикулярное искомым направлениям, должно иметь форму окружности. Так как  $\varepsilon_y < \varepsilon_z < \varepsilon_x$  эллипсоид с полуосями  $1/\sqrt{\varepsilon_x} \neq 1/\sqrt{\varepsilon_y} \neq 1/\sqrt{\varepsilon_z}$  имеет два таких сечения (радиусами  $1/\sqrt{\varepsilon_z}$ ), нормали к которым лежат в плоскости  $xOy$  под углами  $\pm\psi$  к оси  $Oy$  (см. рис.9.11).

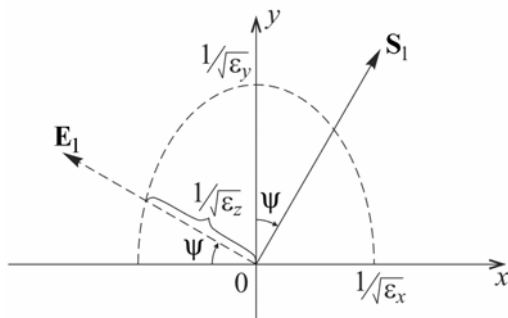


Рис. 9.11. Сечение лучевого эллипсоида плоскостью  $xOy$

Так как координаты точки пересечения вектора  $\mathbf{E}_1$  с лучевым эллипсоидом (см. рис. 9.11) равны

$$x = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}} \cos\psi ; \quad y = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}} \sin\psi ; \quad z = 0 ,$$

то в соответствии с (9.12):

$$(\varepsilon_x \cos^2\psi + \varepsilon_y \sin^2\psi) / \varepsilon_z = 1 ,$$

откуда

$$\sin\psi = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Найденные направления являются *лучевыми оптическими осями* двуосного кристалла.

**Ответ:**  $\psi = \pm 45^\circ$ .

**Задача 9.2.4.** Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку исландского шпата, оптическая ось составляет с плоскостью пластинки угол  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma < 90^\circ$ ), и затем нормально на вторую такую же пластинку, главная плоскость которой

образует с главной плоскостью первой пластинки угол  $\alpha = 30^\circ$ . Найти относительные интенсивности лучей за второй пластинкой.

### Решение

В верхней части рис 9.12 показано раздвоение узкого пучка света при прохождении первой пластинки. Интенсивности пучков  $o_1$  и  $e_1$  одинаковы и равны половине интенсивности падающего пучка. После прохождения второй пластинки каждый из пучков еще раз разделится на два пучка, и на выходе будем иметь четыре пучка:  $o_1o_2$ ,  $o_1e_2$ ,  $e_1o_2$  и  $e_1e_2$ , взаимное расположение которых показано в нижней части рис.9.12.

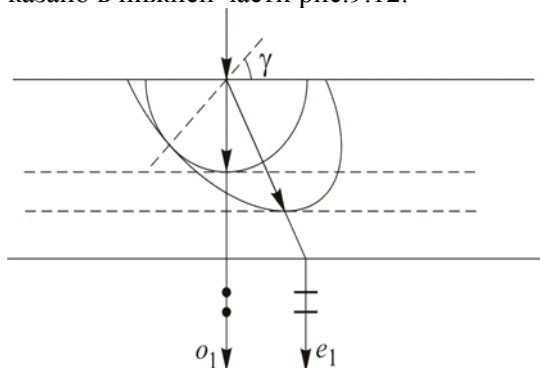


Рис. 9.12.Раздвоение пучка света при прохождении пластинок

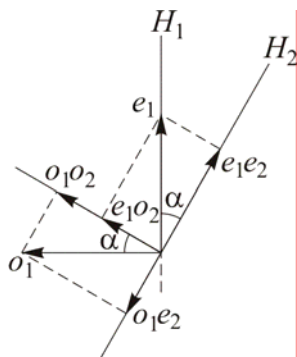


Рис. 9.13. Направление поляризации пучков света после прохождения первой и второй пластинок

В соответствии с рис 9.13 ( $H_1$  и  $H_2$  – линии пересечения главных плоскостей пластинок с поверхностями пластинок):

$$I_{o_1o_2} : I_{o_1e_2} : I_{e_1o_2} : I_{e_1e_2} = \cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha : \sin^2 \alpha : \cos^2 \alpha = 3 : 1 : 1 : 3 .$$

**Ответ:** 3:1:1:3.

**Задача 9.2.5.** Наблюдатель смотрит на близкий предмет через плоскопараллельную пластинку из исландского шпата. Когда между пластинкой и предметом помещена собирающая линза (на расстоянии  $a = 4$  см от предмета), он видит два прямых увеличенных изображения предмета. После того как к линзе вплотную приложили очковое стекло с оптической силой  $D = +5$  дптр, стало видно

только одно изображение предмета. Найти фокусное расстояние  $f$  линзы.

### Решение

Если наблюдатель смотрит через такую пластинку на близко расположенный предмет, то в результате двулучепреломления (см. задачу 9.2.4) на сетчатке глаза будет формироваться двойное изображение предмета. Собирающая линза между пластинкой и предметом играет роль увеличительного стекла (лупы), которое как бы

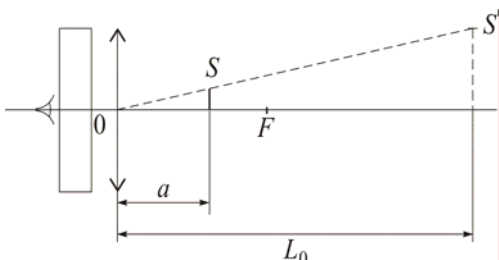


Рис. 9.14. Схема наблюдения двух прямых увеличенных изображений предмета

«отодвигает» предмет на расстояние наилучшего зрения  $L_0$  (см. рис. 9.14).

Согласно формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{L_0} = \frac{1}{f}.$$

В соответствии с условием задачи оптическая система (линза + очковое стекло) должна «отодвигать» предмет от наблюдателя на достаточно большое расстояние  $L_\infty$ . Этот вывод можно сделать на том основании, что по мере увеличения расстояния до  $S'$  уменьшается максимальный угол между лучами, исходящими из любой точки  $S'$  и участвующими в формировании ее изображения на сетчатке глаза, а следовательно, уменьшается раздвоенность изображения. Для удаленного предмета эта раздвоенность изображения меньше углового разрешения глаза.

Для системы «линза + очковое стекло»:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{L_\infty} = \frac{1}{f} + D.$$

Полагая  $L_\infty \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - D,$$

откуда

$$f = \frac{a}{1 - aD} = \frac{0,04}{1 - 0,04 \cdot 5} = 0,05 \text{ м.}$$

**Ответ:** 0,05 м.

### 9.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.3.1.** Луч света падает нормально на призму Волластона (рис. 9.15), сделанную из исландского шпата ( $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,486$ ). Преломляющий угол призмы равен  $\alpha = 15^\circ$ . На какой угол будут разведены два луча на выходе из призмы?

**Ответ:**  $5^\circ 17'$ .

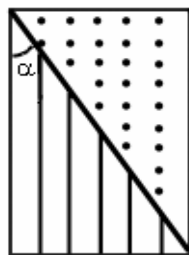


Рис. 9.15. Призма Волластона

**Задача 9.3.2.** Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата ( $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,486$ ) толщиной 0,03 мм, вырезанную параллельно его оптической оси. Определить разность хода для обыкновенного и необыкновенного лучей на выходе из пластинки.

**Ответ:** 5,16 мкм.

**Задача 9.3.3.** Две поляризационные призмы с воздушной прослойкой изготовлены из исландского шпата ( $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,486$ ). В одной призме оптическая ось параллельна основанию призмы (рис. 9.16,а), а в другой – перпендикулярна (рис. 9.16,б). При условии нормального падения естественного света на грань призмы: 1) Каким должен быть преломляющий угол  $\alpha$ , чтобы на выходе каждой из призм свет был линейно поляризован? 2) Какой луч выходит из каждой призмы? 3) Какая из призм пропускает больше света?

**Ответ:** 1) для обеих призм  $37^\circ 6' < \alpha < 42^\circ 18'$ ; 2) необыкновенный; 3) вторая.

**Задача 9.3.4.** Определить максимальное значение угла  $\delta$  между направлением луча и направлением волновой нормали в исландском шпате ( $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,486$ ).

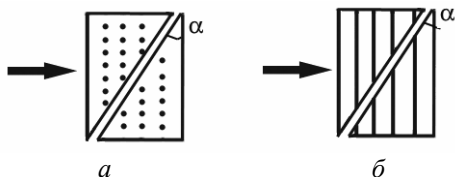


Рис. 9.16. Поляризационные призмы и направление падения света

**Ответ:**  $\operatorname{tg} \delta = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e} \approx 0,13$ .



**Задача 9.3.5.** Главные значения диэлектрической проницаемости среды:  $\epsilon_x = 2$ ;  $\epsilon_y = 2,5$ ;  $\epsilon_z = 3$  ( $\mu = 1$ ). Как должна быть поляризована волна частотой  $\nu = 10^{14}$  Гц, чтобы ее фазовая скорость в этой среде была максимальна? Найти соответствующее этой поляризации значение фазовой скорости. Написать уравнения этой волны (для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ ), если амплитуда вектора электрической индукции равна  $D_0$ .

### Литература

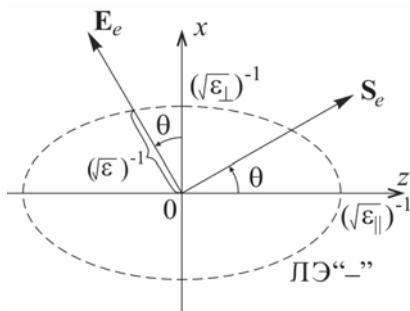
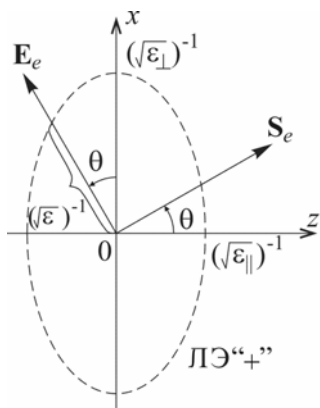
1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, глава 26.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, глава 7.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§39–42.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 4.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §7.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §11.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, 5.4.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел VIII.

Как следует из (9.19), при  $y = 0$

$$\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta = \varepsilon, \quad (9.20)$$

поэтому зависимость лучевой скорости необыкновенной волны  $u_e$  от угла  $\theta$  (между  $\mathbf{S}_e$  и оптической осью  $z$ ) имеет вид:

$$u_e(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta}}. \quad (10.21)$$





## Глава 10

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ  
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПУЧКОВ

## 10.1. Теоретическое введение

В вакууме или в однородной изотропной среде (без дисперсии) могут распространяться плоские монохроматические световые волны, уравнения которых имеют вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi).$$

Векторы напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электрического и магнитного полей взаимно ортогональны (рис. 10.1) и лежат в *плоскости волнового фронта*. Волновой вектор  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_k$  ( $\lambda$  – длина волны) перпендикулярен фронту волны и указывает направление распространения волны с фазовой скоростью (2.17):

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k,$$

которая зависит от свойств среды:  $v = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $n = \sqrt{\varepsilon}$  – показатель преломления. Плоскость, в которой лежат векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k}$ , называют *плоскостью поляризации* волны (она перпендикулярна вектору  $\mathbf{H}$ ).

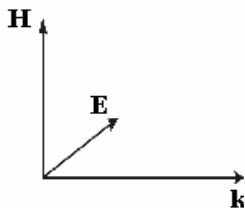


Рис. 10.1. Ориентация векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{k}$  в световой волне

В простейшем случае, когда в любой точке волнового поля ориентация вектора амплитуды  $\mathbf{E}_0$  со временем не меняется, волна называется *линейно поляризованной* (или *плоско-поляризованной*). Если такую волну с интенсивностью  $I_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} v$  (см.

(2.25)) пропустить через *идеальный* (без потерь на отражение и поглощение света) *поляризатор* (поляроид), то получим волну,

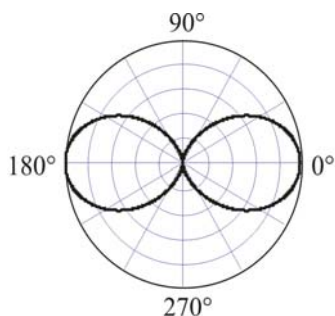


Рис.10.2. Зависимость интенсивности света от угла между плоскостью поляризации и плоскостью пропускания поляризатора

поляризованную в плоскости пропускания. Интенсивность  $I$ , в соответствии с *законом Малюса*, равна

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta, \quad (10.1)$$

где  $\theta$  – угол между плоскостью поляризации волны и плоскостью пропускания поляризатора (рис. 10.2). Заметим, что сумма интенсивностей  $I(\theta)$  и  $I(\theta \pm \pi/2)$  прошедшего через поляризатора света при двух взаимно перпендикулярных ориентациях поляризатора равна интенсивности  $I_0$  падающего на поляризатора света.

В общем случае *полностью поляризованной* волны световой вектор

$\mathbf{E}$  (как и вектор  $\mathbf{H}$ ) в любой точке волнового поля вращается с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости волнового фронта, а его конец описывает эллипс (так называемый *эллипс поляризации*). В зависимости от направления вращения светового вектора различают волны с *левой* и *правой* поляризацией ( $\mathbf{E}$  вращается соответственно *против* часовой стрелки и *по* часовой стрелке, если смотреть навстречу волне).

Выберем декартову систему координат так, чтобы волновой вектор был направлен вдоль оси  $Oz$ :  $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$ . В этом случае в любой плоскости  $z = \text{const}$  (плоскость волнового фронта) компоненты вектора  $\mathbf{E}$  будут изменяться во времени по закону:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \omega t, \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (10.2)$$

причем  $\varphi(t) = \text{const}$ .

В соответствии с (10.2) уравнение траектории движения конца вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости волнового фронта имеет вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \quad (10.3)$$

где введены обозначения:  $x = E_x$ ,  $y = E_y$ ,  $a = E_{x0}$ ,  $b = E_{y0}$ .

Уравнение (10.3) описывает эллипс (см. рис. 10.3), главные оси которого ( $Ox'$  и  $Oy'$ ) ориентированы под углом  $\theta_0$  к осям декарто-

вой системы координат ( $Ox$  и  $Oy$ ). Если  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ , то эллипс вырождается в отрезок прямой (*линейная поляризация*): плоскость поляризации такой волны ориентирована под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}. \quad (10.4)$$

Если  $\varphi = \pm\pi/2$  и  $a = b$ , уравнение (10.3) описывает окружность (*круговая поляризация*).

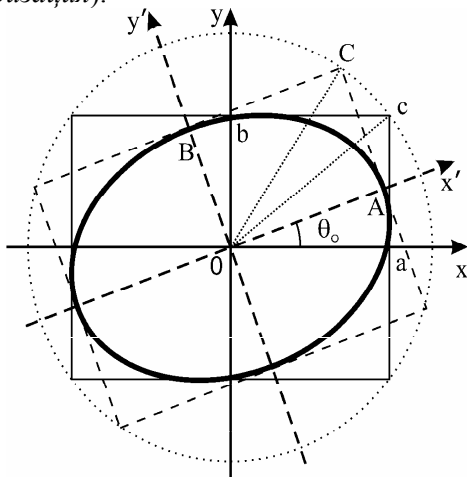


Рис. 10.3. Траектория движения конца вектора  $E$  в волне с эллиптической поляризацией

В полярной системе координат ( $x = r \cos\theta$ ,  $y = r \sin\theta$ ) уравнение (10.3) имеет вид:

$$r^2 \left[ \left( \frac{\cos\theta}{a} \right)^2 + \left( \frac{\sin\theta}{b} \right)^2 - \frac{\sin 2\theta}{ab} \cos\varphi \right] = \sin^2\varphi. \quad (10.5)$$

Если продифференцировать обе части (10.5) по  $\theta$  и учесть, что в направлении главных осей эллипса поляризации ( $\theta_0$  и  $\theta_0 + \pi/2$ ) производная  $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$ , то получим:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos\varphi, \quad (10.6)$$

или

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos\varphi. \quad (10.7)$$

При переходе к системе координат  $x'Oy'$ , повернутой относительно  $xOy$  на угол  $\theta_0$ , уравнение эллипса поляризации преобразуется к виду:

$$\left(\frac{x'}{A}\right)^2 + \left(\frac{y'}{B}\right)^2 = 1, \quad (10.8)$$

причем

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = c^2 \sim I_0, \quad (10.9)$$

$$AB = ab|\sin\varphi|, \quad (10.10)$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}. \quad (10.11)$$

Если обозначить:

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\alpha', \quad (10.12)$$

то

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha \cdot \sin\varphi. \quad (10.13)$$

Рассмотрим случай, когда *линейно поляризованная* монохроматическая волна (полученная, например, с помощью поляризатора) падает нормально на плоскопараллельную пластинку толщиной  $d$ , вырезанную из одноосного кристалла (с разностью показателей преломления  $\Delta n = n_e - n_o$  для необыкновенной и обыкновенной волн) параллельно его оптической оси. Совместим плоскость  $xOy$  декартовой системы координат с передней поверхностью пластинки, направив ось  $Ox$  параллельно оптической оси кристалла (рис. 10.4). Пусть угол между плоскостью поляризации волны и плоскостью *главного сечения* (т.е. угол между вектором амплитуды  $\mathbf{E}_0$  и осью  $Ox$ ) равен  $\alpha$ . Тогда на выходе из пластинки получим эллиптически поляризованную (в общем случае) волну, в которой компоненты светового вектора  $\mathbf{E}$  изменяются по закону:

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos\omega t, \\ E_y &= b \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (10.14)$$

где  $a = E_0 \cos\alpha$ ;  $b = E_0 \sin\alpha$ ;  $E_0$  – амплитуда линейно поляризованной волны после поляризатора;  $\varphi = k \cdot \Delta$  – разность фаз между необыкновенной ( $E_x$ ) и обыкновенной ( $E_y$ ) волнами.  $\Delta = d(n_e - n_o)$  – оптическая разность хода. Если вносимая пластинкой разность

фаз  $\varphi = \pm \pi/2 + \pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то ее называют «четвертьволновой» (или «пластинкой  $\lambda/4$ »); если  $\varphi = \pi \pm 2\pi n$ , то пластинку называют «полуволновой» (или «пластинкой  $\lambda/2$ »).

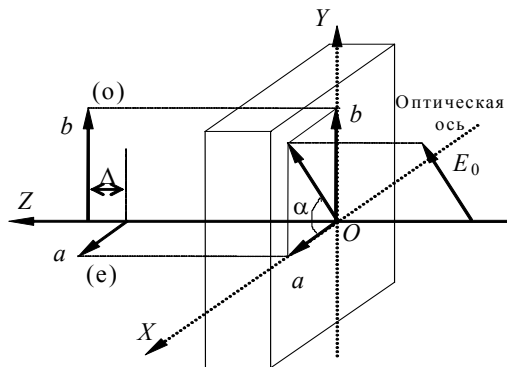


Рис.10.4. Прохождение линейно поляризованного света через кристалл

Если пренебречь потерями, имеющими место при прохождении света через реальную пластинку, то интенсивность волны на выходе из пластинки будет равна интенсивности падающей на пластинку волны, так как обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы в перпендикулярных направлениях. Если теперь на пути прошедшего через пластинку света поместить поляроид-анализатор, направление пропускания которого составляет угол  $\theta$  с осью  $Ox$ , то проекции компонент  $E_x$  и  $E_y$  на это направление ( $E_x \cos \theta$  и  $E_y \sin \theta$  соответственно) будут *интерферировать*.

В результате интенсивность  $I$  линейно поляризованного света на выходе из анализатора будет зависеть от углов  $\alpha$  и  $\theta$  и разности фаз  $\varphi$ :

$$I(\alpha, \theta, \varphi) = I_0 \times \left[ \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \theta + \sin 2\alpha \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

или

$$I(\alpha, \theta, \varphi) = I_0 \times \left[ (\cos \alpha \cdot \cos \theta + \sin \alpha \cdot \sin \theta)^2 - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\theta \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]. \quad (10.15)$$



На рис. 10.5 пунктирными линиями показаны эллипсы поляризации волны (10.14) при  $\varphi = \pi/2$  для случаев  $\operatorname{tg}\alpha = b/a = 1/3$  (слева) и  $\operatorname{tg}\alpha = b/a = 2/3$  (справа). Сплошными линиями показаны графики зависимости  $I(\theta)$ , соответствующие этим случаям.

Вводя в рассмотрение угол

$$\beta = \alpha - \theta \quad (10.16)$$

между направлениями пропускания поляризатора и анализатора, получаем:

$$I(\alpha) = I_0 \left[ \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2(\alpha - \beta) \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]. \quad (10.17)$$

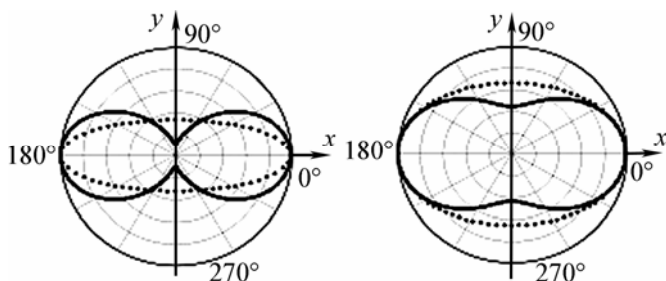


Рис. 10.5. Эллипсы поляризации волны (пунктир) и угловая зависимость интенсивности  $I(\theta)$  линейно поляризованного света на выходе из анализатора (сплошные линии)

В частности, если  $\beta = 0$  ( $\theta = \alpha$ , т.е. направления пропускания поляризатора и анализатора совпадают), то

$$I_{\parallel} = I_0 \left[ 1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right], \quad (10.18)$$

а если  $\beta = \pm \pi/2$  ( $\theta = \alpha \pm \pi/2$ , т.е. направления пропускания поляризатора и анализатора взаимно ортогональны), то

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (10.19)$$

Как и следовало ожидать,

$$I_{\parallel} + I_{\perp} = I_0.$$

Как видно из рис. 10.6, при заданной разности фаз  $\varphi$  для компонент светового вектора  $E_x$  и  $E_y$  (10.2) интенсивность  $I_{\perp}$  мак-

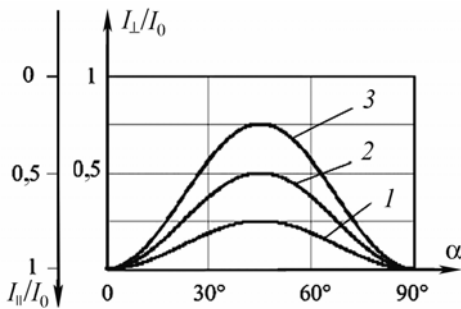


Рис. 10.6. Зависимости интенсивности  $I(\alpha)$  (нормированной на  $I_0$ ) для значений разности фаз  $\varphi$ :  $\pi/3$  (1),  $\pi/2$  (2) и  $2\pi/3$  (3)

симальна, а  $I_{\parallel}$  – минимальна, если  $\alpha = \pi/4$  ( $E_{x0} = E_{y0}$ ). Кроме того, при  $\alpha = \pi/4$  интенсивности  $I_{\perp}$  и  $I_{\parallel}$  наиболее чувствительны к значению  $\varphi$  (на рис. 10.6  $\varphi_1 = \pi/3$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$  и  $\varphi_3 = 2\pi/3$ ).

На рис. 10.7 приведены графики соответствующих зависимостей

$I_{\perp}(\alpha)$  и  $I_{\parallel}(\alpha)$  в полярных координатах для указанных выше значений  $\varphi$  (сплошная линия – для скрещенных поляроидов, пунктирная – для параллельных).

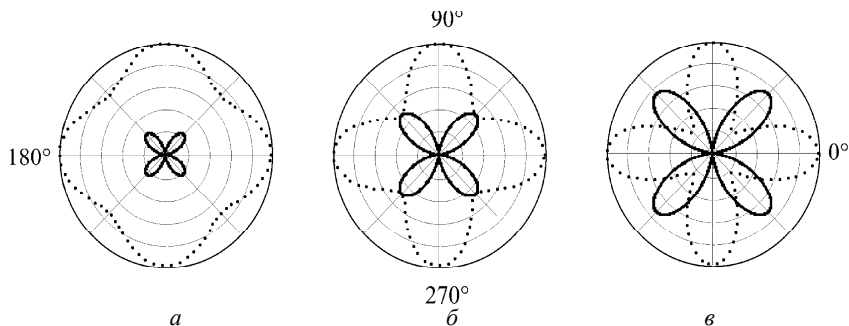


Рис. 10.7. Зависимости  $I_{\parallel}(\alpha)$  (штриховые линии) и  $I_{\perp}(\alpha)$  (сплошные линии) в полярных координатах для разностей фаз  $\pi/3$ (а),  $\pi/2$ (б) и  $2\pi/3$ (в)

Если световая волна – неполяризованная (так называемый *естественный свет*), то  $\varphi(t)$  изменяется во времени случайным образом в интервале от  $-\pi$  до  $+\pi$ . При пропускании естественного света с интенсивностью  $I_0$  через поляроид на выходе получим линейно поляризованный свет с интенсивностью  $I_0/2$ .

*Степень поляризации* света характеризуют параметром:

$$P = \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{п}}}, \quad (10.20)$$

где  $I_{\text{п}}$  – интенсивность полностью поляризованной компоненты световой волны,  $I_{\text{ест}}$  – интенсивность неполяризованной компоненты.

## 10.2. Задачи с решениями

**Задача 10.2.1.** Один поляроид пропускает 30% естественного света. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9%. Найти угол  $\theta$  между главными направлениями поляроидов.

### Решение

Поскольку идеальный поляроид пропускает 50% естественного света, то в случае использования неидеального поляроида интенсивность линейно поляризованного света на его выходе равна

$$I_1 = 0,5 \cdot \gamma \cdot I_{\text{ест}},$$

где  $\gamma$  – коэффициент изотропного пропускания материала, из которого изготовлен поляроид. Так как по условию задачи

$$I_1 = 0,3 \cdot I_{\text{ест}},$$

то  $\gamma = 0,6$ .

С учетом закона Малюса (10.1) интенсивность света на выходе второго поляроида равна

$$I_2 = \gamma \cdot I_1 \cos^2 \theta,$$

где  $\theta$  – угол между главными направлениями поляроидов, а по условию задачи

$$I_2 = 0,09 \cdot I_{\text{ест}}.$$

Таким образом, получаем

$$\cos^2 \theta = 0,5,$$

а искомый угол  $\theta$  между главными направлениями поляроидов равен  $45^\circ$ .

**Ответ:**  $\theta = 45^\circ$ .

**Задача 10.2.2.** Смесь естественного света с линейно поляризованным анализируется с помощью николя (поляризационная призма). Определить степень поляризации света  $P$ , если при повороте анализатора на угол  $\alpha = 60^\circ$  из положения, соответствующего мак-

симуму пропускания, интенсивность света за николем уменьшается в  $\eta = 2$  раза.

### Решение

С учетом свойств идеального поляризатора и закона Малюса (10.2) интенсивность света за николем равна

$$I(\theta) = 0,5 \cdot I_{\text{ест}} + I_{\text{л}} \cdot \cos^2 \theta,$$

где  $I_{\text{ест}}$  и  $I_{\text{л}}$  – интенсивности соответственно неполяризованной и линейно поляризованной компонент,  $\theta$  – угол между плоскостью поляризации линейно поляризованной компоненты и главным направлением николя.

Следовательно:

$$I_{\text{max}} \equiv I(\theta = 0) = 0,5 \cdot I_{\text{ест}} + I_{\text{л}},$$

$$I_{\alpha} \equiv I(\theta = \alpha) = 0,5 \cdot I_{\text{ест}} + I_{\text{л}} \cdot \cos^2 \alpha$$

где  $\alpha$  – угол, на который поворачивают анализатор.

Так как по условию задачи

$$I_{\text{max}} = \eta \cdot I_{\alpha},$$

где  $\eta = 2$ , то

$$\frac{I_{\text{ест}}}{I_{\text{л}}} = \frac{2 \cdot (1 - \eta \cos^2 \alpha)}{\eta - 1} = 1$$

и, в соответствии с (10.20), степень поляризации света:

$$P = \frac{I_{\text{л}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{л}}} = 0,5.$$

**Ответ:**  $P = 0,5$ .

**Задача 10.2.3.** некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляризатор. При повороте поляризатора из положения, соответствующего максимуму интенсивности прошедшего света, на угол  $\alpha = 30^\circ$  интенсивность света уменьшается на 20%. Найти отношение интенсивностей  $I_{\text{к}}$  и  $I_{\text{л}}$  соответственно циркулярно и линейно поляризованных компонент.

### Решение

С учетом свойств идеального поляризатора и закона Малюса (10.1) интенсивность света за поляризатором равна

$$I(\theta) = 0,5 \cdot I_{\text{к}} + I_{\text{л}} \cdot \cos^2 \theta,$$

где  $I_{\text{к}}$  и  $I_{\text{л}}$  – интенсивности соответственно циркулярно и линейно поляризованных компонент,  $\theta$  – угол между плоскостью поляризации линейно поляризованной компоненты и главным направлением поляроида.

Следовательно:

$$I_{\text{max}} \equiv I(\theta = 0) = 0,5 \cdot I_{\text{к}} + I_{\text{л}},$$

$$I_{\alpha} \equiv I(\theta = \alpha) = 0,5 \cdot I_{\text{к}} + I_{\text{л}} \cdot \cos^2 \alpha$$

и по условию задачи

$$I_{\text{max}} - I_{\alpha} = 0,2 \cdot I_{\text{max}}.$$

Так как  $\alpha = 30^\circ$ , то

$$I_{\text{к}} = 0,5 \cdot I_{\text{л}}.$$

**Ответ:**  $\frac{I_{\text{к}}}{I_{\text{л}}} = 0,5.$

**Задача 10.2.4.** Смесь естественного света и света, поляризованного по кругу, пропускается через четвертьволновую пластинку и николю. При вращении николя вокруг оси светового пучка максимальная интенсивность на выходе больше минимальной в  $m=3$  раза. Найти отношение интенсивностей  $I_{\text{к}}$  и  $I_{\text{ест}}$  соответственно циркулярно поляризованной и естественной компонент света.

**Решение:**

Так как пластинка  $\lambda/4$  не изменяет состояние поляризации естественного света, а циркулярно поляризованный свет преобразует в линейно поляризованный, то при соответствующих ориентациях николя:

$$I_{\text{max}} = 0,5 \cdot I_{\text{ест}} + I_{\text{к}},$$

$$I_{\text{min}} = 0,5 \cdot I_{\text{ест}},$$

где  $I_{\text{ест}}$  и  $I_{\text{к}}$  – интенсивности соответственно естественной и поляризованной по кругу компонент.

Поскольку по условию задачи

$$I_{\text{max}} = m \cdot I_{\text{min}},$$

то искомое отношение интенсивностей:

$$\frac{I_{\text{к}}}{I_{\text{ест}}} = \frac{m-1}{2} = 1.$$

**Ответ:**  $\frac{I_{\text{к}}}{I_{\text{ест}}} = 1.$

**Задача 10.2.5.** Некогерентная смесь естественного, линейно поляризованного и циркулярно поляризованного света анализируется с помощью быстро вращающегося поляризатора с фотоприемником. Глубина модуляции фототока, пропорционального интенсивности света, оказалась равной  $m_1=0,1$ . Если свет предварительно пропустить через пластинку  $\lambda/4$ , ориентированную так, что на выходе будет по-прежнему некогерентная смесь неполяризованного, линейно поляризованного и поляризованного по кругу света, то глубина модуляции фототока станет равной  $m_2=0,2$ . Определить степень поляризации  $P$  исходного светового пучка.

### Решение

При вращении поляроида вокруг оси светового пучка с угловой скоростью  $\Omega$  интенсивность света (и фототок) будет изменяться по закону:

$$I(t) = I_0(1 + m \cos 2\Omega t),$$

где  $I_0$  – интенсивность некогерентной смеси световых волн,  $m$  – глубина модуляции.

Вначале интенсивность света за анализатором

$$I_1 = 0,5I_{\text{ест}} + 0,5I_{\text{к}} + I_{\text{л}} \cos^2 \theta,$$

или

$$I_1 = 0,5I_{\text{ест}} + 0,5I_{\text{к}} + 0,5I_{\text{л}}(1 + \cos 2\theta),$$

где  $\theta$  – угол между плоскостью поляризации линейно поляризованной компоненты и главным направлением поляроида ( $\theta = \Omega t$ ). Поэтому

$$m_1 = \frac{I_{\text{л}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{к}} + I_{\text{л}}}.$$

В соответствии с условием задачи, после пропускания света через пластинку  $\lambda/4$  циркулярно поляризованная компонента становится линейно поляризованной, а линейно поляризованная – поляризованной по кругу. Следовательно,

$$m_2 = \frac{I_{\text{к}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{к}} + I_{\text{л}}}.$$

Поскольку по определению степень поляризации света равна

$$P = \frac{I_{\text{к}} + I_{\text{л}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{к}} + I_{\text{л}}},$$

окончательно получаем:

$$P = m_1 + m_2 = 0,3.$$

**Ответ:**  $P = 0,3$ .

**Задача 10.2.6.** Горизонтальный параллельный пучок монохроматического, эллиптически поляризованного света пропускается через пластинку  $\lambda/4$ . При одной ориентации пластинки свет выходит линейно поляризованным под углом  $\alpha_1 = 23^\circ$  к некоторому выделенному направлению в вертикальной плоскости. Если пластинку повернуть вокруг оси пучка на  $90^\circ$ , то свет оказывается линейно поляризованным под углом  $\alpha_2 = 83^\circ$  к этому направлению. Найти отношение длин полуосей эллипса поляризации света и угол  $\theta_0$  между его большой осью и осью координат  $x$ .

**Решение**

Чтобы с помощью пластинки  $\lambda/4$  получить из эллиптически поляризованного света свет с линейной поляризацией, нужно ориентировать главные направления пластинки вдоль главных осей эллипса поляризации. В этом случае (см. рис. 10.8):

$$2\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 60^\circ,$$

где  $2\alpha$  – острый угол между диагоналями прямоугольника, длины сторон которого равны длинам главных осей эллипса поляризации. В соответствии с (10.12), для искомого отношения длин полуосей эллипса поляризации получаем:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

следовательно, угол между большой осью эллипса и осью координат  $x$  равен

$$\theta_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 53^\circ.$$

**Ответ:**  $\theta_0 = 53^\circ$ .

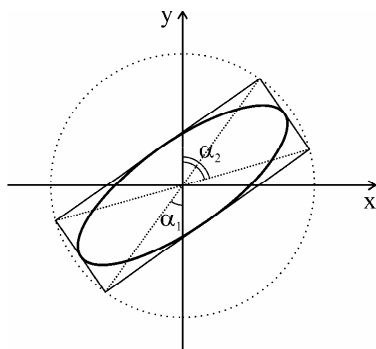


Рис. 10.8. Эллипс поляризации световой волны

**Задача 10.2.7.** Плоская монохроматическая волна с эллиптической поляризацией пропускается через кристаллическую пластинку, за которой установлен идеальный анализатор-поляроид. При некоторой ориентации пластинки интенсивность света, регистрируемая приемником, установленным за анализатором, не зависит от ориентации последнего и равна  $I_1$ . В отсутствие пластинки макси-

мальная интенсивность, регистрируемая приемником, равна  $I_2$ . Найти отношение длин полуосей эллипса поляризации.

### Решение

Пусть интенсивность исходной волны равна  $I_0$ . В соответствии с условием задачи сначала эллиптически поляризованный свет преобразуется пластинкой в свет с круговой поляризацией, поэтому

$$2I_1 = I_0 \sim A^2 + B^2,$$

где  $A$  и  $B$  – длины большой и малой полуосей эллипса поляризации для исходной длины волны света.

В отсутствие пластинки

$$I_2 \sim A^2 \text{ (при условии } A > B\text{)}.$$

Следовательно,

$$2I_1 - I_2 \sim B^2.$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2} - 1} < 1.$$

**Ответ:**  $\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2} - 1}.$

**Задача 10.2.8.** Монохроматический свет, пропущенный через поляризатор, падает на вырезанную параллельно оптической оси кристаллическую пластинку, вносящую между обыкновенным и необыкновенным лучами разность фаз  $\varphi = 60^\circ$ . Главная плоскость поляризатора составляет угол  $\gamma = 45^\circ$  с одним из главных направлений пластинки. Найти отношение длин полуосей эллипса поляризации света на выходе из пластинки и ориентацию  $\theta_0$  анализатора относительно главных направлений пластинки, при которой интенсивность света максимальна.

### Решение

Для решения задачи воспользуемся рис.10.3, на котором оси  $Ox$  и  $Oy$  ориентированы вдоль главных направлений пластинки. Из условия  $\gamma = 45^\circ$  следует, что

$$a = c \cdot \cos \gamma = b = c \cdot \sin \gamma$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$



В соответствии с формулой (10.11):

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}},$$

откуда

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Интенсивность прошедшего через анализатор света максимальна, если главное направление анализатора совпадает с большей из главных осей эллипса поляризации. В соответствии с (10.7):

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos \varphi = \infty,$$

откуда

$$\theta_0 = 45^\circ.$$

**Ответ:**  $\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\theta_0 = 45^\circ$ .

**Задача 10.2.9.** На плоский экран, состоящий из двух поляроидных полуплоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , направления пропускания которых ортогональны, падает нормально параллельный пучок циркулярно поляризованного света с интенсивностью  $I_0$  (рис. 10.9). Найти интенсивность света  $I$  в точке  $P$  и состояние его поляризации.

### Решение

Воспользуемся результатами решения задачи о дифракции плоской, линейно поляризованной волны на краю прямолинейного экрана: интенсивность  $I$  в точке  $P$  за экраном равна  $I_0/4$ , где  $I_0$  – интенсивность волны перед экраном.

Так как циркулярно поляризованную волну с интенсивностью  $I_0$  можно рассматривать как суперпозицию двух волн равной интенсивности  $I_0/2$ , поляризованных линейно во взаимно перпендикулярных направлениях, то после прохождения этих волн через поляроиды  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$

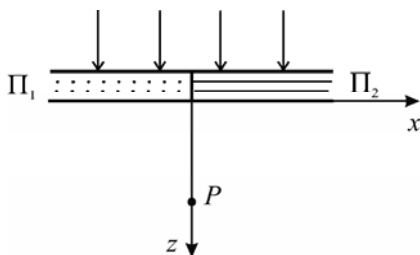


Рис. 10.9. Плоский экран из двух поляроидов  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с ортогональными направлениями пропускания

вклад каждой из них в  $I(P)$  уменьшится до  $I_0/8$ . Поскольку эти волны поляризованы линейно во взаимно перпендикулярных направлениях (например, вдоль  $Ox$  и  $Oy$ , как на рис. 10.8) и световые колебания в них сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , свет в точке  $P$  будет поляризован по кругу, причем

$$I = \frac{I_0}{4}.$$

**Ответ:**  $I = \frac{I_0}{4}$ , свет поляризован по кругу.

**Задача 10.2.10.** Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на диск, вырезанный из идеального поляроида с показателем преломления  $n$  и закрывающий для некоторой точки  $P$  одну зону Френеля. Какова должна быть толщина  $d$  диска, чтобы интенсивность  $I$  света в точке  $P$  была максимальной? Чему равна интенсивность  $I_{\max}$ ? Длина волны равна  $\lambda$ .

### Решение

Волна с круговой поляризацией и интенсивностью  $I_0$  может рассматриваться как суперпозиция двух волн с одинаковыми интенсивностями  $I_0/2$ , линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Для волны, поляризованной перпендикулярно главному направлению поляроида, диск "гасит" вклад  $A_1$  от первой зоны Френеля (рис. 10.10), поэтому ее интенсивность в точке наблюдения:

$$I_{\perp} \sim (A_{-1})^2 \approx (A)^2,$$

то есть

$$I_{\perp} \approx \frac{I_0}{2}.$$

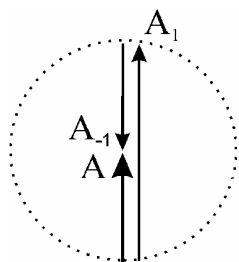


Рис. 10.10. Графическое вычисление результирующей амплитуды волны, проходящей через диск из поляроида

Чтобы усилить в точке наблюдения до максимально возможного значения интенсивность  $I_{\parallel}$  волны, поляризованной вдоль главного направления поляроида, необходимо повернуть вектор  $A_1$  на угол  $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi$  и т.д., то есть обеспечить для первой зоны Френеля дополнительную разность хода

$$d(n-1) = \frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{3} + \frac{5\lambda}{2} \dots = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, искомая толщина диска равна

$$d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При этом

$$I_{\parallel} \sim (A_1 + A_{-1})^2 \approx (3A)^2,$$

или

$$I_{\parallel} \approx \frac{9I_0}{2}.$$

Таким образом, максимальная интенсивность света равна

$$I_{\max} = I_{\perp} + I_{\parallel} \approx 5I_0.$$

**Ответ:**  $d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad I_{\max} = 5I_0.$

**Задача 10.2.11.** Между скрещенными николями помещена пластинка, вырезанная из кварца параллельно его оптической оси. Пластинка ориентирована под углом  $\alpha = 45^\circ$  к главным направлениям николей. При какой минимальной толщине  $d$  пластинки одна линия водорода  $\lambda_1 = 656,3$  нм будет сильно ослаблена, а другая —  $\lambda_2 = 410,2$  нм будет иметь максимальную интенсивность, если для кварца  $\Delta n = 0,009$ ?

**Решение**

В соответствии с формулой (10.19):

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

а поскольку  $\alpha = 45^\circ$ , то

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Так как по условию задачи для линии с длиной волны  $\lambda_1$  пластинка должна вносить разность фаз  $\varphi_1 = 2\pi m$ , а для линии  $\lambda_2 - \varphi_2 = \pi + 2\pi m$ , оптическая разность хода для обыкновенного и необыкновенного лучей в пластинке должна удовлетворять одновременно двум условиям:

$$d \cdot \Delta n = m_1 \lambda_1$$

и

$$d \cdot \Delta n = \frac{\lambda_2}{2} + m_2 \lambda_2,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – натуральные числа, в общем случае неравные друг другу. Из равенства правых частей перебором находим минимальные возможные значения  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 6$

Из этих двух уравнений определяем два неизвестных:

$$m = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Отсюда  $d = \frac{m_1 \lambda_1}{\Delta n}$  или  $d \approx \frac{(m_2 + 1/2) \lambda_2}{\Delta n} \approx 0,29 \text{ мм}$

**Ответ:**  $d = 0,29 \text{ мм}$ .

**Задача 10.2.12.** Клин из одноосного кристалла ( $n_o = 1,54$ ;  $n_e = 1,55$ ) помещен на пути монохроматического света ( $\lambda = 500 \text{ нм}$ ) с круговой поляризацией. Оптическая ось клина параллельна его ребру. Задняя поверхность клина рассматривается через поляроид, главное направление которого составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с ребром клина. Сколько темных полос можно наблюдать на поверхности клина, если толщина его основания  $d = 0,05 \text{ см}$ ?

### Решение

Для наблюдения через поляроид темной полосы необходимо, чтобы свет на выходе из клина в этом месте был линейно поляризован, а главное направление николя было перпендикулярно плоскости поляризации света. Если оптическая толщина клина изменится на одну длину волны, то существуют два возможных места выхода из клина линейно поляризованного света, удовлетворяющих условию:

$$d(n_e - n_o) = m\lambda + \lambda/4$$

или

$$d(n_e - n_o) = m\lambda + \frac{3\lambda}{4},$$

причем в одном случае плоскость поляризации будет совпадать с плоскостью пропускания поляроида, а в другом эти плоскости будут ортогональны.

Следовательно, искомое число темных полос может быть оценено по формуле:

$$m_{\max} \approx \frac{d(n_e - n_o)}{\lambda} \approx 10.$$

**Ответ:**  $m_{\max} \approx 10$ .

### 10.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 10.3.1.** Частично поляризованный свет (степень поляризации 0,5) пропускают через поляризатор. Как изменится интенсивность света за поляризатором после его поворота на  $60^\circ$  из положения, соответствующего максимуму пропускания?

**Ответ:** уменьшится в 2 раза.

**Задача 10.3.2.** Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляризатор. Найдено положение поляризатора, при котором интенсивность прошедшего света максимальна. При повороте поляризатора из этого положения на некоторый угол вокруг оси пучка интенсивность прошедшего света уменьшается в 2 раза. Найти отношение интенсивностей компонент с различной поляризацией.

**Ответ:**  $\frac{I_k}{I_d} = \frac{2}{3}$ .

**Задача 10.3.3.** Параллельный пучок монохроматического света проходит через два поляризатора, главные плоскости которых ориентированы под углом  $20^\circ$  друг к другу. Между поляризаторами помещают пластинку  $\lambda/2$ . При каком угле между главным направлением первого поляризатора и оптической осью пластинки свет через систему не проходит?

**Ответ:**  $-35^\circ$  и  $+55^\circ$ .

**Задача 10.3.4.** Между двумя скрещенными поляризаторами помещена кристаллическая пластинка толщиной 0,045 мм. Пластинка вырезана из кристалла с показателями преломления  $n_o = 1,54$  и  $n_e = 1,55$  параллельно его оптической оси кристалла и ориентирована так, что угол между главным направлением первого поляризатора и оптической осью пластинки равен  $30^\circ$ . На систему падает нормально неполяризованный свет с длиной волны 0,6 мкм и интенсивностью  $I_0$ . Найти интенсивность  $I$  света на выходе из системы.

**Ответ:**  $I \approx 0,19I_0$ .

**Задача 10.3.5.** На пути плоской волны монохроматического, поляризованного по кругу света с длиной волны  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  ставят большую пластину идеального поляроида с показателем преломления  $n$  (см. рис. 10.11). Найти толщину  $d$  пластины, при которой интенсивность света в точке  $P$  будет максимальной. Чему равна  $I_{\max}$ ?

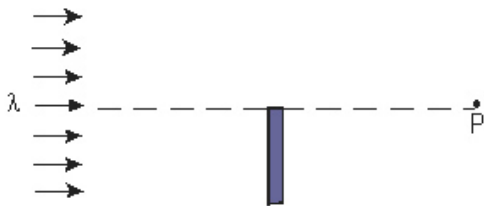


Рис. 10.11. Прохождение света с длиной волны  $\lambda$  через пластину идеального поляроида

**Ответ:**  $d = \frac{m\lambda}{n-1}$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $I_{\max} \approx \frac{5}{8}I_0$ .

**Задача 10.3.6.** Плоская волна монохроматического света с интенсивностью  $I_0$  поляризована по кругу. На пути волны ставят две большие, соприкасающиеся торцами пластины  $\lambda/4$ , главные направления которых взаимно перпендикулярны. Найти интенсивность  $I$  света в точке  $P$ , лежащей на перпендикуляре к линии соприкосновения пластин (рис. 10.12).

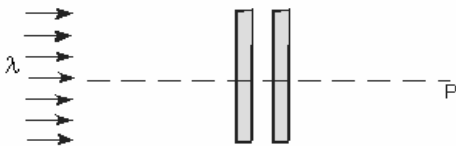


Рис. 10.12. Прохождение света с длиной волны  $\lambda$  через две пластинки  $\lambda/4$  с взаимно перпендикулярными главными направлениями

**Ответ:**  $I \approx 0,5I_0$ .

**Задача 10.3.7.** Круглое отверстие в непрозрачном экране открывает для точки наблюдения  $P$  одну зону Френеля. Внутреннюю и внешнюю половины (по площади) отверстия

закрывают идеальными скрещенными поляроидами, имеющими форму диска и кольца соответственно. Отверстие освещается поляризованным по кругу светом с интенсивностью  $I_0$ . Определить интенсивность  $I$  света в точке  $P$ .

**Ответ:**  $I = 2I_0$ .

**Задача 10.3.8.** Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластинку  $\lambda/2$ . Интенсивность света в некоторой точке наблюдения  $P$  за пластинкой равна  $I_0$ . Найти интенсивность  $I$  света в точке  $P$ , если часть пластинки в виде диска, закрывающего для точки  $P$  полторы зоны Френеля, повернуть вокруг оси пучка на угол  $90^\circ$ .

**Ответ:**  $I = 5I_0$ .

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003, главы XVI–XVIII.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Физматлит, 1980, глава VII.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §§42–45.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, раздел 4.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §7.
6. Сборник задач по общему курсу физики: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика./ Под ред. В.А.Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000, §11.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, §5.4.
8. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, раздел VIII.

## Глава 11

## ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

## 11.1. Теоретическое введение

Все нагретые тела излучают электромагнитные волны. Такое излучение, испускаемое веществом за счет своей внутренней энергии, имеет *непрерывный частотный спектр* и называется *тепловым*. Тепловое излучение, находящееся в термодинамическом равновесии со своими источниками, называется *равновесным*. Равновесное излучение *изотропно, однородно и не поляризовано*.

Согласно *закону Стефана–Больцмана*, объемная плотность энергии  $u$  равновесного теплового излучения определяется только температурой  $T$  окружающих тел:

$$u(T) = aT^4, \quad (11.1)$$

где  $a = 7,56 \cdot 10^{-16}$  Дж·м<sup>-3</sup>·К<sup>-4</sup>.

Распределение энергии излучения по частотам  $\omega$  характеризуют *спектральной плотностью излучения*  $u_\omega$ :

$$du(\omega, \omega + d\omega) = u_\omega d\omega, \quad (11.2)$$

где  $du$  – плотность энергии излучения, приходящаяся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

С учетом того, что длина волны  $\lambda$  и ее частота  $\omega$  связаны соотношением:

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}, \quad (11.3)$$

формулу (11.2), можно переписать в виде:

$$du(\lambda, \lambda + d\lambda) = u_\lambda d\lambda, \quad (11.4)$$

$$u_\lambda = \frac{\omega^2}{2\pi c} u_\omega. \quad (11.5)$$

Г. Кирхгоф, основываясь на законах термодинамики, пришел к выводу, что спектральная плотность равновесного излучения  $u_\omega$  – универсальная функция, зависящая только от частоты  $\omega$  и температуры  $T$ .

В. Вин установил, что



$$u_{\omega}(T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (11.6)$$

где  $f$  – универсальная функция только одного аргумента. С учетом (11.5) и (11.3) формулу (11.6) можно представить в виде:

$$u_{\lambda}(T) = \frac{\varphi(\lambda T)}{\lambda^5}. \quad (11.7)$$

С ростом температуры  $T$  максимум функции  $u_{\lambda}$  (при  $\lambda = \lambda_{\max}$ ) смещается (отсюда название «закон смещения») в коротковолновую область спектра, причем:

$$\lambda_{\max} T = b, \quad (11.8)$$

где  $b = 0,29$  см·К. Соотношение (11.8) называют *законом смещения Вина*.

Анализируя открытые ранее закономерности для теплового излучения, М.Планк выдвинул *гипотезу о дискретности* возможных значений энергии осцилляторов – источников теплового излучения. Им была предложена (гениально угадана!) следующая формула для спектральной плотности равновесного теплового излучения  $u_{\omega}$ :

$$u_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}, \quad (11.9)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с ( $h$  – постоянная Планка),  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> – постоянная Больцмана,  $c$  – скорость света в вакууме. *Формула Планка* (11.9) нашла подтверждение для всех доступных в эксперименте диапазонов значений  $\omega$  и  $T$ .

В классическом пределе ( $\hbar \omega \ll kT$ , т.е. при высоких температурах) формула Планка (11.9) согласуется с полученной ранее *формулой Рэлея–Джинса*:

$$u_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (11.10)$$

а при  $\hbar \omega \gg kT$  (т.е. при низких температурах) – с *формулой Вина*:

$$u_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right), \quad (11.11)$$

которая в свое время позволила разрешить проблему классической теории, предрекавшей "ультрафиолетовую катастрофу" ( $u_{\omega} \sim \omega^2$ ).

На рис. 11.1 приведены графики зависимостей (11.9), (11.10) и (11.11).

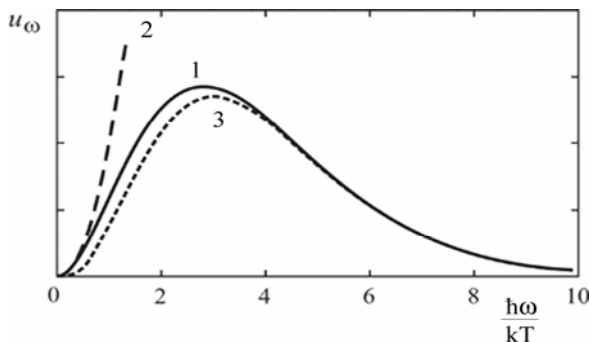


Рис. 11.1. Графики зависимостей  $u_{\omega}$  от  $\frac{\hbar\omega}{kT}$ , соответствующие формулам: 1 – (11.9), 2 – (11.10) и 3 – (11.11)

Если в области пространства с излучением мысленно выделить небольшую площадку  $d\sigma$ , то за время  $dt$  через эту (прозрачную для излучения) площадку в одном направлении переносится энергия

$$dW = P_{d\sigma} \cdot dt, \quad (11.12)$$

где  $P_{d\sigma}$  – *поток энергии* (или *мощность*) излучения через площадку  $d\sigma$ . В свою очередь,

$$P_{d\sigma} = I \cdot d\sigma, \quad (11.13)$$

где  $I$  – *плотность потока энергии* (или *интенсивность*).

Составная часть потока  $P_{d\sigma}$  – поток  $dP_{d\sigma}$  под углом  $\theta$  к нормали в телесный угол  $d\Omega$  равен

$$dP_{d\sigma}(\theta, \varphi) = L \cdot d\Omega \cdot (d\sigma \cdot \cos\theta), \quad (11.14)$$

где  $L = L(\theta, \varphi)$  не зависит от размеров площадки и характеризует *пространственную структуру* излучения. В соответствии с (11.13) и (11.14); интенсивность  $I$  (мощность излучения, проходящего че-

рез единичную площадку в одном направлении) и  $L = L(\theta, \varphi)$  связаны соотношением

$$I = \int_{\Omega=2\pi} L \cdot \cos\theta \cdot d\Omega, \quad (11.15)$$

где  $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ .

В силу изотропности и однородности равновесного излучения, характеристика его пространственной структуры – функция  $L$  – не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$  (закон Ламберта) и, кроме того:

$$L = \frac{u}{4\pi} c, \quad (11.16)$$

где  $u$  – объемная плотность энергии равновесного излучения. Поэтому интенсивность равновесного излучения равна

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot d\theta \cdot L \cdot \cos\theta = \pi L. \quad (11.17)$$

или

$$I = \frac{c \cdot u}{4}. \quad (11.18)$$

Формула (11.18) напоминает формулу для числа ударов  $\nu$  атомов идеального газа о стенку сосуда (в расчете на единицу площади и за единицу времени):  $\nu = \nu n/4$ , где  $n$  – равновесная концентрация,  $\nu$  – средняя скорость движения.

С учетом непрерывности спектра теплового излучения:

$$dI(\omega, \omega + d\omega) = I_\omega d\omega, \quad (11.19)$$

где  $I_\omega$  – спектральная плотность интенсивности. В соответствии с (11.18), для равновесного излучения спектральные плотности  $I_\omega$  и  $u_\omega$  связаны соотношением:

$$I_\omega = \frac{c \cdot u_\omega}{4}. \quad (11.20)$$

Пусть некоторое тело нагрето до температуры  $T$  и находится в термодинамическом равновесии с тепловым излучением. В этом случае энергетическая освещенность  $E$  поверхности равна интенсивности падающего на поверхность тела излучения

$$E = \frac{c \cdot u}{4}. \quad (11.21)$$

В общем случае часть этой энергии, равную  $\alpha E$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), тело поглощает. Коэффициент поглощения  $\alpha$  зависит от природы вещества и температуры. Тело называют *абсолютно белым*, если  $\alpha = 0$ , и *абсолютно черным*, если  $\alpha = 1$ .

В условиях термодинамического равновесия *энергетическая светимость*  $\varepsilon$  поверхности (т.е. интенсивность излучения с поверхности тела) и освещенность этой поверхности связаны соотношением:

$$\varepsilon(T) = \alpha(T) \cdot E(T). \quad (11.22)$$

В силу принципа *детального равновесия* для термодинамически равновесной системы из (11.21) следует:

$$E_{\omega} = \frac{c \cdot u_{\omega}}{4}, \quad (11.23)$$

где  $E_{\omega}$  – спектральная плотность освещенности, из (11.12)

$$\varepsilon_{\omega} = \alpha_{\omega} \cdot E_{\omega}, \quad (11.24)$$

где  $\varepsilon_{\omega}$  – *излучательная способность* тела (т.е. спектральная плотность энергетической светимости его поверхности),  $\alpha_{\omega}$  – его *поглощательная способность*.

Как следует из (11.24), в условиях термодинамического равновесия отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел и является универсальной функцией  $\omega$  и  $T$  (*закон Кирхгофа*). Для абсолютно черного тела ( $\alpha_{\omega} = 1$ ):

$$\varepsilon_{\omega}^0(T) = E_{\omega}(T), \quad (11.25)$$

поэтому

$$\frac{\varepsilon_{\omega}(T)}{\alpha_{\omega}(T)} = \varepsilon_{\omega}^0(T). \quad (11.26)$$

Энергетическая светимость абсолютно черного тела:

$$\varepsilon^0(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\omega}^0(T) d\omega \quad (11.27)$$

зависит только от температуры  $T$ . Согласно (11.25), (11.23), (11.2) и закону Стефана–Больцмана (11.1), энергетическая светимость абсолютно черного тела зависит от температуры по закону:

$$\varepsilon^0(T) = \sigma T^4, \quad (11.28)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт·м<sup>-2</sup>·К<sup>-4</sup>. Кроме того, с учетом (11.17) и (11.18):

$$\varepsilon^0(T) = \pi L^0 = \frac{c \cdot u}{4}, \quad (11.29)$$

где  $L^0$  – энергетическая яркость излучения с поверхности абсолютно черного тела

$$L^0 = \frac{u}{4\pi} c.$$

Логично, что  $L^0$  и  $L$  из (11.16) одинаковы.

## 11.2. Задачи с решениями

**Задача 11.2.1.** Определить мощность излучения абсолютно черного тела, нагретого до температуры 1000 К, если площадь его поверхности  $S$  равна 10 м<sup>2</sup>.

### Решение

Поскольку мощность  $P_S$  и интенсивность  $I$  излучения связаны соотношением (11.13), то:

$$P_S = I \cdot S.$$

Согласно (11.28) для абсолютно черного тела:

$$I = \varepsilon^0(T) = \sigma T^4.$$

Поэтому искомая мощность  $P_S$  равна

$$P_S = \sigma T^4 S = 5,67 \cdot 10^{-8} (1000)^4 \cdot 10 = 5,67 \cdot 10^5 \text{ Вт.}$$

**Ответ:** 567 кВт.

**Задача 11.2.2.** Черная пластина, освещаемая Солнцем, ориентирована перпендикулярно его лучам. Определить освещенность пластины, если ее температура равна 300 К.

### Решение

Согласно (11.12) и (11.13), количество световой энергии, падающей на поверхность пластины площади  $S$  за время  $\Delta t$ , равно

$$\Delta W_{\text{пад}} = E \cdot S \cdot \Delta t,$$

где  $E$  – освещенность пластины.

Поскольку пластина черная, то энергия, излучаемая пластиной с обеих поверхностей за то же время, равна

$$\Delta W_{\text{изл}} = \varepsilon^0 \cdot 2S \Delta t,$$

где  $\varepsilon^0$  – светимость абсолютно черного тела, которая зависит от температуры по закону (11.28):

$$\varepsilon^0(T) = \sigma T^4.$$

В установившемся режиме:

$$\Delta W_{\text{пад}} = P_{\text{изл}},$$

или

$$E \cdot S \Delta t = \sigma \cdot T^4 \cdot 2S \cdot \Delta t,$$

откуда

$$E = 2\sigma T^4 = 2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (300)^4 \approx 919 \text{ Вт/м}^2.$$

**Ответ:**  $E = 919 \text{ Вт/м}^2$ .

**Задача 11.2.3.** Определить мощность излучения абсолютно черного тела, если площадь излучающей поверхности тела равна  $3\text{ м}^2$ , а максимум спектральной плотности излучения приходится на длину волны  $0,58 \text{ мкм}$ .

**Решение:**

Мощность  $P_S$  излучения черного тела с площади поверхности  $S$  равна

$$P_S = \varepsilon^0(T) \cdot S,$$

где, согласно (11.28), светимость абсолютно черного тела:

$$\varepsilon^0(T) = \sigma T^4.$$

С учетом закона смещения Вина (11.8):

$$\lambda_{\text{max}} T = b$$

находим мощность излучения абсолютно черного тела

$$P_S = \sigma \left( \frac{b}{\lambda_{\text{max}}} \right)^4 \cdot S = 5,67 \cdot 10^{-8} \left( \frac{0,29 \cdot 10^{-2}}{0,58 \cdot 10^{-6}} \right)^4 \cdot 3 \approx 106 \text{ МВт}.$$

**Ответ:**  $P_S = 106 \text{ МВт}$ .

**Задача 11.2.4.** С нагретой до некоторой температуры поверхности тела излучается энергия  $175 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$ . При этом отношение энергетической светимости этой поверхности  $\varepsilon(T)$  к светимости

поверхности абсолютно черного тела  $\varepsilon^0(T)$ , нагретого до той же температуры, равна  $\alpha = \frac{\varepsilon(T)}{\varepsilon^0(T)} = 0,5$ . Найти температуру поверхности тела.

### Решение

Согласно (11.28) энергетическая светимость поверхности черного тела определяется его температурой:

$$\varepsilon^0(T) = \sigma T^4,$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ . Следовательно,

$$T = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^0}{\sigma}}$$

Так как по условию задачи:  $\varepsilon^0(T) = 2 \cdot 175 = 350 \text{ Вт/см}^2$ , то

$$T = \sqrt[4]{\frac{350 \cdot 10^4}{5,67 \cdot 10^{-8}}} \approx 2800 \text{ К.}$$

**Ответ:**  $T = 2800 \text{ К.}$

**Задача 11.2.5.** Определить плотность потока энергии солнечного излучения на земной орбите. Температуру Солнца считать равной 6000 К. Солнечный диск виден с Земли под углом  $32'$ .

### Решение

Полагая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, для потока теплового излучения с его поверхности можем записать:

$$P_S = \varepsilon^0(T) \cdot S = \sigma T^4 \cdot \pi D^2,$$

где  $D$  – диаметр Солнца. Если пренебречь потерями энергии излучения на пути от Солнца до Земли, то на земной орбите искомая плотность потока энергии равна

$$I(R) = \frac{P_S}{4\pi R^2},$$

где  $R$  – расстояние от Земли до Солнца. Учитывая, что по условию  $D/R = \theta = 32'$ , получаем:

$$I(R) = \sigma T^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \approx 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} = 1,6 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}.$$

**Ответ:**  $I = 1,6 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$ .

**Задача 11.2.6.** Две большие полости с зеркально отражающими наружными поверхностями имеют относительно малые круглые отверстия диаметром  $d = 2$  см, которые расположены друг напротив друга. В одной из полостей поддерживается постоянная температура  $T_1 = 2000$  К, в другой полости в установившемся режиме температура равна  $T_2 = 400$  К. Определить расстояние между отверстиями.

**Решение**

Будем рассматривать отверстие в полости 1 как элемент поверхности абсолютно черного тела, имеющего температуру  $T_1$ . В соответствии с (11.28) и (11.29), яркость излучения с такой поверхности:

$$L = \frac{\sigma T_1^4}{\pi},$$

а согласно (11.14), поток энергии, попадающий в отверстие полости 2, равен

$$P_{12} = \frac{\pi d^2}{4} \int_{\Omega} L \cos\theta \cdot d\Omega,$$

где  $\Omega$  – телесный угол, под которым отверстие в полости 2 видно с поверхности отверстия в полости 1. Вычисляя интеграл в предыдущей формуле, получим:

$$P_{12} = \frac{\pi d^2}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} L \cos\theta \sin\theta \cdot d\theta = \frac{\pi d^2}{4} 2\pi \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{\theta^2}{2},$$

где  $\theta \approx d/(2l)$ . Таким образом,

$$P_{12} = \frac{\pi d^2}{4} \sigma T_1^4 \left( \frac{d}{2L} \right)^2.$$

С другой стороны, поток энергии из полости 2 через отверстие в ней:

$$P_2 = \frac{\pi d^2}{4} \sigma T_2^4.$$

В установившемся режиме:

$$P_{12} = P_2,$$



и следовательно,

$$T_1^4 \left( \frac{d}{2L} \right)^2 = T_2^4.$$

Поэтому искомое расстояние между отверстиями

$$L = \frac{dT_1^2}{2T_2^2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{(2000)^2}{(400)^2} = 25 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $L = 25$  см.

**Задача 11.2.7.** Показать с помощью формулы Вина (11.6), что максимальное значение спектральной плотности энергии теплового излучения пропорционально  $T^3$ .

**Решение**

Согласно формуле Вина (11.6)

$$u_\omega(T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right).$$

При фиксированной температуре производная

$$\frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} = 3\omega^2 f + \omega^3 \frac{f'}{T}$$

обращается в нуль, если

$$\omega = \omega_{\max} = -T \frac{3f(\omega_{\max})}{f'(\omega_{\max})}.$$

Таким образом,

**Ответ:**  $(u_\omega)_{\max} \sim T^3$ .

**Замечание.** Для спектральной плотности  $u_\lambda$  формула Вина имеет вид (11.7):

$$u_\lambda(T) = \frac{\varphi(\lambda T)}{\lambda^5},$$

поэтому с учетом закона смещения (11.8):

$$(u_\lambda)_{\max} \sim T^5.$$

**Задача 11.2.8.** Медный шарик диаметром  $d$  помещен в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близ-

кой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика  $T_0 = 400$  К. За время  $\Delta t = 4$  часа температура шарика уменьшается в  $\eta = 2$  раза. Считая поверхность шарика абсолютно черной, определить его диаметр  $d$ .

### Решение

При температуре  $T$  за время  $dt$  с поверхности шарика излучается энергия

$$dW = \sigma T^4 \cdot \pi d^2 \cdot dt.$$

В результате этого внутренняя энергия шарика изменяется на величину

$$dU = c \cdot m \cdot dT,$$

где  $m$  – масса шарика,  $c$  – удельная теплоемкость.

Полагая

$$dW = dU,$$

получаем уравнение:

$$\sigma T^4 \cdot \pi d^2 \cdot dt = c \cdot \rho \cdot \frac{\pi d^3}{6} \cdot dT,$$

где  $\rho$  – плотность шарика.

Разделяя переменные и интегрируя по  $t$  и  $T$ , находим:

$$\Delta t = \frac{c\rho d}{18\sigma T_0^3} (\eta^3 - 1).$$

Так как для меди  $c = 390 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  и  $\rho = 8,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , то для диаметра  $d$

получаем

$$d = \frac{18 \cdot \Delta t \cdot \sigma \cdot T_0^3}{(\eta^3 - 1) c \rho} = \frac{18 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (400)^3}{(8 - 1)^2 \cdot 390 \cdot 8,9 \cdot 10^3} \approx 0,55 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $d = 0,55$  см.

**Задача 11.2.9.** Найти с помощью формулы Планка число фотонов  $dN$  в единице объема при температуре  $T$  для спектральных интервалов  $(\omega, \omega + d\omega)$  и  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ .

### Решение

Согласно (11.2):

$$du(\omega, \omega + d\omega) = u_\omega d\omega,$$

где в соответствии с формулой Планка (11.9):

$$u_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{\exp^{kT} - 1}.$$

Так как энергия фотона с частотой  $\omega$  равна  $\hbar \omega$ , то

$$du(\omega, \omega + d\omega) = dN \cdot \hbar \omega.$$

Следовательно, число фотонов в единице объема при температуре  $T$ :

$$dN(\omega, \omega + d\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}.$$

Делая замену переменных:

$$\omega = 2\pi c/\lambda$$

и

$$|d\omega| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda,$$

для интервала  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  получим:

$$dN(\lambda, +d\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\frac{2\pi c\hbar}{kT\lambda} - 1}.$$

**Ответ:**

$$dN(\omega, \omega + d\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{kT} - 1}, \quad dN(\lambda, \lambda + d\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{e^{\frac{2\pi c\hbar}{kT\lambda}} - 1}.$$

**Задача 11.2.10.** При каких температурах расхождение между значениями  $u_{\omega}$ , рассчитанными по формулам Вина (11.11) и формуле Планка (11.9), для видимой части спектра ( $400 \leq \lambda \leq 750$  нм) не превышает 1%?

**Решение**

По формуле Вина (11.11):

$$u_{\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/(kT)},$$

а по формуле Планка (11.9):

$$u_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / (kT)} - 1}.$$

Поэтому

$$\frac{u_{\text{Винн}}}{u_{\text{Планк}}} = \frac{e^x - 1}{e^x},$$

где  $x = \frac{\hbar \omega}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT}$ .

По условию задачи:

$$\frac{u_{\text{Планк}} - u_{\text{Винн}}}{u_{\text{Планк}}} = \frac{1}{e^x} \leq 0,01,$$

следовательно,

$$T \leq \frac{hc}{\lambda k \ln 100} \approx 4150 \text{ К}.$$

**Ответ:** Для видимой части спектра ( $400 \leq \lambda \leq 750$ )  $T \leq 4150$  К для  $\lambda = 750$  нм.

**Задача 11.2.11.** Световая мощность излучения точечного изотропного монохроматического ( $\lambda = 589$  нм) источника равна 10 Вт. Найти: а) среднюю плотность потока фотонов на расстоянии  $r = 2$  м от источника; б) расстояние  $R$  от источника до точки, где средняя концентрация фотонов равна  $100 \text{ см}^{-3}$ .

**Решение:**

а) В соответствии с (11.13) на расстоянии  $r$  от точечного источника интенсивность излучения равна

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

где  $P$  – излучательная мощность источника.

Поскольку энергия одного фотона равна  $\varepsilon = hc/\lambda$ , то средняя плотность потока фотонов на расстоянии  $r$  от источника:

$$\langle j(r) \rangle = \frac{P\lambda}{4\pi r^2 hc}.$$

При  $r = 2$  м

$$\langle j \rangle \approx 6 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

б) В случае точечного источника можно считать, что

$$\langle j(R) \rangle = n(R) \cdot c,$$

где  $n(R)$  – концентрация фотонов на расстоянии  $R$  от источника. Поэтому

$$R = \sqrt{\frac{P\lambda}{4\pi c^2 n}}$$

и при  $n = 100 \text{ см}^{-3}$ :

$$R \approx 9 \text{ м.}$$

**Ответ:** а)  $\langle j \rangle \approx 6 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ; б)  $R \approx 9 \text{ м.}$

### 11.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 11.3.1.** В спектре некоторой звезды максимуму излучения соответствует частота  $\approx 10^{15}$  Гц. Найти температуру поверхности этого космического объекта.

**Ответ:**  $\approx 10\,000 \text{ К.}$

**Задача 11.3.2.** Найти температуру черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму его излучательной способности, на  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  больше, чем при температуре  $2500 \text{ К.}$

**Ответ:**  $\approx 1750 \text{ К.}$

**Задача 11.3.3.** При какой длине волны излучательная способность абсолютно черного тела с энергетической светимостью  $3,0 \text{ Вт/см}^2$  максимальна?

**Ответ:**  $3,4 \text{ мкм.}$

**Задача 11.3.4.** Излучательная способность Солнца максимальна вблизи длины волны  $0,48 \text{ мкм}$ . В предположении, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, оценить: 1) какую массу теряет Солнце ежесекундно за счет теплового излучения? и 2) за какое время масса Солнца должна уменьшаться на 1%?

**Ответ:** 1)  $0,5 \cdot 10^{10} \text{ кг/с}$ ; 2)  $\approx 10^{11} \text{ лет.}$

**Задача 11.3.5.** Черный тонкостенный металлический сосуд, имеющий форму куба, заполнен водой, нагретой до  $50^\circ\text{C}$ . За какое время сосуд остынет до  $10^\circ\text{C}$ , если он находится внутри замкнутой

откачанной черной полости, температура стенок которой поддерживается на уровне  $0^{\circ}\text{C}$ . Масса воды в сосуде – 1 кг.

**Ответ:**  $\approx 1,64$  час.

**Задача 11.3.6.** Найти мощность  $P$  электрического тока, необходимую для накаливания металлической нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 3500 К. Считать, что нить излучает в соответствии с законом Стефана-Больцмана. Потери на теплопроводность не учитывать.

**Ответ:**  $P = 5350$  Вт.

**Задача 11.3.7.** При  $T = 3500$  К отношение энергетической светимости вольфрама к энергетической светимости абсолютно черного тела равно 0,35. Найти: 1) радиационную температуру  $T_r$  (температуру черного тела, энергетическая светимость которого равна энергетической светимости вольфрама при данной температуре) и 2) мощность электрического тока  $P$  для вольфрамовой нити из предыдущей задачи.

**Ответ:** 1)  $T_r \approx 2690$  К, 2)  $P \approx 1870$  Вт.

## Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976, глава XXXVI.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980, глава X.
3. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш. шк., 1985, §50.
4. Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986, 9.1.
5. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. IV. Оптика/ Под ред. Д.В.Сивухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006, §12.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, 6.6.
7. Ильичева Е.Н., Кудеяров Ю.А., Матвеев А.Н. Методика решения задач оптики/ Под ред. А.Н.Матвеева – М.: Изд-во Моск. унта, 1981, раздел X.