МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
физический факультет

А. Б. ПИМЕНОВ

# МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

учебное пособие



Москва
2016

Пименов А. Б. **Методика решения задач по теоретической механике**. — М.: Физический факультет МГУ, 2016. — 192 с.

Методическое пособие представляет собой учебное руководство по решению задач по основным разделам курса теоретической механики и знакомит читателя с методами исследования механических систем. В нем представлены наиподробнейшие решения около полусотни задач, позволяющих читателю, по мнению автора, освоить основные понятия и методы классической механики «с нуля». Перед каждой темой даются общие методические рекомендации, способные сориентировать читателя при самостоятельном изучении материала и решении задач. Учебное пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов физического факультета МГУ, изучающих курс теоретической механики.

*Александр Борисович Пименов*

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рецензент: профессор *В. И. Денисов*

Редактор: *О. С. Павлова*

Оригинал-макет: *А. Б. Пименов*

Подписано в печать 07.12.2015
Объем 12 п. л. Тираж 100 экз. Заказ 112

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ

# Содержание

# Предисловие

Данное учебное пособие написано автором на основе многолетнего опыта преподавания общего курса теоретической механики на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова студентам-физикам 2-го и 3-го курсов. Сборник содержит максимально подробно разобранные решения свыше 50 задач по основным разделам курса, которые позволяют на достаточно глубоком уровне познакомить читателя с основными понятиями и методами классической механики. Основу пособия составляют наиболее типичные классические задачи по теоретической механике, позволяющие ярко продемонстрировать их применение. Пособие создавалось, прежде всего, как методическое руководство для самостоятельной работы студентов в процессе подготовки к семинарским занятиям, коллоквиумам, зачетам и экзаменам. Перед каждой темой кратко приведены общие методические рекомендации для решения задач, которые в дальнейшем на конкретных примерах максимально детально поясняются. Все вычисления и выкладки проведены детальнейшим образом, чтобы показать красоту используемого математического аппарата и теоретических конструкций, с одной стороны, и простоту излагаемых методов, с другой стороны. Пособие составлено с расчетом того, что читатель уже ознакомлен с основными фактами из теоретического материала по изучаемой теме (на основе лекционного курса, учебников и пр.), детали которого и прорабатываются в данном руководстве на конкретных примерах. Автор не ставил цели написания всеобъемливающего издания.

Книга ориентирована прежде всего на студентов 2-го и 3-го курса физического факультета МГУ. Автор надеется, что данная книга окажется полезным дополнением к существующим учебным пособиям по теоретической механике не только для учащихся, но и для аспирантов, проходящих педагогическую практику, а также преподавателей, ведущих семинарские занятия по теоретической механике.

Автор выражает огромную признательность своему коллеге доценту Ольге Серафимовне Павловой, взявшей на себя нелегкий труд внимательного чтения рукописи и ее корректуру, за обстоятельный разбор работы и ряд интересных предложений, касающихся методических особенностей сборника, ценных советов и полезных замечаний, во многом способствовавшим улучшения данного пособия.

Автор будет признателен внимательному читателю, обнаружившему опечатки, неточности в тексте книги. Просьба все замечания и предложения по содержанию данного учебного пособия присылать на электронный адрес: ab.pimenov@physics.msu.ru.

# Глава 1

# Кинематика материальной точки

**Общие рекомендации.**

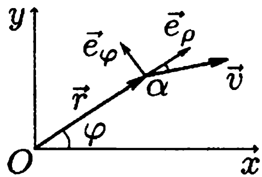
Большинство кинематических задач посвящены нахождению закона движения механических систем и решаются путем составления системы дифференциальных уравнений. Для этого, сначала необходимо определиться с выбором координат, в которых удобно будет решать задачу. Общих и универсальных рецептов выбора координат, наверное, не существует. Зачастую приходится действовать методом проб и ошибок: выбрать, к примеру, декартовы координаты, попытаться составить систему уравнений; если система оказывается сложной для дальнейшего решения, можно попробовать выбрать какие-либо криволинейные координаты. Тем не менее очень часто соображения симметрии, детали и данные в условии задачи интуитивно наводят на рациональный выбор системы координат. Когда координаты выбраны, необходимо позаботиться о выражениях для кинематических векторных величин (радиус-вектор, скорость, ускорение и т.д.) в виде разложения по локальному базису соответствующей системы координат. Система дифференциальных уравнений получается путем приравнивания коэффициентов разложения заданных в условии задачи векторных величин при соответствующих ортах выбранной системы координат.

**Задача 1.1.** Точка движется в плоскости так, что угол между ее вектором скорости и радиус-вектором все время остается постоянным и равным $\alpha$. Найти уравнение траектории точки.

**Решение.**

Будем решать задачу в полярных координатах. Изобразим на рисунке радиус-вектор $\vec{r}$, вектор скорости $\vec{v}$, орты $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ локального базиса. Вспомним известное выражение для вектора скорости в виде разложения по базису полярной системы координат:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{1.1}$$




Из рисунка находим, что проекция вектора скорости $\vec{v}$ на орт $\vec{e}_\rho$ локального базиса (радиальная составляющая вектора скорости)

$$v_\rho = v\cos\alpha.$$

а проекция на орт $\vec{e}_\varphi$ (трансверсальная составляющая)

$$v_\varphi = -v\sin\alpha.$$

Приравнивая их коэффициентам при $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ в разложении (1.1), получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v\cos\alpha. \\ \rho\dot{\varphi} = -v\sin\alpha. \end{cases} \tag{1.2}$$

Поделим одно уравнение на другое с целью избавления от времени, которое фигурирует в дифференциале $dt$ в производных $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\varphi}} = \frac{d\rho/dt}{\rho d\varphi/dt} = \frac{d\rho}{\rho d\varphi} = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{1.3}$$

Разделяя переменные (помня, что $\alpha = \text{const}$), имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -d\varphi\,\text{ctg}\alpha.$$

Элементарное интегрирование приводит к

$$\ln\rho = -\varphi\,\text{ctg}\alpha + C. \tag{1.4}$$

Аддитивная константа $C$ интегрирования может быть найдена из начальных условий (заметим, в условии задачи они явно не заданы, но всегда подразумеваются!):

$$\rho(t_0) = \rho_0, \qquad \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Полагая $t = t_0$ в (1.4), находим

$$C = \ln\rho_0 + \varphi_0\,\text{ctg}\alpha.$$

В итоге, после подстановки найденной аддитивной константы интегрирования в (1.4) уравнение траектории примет вид:

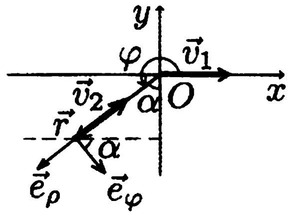
$$\rho(\varphi) = \rho_0 e^{-(\varphi - \varphi_0)\text{ctg}\alpha}.$$

**Задача 1.2.** Заяц бежит по прямой со скоростью $v_1$. Его начинает преследовать со скоростью $v_2$ собака, которая в ходе погони всегда бежит в направлении строго на зайца. В начальный момент времени расстояние между ними равно $a$ и направления их движения ортогональны. Найти уравнение траектории собаки в системе отсчета, связанной с зайцем.

**Решение.**

В системе отсчета, связанной с зайцем, введем оси декартовой системы координат так, чтобы заяц находился в начале координат. Задачу будем решать в полярных координатах. Вектор скорости $\vec{v}_3$ собаки в системе отсчета, связанной с зайцем, согласно классическому принципу сложения скоростей, может быть записана как

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \tag{1.5}$$




Последовательно проецируя равенство (1.5) на орты локального базиса $\vec{e}_\rho$ и $\vec{e}_\varphi$, найдем составляющие вектора $\vec{v}_3$:

$$v_{3\rho} = -v_2 + v_1 \sin\alpha, \tag{1.6}$$

$$v_{3\varphi} = -v_1 \cos\alpha. \tag{1.7}$$

С другой стороны, радиальная и трансверсальная составляющие вектора в полярных координатах, как известно, могут быть записаны соответственно как

$$v_{3\rho} = \dot{\rho}, \tag{1.8}$$

$$v_{3\varphi} = \rho\dot{\varphi}. \tag{1.9}$$

Учитывая, что $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} - \varphi$, имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -v_2 - v_1 \cos\varphi, \\ \rho\dot{\varphi} = v_1 \sin\varphi. \end{cases} \tag{1.10}$$

Поделив одно уравнение на другое, получим дифференциальное уравнение с двумя переменными:

$$\frac{d\rho}{\rho d\varphi} = -\left(\frac{v_2}{v_1}\frac{1}{\sin\varphi} + \mathrm{ctg}\varphi\right). \tag{1.11}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\int d\varphi \left(\frac{v_2}{v_1}\frac{1}{\sin\varphi} + \mathrm{ctg}\varphi\right). \tag{1.12}$$

Интегралы в полученном равенстве вычисляются стандартным образом. Интеграл слева:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \ln\rho + C_1, \tag{1.13}$$

Первый интеграл справа берется домножением числителя и знаменателя подынтегральной функции на $\sin\varphi$ и введением новой переменной интегрирования $y = \cos\varphi$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\int \frac{d\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \Big[y = \cos\varphi\Big] =$$
$$= -\int \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = -\frac{1}{2}\int dy\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C_2 = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right| + C_2, \qquad (1.14)$$

Второй интеграл справа:

$$\int \mathrm{ctg}\varphi\, d\varphi = \int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \int \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \ln|\sin\varphi| + C_3. \qquad (1.15)$$

Собирая аддитивные константы $C_1, C_2, C_3$ в одну $C$, запишем результат интегрирования уравнения (1.11) в виде:

$$\ln\rho = \frac{v_2}{2v_1}\ln\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right| - \ln|\sin\varphi| + C. \qquad (1.16)$$

Константу интегрирования $C$ найдем из начальных условий. По условию сказано, что в начальный момент времени $t = t_0$ направления движения зайца и собаки перпендикулярны, что означает

$$\varphi(t_0) = \frac{3\pi}{2}$$

и расстояние между ними равно $a$, что эквивалентно

$$\rho(t_0) = a.$$

Поэтому, полагая в (1.16) $t = t_0$, найдем

$$C = \ln a.$$

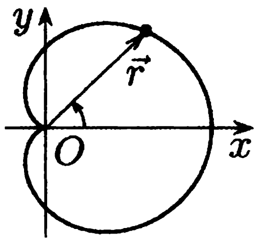
Окончательно, искомое уравнение траектории примет вид:

$$\rho(\varphi) = a\,\cancel{\ln}\left(\left|\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right|^{\frac{v_2}{2v_1}} \frac{1}{|\sin\varphi|}\right). \qquad (1.17)$$

**Задача 1.3.** Точка описывает кардиоиду $\rho = 2a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ таким образом, что ее радиус-вектор вращается с постоянной скоростью $\omega$. Найти вектор скорости и вектор ускорения точки как функции угла $\varphi$.

**Решение.**
Постоянство угловой скорости вращения радиус-вектора эквивалентно условию

$$\dot{\varphi} = \omega. \tag{1.18}$$




Перепишем уравнение траектории в эквивалентном виде, понизив степень тригонометрической функции:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi). \tag{1.19}$$

Вектор скорости в полярных координатах, как известно, имеет вид:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi. \tag{1.20}$$

Дифференцируя уравнение траектории (1.19) по времени, имеем:

$$\dot{\rho} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{1.21}$$

Учитывая соотношения (1.18) и (1.21), вектор скорости (1.20) как функцию угла $\varphi$ запишем как

$$\vec{v}(\varphi) = -a\omega\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + a(1 + \cos\varphi)\omega\,\vec{e}_\varphi. \tag{1.22}$$

Для нахождения вектора ускорения необходимо продифференцировать полученное выражение (1.22) для скорости.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(-a\omega\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + a(1 + \cos\varphi)\omega\,\vec{e}_\varphi) = -a\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_\rho -$$
$$-a\omega\sin\varphi\,\dot{\vec{e}}_\rho - a\omega\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + a(1 + \cos\varphi)\omega\,\dot{\vec{e}}_\varphi. \tag{1.23}$$

Принимая во внимание условие (1.18), имеем:

$$\vec{a} = -a\omega^2 \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - a\omega \sin\varphi\, \dot{\vec{e}}_\rho - a\omega^2 \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi + a(1+\cos\varphi)\omega\, \dot{\vec{e}}_\varphi. \quad (1.24)$$

Далее необходимо выяснить, чему равны производные по времени от векторов $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ локального базиса полярной системы координат. Для этого вспомним, что они раскладываются по базису декартовой системы координат следующим образом:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y, \quad (1.25)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \quad (1.26)$$

Поскольку орты декартовой системы координат $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ не изменяются со временем, то есть их производные $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = 0$, с учетом условия (1.18), будем иметь:

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \sin\varphi\, \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos\varphi\, \vec{e}_y = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi = \omega\, \vec{e}_\varphi, \quad (1.27)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\varphi\, \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin\varphi\, \vec{e}_y = -\dot{\varphi}\, \vec{e}_\rho = -\omega\, \vec{e}_\rho. \quad (1.28)$$

Тогда выражение (1.24) для вектора ускорения как функции угла $\varphi$ принимает вид:

$$\vec{a}(\varphi) = -a\omega^2\Big(1 + 2\cos\varphi\Big)\, \vec{e}_\rho - 2a\omega^2 \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi. \quad (1.29)$$

**Задача 1.4.** Частица движется по эллипсу, заданному уравнением

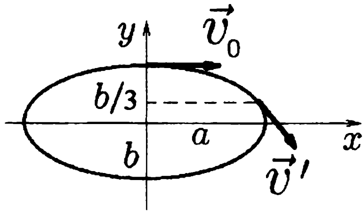
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.30)$$

так, что вектор ее ускорения все время остается направленным параллельно оси $y$. Найти величину ускорения $w(t')$ точки в тот момент, когда ее ордината $y(t') = b/3$, если в начальный момент $x(0) = 0$, $y(0) = b$, $|\vec{v}(0)| = v_0$.

**Решение.**

Очевидно, что в точке эллипса с координатами $x = 0$, $y = b$, задающей начальное положение частицы, вектор ее скорости направлен параллельно оси $x$ (см. рис.). Предположим, что в этот момент частица движется в положительную сторону оси $x$. Тогда в начальный момент времени имеем:

$$\dot{x}(0) = v_0, \qquad \dot{y}(0) = 0. \tag{1.31}$$




Вектор ускорения $\vec{w}$ в декартовых координатах, как известно, может быть записан в виде:

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y. \tag{1.32}$$

По условию задачи он все время остается направленным вдоль оси $y$, что означает равенство нулю в любой момент времени его составляющей вдоль оси $x$:

$$\ddot{x}(t) = 0. \tag{1.33}$$

Это, в свою очередь, приводит к выводу, что проекция вектора скорости на ось $x$ остается постоянной и равной, согласно заданным начальным условиям (1.31) $v_0$:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_0. \tag{1.34}$$

Поэтому наша задача сводится к нахождению значения $\ddot{y}$ в момент $t'$:

$$|\vec{w}(t')| = |\ddot{y}(t')|. \tag{1.35}$$

Продифференцируем уравнение траектории (1.30) по времени:

$$\frac{x(t)\dot{x}(t)}{a^2} + \frac{y(t)\dot{y}(t)}{b^2} = 0, \tag{1.36}$$

что, принимая во внимание условие (1.34), может быть записано как:

$$\frac{x(t)v_0}{a^2} + \frac{y(t)\dot{y}(t)}{b^2} = 0. \tag{1.37}$$

Продифференцировав по времени еще раз, будем иметь:

$$\frac{\dot{x}(t)v_0}{a^2} + \frac{\dot{y}^2(t) + y(t)\ddot{y}(t)}{b^2} = 0. \tag{1.38}$$

Условие (1.34) позволяет переписать последнее соотношение в виде:

$$\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2(t) + y(t)\ddot{y}(t)}{b^2} = 0. \tag{1.39}$$

Именно отсюда мы имеем возможность выразить вторую производную ординаты частицы $\ddot{y}$:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{y(t)}\left(\frac{v_0^2 b^2}{a^2} + \dot{y}^2(t)\right) \tag{1.40}$$

Величину $\dot{y}(t)$ найдем из равенства (1.37):

$$\dot{y}(t) = -\frac{b^2 v_0}{a^2}\frac{x(t)}{y(t)}. \tag{1.41}$$

Поэтому

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{y(t)}\left(\frac{v_0^2 b^2}{a^2} + \left(\frac{b^2 v_0}{a^2}\right)^2 \frac{x^2(t)}{y^2(t)}\right) = -\frac{1}{y(t)}\frac{v_0^2 b^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2(t)}{y^2(t)}\right).$$

Выражая $x^2$ из уравнения эллипса (1.30), окончательно находим:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{y(t)}\frac{v_0^2 b^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2 - y^2(t)}{y^2(t)}\right) = -\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3(t)}. \tag{1.42}$$

Значит, в момент времени $t'$, в который $y(t') = b/3$, будем иметь:

$$\ddot{y}(t') = -\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3(t')} = -\frac{27\, v_0^2 b}{a^2}. \tag{1.43}$$

То есть модуль вектора ускорения в этот момент, согласно соотношению (1.35),

$$|\vec{w}(t')| = \frac{27\, v_0^2 b}{a^2}. \tag{1.44}$$

# Глава 2

# Метод Лагранжа

## 2.1 Функция и уравнения Лагранжа

**Общие рекомендации.**

Решение любой задачи в рамках лагранжевого фомализма начинается с построения лагранжиана (функции Лагранжа) рассматриваемой системы. Для этого необходимо прежде всего ответить на два вопроса:
1) сколько степеней свободы имеет система?
2) какие обобщенные координаты рационально выбрать для однозначного задания положения тел системы?

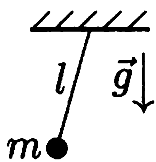
Для ответа на первый вопрос формально можно применить соотношение для числа степеней свободы: $s = 3N - K$, где $N$ — число материальных точек, из которых состоит система, $K$ — число уравнений голономных связей. Но для этого, в частности, придется явно выписывать все уравнения голономных связей. Чаще всего к этому вопросу подходят менее строго: число степеней свободы — это минимальное число независимых координат, необходимых для однозначного задания положения всех тел системы в любой момент времени. На интуитивном уровне необходимо понять, сколько и какие нужно ввести координаты в минимальном количестве, чтобы фиксировать положения всех тел системы в каждый момент времени. Для ответа на второй вопрос, в принципе, нет никаких ограничений, лишь бы введенные координаты были независимыми, и их число совпадало с числом степеней свободы системы. Однако не стоит забывать о соображениях рациональности, учитывающих, к примеру, симметрии системы. От удачного выбора обобщенных координат зависит успех решения задачи.

Для построения функции Лагранжа необходимо рассмотреть произвольное отклоненное состояние системы, для которого следует записать кинетическую и потенциальную энергии ее тел, например, сначала в декартовых координатах. Затем, чаще из чисто геометрических соображений, устанавливая связь декартовых координат с выбранными обобщенными, в конечном итоге, необходимо кинетическую и потенциальную энергии переписать в терминах обобщенных координат.

Следует также помнить о том, что наличие в системе диссипативных сил (сил трения, сопротивления) не отражается на виде лагранжиана системы. Поэтому при построении функций Лагранжа таких систем можно забыть про их присутствие. О них необходимо вспомнить при составлении уравнений движения: силы трения дают о себе знать в правых частях уравнений Лагранжа в виде обобщенных диссипативных сил $Q_i^d$, выражения для которых следует строить отдельно согласно их определению и, в конечном счете, представить как функции независимых выбранных обобщенных координат и их первых производных.

Функция Лагранжа является функцией обобщенных координат $q_i$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ (и, вообще говоря, и времени $t$). Поэтому при построении лагранжиана следует проследить, чтобы никакие другие координаты и переменные, кроме обобщенных, не остались в окончательном выражении.

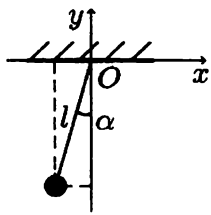
**Задача 2.1.1.** Построить лагранжиан математического маятника массой $m$ с длиной нити $l$, совершающего плоское движение в однородном и постоянном поле тяжести $\vec{g}$ под действием силы сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta\vec{v}$. Записать уравнение Лагранжа.



**Решение.**

Совершенно очевидно, что для задания положения точечной массы, совершающей плоское движение на нити постоянной длины, достаточно ввести одну координату, например, угол отклонения нити от вертикали. Это означает, что данная система имеет одну степень свободы.

Однако для полноты картины поясним, почему рассматриваемая система имеет именно одну степень свободы, подходя к вопросу чисто формально. Для этого необходимо явно выписать все уравнения голономных связей. Выберем оси системы координат так, чтобы точка крепления маятника находилась в начале координат. Пусть плоскость рисунка соответствует значению координаты $z = 0$ (ось $z$ направлена «на нас»).




Поскольку маятник совершает плоское движение, координата $z$ его остается всегда постоянной и в рассматриваемой системе координат равной нулю. Нерастяжимая нить обеспечивает постоянство расстояния между точечной массой и точкой крепления нити, так что координаты $x$ и $y$ маятника в любой момент удовлетворяют соотношению:

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Таким образом, уравнения связей, наложенных на рассматриваемую механическую систему, имеют вид:

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = l^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

то есть число уравнений голономных связей $K = 2$. А поскольку система состоит из одной материальной точки ($N = 1$), поэтому имеем:

$$s = 3N - K = 3 - 2 = 1,$$

то есть математический маятник имеет одну степень свободы.

Выберем в качестве единственной обобщенной координаты указанный угол отклонения нити $\alpha$. Следует помнить о том, что, как и любая координата, введенный нами угол $\alpha$ имеет определенное направление отсчета. Поэтому необходимо его фиксировать для себя, поскольку, знаки координат будут существенными при построении лагранжиана. Пусть положительные значения угла $\alpha$ соответствуют отклонению маятника вправо от вертикали, отрицательные — влево.

Для построения лагранжиана маятника рассмотрим произвольное отклоненное от вертикали его состояние, например, изображенное на рисунке. Связь декартовых координат $x, y$ с обобщенной $\alpha$ устанавливается чисто геометрически:

$$\begin{cases} x = l\sin\alpha, \\ y = -l\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.2}$$

Для рассматриваемого положения маятника, в силу нашей договоренности о направлении отсчета обобщенной координаты, $\alpha < 0$, при этом $x < 0$, $y < 0$. Поэтому для согласованности знаков $\alpha, x, y$ в правых частях (2.2) для $x$ поставлен знак «+», для $y$ — знак «−».

Дифференцируя (2.2)по времени,

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{d}{dt}(l\sin\alpha) = l\dot{\alpha}\cos\alpha, \\ \\ \dot{y} = \dfrac{d}{dt}(-l\cos\alpha) = l\dot{\alpha}\sin\alpha, \end{cases} \tag{2.3}$$

для квадрата вектора скорости маятника будем иметь:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\alpha}^2. \tag{2.4}$$

А потому кинетическая энергия маятника

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2. \tag{2.5}$$

Потенциальная энергия $U$ маятника в поле тяготения может быть найдена из определения потенциальных сил, как сил, которые могут быть представлены в виде градиента скалярной функции, называемой потенциалом или потенциальной энергией:

$$\vec{F}^p = -\vec{\nabla} U. \qquad (2.6)$$

В нашем случае потенциальная сила

$$\vec{F}^p = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y.$$

Поэтому равенство (2.6), определяющее потенциальную энергию, применительно к нашему случаю, в декартовых координатах принимает вид:

$$-mg\vec{e}_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right).$$

Приравнивая коэффициенты при независимых ортах $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ в разложениях в левой и правой частях, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = mg, \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (2.7)$$

одним из наиболее простых решений которого является

$$U = mgy. \qquad (2.8)$$

Отметим, что знак потенциальной энергии жестко связан с направлением осей системы координат. Следует понимать, что поскольку потенциал $U$ задается системой дифференциальных уравнений в частных производных, мы не можем его определить однозначно: вообще говоря, к найденному решению (2.8) можно добавить произвольную функцию времени $f(t)$, не нарушив при этом требований уравнений (2.7). Неоднозначность нахождения потенциала полностью согласуется с неоднозначностью в определнии лагранжиана. Поэтому, конечно же, имеет смысл выбирать наиболее простые по виду и структуре частные решения системы (2.7) для потенциала.

Однако для подстановки найденного потенциала в функцию Лагранжа прежде необходимо его переписать в терминах обобщенной координаты $\alpha$ с учетом (2.2):

$$U = -mgl\cos\alpha. \qquad (2.9)$$

Поэтому лагранжиан математического маятника имеет вид:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl\cos\alpha. \tag{2.10}$$

Для составления уравнения движения необходимо построить обобщенную диссипативную силу. Напомним, что в самом общем случае она определяется равенством

$$Q_i^d = \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_\beta^d \cdot \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial q_i}, \tag{2.11}$$

где индекс $i$ нумерует степени свободы и пробегает значения от 1 до $s$ (в нашем случае $s = 1$ и обобщенная сила имеет только одну компоненту), суммирование ведется по индексу $\beta$, нумерующему материальные точки с радиус-векторами $\vec{r}_\beta$, из которых состоит система: $\beta = \overline{1, N}$ (в нашем случае $N = 1$). Поэтому для нашего маятника обобщенная диссипативная сила

$$Q^d = \vec{F}^d \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \tag{2.12}$$

где ньютонова сила трения $\vec{F}^d = -\beta\vec{v}$. Для дальнейшего вычисления распишем скалярное произведение в (2.12) в декартовых координатах, а затем перейдем от декартовых координат к обобщенной $\alpha$:

$$Q^d = F_x^d \frac{\partial x}{\partial \alpha} + F_y^d \frac{\partial y}{\partial \alpha}. \tag{2.13}$$

С учетом (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= l\cos\alpha, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= l\sin\alpha. \end{aligned}$$

Компоненты ньютоновой диссипативной силы с учетом (2.3)

$$\begin{aligned} F_x^d = -\beta\dot{x} &= -\beta l\dot{\alpha}\cos\alpha, \\ F_y^d = -\beta\dot{y} &= -\beta l\dot{\alpha}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{2.14}$$

Собирая все вместе, окончательно для диссипативной силы будем иметь

$$Q^d = -\beta l\dot{\alpha}\cos\alpha \cdot l\cos\alpha - \beta l\dot{\alpha}\sin\alpha \cdot l\sin\alpha = -\beta l^2\dot{\alpha}. \tag{2.15}$$

Напомним, что уравнения Лагранжа в общем случае записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^d \qquad (2.16)$$

и представляют собой систему дифференциальных уравнений ($i = \overline{1, s}$). Применительно к рассматриваемой нами механической системе с одной степенью свободы, ее динамика описывается одним уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = Q^d. \qquad (2.17)$$

Дифференцирование лагранжиана (2.10) дает

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha},$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = -mgl\sin\alpha.$$

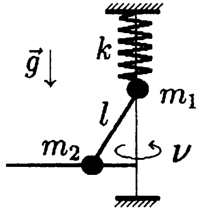
Поэтому уравнение движения (2.17) с учетом найденного выражения для обобщенной диссипативной силы (2.15) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\alpha}\right) + mgl\sin\alpha = -\beta l^2\dot{\alpha}, \qquad (2.18)$$

что после деления на $ml^2$ эквивалентно переписывается в виде:

$$\ddot{\alpha} + \frac{\beta}{m}\dot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0. \qquad (2.19)$$

**Задача 2.1.2** Тело массой $m_1$, прикрепленное к пружине жесткости $k$, может совершать колебательное движение только вдоль вертикальной стороны жесткого прямого угла. Тело массой $m_2$ прикреплено к первому телу с помощью невесомого стержня длиной $l$ и может двигаться вдоль горизонтальной стороны прямого угла. Система вращается вокруг вертикальной оси в поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ с постоянной линейной частотой $\nu$. Построить лагранжиан системы.



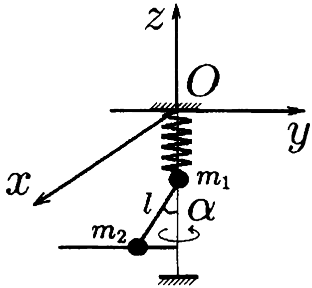

**Решение.**

Для начала определим число степеней свободы системы. Очевидно, что для однозначного задания положения первого тела, движущегося вдоль вертикальной прямой, достаточно ввести одну координату вдоль этой прямой. Задав положение тела массой $m_1$, тем самым мы задаем координаты точки крепления невесомого стержня, к которому прикреплен второй шарик. Шарик массой $m_2$ совершает, вообще говоря, трехмерное движение, которое, согласно принципу суперпозиции движений, мы можем разложить на две составляющие: плоское движение в вертикальной плоскости рисунка и чисто вращательное движение вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi\nu$. Вторая составляющая движения полностью определена и для описания вращения шарика не требуется введения каких-либо обобщенных координат, поскольку мы заранее знаем, на какой угол повернется тело вместе с плоскостью прямого угла вокруг вертикальной оси к любому моменту времени $t$:

$$\varphi_2(t) = \omega t + \varphi_0.$$

При плоском движении (вторая составляющая движения) тело остается на одном и том же расстоянии от точки крепления стержня, координаты которой мы уже фиксировали. Следовательно, для однозначного задания положения второго тела помимо уже упомянутой координаты для первого тела необходимо ввести еще одну. Таким образом, рассматриваемая система имеет две степени свободы.

Сразу же становится очевидным рациональный выбор обобщенных координат. Введем систему координат так, чтобы точка крепления пружины оказалась в начале координат. В качестве первой обобщенной координаты выберем $q_1 = z$ — декартова координата первого тела, а второй $q_2 = \alpha$ — угол отклонения стержня от вертикали. Отметим, что в выбранной нами системе координат координата $z$ все время остается отрицательной ($z < 0$).




Кинетическая энергия первого тела, совершающего одномерное движение вдоль оси $z$,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2. \tag{2.20}$$

Для построения кинетической энергии второго тела воспользуемся известным результатом для квадрата вектора скорости в цилиндрических координатах:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \dot{z}_2^2\right). \tag{2.21}$$

Выразим цилиндрические координаты второго тела через введенные обобщенные координаты $z, \alpha$:

$$\begin{cases} \rho_2 = l \sin\alpha. \\ \varphi_2 = \omega t + \varphi_0, \\ z_2 = z - l\cos\alpha \end{cases} \tag{2.22}$$

(помня при этом, что $z < 0$). Дифференцируя по времени,

$$\begin{cases} \dot{\rho}_2 = l\dot{\alpha}\cos\alpha, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega, \\ \dot{z}_2 = \dot{z} + l\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases} \tag{2.23}$$

и подставляя в (2.21), получим

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + l^2\omega^2\sin^2\alpha + (\dot{z} + l\dot{\alpha}\sin\alpha)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\alpha}^2 + l^2\omega^2\sin^2\alpha + 2l\dot{z}\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{z}^2\right). \tag{2.24}$$

Потенциальная энергия первого тела в поле тяготения

$$U_1 = m_1 g z \tag{2.25}$$

(в правой части ставим знак «+», так как ось $z$ направлена вверх, см. задачу 2.1.1).

Потенциальная энергия второго тела в поле тяготения

$$U_2 = m_2 g z_2 = m_2 g(z - l\cos\alpha). \tag{2.26}$$

Потенциальная энергия упругой деформации пружины

$$U_k = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2, \tag{2.27}$$

где удлинение пружины представляет собой, как обычно, разницу длин деформированной $L$ и недеформированной $L_0$ пружины

$$\Delta L = L - L_0,$$

В случае нашего выбора обобщенных координат

$$L = z.$$

Стало быть,

$$U_k = \frac{1}{2}k\Big(z - L_0\Big)^2. \tag{2.28}$$

Собирая вместе результаты для кинетических (2.20), (2.24) и потенциальных энергий (2.25), (2.26), (2.28), запишем функцию Лагранжа рассматриваемой системы

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - U_{g1} - U_{g2} - U_k \tag{2.29}$$

в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\alpha}^2 + l^2\omega^2\sin^2\alpha + 2l\dot{z}\dot{\alpha}\sin\alpha\right) -$$
$$-(m_1 + m_2)gz + m_2 g l\cos\alpha - \frac{1}{2}k(z - L_0)^2. \tag{2.30}$$

## 2.2 Интегралы движения в методе Лагранжа

**Общие рекомендации.**

Метод интегралов движения является удобным методом решения задач на нахождение закона движения систем. Вместо того, чтобы решать систему дифференциальных уравнений второго порядка, коими являются уравнения Лагранжа, решаем систему уравнений, составленную из интегралов движения — дифференциальных уравнений первого порядка. Однако надо понимать, что не всегда удается использовать с успехом этот метод. Успех его применения, прежде всего, зависит от того, сумеем ли получить замкнутую систему из интегралов движения, то есть сумеем ли мы найти столько интегралов движения, сколько степеней свободы имеет система. Для некоторых систем это сделать не удается в принципе. Для других, если интегралы движения не очевидны сразу, возможно, имеет смысл как-то преобразовать лагранжиан, привести его к такому виду, который позволил бы найти недостающие интегралы. К таким действиям с функцией Лагранжа, к примеру, можно отнести:
1) преобразование обобщенных координат (возможно, что при выборе других обобщенных координат лагранжиан запишется так, что станут очевидными новые интегралы движения);
2) использование свойства неоднозначности определения функции Лагранжа: возможно, какие-то члены из лагранжиана могут быть представлены в виде полной производной по времени $\dfrac{d}{dt}f(q,t)$ от функции обобщенных координат и времени, а потому отброшены.

Не стоит думать, что метод интегралов движения никоим образом не связан и не имеет отношения к уравнениям движения. Интегралы движения являются следствием уравнений Лагранжа. Именно это обстоятельство позволяет эквивалентным образом заменить необходимость решения уравнения Лагранжа на решение системы из интегралов движения.

**Задача 2.2.1.** Построить выражение для обобщенной энергии и уравнение движения для одномерной системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + a\,e^{-\gamma t}\Big(\dot{x} - \gamma x\Big) - \frac{kx^2}{2}, \quad (a, \gamma = \mathrm{const}). \tag{2.31}$$

Найти, если возможно, интегралы движения.

**Решение.**

Поскольку в лагранжиане фигурирует одна обобщенная координата $x$, система имеет одну степень свободы. Следовательно, динамика данной системы описывается одним уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0. \tag{2.32}$$

Тривиальное дифференцирование лагранжиана дает:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} + ae^{-\gamma t}, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -a\gamma e^{-\gamma t} - kx \tag{2.34}$$

и уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + ae^{-\gamma t}\right) + a\gamma e^{-\gamma t} + kx = 0,$$

$$m\ddot{x} - a\gamma e^{-\gamma t} + a\gamma e^{-\gamma t} + kx,$$

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{2.35}$$

в котором мы узнаем уравнение одномерного гармонического осциллятора.

Видно, что слагаемые из функции Лагранжа (2.31), содержащие экспоненту $e^{-\gamma t}$, не проявляются в уравнении движения. И в этом нет ничего удивительного! Несложно заметить, что эти слагаемые сворачиваются в полную производную по времени

$$a\,e^{-\gamma t}\left(\dot{x} - \gamma x\right) = \frac{d}{dt}\left(axe^{-\gamma t}\right) \equiv \frac{d}{dt}f(x,t), \tag{2.36}$$

а потому, в силу неоднозначности функции Лагранжа, не оказывают влияния на динамику системы и могут быть отброшены из нее. Следовательно, функция Лагранжа

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{2.37}$$

описывает ту же систему, что и лагранжиан (2.31)!

При этом оказывается, что обобщенная энергия, построенная по функции Лагранжа (2.31)

$$E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \dot{x}\left(m\dot{x} + ae^{-\gamma t}\right) - \frac{m\dot{x}^2}{2} - a\,e^{-\gamma t}\left(\dot{x} - \gamma x\right) + \frac{kx^2}{2} =$$
$$= \frac{m\dot{x}^2}{2} + a\gamma x e^{-\gamma t} + \frac{kx^2}{2} \tag{2.38}$$

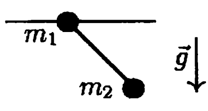
не является интегралом движения, поскольку построена по лагранжиану, явно зависящему от времени (для нее $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$). В то время как обобщенная энергия, построенная по функции Лагранжа (2.37), не зависящей явно от времени (для нее $\dfrac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial t} = 0$),

$$\tilde{E} = \dot{x}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}} - \tilde{\mathcal{L}} = \dot{x}\cdot m\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \tag{2.39}$$

напротив, является интегралом движения.

Таким образом, исследуемая система имеет интеграл движения (2.39), неочевидный по виду исходной функции Лагранжа (2.31).

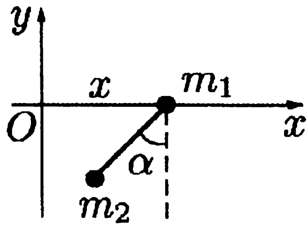
**Задача 2.2.2.** Бусинка массой $m_1$ может без трения скользить по горизонтальной спице. К бусинке с помощью невесомого стержня длины $l$, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, прикреплена другая бусинка массой $m_2$. Система находится в вертикальном однородном и постоянном поле тяжести $\vec{g}$. Найти закон движения бусинок в квадратурах.




**Решение.**

Во-первых, определим число степеней свободы системы. Очевидно, что для задания положения первой бусинки, движущейся по горизонтальной прямой, достаточно ввести одну координату, например, ее декартову координату вдоль горизонтальной оси. Задав положение этой бусинки, мы тем самым в некотором смысле фиксируем положение точки крепления нити. Следовательно, положение второй бусинки, подвешенной на нити в фиксированной точке и совершающей плоское движение, может быть задано еще одной координатой, например, углом отклонения нити от вертикали. Итак, система имеет две степени свободы.

Во-вторых, выберем с качестве обобщеных координат: $q_1 = x$ — декартова координата первой бусинки (оси декартовой системы координат указаны на рисунке, начало координат ее находится где-то на горизонтальной спице), $q_2 = \alpha$ — угол отклонения нити от вертикали. При этом зададим правило отсчета угла $\alpha$: отклонению нити вправо пусть соответствуют значения $\alpha > 0$, влево — значения $\alpha < 0$.




Для построения функции Лагранжа системы бусинок рассмотрим произвольное состояние, например, изображенное на рисунке (согласно нашей договоренности, этому положению тел системы соответствует значение угла $\alpha < 0$).

Декартовы координаты бусинок

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x, \\
y_1 &= 0, \\
x_2 &= x + l\sin\alpha, \\
y_2 &= -l\cos\alpha.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

(поскольку для рассматриваемого положения бусинок $\alpha < 0$, то здесь понимается $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ и расстановка знаков в правых частях осуществлена из соображений, что должно быть $x_2 < x$, $y_2 < 0$).

Дифференцируя (2.40) по времени, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \dot{x},\\
&\dot{y}_1 = 0,\\
&\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\alpha}\cos\alpha.\\
&\dot{y}_2 = l\dot{\alpha}\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Тогда кинетическая энергия системы

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \\
= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{x}\cos\alpha\right).
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

Потенциальная энергия системы

$$
U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_2 g l\cos\alpha. \tag{2.43}
$$

Стало быть, лагранжиан системы бусинок, как разность кинетической и потенциальной энергий,

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{x}\cos\alpha\right) + m_2 g l\cos\alpha. \tag{2.44}
$$

Для нахождения закона движения воспользуемся методом интегралов движения. С этой целью найдем два интеграла движения, чтобы получить замкнутую систему двух дифференциальных уравнений относительно двух обобщенных координат $x, \alpha$.

Очевидно, что лагранжиан (2.44) явно не зависит от времени:

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0
$$

и поскольку отсутствуют диссипации, то обобщенная энергия $E$ системы является интегралом движения. Построим ее по определению:

$$
\begin{aligned}
E &= \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} + \dot{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \mathcal{L} = \\
&= \dot{x}\cdot\left((m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\alpha}\cos\alpha\right) + \dot{\alpha}\cdot m_2\left(l^2\dot{\alpha} + l\dot{x}\cos\alpha\right) - \mathcal{L} = \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{x}\cos\alpha\right) - \\
&\qquad\qquad - m_2 g l\cos\alpha = \text{const}.
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

Очевидно, что обобщенная координата $x$ для системы с лагранжианом (2.44) является циклической:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0,$$

что с учетом отсутствия диссипаций означает сохранение обобщенного импульса $p_x$, соответствующего этой координате. Выражение для этого интеграла движения найдем по определению:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\alpha} \cos\alpha = \text{const}. \tag{2.46}$$

Значения констант $E$ и $p_x$ мы можем однозначно найти из начальных условий, задающих значения обобщенных координат $x, \alpha$ и их первых производных по времени $\dot{x}, \dot{\alpha}$ в начальный момент времени $t = t_0$. Для этого положим $t = t_0$ в полученных для интегралов движения выражения (2.45) и (2.46):

$$E = E\Big(\dot{x}(t_0), \dot{\alpha}(t_0), \alpha(t_0)\Big),$$
$$p_x = p_x\Big(\dot{x}(t_0), \dot{\alpha}(t_0). \alpha(t_0)\Big).$$

Теперь будем считать известными значения найденных интегралов движения несмотря на то, что явно начальные условия не заданы.

Объединяя равенства (2.45) и (2.46) в систему уравнений, приступим к нахождению закона движения. Для этого выразим из (2.46) обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{p_x - m_2 l \dot{\alpha} \cos\alpha}{m_1 + m_2} \tag{2.47}$$

и подставим в выражение (2.45) для обобщенной энергии:

$$E = \frac{(p_x - m_2 l \dot{\alpha} \cos\alpha)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\alpha}^2 + m_2 l \dot{\alpha}\, \frac{p_x - m_2 l \dot{\alpha} \cos\alpha}{m_1 + m_2} \cos\alpha - m_2 g l \cos\alpha, \tag{2.48}$$

что после элементарных преобразований запишется как

$$E = \frac{p_x^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_2 l^2 \Big(m_1 + m_2 \sin^2\alpha\Big)}{2(m_1 + m_2)} \dot{\alpha}^2 - m_2 g l \cos\alpha. \tag{2.49}$$

Полученное равенство представляет собой дифференциальное уравнение относительно одной обобщенной координаты $\alpha$ с разделяющимися переменными. Выразим из него $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}, \qquad (2.50)$$

откуда, разделяя переменные, и интегрируя обе части, приходим к равенству

$$\int dt = \pm\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}} + C. \qquad (2.51)$$

Вместо того, чтобы приписывать аддитивную константу интегрирования, можно эквивалентно записать полученную квадратуру в виде интегралов с пределами: на нижних пределах стоят начальные значения переменных $t_0$, $\alpha_0$ интегрирования, на верхних — мгновенные (текущие) их значения.

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt = \pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}}. \qquad (2.52)$$

Формально данный переход можно понимать так: сумма значений интегралов на нижних пределах, представляющих некоторые конкретные константы, и есть исходная аддитивная константа интегрирования в (2.51).

Равенство (2.52) представляет собой квадратуру, определяющую зависимость $\alpha = \alpha(t)$ неявно.

Если бы нам удалось найти явным образом зависимость $\alpha(t)$, мы подставили бы ее в равенство (2.47) и смогли бы его проинтегрировать, найдя, пусть хоть неявную, но зависимость $x(t)$. Однако в нашем случае равенство (2.47) не может быть проинтегрировано.

Для нахождения закона изменения обобщенной координаты $x$ рассмотрим отношение обобщенных скоростей $\dot{x}$ и $\dot{\alpha}$:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} \equiv \frac{dx/dt}{d\alpha/dt} = \frac{dx}{d\alpha}. \tag{2.53}$$

Принимая во внимание равенства (2.47) и (2.50), получим

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{(p_x - m_2 l\dot{\alpha}\cos\alpha)/(m_1+m_2)}{\pm\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}} \tag{2.54}$$

Подставляя сюда еще раз равенство (2.50) для $\dot{\alpha}$ в числителе основной дроби, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{p_x \mp m_2 l\cos\alpha\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}}{\pm(m_1+m_2)\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $x = x(\alpha)$:

$$(m_1+m_2)\int\limits_{x_0}^{x} dx = \tag{2.55}$$

$$= \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \frac{p_x \mp m_2 l\cos\alpha\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}}{\pm\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)\left(E - \dfrac{p_x^2}{2(m_1+m_2)} + m_2 gl\cos\alpha\right)}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2\sin^2\alpha\right)}}}.$$

Равенства (2.52) и (2.55) и представляют собой закон движения бусинок в квадратурах.

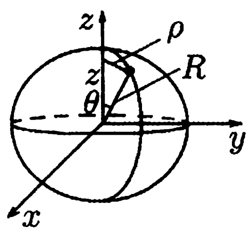
Выбор знаков «$\pm$» в этих выражениях определяется направлением движения бусинок. В самом деле, знаки «$\pm$» определяют знак обобщенной скорости $\dot{\alpha}$ согласно (2.50). Поэтому в случае, если система движется так, что угол $\alpha$ увеличивается (в этом случае $\dot{\alpha} > 0$), в равенствах (2.52) и (2.55) необходимо брать верхние знаки. В случае, когда система движется так, что угол $\alpha$ уменьшается (в этом случае $\dot{\alpha} < 0$), необходимо брать нижние знаки.

**Задача 2.2.3.** Материальная точка массой $m$ движется по сфере радиуса $R$ в однородном поле тяготения $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Найти интегралы движения и закон движения точки в квадратурах. В качестве обобщенных использовать цилиндрические координаты.

**Решение.**

Поскольку точка не сходит с поверхности сферы, это единственное ограничение на ее движение означает наличие связи, что, в свою очередь, подразумевает, что система имеет две степени свободы. В условии задачи предлагается решать задачу в цилиндрических координатах. Но прежде необходимо выяснить, какие две из трех $\rho, \varphi, z$ могут быть выбраны в качестве обобщенных координат: необходимо одну из них исключить на уравнении связи (то есть учитывая уравнение связи). В качестве последнего выступает уравнение сферы в цилиндрических координатах, которое очевидно из чисто геометрических соображений (см. рис.):

$$\rho^2 + z^2 = R^2. \tag{2.56}$$



Из него удобно выразить $\rho$ (ведь всегда $\rho > 0$ в отличие от $z$, поэтому, выразив $\rho$ и, тем самым, объявив независимой $z$, не придется задумываться о возможных знаках координаты $\rho$):

$$\rho = \sqrt{R^2 - z^2}. \tag{2.57}$$

Итак, в качестве обобщенных координат выбираем $q_1 = z$ и $q_2 = \varphi$. Продифференцировав (2.57) по времени, получим

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2}}\Big(-2z\dot{z}\Big) = -\frac{z\dot{z}}{\sqrt{R^2 - z^2}}. \tag{2.58}$$

Поэтому кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\Big) = \frac{m}{2}\left(\frac{z^2\dot{z}^2}{R^2 - z^2} + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = \\ = \frac{m}{2}\left(\frac{R^2\dot{z}^2}{R^2 - z^2} + \rho^2\dot{\varphi}^2\right). \tag{2.59}$$

Потенциальная энергия точки в однородном поле тяготения

$$U = mgz. \tag{2.60}$$

Поэтому функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\left(\frac{R^2\dot{z}^2}{R^2 - z^2} + \Big(R^2 - z^2\Big)\dot{\varphi}^2\right) - mgz. \tag{2.61}$$

Далее займемся поиском интегралов движения. Функция Лагранжа (2.61) явно не зависит от времени $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0\right)$. И так как по условию задачи отсутствуют диссипации, обобщенная энергия $E$ является интегралом движения. Построим ее по определению:

$$E = \dot{z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} + \dot{\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \dot{z}\cdot\frac{mR^2\dot{z}}{R^2 - z^2} + \dot{\varphi}\cdot m\Big(R^2 - z^2\Big)\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \\ = \frac{m}{2}\frac{R^2\dot{z}^2}{R^2 - z^2} + \frac{m}{2}\Big(R^2 - z^2\Big)\dot{\varphi}^2 + mgz = \mathrm{const}. \tag{2.62}$$

Далее, очевидно, обобщенная координата $\varphi$ является циклической $\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0\right)$, а потому обобщенный импульс, ей соответствующий, является интегралом движения

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(R^2 - z^2\right)\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{2.63}$$

Значения констант $E, p_\varphi$ однозначно определяются начальными условиями

$$E = E(\dot{z}, \dot{\varphi}, z)\Big|_{t=t_0},$$

$$p_\varphi = p_\varphi(\dot{\varphi}, z)\Big|_{t=t_0}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений, состоящей из равенств (2.62) и (2.63), выразим из (2.63) обобщенную скорость $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m(R^2 - z^2)} \tag{2.64}$$

и подставим в обобщенную энергию (2.62):

$$E = \frac{mR^2\dot{z}^2}{2(R^2 - z^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2m(R^2 - z^2)} + mgz, \tag{2.65}$$

откуда выражаем обобщенную скорость $\dot{z}$:

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(R^2 - z^2)}{mR^2}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2m(R^2 - z^2)} - mgz\right)}. \tag{2.66}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $z = z(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{2(R^2 - z^2)}{mR^2}\left(E - \dfrac{p_\varphi^2}{2m(R^2 - z^2)} - mgz\right)}}. \tag{2.67}$$

Для нахождения закона изменения обобщенной координаты $\varphi$ рассмотрим отношение обобщенных скоростей

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{z}} \equiv \frac{d\varphi/dt}{dz/dt} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{p_\varphi/m(R^2-z^2)}{\pm\sqrt{\dfrac{2(R^2-z^2)}{mR^2}\left(E - \dfrac{p_\varphi^2}{2m(R^2-z^2)} - mgz\right)}}, \qquad (2.68)$$

откуда после разделения переменных и интегрирования найдем квадратуру

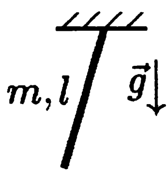
$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int\limits_{z_0}^{z} dz \frac{p_\varphi/m(R^2-z^2)}{\sqrt{\dfrac{2(R^2-z^2)}{mR^2}\left(E - \dfrac{p_\varphi^2}{2m(R^2-z^2)} - mgz\right)}}, \qquad (2.69)$$

которая определяет неявную зависимость $\varphi = \varphi(z)$.

В выражениях (2.67) и (2.69) верхние знаки надо брать в том случае, когда точка движется по поверхности в сторону увеличения координаты $z$ (при этом $\dot{z} > 0$), нижние знаки — когда движется в сторону уменьшения $z$ (при этом $\dot{z} < 0$).

Равенства (2.67) и (2.69) и определяют закон движения точки на поверхности сферы в квадратурах.

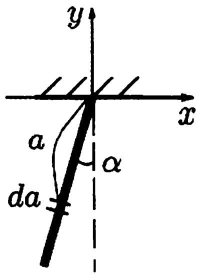
**Задача 2.2.4.** Стержень массы $m$ и длины $l$ шарнирно закреплен в верхней точке и может совершать плоское движение в вертикальном поле тяжести $\vec{g}$. Построить лагранжиан системы. Найти закон движения в квадратурах в общем виде для произвольного движения стержня. Записать уравнения Лагранжа. Рассматривая частный случай малых отклонений стержня от вертикали, найти частоту малых линейных колебаний.



**Решение.**

Эта задача ярко демонстрирует, как умение описывать динамику одной материальной точки позволяет проводить исследование систем, которые материальной точкой не являются. Какой бы ни была система (даже сплошная среда!), мы всегда можем ее мыслить как набор (пусть даже и бесконечный) материальных точек.

Очевидно, что для однозначного задания положения стержня с закрепленным концом и совершающего плоское движение, достаточно ввести угол его отклонения от вертикали, то есть рассматриваемая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем указанный угол $\alpha$. Договоримся, что отклонению стержня влево от вертикали соответствует значение угла $\alpha > 0$, вправо — значение $\alpha < 0$.




Для построения функции Лагранжа стержня представим его состоящим из бесконечного числа малых элементов (то есть материальных точек) длины $da$ и массой $dm$. Тогда кинетическую и потенциальную энергии стержня найдем суммированием соответсвующих энергий материальных точек, из которых он состоит.

Введем оси системы координат так, как показано на рисунке. Рассмотрим малый элемент стержня $da$, находящийся на расстоянии $a$ от точки его крепления. Его декартовы координаты, как следует из чисто геометрических соображений, могут быть записаны через обобщенную координату $\alpha$ следующим образом (для изображенного на рисунке положения, согласно нашей договоренности, $\alpha > 0$, в то время как обе координаты $x_a$ и $y_a$ отрицательны):

$$x_a = -a \sin \alpha, \tag{2.70}$$

$$y_a = -a\cos\alpha. \tag{2.71}$$

Дифференцируя по времени, находим:

$$\dot{x}_a = -a\dot{\alpha}\cos\alpha. \tag{2.72}$$

$$y_a = a\dot{\alpha}\sin\alpha. \tag{2.73}$$

(Отметим, что для данного элемента расстояние $a$ остается постоянным, поэтому его не нужно дифференцировать.) Поэтому кинетическая энергия $dT$ малого элемента $da$ стержня

$$dT = \frac{dm}{2}\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2\right) = \frac{dm}{2}\,a^2\dot{\alpha}^2. \tag{2.74}$$

Полная кинетическая энергия стержня, как сумма бесконечно малых вкладов $dT$, сводится к интегралу:

$$T = \int dT = \int \frac{dm}{2}\,a^2\dot{\alpha}^2. \tag{2.75}$$

Перейдем от интегрирования по массе к интегрированию по длине используя тривиальную пропорцию (масса $dm$ приходится на длину $da$, в то время как вся масса $m$ стержня распределена по его длине $l$):

$$dm = \frac{m}{l}\,da. \tag{2.76}$$

Тогда, поскольку введеное нами расстояние $a$ от верхней точки стержня до малого элемента ограничено условием

$$0 \le a \le l,$$

интеграл по длине — определенный интеграл:

$$T = \int dT = \frac{m}{2l}\int\limits_0^l da\,a^2\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{6}\,ml^2\dot{\alpha}^2. \tag{2.77}$$

Потенциальная энергия малого элемента $da$

$$dU = dmgy_a = -dmga\cos\alpha. \tag{2.78}$$

Суммируя, находим потенциальную энергию всего стержня

$$U = \int dU = -\int dmga\cos\alpha. \tag{2.79}$$

Переходя к интегралу по длине с помощью соотношения (2.76), имеем:

$$U = -\frac{m}{l}g\int\limits_0^l daa\cos\alpha = -\frac{1}{2}mgl\cos\alpha. \tag{2.80}$$

Стало быть, лагранжиан стержня

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\alpha. \tag{2.81}$$

Закон движения стержня найдем методом интегралов движения. По виду функции Лагранжа очевиден интеграл движения — обобщенная энергия (функция Лагранжа явно не зависит от времени и отсутствуют диссипации). Выражение для нее построим по определению:

$$\begin{aligned} E = \dot{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \mathcal{L} = \\ = \dot{\alpha}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha} - \mathcal{L} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}mgl\cos\alpha = \text{const}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Выражая отсюда обобщенную скорость $\cdot\alpha$

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E + \frac{1}{2}mgl\cos\alpha\right)} \tag{2.83}$$

и разделяя переменные, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\alpha = \alpha(t)$:

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{6}{ml^2}\left(E + \frac{1}{2}mgl\cos\alpha\right)}}. \tag{2.84}$$

Уравнение Лагранжа для стержня

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.85}$$

после тривиального дифференцирования лагранжиана (2.81) запишутся как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha}\right) + \frac{1}{2}mgl\sin\alpha = 0, \tag{2.86}$$

или, что то же самое,

$$\ddot{\alpha} + \frac{3g}{2l}\sin\alpha = 0. \tag{2.87}$$

В случае малых колебаний стержня, что подразумевает малость отклонения от положения равновесия (от вертикали) угол $\alpha$ можно считать бесконечно малым:

$$\alpha \to 0.$$

Тогда, воспользовавшись асимптотической формулой

$$\sin\alpha \simeq \alpha,$$

перепишем уравнение движения (2.87) в виде:

$$\ddot{\alpha} + \frac{3g}{2l}\alpha = 0, \tag{2.88}$$

что представляет собой уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

## 2.3 Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

**Общие рекомендации.**

Для построения лагранжиана заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, прежде всего необходимо найти векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Если речь идет об однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, то можно сразу использовать известные результаты для потенциалов в различных калибровках при различном выборе обобщенных координат. Конечно же, как и всегда, не стоит забывать об учете связей, наложенных на рассматриваемую систему, делая соответствующие изменения в применяемых результатах в соответствии с уравнениями связи. Если же электромагнитное поле неоднородно, то надо отдельно найти векторный и скалярный потенциал. При этом необходимо помнить, что потенциалы электромагнитного поля определены неоднозначно. Эта неоднозначность согласуется с неоднозначностью в определении лагранжиана. Данное обстоятельство позволяет находить для уравнений, определяющих потенциалы, наиболее простые частные решения: чем проще оно будет, тем проще будет выглядеть функция Лагранжа! Теперь успех решения задачи зависит не только от удачного выбора обобщенных координат, но и от удачного выбора калибровки (то есть частных решений) потенциалов электромагнитного поля. Поэтому, если, скажем, решая задачу методом интегралов движения, не удается найти необходимое количество интегралов движения, возможно, следует попытаться найти иное частное решение для потенциалов, то есть использовать другую калибровку, в которой функция Лагранжа теперь, к примеру, будет иметь новую циклическую координату, что позволит найти недостающий интеграл движения.

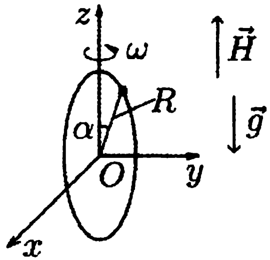
**Задача 2.3.1** Бусинка массой $m$ и зарядом $e$ нанизана на тонкое кольцо радиуса $R$, которое вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг своего вертикального диаметра в вертикальных однородных и постоянных поле тяжести $\vec{g}$ и магнитном поле $\vec{H}$. Составить лагранжиан частицы и найти закон ее движения в квадратурах.

**Решение.**

Сначала выясним, сколько степеней свободы имеет бусинка. Если бы кольцо не вращалось, то для однозначного задания положения бусинки достаточно было ввести одну координату в виде, например, угла ее поворота вдоль кольца вокруг его центра. Вращение кольца вокруг своего вертикального диаметра не приводит к увеличению числа степеней свободы, поскольку вращение равномерное с заданной угловой скоростью, а это значит, что мы заранее знаем, на какой угол повернется плоскость кольца к любому наперед заданному моменту времени $t$:

$$\varphi_{\text{ц}}(t) = \omega t + \varphi_0.$$

Следовательно, система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем $q_1 = \alpha$ — угол отклонения бусинки от вертикали в плоскости кольца (см. рис.).




Лагранжиан бусинки в электромагнитном и потенциальном полях устроен следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} - e\varphi - U. \tag{2.89}$$

Как и всегда, наличие электромагнитного поля приводит к появлению в функции Лагранжа двух характерных членов с потенциалами $\vec{A}$ и $\varphi$. Воспользуемся известными результатами для них в сферических координатах $r, \theta, \varphi_c$, а потом перейдем от них к обобщенной координате $\alpha$. Несложно сообразить, что сферические координаты $r, \theta, \varphi_c$ бусинки выражаются (чтобы не путать обозначения скалярного потенциала $\varphi$ с углом $\varphi_c$ сферической системы координат, у последнего приписываем индекс «с»):

$$r = R, \tag{2.90}$$

$$\theta = \alpha, \tag{2.91}$$

$$\varphi_c = \omega t + \varphi_0. \tag{2.92}$$

Так кинетическая энергия бусинки запишется следующим образом:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}_c^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\alpha}^2 + R^2\omega^2 \sin^2\alpha\right). \tag{2.93}$$

Далее займемся нахождением потенциалов $\vec{A}$ и $\varphi$ электромагнитного поля с заданными напряженностями:

$$\vec{H} = H_0\vec{e}_z, \quad \vec{E} = 0.$$

Векторный потенциал $\vec{A}$ может быть найден из соотношения

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \tag{2.94}$$

Запишем ротор в декартовых координатах в виде определителя:

$$H_0\vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{2.95}$$

и разложим его по верхней строке. Тогда, приравнивая коэффициенты при независимых ортах $\vec{e}_x. \vec{e}_y, \vec{e}_z$, получим систему уравнений для компонент векторного потенциала $A_x, A_y, A_z$:

$$\vec{e}_x: \qquad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \tag{2.96}$$

$$\vec{e}_y: \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \tag{2.97}$$

$$\vec{e}_z: \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = H_0. \tag{2.98}$$

Пользуясь неоднозначностью векторного потенциала, попробуем искать частное решение этой системы с

$$A_z = 0. \tag{2.99}$$

Тогда уравнение (2.96) приводит к тому, чтобы при этом компонента $A_y$ не зависела от $z$:

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad A_y \neq A_y(z). \tag{2.100}$$

Второе уравнение системы приводит к аналогичному требованию независимости компоненты $A_x$ от $z$:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0, \quad A_x \neq A_x(z). \tag{2.101}$$

В итоге, нетривиальным остается только равенство (2.98). Путем подбора находим одно из его возможных частных решений:

$$A_x = -\frac{1}{2}H_0 y, \quad A_y = \frac{1}{2}H_0 x, \tag{2.102}$$

которое, как несложно видеть, удовлетворяет условиям (2.100) и (2.101).

Тогда в используемой калибровке векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{2}H_0(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

соответствующее слагаемое из лагранжиана в декартовых координатах может записано в виде:

$$\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{eH_0}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{2.103}$$

Вспоминая связь декартовых координат $x, y$ со сферическими $r, \theta, \varphi_c$:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi_c, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi_c, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned} \tag{2.104}$$

после подстановки в (2.103) и преобразований, немедленно получаем:

$$\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}_c. \tag{2.105}$$

С учетом соотношений (2.91)—(2.92), окончательно запишем:

$$\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{eH_0}{2c}R^2\omega\sin^2\alpha. \tag{2.106}$$

Поскольку электрическое поле отсутствует, и в выбранной калибровке векторный потенциал не зависит явно от времени, то

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = 0, \tag{2.107}$$

что позволяет выбрать частное решение для скалярного потенциала, равное нулю:

$$\varphi(\vec{r},t) = 0.$$

Потенциал бусинки в однородном поле тяготения

$$U = mgz = mgR\cos\alpha. \tag{2.108}$$

Собирая все вместе, для лагранжиана заряженной бусинки будем иметь:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\alpha}^2 + \omega^2\sin^2\alpha\right) + \frac{eH_0}{2c}R^2\omega\sin^2\alpha - mgR\cos\alpha. \tag{2.109}$$

Построенная функция Лагранжа, очевидно, не зависит явно от времени $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0\right)$. И, поскольку диссипации отсутствуют, стало быть, обобщенная энергия $E$ является интегралом движения

$$E = \dot{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \mathcal{L} = \dot{\alpha}\cdot mR^2\dot{\alpha} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\dot{\alpha}^2 -$$
$$-\frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\alpha - \frac{eH_0}{2c}R^2\omega\sin^2\alpha + mgR\cos\alpha = \text{const}. \tag{2.110}$$

Как и всегда, значение константы $E$ однозначно определяется начальными условиями. Выражая из (2.110) обобщенную скорость $\dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E + \frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\alpha + \frac{eH_0}{2c}R^2\omega\sin^2\alpha - mgR\cos\alpha\right)}$$

и разделяя переменные, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\alpha = \alpha(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \tag{2.111}$$
$$= \pm\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\dfrac{2}{mR^2}\left(E + \dfrac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\alpha + \dfrac{eH_0}{2c}R^2\omega\sin^2\alpha - mgR\cos\alpha\right)}}.$$

Знак «+» перед квадратурой следует брать в том случае, когда бусинка движется так, что при этом угол $\alpha$ возрастает, в противном случае следует брать знак «−».

**Задача 2.3.2.** Частица массой $m$ и зарядом $e$ движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \mathrm{const}$) в постоянных и однородных поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, электрическом и магнитном полях, напряженности которых соответственно $\vec{E} = -E_0\vec{e}_z$ и $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$. Записать лагранжиан и найти закон движения частицы в квадратурах.

**Решение.**

Поскольку частица может двигаться только по поверхности параболоида (не может «сойти» с его поверхности), число ее степеней свободы $s = 2$. Очевидно, что система имеет цилиндрическую симметрию. Это приводит к мысли о рациональности использования цилиндрических координат. Однако надо определиться, какие две из трех цилиндрических координат $\rho, \varphi, z$ могут быть объявлены независимыми. Уравнение параболоида

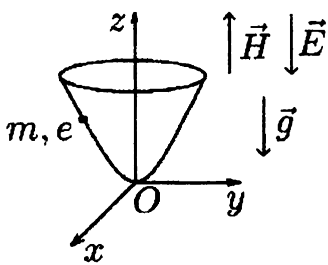
$$az = x^2 + y^2$$

в цилиндрических координатах может быть записано следующим образом:

$$az = \rho^2.$$

Отсюда следует, что мы можем в качестве обобщенных координат выбрать $\rho$ и $\varphi$, при этом координата $z$ будет зависимой:

$$z = \rho^2/a. \tag{2.112}$$




Функция Лагранжа рассматриваемой заряженной частицы устроена следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - e\varphi - U. \tag{2.113}$$

Далее воспользуемся известными результатами для каждого из слагаемых в ней и исключим зависимую координату $z$ в соответствии с уравнением связи (2.112).

Кинетическая энергия точки в цилиндрических координатах

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right). \tag{2.114}$$

Дифференцируя (2.112) по времени

$$\dot z = 2\rho\dot\rho/a \tag{2.115}$$

и подставляя вместе с (2.112) в кинетическую энергию, получим

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \left(\frac{2\rho\dot\rho}{a}\right)^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \rho^2\dot\varphi^2\right). \tag{2.116}$$

Потенциальная энергия в однородном поле тяготения

$$U = mgz = mg\rho^2/a. \tag{2.117}$$

В калибровке векторного потенциала (см. предыдущую задачу)

$$\vec A = \frac{1}{2}H_0(-y\vec e_x + x\vec e_y)$$

для однородного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси $z$, слагаемое из лагранжиана в цилиндрических координатах

$$\frac{e}{c}\vec A\cdot\dot{\vec r} = \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\dot\varphi. \tag{2.118}$$

В случае однородного и постоянного электрического поля скалярный потенциал

$$\varphi(\vec r, t) = -\vec E_0\cdot\vec r = E_0 z = E_0\rho^2/a. \tag{2.119}$$

В итоге, лагранжиан заряженной частицы принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \rho^2\dot\varphi^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\dot\varphi - \left(mg + eE_0\right)\frac{\rho^2}{a}. \tag{2.120}$$

Функция Лагранжа явно не зависит от времени $\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0\right)$, координата $\varphi$ является циклической $\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0\right)$, поэтому обобщенная энергия $E$ и обобщенный импульс $p_\varphi$ являются интегралами движения:

$$E = \dot\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\rho} + \dot\varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} - \mathcal{L} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \rho^2\dot\varphi^2\right) + \left(mg + eE_0\right)\frac{\rho^2}{a} = \text{const}, \quad (2.121)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2 = \text{const}. \quad (2.122)$$

Для нахождения закона движения частицы выразим из (2.122) обобщенную скорость $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi = \left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)/m\rho^2 \quad (2.123)$$

и подставим в обобщенную энергию (2.121):

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 + \left(mg + eE_0\right)\frac{\rho^2}{a}. \quad (2.124)$$

Выражая отсюда $\dot\rho$

$$\dot\rho \equiv \frac{d\rho}{dt} = \quad (2.125)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m\left(1 + \dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)}\left(E - \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 - \left(mg + eE_0\right)\frac{\rho^2}{a}\right)},$$

разделяя переменные и интегрируя, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\rho = \rho(t)$:

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt = \quad (2.126)$$

$$= \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m\left(1 + \dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \dfrac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 - \left(mg + eE_0\right)\dfrac{\rho^2}{a}\right)}}.$$

Вторая квадратура, определяющая закон изменения обобщенной координаты $\varphi$, стандартно найдем, рассмотрев отношение обобщенных скоростей

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \equiv \frac{d\varphi/dt}{d\rho/dt} = \frac{d\varphi}{d\rho}. \tag{2.127}$$

С учетом (2.125) и (2.123) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\left(p_\varphi - \dfrac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)/m\rho^2}{\pm\sqrt{\dfrac{2}{m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \dfrac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 - \left(mg + eE_0\right)\dfrac{\rho^2}{a}\right)}},$$

интегрируя которое находим квадратуру, определяющую неявную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \tag{2.128}$$

$$= \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho\left(p_\varphi - \dfrac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)/m\rho^2}{\sqrt{\dfrac{2}{m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \dfrac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 - \left(mg + eE_0\right)\dfrac{\rho^2}{a}\right)}}.$$

Равенства (2.126) и (2.128) определяют закон движения заряженной частицы в квадратурах.

**Задача 2.3.3.** Частица массой $m$ и зарядом $e$ движется в магнитном поле, напряженность которого

$$\vec{H} = H_0\, e^{-b(x^2+y^2)}\vec{e}_z.$$

Найти закон движения частицы в квадратурах.

**Решение.**

На движение частицы никаких ограничений не наложено, поэтому она имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем цилиндрические, поскольку, очевидно, магнитное поле обладает цилиндрической симметрией.

Функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле, как нам известно, имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - e\varphi. \tag{2.129}$$

Заданное магнитное поле

$$\vec{H} = H_0\, e^{-b\rho^2}\vec{e}_z$$

не является однородным, поэтому для построения лагранжиана необходимо прежде всего найти его потенциалы $\vec{A}, \varphi$.

Векторный потенциал $\vec{A}$ определяется равенством

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Записывая ротор в цилиндрических координатах, будем иметь равенство:

$$H_0\, e^{-b\rho^2}\vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}. \tag{2.130}$$

Раскладывая определитель по верхней строке и приравнивая коэффициенты при независимых ортах $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$, получим систему уравнений для компонент векторного потенциала $A_\rho, A_\varphi, A_z$:

$$\vec{e}_\rho: \qquad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) = 0; \tag{2.131}$$

$$\vec{e}_\varphi: \qquad -\left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right) = 0; \tag{2.132}$$

$$\vec{e}_z: \qquad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) = H_0\, e^{-b\rho^2}. \tag{2.133}$$

Пользуясь неоднозначностью векторного потенциала, будем искать частное решение этой системы с двумя равными нулю компонентами:

$$A_\rho = A_z = 0.$$

Тогда уравнение (2.132) выполняется тождественно, уравнение (2.131) приводит к требованию, чтобы компонента $A_\varphi$ не зависела от $z$:

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0. \qquad (2.134)$$

Равенство (2.133) приводит к уравнению

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} = H_0\, e^{-b\rho^2}. \qquad (2.135)$$

Производная в левой части, согласно правилу дифференцирования сложной функции, может быть записана как

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho^2}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho^2} = 2\frac{\partial}{\partial\rho^2}.$$

Поэтому уравнение (2.135) записывается как

$$2\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho^2} = H_0\, e^{-b\rho^2} \qquad (2.136)$$

и допускает разделение переменных:

$$d(\rho A_\varphi) = \frac{1}{2} H_0\, e^{-b\rho^2} d\rho^2. \qquad (2.137)$$

Интегрируя последнее равенство. получим

$$\rho A_\varphi = -\frac{H_0}{2b}\, e^{-b\rho^2} + C. \qquad (2.138)$$

Аддитивную константу $C$ интегрирования мы имеем полное право положить равной нулю. Ведь наша задача состоит в том, чтобы найти хоть какое-нибудь частное решение для потенциалов! В принципе, подойдет любое, но чем проще оно будет, тем лучше. Тем проще будет выглядеть лагранжиан. Таким образом находим искомую компоненту $A_\varphi$ векторного потенциала:

$$A_\varphi = -\frac{H_0}{2b\rho}\,e^{-b\rho^2}, \tag{2.139}$$

Отметим, что найденное решение (2.139) удовлетворяет требованию (2.134).

Итак, мы нашли векторный потенциал

$$\vec{A} = -\frac{H_0}{2b\rho}\,e^{-b\rho^2}\vec{e}_\varphi. \tag{2.140}$$

Вспоминая, что вектор скорости материальной точки в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z,$$

раскроем скалярное произведение в слагаемом в лагранжиане, содержащем векторный потенциал:

$$\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{H_0}{2b\rho}\,e^{-b\rho^2}\cdot\rho\dot{\varphi} = -\frac{H_0}{2b}\,e^{-b\rho^2}\,\dot{\varphi}. \tag{2.141}$$

Найдем скалярный потенциал электромагнитного поля $\varphi(\vec{r},t)$. Уравнение, его определяющее, как известно, имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{2.142}$$

где напряженность электрического поля $\vec{E} = 0$. И поскольку найденный векторный потенциал (2.140) явно от времени не зависит

$$\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0,$$

уравнение для скалярного потенциала приобретает простой вид:

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = 0. \tag{2.143}$$

Поскольку, по-прежнему, нам требуется найти максимально простое частное решение, возьмем

$$\varphi(\vec{r},t) = 0. \tag{2.144}$$

Поэтому лагранжиан рассматриваемой заряженной частицы имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - \frac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2}\,\dot\varphi. \qquad (2.145)$$

Закон движения частицы найдем методом интегралов движения. Очевидно, что функция Лагранжа (2.145) явно не зависит от времени $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0\right)$, координаты $\varphi$ и $z$ являются циклическими $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0\right)$, следовательно обобщенная энергия $E$ и обобщенные импульсы $p_\varphi, p_z$ являются интегралами движения:

$$E = \dot\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} + \dot\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} + \dot z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot z} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) = \mathrm{const}, \qquad (2.146)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi - \frac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2} = \mathrm{const}, \qquad (2.147)$$

$$p_z = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot z} = m\dot z = \mathrm{const}. \qquad (2.148)$$

Выражаем обобщенные скорости $\dot\varphi$ и $\dot z$ из (2.147) и (2.148) соответственно

$$\dot\varphi = \frac{1}{m\rho^2}\left(p_\varphi + \frac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2}\right), \qquad (2.149)$$

$$\dot z = \frac{p_z}{m} \qquad (2.150)$$

и подставляем в равенство (2.146) для обобщенной энергии, получим уравнение:

$$E = \frac{m\dot\rho^2}{2} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi + \frac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2}\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}, \qquad (2.151)$$

откуда

$$\dot\rho \equiv \frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi + \frac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2}\right)^2 - \frac{p_z^2}{2m}\right)}. \qquad (2.152)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\rho = \rho(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi + \dfrac{eH_0}{2bc}\, e^{-b\rho^2}\right)^2 - \dfrac{p_z^2}{2m}\right)}}. \qquad (2.153)$$

Для нахождения закона изменения координаты $\phi$, рассмотрим отношение обобщенных скоростей

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \equiv \frac{d\varphi/dt}{d\rho/dt} = \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dfrac{1}{m\rho^2}\left(p_\varphi + \dfrac{eH_0}{2bc}\,e^{-b\rho^2}\right)}{\pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi + \dfrac{eH_0}{2bc}\,e^{-b\rho^2}\right)^2 - \dfrac{p_z^2}{2m}\right)}}.$$

где приняты во внимание (2.152) и (2.149). Разделяя переменные и интегрируя, находим квадратуру, определяющую неявную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho} d\rho\,\frac{\dfrac{1}{m\rho^2}\left(p_\varphi + \dfrac{eH_0}{2bc}\,e^{-b\rho^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi + \dfrac{eH_0}{2bc}\,e^{-b\rho^2}\right)^2 - \dfrac{p_z^2}{2m}\right)}}. \qquad (2.154)$$

Для нахождения закона изменения обобщенногй координаты $z$ можно сразу проинтегрировать равенство (2.148):

$$z(t) = \frac{p_z}{m}\,t + z_0. \qquad (2.155)$$

Закон движения частицы задается равенствами (2.153), (2.154) и (2.155).

## 2.4 Одномерное движение. Качественное исследование движения

**Общие рекомендации.**

При решении задач на одномерное движение, прежде всего, необходимо провести качественное исследование движения, чтобы выяснить, в области каких значений обобщенной координаты возможно движение, и, заодно, характер этого движения. То есть метод качественного исследования движения позволяет сформировать (качественное) представление о движении тела еще до непосредственного нахождения закона движения. Проведение этого исследования является очень важным и полезным при решении задачи. Соображения о том, каков тип движения реализуется в системе, в какой области значений обобщенных координат система будет эволюционировать, могут помочь, к примеру, подобрать замену переменных при взятии интеграла, определяющего закон движения, или понять, в каком виде необходимо искать решение дифференциального уравнения, если имеется необходимость решать уравнения Лагранжа.

Для проведения качественного исследования движения необходимо, во-первых, используя начальные условия, вычислить значение обобщенной энергии, которая является интегралом движения. Во-вторых, построить график потенциала, как функции обобщенной координаты, и в этих же осях изобразить прямую, соответствующую сохраняющемуся значению энергии. Далее необходимо отметить, если имеются, точки поворота — точки пересечения графика потенциала и прямой для энергии. Классически разрешенная область движения определяется условием того, что потенциал должен быть не больше обобщенной энергии: множество значение обобщенной координаты (абсцисс точек на графике), для которых график потенциала лежит ниже прямой энергии, и есть та область, где одномерная система может находиться. В зависимости от того, ограничивают ли эту область слева и справа точки поворота, можно сделать вывод о том, является движение финитным или инфинитным, периодическим или апериодическим.

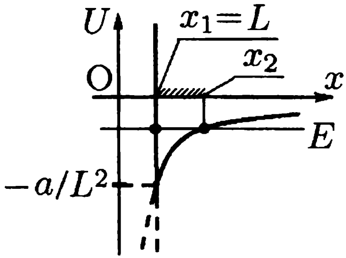
**Задача 2.4.1.** Чему равен период финитного движения частицы массой $m$ в поле с потенциалом

$$U(x) = \begin{cases} -a/x^2, x > L, \\ \infty, x \leq L. \end{cases}$$

$a$ - некоторая положительная константа.

**Решение.**

Для того, чтобы понять, при каких условиях возможно финитное движение частицы, проведем качественное исследование. Построим график потенциала $U(x)$. Условию классически доступной области движения удовлетворяют значения энергии, большие минимального значения потенциала (в точке $x = L$). Поскольку нас интересует финитное периодическое движение, область движения должна быть слева и справа ограничена точками поворота. Очевидно, этому требованию удовлетворяют значения энергии $-a/L^2 < E < 0$ (см. рис.). Далее запишем $E = -|E|$, чтобы явным образом выделить факт отрицательности значения энергии и не забыть об это в дальнейшем (от знака энергии зависит, чему будет равен интеграл!).




Период финитного движения, как известно, определяется соотношением:

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(x)\big)}}, \tag{2.156}$$

где точки поворота $x_1, x_2$ определяются равенством обобщенной энергии и потенциала:

$$E = U(x). \tag{2.157}$$

В нашем случае $x_1 = L$, $x_2 = \sqrt{a/|E|}$.

Интеграл, фигурирующий в (2.156), вычисляется элементарно. В области интегрирования между двумя точками поворота потенциал $U(x) = a/x^2$. Приведем к общему знаменателю выражение, стоящее под корнем

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(x)\big)}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(-|E| + \frac{a}{x^2}\big)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{-|E|x^2+a}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx^2}{\sqrt{-|E|x^2+a}} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{|E|}\sqrt{-|E|x^2+a}\Bigg|_{x_1=L}^{x_2=\sqrt{a/|E|}} = \frac{\sqrt{2m}}{|E|}\sqrt{a-|E|L^2}.$$

**Задача 2.4.2.** Найти закон движения частицы массой $m$ в потенциальном поле

$$U(x) = -U_0\cos\frac{x}{a},$$

если в начальный момент времени $\dot{x}(0) = -2\sqrt{U_0/m}$, $x(0) = 0$ ($U_0$, $a > 0$).

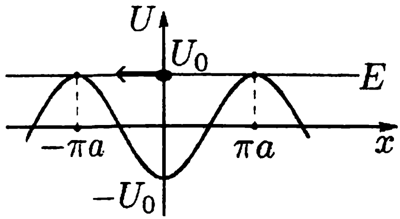
**Решение.**

Прежде чем непосредственно заняться вычислением квадратуры, определяющей закон одномерного движения, проведем качественное исследование, чтобы заранее иметь представление о том, какой тип движения реализуется, и чего ожидать от ее вычисления в результате.

Используя начальные условия, вычислим значение обобщенной энергии $E$, которая является интегралом движения:

$$E = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(0) + U(x(0)) = \frac{m}{2}\frac{4U_0}{m} - U_0 = U_0. \quad (2.158)$$

Далее построим график зависимости $U(x)$ и укажем значение энергии $E$ в виде горизонтальной прямой. На рисунке точкой со стрелкой вдоль прямой энергии символически указана частица в первоначальном положении и направление ее движения. Метод качественного исследования движения указывает на то, что частица будет двигаться все время влево в направлении к точке максимума потенциала $x = -\pi a$, лишь асимптотически при $t \to \infty$ приближаясь к ней.




Закон одномерного движения, как известно, дается квадратурой:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(x)\big)}}. \tag{2.159}$$

В нашем случае $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $E = U_0$. Частица движется влево, поэтому перед интегралом оставляем только знак минус:

$$t = -\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(U_0 + U_0 \cos\frac{x}{a}\right)}} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{U_0\left(1 + \cos\frac{x}{a}\right)}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2a}}}. \tag{2.160}$$

В области интегрирования $-\pi a \le x \le 0$: $\cos\frac{x}{2a} > 0$, поэтому

$$\sqrt{\cos^2\frac{x}{2a}} = +\cos\frac{x}{2a}.$$

Тогда

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int\limits_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{2a}}. \tag{2.161}$$

Домножая числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $\cos\frac{x}{2a}$ и вводя новую переменную интегрирования $u = \sin\frac{x}{2a}$, будем иметь:

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int\limits_0^x \frac{\cos\frac{x}{2a}\,dx}{\cos^2\frac{x}{2a}} = -a\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int\limits_0^x \frac{d\left(\sin\frac{x}{2a}\right)}{1 - \sin^2\frac{x}{2a}} = \left[u = \sin\frac{x}{2a}\right] =$$

$$= -a\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int\limits_{u(x=0)}^{u(x)} \frac{du}{(1-u)(1+u)} = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int\limits_{u(x=0)}^{u(x)} du \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) =$$

$$= -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Bigg|_{u(x=0)}^{u(x)} = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2a}}{1-\sin\frac{x}{2a}}\right|\Bigg|_0^x =$$

$$= -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2a}}{1-\sin\frac{x}{2a}}\right|. \tag{2.162}$$

В области движения частицы $-\pi a \le x \le 0$:

$$-1 < \sin\frac{x}{2a} < 0,$$

поэтому модуль под логарифмом можно убрать. В итоге,

$$t = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \ln\frac{1+\sin\frac{x}{2a}}{1-\sin\frac{x}{2a}}. \tag{2.163}$$

**Задача 2.4.3.** Частица массой $m$ движется в потенциале

$$U(x) = \begin{cases} a - k|x|, & |x| < a/k, \\ 0, & |x| \ge a/k. \end{cases}$$

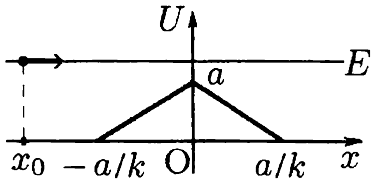
$(a, k > 0)$ с энергией $E > a$. На какое время эта частица отстанет от другой такой же частицы, которая движется в потенциале $U(x) = 0$ и имеет те же начальные условия, после прохождения над потенциальным барьером? В начальный момент времени частицы имеют координату $x_0 < -a/k$ и положительную проекцию вектора скорости.

**Решение.**

Время прохождения частицей области $x_0 \le x < +\infty$ при наличии потенциального барьера может быть определено с помощью квадратуры

(2.159), в которой перед интегралом следует выбрать знак «+», поскольку частица движется в сторону увеличения обобщенной координаты $x$:

$$\Delta t_1 = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(x)\big)}}. \tag{2.164}$$




В случае движения свободной частицы ($U = 0$) время прохождения

$$\Delta t_2 = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}E}}. \tag{2.165}$$

Каждый из интегралов (2.164), (2.165) расходится, однако нас интересует значение не каждого интеграла по-отдельности, а их разность:

$$\tau = \Delta t_1 - \Delta t_2.$$

Разобъем область интегрирования $x_0 \le x < +\infty$ на три

$$x_0 \le x \le -a/k, \qquad -a/k \le x \le a/k, \qquad a/k \le x \le \infty$$

и представим интегралы в (2.164), (2.165) в виде суммы трех:

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} dx = \int\limits_{x_0}^{-a/k} dx + \int\limits_{-a/k}^{a/k} dx + \int\limits_{a/k}^{\infty} dx.$$

Очевидно, что при вычитании (2.164) и (2.165) интегралы по областям $x_0 \le x \le -a/k$ и $a/k \le x \le \infty$ сократятся, поскольку в указанных областях потенциал $U = 0$. Поэтому искомое время

$$\tau = \int\limits_{-a/k}^{a/k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}E}} - \int\limits_{-a/k}^{a/k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(x)\big)}}. \tag{2.166}$$

Первое слагаемое в этом выражении:

$$\int\limits_{-a/k}^{a/k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}E}} = \frac{2a/k}{\sqrt{\frac{2}{m}E}}. \tag{2.167}$$

Второй интеграл, в силу четности потенциала $U$, может быть сведен к интегралу по области $0 \le x \le a/k$, где потенциал $U(x) = a - kx$:

$$\int\limits_{-a/k}^{a/k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\bigl(E - U(x)\bigr)}} = 2\int\limits_{0}^{a/k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\bigl(E - a + kx\bigr)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{2}{k}\bigl(E - a + kx\bigr)^{1/2}\Bigg|_0^{a/k} = \frac{2\sqrt{2m}}{k}\Bigl(E^{1/2} - (E-a)^{1/2}\Bigr). \tag{2.168}$$

Поэтому искомое время задержки, обусловленное потенциальным барьером,

$$\tau = \frac{a}{k}\sqrt{\frac{2m}{E}} - \frac{2\sqrt{2m}}{k}\Bigl(E^{1/2} - (E-a)^{1/2}\Bigr). \tag{2.169}$$

## 2.5 Движение в центральном поле

**Общие рекомендации.**

Прежде чем приступать к нахождению закона движения тела в центральном поле, а также расчету различных кинематических величин (например, время движения, угловое смещение и т.д.), необходимо провести качественное исследование, которое позволяет, в общем-то, без каких-либо значительных усилий и громоздких вычислений выявить закономерности и особенности в движении тела. Делается это в полной аналогии с одномерным движением, однако имеется несколько важных отличий. Во-первых, необходимо построить график зависимости не физического потенциала, а эффективного потенциала как функции радиальной координаты (представляющей собой расстояние между телом и силовым центром). Используя начальные условия, необходимо вычислить значение сохраняющейся обобщенной энергией, и на графике эффективного потенциала изобразить горизонтальную прямую, соответствующую ее значению. Далее следует отметить точки пересечения (если таковые имеются) прямой энергии с графиком — точки поворота. Классически разрешенная область значений радиальной координаты определяется условием того, что обобщенная энергия должна быть не меньше эффективного потенциала: те области на графике, где кривая эффективного потенциала лежит выше прямой, соответствующей сохраняющемуся значению энергии, запрещены, там тело ни при каких условиях оказаться не может. В зависимости от того, окружают ли данную разрешенную для движения область точки поворота, делается вывод о том, будет движение финитным или инфинитным, периодическим или апериодическим, будет ли падение на силовой центр или нет. Во-вторых, не стоит забывать, что помимо радиальной координаты, движение тела также определяется и угловой координатой. Особенностью ее изменения является монотонность: она либо постоянно и непрерывно увеличивается, либо уменьшается, что определяется направлением движения тела в начальный момент времени. Фактически изменение угловой координаты приводит к «наматыванию» траектории вокруг силового центра. Накладывая найденные сведения о движении тела в радиальном направлении на выявленную особенность движения в угловом, можно (качественно) представить траекторию движения.

**Задача 2.5.1.** Частица массой $m$ движется в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}.$$

Определить, при каких значениях энергии $E$ и момента импульса $L$ возможно финитное движение частицы без падения на силовой центр ($\alpha, \beta > 0$).

**Решение.**

Данная задача решается исключительно путем применения метода качественного исследования движения. Эффективный потенциал

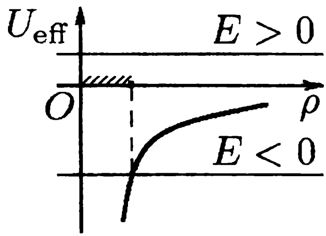
$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} = U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = -\frac{\alpha}{\rho} + \left(-\beta + \frac{L^2}{2m}\right)\frac{1}{\rho^2}, \quad (2.170)$$

где $L = |\vec{L}|$ — модуль момента импульса частицы, который является интегралом движения.

Если $-\beta + \dfrac{L^2}{2m} = 0$, то эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$$

всюду отрицательная и монотонная функция.




В таком случае невозможно финитное движение без падения на силовой центр. В самом деле, при $E > 0$ нет ни одной точки поворота (точек пересечения прямой энергии с графиком эффективного потенциала), стало быть, если частица движется в сторону к силовому центру (в сторону уменьшения $\rho$), реализуется финитное движение с падением на силовой центр; если частица движется в сторону от силового центра (в сторону увеличения $\rho$), — инфинитное движение. При $E < 0$ имеется одна точка поворота, препятствующая частице уйти на пространственную бесконечность. Поэтому реализуется финитное движение с падением на силовой центр.

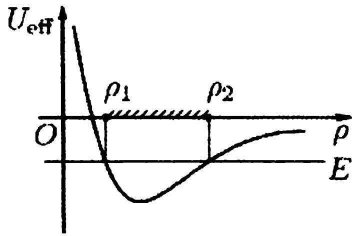
Таким образом, чтобы обеспечить финитность движения без падения на силовой центр, необходимо, с одной стороны, «запретить» частице приблизиться к силовому центру, то есть слева разрешенная область должна ограничиваться точкой поворота, с другой стороны, справа должна быть точка поворота, запрещающая частице оказаться на пространственной бесконечности. Это может быть достигнуто требованием

$$-\beta + \frac{L^2}{2m} > 0. \tag{2.171}$$

Асимптотики эффективного потенциала в этом случае

$$\lim_{\rho \to 0} U_{\text{eff}}(\rho) = \infty, \qquad \lim_{\rho \to \infty} U_{\text{eff}}(\rho) = 0$$

и график эффективного потенциала имеет требуемый вид.




Финитное движение без падения на силовой центр в этом случае возможно при отрицательных значениях энергии, больших минимального значения эффективного потенциала:

$$\left(U_{\text{eff}}\right)_{\min} < E < 0. \tag{2.172}$$

Условие (2.171) дает ограничения на значения момента импульса (который, напомним, определяется исключительно начальными условиями):

$$L > \left(2\beta m\right)^{1/2}. \tag{2.173}$$

Для непосредственного ответа на вопрос о том, какие значения может принимать энергия $E$, необходимо вычислить минимальное значение $\left(U_{\text{eff}}\right)_{\min}$ эффективного потенциала в (2.172). Для этого стандартным образом подчиним условию экстремума эффективный потенциал:

$$\frac{d}{d\rho} U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^2} - 2\left(-\beta + \frac{L^2}{2m}\right)\frac{1}{\rho^3} = 0. \tag{2.174}$$

откуда найдем точку экстремума функции $U_{\text{eff}}(\rho)$

$$\rho_0 = \frac{2}{\alpha}\left(-\beta + \frac{L^2}{2m}\right). \qquad (2.175)$$

Вычисляя значение эффективного потенциала в найденной точке экстремума, находим

$$\left(U_{\text{eff}}\right)_{\text{extr}} = U_{\text{eff}}(\rho_0) = -\frac{\alpha^2}{2\left(-\beta + \dfrac{L^2}{2m}\right)} +$$

$$+\left(-\beta + \frac{L^2}{2m}\right)\frac{\alpha^2}{4\left(-\beta + \dfrac{L^2}{2m}\right)^2} = -\frac{\alpha^2}{4\left(-\beta + \dfrac{L^2}{2m}\right)}. \qquad (2.176)$$

Условие минимума функции $U_{\text{eff}}(\rho)$

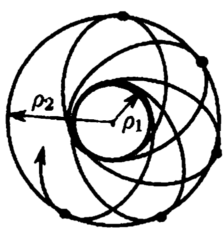
$$\frac{d^2}{d\rho^2}U_{\text{eff}}(\rho_0) > 0$$

проверяется тривиальным образом.

Таким образом, финитное движение без падения на силовой центр возможно, если момент импульса частицы имеет значения (2.173), а энергия ее при этом

$$-\frac{\alpha^2}{4\left(-\beta + \dfrac{L^2}{2m}\right)} < E < 0.$$

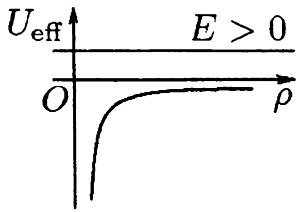
К слову сказать, траектория движения в исследуемом случае будет иметь вид, изображенный на рисунке.



**Задача 2.5.2.** Найти время падения частицы массы $m$ на силовой центр поля
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2},$$
если в начальный момент она находилась на расстоянии $R$ от него и покоилась. Момент импульса и энергия частицы удовлетворяют условию $L^2 < 2m\alpha$, $E > 0$ $(\alpha > 0)$.

**Решение.**

Сначала проведем качественное исследование. Эффективный потенциал
$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} = U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = -\left(\alpha - \frac{L^2}{2m}\right)\frac{1}{\rho^2} \qquad (2.177)$$
при условии $L^2 < 2m\alpha$, сформулированном в задаче, всюду отрицателен и имеет вид, изображенный на рисунке. Становится понятным, что, действительно, при заданных значениях энергии $E > 0$ возможно падение частицы на силовой центр.




Определим значения интегралов движения $E$, $L$ из начальных условий. Поскольку в начальный момент частица была на расстоянии $R$ от силового центра и покоилась, это означает, что в полярныйх координатах:
$$\rho(t_0) = R, \qquad (2.178)$$
$$\dot\rho(t_0) = 0, \quad \dot\varphi(t_0) = 0. \qquad (2.179)$$

Обобщенная энергия
$$E = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) + U(\rho) = \left(\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)\Bigg|_{t=t_0} = -\frac{\alpha}{R^2}, \quad (2.180)$$

а момент импульса

$$L = p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}\Big|_{t=t_0} = 0. \tag{2.181}$$

Поэтому при заданных начальных условиях эффективный потенциал совпадает с физическим потенциалом:

$$U_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2}. \tag{2.182}$$

Время падения $\tau$ может быть вычислено при помощи квадратуры, определяющей неявную зависимость $\rho = \rho(t)$:

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\big)}}. \tag{2.183}$$

Здесь энергия $E$ определяется равенством (2.180), а эффективный потенциал — (2.182); перед интегралом следует выбрать знак "$-$", поскольку при падении частица движется в сторону уменьшения обобщенной координаты $\rho$. На нижнем пределе интеграла необходимо положить $\rho_0 = R$ согласно начальному условию (2.178), а на нижнем $\rho = 0$.

Таким образом, время падения

$$\tau = -\int\limits_{R}^{0} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right)}}. \tag{2.184}$$

Для вычисления интеграла приведем к общему знаменателю выражение, стоящее под корнем:

$$\tau = -\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\,R\int\limits_{R}^{0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\,R\int\limits_{R}^{0} \frac{d\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\,R\left(R^2 - \rho^2\right)^{1/2}\Big|_{R}^{0} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\,R^2. \tag{2.185}$$

**Задача 2.5.3.** Найти уравнение траектории частицы массой $m$ в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0.$$

**Решение.**

Уравнение траектории определяется квадратурой, дающей неявную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}. \tag{2.186}$$

Не будем конкретизировать, в каком направлении движется частица, прописывая всюду далее знаки «$\pm$» перед интегралом, а также начальные условия, определяющие $\rho_0, \varphi_0$. Эффективный потенциал частицы

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}. \tag{2.187}$$

Интеграл в получающемся выражении

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}\right)}} \tag{2.188}$$

будем брать, вводя новую переменную интегрирования

$$\xi = \frac{1}{\rho}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\rho^2}\, d\rho = -d\xi,$$

то

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \frac{p_\varphi}{m}\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{\xi(\rho_0)}^{\xi(\rho)} \frac{d\xi}{\sqrt{E + \alpha\xi - \frac{p_\varphi^2}{2m}\xi^2}} =$$

$$= \mp \sqrt{\frac{p_\varphi^2}{2m}} \sqrt{\frac{2m}{p_\varphi^2}} \int\limits_{\xi(\rho_0)}^{\xi(\rho)} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\xi + \frac{2mE}{p_\varphi^2}}}. \tag{2.189}$$

Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении,

$$-\xi^2+\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\,\xi+\frac{2mE}{p_\varphi^2}=-\left(\xi-\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2+\frac{2mE}{p_\varphi^2}+\left(\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2 \qquad (2.190)$$

и записывая меру интеграла $d\xi=d\left(\xi-\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)$, приходим к табличному интегралу вида

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arccos\frac{x}{a}.$$

Поэтому

$$\varphi-\varphi_0=\mp\sqrt{\frac{p_\varphi^2}{2m}}\sqrt{\frac{2m}{p_\varphi^2}}\int\limits_{\xi(\rho_0)}^{\xi(\rho)}\frac{d\left(\xi-\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)}{\sqrt{-\left(\xi-\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2+\dfrac{2mE}{p_\varphi^2}+\left(\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}=$$

$$=\mp\arccos\left.\frac{\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}}{\sqrt{\dfrac{2mE}{p_\varphi^2}+\left(\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}\right|_{\rho_0}^{\rho} \qquad (2.191)$$

Объединяя подстановку на нижнем пределе с $\varphi_0$ в левой части в новую константу $\tilde{\varphi}_0$, получаем

$$\frac{1}{\rho}-\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}=\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2}+\left(\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}\cos\left(\varphi-\tilde{\varphi}_0\right). \qquad (2.192)$$

Выражаем явным образом $\rho$:

$$\rho=\frac{1}{\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}+\sqrt{\dfrac{2mE}{p_\varphi^2}+\left(\dfrac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}\cos\left(\varphi-\tilde{\varphi}_0\right)}. \qquad (2.193)$$

Деля числитель и знаменатель дроби на $m\alpha/p_\varphi^2$, в итоге для уравнения траектории получаем равенство

$$\rho(\varphi)=\frac{p_\varphi^2/m\alpha}{1+\sqrt{1+\dfrac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}\cos\left(\varphi-\tilde{\varphi}_0\right)}. \qquad (2.194)$$

Для более компактной записи введем обозначения:

$$p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \tag{2.195}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}. \tag{2.196}$$

Тогда уравнение траектории (2.194) запишется в виде

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)} \tag{2.197}$$

и представляет собой уравнение конического сечения. Величина $p$, определяемая равенством (2.195), называется параметром орбиты, величина $\varepsilon$, даваемая соотношением (2.196), — эксцентриситетом. В зависимости от значения последнего, уравнение (2.197) может описывать окружность, эллипс, параболу и гиперболу.

При $\varepsilon = 0$ уравнение конического сечения (2.197) представляет собой уравнение окружности радиуса $p$:

$$\rho(\varphi) = p.$$

Из (2.196) следует, что $\varepsilon = 0$ при

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$$

Несложно убедиться в том, что это значение энергии в точности совпадает с минимальным значением эффективного потенциала (2.187):

$$\left(U_{\text{eff}}\right)_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ уравнение конического сечения (2.197) представляет собой уравнение эллипса. Из (2.196) следует, что эллиптической траектория движения будет при значениях энергии, удовлетворяющей двойному неравенству

$$0 < 1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} < 1,$$

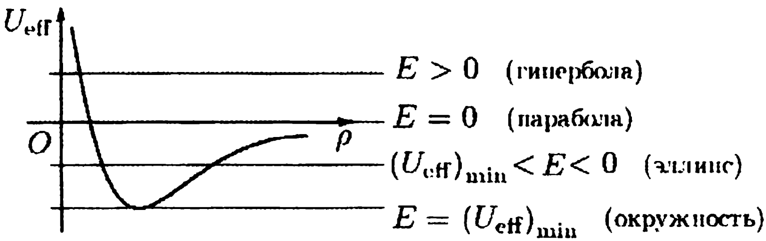
или, что эквивалентно,

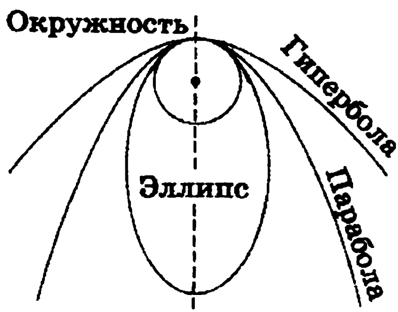
$$\left(U_{\text{eff}}\right)_{\min} < E < 0.$$

При $\varepsilon = 1$ уравнение конического сечения (2.197) представляет собой уравнение параболы. Движение по параболической траектории возможно, как это следует из (2.196), при значениях энергии $E = 0$.

При $\varepsilon > 1$ уравнение конического сечения (2.197) представляет собой уравнение гиперболы. Движение по гиперболической траектории возможно, как это следует из (2.196), при значениях энергии $E > 0$.

Все возможные рассмотренные выше ситуации, соответствующие различным значениям энергии частицы, отражены на следующих рисунках.



**Задача 2.5.4.** Найти период финитного движения частицы массой $m$ в центральном поле с кеплеровым потенциалом:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}; \quad \alpha > 0.$$

**Решение.**

Как мы выяснили в предыдущей задаче, финитное движение в рассматриваемом центральном поле возможно при отрицательных значениях энергии

$$\left(U_{\text{eff}}\right)_{\min} \equiv -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} < E < 0,$$

поэтому далее при вычислениях, принимая во внимание знак энергии частицы, запишем ее в виде

$$E = -|E|. \tag{2.198}$$

Предложим два варианта нахождения периода финитного движения.

**Первый способ** основывается на непосредственном вычислении интеграла в общей формуле, определяющей период финитного движения в произвольном центральном поле $U(r)$:

$$T = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}, \tag{2.199}$$

где точки поворота $\rho_{1,2}$ определяются равенством обобщенной энергии и эффективного потенциала (2.187):

$$E = U_{\text{eff}}(\rho_{1,2}). \tag{2.200}$$

С учетом (2.198) уравнение для точек поворота примет вид:

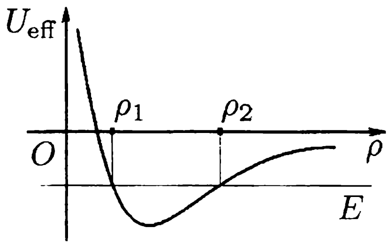
$$-|E| = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \tag{2.201}$$

или

$$2m|E|\rho^2 - 2m\alpha\rho + p_\varphi^2 = 0,$$

откуда находим значения расстояний от силового центра до частицы в точках поворота:

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha}{2|E|} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}. \tag{2.202}$$




Приступим к вычислению интеграла в (2.199). Принимая во внимание (2.187) и (2.198), запишем

$$T = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(-|E| + \dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}\right)}}.$$

Выносся из-под корня за знак интеграла $\dfrac{2}{m}|E|$, приводя к общему знаменателю и выделяя полный квадрат в подкоренном выражении, будем иметь:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \dfrac{\alpha}{|E|}\rho - \dfrac{p_\varphi^2}{2m|E|}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{|E|}}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\left(\rho - \dfrac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \dfrac{p_\varphi^2}{2m|E|}}}.$$

Представим в числителе

$$\rho \equiv \left(\rho - \frac{\alpha}{2|E|}\right) + \frac{\alpha}{2|E|}:$$

введем новую переменную интегрирования

$$\xi = \rho - \frac{\alpha}{2|E|}$$

и разобьем интеграл на два:

$$T = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left[ \frac{1}{2} \int\limits_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{d\xi^2}{\sqrt{-\xi^2 + \left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{2|E|} \int\limits_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + \left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}} \right].$$

Беря получившиеся табличные интегралы, получаем

$$T = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left[ -\sqrt{-\xi^2 + \left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{2|E|} \arccos \frac{\xi}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}} \right] \Bigg|_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)}$$

Значения переменной интегрирования $\xi$ в точках поворота (2.202)

$$\xi(\rho_{1.2}) = \rho_{1.2} - \frac{\alpha}{2|E|} = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}.$$

В результате обе подстановки для первого слагаемого дают нулевые результаты, и период

$$T = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{\alpha}{2|E|} \big(\arccos 1 - \arccos(-1)\big) = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{\alpha\pi}{2|E|} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^{3/2}}}.$$

**Второй способ** вычисления периода финитного движения основан на использовании уже полученных в предыдущей задаче результатов о движении частицы в кеплеровом потенциале.

В полярных координатах, как известно, модуль вектора секторной скорости

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Интеграл движения $p_\varphi$ при этом выражается в полярных координатах плоскости Лапласа как

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

Стало быть, секторная скорость

$$\sigma = \frac{p_\varphi}{2m} \tag{2.203}$$

и сохраняет свое значение. Именно это свойство секторной скорости, как площади, заметаемой радиус-вектором в единицу времени, позволяет рассчитать период $T$ финитного движения: за время $T$ заметается площадь эллипса

$$S = \pi ab.$$

по которому движется частица ($a, b$ — большая и малая полуоси эллипса):

$$T = \frac{\pi ab}{\sigma} = \frac{2m\pi ab}{p_\varphi} \tag{2.204}$$

Полуоси эллипса $a, b$ могут быть легко найдены по известным из предыдущей задачи значениям параметра $p$ (2.195) и эксцентриситета $\varepsilon$ (2.196). Связь $p, \varepsilon$ с $a, b$, напомним, имеет вид:

$$p = \frac{b^2}{a},$$
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

откуда

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2},$$
$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Поэтому период финитного движения, определяемый соотношением (2.204):

$$T = \frac{2\pi m}{p_\varphi} \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Подставляя сюда выражения (2.195) и (2.196) для параметра и эксцентриситета соответственно, получаем для периода движения частицы тот же результат:

$$T = \frac{2\pi m}{p_\varphi} \left(\frac{p_\varphi^2}{m\alpha}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}\right)^{3/2}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^{3/2}}}.$$

## 2.6 Задача рассеяния

**Общие рекомендации.**

Решение задач на нахождение дифференциального сечения рассеяния сводится к нахождению прицельного параметра как функции угла рассеяния. Делается это на основе квадратуры, определяющей уравнение траектории частицы пучка, движущейся в поле силового центра, на котором происходит рассеяние. При этом в квадратуре эффективный потенциал необходимо записать через прицельный параметр. Задачи на нахождение сечения падения частиц на силовой центр сводятся к нахождению предельного прицельного параметра, имея который частица выходит асимптотически на круговую орбиту.

**Задача 2.6.1.** Найти дифференциальное сечение рассеяния пучка частиц на силовом центре, потенциал которого

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (\alpha < 0).$$

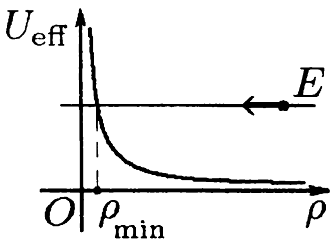
**Решение.**

В задаче 2.5.3 для случая притягивающего силового центра ($\alpha > 0$) было найдено уравнение траектории (2.197) в виде уравнения конического сечения. При этом в зависимости от значения энергии $E$ частицы эксцентриситет (2.196) мог принимать различные значения, что определяло, по какой траектории будет двигаться частицы: окружность, эллипс, парабола или гипербола.

Для случая отталкивающего силового центра ($\alpha < 0$) эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \tag{2.205}$$

всюду положителен (см. рис.), и движение возможно только при значениях энергии $E > 0$.

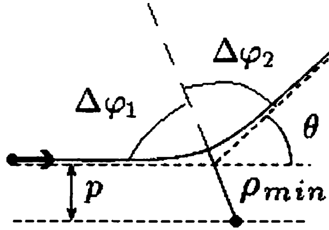



Все проведенные в задаче 2.5.3 вычисления, как несложно сообразить, остаются в силе. Однако, теперь, в силу положительного значения энергии $E$, эксцентриситет траектории, определяемый соотношением (2.196),

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1,$$

что говорит о том, что траекторией движения частиц при рассеянии на силовом центре, будет гипербола при любом разрешенном значении энергии $E$.

Связь прицельного параметра $p$ с углом рассеяния $\theta$ может быть установлена на основе квадратуры, определяющей уравнение траектории (2.186).




Обозначим через $\Delta\varphi_1$ — изменение угловой координаты $\varphi$ при движении частицы из пространственной бесконечности, где $\rho = \infty$, до точки максимального сближения с силовым центором, в которой $\rho = \rho_{min}$; $\Delta\varphi_2$ — изменение угла при обратном движении на пространственную бесконечность. Выражения для $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ могут быть непосредственно найдены из (2.186). где для $\Delta\varphi_1$ перед интегралом следует взять знак «−», поскольку на этом участке движения координата $\rho$ уменьшается (при этом на нижнем пределе интеграла необходимо поставить $\rho = \infty$, как значение начальной координаты, на верхнем — $\rho = \rho_{min}$, как конечной); в выражении для $\Delta\varphi_2$ перед интегралом следует взять знак «+», поскольку на этом участке движения координата $\rho$ увеличивается (при этом на нижнем пределе интеграла будет $\rho = \rho_{min}$, как значение начальной координаты, на верхнем — $\rho = \infty$, как конечной):

$$\Delta\varphi_1 = -\int\limits_{\infty}^{\rho_{\min}} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}, \tag{2.206}$$

$$\Delta\varphi_2 = \int\limits_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}. \tag{2.207}$$

Очевидно, $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$.

Из рисунка видно, что угол рассеяния $\theta$ удовлетворяет соотношению:

$$\pi - \theta = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2.$$

Поэтому

$$\pi - \theta = 2 \int\limits_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}} \tag{2.208}$$

Эффективный потенциал здесь следует записать через прицельный параметр $p$ стандартным образом:

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \equiv U(\rho) + \frac{Ep^2}{\rho^2} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{Ep^2}{\rho^2}. \tag{2.209}$$

При этом в (2.208) необходимо также выразить оставшееся в подынтегральном выражении (вне эффективного потенциала) $p_\varphi$ через прицельный параметр $p$ на основе соотношения:

$$\frac{p_\varphi^2}{2m} = Ep^2. \tag{2.210}$$

(Стоит отметить, что значения интегралов движения $p_\varphi$, как модуля момента импульса, и энергии $E$ могут быть найдены из начальных условий:

$$p_\varphi = mpv_\infty, \qquad E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \tag{2.211}$$

где $v_\infty$ — модуль вектора скорости частицы на пространственной бесконечности в начальный момент времени. Потенциал $U(\rho)$, предполагается, убывает на бесконечности так, что

$$\lim_{\rho\to\infty} U(\rho) = 0.$$

Соотношение (2.210) получается из формул (2.211).)

Интеграл, фигурирующий в (2.208), нами был уже вычислен в задаче 2.5.3: см. формулу (2.191), в которой необходимо заменить $p_\varphi$ на основе (2.210) и поставить соответствующие нашему интегралу пределы. В итоге,

$$\pi - \theta = 2 \arccos \left. \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{2Ep^2}}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \left(\frac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}} \right|_{\rho_{\min}}^{\infty} =$$

$$
= 2 \arccos \frac{\left(-\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}} - 2 \arccos \frac{\dfrac{1}{\rho_{\min}} - \dfrac{\alpha}{2Ep^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}}. \qquad (2.212)
$$

Минимальное до силового центра расстояние $\rho_{\min}$ находим из равенства, определяющего точки поворота:

$$
U_{\text{eff}}(\rho_{\min}) = -\frac{\alpha}{\rho_{\min}} + \frac{Ep^2}{\rho_{\min}^2} = E, \qquad (2.213)
$$

которое решаем как квадратное относительно $1/\rho_{\min}$. Помня, что в нашем случае $\alpha < 0$, а координата $\rho$ всегда неотрицательна, убеждаемся, что это уравнение имеет единственное решение

$$
\frac{1}{\rho_{\min}} = \frac{\alpha}{2Ep^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2} + \left(\frac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}. \qquad (2.214)
$$

Подставляя (2.214) в (2.212), находим:

$$
\pi - \theta = 2 \arccos \frac{\left(-\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}} - 2 \arccos 1 =
$$

$$
= 2 \arccos \frac{\left(-\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}}, \qquad (2.215)
$$

откуда

$$
\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}{\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{\alpha}{2Ep^2}\right)^2}. \qquad (2.216)
$$

Домножая числитель и знаменатель на $p^4$,

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\left(\dfrac{\alpha}{2E}\right)^2}{p^2 + \left(\dfrac{\alpha}{2E}\right)^2}, \tag{2.217}$$

окончательно находим:

$$p^2(\theta) = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}. \tag{2.218}$$

Дифференциальное сечение рассеяния может быть найдено по формуле:

$$d\sigma = \pi\left|dp^2(\theta)\right| = \pi\left|\frac{dp^2(\theta)}{d\theta}\right|d\theta = \pi\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \cdot 2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,d\theta. \tag{2.219}$$

Записывая дифференциал $d\theta$ через элемент телесного угла $d\Omega$

$$d\theta = \frac{d\Omega}{2\pi\sin\theta}, \tag{2.220}$$

окончательно приходим к соотношению

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}},$$

называемому формулой Э. Резерфорда.

**Задача 2.6.2.** Пучок частиц массой $m$ с энергией $E$ упруго рассеивается на жесткой сфере радиуса $R$. Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния.

**Решение.**

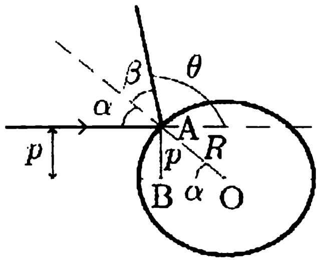
Рассеяние пучка на жесткой сфере можно интерпретировать как рассеяние на силовом центре, находящемся в центре сферы и создающем поле

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ \infty, & r \le R. \end{cases}$$

Тем не менее для нахождения прицельного параметра как функции угла рассеяния, нет необходимости анализировать квадратуру, аналогичную (2.208) в предыдущей задаче. Данная зависимость находится из чисто геометрических соображений.

В самом деле, изобразим траекторию движения одной частицы при рассеянии. Поскольку вне сферы никаких сил на частицу не действуют, она движется до и после удара о сферу прямолинейно. Абсолютная упругость удара приводит к тому, что угол падения $\alpha$ совпадает с углом отражения $\beta$ (см. рис.):

$$\alpha = \beta.$$




При этом угол $\alpha$ может быть выражен через угол рассеяния $\theta$ очевидным образом:

$$\alpha = (\pi - \theta)/2. \tag{2.221}$$

В качестве прицельного параметра $p$ частицы выступает отезок AB (см. рис.), равный длине перпендикуляра, опущенного из точки падения частицы на сферу на ее диаметр, параллельный первоначальному направлению движения частицы. Из прямоугольного треугольника $\triangle$AOB с гипотенузой OA$= R$, находим:

$$p = R\sin\alpha. \tag{2.222}$$

С учетом (2.221), зависимость прицельного параметра от угла рассеяния имеет вид:

$$p(\theta) = R\cos\frac{\theta}{2}. \tag{2.223}$$

Дифференциальное сечение рассеяния тогда:

$$d\sigma = 2\pi p(\theta)\left|\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right|d\theta =$$
$$= 2\pi \cdot R\cos\frac{\theta}{2} \cdot R\sin\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\,\pi R^2 \sin\theta\, d\theta. \quad (2.224)$$

Угол рассеяния $\theta$ принимает возможные значения

$$0 \le \theta \le \pi.$$

При этом значение $\theta = \pi$ соответствует «лобовому» столкновению частицы со сферой, когда она движется в направлении вдоль горизонтального диаметра сферы и после удара о нее продолжает двигаться в диаметрально противоположную сторону; значение $\theta = 0$ соответствует ситуации, когда частица, имея прицельный параметр $p = R$, лишь касается поверхности сферы и не испытывает изменения направления движения.

Полное сечение рассеяния $\sigma_{total}$ получается интегрированием дифференциального $d\sigma$ по всем возможным значениям угла рассеяния:

$$\sigma_{total} = \int d\sigma = \frac{1}{2}\,\pi R^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\,\pi R^2 \cos\theta\Big|_0^\pi = \pi R^2 \quad (2.225)$$

и представляет собой поперечную площадь препятствия, которое встречают частицы пучка при рассеянии, в нашем случае — площадь круга радиуса $R$.

**Задача 2.6.3.** Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси $x$, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = ax^{1/2}, \quad 0 \le x \le b \quad (a > 0,\, b > 0)$$

вокруг оси $x$.

**Решение.**

По аналогии с предыдущей задачей, упругое рассеяния на поверхности вращения можно переформулировать как рассеяние на силовом центре с потенциалом

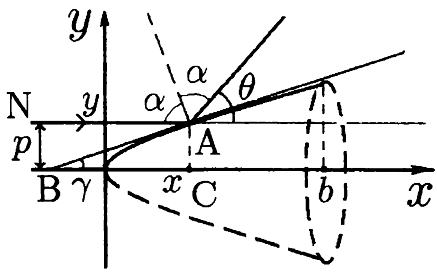
$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{вне поверхности вращения,} \\ \infty & \text{на и под поверхностью вращения.} \end{cases}$$

При этом, в силу очевидной симметрии, этот воображаемый силовой центр находится где-то на оси симметрии, в качестве которой выступает ось $x$. Более конкретной информации о местонахождении его сказать невозможно, но, как мы увидим, этого достаточно для решения задачи. В частности, знание того, что силовой центр находится где-то на оси $x$, позволяет прийти к выводу о том, что в качестве прицельного параметра каждой частицы налетающего пучка выступает ордината точки ее падения на поверхность (см. рис.):

$$p = y.$$

Изобразим траекторию движения частицы при упругом столкновении с поверхностью. Из рисунка находим, что угол падения $\alpha$ связан с углом рассеяния очевидным соотношением:

$$\alpha = (\pi - \theta)/2. \tag{2.226}$$




Проведем в точке A падения касательную к поверхности и обозначим через $\gamma$ угол ее наклона. Тогда значение производной функции $f(x) =$

$ax^{1/2}$ в этой точке, как известно, определяет значение тангенса угла наклона касательной:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2} a x^{-1/2}. \tag{2.227}$$

Из чисто геометрических соображений установим связь углов $\alpha$ и $\gamma$. На рисунке

$$\angle NAB = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \angle ABC = \gamma$$

и $\angle NAB = \angle ABC$ как накрестлежащие, стало быть

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{2.228}$$

Сравнивая (2.226) и (2.228), находим:

$$\gamma = \frac{\theta}{2}. \tag{2.229}$$

Поэтому равенство (2.227) принимает вид:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} a x^{-1/2}, \tag{2.230}$$

откуда

$$x^{1/2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

а прицельный параметр

$$p = f(x) = a x^{1/2} = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = p(\theta). \tag{2.231}$$

Дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi p(\theta) \left|\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right| d\theta = 2\pi \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}\, d\theta. \tag{2.232}$$

Записывая дифференциал $d\theta$ через элемент телесного угла $d\Omega$ по аналогии с (2.220) получаем

$$d\sigma = \frac{a^4}{16} \frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}.$$

Определим для полноты картины, в каких пределах изменяется угол рассеяния $\theta$ частиц пучка. Для этого необходимо рассмотреть две «предельных» точки $x = 0$ и $x = b$, ограничивающих поверхность вращения.

После столкновения частицы с поверхностью вращения в точке с абсциссой $x = 0$, она будет двигаться в диаметрально противоположную сторону, что соответствует значению угла рассеяния $\theta = \pi$. При рассеянии в точке с абсциссой $x = b$ угол рассеяния $\theta_b$ может быть определен из соотношения (2.230):

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_b}{2} = \frac{1}{2}\,ab^{-1/2}, \tag{2.233}$$

откуда

$$\theta_b = 2\operatorname{arctg}\frac{a}{2\sqrt{b}}. \tag{2.234}$$

Очевидно, что при рассеянии во всех остальных точках поверхности вращения искомый угол рассеяния меняется в пределах:

$$\theta_b \le \theta \le \pi.$$

Итак, дифференциальное сечение рассеяния частиц на заданной поверхности вращения

$$d\sigma = \frac{a^4}{16}\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}, \text{ при этом } \quad \theta_b \le \theta \le \pi. \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_b}{2} = \frac{1}{2}\,ab^{-1/2}.$$

**Задача 2.6.4.** Найти сечение падения на силовой центр для частиц массой $m$, движущихся в потенциале

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$$

с энергией $E$ $((\alpha, \beta > 0))$.

**Решение.**

Нахождение сечения падения на силовой центр $\sigma_{\text{пад}}$ сводится к нахождению предельного прицельного параметра $p_0$, поскольку

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi p_0^2. \tag{2.235}$$

По определению предельный прицельный параметр — это такое значение прицельного параметра, имея который частицы пучка асимптотически выходят на круговую орбиту вокруг силового центра. Его значение может быть найдено из условия равенства значения энергии частиц пучка максимальному значению эффективного потенциала, что может быть сформулировано в виде выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} E = U_{\text{eff}}(\rho_0, p_0). \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} U_{\text{eff}}(\rho, p) \Big|_{\rho=\rho_0, p=p_0} = 0; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} U_{\text{eff}}(\rho, p) \Big|_{\rho=\rho_0, p=p_0} < 0. \end{cases} \tag{2.236}$$

Эффективный потенциал частиц пучка

$$U_{\text{eff}}(\rho, p) = U(\rho) + \frac{Ep^2}{\rho^2} = \frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(Ep^2 - \beta\right). \tag{2.237}$$

Дифференцируя его, запишем систему (2.236) явным образом:

$$\begin{cases} E = \dfrac{\alpha}{\rho_0} + \dfrac{1}{\rho_0^2}\left(Ep_0^2 - \beta\right). \\ -\dfrac{\alpha}{\rho_0^2} - \dfrac{2}{\rho_0^3}\left(Ep_0^2 - \beta\right) = 0; \\ \dfrac{2\alpha}{\rho_0^3} + \dfrac{6}{\rho_0^4}\left(Ep_0^2 - \beta\right) < 0. \end{cases} \tag{2.238}$$

Из второго равенства системы (2.238) находим, что

$$\rho_0 = -\frac{2}{\alpha}\left(Ep_0^2 - \beta\right) \tag{2.239}$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (2.238), получаем:

$$E = -\frac{\alpha^2}{2\left(Ep_0^2 - \beta\right)} + \frac{\alpha^2}{4\left(Ep_0^2 - \beta\right)} = -\frac{\alpha^2}{4\left(Ep_0^2 - \beta\right)}. \tag{2.240}$$

откуда находим значение предельного прицельного параметра:

$$p_0^2 = \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}, \tag{2.241}$$

Проверим выполнение третьего условия в системе (2.238):

$$\frac{2\alpha}{\rho_0^3} + \frac{6}{\rho_0^4}\left(Ep_0^2 - \beta\right) = \Big[(2.239)\Big] = -\frac{2\alpha^4}{8\left(Ep_0^2 - \beta\right)^3} + \frac{6\alpha^4}{16\left(Ep_0^2 - \beta\right)^3} =$$
$$= \frac{\alpha^4}{8\left(Ep_0^2 - \beta\right)^3} = \left[\text{из } (2.240) : \left(Ep_0^2 - \beta\right) = -\frac{\alpha^2}{4E}\right] = -\frac{8E^3}{\alpha^2} < 0.$$

Поэтому, подставляя найденное предельное значение прицельного параметра (2.241) в соотношение (2.235), для сечение падения окончательно получаем:

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi\left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}\right). \tag{2.242}$$

## 2.7 Малые колебания

**Общие рекомендации.**

При решении задач на малые колебания прежде всего необходимо убедиться в возможности существования колебательного движения в системе. Для этого необходимо проверить ее потенциал на наличие точек минимума. Колебания будут происходить вблизи той точки минимума, в окрестности которой задано начальное положение системы. Эта точка определяет положение равновесия системы при заданных начальных условиях. Далее необходимо стандартным образом построить функцию Лагранжа колебательной системы. При этом не нужно думать над вопросом рационального выбора обобщенных координат: в качестве таковых выбираются отклонения от найденного положения равновесия, которые впоследствии будут считаться малыми. Для нахождения закона малых линейных свободных колебаний необходимо произвести разложение построенной функции Лагранжа в ряд Тейлора по малым отклонениям от положения равновесия, сохраняя члены не более второго порядка малости. Последнее обеспечивает линейность дифференциальных уравнений, описывающих колебания. Далее составляется система уравнений Лагранжа, к решению которой стандартными математическими методами сводятся дальнейшие действия. В частности, требование нетривиальности решения однородной системы дифференциальных уравнений приводит к характеристическому уравнению, позволяющему найти собственные частоты. Надо понимать, что у каждой колебательной системы ровно столько собственных частот, сколько степеней свободы она имеет. При этой каждой собственной частоте (моде колебаний) соответствует строго определенная амплитуда (комплексный столбец амплитуд). В случае вынужденных колебаний наличие внешних потенциальных сил производится на уровне лагранжиана: необходимо построить добавку к функции Лагранжа в виде их потенциала. Система уравнений Лагранжа в этом случае будет неоднородной и решается по-прежнему стандартными математическими методами. Напомним, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения однородной и частного решения неоднородной систем.

**Задача 2.7.1.** Колебательная система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(q_2\,\dot{q}_1^2 + q_1\,\dot{q}_2^2\right) - \left(\frac{1}{q_1 q_2} + q_1 + q_2\right).$$

Найти закон малых линейных колебаний, возможных в такой системе.

**Решение.**

Во-первых, убедимся в возможности существования колебательного движения в системе. Для этого исследуем потенциал системы (члены лагранжиана, не зависящие от обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и взятые с обратным знаком)

$$U(q_1; q_2) = \frac{1}{q_1 q_2} + q_1 + q_2. \tag{2.243}$$

Вычисляя первые частные производные и приравнивая их к нулю,

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{1}{q_1^2 q_2} + 1 = 0, \tag{2.244}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{1}{q_1 q_2^2} + 1 = 0, \tag{2.245}$$

находим точку экстремума потенциала:

$$q_{01} = 1, \qquad q_{02} = 1. \tag{2.246}$$

Чтобы убедиться в том, что она является точкой минимума, проверим выполнение условий критерия Сильвестра: все угловые миноры матрицы, состоящей из вторых частных производных потенциала $u_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_0}$, вычисленных в точке экстремума $q_{0i}$ должны быть положительны:

$$\delta_1 = u_{11} = \left.\frac{2}{q_1^3 q_2}\right|_{q_1=q_2=1} = 2 > 0, \tag{2.247}$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = \left.\begin{vmatrix} \frac{2}{q_1^3 q_2} & \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \\ \frac{1}{q_1^2 q_2^2} & \frac{2}{q_1 q_2^3} \end{vmatrix}\right|_{q_1=q_2=1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0. \tag{2.248}$$

Итак, найденная точка (2.246) является точкой минимума потенциала системы, а потому в ее окрестности возможно колебательное движение.

Для дальнейшего решения введем новые обобщенные координаты

$$x_1 = q_1 - q_{01} = q_1 - 1, \qquad x_2 = q_2 - q_{02} = q_2 - 1, \tag{2.249}$$

которые представляют собой отклонения от положения равновесия.

Подставим

$$q_1 = 1 + x_1,$$
$$q_2 = 1 + x_2$$

в лагранжиан и, считая $x_1$ и $x_2$ малыми, используя асимптотическое соотношение

$$\left.(1+x)^{-1}\right|_{x\to 0} = 1 - x + x^2 + \ldots,$$

произведем разложение в ряд Тейлора до второго порядка малости:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big((1+x_2)\,\dot{x}_1^2 + (1+x_1)\,\dot{x}_2^2\Big) - \\ -\left(\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} + (1+x_1) + (1+x_2)\right) = \\ = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \ldots\big) - \big(1 - x_1 + x_1^2 + \ldots\big)\big(1 - x_2 + x_2^2 + \ldots\big) - \\ -2 - x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \ldots\big) - \\ -\big(1 - x_1 + x_1^2 - x_2 + x_1x_2 + x_2 + \ldots\big) - \\ -2 - x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\big) - \big(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\big) - 3 + \ldots, \qquad (2.250)$$

где многоточие означает члены более высокого порядка малости, которыми мы пренебрегаем. Принимая во внимание неоднозначность в определении лагранжиана, аддитивную постоянную 3 можно опустить.

Таким образом, функция Лагранжа рассматриваемой колебательной системы в квадратичном приближении по малым отклонениям от положения равновесия принимает вид:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\big) - \big(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\big). \qquad (2.251)$$

Система уравнений Лагранжа для построенного лагранжиана записывается как

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 + x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases} \qquad (2.252)$$

и представляет собой однородную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Будем искать решение системы в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\imath\omega t} \qquad (2.253)$$

с комплексными амплитудами $A_1$ и $A_2$.

Подстановка (2.253) в систему (2.252) приводит к однородной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2 & 1 \\ 1 & -\omega^2 + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.254)$$

Полученная система имеет нетривиальное решение лишь при условии, что определитель ее матрицы равен нулю (характеристическое уравнение):

$$\begin{vmatrix} -\omega^2+2 & 1 \\ 1 & -\omega^2+2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.255}$$

откуда

$$\begin{gathered} \left(-\omega^2+2\right)^2 = 1, \\ -\omega^2+2 = \pm 1 \end{gathered} \tag{2.256}$$

и собственные частоты сигемы

$$\omega_{(1)} = 1. \qquad \omega_{(2)} = \sqrt{3}. \tag{2.257}$$

Далее найдем столбец комплексных амплитуд, соответствующих каждой из собственных частот.

Полагая $\omega = 1$ в алгебраической системе (2.254), получаем, как и положено (ведь определитель ее равен нулю!), систему из двух зависимых уравнений (в данном случае повторяющих друг друга):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.258}$$

В итоге, для компонент столбца комплексной амплитуды, соответствующей первой собственной частоте, имеем одно уравнение с двумя неизвестными:

$$A_1 + A_2 = 0,$$

общее решение которого может быть записано как

$$A_1 = -A_2 = C_1. \tag{2.259}$$

где $C_1$ — произвольная комплексная константа, а потому столбец комплексных амплитуд первой моды колебаний

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.260}$$

Следовательно, первое частное решение системы (2.252), соответствующее собственной частоте $\omega_{(1)} = 1$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{(1)} = \operatorname{Re} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{it}, \qquad (2.261)$$

Аналогично, полагая в (2.254) $\omega = \sqrt{3}$, вновь приходим к системе с двумя зависимыми уравнениями:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.262)$$

Общим решением оставшегося независимого одного уравнения

$$A_1 - A_2 = 0$$

будет

$$A_1 = A_2 = C_2 \qquad (2.263)$$

с произвольной комплексной константой $C_2$. Столбец комплексных амплитуд второй моды колебаний

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.264)$$

Второе частное решение системы (2.252), соответствующее собственной частоте $\omega_{(2)} = \sqrt{3}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{(2)} = \operatorname{Re} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t}; \qquad (2.265)$$

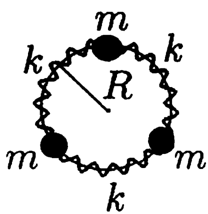
Закон малых линейных колебаний системы как общее решение системы уравнений (2.252) представляет собой линейную суперпозицию найденных частных решений (2.261) и (2.266):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left( C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \right). \qquad (2.266)$$

Две комплексные константы $C_1$ и $C_2$ (или что то же самое. четыре вещественные $\operatorname{Re} C_1$. $\operatorname{Im} C_1$, $\operatorname{Re} C_2$ и $\operatorname{Im} C_2$) могут быть однозначно найдены из четырех начальных условий:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{01}, \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{01}, \\ x_2(0) = x_{02}, \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{02}. \end{cases}$$

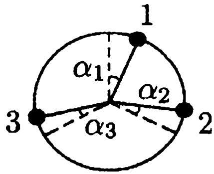
**Задача 2.7.2.** Найти закон малых линейных колебаний трех бусинок массой $m$ каждая, нанизанных на гладкое горизонтальное кольцо радиуса $R$ и связанных друг с другом тремя одинаковыми пружинами жесткостью $k$ каждая. Пружины в положении равновесия бусинок недеформированы.




**Решение.**

Для начала построим лагранжиан рассматриваемой колебательной системы. Очевидно, что система имеет три степени свободы, поскольку положение каждой из трех бусинок на окружности может быть задано одной координатой (например, углом). А так как пружины одинаковы и в положении равновесия системы они недеформированы, положением равновесия является любое состояние, в котором бусинки делят кольцо на три равные части. В качестве обобщенных координат выберем углы отклонения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ бусинок от одного из возможных положений равновесия. Договоримся о направлении отсчета введенных обобщенных координат: отклонению $i$–той бусинки по часовой стрелке от ее положения равновесия соответствует значение угла $\alpha_i > 0$, против часовой стрелки – значение $\alpha_i < 0$.

Для построения функции Лагранжа системы рассмотрим произвольное ее состояние, например, изображенное на рисунке.




Модуль вектора скорости $i$-ой бусинки может быть записана через обобщенную скорость $\dot{\alpha}_i$ как

$$v_i = \dot{\alpha}_i R,$$

следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_3^2\right). \qquad (2.267)$$

Потенциальная энергия системы представляет собой сумму энергий упругой деформации трех пружин:

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{13}.$$

Рассмотрим, к примеру, пружину, соединяющую первую и вторую бусинки. Ее энергия

$$U_{12} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_{12}\right)^2, \qquad (2.268)$$

где $\Delta l_{12}$ — удлинение пружины,— необходимо выразить через введенные обобщенные координаты. Для этого обратимся к рисунку. Очевидно, оно представляет собой сумму длин дуг окружностей, вдоль которых отклоняются бусинки:

$$\Delta l_{12} = R\left|\alpha_1\right| + R\left|\alpha_2\right|. \qquad (2.269)$$

Но поскольку, согласно, нашей договоренности о знаках обобщенных координат $\alpha_i$, в изображенном на рисунке состоянии первая бусинка отклонена по часовой стрелке, вторая — против, то $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$. И, раскрывая модули в (2.269), получаем

$$\Delta l_{12} = R\alpha_1 - R\alpha_2. \qquad (2.270)$$

Следовательно,

$$U_{12} = \frac{kR^2}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2. \tag{2.271}$$

Совершенно аналогично, энергии двух оставшихся пружин

$$U_{23} = \frac{kR^2}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)^2, \tag{2.272}$$

$$U_{13} = \frac{kR^2}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)^2. \tag{2.273}$$

Собирая все вместе, запишем потенциальную энергию всей системы как

$$U = \frac{kR^2}{2}\Big((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2\Big). \tag{2.274}$$

Окончательно, функция Лагранжа колебательной системы

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\left(\dot\alpha_1^2 + \dot\alpha_2^2 + \dot\alpha_3^2\right) - \\ - \frac{kR^2}{2}\Big((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2\Big). \tag{2.275}$$

Построенный лагранжиан сразу оказался квадратичным по малым отклонениям от положения равновесия, поэтому не требуется совершать каких-либо дополнительных действий по приведению его к такому виду.

Составим систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} m\ddot\alpha_1 + k(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0, \\ m\ddot\alpha_2 + k(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) = 0, \\ m\ddot\alpha_3 + k(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) = 0. \end{cases} \tag{2.276}$$

Делая подстановку

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{\imath\omega t}, \tag{2.277}$$

переходим к однородной системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 + k(2A_1 - A_2 - A_3) = 0, \\ -m\omega^2 A_2 + k(2A_2 - A_1 - A_3) = 0, \\ -m\omega^2 A_3 + k(2A_3 - A_1 - A_2) = 0 \end{cases} \tag{2.278}$$

или, что то же самое, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -k & -m\omega^2+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.279)$$

Характеристическое уравнение возникает вследствие требования нетривиальности решения:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -k & -m\omega^2+2k \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.280)$$

Расписывая определитель, например, по правилу треугольников, имеем

$$\Big(-m\omega^2+2k\Big)^3 - 2k^3 - 3k^2\Big(-m\omega^2+2k\Big) =$$
$$= -m\omega^2\Big(m\omega^2-3k\Big)^2 = 0. \qquad (2.281)$$

откуда собственные частоты колебательной системы

$$\omega_{(1)} = 0. \qquad \omega_{(2)} = \omega_{(3)} = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Далее найдем комплексные амплитуды $A_i$, соответствующие каждой из них. Положим $\omega = 0$ в системе (2.279):

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.282)$$

Очевидно, одно из этих трех уравнений есть линейная комбинация двух других (к примеру, если сложить первые два уравнения и домножить результат на (-1), получим третье уравнение). Поэтому, будем иметь систему двух уравнений с тремя неизвестными (оставим в системе первые два уравнения)

$$\begin{cases} 2A_1 - A_2 - A_3 = 0, \\ -A_1 + 2A_2 - A_3 = 0. \end{cases} \qquad (2.283)$$

Вычитая одно уравнение из другого, найдем, что

$$A_1 = A_2.$$

Тогда, заменяя $A_2$ в первом уравнении на $A_1$, найдем

$$A_1 = A_3.$$

Следовательно, общее нетривиальное решение системы уравнений (2.283)

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_1,$$

где $C_1$ -- произвольная комплексная константа. Столбец комплексных амплитуд при этом

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.284}$$

Для характеристического корня $\omega_{(1)} = 0$ временная зависимость частного решения, как известно из теории дифференциальных уравнений, не может быть записана в виде $e^{\imath\omega t}$, иначе вообще теряется зависимость решения от времени $t$. В этом случае временная зависимость дается линейной функцией времени:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix}^{(1)} = \mathrm{Re} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( C_1' t + C_1'' \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( C_{11} t + C_{12} \right), \tag{2.285}$$

где $C_{11} = \mathrm{Re}\, C_1'$, $C_{12} = \mathrm{Re}\, C_1''$. Отметим, что элементарное движение, соответствующее моде колебаний с нулевой частотой, представляет собой равномерное вращение бусинок по окружности с одинаковыми угловыми скоростями, при котором пружинки остаются недеформированными.

Для нахождения частного решения системы (2.278), соответствующего кратной частоте $\omega_{(2)} = \omega_{(3)}$, положим $\omega = \sqrt{3k/m}$ в системе (2.279)

$$\begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.286}$$

Двойная кратность характеристического корня приводит к тому, что в данной системе два зависимых уравнения. Для нахождения общего нетривиального решения одного оставшегося уравнения

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

с тремя неизвестными, положим

$$A_1 = C_2. \qquad A_2 = C_3,$$

где $C_2, C_3$ — произвольные комплексные константы. (Отметим, что общее решение алгебраической системы из одного уравнения с тремя неизвестными не может быть выражено посредством одной произвольной константы.) Тогда

$$A_3 = -C_2 - C_3$$

и столбец комплексных амплитуд

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \\ -C_2 - C_3 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.287}$$

Следовательно, частное решение системы (2.278), соответствующее кратной частоте $\omega = \sqrt{3k/m}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix}^{(2,3)} = \mathrm{Re} \left\{ C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} e^{i\sqrt{3k/m}\, t}. \tag{2.288}$$

Для полноты картины отметим, что, вообще говоря, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, в случае кратных собственных частот (кратных корней характеристического уравнения) $\omega_{(n)}$, вид соответствующего частного решения однородной системы зависит от соотношения между кратностью $N$ частоты $\omega_{(n)}$ и числом $K$ линейно независимых собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_K$ матрицы системы (определяемое ее рангом $r$), в которой частота $\omega$ положена равной исследуемой кратной частоте $\omega_{(n)}$:

$$K = s - r,$$

где $s$ – размер матрицы системы $(s \times s)$, который совпадает с числом степеней свободы колебательной системы, что эквивалентно числу уравнений в однородной алгебраической системе.

Если $K = N$, то соответствующее частное решение строится аналогично (2.277) с амплитудой, равной линейной комбинации собственных векторов $v_i$:

$$x_j^{(n)}(t) = \mathrm{Re}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} C_i v_j^i\right) e^{i\omega_{(n)} t}\right); \tag{2.289}$$

Если $K < N$, то решение системы, согласно общей теории, должно искаться в виде произведения многочлена по времени $t$ степени $(N - K)$ на $e^{i\omega_{(n)}t}$:

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}\Big(a_{11} + a_{12}t + \ldots + a_{1(N-K)}t^{N-K}\Big)e^{i\omega_{(n)}t}, \\ \ldots \\ x_s = \mathrm{Re}\Big(a_{s1} + a_{s2}t + \ldots + a_{s(N-K)}t^{N-K}\Big)e^{i\omega_{(n)}t}. \end{cases} \tag{2.290}$$

Однако, в свое время немецкий математик Карл Вейерштрасс в самом общем случае показал, что каждому корню характеристического уравнения кратности $N$ соответствует ровно $N$ линейно независимых решений линейной системы алгебраических уравнений (то есть для каждой собственной частоты $N$-ой кратности можно найти $N$ линейно независимых столбцов амплитуд), то есть случай $K < N$ для уравнений, описывающих колебательные системы, невозможен. Следовательно, в случае кратных частот соответствующее частное решение всегда записывается в виде (2.289).

Невозможность частному решению для кратных частот иметь вид (2.290) понятна с физической точки зрения: наличие в законе колебаний членов, содержащих наряду с экспоненциальными также и степенные временные множители, противоречило бы закону сохранения энергии.

В нашем решении мы непосредственно убеждаемся в том, что, действительно, кратность корня характеристического уравнения $\omega = \sqrt{3k/m}$ совпадает с числом линейно независимых собственных векторов матрицы системы (2.323), в которой положено $\omega = \sqrt{3k/m}$: комплексная амплитуда (2.287) состоит из двух столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, закон малых линейных колебаний системы трех бусинок представляет собой линейную комбинацию найденных частных решений (2.285) и (2.288):

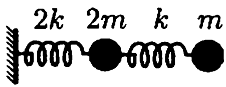
$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big(C_{11}t + C_{12}\Big) +$$

$$+\mathrm{Re}\left\{C_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}e^{i\sqrt{3k/m}\,t}. \qquad (2.291)$$

Две вещественные константы $C_{11}$, $C_{12}$ и две комплексные $C_2$, $C_3$ (или, что эквивалентно, четыре вещественные $\mathrm{Re}\,C_2$, $\mathrm{Im}\,C_2$, $\mathrm{Re}\,C_3$, $\mathrm{Im}\,C_3$) могут быть найдены однозначно на основе шести начальных условий:

$$\begin{cases}\alpha_i(0)=\alpha_{0i},\\ \dot{\alpha}_i(0)=\dot{\alpha}_{0i}, \quad (i=\overline{1,3})\end{cases}$$

**Задача 2.7.3.** Найти закон малых вынужденных колебаний системы, состоящей из двух шариков массами $2m$ и $m$ и двух пружин с жесткостями $2k$ и $k$, если на шарик массой $2m$ действует внешняя горизонтальная сила
$F=F_0\sin\Omega t$. Считать, что поле тяжести отсутствует.




**Решение.**

Рассматриваемая система, очевидно, имеет две степени свободы. Положением равновесия является положение шариков, при котором пружины недеформированы. В качестве обобщенных координат выберем отклонения $x_1$, $x_2$ тел от их положения равновесия.

Функция Лагранжа колебательной системы, подверженной действию внешних потенциальных сил, представляет собой сумму функции Лагранжа $\mathcal{L}_0$ свободной колебательной системы и добавки $\Delta\mathcal{L}$, обусловленной наличием внешних воздействий на систему:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\Delta\mathcal{L}.$$

Лагранжиан свободной системы, как несложно понять, имеет вид:

$$\mathcal{L}_0=m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-kx_1^2-\frac{k}{2}(x_2-x_1)^2. \qquad (2.292)$$

Добавка $\Delta\mathcal{L}$ к лагранжиану представляет собой взятый с обратным знаком потенциал внешних потенциальных сил $U_{\text{ext}}(q,t)$, который может быть найден непосредственным интегрированием равенств

$$Q_i = -\frac{\partial U_{\text{ext}}(q,t)}{\partial q_i} \qquad (i = \overline{1,s}). \tag{2.293}$$

В частности, если внешние обобщенные силы $Q_i = Q_i(t)$ зависят только от времени и не зависят от обобщенных координат,

$$\Delta\mathcal{L} = -U_{\text{ext}}(q,t) = \sum_{i=1}^{s} Q_i(t) q_i \tag{2.294}$$

($s$ — число степеней свободы системы).

Напомним, что обобщенная сила определяется равенством

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}, \tag{2.295}$$

где $N$ — число материальных точек, из которых состоит система, $\vec{F}_\alpha$ — ньютонова сила, действующая на точку под номером $\alpha$ с радиус-вектором $\vec{r}_\alpha$.

В случае нашей задачи

$$\vec{F}_1 = \vec{e}_x F_0 \sin \Omega t, \qquad \vec{F}_2 = 0. \tag{2.296}$$

Тогда первая компонента обобщенной силы

$$Q_1 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} = F_{1x} \cdot \frac{\partial x_1^{\text{дек}}}{\partial x_1}. \tag{2.297}$$

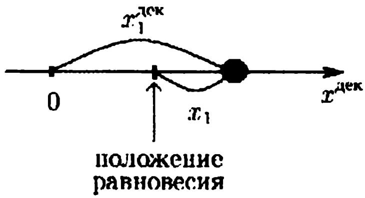
Декартова координата $x_1^{\text{дек}}$ первого шарика отличается от обобщенной координаты $x_1$ на некоторую аддитивную константу (см. рис.):

$$x_1^{\text{дек}} = x_1 + \text{const},$$

где константа const определяет координату положения равновесия первого шарика.

А потому производная

$$\frac{\partial x_1^{\text{дек}}}{\partial x_1} = 1$$




и

$$Q_1 = F_{1x} = F_0 \sin \Omega t. \qquad (2.298)$$

Аналогично, вторая компонента обобщенной силы

$$Q_1 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_2} = F_{1x} \cdot \frac{\partial x_1^{дек}}{\partial x_2}. \qquad (2.299)$$

Декартова координата $x_1^{дек}$, как мы уже выяснили, не зависит от $x_2$, следовательно производная

$$\frac{\partial x_1^{дек}}{\partial x_2} = 0$$

и обобщенная сила

$$Q_2 = 0. \qquad (2.300)$$

Стало быть. обусловленная наличием внешних сил добавка к функции Лагранжа

$$\Delta \mathcal{L} = x_1 \cdot F_0 \sin \Omega t. \qquad (2.301)$$

Итак, полный лагранжиан рассматриваемой колебательной системы

$$\mathcal{L} = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + F_0 x_1 \sin \Omega t. \qquad (2.302)$$

Заметим, построенная функция Лагранжа автоматически оказалась квадратичной по малым отклонениям от положения равновесия. Динамика системы шариков описывается системой уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = F_0 \sin \Omega t, \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0, \end{cases} \qquad (2.303)$$

которая представляет собой неоднородную систему дифференциальных уравнений. Ее решение есть суперпозиция общего решения однородной системы и частного решения неоднородной.

Общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \tag{2.304}$$

будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{\text{общ.одн.}} = \mathrm{Re} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\imath\omega t} \tag{2.305}$$

Подставляя (2.305) в (2.304), приходим к однородной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} -2m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.306}$$

Требование равенства нулю определителя этой системы приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} -2m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = 2m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 + 2k^2 = 0, \tag{2.307}$$

откуда находим собственные частоты

$$\omega_{(1)} = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_{(2)} = \sqrt{\frac{k}{2m}}. \tag{2.308}$$

Полагая $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ в системе (2.323),

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.309}$$

находим независимое уравнение для комплексных амплитуд первой моды колебаний:

$$A_1 + A_2 = 0, \tag{2.310}$$

общим решением которого является

$$A_1 = -A_2 = C_1, \tag{2.311}$$

где $C_1$ — произвольная комплексная константа. Столбец комплексных амплитуд, соответствующий первой собственной частоте,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.312}$$

Полагая $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ в системе (2.323),

$$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.313}$$

для комплексных амплитуд второй моды колебаний независимое уравнение будет иметь вид:

$$2A_1 - A_2 = 0, \tag{2.314}$$

общим решением которого является

$$A_2 = 2A_1 = 2C_2 \tag{2.315}$$

с произвольной комплексной константой $C_2$. Столбец комплексных амплитуд, соответствующий второй собственной частоте,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2.316}$$

Поэтому общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (2.304) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{\text{общ.одн.}} = \mathrm{Re}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{2k/m}\,t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{k/2m}\,t} \right\}. \tag{2.317}$$

Теперь найдем частное решение неоднородной системы (2.303). Представим неоднородность системы следующим образом:

$$F_0 \sin \Omega t = \mathrm{Re}\left(-iF_0 e^{i\Omega t}\right). \tag{2.318}$$

Частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = \mathrm{Re}\left(-iF_0 e^{i\Omega t}\right), \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \tag{2.319}$$

будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{\text{частн.неодн.}} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}, \tag{2.320}$$

где $\Omega$ — частота внешней периодической силы, фигурирующей в неоднородности системы. Подстановка (2.320) в систему (2.319) приводит к неоднородной системе алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд $D_1$ и $D_2$:

$$\begin{pmatrix} -2m\Omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\Omega^2 + k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iF_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.321}$$

Обращая матрицу $(2 \times 2)$ системы согласно соотношению

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \tag{2.322}$$

где $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — ее определитель, получим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -m\Omega^2 + k & k \\ k & -2m\Omega^2 + 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iF_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} iF_0(m\Omega^2 - k) \\ -ikF_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.323}$$

Определитель системы (2.321) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta = \Big(-2m\Omega^2 + 3k\Big)\Big(-m\Omega^2 + k\Big) - k^2 = \\ = 2m^2\Big(\Omega^2 - \omega_{(1)}^2\Big)\Big(\Omega^2 - \omega_{(2)}^2\Big), \end{aligned} \tag{2.324}$$

где $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$ — собственные частоты системы (2.308). Отметим, что при стремлении частоты $\Omega$ внешнего воздействия к одной из собственных частот $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$ определитель $\Delta$ стремится к нулю, и амплитуды $D_1, D_2$

неограниченно возрастают: режим резонанса. Однако, в действительности, амплитуды колебаний не могут быть бесконечными, даже в условиях резонанса! Полученное нами решение соответствует приближению малых отклонений от положений равновесия, что перестает выполняться в режиме резонанса. Для нахождения закона колебаний в околорезонансной области следует отказаться от приближения малости колебаний.

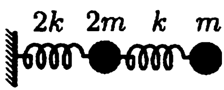
Таким образом, частное решение неоднородной системы (2.303) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}^{\text{частн.неодн.}} = \frac{\mathrm{Re}}{2m^2\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)} \begin{pmatrix} iF_0(m\Omega^2 - k) \\ -ikF_0 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}. \quad (2.325)$$

Окончательно, закон малых вынужденных колебаний системы шариков дается суммой найденных общего решения (2.317) однородной системы и частного решения (2.325) неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{2k/m}\,t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{k/2m}\,t}\right\} +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\frac{1}{2m^2\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)} \begin{pmatrix} iF_0(m\Omega^2 - k) \\ -ikF_0 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}. \quad (2.326)$$

**Задача 2.7.4.** Найти нормальные координаты и привести к нормальному виду лагранжиан колебательной системы, состоящей из двух шариков массами $2m$ и $m$ и двух пружин с жесткостями $2k$ и $k$, изображенной на рисунке. Поле тяжести отсутствует.




**Решение.**

В задаче 2.7.3 построена функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x\;)^2. \quad (2.327)$$

и найдены собственные частоты данной колебательной системы:

$$\omega_{(1)} = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_{(2)} = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

и соответствующие им столбцы комплексных амплитуд:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

На основе имеющегося выражения для кинетической энергии системы

$$T = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} t_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \tag{2.328}$$

составим матрицу T ее квадратичной формы

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{2.329}$$

(заметим, множитель 1/2 не входит в коэффициенты $t_{ij}$!).

Для построения нормальных координат придерживаемся стандартного алгоритма.

1. Построим нормированные на единицу (с весом T) комплексные амплитуды $\tilde{A}_i^{(k)}$:

$$\tilde{A}^{(i)T}\mathrm{T}\tilde{A}^{(k)} = \delta^{ik}. \tag{2.330}$$

Для этого представим нормированные амплитуды в виде:

$$\tilde{A}^{(1)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A}^{(2)} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и найдем нормировочные коэффициенты $c_1$, $c_2$ из требований

$$\tilde{A}^{(1)T}\mathrm{T}\tilde{A}^{(1)} = 1, \qquad \tilde{A}^{(2)T}\mathrm{T}\tilde{A}^{(2)} = 1. \tag{2.331}$$

В частности, для $\tilde{A}^{(1)}$:

$$c_1^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1^2\begin{pmatrix} 2m & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= c_1^2 \cdot 3m = 1, \tag{2.332}$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}}. \tag{2.333}$$

Совершенно аналогично для $\tilde{A}^{(2)}$:

$$c_2^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_2^2 \begin{pmatrix} 2m & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1^2 \cdot 6m = 1, \tag{2.334}$$

откуда

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{6m}}. \tag{2.335}$$

Поэтому нормированные амплитуды имеют вид:

$$\tilde{A}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \tilde{A}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2.336}$$

2. Построим матрицу A из компонент столбцов нормированных амплитуд $\tilde{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3m}} & \dfrac{1}{\sqrt{6m}} \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{3m}} & \dfrac{2}{\sqrt{6m}} \end{pmatrix}. \tag{2.337}$$

3. Нормальные координаты $\xi_i$ вводим преобразованием обобщенных координат
$x \to \xi$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3m}} & \dfrac{1}{\sqrt{6m}} \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{3m}} & \dfrac{2}{\sqrt{6m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\[2ex] \xi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.338}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3m}}\xi_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6m}}\xi_2, \\ x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3m}}\xi_1 + \dfrac{2}{\sqrt{6m}}\xi_2 \end{cases} \tag{2.339}$$

Подставим (2.339) в лагранжиан (2.327)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 = \\
&= m\left(\frac{1}{\sqrt{3m}}\dot{\xi}_1 + \frac{1}{\sqrt{6m}}\dot{\xi}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{\sqrt{3m}}\dot{\xi}_1 + \frac{2}{\sqrt{6m}}\dot{\xi}_2\right)^2 - \\
&-k\left(\frac{1}{\sqrt{3m}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{6m}}\xi_2\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6m}}\xi_2 + \frac{2}{\sqrt{3m}}\xi_1\right)^2. \qquad (2.340)
\end{aligned}
$$

Раскрывая скобки, легко убеждаемся в сокращении перекрестных членов $\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2$ и $\xi_1$[illegible]иеся слагаемые дают лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \Big(\text{[illegible]}\frac{k}{m}\xi_1^2\Big) + \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{2m}\xi_2^2\right) \equiv \\
\equiv \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 - \frac{1}{2}\omega_{(1)}^2\xi_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2}\omega_{(2)}^2\xi_2^2\right). \qquad (2.341)
\end{aligned}
$$

представляющий собой сумму лагранжианов одномерных гармонических осцилляторов с частотами, совпадающими с собственными частотами $\omega_{(1)}$; $\omega_{(2)}$ колебательной системы.

Матрица А удовлетворяет условию:

$$\mathrm{A}^T\mathrm{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}. \qquad (2.342)$$

откуда

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^T\mathrm{T}, \qquad (2.343)$$

что позволяет обратить (2.338) и окончательно записать:

$$
\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^T\mathrm{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3m}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3m}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6m}} & \dfrac{2}{\sqrt{6m}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{2m}{\sqrt{3m}} & -\dfrac{m}{\sqrt{3m}} \\ \dfrac{2m}{\sqrt{6m}} & \dfrac{2m}{\sqrt{6m}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.344)
$$

Итак, нормальные координаты

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\dfrac{m}{3}}\Big(2x_1 - x_2\Big), \\ \xi_2 = 2\sqrt{\dfrac{m}{6}}\Big(x_1 + x_2\Big). \end{cases} \tag{2.345}$$

## 2.8 Динамика твердого тела

**Общие рекомендации.**

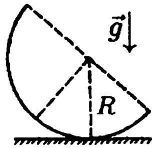
При решении задач на динамику твердого тела прежде всего необходимо построить его лагранжиан. Следует помнить, что произвольное твердое тело может иметь максимум шесть степеней свободы. Различные ограничения, накладываемые на возможные типы движения твердого тела (связи), естественно, приводят к уменьшению числа степеней свободы.

Лагранжиан твердого тела, как обычно, представляет собой разность его кинетической и потенциальной энергий.

Кинетическая энергия твердого тела состоит из двух частей. Первая — кинетическая энергия его поступательного движения. Вторая — кинетическая энергия его вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр инерции. При этом следует помнить о том, что в выражении, определяющем эту энергию фигурируют компоненты тензора инерции, подсчитанные в системе координат, жестко связанной с твердым телом, с началом в его центре масс, и компоненты вектора угловой скорости в этой же системе координат.

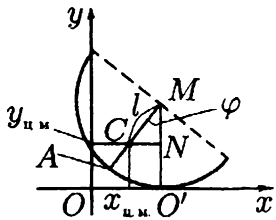
Потенциальная энергия твердого тела в поле тяготения может быть определена по положению его центра масс.

**Задача 2.8.1.** Однородный полый полуцилиндр массой $m$ и радиуса $R$ находится на шероховатой горизонтальной поверхности и может совершать линейные плоскопараллельные колебания. Найти период этих колебаний.




**Решение.**

Очевидно, что полуцилиндр имеет одну степень свободы и его положение может быть задано одной координатой, поскольку при движении его ось остается всегда горизонтальной и параллельной самой себе, и отсутствует проскальзывание между нижней поверхностью полуцилиндра и горизонтальной поверхностью. Выберем в качестве обобщенной координаты угол $\varphi$ его поворота вокруг своей оси.




Для нахождения функции Лагранжа полуцилиндра построим отдельно его кинетическую $T$ и потенциальную $U$ энергии.

Кинетическая энергия представляет собой сумму энергий поступательного движения $T_{\text{пост}}$ и энергию вращения $T_{\text{вр}}$. Первая может быть записана как

$$T_{\text{пост}} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2_{\text{ц.м.}} + \dot{y}^2_{\text{ц.м.}}\right). \qquad (2.346)$$

где $x_{\text{ц.м.}}$, $y_{\text{ц.м.}}$ — координаты центра масс (точка С на рисунке) в неподвижной системе координат.

Заметим, что, в силу условия отсутствия проскальзывания, длина отрезка OO′ совпадает с длиной дуги AO′, при этом $\smile AO' = R\varphi$. Обозначим через $l$ расстояние от центра масс полуцилиндра до его оси (это расстояние мы рассчитаем далее). Из рисунка видно, что длины отрезков $\mathrm{CN} = l\sin\varphi$, $\mathrm{MN} = l\cos\varphi$, а координаты центра масс:

$$x_{\text{ц.м.}} = \mathrm{OO'} - \mathrm{CN} = R\varphi - l\sin\varphi, \tag{2.347}$$

$$y_{\text{ц.м.}} = \mathrm{MO'} - \mathrm{MN} = R - l\cos\varphi. \tag{2.348}$$

Дифференцируя, находим:

$$\dot{x}_{\text{ц.м.}} = R\dot{\varphi} - l\dot{\varphi}\cos\varphi, \tag{2.349}$$

$$\dot{y}_{\text{ц.м.}} = l\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{2.350}$$

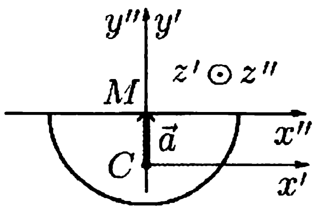
Тогда, подставляя в (2.346),

$$T_{\text{пост}} = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\Big(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\varphi\Big). \tag{2.351}$$

Кинетическая энергия вращения полуцилиндра

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}\,\omega_i\omega_j \tag{2.352}$$

определяется по компонентам тензора инерции $J_{ij}$, подсчитанного в системе координат, жестко связанной с ним, с началом координат, совпадающим с центром масс. Выберем оси последней так, как показано на рисунке.




В этом случае, очевидно, что вектор угловой скорости ориентирован вдоль оси $z'$ и его компонента вдоль этой оси $\omega_3 = \dot{\varphi}$, а потому из всей двойной суммы «выживает» только слагаемое с компонентой $J_{33}$ тензора инерции:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_{33}\, \dot{\varphi}^2 \qquad (2.353)$$

Для того чтобы найти компоненту тензора инерции $J_{33}$ в системе координат, жестко связанной с полуцилиндром, с началом координат, совпадающим с центром масс, воспользуемся теоремой Штейнера. Дело в том, что нам проще расчитать компоненты тензора инерции в другой системе координат, а именно в той, начало координат которой находится на геометрической оси полуцилиндра (точка M на рисунке). Напомним, что, согласно теореме Штейнера, компоненты тензора инерции $J_{ij}$ в произвольной системе координат, жестко связанной с твердым телом, могут быть выражены через компоненты тензора инерции $J_{ij}^{\text{ц.м.}}$, подсчитанного в системе координат с началом в центре масс, следующим образом:

$$J_{ij} = J_{ij}^{\text{ц.м.}} + m\Big(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\Big), \qquad (2.354)$$

где $a_i$ — компоненты вектора $\vec{a}$, на который отстоит начало данной системы координат от центра масс (начало вектора $\vec{a}$ совпадает с центром масс). Тогда необходимая нам компонента тензора инерции $J_{33}$ в (2.353) (в наших обозначениях $J_{33} \equiv J_{33}^{\text{ц.м.}}$, а компоненты тензора инерции в системе координат с началом в точке M обозначим через $J_{ij}''$)

$$J_{33} = J_{33}'' - m\Big(a^2\delta_{33} - a_3 a_3\Big). \qquad (2.355)$$

И так как вектор $\vec{a} = \vec{e}_{y'} l$, то есть $a_1 = 0$, $a_2 = l$, $a_3 = 0$, то

$$J_{33} = J_{33}'' - ma^2\delta_{33} = J_{33}'' - ml^2. \qquad (2.356)$$

Компонента тензора инерции $J_{33}''$ в системе координат с началом в точке M считается тривиальным образом. В самом деле, поскольку согласно определению,

$$J_{ij} = \int dm\Big(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\Big), \qquad (2.357)$$

полагая $i = j = 3$, будем иметь

$$J_{33}'' = \int dm\Big(r''^2 - (z'')^2\Big) = \int dm\Big((x'')^2 + (y'')^2\Big). \qquad (2.358)$$

Поскольку все точки полуцилиндра равноудалены до его оси,

$$(x'')^2 + (y'')^2 = R^2$$

и

$$J''_{33} = mR^2. \tag{2.359}$$

Подставляя в (2.356), находим:

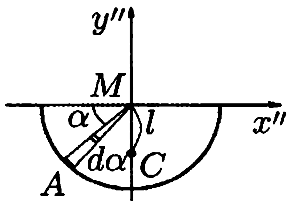
$$J_{33} = m\left(R^2 - l^2\right). \tag{2.360}$$

Теперь найдем положение центра масс полуцилиндра, рассчитаем расстояние $l$. Напомним, что координата $y_{\text{ц.м.}}$ центра масс может быть найдена используя соотношение

$$y_{\text{ц.м.}} = \frac{1}{m}\int dm(\vec{r}'')\, y'', \tag{2.361}$$

где $dm(\vec{r}'')$ — масса элемента твердого тела с радиус-вектором $\vec{r}''$, $m$ — масса всего твердого тела. Из рисунка следует, что

$$y'' = -l\sin\alpha$$




Масса $dm$ элемента полуцилиндра, который опирается на угол $d\alpha$, найдем из пропорции (вся масса $m$ приходится на площадь поверхности полуцилиндра $\pi R \cdot H$, где $H$ — длина полуцилиндра вдоль его оси, а масса элемента $dm$ приходится на полоску вдоль образующей полуцилиндра площадью $Rd\alpha \cdot H$):

$$\frac{m}{dm} = \frac{\pi R \cdot H}{Rd\alpha \cdot H}, \tag{2.362}$$

откуда

$$dm = \frac{m}{\pi}\,d\alpha, \tag{2.363}$$

причем $0 \le \alpha \le \pi$. Тогда

$$y_{\text{ц.м.}} = -\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi}\frac{m}{\pi}\,d\alpha\cdot R\sin\alpha = -\frac{R}{\pi}\int\limits_0^{\pi}d\alpha\,\sin\alpha = -\frac{2R}{\pi}. \tag{2.364}$$

Однако, с другой стороны, как следует из рисунка,

$$y_{\text{ц.м.}} = -l. \tag{2.365}$$

Стало быть,

$$l = \frac{2R}{\pi}. \tag{2.366}$$

Поэтому компонента тензора инерции $J_{33}$ (2.360) и кинетическая энергия вращения $T_{\text{BP}}$ (2.353) могут быть записаны соответственно:

$$J_{33} = mR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \tag{2.367}$$

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}mR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\dot{\varphi}^2. \tag{2.368}$$

Кинетическая энергия поступательного движения (2.351) при этом

$$T_{\text{пост}} = \frac{m}{2}\,R^2\dot{\varphi}^2\left(1 + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\cos\varphi\right). \tag{2.369}$$

Собирая вместе (2.368) и (2.369), для кинетической энергии полуцилиндра будем иметь:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right). \tag{2.370}$$

Потенциальная энергия полуцилиндра

$$U = mgy_{\text{ц.м.}} \tag{2.371}$$

с учетом соотношений (2.348) и (2.366) может быть записана как

$$U = mgR\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right). \tag{2.372}$$

Поэтому функция Лагранжа полуцилиндра будет иметь вид

$$\mathcal{L} = T - U = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right) - mgR\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right). \tag{2.373}$$

И поскольку слагаемое $mgR$ в потенциале, представляющее собой константу, может, в силу неоднозначности определения функции Лагранжа, отброшено, окончательно имеем:

$$\mathcal{L} = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right) + \frac{2mgR}{\pi}\cos\varphi. \tag{2.374}$$

Для нахождения периода малых колебаний произведем разложение построенного лагранжиана в окрестности положения равновесия $\varphi_0 = 0$. Для этого воспользуемся асимптотическим соотношением для косинуса

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots.$$

Поскольку необходимо ограничиться квадратичным приближением, в кинетическом члене запишем:

$$\dot{\varphi}^2\cos\varphi = \dot{\varphi}^2 + \ldots.$$

В итоге лагранжиан в квадратичном приближении по малым отклонениям от положения равновесия

$$\mathcal{L}^{(2)} = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2mgR}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right). \tag{2.375}$$

Отбрасывая константу $2mgr/\pi$ в потенциальном члене, окончательно

$$\mathcal{L}^{(2)} = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{2mgR}{\pi}\varphi^2. \tag{2.376}$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \tag{2.377}$$

очевидно, может быть записано в форме уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R(\pi - 2)}\varphi = 0 \tag{2.378}$$

с собственной частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R(\pi - 2)}} \tag{2.379}$$

и периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R(\pi - 2)}{g}}. \tag{2.380}$$

**Задача 2.8.2.** Построить лагранжиан и найти закон движения в квадратурах для однородного симметричного волчка массой $m$ с неподвижной нижней точкой, если расстояние от нее до центра масс волчка $l$, а главные моменты инерции $J_1 = J_2$ и $J_3$. В качестве обобщенных координат использовать углы Эйлера.

**Решение.**

Как известно, произвольное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Однако условие неподвижности нижней точки автоматически приводит к уменьшению числа степеней свободы до трех (она не имеет возможности двигаться ни по вертикали, ни в одном из двух направлений в горизонтальной плоскости). В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера $\theta$, $\varphi$ и $\psi$.

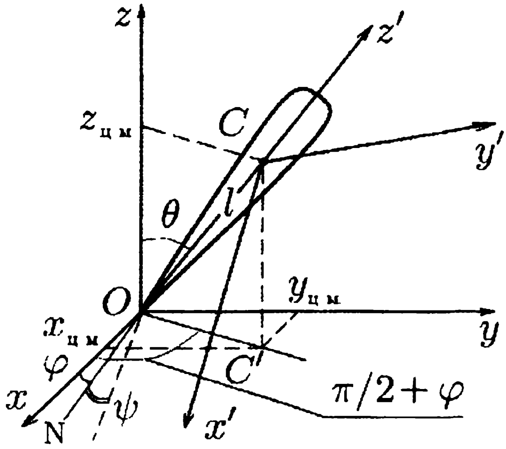
Выберем неподвижную систему координат $xyz$ так, чтобы начало координат совпадало с нижней точкой волчка (см. рис.). Оси системы координат $x'y'z'$, жестко связанной с волчком (ее начало необходимо совместить с центором масс С), ориентируем так, чтобы они совпадали с осями инерции (в данном случае ось $Oz'$ выберем вдоль оси симметрии волчка). В таком случае тензор инерции $J_{ij}$ будет диагональным ($J_{ij} = 0$, для всех $i \neq j$ ), диагональные элементы его совпадают с главными моментами инерции:

$$J_{11} = J_{22} = J_1 = J_2, \quad J_{33} = J_3. \tag{2.381}$$

Кинетическая энергия волчка, согласно теореме Кенига, есть сумма энергии движения центра масс $T_{\text{ц.м.}}$ и энергии чисто вращательного движения $T_{\text{вр}}$.

Кинетическую энергию центра масс найдем, как энергию точки с массой, равной массе волчка, и помещенной в центра масс С волчка:

$$T_{\text{ц.м.}} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2_{\text{ц.м.}} + \dot{y}^2_{\text{ц.м.}} + \dot{z}^2_{\text{ц.м.}}\right). \tag{2.382}$$




Используя рисунок, выразим координаты центра масс через углы Эйлера:

$$x_{ц.м.} = \mathrm{OC}' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = l \sin\theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \\ = -l \sin\theta \sin\varphi, \quad (2.383)$$

$$y_{ц.м.} = \mathrm{OC}' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = l \sin\theta \cos\varphi, \quad (2.384)$$

$$z_{ц.м.} = l \cos\theta. \quad (2.385)$$

Дифференцируя, находим, что

$$\dot{x}_{ц.м.} = -l\Big(\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi\Big), \quad (2.386)$$

$$\dot{y}_{ц.м.} = l\Big(\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi\Big), \quad (2.387)$$

$$\dot{z}_{ц.м.} = -l\dot{\theta} \sin\theta. \quad (2.388)$$

Возводя в квадрат и складывая, приводя подобные слагаемые, для кинетической энергии (2.382) центра масс будем иметь

$$T_{ц.м.} = \frac{ml^2}{2} \Bigg(\Big(\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi\Big)^2 +$$

$$+\left(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi\right)^2+\dot\theta^2\sin^2\theta\Big)=$$

$$=\frac{ml^2}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right). \qquad (2.389)$$

Кинетическая энергия вращательного движения с учетом (2.381) может быть записана как

$$T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}J_{ij}\,\omega_i\omega_j=\frac{1}{2}\,J_1\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\frac{1}{2}\,J_3\omega_3^2, \qquad (2.390)$$

где $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$ — проекции вектора угловой скорости волчка на оси системы координат $x'y'z'$, жестко связанной с ним. Они могут быть выражены через углы Эйлера $\theta$, $\varphi$, $\psi$ с помощью кинематических уравнений Эйлера:

$$\omega_1\equiv\omega_{x'}=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi, \qquad (2.391)$$

$$\omega_2\equiv\omega_{y'}=-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \qquad (2.392)$$

$$\omega_3\equiv\omega_{z'}=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta. \qquad (2.393)$$

Подставляя в (2.390), будем иметь:

$$T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}\,J_1\left(\left(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\right)^2+\left(-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\sin\theta\cos\psi\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,J_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2=\frac{1}{2}\,J_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\,J_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2. \qquad (2.394)$$

Объединяя с (2.389), для кинетической энергии волчка получим выражение:

$$T=\frac{1}{2}\,J_1'\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\,J_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2, \qquad (2.395)$$

где введено обозначение

$$J_1'=J_1+ml^2. \qquad (2.396)$$

Потенциальная энергия волчка в вертикальном однородном поле тяготения определяется положением его центра масс (2.384):

$$U=mgy_{\text{ц.м.}}=mgl\cos\theta. \qquad (2.397)$$

Как следствие, для функции Лагранжа волчка будем иметь:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,J_1'\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}\,J_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta. \qquad (2.398)$$

Закон движения волчка найдем методом интегралов движения. Поскольку лагранжиан не зависит явно от времени $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0\right)$, интегралом движения является обобщенная энергия

$$\begin{aligned} E &= \dot\theta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} + \dot\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} + \dot\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2}\,J_1'\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}\,J_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta = \text{const}. \qquad (2.399) \end{aligned}$$

Обобщенные координаты $\varphi$ и $\psi$ являются циклическими $\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0\right)$, стало быть, соответствующие им обобщенные импульсы $p_\varphi$ и $p_\psi$ сохраняют свои значения:

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = J_1'\dot\varphi\sin^2\theta + J_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)\cos\theta = \text{const}, \qquad (2.400)$$

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = J_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = \text{const}. \qquad (2.401)$$

Как обычно, значения констант $E$, $p_\varphi$ и $p_\psi$ могут быть найдены из начальных условий полагая $t = t_0$ в равенствах (2.399), (2.400) и (2.401), их определяющих.

Найденные три интеграла движения для рассматриваемой механической системы с тремя степенями свободы позволяют найти закон движения в квадратурах. В самом деле, выражая из (2.401)

$$\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = \frac{p_\psi}{J_3} \qquad (2.402)$$

и подставляя в (2.400), найдем:

$$p_\varphi = J_1'\dot\varphi\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta, \qquad (2.403)$$

откуда выражаем обобщенную скорость $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}. \qquad (2.404)$$

Подставляя (2.402) и (2.404) в выражение (2.399) для обобщенной энергии, получим дифференциальное уравнение относительно одной обобщенной координаты $\theta$:

$$E = \frac{1}{2}\,J_1'\dot{\theta}^2 + \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2J_3} + mgl\cos\theta, \qquad (2.405)$$

откуда находим:

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{J_1'}\left(E - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \frac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)}. \qquad (2.406)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\theta = \theta(t)$:

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{J_1'}\left(E - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \frac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)}} \qquad (2.407)$$

Рассматривая отношение обобщенных скоростей $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ с учетом полученных ранее соотношений (2.404) и (2.406)

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{\frac{2}{J_1'}\left(E - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \frac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)}}, \qquad (2.408)$$

после разделения переменных получаем квадратуру, которая определяет зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta\,\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}\,\times$$
$$\times\left(\frac{2}{J_1'}\left(E - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \frac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)\right)^{-1/2} \qquad (2.409)$$

И, наконец, записывая отношение обобщенных скоростей $\dot\psi$ и $\dot\theta$ (при этом $\dot\psi$ выражаем из соотношения (2.402), куда подставляем равенство (2.404), определяющее обобщенную скорость $\dot\varphi$)

$$\frac{\dot\psi}{\dot\theta} \equiv \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\dfrac{p_\psi}{J_3} - \dot\varphi\cos\theta}{d\theta} =$$

$$= \frac{\dfrac{p_\psi}{J_3} - \left(\dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}\right)\cos\theta}{\pm\sqrt{\dfrac{2}{J_1'}\left(E - \dfrac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \dfrac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)}}, \quad (2.410)$$

после разделения переменных, найдем третью квадратуру, определяющую зависимость $\psi = \psi(\theta)$:

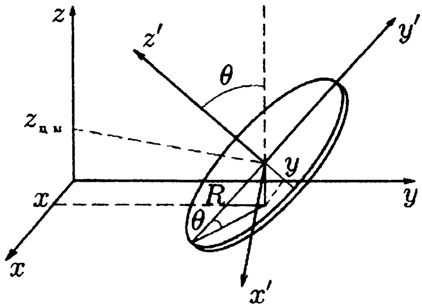
$$\psi - \psi_0 = \pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta\left(\dfrac{p_\psi}{J_3} - \dfrac{\cos\theta}{J_1'\sin^2\theta}\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{J_1'}\left(E - \dfrac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_1'\sin^2\theta} - \dfrac{p_\psi^2}{2J_3} - mgl\cos\theta\right)}}. \quad (2.411)$$

Соотношения (2.407), (2.409) и (2.411) определяют закон движения волчка в квадратурах.

**Задача 2.8.3.** Монета массой $m$ и радиуса $R$ может двигаться произвольным образом по горизонтальной поверхности. Построить лагранжиан монеты и найти закон ее движения в квадратурах. Главные моменты инерции монеты $J_1 = J_2 = J_0$ и $J_3 = J$.

**Решение.**

На движение монеты наложено единственное ограничение: ее нижняя точка не должна отрываться от горизонтальной поверхности, имея возможность перемещаться лишь по горизонтальной поверхности. Поэтому из шести степеней свободы, максимального числа степеней свободы произвольного твердого тела, остаются только пять. В качестве обобщенных координат выберем координаты центра монеты в горизонтальной плоскости $x_{\text{ц.м.}} \equiv x$, $y_{\text{ц.м.}} \equiv y$ и три угла Эйлера $\theta$, $\varphi$ и $\psi$. При этом направление осей неподвижной $xyz$ и жестко связанной с монетой (с началом в центре монеты) $x'y'z'$ систем координат выберем так, как показано на рисунке (оси $x'$, $y'$ лежат в плоскости монеты, а ось $z'$ перпендикулярна ей).




Поскольку координата $z_{\text{ц.м.}}$, как несложно увидеть из рисунка,

$$z_{\text{ц.м.}} = R\sin\theta, \tag{2.412}$$

то кинетическая энергия движения центра масс

$$T_{\text{ц.м.}} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2_{\text{ц.м.}} + \dot{y}^2_{\text{ц.м.}} + \dot{z}^2_{\text{ц.м.}}\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right). \tag{2.413}$$

Так как оси выбранной нами системы координат, жестко связанной с монетой, совпадают с главными осями инерции, тензор инерции в этой системе координат диагонален, так что диагональные элементы

$$J_{11} = J_{22} = J_0, \qquad J_{33} = J.$$

Поэтому кинетическая энергия вращательного движения монеты вокруг оси, проходящей через центр масс, может быть записана как:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}\,\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\,J_0\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{1}{2}\,J\omega_3^2, \tag{2.414}$$

где компоненты $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$ вектора угловой скорости вдоль осей системы координат $x'y'z'$ могут быть стандартно выражены через углы Эйлера в соответствии с равенствами (2.391), (2.392) и (2.393) из предыдущей задачи, так что, по аналогии с (2.394),

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\, J_0\Big(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\Big) + \frac{1}{2}\, J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2. \qquad (2.415)$$

Как следствие, для полной кинетической энергии монеты будем иметь:

$$T = T_{\text{ц.м.}} + T_{\text{вр}} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\Big) + \\ + \frac{1}{2}\, J_0\Big(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\Big) + \frac{1}{2}\, J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2. \qquad (2.416)$$

Ее потенциальная энергия:

$$U = mgz_{\text{ц.м.}} = mgR\sin\theta. \qquad (2.417)$$

Стало быть, лагранжиан монеты

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\Big) + \frac{1}{2}\, J_0\Big(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\Big) + \\ + \frac{1}{2}\, J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - mgR\sin\theta. \qquad (2.418)$$

Закон движения монеты найдем используя метод интегралов движения. Поскольку лагранжиан не зависит явно от времени, а обобщенные координаты $x$, $y$, $\varphi$ и $\psi$ являются циклическими, то интегралами движения являются обобщенная энергия $E$ и соответствующие перечисленным координатам обобщенные импульсы $p_x$, $p_y$, $p_\varphi$ и $p_\psi$:

$$E = \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} + \dot{\theta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} + \dot{\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} + \dot{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \mathcal{L} = \\ = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\Big) + \frac{1}{2}\, J_0\Big(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\Big) + \\ + \frac{1}{2}\, J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + mgR\sin\theta = \text{const}, \qquad (2.419)$$

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} = \text{const}, \qquad (2.420)$$

$$p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} = \text{const}, \qquad (2.421)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = J_0\dot{\varphi}\sin^2\theta + J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\cos\theta = \text{const}, \qquad (2.422)$$

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = J\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) = \text{const}. \qquad (2.423)$$

Значения этих интегралов движения однозначно определяется начальными условиями.

Равенства (2.420) и (2.421) моментально интегрируются, что позволяет найти явные зависимости от времени $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$x(t) = \frac{p_x}{m}t + x_0, \tag{2.424}$$

$$y(t) = \frac{p_y}{m}t + y_0. \tag{2.425}$$

С учетом равенства (2.423) соотношение (2.422) может быть записано в виде:

$$p_\varphi = J_0\dot{\varphi}\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta, \tag{2.426}$$

откуда выразим обобщенную скорость $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_0\sin^2\theta}. \tag{2.427}$$

Тогда, выражая из соотношения (2.423) обобщенную скорость $\dot{\psi}$ с учетом последнего равенства, имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{J} - \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{p_\psi}{J} - \frac{\cos\theta}{J_0\sin^2\theta}\Big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\Big). \tag{2.428}$$

Подставляя $\dot{x}$ и $\dot{y}$, выраженные соотвественно из (2.420) и (2.421), а также выражения (2.427) и (2.428), в обобщенную энергию (2.419), получим дифференциальное уравнение относительно одной обобщенной координаты $\theta$:

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\Big(J_0 + mR^2\cos^2\theta\Big) + \frac{\Big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\Big)^2}{2J_0\sin^2\theta} + mgR\sin\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{p_\psi^2}{J} + \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m}\right), \tag{2.429}$$

откуда находим

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} =$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2}{J_0 + mR^2\cos^2\theta}\left(E' - \frac{\Big(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\Big)^2}{2J_0\sin^2\theta} - mgR\sin\theta\right)}, \tag{2.430}$$

где с целью сокращения записей введено обозначение

$$E' = E - \frac{1}{2}\left(\frac{p_\psi^2}{J} + \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m}\right). \tag{2.431}$$

Разделяя переменные, находим квадратуру, определяющую неявную зависимость $\theta = \theta(t)$:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta \sqrt{\frac{J_0 + mR^2\cos^2\theta}{2\left(E' - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_0\sin^2\theta} - mgR\sin\theta\right)}}. \tag{2.432}$$

Рассматривая далее отношение обобщенных скоростей $\dot\varphi$ и $\dot\theta$ с учетом соотношений (2.427) и (2.430)

$$\frac{\dot\varphi}{\dot\theta} \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} == \frac{\dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_0\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{\dfrac{2}{J_0 + mR^2\cos^2\theta}\left(E' - \dfrac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_0\sin^2\theta} - mgR\sin\theta\right)}},$$

после разделения переменных получаем квадратуру, которая определяет неявную зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta\, \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{J_0\sin^2\theta} \times$$
$$\times \left(\frac{2}{J_0 + mR^2\cos^2\theta}\left(E' - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_0\sin^2\theta} - mgR\sin\theta\right)\right)^{-1/2} \tag{2.433}$$

Наконец, вычисляя отношение обобщенных скоростей $\dot\psi$ и $\dot\theta$, согласно равенствам (2.428) и (2.430)

$$\frac{\dot\psi}{\dot\theta} \equiv \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\dfrac{p_\psi}{J} - \dfrac{\cos\theta}{J_0\sin^2\theta}\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{J_0 + mR^2\cos^2\theta}\left(E' - \dfrac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2J_0\sin^2\theta} - mgR\sin\theta\right)}}.$$

Разделяя переменные, находим третью квадратуру, определяющую неявную зависимость $\psi = \psi(\theta)$:

$$\psi - \psi_0 = \pm \int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta \left( \frac{p_\psi}{J} - \frac{\cos\theta}{J_0 \sin^2\theta}\Big(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\Big) \right) \times$$

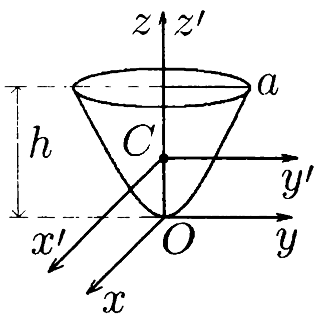
$$\times \left( \frac{2}{J_0 + mR^2 \cos^2\theta} \left( E' - \frac{\Big(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\Big)^2}{2J_0 \sin^2\theta} - mgR\sin\theta \right) \right)^{-1/2} \qquad (2.434)$$

Соотношения (2.424), (2.425), (2.432), (2.433) и (2.434) определяют закон движения монеты.

**Задача 2.8.4.** Определить моменты инерции однородного параболоида вращения высотой $h$ и радиусом $a$ плоской поверхности в системе координат с началом в центре масс.

**Решение.**

Сначала нам удобней будет подсчитать компоненты тензора инерции в системе координат с началом в вершине параболоида.




Как известно, уравнение параболоида в этой системе координат может быть записано в виде

$$z = C\Big(x^2 + y^2\Big).$$

Коэффициент $C$ найдем из данного в условии задачи размера параболоида: при $x^2 + y^2 = C^2$ (уравнение окружности плоской его поверхности) координата $z = h$, то есть

$$C = \frac{h}{a^2}.$$

Таким образом, уравнение параболоида

$$z = \frac{h}{a^2}\left(x^2 + y^2\right) \tag{2.435}$$

Поскольку ось $z$ мы направили вдоль оси симметрии параболоида, тензор инерции $J_{ij}$

$$J_{ij} = \int dm\left(\vec{r}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) \tag{2.436}$$

будет диагональным ($J_{ij} = 0$ для $i \neq j$).

Элемент массы $dm$ удобно записать через элемент объема $dV$:

$$dm = \rho_m \, dV, \tag{2.437}$$

где $\rho_m$ — объемная плотность параболоида. Его, в свою очередь, запишем в цилиндрических координатах:

$$dV = dx\,dy\,dz = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)}\,d\rho d\varphi dz \tag{2.438}$$

с якобианом перехода от декартовых координат к цилиндрическим

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho. \tag{2.439}$$

То есть

$$dm = \rho_m\,\rho d\rho d\varphi dz. \tag{2.440}$$

причем $\quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h.$

Напомним, что связь декартовых координат $x$, $y$ с цилиндрическими координатами имеет вид:

$$x = \rho\cos\varphi, \tag{2.441}$$

$$y = \rho\sin\varphi. \tag{2.442}$$

Полагая в (2.436) значения индексов $i = j = 1$, находим

$$J_{11} = \int dm\Big(\vec{r}^{\,2} - x^2\Big) \equiv \int dm\Big(y^2 + z^2\Big). \qquad (2.443)$$

Подставляя сюда соотношения (2.440) и (2.442), запишем

$$J_{11} = \rho_m \int \rho d\rho d\varphi dz\Big(\rho^2 \sin^2\varphi + z^2\Big). \qquad (2.444)$$

причем заметим, что для значений координаты $z$ в пределах $0 \le z \le h$ координата $\rho$ пробегает значения в пределах $0 \le \rho \le a\sqrt{z/h}$, то есть, правильно расставляя пределы интегрирования, приходим к необходимости вычисления следующего интеграла:

$$J_{11} = \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho\Big(\rho^2 \sin^2\varphi + z^2\Big), \qquad (2.445)$$

«Внутренний» интеграл по координате $\rho$

$$\int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho\Big(\rho^2 \sin^2\varphi + z^2\Big) = \left(\frac{1}{4}\,\rho^4 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\,z^2\rho^2\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{z/h}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{a^4}{h^2}\,z^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{h} z^3 \rho^2.$$

Тогда

$$J_{11} = \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \left(\frac{1}{4}\,\frac{a^4}{h^2}\,z^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{h} z^3\right). \qquad (2.446)$$

Вычисляя интеграл по координате $z$, имеем:

$$J_{11} = \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{12}\,\frac{a^4}{h^2}\,z^3 \sin^2\varphi + \frac{1}{8}\,\frac{a^2}{h} z^4\right)\Bigg|_{z=0}^{z=h} =$$

$$= \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{12}\,a^4\,h \sin^2\varphi + \frac{1}{8}\,a^2 h^3\right). \qquad (2.447)$$

Наконец, вычисляя последний интеграл по углу $\varphi$, получим:

$$J_{11} = \rho_m \left(\frac{1}{24}\, a^4\, h\Big(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big) + \frac{1}{8}\, a^2 h^3 \varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\rho_m \pi a^2 h \left(\frac{1}{3}a^2 + h^2\right). \qquad (2.448)$$

Для нахождения объемной плотности $\rho_m$ вычислим объем параболоида:

$$V = \int dV = \int dx\, dy\, dz = \int \rho d\rho\, d\varphi\, dz \equiv \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot h \cdot \frac{1}{2}\,\rho^2 \Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{z/h}} = \frac{1}{2}\,\pi a^2 h. \qquad (2.449)$$

Поэтому

$$\rho_m = \frac{M}{V} = \frac{2M}{\pi a^2 h}, \qquad (2.450)$$

где $M$ — масса параболоида.

Подставляя (2.450) в (2.448), окончательно получаем для компоненты $J_{11}$ тензора инерции следующее выражение:

$$J_{11} = \frac{1}{2}\, M \left(\frac{1}{3}a^2 + h^2\right). \qquad (2.451)$$

Полагая значения индексов $i = j = 2$ в (2.436), для компоненты $J_{22}$ получим интеграл

$$J_{22} = \int dm\Big(\vec{r}^{\,2} - y^2\Big) = \int dm\Big(x^2 + z^2\Big) =$$

$$= \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho\Big(\rho^2 \cos^2\varphi + z^2\Big). \qquad (2.452)$$

который, как несложно сообразить, приводит к тому же результату, что и интеграл (2.445), а потому, так же как и компонента $J_{11}$,

$$J_{22} = \frac{1}{2}\, M \left(\frac{1}{3}a^2 + h^2\right). \qquad (2.453)$$

Наконец, полагая значения индексов $i = j = 3$ в (2.436), для компоненты $J_{33}$ будем иметь интеграл

$$J_{33} = \int dm\left(\vec{r}^2 - z^2\right) = \int dm\left(x^2 + y^2\right) = \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho \rho^2 =$$

$$= \rho_m \cdot 2\pi \cdot \int\limits_0^h dz \, \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{z/h}} = \frac{1}{2} \rho_m \pi \frac{a^4}{h^2} \int\limits_0^h z^2 dz = \frac{1}{6} \rho_m \pi a^4 h. \qquad (2.454)$$

Подставляя сюда выражение (2.450) для плотности $\rho_m$, окончательно запишем

$$J_{33} = \frac{1}{3} Ma^2. \qquad (2.455)$$

Теперь остается преобразовать найденные компоненты тензора инерции в систему координат $x'y'z'$ с началом в центре масс параболоида при помощи теоремы Штейнера. Но для этого необходимо знать, на сколько начало одной системы координат отстоит от начала другой. Другими словами, нам необходимо рассчитать положение центра масс параболоида в системе координат $xyz$. Совершенно очевидно, что его координаты

$$x_{\text{ц.м.}} = y_{\text{ц.м.}} = 0. \qquad (2.456)$$

А вот координату $z_{\text{ц.м.}}$ придется вычислять по определению:

$$z_{\text{ц.м.}} = \frac{1}{M} \int dm \, z = \frac{1}{M} \rho_m \int dV \, z = \frac{1}{M} \rho_m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{a\sqrt{z/h}} \rho d\rho \, z =$$

$$= \frac{1}{M} \rho_m \cdot 2\pi \cdot \int\limits_0^h dz \, z \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{z/h}} = \frac{\rho_m a^2 \pi}{Mh} \int\limits_0^h dz \, z^2 = \frac{\rho_m a^2 \pi h^2}{3M}. \qquad (2.457)$$

Подставляя в последнее равенство выражение для плотности $\rho_m$ согласно (2.450), окончательно запишем

$$z_{\text{ц.м.}} = \frac{2}{3} h. \qquad (2.458)$$

Другими словами, начало системы координат $x'y'z'$ отстоит от начала системы $xyz$ на вектор

$$\vec{a} = -\frac{2}{3} h \vec{e}_y \qquad (2.459)$$

(начало вектора находится в центре масс).

Согласно теореме Штейнера, компоненты тензора инерции $J_{ij}^{(c)}$ в системе координат с началом в центре масс могут быть найдены по компонентам тензора $J_{ij}$ в другой системе координат, начало которой отстоит от начала первой на вектор $\vec{a}$, по формуле:

$$J_{ij}^{(c)} = J_{ij} - M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right). \tag{2.460}$$

Поскольку компоненты вектора $a_1 = a_2 = 0$, то, очевидно, компонента $J_{11}^{(c)}$:

$$J_{11}^{(c)} = J_{11} - Ma^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{3}a^2 + h^2\right) - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \\ = \frac{1}{6}M\left(a^2 + \frac{1}{3}h^2\right). \tag{2.461}$$

Совершенно аналогично, компонента $J_{22}^{(c)}$:

$$J_{22}^{(c)} = J_{22} - Ma^2 = \frac{1}{6}M\left(a^2 + \frac{1}{3}h^2\right). \tag{2.462}$$

А компонента тензора инерции $J_{33}^{(c)}$:

$$J_{33}^{(c)} = J_{33} - M\left(a^2 - a_3^2\right) = J_{33} = \frac{1}{3}Ma^2. \tag{2.463}$$

# Глава 3

# Метод Гамильтона

## 3.1 Функция и уравнения Гамильтона

**Общие рекомендации.**

Для построения функции Гамильтона необходимо, как говорят, подвергнуть функцию Лагранжа преобразованию Лежандра. При этом надо помнить о том, что гамильтонов формализм развивается на множестве так называемых канонических переменных $p_i, q_i$ — обобщенных импульсов и обобщенных координат, функцией которых гамильтониан и является, поэтому необходимо проследить, чтобы все обобщенные скорости (в частности, фигурирующие в лагранжиане) были выражены через них и только через них. Так же как и в лагранжевом формализме, наличие сил трения никоим образом не отражается на виде функции Гамильтона. Поэтому, при построении гамильтониана диссипативных систем просто забываем про наличие таковых сил. О них необходимо вспомнить на этапе построения уравнений движения: силы трения дают о себе знать в правых частях одной из групп уравнений Гамильтона.

Необходимо всегда помнить, что по своему смыслу гамильтониан представляет собой обобщенную энергию системы, записанную в терминах канонических переменных.

**Задача 3.1.1.** Построить гамильтониан системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) + \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\dot\varphi.$$

**Решение.**

Перед тем как непосредственно провести преобразование Лежандра представим обобщенные скорости как функции канонических переменных. Для этого, используя заданную функцию Лагранжа, построим обобщенные импульсы, откуда и выразим обобщенные скорости через обобщенные импульсы о координаты.

Обобщенный импульс $p_r$:

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r} = m\dot r, \tag{3.1}$$

откуда

$$\dot r = \frac{p_r}{m}. \tag{3.2}$$

Обобщенный импульс $p_\theta$:

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = mr^2\dot\theta. \tag{3.3}$$

откуда

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}. \tag{3.4}$$

Обобщенный импульс $p_\varphi$:

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\dot\varphi + \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta, \tag{3.5}$$

откуда

$$\dot\varphi = \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right). \tag{3.6}$$

Теперь запишем преобразование Лежандра:

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot r + p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi - \mathcal{L} = \\ &= p_r\cdot\frac{p_r}{m} + p_\theta\cdot\frac{p_\theta}{mr^2} + p_\varphi\cdot\frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right) - \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставим сюда выражение для лагранжиана, заменяя в котором обобщенные скорости на выражения согласно равенствам (3.2), (3.4) и (3.6):

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right) - \frac{p_r^2}{2m} -$$

$$-\frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right)^2 -$$

$$-\frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\cdot\frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right). \tag{3.8}$$

Приводя очевидные подобные слагаемые, вынося общий множитель в третьем и последнем слагаемых, перепишем:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\theta\right)^2. \tag{3.9}$$

**Задача 3.1.2.** Построить лагранжиан системы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + mgz.$$

**Решение.**

Прежде чем проводить обратное преобразование Лежандра для построения функции Лагранжа, выразим обобщенные импульсы через обобщенные скорости и координаты на основе первой группы уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = \overline{1,s}). \tag{3.10}$$

Для нахождения обобщенного импульса $p_\rho$ запишем уравнение Гамильтона

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}. \tag{3.11}$$

откуда

$$p_\rho = m\dot{\rho}. \tag{3.12}$$

Аналогично из уравнения Гамильтона

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right) \tag{3.13}$$

находим

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2. \tag{3.14}$$

Наконец, из уравнения Гамильтона

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \tag{3.15}$$

следует, что

$$p_z = m\dot{z}. \tag{3.16}$$

Далее запишем обратное преобразование Лежандра:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - H = \\ &= m\dot{\rho}\cdot\dot{\rho} + \left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)\cdot\dot{\varphi} + m\dot{z}\cdot\dot{z} - H.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Подставим сюда заданный гамильтониан, заменяя в котором обобщенные импульсы согласно соотношениям (3.12), (3.14) и (3.16), будем иметь:

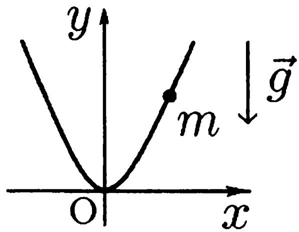
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= m\dot{\rho}^2 + \left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)\dot{\varphi} + m\dot{z}^2 - \frac{(m\dot{\rho})^2}{2m} - \\ &- \frac{1}{2m\rho^2}\left(\left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right) - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 + \frac{(m\dot{z})^2}{2m} - mgz \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\,\dot{\varphi} - mgz.\end{aligned} \tag{3.18}$$

**Задача 3.1.3.** Построить гамильтониан и составить уравнения Гамильтона бусинки массой $m$, нанизанной на спицу, изогнутую в форме параболы $y = ax^2$, и совершающей движение в вертикальной плоскости в однородном поле тяготения $\vec{g}$ под действием силы сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta\vec{v}$.

**Решение.**

Очевидно, что данная система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем абсциссу $x$ бусинки.

Для построения гамильтониана необходимо сначала построить функцию Лагранжа, а затем подвергнуть ее преобразованию Лежандра.




Кинетическая энергия бусики, совершающей плоское движение в плоскости $xy$,

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \tag{3.19}$$

Дифференцируя урвнение связи, коим является уравнение параболы $y = ax^2$,

$$\dot{y} = 2ax\dot{x}, \tag{3.20}$$

находим

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}\left(1 + 4a^2x^2\right). \tag{3.21}$$

Потенциальная энергия бусинки в однородном поле тяготения $\vec{g} = -g\vec{e}_y$

$$U = mgy = mgax^2. \tag{3.22}$$

Поэтому лагранжиан рассматриваемой системы, как разность кинетической и потенциальной энергий,

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2}\left(1 + 4a^2x^2\right) - mgax^2. \tag{3.23}$$

Отметим еще раз, что наличие силы сопротивления, действующей на бусинку при движении, никак не отражается ни на виде лагранжиана, ни на виде гамильтониана.

Подвергнем построенную функцию Лагранжа (3.23) преобразованию Лежандра. Для этого выразим обобщенную скорость $\dot{x}$ через канонические переменные $p_x$; $x$. Обобщенный импульс, согласно определению,

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right), \tag{3.24}$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m\left(1 + 4a^2x^2\right)}. \tag{3.25}$$

Поэтому гамильтониан

$$H = p_x\dot{x} - \mathcal{L} = p_x \cdot \frac{p_x}{m\left(1 + 4a^2x^2\right)} - \frac{p_x^2}{2m\left(1 + 4a^2x^2\right)} + mgax^2 =$$

$$= \frac{p_x^2}{2m\left(1 + 4a^2x^2\right)} + mgax^2. \tag{3.26}$$

Далее построим обобщенную диссипативную силу $Q^d$, которая в уравнениях Гамильтона позволяет учесть действие на бусинку силы сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta\vec{v}$. Согласно определению (2.11),

$$Q^d = \vec{F}^d \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = F_x^d \frac{\partial x}{\partial x} + F_y^d \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{3.27}$$

С учетом уравнения связи $y = ax^2$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax.$$

Компоненты ньютоновой диссипативной силы с учетом (3.20)

$$\begin{aligned} F_x^d &= -\beta\dot{x}, \\ F_y^d &= -\beta\dot{y} = -2\beta ax\dot{x}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

Стало быть,

$$Q^d = -\beta\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right). \tag{3.29}$$

Однако, поскольку мы работаем в гамильтоновой формулировке, необходимо все физические величины выразить через канонические переменные. Принимая во внимание (3.25), перепишем обобщенную диссипативную силу

$$Q^d = -\frac{\beta}{m}p_x. \tag{3.30}$$

Тривиальное дифференцирование гамильтониана (3.26) позволяет записать систему уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x}, \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} + Q^d \end{cases} \tag{3.31}$$

в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p_x}{m\left(1 + 4a^2x^2\right)}, \\ \dot{p}_x = \dfrac{4a^2xp_x^2}{m\left(1 + 4a^2x^2\right)^2} - 2mgax - \dfrac{\beta}{m}p_x. \end{cases} \tag{3.32}$$

## 3.2 Скобки Пуассона

### Общие рекомендации.

Скобки Пуассона от двух функций канонических переменных можно всегда считать по определению, явно расписывая их определяющую сумму. Однако, если известен явный вид функций, часто технически более простым оказывается вычисление путем сведения исходной скобки

Пуассона к так называемым фундаментальным скобкам Пуассона. Это достигается применением основных свойств скобок Пуассона, таких как билинейность, некоммутативность и аналог правила Лейбница.

**Задача 3.2.1.** Вычислить скобку Пуассона для компонент момента импульса и импульса материальной точки $\{L_z, p_x\}$.

**Решение.**

Прежде чем приступить к вычислению скобки Пуассона, представим компоненту момента импульса $L_z$ в виде функции канонических переменных. Для этого векторное произведение радиус-вектора и импульса запишем в виде определителя и раскроем его разлагая по первой строке:

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x\left(yp_z - zp_y\right) + \vec{e}_y\left(zp_x - xp_z\right) + \vec{e}_z\left(xp_y - yp_x\right), \tag{3.33}$$

откуда находим

$$L_z = xp_y - yp_x. \tag{3.34}$$

Используя свойство линейности скобки Пуассона по первому аргументу, представим искомую скобку в виде суммы двух:

$$\{L_z, p_x\} = \{xp_y - yp_x, p_x\} = \{xp_y, p_x\} - \{yp_x, p_x\}.$$

Далее расписывая каждую из двух скобок по правилу Лейбница, сводим их к фундаментальным скобкам Пуассона:

$$\{L_z, p_x\} = x\{p_y, p_x\} + \{x, p_x\}p_y - y\{p_x, p_x\} - \{y, p_x\}p_x.$$

Нетривиальной оказывается только скобка во втором слагаемом:

$$\{x, p_x\} = -\{p_x, x\} = -1.$$

Таким образом,

$$\{L_z, p_x\} = -p_y.$$

**Задача 3.2.2.** Вычислить скобку Пуассона компонент момента импульса материальной точки $\{L_x, L_z\}$.

**Решение.**

Используя выражение (3.33), запишем аргументы искомой скобки Пуассона явным образом в виде функций канонических переменных:

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_z = xp_y - yp_x.$$

Используя свойство линейности по первому аргументу, запишем

$$\{L_x, L_z\} = \{yp_z - zp_y, xp_y - yp_x\} = \{yp_z, xp_y - yp_x\} - \\ - \{zp_y, xp_y - yp_x\}. \quad (3.35)$$

Используя свойство линейности по второму аргументу, каждую из двух появившихся скобок также распишем в виде суммы двух:

$$\{L_x, L_z\} = \{yp_z, xp_y\} - \{yp_z, yp_x\} - \{zp_y, xp_y\} + \{zp_y, yp_x\}. \quad (3.36)$$

Далее каждую из четырех скобок распишем по правилу Лейбница, сводя их к фундаментальным. Так при вычислении первой скобки сначала применим правило Лейбница для первого аргумента

$$\{yp_z, xp_y\} = y\{p_z, xp_y\} + \{y, xp_y\}p_z, \quad (3.37)$$

а затем в каждой из двух образовавшихся скобок — привило Лейбница для второго аргумента:

$$\{yp_z, xp_y\} = y\Big(x\{p_z, p_y\} + \{p_z, x\}p_y\Big) + \Big(x\{y, p_y\} + \{y, x\}p_y\Big)p_z. \quad (3.38)$$

Из четырех фундаментальных скобок Пуассона, к которым мы пришли, нетривиальной является лишь одна:

$$\{y, p_y\} = -\{p_y, y\} = -1.$$

Поэтому

$$\{yp_z, xp_y\} = -xp_z. \quad (3.39)$$

Аналогично расписываем оставшиеся три скобки в (3.36):

$$\{yp_z; yp_x\} = y\Big(y\{p_z, p_x\} + \{p_z; y\} p_x\Big) + \Big(y\{y; p_x\} + \\ + \{y, y\} p_x\Big)p_z = 0, \quad (3.40)$$

$$\{zp_y; xp_y\} = z\Big(x\{p_y, p_y\} + \{p_y; x\} p_y\Big) + \Big(x\{z, p_y\} + \\ + \{z, x\} p_y\Big)p_y = 0, \quad (3.41)$$

$$\{zp_y; yp_x\} = z\Big(y\{p_y, p_x\} + \{p_y, y\} p_x\Big) + \Big(y\{z, p_x\} + \\ + \{z, y\} p_x\Big)p_y = z\{p_y; y\} p_x = zp_x. \quad (3.42)$$

В итоге,

$$\{L_x; L_z\} = zp_x - xp_z = L_y. \quad (3.43)$$

**Задача 3.2.3.** Для классической частицы массой $m$, движущейся в произвольном электромагнитном поле, вычислить скобку Пуассона компонент вектора скорости $\{\dot{x}, \dot{y}\}$. Ответ выразить через напряженность магнитного поля.

**Решение.**

Представим компоненты вектора скорости классической частицы в виде функций канонических переменных. Для этого, например, вспомним, как выглядит ее функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - e\varphi. \quad (3.44)$$

где $\vec{A}$, $\varphi$ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Обобщенный импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (3.45)$$

откуда выражаем вектор скорости:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right). \quad (3.46)$$

Поэтому аргументы скобки Пуассона, которую нам предстоит подсчитать,

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right), \qquad \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{e}{c}A_y\right). \tag{3.47}$$

Используя свойство билинейности, представим искомую скобку Пуассона в виде суммы четырех:

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = \frac{1}{m^2}\left\{p_x - \frac{e}{c}A_x; p_y - \frac{e}{c}A_y\right\} =$$
$$= \frac{1}{m^2}\left(\{p_x, p_y\} - \frac{e}{c}\{p_x, A_y\} - \frac{e}{c}\{A_x, p_y\} + \left(\frac{e}{c}\right)^2\{A_x, A_y\}\right) \tag{3.48}$$

Скобка в первом слагаемом фундаментальна и равна нулю. Последняя скобка

$$\{A_x; A_y\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial A_x}{\partial p_i}\frac{\partial A_y}{\partial x_i} - \frac{\partial A_x}{\partial x_i}\frac{\partial A_y}{\partial p_i}\right) = 0, \tag{3.49}$$

поскольку векторный потенциал $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ не зависит от импульсов и потому производные

$$\frac{\partial A_x}{\partial p_i} = \frac{\partial A_y}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Скобку Пуассона во втором слагаемом в (3.48) распишем по определению:

$$\{p_x; A_y\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial p_x}{\partial p_i}\frac{\partial A_y}{\partial x_i} - \frac{\partial p_x}{\partial x_i}\frac{\partial A_y}{\partial p_i}\right) \tag{3.50}$$

Производная $\dfrac{\partial p_x}{\partial x_i} \equiv 0$ для всех значений $i = \overline{1,3}$. А производная $\dfrac{\partial p_x}{\partial p_i}$ отлична от нуля и равна единице лишь для $i = 1$. Поэтому из всей суммы по индексу $i$ «выживает» только одно слагаемое со значением индекса суммирования $i = 1$:

$$\{p_x. A_y\} = \frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_y}{\partial x}. \tag{3.51}$$

Совершенно аналогично, в скобке Пуассона в третьем слагаемом в (3.48)

$$\{A_x; p_y\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial A_x}{\partial p_i}\frac{\partial p_y}{\partial x_i} - \frac{\partial A_x}{\partial x_i}\frac{\partial p_y}{\partial p_i}\right) \tag{3.52}$$

производная также «выживает» только одно слагаемое со значением индекса суммирования $i = 2$:

$$\{A_x, p_y\} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\partial p_y}{\partial p_y} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{3.53}$$

Собирая все вместе, для искомой скобки Пуассона получаем:

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = -\frac{e}{cm^2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{3.54}$$

Вспоминая, что напряженность магнитного поля определяется ротором векторного потенциала,

$$\vec{H} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{3.55}$$

несложно сообразить, что разность производных компонент векторного потенциала в (3.54)

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = H_z. \tag{3.56}$$

Окончательно,

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = -\frac{e}{cm^2} H_z. \tag{3.57}$$

## 3.3 Интегралы движения в методе Гамильтона

**Общие рекомендации.**

Часто случается так, что в силу тех или иных причин непосредственное решение дифференциальных уравнений Гамильтона затруднено. Так же как и в лагранжевом, в гамильтоновом формализме на помощь может прийти метод интегралов движения: вместо того, чтобы решать систему дифференциальных уравнений движения, можно решать систему, составленную из интегралов движения. При этом система уравнений должна быть замкнутой: число уравнений должно совпадать с числом неизвестных обобщенных координат, нахождение которых как функции времени и является целью, то есть необходимо найти столько интегралов движения, каково число степеней свободы имеет рассматриваемая система тел. Однако интеграл движения в гамильтоновом формализме представляет собой функции канонических переменных (то есть обобщенных импульсов и координат), поэтому, чтобы превратить его в дифференциальное уравнение первого порядка только по обобщенным координатам, необходимо, используя уравнения Гамильтона, выразить обобщенные импульсы через обобщенные скорости и подставить в найденные интегралы движения.

Следует понимать, что существование интегралов движения является следствием уравнений движения Гамильтона, что и делает решение системы уравнений, составленной из интегралов движения, эквивалентным решению системы уравнений движения.

**Задача 3.3.1.** Найти закон движения в квадратурах для системы, которая описывается лагранжианом (a=const)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) - \frac{a\cos\varphi}{\rho^2}.$$

**Решение.**

Отметим, что используя известные на данный момент методы, по виду функции Лагранжа можно найти только один интеграл движения —

обобщенную энергию. Циклических координат нет, поэтому ни один из обобщенных импульсов не является интегралом движения. В то время как рассматриваемая система имеет две степени свободы. Однако следует допускать, что невозможность найти недостающий интеграл движения по виду функции Лагранжа, не означает вовсе, что он не существует.

Перейдем к гамильтонову описанию системы. Подвергнем заданный лагранжиан преобразованию Лежандра и построим функцию Гамильтона. Для этого сначала выразим обобщенные скорости через канонические переменные.

По определению, обобщенный импульс $p_\rho$:

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \tag{3.58}$$

откуда

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}. \tag{3.59}$$

Аналогично, обобщенный импульс $p_\varphi$:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \tag{3.60}$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}. \tag{3.61}$$

Функция Гамильтона

$$H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = p_\rho \cdot \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \cdot \frac{p_\varphi}{m\rho^2} -$$
$$-\frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_\rho}{m}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\right)^2\right) + \frac{a\cos\varphi}{\rho^2} = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{a\cos\varphi}{\rho^2}. \tag{3.62}$$

Построенная функция Гамильтона не зависит явно от времени $\left(\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$, и отсутствуют диссипации, она сама является интегралом движения:

$$H = \text{const} = E. \tag{3.63}$$

(Поскольку гамильтониан по своему смыслу есть обобщенная энергия системы, значение его имеет смысл обозначить константой $E$.) Для нахождения второго интеграла движения, перепишем функцию Гамильтона следующим образом:

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{p_\varphi^2}{2m} + a\cos\varphi\right). \tag{3.64}$$

Такая форма записи гамильтониана позволяет сделать вывод о том, что выражение, стоящее в скобках, есть функция пары канонически сопряженных переменных $p_\varphi$, $\varphi$

$$f(p_\varphi, \varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2m} + a\cos\varphi, \tag{3.65}$$

которые нигде более, как в ней, не встречаются в функции Гамильтона. В этом случае говорят о том, что имеет место факторизация зависимости функции Гамильтона от пары канонически сопряженных переменных $p_\varphi$, $\varphi$ в функцию $f$, а потому последняя является интегралом движения:

$$\frac{p_\varphi^2}{2m} + a\cos\varphi = C = \text{const}. \tag{3.66}$$

При этом сама функция Гамильтона, как интеграл движения, теперь может быть записана как

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{C}{\rho^2} = E. \tag{3.67}$$

Согласно общему алгоритму, далее необходимо, используя уравнения Гамильтона

$$\dot\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \tag{3.68}$$

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \tag{3.69}$$

выразить обобщенные импульсы $p_\rho$, $p_\varphi$ через обобщенные скорости $\dot\rho$, $\dot\varphi$ и переписать интегралы движения (3.66) и (3.67) в виде дифференциальных уравнений. Однако, поскольку исходно задача была сформулирована в лагранжевом формализме, и мы совершили переход к гамильтонову, необходимые нам выражения (3.58), (3.60) уже имеются. Подставляя их в найденные интегралы движения, получим систему:

$$\begin{cases} E = \dfrac{m\dot{\rho}^2}{2} + \dfrac{C}{\rho^2}; \\ C = \dfrac{1}{2}m\rho^4\dot{\varphi}^2 + a\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.70}$$

Выражая из первого уравнения $\dot{\rho}$

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{\rho^2}\right)} \tag{3.71}$$

и разделяя переменные, получим квадратуру, которая определяет неявную зависимость $\rho = \rho(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{C}{\rho^2}\right)}}. \tag{3.72}$$

Выразим из (3.66) обобщенную скорость $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\frac{2}{m}(C - a\cos\varphi)}. \tag{3.73}$$

Рассмотрим далее отношение обобщенных скоростей $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$, которое согласно равенствам (3.71) и (3.73) может быть записано как

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{C}{\rho^2}\right)}}{\pm\dfrac{1}{\rho^2}\sqrt{\dfrac{2}{m}(C - a\cos\varphi)}}. \tag{3.74}$$

Разделяя переменные, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\pm\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{C - a\cos\varphi}} = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E - \dfrac{C}{\rho^2}}} \tag{3.75}$$

Выбор знаков «$\pm$» осуществляется исходя из следующих соображений. Знак перед интегралом по углу $\varphi$ слева определяет знак обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ (3.73): знак «$+$» берется в том случае, когда при движении происходит возрастание угла $\varphi$, знак «$-$» — в случае уменьшения угла $\varphi$. Знак перед интегралом по переменной $\rho$ в правой части определяется знаком обобщенной скорости $\dot{\rho}$ (3.73): знак «$+$» необходимо поставить, если при движении координата $\rho$ возрастает, в противном случае ставим знак «$-$».

Зная координаты $\rho$, $\varphi$ и их первые производные $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ в начальный момент и полагая $t = t_0$ в равенствах (3.70), найдем однозначно значения констант $E$ и $C$.

Итак, закон движения системы с заданным лагранжианом определяется равенствами (3.72)(3.75).

**Задача 3.3.2.** Частица описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - a\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Найти закон движения частицы в квадратурах ($a = \text{const}$).

**Решение.**

Отметим, что по виду лагранжиана можно установить два интеграла движения: обобщенная энергия и обобщенный импульс, соответствующий циклической координате $\varphi$. Однако их нам недостаточно для нахождения закона движения системы с тремя степенями свободы.

Подвергнем лагранжиан преобразованию Лежандра и перейдем к гамильтонову описанию. Выразим обобщенные скорости через канонические переменные.

По определению, обобщенный импульс $p_r$:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{3.76}$$

откуда

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}. \tag{3.77}$$

Обобщенный импульс $p_\theta$:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta. \tag{3.78}$$

откуда

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}. \tag{3.79}$$

Аналогично, обобщенный импульс $p_\varphi$:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = mr^2 \sin^2\theta\dot\varphi - a\cos\theta, \tag{3.80}$$

откуда

$$\dot\varphi = \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big). \tag{3.81}$$

Функция Гамильтона

$$H = p_r\dot r + p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi - \mathcal{L} = p_r\cdot\frac{p_r}{m} + p_\theta\cdot\frac{p_\theta}{mr^2} + p_\varphi\cdot\frac{\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)}{mr^2\sin^2\theta} -$$

$$-\frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right) -$$

$$-a\left(\frac{\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)}{mr^2\sin^2\theta}\right)\cos\theta =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)^2. \tag{3.82}$$

Построенная функция Гамильтона явно не зависит от времени:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

а потому она сама является интегралом движения

$$H = \text{const} \equiv E. \tag{3.83}$$

Обобщенная координата $\varphi$ является циклической:

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

а потому обобщенный импульс $p_\varphi$, ей соответствующий, является интегралом движения:

$$p_\varphi = \mathrm{const} = P. \tag{3.84}$$

Перепишем гамильтониан следующим образом:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)^2\right). \tag{3.85}$$

Выражение, стоящее в скобках, может быть интерпретировано как функция двух пар канонических переменных $p_\theta, \theta$ и $p_\varphi, \varphi$ (координата $\varphi$, как уже было сказано, является циклической, потому эта функция реально не зависит от нее; тем не менее, не будет ошибкой, если мы скажем так), в которую факторизуется зависимость гамильтониана от этих канонических переменных:

$$f(p_\theta, \theta; p_\varphi, \varphi) = p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big)^2. \tag{3.86}$$

Действительно, вне этих скобок перечисленные канонические переменные в функции Гамильтона нигде не встречаются. Следовательно, эта функция и представляет собой необходимый нам третий интеграл движения:

$$f(p_\theta, \theta; p_\varphi, \varphi) = \mathrm{const} = C. \tag{3.87}$$

С учетом этого интеграл движения (3.83) перепишем как

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{C}{2mr^2} = E. \tag{3.88}$$

Далее перепишем систему из интегралов движения (3.88), (3.84) и (3.87) в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого, в самом общем случае, необходимо было бы из уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot r = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m}, \\[2ex] \dot\theta = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}, \\[2ex] \dot\varphi = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{1}{mr^2\sin^2\theta}\Big(p_\varphi + a\cos\theta\Big) \end{cases} \tag{3.89}$$

выразить обобщенные импульсы через обобщенные скорости. Однако эти выражения у нас уже получены при проведении преобразования Лежандра. С учетом (3.76), (3.78) и (3.80) перепишем интегралы движения (3.88), (3.84) и (3.87) в виде:

$$\begin{cases} E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{C}{2mr^2}. \\ P = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi} - a\cos\theta. \\ C = m^2r^4\dot{\theta}^2 + \dfrac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}. \end{cases} \tag{3.90}$$

Ну, а дальше решаем эту систему стандартным образом. Первое уравнение допускает разделение переменных и может быть сразу проинтегрировано. В самом деле, выразим из него $\dot{r}$:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{2mr^2}\right)}, \tag{3.91}$$

откуда после разделения переменных, получаем квадратуру, определяющую неявную зависимость $r = r(t)$:

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{C}{2mr^2}\right)}}. \tag{3.92}$$

Выразим из третьего уравнения системы (3.90) $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \pm\frac{1}{mr^2}\sqrt{C - \frac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}} \tag{3.93}$$

и рассмотрим отношение обобщенных скоростей $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$. В соответствии с равенствами (3.77) и (3.79),

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \equiv \frac{dr}{d\theta} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{C}{2mr^2}\right)}}{\pm\dfrac{1}{mr^2}\sqrt{C - \dfrac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}}. \tag{3.94}$$

Разделяя переменные, получаем квадратуру, которая позволяет найти неявную зависимость $r = r(\theta)$:

$$\pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{C - \dfrac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}} = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{mr^2\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{C}{2mr^2}\right)}}. \tag{3.95}$$

Наконец, рассмотрим отношение обобщенных скоростей $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$. Принимая во внимание соотношение (3.93) и выражая $\dot{\varphi}$ из второго уравнения системы (3.90),

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\pm\sqrt{C - \dfrac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}\left(P + a\cos\theta\right)}, \tag{3.96}$$

найдем третью квадратуру, позволяющую определить неявную зависимость $\theta = \theta(\varphi)$:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\left(P + a\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{C - \dfrac{\left(P + a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}}. \tag{3.97}$$

Значения констант $E$, $P$ и $C$ однозначно определяются начальными условиями: полагая $t = t_0$ в (3.90), находим их. Закон движения частицы определяется квадратурами (3.92), (3.95) и (3.97). Знаки «$\pm$» в этих выражениях перед интегралами по переменным $r$ и $\theta$ следует выбирать из следующих соображений. Знак перед интегралом по $r$ определяется знаком обобщенной скорости $\dot{r}$ в соответствии с равенством (3.91), поэтому в случае движения частицы в сторону увеличения обобщенной координаты $r$ перед интегралами по $r$ в равенствах (3.92) и (3.95) следует брать «$+$», в противном случае — знак «$-$». Аналогичным образом, знак перед интегралом по $\theta$ определяется знаком производной $\dot{\theta}$ согласно (3.93). Следовательно, если частица движется так, что при этом угол $\theta$ возрастает, перед интегралами по $\theta$ в полученных квадратурах, необходимо оставить знак «$+$», иначе — знак «$-$».

## 3.4 Канонические преобразования

### Общие рекомендации.

Также как и в лагранжевом формализме, в методе Гамильтона успех и простота решения той или иной задачи может зависеть от выбора переменных, что часто приводит к необходимости совершения их преобразования. Поскольку в гамильтоновом формализме независимыми переменными являются не только обобщенные координаты, но и обобщенные импульсы, необходимо задавать закон преобразования и для координат и для импульсов, причем закон преобразования для одних автоматически не задает закон преобразования для других (в лагранжевом формализме дело обстоит иначе: задавая закон преобразования обобщенных координат, автоматически задается закон преобразования обобщенных скоростей, которые на пару с обобщенными координатами объявляются независимыми переменными в лагранжевом формализме). Переходя от одних переменных к другим, важным является необходимость сохранения вида уравнений движения -- уравнений Гамильтона, уже хотя бы потому, что заранее будет известна форма уравнений движения, а также будут действующими все методы, развитые на базе канонической формы уравнений Гамильтона (например, метод интегралов движения). Чтобы этого добиться, имеет смысл рассматривать только те преобразования канонических переменных, которые в определенном смысле согласованы. Такие преобразования называются каноническими. Согласованность законов преобразования обобщенных координат и импульсов выражается выполнением ряда требований, заложенных в две теоремы: необходимое и достаточное условие каноничности и критерий каноничности.

Необходимое и достаточное условие каноничности утверждает, что для всякого канонического преобразования существует хотя бы одна из четырех возможных производящих функций, удовлетворяющих опредленным соотношениям (формулам канонических преобразований). Наоборот, каждая производящая функция соответствует строго определенному закону канонического преобразования. При нахождении производящей функции одного из четырех классов прежде всего необходимо проверить условие ее существования (в виде неравенства нулю гессиана — определителя, составленного из частных производных -- своего для каждого класса производящих функций), чтобы не тратить время и силы на поиски решения системы уравнений для производящей функции в случае, если таковая все же не существует.

Знание производящей функции позволяет найти вид «новой» функции Гамильтона — гамильтониана исследуемой системы в «новых» канонических переменных. Тем самым, подбирая то или иное каноническое преобразование, можно повлиять на вид функции Гамильтона, например, пытаясь ее привести к максимально простому виду.

Критерий каноничности позволяет проверить, является ли данное преобразование канонических переменных каноническим без нахождения производящей функции. Для этого необходимо подсчитать ряд скобок Пуассона от «новых» каноническим переменных по «старым». При этом скобки Пуассона для двух любых «новых» импульсов или для двух «новых» координат должны быть равными нулю, а скобки Пуассона для всех пар канонически сопряженных «новых» импульса и координаты должны быть равны одной и той же константе, для канонически несопряженных — нулю. Дополнительным «бонусом» применения этого критерия является возможность найти валентность канонического преобразования.

**Задача 3.4.1.** Доказать, что преобразование $(p.q) \to (P, Q)$ является каноническим и найти его производящую функцию:

$$\begin{cases} P = q^{-4}\left(p^4 - \dfrac{1}{2}q^6\right), \\ Q = pq^{-1}. \end{cases}$$

**Решение.**

Для доказательства каноничности преобразования применим критерий каноничности. Для этого необходимо подсчитать скобки Пуассона всех «новых» канонических переменных, как функций «старых», по «старым» переменным. Скобки Пуассона

$$\Big\{P(p,q;t).P(p,q.t)\Big\}_{p,q} = 0, \qquad \Big\{Q(p,q,t),Q(p;q;t)\Big\}_{p,q} = 0.$$

в силу свойства некоммутативности. Подсчитаем скобку обобщенного импульса с координатой. По определению,

$$\Big\{P(p,q,t).Q(p,q;t)\Big\}_{p,q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} =$$

$$= \left(q^{-4} \cdot 4p^3\right)\left(-pq^{-2}\right) - \left(-4p^4q^{-5} - q\right) \cdot q^{-1} = 1. \qquad (3.98)$$

Поскольку в результате мы получили константу (а не функцию), отличную от нуля, согласно критерию каноничности, это означает, что, во-первых, заданное преобразование переменных является каноническим, и, во-вторых, валентность преобразования

$$c = 1.$$

Проверим условие существования производящей функции класса $F_1(Q, q, t)$. Должно выполняться требование:

$$\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) \neq 0.$$

В нашем случае данный гессиан сводится к частной производной

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = q^{-1} \neq 0.$$

что означает возможность объявить переменные $(Q, q)$ независимыми и построить на их множестве производящую функцию $F_1(Q, q, t)$. Найти ее можно путем интегрирования формул канонического преобразования, которые в общем случае для производящей функции класса $F_1$ имеют вид:

$$\begin{cases} cp_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \end{cases} \qquad (3.99)$$

При этом необходимо левые части этих равенств (неоднородности) выразить через независимые переменные $(Q, q)$. Используя заданный в условии задачи закон преобразования, находим:

$$p(Q, q) = Qq, \qquad P(Q, q) = Q^4 - \frac{1}{2}q^2.$$

Поэтому система принимает вид:

$$\begin{cases} Qq = \dfrac{\partial F_1}{\partial q}, \\ Q^4 - \dfrac{1}{2}q^2 = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q}. \end{cases} \qquad (3.100)$$

Интегрируя первое уравнение системы (при этом помним, что переменные $Q$ и $q$ не зависят друг от друга), находим

$$F_1(Q, q, t) = \frac{1}{2} Qq^2 + f_1(Q, t), \tag{3.101}$$

где $f_1(Q, t)$ — произвольная функция указанных переменных. Интегрирование второго уравнения системы (3.100) дает

$$F_1(Q, q, t) = \frac{1}{2} Qq^2 - \frac{1}{5} Q^5 + f_2(q, t). \tag{3.102}$$

с произвольной функцией $f_2(q, t)$.

Сравнивая (3.101) и (3.102), убеждаемся, что совпадения результатов для производящей функции можно добиться, положив

$$f_1(Q, t) = \frac{1}{5} Q^5 + g(t), \qquad f_2(q, t) = g(t),$$

где $g(t)$ — произвольная функция времени.

Таким образом, производящая функция искомого канонического преобразования

$$F_1(Q, q, t) = \frac{1}{2} Qq^2 - \frac{1}{5} Q^5 + g(t). \tag{3.103}$$

Для простоты можно положить $g(t) = 0$.

**Задача 3.4.2.** Подвергнуть одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

преобразованию $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} P = \dfrac{i}{\sqrt{2m\omega}} \Big(m\omega q - ip\Big) e^{-i\omega t}, \\ Q = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}} \Big(m\omega q + ip\Big) e^{i\omega t}. \end{cases} \tag{3.104}$$

Доказать, что преобразование является каноническим. Найти его производящую функцию. Построить «новый» гамильтониан $K$. Записать «новые» уравнения Гамильтона и их решить. Зная решения последних, записать решения «старых» уравнений Гамильтона.

**Решение.**

Для доказательства каноничности преобразования применим критерий каноничности. Скобки Пуассона для двух «новых» импульсов и для двух «новых» координат в силу свойства некоммутативности автоматически оказываются равными нулю:

$$\Big\{P(p,q,t), P(p,q,t)\Big\}_{p,q} = 0, \qquad \Big\{Q(p,q,t), Q(p,q,t)\Big\}_{p,q} = 0.$$

Скобка Пуассона для канонически сопряженной пары $P, Q$:

$$\Big\{P(p,q,t), Q(p,q,t)\Big\}_{p,q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\frac{m\omega e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} - \frac{im\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} = 1 \neq 0, \tag{3.105}$$

что означает, что заданное преобразование является каноническим и унивалентным (валентность $c = 1$). Согласно необходимому и достаточному условию каноничности, существует по крайней мере одна производящая функция. Условие существования производящей функции класса $F_1(Q, q, t)$

$$\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) \equiv \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} \neq 0$$

выполнено (в нашем одномерном случае гессиан сводится просто к частной производной). Для интегрирования формул канонического преобразования

$$\begin{cases} cp = \dfrac{\partial F_1}{\partial q}, \\[2ex] P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} \end{cases} \tag{3.106}$$

выразим из заданного в условии задачи закона преобразования переменные $P$, $p$, неоднородности уравнений, через переменные $Q$, $q$, которые считаются независимыми при нахождении производящей функции

$F_1(Q, q, t)$:

$$p(Q, q, t) = -i\left(Q\sqrt{2m\omega}e^{-i\omega t} - m\omega q\right), \qquad (3.107)$$

$$P(Q, q, t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(2m\omega q - \sqrt{2m\omega}Qe^{-i\omega t}\right). \qquad (3.108)$$

Тогда, интегрируя первое уравнение системы (3.106), получим:

$$F_1(Q, q, t) = \int p(Q, q, t)\, dq + f_1(Q, t) =$$
$$= -i\int dq\left(Q\sqrt{2m\omega}e^{-i\omega t} - m\omega q\right) + f_1(Q, t) =$$
$$= -i\left(Qq\sqrt{2m\omega}e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}m\omega q^2\right) + f_1(Q, t), \qquad (3.109)$$

где $f_1(Q, t)$ — произвольная функция.

Интегрирование второго уравнения в (3.106) дает:

$$F_1(Q, q, t) = -\int P(Q, q, t)\, dQ + f_2(q, t) =$$
$$= -\frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\int dQ\left(2m\omega q - \sqrt{2m\omega}Qe^{-i\omega t}\right) + f_2(q, t)$$
$$= -\frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(2m\omega Qq - \frac{1}{2}\sqrt{2m\omega}Q^2e^{-i\omega t}\right) + f_2(q, t). \qquad (3.110)$$

где $f_2(q, t)$ — произвольная функция.

Сравнивая (3.109) и (3.110), выбирая в качестве $f_1$ и $f_2$

$$f_1(Q, t) = \frac{i}{2}Q^2e^{-2i\omega t}, \qquad f_2(q, t) = \frac{i}{2}m\omega q^2,$$

находим производящую функцию:

$$F_1(Q, q, t) = -i\sqrt{2m\omega}\,Qq\,e^{-i\omega t} + \frac{i}{2}m\omega q^2 + \frac{i}{2}Q^2e^{-2i\omega t}. \qquad (3.111)$$

Для нахождения «новой» функции Гамильтона $K$ воспользуемся соотношением

$$K = cH + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \qquad (3.112)$$

где предполагается, что все слагаемые в правой части в конечном итоге будут выражены через «новые» канонические переменные $P, Q$ с помощью заданного закона канонического преобразования.

Дифференцируя равенство (3.111) по времени, находим:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\omega\sqrt{2m\omega}\,Qq\,e^{-i\omega t} + \omega\,Q^2 e^{-2i\omega t}. \tag{3.113}$$

Подставим (3.107) в исходный гамильтониан, временно выразив его через переменные $Q, q$ для удобства сложения с только что подсчитанной частной производной:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -\frac{1}{2m}\left(Q\sqrt{2m\omega}e^{-i\omega t} - m\omega q\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 =$$
$$= -\omega\,Q^2 e^{-2i\omega t} + \omega\sqrt{2m\omega}\,Qq\,e^{-i\omega t}. \tag{3.114}$$

В итоге «новый» гамильтониан оказывается равным нулю:

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0. \tag{3.115}$$

С таким гамильтонианом «новые» уравнения Гамильтона выглядят максимально просто:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = 0, \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = 0 \end{cases} \tag{3.116}$$

и имеют решение в виде констант $Q_0$ и $P_0$:

$$Q(t) = Q_0, \qquad P(t) = P_0. \tag{3.117}$$

Зная закон движения системы (3.117) в «новых» канонических переменных, найдем закон движения в исходных, «старых», переменных. Для этого подставим решения «новых» уравнений Гамильтона в закон преобразования (3.104):

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{i}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega q - ip\right)e^{-i\omega t}, \\ Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega q + ip\right)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{3.118}$$

и выразим «старые» переменные $p, q$ как функции времени $t$:

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(Q_0 e^{-i\omega t} - iP_0 e^{i\omega t}\right), \\ p(t) = -i\sqrt{\dfrac{m\omega}{2}}\left(Q_0 e^{-i\omega t} + iP_0 e^{i\omega t}\right). \end{cases} \tag{3.119}$$

Отметим, в частности, что первое соотношение, действительно, представляет собой закон колебаний одномерного осциллятора, правда записанный в комплексном виде. Беря вещественную часть, для вещественной переменной $x$, описывающей движение осциллятора, получим, как и положено, линейную комбинацию $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$:

$$x(t) = \operatorname{Re} q(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \tag{3.120}$$

где вещественные константы $A$ и $B$ представляют собой определенные комбинации вещественных и мнимых частей комплексных констант $P_0$ и $Q_0$.

Данная задача на примере простейшей системы одномерного гармонического осциллятора демонстрирует всю суть метода канонических преобразований: всегда есть возможность перейти к «новым» каноническим переменным, совершая некоторое каноническое преобразование, подбирая его из соображений, чтобы «новый» гамильтониан выглядел максимально просто. Тогда, решив «новые», простые по виду и структуре, уравнения Гамильтона, используя явный вид преобразований канонических переменных, легко находим закон движения системы в терминах «старых» переменных.

## 3.5 Метод Гамильтона–Якоби

**Общие рекомендации.**

Метод Гамильтона-Якоби основан на идее о принципиальной возможности для любого гамильтониана подобрать некоторое каноническое преобразование, приводящее к «новому» гамильтониану $K = 0$.

Для нахождения закона движения методом Гамилльтона–Якоби необходимо:

1. Записать уравнение Гамильтона–Якоби.

2. Методом разделения переменных найти частное решение уравнения — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (переменные делятся суммой: производящая функция, как функция всех обобщенных

координат и времени, ищется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной).

3. Дифференцируя найденный полный интеграл по неаддитивным константам и приравнивая производную к другим произвольным константам, находим закон движения (явно или неявно). Значения введенных констант могут быть однозначно найдены из начальных условий.

4. Смысл и значения неаддитивных констант, возникающих при нахождении полного интеграла, определяют путем дифференцирования полного интеграла по обобщенным координатам и приравнивая полученные производные к соответствующим канонически сопряженным импульсам. Затем, выражая, по возможности, неаддитивные константы явным образом, полагают $t = t_0$ и, используя начальные условия, находят их значения.

Следует понимать, что успех применения метода Гамильтона–Якоби для нахождения закона движения системы определяется возможностью полного разделения переменных. То есть, к великому сожалению, данный метод не может быть применен к абсолютно произвольной системе! Однако всегда имеется шанс удовлетворить этому условию (условию полного разделения переменных), например, переходя к «новым» каноническим переменным, в которых, возможно, оно будет выполнено.

**Задача 3.5.1.** Методом Гамильтона–Якоби в сферических координатах найти закон движения в квадратурах для частицы, движущейся в центральном поле $U(r)$.

**Решение.**

Лагранжиан частицы, движущейся в центральном поле $U(r)$ в сферических координатах, имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \tag{3.121}$$

Для проведения преобразования Лежандра выразим обобщенные скорости через импульсы. Для этого последние построим по определению:

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}, \tag{3.122}$$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \tag{3.123}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = mr^2 \sin^2\theta \dot\varphi, \tag{3.124}$$

откуда

$$\dot r = \frac{p_r}{m}, \tag{3.125}$$

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}, \tag{3.126}$$

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta}. \tag{3.127}$$

Тогда функция Гамильтона

$$H = p_r \dot r + p_\theta \dot\theta + p_\varphi \dot\varphi - \mathcal{L} = p_r \cdot \frac{p_r}{m} + p_\theta \cdot \frac{p_\theta}{mr^2} + p_\varphi \cdot \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta} -$$

$$-\frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right) + U(r) =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta} + U(r). \tag{3.128}$$

В уравнении Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q; t\right) = 0, \tag{3.129}$$

первый аргумент функции Гамильтона в виде частной производной означает, что в функции Гамильтона необходимо все обобщенные импульсы заменить на частные производные по соответствующим обобщенным координатам:

$$p_r \to \frac{\partial F}{\partial r}; \quad p_\theta \to \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad p_\varphi \to \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \tag{3.130}$$

В нашем случае уравнение Гамильтона–Якоби принимает вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + U(r) = 0. \tag{3.131}$$

Согласно теореме Якоби, для нахождения закона движения частицы, требуется найти частное решение этого дифференциального уравнения под названием полный интеграл. Это решение ищется методом разделения переменных. Представим функцию $F(t; r.\theta.\varphi)$ в виде суммы четырех функций одного аргумента:

$$F(t; r, \theta; \varphi) = T(t) + R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\varphi). \tag{3.132}$$

Подстановка в уравнение (3.131) дает:

$$T'(t)+\frac{1}{2m}\Big(R'(r)\Big)^2+\frac{1}{2mr^2}\Big(\Theta'(\theta)\Big)^2+\frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\Big(\Phi'(\varphi)\Big)^2+U(r)=0. \quad (3.133)$$

Здесь штрих означает производную функции одной переменной по ее аргументу.

Начнем далее последовательно отделять переменные $t, r, \theta, \varphi$ друг от друга. Для этого перепишем последнее равенство:

$$-T'(t)=\frac{1}{2m}\Big(R'(r)\Big)^2+\frac{1}{2mr^2}\Big(\Theta'(\theta)\Big)^2+ \\ +\frac{1}{mr^2\sin^2\theta}\Big(\Phi'(\varphi)\Big)^2+U(r)=\beta_1. \quad (3.134)$$

В левой части тем самым мы собрали всю зависимость от переменной $t$, правая часть зависит от всех остальных. Две функции разных и независимых аргументов равны друг другу при любых значениях их аргументов тогда и только тогда, когда обе они равны одной и той же постоянной. Так мы ввели неаддитивную константу $\beta_1$ и приходим к двум уравнениям:

$$T'(t)=-\beta_1; \quad (3.135)$$

$$\frac{1}{2m}\Big(R'(r)\Big)^2+\frac{1}{2mr^2}\left(\Big(\Theta'(\theta)\Big)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\Big(\Phi'(\varphi)\Big)^2\right)+U(r)=\beta_1. \quad (3.136)$$

Первое уравнение тривиально интегрируется:

$$T(t)=-\beta_1 t+C_1, \quad (3.137)$$

где $C_1$ — произвольная аддитивная константа. В уравнении (3.136) произведем отделение переменных $\theta, \varphi$ от $r$ переписав его следующим образом:

$$\Big(\Theta'(\theta)\Big)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\Big(\Phi'(\varphi)\Big)^2=2mr^2\left(\beta_1-\frac{1}{2m}\Big(R'(r)\Big)^2-U(r)\right)=\beta_2. \quad (3.138)$$

Левая часть равенства представляет собой функцию двух переменных $\theta, \varphi$, правая — функцию переменной $r$. Эти две функции независимых переменных равны друг другу, если каждая из них равна константе. Так мы вводим вторую неаддитивную константу $\beta_2$. В итоге получаем два уравнения:

$$\left(\Theta'(\theta)\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\Phi'(\varphi)\right)^2 = \beta_2, \tag{3.139}$$

$$2mr^2\left(\beta_1 - \frac{1}{2m}\left(R'(r)\right)^2 - U(r)\right) = \beta_2. \tag{3.140}$$

Последнее уравнение позволяет найти функцию $R(r)$:

$$R(r) = \pm\int dr\sqrt{2m\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)\right)} + C_2, \tag{3.141}$$

где $C_2$ — произвольная аддитивная константа.

Наконец, в уравнении (3.139) произведем отделение переменной $\theta$ от переменной $\varphi$, переписав его следующим образом:

$$\Phi'(\varphi) = \pm\left(\left(\beta_2 - \left(\Theta'(\theta)\right)^2\right)\sin^2\theta\right)^{1/2} = \beta_3. \tag{3.142}$$

И вновь мы обе части этого соотношения приравняли к новой неаддитивной константе $\beta_3$ вследствие равенства друг другу двух функций независимых аргументов $\theta$ и $\varphi$. Интегрируя возникающие два уравнения

$$\Phi'(\varphi) = \beta_3, \tag{3.143}$$

$$\left(\Theta'(\theta)\right)^2 + \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta} = \beta_2, \tag{3.144}$$

находим:

$$\Phi(\varphi) = \beta_3\varphi + C_3, \tag{3.145}$$

$$\Theta(\theta) = \pm\int d\theta\sqrt{\beta_2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}} + C_4, \tag{3.146}$$

где $C_3$, $C_4$ — произвольные аддитивные константы.

Собирая все вместе, объединяя четыре произвольных аддитивных константы $C_1$, $C_2$, $C_2$ и $C_4$ в одну $\beta_4$, находим полный интеграл (3.132) уравнения Гамильтона-Якоби

$$F(t, r, \theta, \varphi) = -\beta_1 t \pm \int dr\sqrt{2m\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)\right)} \pm \\ \pm\int d\theta\sqrt{\beta_2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}} + \beta_3\varphi + \beta_4. \tag{3.147}$$

Как и положено полному интегралу для системы с тремя степенями свободы, найденное решение зависит от трех неаддитивных констант $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ и одной аддитивной константы $\beta_4$. Последняя не оказывает влияния на динамику систему, поэтому зачастую ее просто не выписывают.

Прежде чем непосредственно находить закон движения, выясним смысл и найдем значения неаддитивных констант. Для этого, согласно теореме Якоби, необходимо вычислить частные производные от найденного полного интеграла по обобщенным координатам и приравнять результат дифференцирования соответсвующим канонически сопряженным обобщенным импульсам.

$$p_r = \frac{\partial F}{\partial r} = \pm\sqrt{2m\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)\right)}, \qquad (3.148)$$

$$p_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \pm\sqrt{\beta_2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}}, \qquad (3.149)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \beta_3, \qquad (3.150)$$

откуда, выражая неаддитивные константы, находим:

$$\beta_1 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\beta_2}{2mr^2} + U(r), \qquad (3.151)$$

$$\beta_2 = p_\theta^2 + \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}, \qquad (3.152)$$

$$\beta_3 = p_\varphi. \qquad (3.153)$$

Мы видим, что выписанные комбинации канонических переменных сохраняют свои значения со временем, то есть являются интегралами движения. Чтобы иметь возможность найти их значения, выразим обобщенные импульсы через обобщенные скорости на основе уравнений Гамильтона:

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad (3.154)$$

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad (3.155)$$

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}, \qquad (3.156)$$

в которых мы узнаем ранее уже полученные при проведении преобразования Лежандра выражения (3.125)–(3.127). Соответственно, обобщенные импульсы выражаются через обобщенные скорости согласно равенствам (3.122)–(3.124). Стало быть, неаддитивные константы

$$\beta_1 = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\beta_2}{2mr^2} + U(r), \tag{3.157}$$

$$\beta_2 = \left(mr^2\dot{\theta}\right)^2 + \frac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}, \tag{3.158}$$

$$\beta_3 = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}. \tag{3.159}$$

И вот теперь, полагая в этих равенствах $t = t_0$ и зная из начальных условий (которые в данной задаче явным образом не заданы, но они всегда подразумеваются!) значения обобщенных координат и обобщенных скоростей, мы сможем найти значения неаддитивных констант:

$$\beta_i = \beta_i\Big|_{t=t_0}. \tag{3.160}$$

Перейдем к нахождению закона движения. Согласно теореме Якоби, для этого необходимо результат дифференцирования полного интеграла по неаддитивным константам приравнять к другим произвольным константам, которые в дальнейшем могут быть найдены из начальных условий.

Вычислим производную от найденного полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби (3.147) по неаддитивной константе $\beta_1$, рассматривая зависимость его от $\beta_1$ как параметрическую, и приравняем результат к какой-то произвольной постоянной $\alpha_1$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_1} = -t \pm \int \frac{dr\,\sqrt{2m}}{2\sqrt{\beta_1 - \dfrac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)}} = \alpha_1, \tag{3.161}$$

Полученное соотношение уже представляет собой неявную зависимость координаты $r$ от времени $t$. Однако перепишем его несколько иначе, чтобы лишний раз не заниматься нахождением значения константы $\alpha_1$:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\beta_1 - \dfrac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)\right)}}. \tag{3.162}$$

Переход от (3.161) к (3.162) можно понимать так: константу $\alpha_1$ была разделена на две части. Первая есть $t_0$, а вторая представляет собой подстановку значения интеграла на нижнем пределе.

Далее вычислим производную от полного интеграла по константе $\beta_2$ и приравняем результат к произвольной константе $\alpha_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_2} = \pm \int \frac{dr\,\sqrt{2m}\left(-\dfrac{1}{2mr^2}\right)}{2\sqrt{\beta_1 - \dfrac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)}} \pm \int \frac{d\theta}{2\sqrt{\beta_2 - \dfrac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}}} = \alpha_2, \tag{3.163}$$

которую вновь разобъем на две части, каждую из которых представим как результат подстановки значений обоих интегралов на нижних пределах:

$$\pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\beta_1 - \dfrac{\beta_2}{2mr^2} - U(r)\right)}} = \pm \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta_2 - \dfrac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}}}. \tag{3.164}$$

Данная квадратура представляет собой неявную зависимость $r = r(\theta)$. Наконец, вычислим производную от полного интеграла по константе $\beta_3$ и приравняем результат к новой произвольной константе $\alpha_3$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_3} = \varphi \pm \int d\theta \frac{\left(-\dfrac{2\beta_3}{\sin^2\theta}\right)}{2\sqrt{\beta_2 - \dfrac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}}} = \alpha_2. \tag{3.165}$$

Разбивая константу $\alpha_3$ на две части: $\varphi_0$ и значение подстановки интеграла на нижнем пределе, запишем

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\beta_3}{\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta_2 - \dfrac{\beta_3^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{3.166}$$

что представляет собой зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$.

Соотношения (3.162), (3.164) и (3.166) задают закон движения частицы в квадратурах.

Отметим, что интеграл в соотношении (3.166) может быть легко вычислен, а получающееся выражение будет представлять собой уравнение плоскости, что говорит о том, как мы знаем, что движение в любом центральном поле является плоским.

Выбор знаков «$\pm$» в полученных квадратурах осуществляется стандартным образом и определяется исключительно направлением движения частицы.

**Задача 3.5.2.** Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1 - q_2} + \left(p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1 + q_2\right)\right).$$

Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы в квадратурах.

**Решение.**

Сразу скажем, что эту задачу мы не смогли бы решить методом интегралов движения, используя известные нам правила нахождения их по виду гамильтониана. В самом деле, по виду функции Гамильтона мы заключаем, что интегралами движения являются: сам гамильтониан (он не зависит явно от времени), а также функция

$$f(p_3, q_3) = p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}, \tag{3.167}$$

в которую факторизуется вся зависимость функции Гамильтона от пары канонически сопряженных переменных $p_3$, $q_3$. Однако этих двух интегралов для системы с тремя степени свободы недостаточно, чтобы найти закон движения. И как мы уже отмечали, невозможность найти интеграл движения по виду функции Гамильтона (или функции Лагранжа) не означает вовсе, что их больше не существует для данной системы. Сейчас мы увидим, как метод Гамильтона–Якоби воспроизведет этот недостающий интеграл движения весьма элегантным образом.

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{F}{\partial q_2}\right)^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2} +\right.$$

$$+\left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3}\right)^2+\frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1+q_2\right)\Bigg]=0. \quad (3.168)$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать методом разделения переменных, для чего представим функцию $F(q_1, q_2, q_3, t)$ в виде суммы четырех функций:

$$F(q_1, q_2, q_3, t)=T(t)+Q_1(q_1)+Q_2(q_2)+Q_3(q_3). \quad (3.169)$$

Результатом подстановки в уравнение (3.168) будет:

$$T'(t)+\frac{1}{2}\Bigg[\left((Q_1'(q_1))^2+(Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1-q_2}+$$
$$+\left((Q_3'(q_3))^2+\frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1+q_2\right)\Bigg]=0. \quad (3.170)$$

Переменная $t$ моментально отделяется:

$$-T'(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\left((Q_1'(q_1))^2+(Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1-q_2}+$$
$$+\left((Q_3'(q_3))^2+\frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1+q_2\right)\Bigg]=\beta_1, \quad (3.171)$$

откуда временная зависимость полного интеграла

$$T(t)=-\beta_1 t+C_1, \quad (3.172)$$

где $C_1$ — произвольная аддитивная константа.

В оставшемся уравнении

$$\frac{1}{2}\Bigg[\left((Q_1'(q_1))^2+(Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1-q_2}+$$
$$+\left((Q_3'(q_3))^2+\frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1+q_2\right)\Bigg]=\beta_1, \quad (3.173)$$

легко отделить переменную $q_3$, для чего перепишем его следующим образом:

$$(Q_3'(q_3))^2+\frac{1}{q_3^2}=$$
$$=\left[2\beta_1-\left((Q_1'(q_1))^2+(Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1-q_2}\right]\frac{1}{q_1+q_2}=\beta_2. \quad (3.174)$$

Следовательно, интегрируя первое уравнение (левая часть равна $\beta_2$),

$$Q_3(q_3) = \pm \int dq_3 \sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}} + C_2 \tag{3.175}$$

($C_2$ — произвольная постоянная).

Во втором уравнении в (3.190) (правая часть равна $\beta_2$) произведем разделение переменных $q_1$ и $q_2$, собирая в левой части все слагаемые, зависящие от первой, в левой — от второй координаты:

$$\left(Q_1'(q_1)\right)^2 - 2\beta_1 q_1 + \beta_2 q_1^2 = -\left(Q_2'(q_2)\right)^2 + \beta_2 q_2^2 - 2\beta_1 q_2 = \beta_3, \tag{3.176}$$

откуда находим функции $Q_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$:

$$Q_1(q_1) = \pm \int dq_1 \sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2} + C_3, \tag{3.177}$$

$$Q_2(q_2) = \pm \int dq_2 \sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2} + C_4. \tag{3.178}$$

В итоге, полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби будет иметь вид:

$$F(q_1, q_2, q_3, t) = -\beta_1 t \pm \int dq_1 \sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2} \pm$$
$$\pm \int dq_2 \sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2} \pm \int dq_3 \sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}} + \beta_4, \tag{3.179}$$

где аддитивная константа $\beta_4$ представляет собой сумму ранее введенных $C_1$, $C_2$, $C_3$ и $C_4$.

Закон движения найдем путем дифференцирования полного интеграла по неаддитивным константам и приравнивая результат к произвольным постоянным.

Дифференцирование по $\beta_1$ дает квадратуру, которая выражает неявную зависимость между переменными $t$, $q_1$ и $q_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_1} = -t \pm \int \frac{dq_1\, 2q_1}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm$$
$$\pm \int \frac{dq_2\,(-2q_2)}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} = \alpha_1, \tag{3.180}$$

которую тут же перепишем, разбив произвольную константу $\alpha_1$ на три части (одна представляет собой $t_0$, две другие — результат подстановки обоих интегралов на нижних пределах):

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1\, q_1}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \mp$$
$$\mp \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2\, q_2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}}. \quad (3.181)$$

Дифференцирование по неаддитивной константе $\beta_2$ приводит к квадратуре, выражающей неявную зависимость между тремя обобщенными координатами $q_1$, $q_2$ и $q_3$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_2} = \pm \int \frac{dq_1\,(-q_1^2)}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm \int \frac{dq_2\, q_2^2}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} \pm$$
$$\pm \int \frac{dq_3}{2\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}} = \alpha_2, \quad (3.182)$$

которую перепишем в виде, учитывающем начальные условия:

$$\pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1\, q_1^2}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} = \pm \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2\, q_2^2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} \pm$$
$$\pm \int\limits_{q_{03}}^{q_3} \frac{dq_3}{\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}}. \quad (3.183)$$

Наконец, дифференцирование по неаддитивной константе $\beta_3$ приводит к квадратуре, устанавливающей неявную зависимость между обобщенными координатами $q_1$ и $q_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_3} = \pm \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm \int \frac{dq_2(-1)}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} = \alpha_3. \quad (3.184)$$

Разбивая произвольную константу $\alpha_3$ на две части, представляющие подстановки интегралов на нижних пределах, запишем ее в форме:

$$\pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} = \pm \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}}. \quad (3.185)$$

Соотношения (3.181), (3.183) и (3.185) устанавливают закон движения системы в квадратурах.

Для полноты картины выясним смысл и получим выражения, позволяющие определить значения неаддитивных констант $\beta_1$, $\beta_2$ и $\beta_3$. Для этого последовательно продифференцируем найденный полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (3.179) по обобщенным координатам $q_1$, $q_2$ и $q_3$:

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = \pm\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}, \tag{3.186}$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = \pm\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}, \tag{3.187}$$

$$p_3 = \frac{\partial F}{\partial q_3} = \pm\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}, \tag{3.188}$$

откуда после нехитрых преобразований находим выражения для неаддитивных констант:

$$\beta_1 = \frac{\beta_2}{2}\left(q_1 + q_2\right) + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\left(q_1 + q_2\right)}, \tag{3.189}$$

$$\beta_2 = p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}, \tag{3.190}$$

$$\beta_3 = -\beta_1 q_1 q_2 + \frac{p_1^2 q_2 + p_2^2 q_1}{q_2 - q_1}. \tag{3.191}$$

Константа $\beta_2$, как несложно видеть, воспроизводит собой ранее упомянутый интеграл движения (3.167), который мы нашли по виду гамильтониана. С учетом (3.190) константа $\beta_1$ представляет собой гамильтониан системы, который также, как мы выяснили в самом начале решения, также является интегралом движения. Константа $\beta_3$, определяемая равенством (3.191), представляет собой новый, неизвестный нам интеграл движения, который мы не смогли найти ранее.

Чтобы иметь возможность найти значения интегралов движения (3.189)–(3.191), необходимо найти выражения для обобщенных импульсов $p_1$, $p_2$ и $p_3$, выразив их через обобщенные скорости и обобщенные координаты. Сделать это можно на основе уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{q_1 - q_2}, \tag{3.192}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{q_1 - q_2}, \tag{3.193}$$

$$\dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = p_3\left(q_1 + q_2\right). \tag{3.194}$$

откуда, выражая импульсы, находим:

$$p_1 = \left(q_1 - q_2\right)\dot{q}_1, \tag{3.195}$$

$$p_2 = \left(q_1 - q_2\right)\dot{q}_2; \tag{3.196}$$

$$p_3 = \frac{\dot{q}_3}{q_1 + q_2}. \tag{3.197}$$

Так что теперь, зная значения обобщенных координат $q_i(t_0)$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_i(t_0)$ в начальный времени, находим значения обобщенных импульсов $p_i(t_0)$ при $t = t_0$. Далее, полагая $t = t_0$ в соотношениях (3.189)–(3.191), найдем значения неаддитивных констант $\beta_i$.

## 3.6 Переменные «действие–угол». Адиабатические инварианты

**Общие рекомендации.**

Переменные «действие–угол» — это особые канонически сопряженные переменные, которые могут быть введены не для всякой системы. Система должна удовлетворять ряду требований, среди которых, в частности: совершение системой периодического движения, консервативность системы и возможность полного разделения переменных. Переход к этим каноническим переменным представляет собой каноническое унивалентное преобразование с производящей функцией, представляющей собой координатную часть полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Сама переменная «действие» дается интегралом по периоду изменения соответствующей координаты. Важной особенностью переменных «действие–угол», как канонических переменных, является то, что гамильтониан, записанный в этих переменных, зависит только от переменных «действие» и не зависит от переменных «угол».

В случае систем с медленно меняющимися параметрами переменные «действие» являются адиабатическими инвариантами, то есть сохраняют свои значения неизменными несмотря на незамкнутость системы. В этом случае переменные «действие», как адиабатические инварианты, представляют собой некоторые комбинации несохраняющих со временем свои значения энергии системы и меняющихся параметров.

Если в задаче речь идет о медленно меняющихся параметрах, то в первую очередь необходимо заняться вычислением переменных «действие», чтобы затем выразить через них энергию системы.

**Задача 3.6.1.** Используя переменные «действие–угол», найти собственную частоту одномерного гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

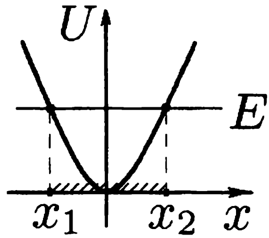
**Решение.**

Данная простейшая задача иллюстрирует возможность нахождения частот систем, совершающих периодическое движение. Согласно общей теории, искомые частоты даются частной производной гамильтониана $H(\mathcal{J})$, записанного в терминах переменных «действие-угол» (при этом гамильтониан оказывается зависящим только от переменных «действие») по переменным «действие» $\mathcal{J}_i$:

$$\omega_i = \frac{\partial H(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}_i}. \qquad (3.198)$$

Поэтому задача сводится к нахождению функции Гамильтона осциллятора, выраженного через переменную «действие». Последняя, как известно, определятся интегралом по периоду изменения координаты:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \oint p(x)dx. \qquad (3.199)$$




Для осмысления интеграла «с кружочком», проведем качественное исследование движения. График потенциала осциллятора

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

приведен на рисунке. Движение возможно при любом положительном значении энергии $E > 0$. Классически доступной областью движения является область

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

между двумя точками поворота $x_1$ и $x_2$. Поэтому интеграл «с кружочком» в (3.199) представляет собой сумму интегралов по двум областям: от $x_1$ до $x_2$ и обратно от $x_2$ и $x_1$, тем самым будет «покрыт» полный период изменения координаты $x$. Однако следует отметить, что выражения для импульса $p(x)$ как функции координаты несколько отличаются в этих двух областях. В самом деле, поскольку гамильтониан есть обобщенная энергия $E$, запишем

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \tag{3.200}$$

откуда

$$p = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)}. \tag{3.201}$$

Несложно понять, что знаки «$\pm$» в конечном счете определяются направлением движения. Действительно, согласно одному из уравнений Гамильтона,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \tag{3.202}$$

Поэтому знак «+» перед корнем в (3.201) соответствует движению в сторону увеличения координаты $x$ (в этом случае $\dot{x} > 0$), знак «−» соответствует движению в сторону уменьшения координаты $x$ (в этом случае $\dot{x} < 0$). Следовательно, представляя интеграл «с кружочком» в (3.199) в виде суммы интегралов по двум областям: от $x_1$ до $x_2$ и от $x_2$ до $x_1$,— в подынтегральном выражении для первой области следует для импульса записать

$$p = +\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)},$$

для второй —

$$p = -\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)}.$$

То есть переменная «действие»

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\left(+\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)} - \int_{x_2}^{x_1} dx\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)}. \tag{3.203}$$

Тем самым мы свели интеграл «с кружочком» к обычному определенному интегралу, который можно вычислять любым известным способом. К примеру, произведем его вычисление используя геометрический смысл определенного интеграла. Обозначим подынтегральную функцию

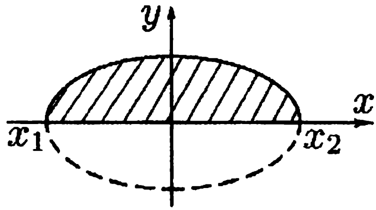
$$y = \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)}, \tag{3.204}$$

что эквивалентно можно переписать в виде уравнения эллипса:

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{2E}{m\omega_0^2}\right)} + \frac{y^2}{2mE} = 1 \tag{3.205}$$

с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}, \qquad b = \sqrt{2mE}. \tag{3.206}$$




Точки поворота $x_1$, $x_2$, пределы интегрирования в (3.203), определяются условием равенства потенциала и энегрии

$$E = U(x), \tag{3.207}$$

откуда

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}. \tag{3.208}$$

И поскольку $|x_1| = x_2 = a$, делаем вывод о том, что значение определенного интеграла в (3.203) численно оказывается равным площади полуэллипса:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}S_{\text{элл}} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi ab}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\cdot\sqrt{2mE} = \frac{E}{\omega_0}. \tag{3.209}$$

Отсюда находим, что

$$E = \mathcal{J}\omega_0. \tag{3.210}$$

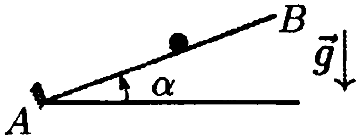
И поскольку обобщенная энергия и функция Гамильтона по смыслу одно и то же, получаем выражение для гамильтониана осциллятора, записанного через переменные «действие–угол» (реально, как видим, он оказывается зависящим только переменной «действие»):

$$H(\mathcal{J}) = \mathcal{J}\omega_0. \tag{3.211}$$

Поэтому собственная частота осциллятора согласно соотношению (3.198),

$$\omega = \frac{\partial H(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}} = \omega_0. \tag{3.212}$$

**Задача 3.6.2.** Шарик массой $m$, двигаясь по гладкой наклонной плоскости $AB$ в однородном поле тяжести $\vec{g}$, в нижней точке $A$ испытывает упругое столкновение со стенкой. Найти, как со временем изменяются энергия и максимальная высота подъема шарика при адиабатически медленном изменении угла $\alpha$ наклонной плоскости.

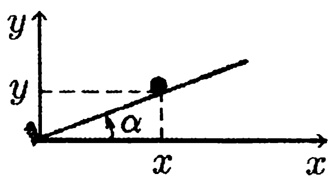



**Решение.**

Общая идея решения этой и подобных задач заключается в построении адиабатического инварианта, который представляет собой некоторую комбинацию меняющихся со временем энергии $E(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Именно отсюда представляется возможным нахождение закона изменения энергии со временем.

Можно было бы попытаться записать выражение для энергии шарика и, зная закон его движения, подставить зависимость его координат от времени в него. Однако это представляется практически невозможным, хотя бы потому, что мы не знаем явного закона изменения параметра $\alpha$ со временем, что затруднит решение дифференциального уравнения движения с целью явного нахождения закона движения.

Очевидно, система имеет одну степень свободы (положение шарика на наклонной плоскости можно однозначно задать, введя одну координату, поскольку угол наклона ее считается известным в любой момент времени: $\alpha(t)$ — заданная функция). И так как нам в дальнейшем придется находить максимальную высоту подъема, рациональным будет в качестве обобщенной координаты выбрать ординату $y$ шарика в системе координат, оси которой изображены на рисунке.



Для построения адиабатического инварианта, коим является переменная «действие»

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \oint p(y)dy, \tag{3.213}$$

нам необходимо найти обобщенный импульс $p$ как функцию обобщенной координаты $y$. Сделать это можно. например, построив лагранжиан системы.

Кинетическая энергия шарика, совершающего плоское движение,

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \tag{3.214}$$

Координату $x$ необходимо выразить через обобщенную координаты $y$. Из чисто геометрических соображений (см. рис.),

$$x = y\,\mathrm{ctg}\alpha. \tag{3.215}$$

Дифференцируя по времени,

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(y\,\mathrm{ctg}\alpha\right) = \dot{y}\,\mathrm{ctg}\alpha - y\dot{\alpha}\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{3.216}$$

Однако не стоит забывать, что угол $\alpha$ меняется со временем очень медленно, что позволяет считать второе слагаемое, содержащее $\dot{\alpha}$, ничтожно малым по сравнению со слагаемым, содержащим $\dot{y}$, тогда

$$\dot{x} \cong \dot{y}\,\mathrm{ctg}\alpha. \tag{3.217}$$

Сей факт позволяет считать медленно меняющиеся параметры фиксированными (константами) при построении лагранжиана системы. Вспоминать о том, что они все же изменяются со временем, необходимо при составлении уравнений движения по построенному лагранжиану.

Итак, кинетическая энергия шарика

$$T = \frac{m}{2}\dot{y}^2\left(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha\right) = \frac{m\dot{y}^2}{2\sin^2\alpha}. \tag{3.218}$$

Потенциальная энергия шарика

$$U = mgy. \tag{3.219}$$

Стало быть, функция Лагранжа рассматриваемой системы

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{y}^2}{2\sin^2\alpha} - mgy. \tag{3.220}$$

Обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{m\dot{y}}{\sin^2\alpha}, \tag{3.221}$$

обобщенная энергия

$$E = \dot{y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \mathcal{L} = \frac{m\dot{y}^2}{2\sin^2\alpha} + mgy. \tag{3.222}$$

Выражая $\dot{y}$ из (3.221) и подставляя в (3.222), запишем

$$E = \frac{p^2\sin^2\alpha}{2m} + mgy, \tag{3.223}$$

откуда находим импульс $p(y)$ как функцию обобщенной координаты $y$:

$$p = \pm\sqrt{\frac{2m}{\sin^2\alpha}\Big(E - mgy\Big)}. \tag{3.224}$$

Поэтому переменная «действие» (3.213):

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\oint dy\sqrt{\frac{2m}{\sin^2\alpha}\Big(E - mgy\Big)}. \tag{3.225}$$

В предыдущей задаче мы выяснили, что данный интеграл «с кружочком» сводится к удвоенному определенному интегралу, пределами которого являются точки поворота, ограничивающие область финитного движения:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\frac{2m}{\sin^2\alpha}\Big(E - mgy\Big)}. \tag{3.226}$$

Левой точкой поворота является $y_1 = 0$ (она обусловлена барьером в нижней точке наклонной плоскости). Правая точка поворота $y_2$ определяется стандартно условием равенства потенциала (3.219) и энергии $E$:

$$y_2 = \frac{E}{mg}. \tag{3.227}$$

Интеграл в (3.226) как интеграл от степенной функции,

$$\mathcal{J} = -\frac{2}{3\pi}\frac{1}{mg}\left(\frac{2m}{\sin^2\alpha}\right)^{1/2}\left(E - mgy\right)^{3/2}\Bigg|_{y_1=0}^{y_2=E/mg} =$$

$$= \frac{2}{3\pi g}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\frac{E^{3/2}}{\sin\alpha}. \qquad (3.228)$$

И поскольку найденная переменная «действие» является адиабатическим инвариантом, полученная комбинация меняющихся со временем энергии $E$ и угла $\alpha$ сохраняет свое значение неизменным:

$$\frac{2}{3\pi g}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\frac{E^{3/2}(t)}{\sin\alpha(t)} = \text{const}, \qquad (3.229)$$

откуда находим, что энергия меняется со временем пропорционально степени 2/3 синуса угла $\alpha$:

$$E(t) \sim \sin^{2/3}\alpha(t). \qquad (3.230)$$

Максимальная высота подъема $h_{\max}$ по сути есть точка поворота $y_2$, определяемая равенством (3.227), поэтому изменение ее со временем

$$h_{\max}(t) = \frac{E(t)}{mg} \sim E(t) \sim \sin^{2/3}\alpha(t). \qquad (3.231)$$

**Задача 3.6.3.** Определить, как со временем меняется энергия системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha\, x_1\, x_2\right),$$

при адиабатически медленном изменении параметра $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

**Решение.**

«Лобовой» и стандартный путь решения, подразумевающий нахождение выражения для обобщенной энергии по функции Лагранжа и подстановки в него закона движения $x_1(t)$, $x_2(t)$ обречен на неудачу по причине невозможности нахождения аналитическими методами последнего (к примеру, мы не знаем явного вида функции $\alpha(t)$). Поэтому, как и предписывают нам общие рекомендации поведения при анализе систем с медленно меняющимися параметрами, построим адиабатические инварианты, переменные «действие», $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ и через них выразим искомый закон изменения энергии $E(t)$ со временем.

Однако сразу переходить от лагранжевого описания в координатах $x_1$, $x_2$ к гамильтонову с целью построения переменных «действие» нельзя. Причиной тому является перекрестный член $k\alpha\, x_1\, x_2$ в потенциале.

Напомним, что переменные «действие–угол» могут быть введены не для всякой системы, а лишь для систем, удовлетворяющих определенным требованиям, среди которых, в частности, имеется условие существования набора канонических переменных, допускающих полное разделение переменных. Указанный перекрестный член будет присутствовать и в гамильтониане, и именно он не позволит разделить переменные при нахождении полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Поэтому прежде нам необходимо, находясь в лагранжевом описании, подобрать такие обобщенные координаты, которые были бы лишены упомянутых проблем, и функция Лагранжа была бы диагональной.

Рассматриваемая система, являясь системой, совершающей колебательное движение, имеет особые обобщенные координаты $\xi_i$ — нормальные координаты, в которых лагранжиан удовлетворяет желаемому требованию: он диагонален и представляет собой сумму лагранжианов одномерных гармонических осцилляторов с частотами, совпадающими с собственными частотами $\omega^2_{(i)}$ системы:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}\,\dot{\xi}_1^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2_{(1)}\xi_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,\dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2_{(2)}\xi_2^2\right). \tag{3.232}$$

На данный момент задача свелась к нахождению собственных частот $\omega^2_{(i)}$ системы. Как мы уже отметили в предыдущей задаче, при совершении каких–либо действий на уровне лагранжиана (а мы, фактически, хотим совершить преобразование обобщенных координат $x_i \to \xi_i$ именно в функции Лагранжа) можно считать медленно меняющиеся со временем параметры постоянными. Так и мы будем искать стандартным образом, описанным ранее в параграфе 2.7, собственные частоты, позабыв об изменении параметра $\alpha$ со временем. Для этого составим систему уравнений Лагранжа,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + \alpha k x_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + \alpha k x_1 = 0 \end{cases} \tag{3.233}$$

и, считая $\alpha = const$, ищем решение ее, как системы с постоянными коэффициентами, в стандартном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{3.234}$$

с комплексными амплитудами $A_1$ и $A_2$.

Результатом подстановки в систему дифференциальных уравнений будет однородная система алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k & \alpha k \\ \alpha k & -m\omega^2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.235}$$

Полученная система имеет нетривиальное решение лишь при условии, что определитель матрицы ее равен нулю (характеристическое уравнение):

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + k & \alpha k \\ \alpha k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = \left( -m\omega^2 + k \right)^2 - (\alpha k)^2 = 0, \tag{3.236}$$

откуда собственные частоты

$$\omega^2_{(1,2)} = \frac{k}{m}\left(1 \pm \alpha\right) \tag{3.237}$$

Итак, теперь будем работать с лагранжианом (3.232) в нормальных координатах $\xi_i$. Проводя преобразование Лежандра стандартным образом, построим гамильтониан:

$$H = \dot{\xi}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_1} + \dot{\xi}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_2} - \mathcal{L} = \left( \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega^2_{(1)} \xi_1^2}{2} \right) + \left( \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega^2_{(2)} \xi_2^2}{2} \right), \tag{3.238}$$

Обозначим

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega^2_{(1)} \xi_1^2}{2} = \beta_1, \tag{3.239}$$

$$\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega^2_{(2)} \xi_2^2}{2} = \beta_2, \tag{3.240}$$

тогда энергия $E$ системы (гамильтониан по смыслу есть энергия)

$$E = \beta_1 + \beta_2. \tag{3.241}$$

Величины $\beta_1$, $\beta_2$ представляют собой энергии осцилляторов.

Далее введем переменные «действие»:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_1\,d\xi_1, \qquad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_2\,d\xi_2. \tag{3.242}$$

Выражая импульсы $p_1$, $p_2$ через координаты из соотношений (3.239) и (3.240), перепишем их в виде:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\oint d\xi_1\sqrt{2\beta_1 - \omega_{(1)}^2\xi_1^2}, \qquad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\oint d\xi_2\sqrt{2\beta_2 - \omega_{(2)}^2\xi_2^2}. \tag{3.243}$$

Ну, а эти интегралы вычисляем совершенно аналогично интегралу (3.199) в задаче 3.6.1 (только теперь вместо энергии $E$ у нас фигурирует $\beta_i$). В итоге,

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\beta_1}{\omega_{(1)}}, \qquad \mathcal{J}_2 = \frac{\beta_2}{\omega_{(2)}}. \tag{3.244}$$

Переменные «действие», $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ являются адиабатическими инвариантами, сохраняя свои значения неизменными:

$$\mathcal{J}_{1,2} = \mathrm{const}. \tag{3.245}$$

Выражая из (3.244) $\beta_1$, $\beta_2$ и подставляя их в (3.241). находим, что энергия системы

$$E = \mathcal{J}_1\omega_{(1)} + \mathcal{J}_2\omega_{(2)}. \tag{3.246}$$

Вспоминая выражения (3.237) для частот $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$, окончательно находим закон изменения энергии со временем:

$$E(t) = \mathcal{J}_1\sqrt{\frac{k}{m}\Big(1+\alpha(t)\Big)} + \mathcal{J}_2\sqrt{\frac{k}{m}\Big(1-\alpha(t)\Big)}. \tag{3.247}$$

**Задача 3.6.4.** Выяснить, как со временем меняется радиус орбиты частицы массой $m$ и зарядом $e$ в магнитном поле $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$ при адиабатически медленном изменении его напряженности $H_0 = H_0(t)$.

**Решение.**

Запишем функцию Лагранжа заряженной частицы, движущейся в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$, в цилиндрических координатах (отметим, что напряженность $H_0$ магнитного поля в ней мы рассматриваем как параметр, который далее будет считаться медленно меняющимся):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\dot{\varphi} \tag{3.248}$$

и подвергнем ее преобразованию Лежандра, построив стандартным образом функцию Гамильтона (см. задачу 3.1.2.):

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}. \tag{3.249}$$

Отметим, что поскольку обобщенные координаты $\varphi$, $z$ являются циклическими, канонически сопряженные им обобщенные импульсы являются интегралами движения:

$$p_\varphi = \mathrm{const}, \qquad p_z = \mathrm{const}. \tag{3.250}$$

При этом сам гамильтониан, представляющий собой энергию $E$ частицы:

$$H = E,$$

не является интегралом движения, поскольку зависит явно от времени по причине изменения со временем напряженности магнитного поля $H_0$.

Слагаемое $\dfrac{p_z^2}{2m} = \mathrm{const}$ в гамильтониане (3.249) обозначим

$$E - \frac{p_z^2}{2m} = E_\perp.$$

Введенная величина $E_\perp$ по смыслу представляет собой энергию движения в поперечном магнитному полю направлении и, согласно (3.249) может быть записана как

$$E_\perp = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2. \tag{3.251}$$

откуда

$$p_\rho = \pm\sqrt{2m\left(E_\perp - \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2\right)}. \tag{3.252}$$

Переменная «действие»

$$\mathcal{J}_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint p_\rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi}\oint d\rho \sqrt{2m\left(E_- - \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2\right)} \quad (3.253)$$

является адиабатическим инвариантом:

$$\mathcal{J}_\rho = \text{const}. \quad (3.254)$$

Интеграл в (3.253) может быть вычислен, например, при помощи теории вычетов, переходя к контурному интегралу в комплексной плоскости. Однако для наших целей нет необходимости знать его значение. Вынесем из-под корня множитель $1/\rho$, после чего выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$\sqrt{2m\left(E_\perp - \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2\right)} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(2mE_\perp + \frac{eH_0}{c}p_\varphi\right)\rho^2 - p_\varphi^2 - \left(\frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sqrt{-\left(\frac{eH_0}{2c}\rho^2 - \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)\right)^2 + \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)^2 - p_\varphi^2}.$$

В интеграле

$$\mathcal{J}_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint d\rho\, \frac{1}{\rho}\left(-\left(\frac{eH_0}{2c}\rho^2 - \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)^2 - p_\varphi^2\right)^{1/2} \quad (3.255)$$

совершим замену переменных

$$\frac{eH_0}{2c}\rho^2 - \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right) = u \quad (3.256)$$

(за новую переменную мы обозначаем выражение, стоящее под полным квадратом в подкоренном выражении). Беря дифференциал от обеих частей,

$$d\rho = \frac{du}{\rho}\,\frac{c}{eH_0}, \quad (3.257)$$

найдем закон изменения меры интеграла (3.255):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{du}{\dfrac{eH_0}{2c}\rho^2} = \Big[(3.256)\Big] = \frac{1}{2}\,\frac{du}{u + \left(\dfrac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)}. \tag{3.258}$$

Стало быть,

$$\mathcal{J}_\rho = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{du}{u + \left(\dfrac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)}\left(-u^2 + \left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right)^2 - p_\varphi^2\right)^{1/2}. \tag{3.259}$$

Совершенно неважно, чему равен этот интеграл. Важно, что, во-первых, значение его есть константа (3.254), и, во-вторых, он параметрически зависит от комбинации

$$\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi.$$

Поэтому можно схематично записать

$$\mathcal{J}_\rho = f\left(\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi\right) = \text{const}, \tag{3.260}$$

где $f$ — некоторая функция. Тогда, поскольку сама функция $f$ есть константа, моментально заключаем, что и ее аргумент

$$\frac{2mcE_\perp}{eH_0} + p_\varphi = \text{const}. \tag{3.261}$$

Поскольку $p_\varphi = \text{const}$, то и

$$\frac{2mcE_\perp}{eH_0} = \text{const}, \tag{3.262}$$

то есть

$$\frac{E_\perp}{H_0} = \text{const}. \tag{3.263}$$

Таким образом, энергия движения частицы в направлении, ортогональном магнитному полю, меняется со временем пропорционально модулю вектора его напряженности:

$$E_\perp \sim H_0, \tag{3.264}$$

что перепишем в виде:

$$E_{\perp} = CH_0, \tag{3.265}$$

где $C$ — некоторая константа. С другой стороны, эту энергию можно записать как кинетическую энергию вращения по окружности некоторого радиуса $R$ с циклотронной частотой $\omega_0 = \dfrac{eH_0}{mc}$:

$$E_{\perp} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\Big(\omega_0 R\Big)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{eH_0}{2c}\,R\right)^2 \tag{3.266}$$

Сравнивая (3.265) и (3.266), имеем

$$CH_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{eH_0}{2c}\,R\right)^2, \tag{3.267}$$

откуда

$$H_0 R^2(t) = \text{const.} \tag{3.268}$$

что может быть интерпретировано как неизменность потока магнитного поля

$$\Phi = H_0 \cdot \pi R^2 \tag{3.269}$$

через поверхность, ограниченную траекторией движения частицы, которой является окружность радиуса $R$.

Таким образом, при медленном изменении напряженности магнитного поля $H_0$ радиус $R$ окружности, по которой движется частица, меняется так, что остается неизменным поток магнитного поля через поверхность, ограниченную траекторией частицы.

# Список рекомендованной литературы


1. А. Б. Пименов. Задачник по теоретической механике. – М.: Физический факультет МГУ, 2015.
2. Г. Голдстейн. Классическая механика. – М.: Наука, 1975.
3. Ф. Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2005.
4. Ю. Г. Павленко. Лекции по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2002.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. – М.: Физматлит, 2004.
6. И. И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Лань, 2009.
7. В. В. Петкевич. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981.
8. Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, А. И. Черных. Лекции по аналитической механике. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
9. Г. Голдстейн, Ч. Пул, Д. Сафко. Классическая механика. – М.: Институт компьютерных исследований, 2012.
10. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. – М.: УРСС, 2003.