Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

А. Б. Пименов

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Москва

2015

Пименов А. Б. **Задачник по теоретической механике**. — М.: Физический факультет МГУ, 2015 — 123 с.

В учебном пособии содержится более 370 задач, предназначенных для полного освоения основных понятий и методов классической механики. Перед каждым параграфом приводится краткий справочный материал, который может оказаться полезным при решении задач. Учебное пособие ориентировано на студентов 2-го и 3-го курсов физического факультета МГУ, изучающих курс теоретической механики.

Александр Борисович Пименов

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рецензенты:
профессор, д.ф.-м.н. *В. И. Денисов*
профессор, д.ф.-м.н. *П. А. Поляков*

Редактор *А. В. Борисов*

Оригинал-макет: *А. Б. Пименов*

Подписано в печать 16.12.2014
Объем 7,7 п. л. Тираж 100 экз. Заказ № 123

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ

Содержание

Предисловие

Традиционно общий курс теоретической механики для студентов-физиков включает в себя изучение методов Лагранжа и Гамильтона, которые являются основой всей теоретической физики. Содержание данной книги полностью соответствует этому классическому университетскому курсу.

Учебное пособие составлено автором на основе многолетнего опыта преподавания общего курса теоретической механики на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова студентам-физикам 2-го и 3-го курсов. Сборник содержит свыше 370 задач по основным разделам курса, решение которых позволяет на достаточно глубоком уровне освоить основные понятия и методы классической механики. Основу пособия составляют классические задачи по теоретической механике, многие из которых приведены в известных сборниках задач: И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков «Сборник задач по теоретической механике для физиков», Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо «Сборник задач по классической механике», Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко «Сборник задач по аналитической механике». Многие задачи являются оригинальными. Каждая тема начинается с небольшого справочного теоретического материала, который, по мнению автора, может оказаться весьма полезным при решении задач. Книга ориентирована прежде всего на студентов 2-го и 3-го курса физического факультета МГУ. Автор надеется, что данная книга окажется полезным дополнением к существующим учебным пособиям по теоретической механике не только для учащихся, но и для преподавателей, ведущих семинарские занятия по теоретической механике.

Автор выражает огромную признательность своим коллегам доценту Ольге Серафимовне Павловой и профессору Анатолию Викторовичу Борисову, взявшим на себя нелегкий труд внимательного чтения рукописи и ее корректуру, за обстоятельный разбор работы и ряд интересных предложений, касающихся методических особенностей сборника, ценных советов и полезных замечаний, во многом способствовавшим улучшению данного пособия.

Глава 1

Кинематика материальной точки

• Локальный базис произвольных криволинейных координат $\{q_i\}, i = \overline{1,3}$

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i}{|\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i|}. \tag{1.1}$$

• Связь полярных и декартовых координат

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

• Связь цилиндрических и декартовых координат

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{1.3}$$

• Связь сферических и декартовых координат

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

• Вектор скорости материальной точки

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.5}$$

• Вектор и квадрат вектора скорости в декартовых координатах

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z, \tag{1.6}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \tag{1.7}$$

• Вектор и квадрат вектора скорости в полярных координатах (в случае плоского движения)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{1.8}$$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2. \tag{1.9}$$

Составляющую вектора скорости $v_\rho = \dot{\rho}$ называют радиальной, а составляющую $v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$ — трансверсальной.

• Вектор и квадрат вектора скорости в цилиндрических координатах

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z, \tag{1.10}$$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \tag{1.11}$$

• Вектор и квадрат вектора скорости в сферических координатах

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{1.12}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2. \tag{1.13}$$

• Секторная скорость показывает, какую площадь ΔS заметает радиус-вектор за малое время Δt:

$$\sigma = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{1.14}$$

Вектор секторной скорости определяется векторным произведением радиус-вектора точки и ее скорости:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.15}$$

В полярных координатах (при плоском движении)

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\rho^2\dot{\varphi}. \tag{1.16}$$

Направление вектора секторной скорости определяется правилом правого винта.

Ниже вместо термина «материальная точка» используются также «точка» или принятый в современной физической литературе эквивалентный термин «частица».

1. Получить выражения для векторов локального базиса полярных и цилиндрических координат в виде разложения по базису декартовых координат.

2. Получить выражения для векторов локального базиса сферических координат в виде разложения по базису декартовых координат.

3. Явным дифференцированием получить выражение для вектора скорости точки в полярных и цилиндрических координатах.

4. Явным дифференцированием получить выражение для вектора скорости точки в сферических координатах.

5. Получить выражения, определяющие локальный базис и вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки в параболических координатах (ξ, η, φ):
$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

6. Получить выражения, определяющие локальный базис и вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки в эллиптических координатах (u, v):
$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \quad (a = \mathrm{const}).$$

7. Точка движется в плоскости так, что угол между ее вектором скорости и радиус-вектором все время остается постоянным и равным α. Найти уравнение траектории точки.

8. Заяц бежит по прямой со скоростью v_1. Его начинает преследовать со скоростью v_2 собака, которая в ходе погони всегда бежит в направлении строго на зайца. В начальный момент времени расстояние между ними равно a и направления их движения ортогональны. Найти уравнение траектории собаки в системе отсчета, связанной с зайцем.

9. Точка движется по эллиптической орбите вокруг некоторого притягивающего силового центра, находящегося в одном из фокусов эллипса, с постоянной относительно него секторной скоростью σ_0. Параметр эллипса p, его эксцентриситет ε. Определить величину угловой скорости точки в перигелии.

10. Точка движется по эллипсу с эксцентриситетом ε и постоянной относительно его фокуса секторной скоростью. Найти отношение максимальной и минимальной скоростей точки при движении.

11. Точка движется по эллипсу с параметром p и эксцентриситетом ε с постоянной относительно его фокуса секторной скоростью σ_0. Найти период движения точки.

12. Точка движется по поверхности сферы так, что угол между вектором ее скорости и меридианом составляет постоянный угол α. Найти уравнение траектории точки.

13. Стержень скользит по сторонам прямого угла, образованного горизонтальной и вертикальной прямыми. Нижний конец стержня тянут с постоянной скоростью v_0 в горизонтальном направлении в сторону от вершины угла. Длина стержня равна l. В начальный момент стержень составляет с горизонтом угол α_0. Для середины стержня определить: 1) уравнение траектории; 2) зависимость от времени скорости движения; 3) зависимость от времени ускорения; 4) закон движения.

14. Точка движется в плоскости так, что её радиальная и трансверсальная компоненты скорости зависят от r следующим образом: $v_r = \dfrac{b}{r^2}$, $v_\varphi = \dfrac{1}{ar}$. Найти уравнение траектории точки.

15. Точка движется по кардиоиде $\rho = 2a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ с постоянной по величине скоростью v. Найти скорость точки и ее ускорение как функции ρ.

16. Точка описывает кардиоиду $\rho = 2a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ таким образом, что ее радиус-вектор вращается с постоянной скоростью ω. Найти скорость точки и ее ускорение как функции угла φ.

17. Точка движется по спирали $\rho = ae^{\varphi}$ так, что радиальная составляющая ее ускорения равна нулю. Доказать, что абсолютные величины скорости и ускорения точки пропорциональны ρ. Известно, что $\dot\varphi(t=0) = \omega$.

18. Точка движется в плоскости с постоянной по величине скоростью v и постоянной угловой скоростью ω. Определить, как от времени зависит направление вектора скорости $\boldsymbol{v}(t)$.

19. Точка движется по эллипсу с полуосями a и b. При этом скорость ее остается постоянной и равной v_0. Определить, как зависят от положения точки векторы скорости и ускорения ее движения.

20. Точка движется по эллипсу с полуосями a и b. При этом угловая скорость вращения радиус-вектора, проведенного из центра эллипса к точке, постоянна и равна ω. Определить, как со временем меняется вектор скорости движения точки $\boldsymbol{v}(t)$, если в начальный момент времени $x(t=0) = a$.

21. Точка движется по эллипсу $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ с ускорением, параллельным оси y. Найти ускорение точки как функцию координат, если $\boldsymbol{r}(t=0) = b\,\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{v}(t=0) = v_0\,\boldsymbol{e}_x$.

Глава 2

Метод Лагранжа

2.1. Функция и уравнения Лагранжа

• Метод Лагранжа применим для систем, на которые наложены идеальные и голономные связи.

• Число степеней свободы системы

$$s = 3N - K, \tag{2.1}$$

где N – число материальных точек системы, K – число уравнений голономных связей, наложенных на систему:

$$f_i(q_1, \ldots, q_N, t) = 0, \quad i = \overline{1, K}.$$

• Функция Лагранжа, или лагранжиан (этот краткий термин и будет использован ниже), – функция обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени, сопоставляемая данной системе:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}, q, t). \tag{2.2}$$

• Для классических механических систем в инерциальных системах отсчета лагранжиан определяется разностью кинетической и потенциальной энергий системы

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q, t) = T(\dot{q}, q, t) - U(q, t). \tag{2.3}$$

• Потенциальные силы – силы, которые могут быть представлены в виде градиента некоторой скалярной функции, называемой потенциалом или потенциальной энергией:

$$\boldsymbol{F}^p(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\frac{\partial U(\boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{2.4}$$

• Обобщенная сила

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} \tag{2.5}$$

• Динамика системы описывается системой уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^d, \tag{2.6}$$

где Q_i^d – обобщенная диссипативная сила. определяемая формулой (2.5).

• Диссипации в рамках метода Лагранжа учитываются в правой части уравнений Лагранжа (2.6). Наличие диссипативных сил не отражается на виде лагранжиана.

• Потенциал материальной точки в однородном постоянном поле тяготения $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$

$$U = mgz \tag{2.7}$$

• Потенциал упруго деформированной пружины жесткостью k

$$U = \frac{kx^2}{2}, \tag{2.8}$$

где x – удлинение пружины.

• Лагранжиан определен неоднозначно: добавление к нему слагаемых в виде полной производной по времени от скалярной функции обобщенных координат и времени $\dfrac{d}{dt}f(q,t)$ не меняет вида уравнений Лагранжа (2.6). То есть лагражианы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \dfrac{d}{dt}f(q,t)$ имеют одно и то же физическое содержание и описывают одну и ту же систему.

22. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа для материальной точки, движущейся в заданном потенциальном поле $U(\boldsymbol{r}, t)$, выбирая в качестве обобщенных координат: а) декартовые, б) цилиндрические, в) сферические. В каждом случае выбора обобщенных координат построить компоненты обобщенной силы.

23. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа для материальной точки, движущейся в заданном потенциальном поле $U(\boldsymbol{r}, t)$, выбирая в качестве обобщенных координат параболические координаты (ξ, η, φ):

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

24. Получить выражения для компонент обобщенной силы Q_i материальной точки в параболических координатах (ξ, η, φ):

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

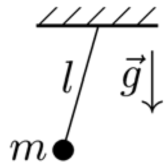
25. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа для материальной точки, движущейся в заданном потенциальном поле $U(\boldsymbol{r}, t)$, выбирая в качестве обобщенных координат эллиптические координаты (u, v):

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \quad (a = \mathrm{const}).$$

26. Получить выражения для компонент обобщенной силы Q_i материальной точки в эллиптических координатах (u, v):

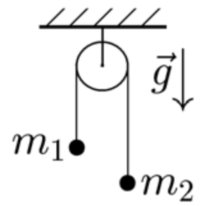
$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \quad (a = \mathrm{const}).$$

27. Построить лагранжиан математического маятника массой m с длиной нити l, движущегося в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ под

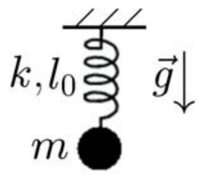


действием силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -\beta\boldsymbol{v}$. Записать уравнение Лагранжа.

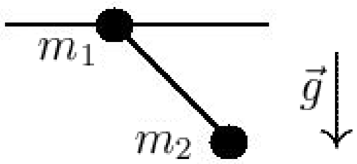
28. Построить лагранжиан и уравнение Лагранжа для двух бусинок массами m_1 и m_2, связанных невесомой и нерастяжимой нитью и движущихся в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$, испытывая действие силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -\beta\boldsymbol{v}$.



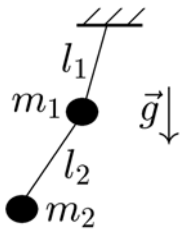
29. Построить лагранжиан и уравнение Лагранжа вертикального пружинного маятника массой m с жесткостью пружины k, движущегося в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ под действием силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -\beta\boldsymbol{v}$. Длина недеформированной пружины l_0.



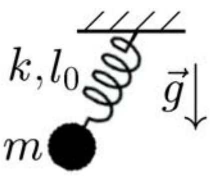
30. Бусинка массой m_1 может без трения скользить по горизонтальной спице. К бусинке с помощью невесомого стержня длины l, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, прикреплена другая бусинка массой m_2. Система находится в вертикальном однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа.



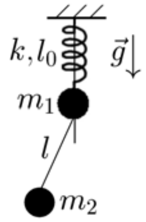
31. Построить лагранжиан двойного математического маятника, совершающего плоские колебания в однородном и постоянном вертикальном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Массы шариков m_1 и m_2, длины невесомых и нерастяжимых нитей l_1 и l_2.



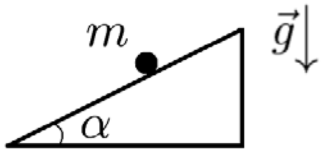
32. Построить лагранжиан пружинного маятника массой m с жесткостью пружины k, совершающего плоские колебания в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Длина недеформированной пружины l_0.



33. Построить лагранжиан системы, состоящей из двух шариков массами m_1 и m_2. Первый шарик подвешен на пружине жесткостью k и длиной l_0 в недеформированном состоянии и может совершать вертикальное колебательное движение. Второй шарик подвешен к концу нерастяжимой нити длиной l, прикрепленной снизу к первому шарику, и может совершать движение в вертикальной плоскости. Система находится в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$.

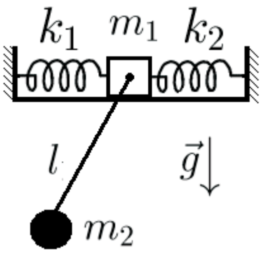


34. Построить лагранжиан материальной точки массой m, съезжающей с гладкой поверхности неподвижного клина с углом α при основании, в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Составить уравнение движения.



35. Построить лагранжиан материальной точки, произвольно движущейся по внутренней поверхности гладкой сферической неподвижной чаши радиуса R в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$.

36. Грузик массой m_1 прикреплен двумя пружинами жесткостями k_1 и k_2 к неподвижным вертикальным стенкам и может совершать движение вдоль горизонтали. Снизу к грузику на нити длиной l через горизонтальную щель вдоль всей горизонтальной поверхности подвешен шарик массой m_2, который может колебаться в вертикальной плоскости. Система находится в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. В состоянии равновесия грузик находится посередине между стенками, пружины при этом недеформированы. Построить лагранжиан системы.

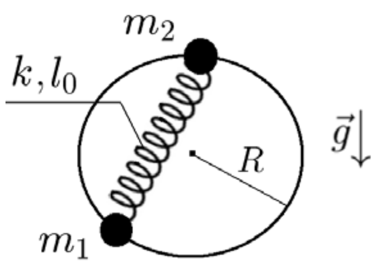


37. Система описывается лагранжианом

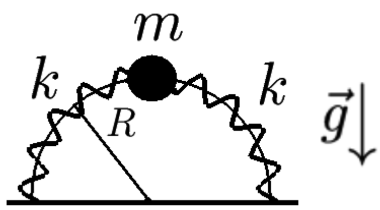
$$\mathcal{L} = e^{\beta t/m}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right).$$

Показать, что ее уравнение движения совпадает с уравнением одномерного движения частицы массы m в потенциальном поле $U(x)$ под действием силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\beta \boldsymbol{v}$.

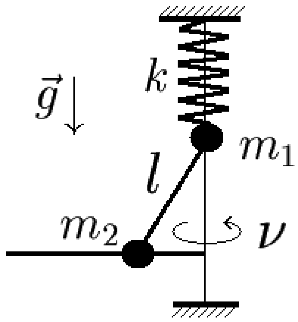
38. Две бусинки массами m_1 и m_2 нанизаны на неподвижное, вертикально расположенное кольцо радиуса R и по хорде связаны пружиной жесткостью k с длиной l_0 в недеформированном состоянии. Система находится в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Построить лагранжиан системы.



39. Бусинка массой m нанизана на полукольцо радиуса R, расположенное в вертикальной плоскости, и прикреплена к двум одинаковым пружинам жесткостью k каждая. Система находится в вертикальном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. При движении бусинка испытывает действие силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -\beta \boldsymbol{v}$. Построить лагранжиан системы. Записать уравнение движения.



40. Тело массой m_1, прикрепленное к пружине жесткости k, может совершать колебательное движение только вдоль вертикальной стороны жесткого прямого угла. Тело массой m_2 прикреплено к первому телу с помощью невесомого стержня длиной l и может двигаться вдоль горизонтальной стороны прямого угла. Система вращается вокруг вертикальной оси в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ с постоянной линейной частотой ν. Построить лагранжиан системы. Записать уравнения движения.



41. Показать, что уравнение движения одномерного осциллятора с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$
при наличии силы вязкого трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\beta \boldsymbol{v}$ совпадает с уравнением движения системы без диссипаций с лагранжианом
$$\mathcal{L} = e^{\beta t/m} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\beta x \dot{x}}{2} - \frac{1}{2} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right) x^2 \right].$$

42. Показать, что система с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x} + \gamma x}{\omega x} \operatorname{arctg} \left(\frac{\dot{x} + \gamma x}{\omega x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left((\dot{x} + \gamma x)^2 + \omega^2 x^2 \right),$$

где γ и ω – размерные коэффициенты, эквивалентна линейному гармоническому осциллятору с вязким трением, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\gamma^2 + \omega^2)x = 0.$$

2.2. Интегралы движения в методе Лагранжа

• Интегралом движения называется функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, не изменяющая свое значение при эволюции системы:

$$f(q(t), \dot{q}(t), t) = \mathrm{const} \quad \text{для } \forall t, \tag{2.9}$$

что эквивалентно записи

$$\frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t), t) = 0. \tag{2.10}$$

• Каждый интеграл движения можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка. Если число найденных независимых интегралов движения совпадает с числом степеней свободы системы, можно попытаться найти закон движения системы не решая систему дифференциальных уравнений Лагранжа второго порядка.

• Обобщенная энергия определяется равенством

$$E = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = E(\dot{q}, q, t). \tag{2.11}$$

• Обобщенный импульс, соответствующий обобщенной координате q_k, определяется равенством

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}. \tag{2.12}$$

• Циклической называется обобщенная координата, от которой лагранжиан не зависит (при этом лагранжиан зависит от соответствующей обобщенной скорости $\dot{q}_k$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \tag{2.13}$$

то есть лагранжиан устроен так, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k-1}, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \ldots \dot{q}_s; q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_s; t).$$

• Правила нахождения интегралов движения по виду лагранжиана:

1) если лагранжиан явно не зависит от времени

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}, q),$$

то есть

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

и отсутствуют диссипации ($Q_i^d = 0$), то обобщенная энергия E является интегралом движения;

2) если для лагранжиана имеется циклическая координата q_k и отсутствуют диссипации ($Q_i^d = 0$), то обобщенный импульс p_k, соответствующий циклической координате, является интегралом движения.

43. Частица массой m движется в поле тяжести по кривой $y = a/x + bx$ ($a > 0$, $b > 0$), расположенной в вертикальной плоскости ($\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$). Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа. Найти закон движения в квадратурах.

44. Построить выражение для обобщенной энергии и уравнение движения для одномерной системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + a\, e^{-\gamma t}\left(\dot{x} - \gamma x\right) - \frac{kx^2}{2} \qquad (a, \gamma = \text{const}).$$

Найти, если возможно, интегралы движения.

45. Построить выражение для обобщенной энергии и уравнение движения для одномерной системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + a\left(\dot{x}\sin\Omega t + x\Omega\cos\Omega t\right) - \frac{kx^2}{2} \qquad (\Omega = \text{const}).$$

Найти, если возможно, интегралы движения.

46. Используя определение обобщенной энергии E, показать, что

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

Диссипации отсутствуют.

47. Для классической системы с s степенями свободы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{s} b_i(q)\dot{q}_i + c(q,t)$$

построить выражения для обобщенной энергии и обобщенных импульсов.

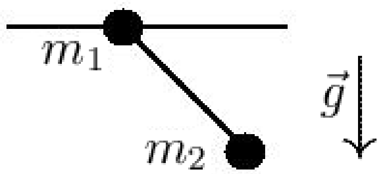
48. Найти закон движения в квадратурах для системы с лагранжианом $(b = \text{const})$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + b\dot{y}\sin x - \frac{1}{2}\,\omega_0^2 x^2.$$

49. Длина l плоского математического маятника меняется в зависимости от угла отклонения маятника от вертикали по известному закону $l = l(\varphi)$. Ускорение свободного падения g. Найти закон движения маятника.

50. Бусинка массой m может без трения скользить по гладкому недеформируемому стержню, который вращается с постоянной угловой скоростью ω в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню. Система находится в вертикальном поле тяготения $\boldsymbol{g}$. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа.

51. Бусинка массой m_1 может без трения скользить по горизонтальной спице. К бусинке с помощью невесомого стержня длины l, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, прикреплена другая бусинка массой m_2. Система находится в вертикальном однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Найти закон движения бусинок в квадратурах.



52. Материальная точка массой m движется по сфере радиуса R в поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Найти интегралы движения и закон движения точки в квадратурах. В качестве обобщенных использовать сферические координаты.

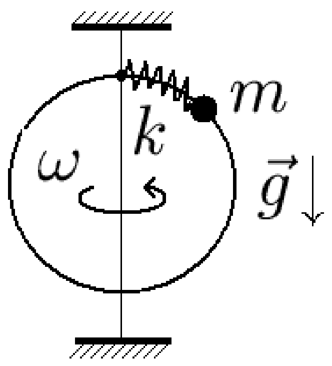
53. Материальная точка массой m движется по сфере радиуса R в поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Найти интегралы движения и закон движения точки в квадратурах. В качестве обобщенных использовать цилиндрические координаты.

54. Материальная точка массой m движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \text{const}$) в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -\,g\ \boldsymbol{e}_z$. Записать лагранжиан и найти закон движения точки в квадратурах.

55. Материальная точка массой m движется по внутренней поверхности конуса с углом полного раствора α в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Записать лагранжиан и найти закон движения точки в квадратурах. Ось конуса совпадает с осью z, его вершина находится в начале координат, конус расположен в полупространстве $z > 0$.

56. Материальная точка массой m скользит без трения по кольцу радиусом R, расположенному в вертикальной плоскости. Кольцо вращается вокруг своего вертикального диаметра с частотой ω в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Построить лагранжиан и найти закон движения точки.

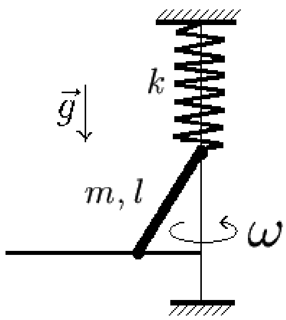
57. Бусинка массой m прикреплена к пружине жесткостью k и может двигаться вдоль кольца радиусом R, расположенному в вертикальной плоскости. Система приводится во вращательное движение вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с постоянной угловой скоростью ω. Длина пружины в недеформированном состоянии l_0. Ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Построить лагранжиан. Найти закон движения бусинки в квадратурах.



58. Стержень массой m и длиной l шарнирно закреплен в верхней точке и может совершать плоское движение в вертикальном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Построить лагранжиан системы. Найти закон движения

в квадратурах в общем виде для произвольного движения стержня. Записать уравнения Лагранжа. Рассматривая частный случай малых отклонений стержня от вертикали, найти частоту малых линейных колебаний.

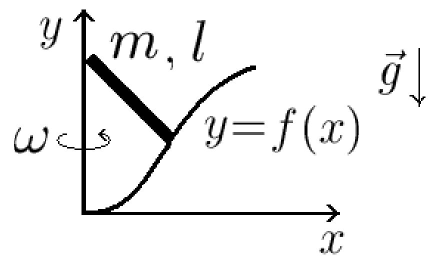
59. Стержень массой m и длиной l скользит по сторонам прямого угла без трения. Верхний его конец прикреплен к пружине жесткостью k. Система приводится во вращательное движение вокруг вертикальной стороны прямого угла с постоянной угловой скоростью ω. Написать лагранжиан и найти закон движения стержня при условии, что в начальный момент времени стержень покоится относительно сторон прямого угла, а угол, который он составлял с горизонтальной осью, равен φ_0. Длина недеформированной пружины l_0.



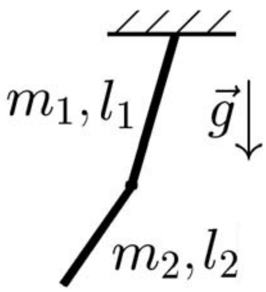
60. Стержень массой m и длиной l падает в вертикальной плоскости в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ так, что нижний его конец скользит по гладкой горизонтальной поверхности. Построить лагранжиан и найти закон движения стержня в квадратурах.

61. Стержень массой m и длиной l может двигаться в плоскости, скользя без трения в поле тяготения одним концом по вертикальной спице, другим – по изогнутой спице, профиль которой задан функцией $y = f(x)$. Система приводится во вращательное движение вокруг вертикальной спицы с постоянной угловой скоростью ω. Написать лагранжиан системы, считая известной функцию $f(x)$. Найти явный

вид функции $y = f(x)$, при которой любое положение стержня будет равновесным. Ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$.



62. Два стержня массами m_1, m_2 и длинами l_1, l_2 скреплены шарнирно. Первый стержень шарнирно прикреплен в верхней точке. Считая, что стержни совершают движение в вертикальной плоскости в постоянном и однородном поле тяготения $\boldsymbol{g}$, построить лагранжиан системы.

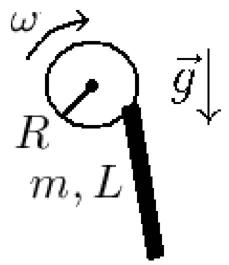


63. Стержень массой m и длиной l скользит в вертикальной плоскости по сторонам прямого угла без трения в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Построить лагранжиан и найти закон движения в квадратурах.

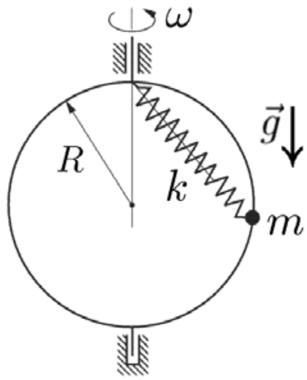
64. Стержень массой m и длиной l без трения скользит по сторонам прямого угла, плоскость которого вертикальна, в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Система вращается вокруг вертикальной стороны угла с постоянной угловой скоростью ω. Построить лагранжиан и найти закон движения в квадратурах.

65. Стержень массой m и длиной L шарнирно прикреплен к барабану радиуса R, который вращается вокруг оси симметрии с постоянной

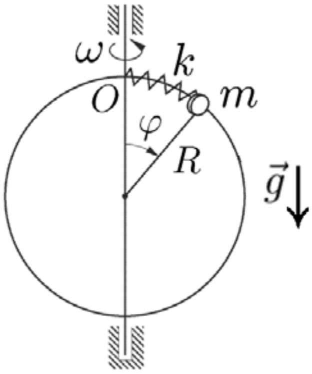
угловой скоростью ω. Ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Построить лагранжиан системы.



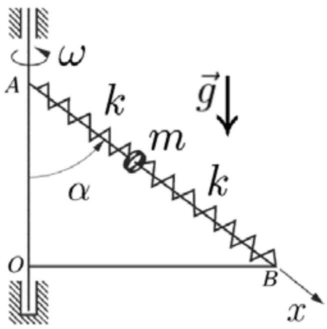
66. Гладкое проволочное кольцо радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. На кольцо надета бусинка массой m, соединенная с наивысшей точкой окружности пружиной жесткостью k и длиной l_0 в недеформированном состоянии. Пружина располагается по хорде. Найти закон движения бусинки в квадратурах.



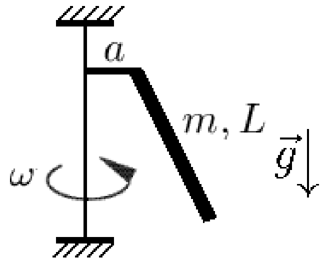
67. Гладкое проволочное кольцо радиусом R вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. На кольцо надето колечко массой m, соединенное с точкой O окружности пружиной жесткостью k, длина пружины в недеформированном состоянии $R\varphi_0$. Пружина расположена по дуге. Найти закон движения колечка в квадратурах.



68. Колечко массой m может скользить вдоль гладкого стержня AB длиной $2l$, концы которого в точках A и B жестко соединены со сторонами прямого угла $\angle AOB$, вращающегося вокруг своей вертикальной стороны AO с постоянной угловой скоростью ω. Колечко соединено с точками A и B двумя одинаковыми пружинами жесткостью k. Длина каждой пружины в недеформированном состоянии равна l_0, $\angle$OAB $= \alpha$. Найти закон движения колечка в квадратурах.



69. Стержень массой m и длиной L шарнирно прикреплен на расстоянии a от вертикальной жесткой спицы и может совершать плоское движение в вертикальной плоскости. Систему приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг спицы. Стержень при движении остается в вертикальной плоскости. Ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Построить лагранжиан системы.



2.3. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

• Движение частицы с зарядом e в произвольном электромагнитном поле описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - e\varphi. \tag{2.14}$$

• Векторный $\boldsymbol{A}$ и скалярный φ потенциалы электромагнитного поля вводятся так, что по ним однозначно определяются напряженности электрического $\boldsymbol{E}$ и магнитного $\boldsymbol{H}$ полей согласно равенствам:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t), \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}. \tag{2.16}$$

• Потенциалы $\boldsymbol{A}$, φ определены неоднозначно: на основе имеющегося набора потенциалов $\boldsymbol{A}$, φ можно построить другой набор $\boldsymbol{A}'$, φ'

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r},t), \tag{2.17}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{2.18}$$

с любой произвольной скалярной функцией $\alpha(\boldsymbol{r},t)$, который соответствует все той же конфигурации электромагнитного поля $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.

Переход

$$\boldsymbol{A},\,\varphi \to \boldsymbol{A}',\,\varphi'$$

согласно (2.17) и (2.18) называется калибровочным преобразованием потенциалов $\boldsymbol{A}$, φ электромагнитного поля.

• Ротор вектора $\boldsymbol{A}$ в произвольных криволинейных координатах $\{q_i\}$ $(i = \overline{1,3})$:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

• Градиент скалярной функции φ в произвольных криволинейных координатах $\{q_i\}$ $(i = \overline{1,3})$:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{2.20}$$

• Параметры Ламэ

$$h_i = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \tag{2.21}$$

для декартовых координат:

$$h_1 \equiv h_x = 1, \quad h_2 \equiv h_y = 1, \quad h_3 \equiv h_z = 1; \tag{2.22}$$

для цилиндрических координат:

$$h_1 \equiv h_\rho = 1, \quad h_2 \equiv h_\varphi = \rho, \quad h_3 \equiv h_z = 1; \tag{2.23}$$

для сферических координат:

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\theta = r, \quad h_3 \equiv h_\varphi = r\sin\theta. \tag{2.24}$$

• Различные калибровки потенциалов для однородных постоянных электрического и магнитного полей $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$ ($H_0 =$ const, $\boldsymbol{E}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$)

$$\varphi = -\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r} \tag{2.25}$$

$$1)\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}H_0(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y), \tag{2.26}$$

$$2)\ \boldsymbol{A} = -H_0\, y\boldsymbol{e}_x, \tag{2.27}$$

$$3)\ \boldsymbol{A} = H_0\, x\boldsymbol{e}_y. \tag{2.28}$$

• В калибровке векторного потенциала

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}H_0(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$$

лагранжиан заряженной частицы в однородных постоянных электрического и магнитного полях $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$

в декартовых координатах:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\Big) + \frac{eH_0}{2c}\Big(x\dot{y} - y\dot{x}\Big) + e\,\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r}, \tag{2.29}$$

в цилиндрических координатах:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\Big) + \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\dot{\varphi} + e\,\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r}, \tag{2.30}$$

в сферических координатах:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\Big) + \frac{eH_0}{2c}\,r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + +e\,\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r}. \tag{2.31}$$

70. Частица массой m и зарядом e движется в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. В цилиндрических координатах найти закон движения частицы в квадратурах. Путем явного вычисления полученных интегралов показать, что траекторией движения частицы является винтовая линия. Определить параметры винтовой линии: шаг винтовой линии и радиус петли.

71. Частица массой m и зарядом e находится в полости гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме окружности

радиуса R. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и однородное постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Составить лагранжиан и уравнения Лагранжа частицы. Найти закон ее движения в квадратурах.

72. Частица массой m и зарядом e движется в скрещенных магнитном $\boldsymbol{H} = H_0\,\boldsymbol{e}_z$ и электрическом $\boldsymbol{E} = E_0\,\boldsymbol{e}_x$ полях. В калибровке векторного потенциала $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2}H_0(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$ путем непосредственного решения уравнений Лагранжа в декартовых координатах явно найти закон движения частицы.

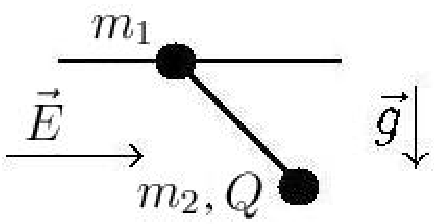
73. Бусинка массой m и зарядом e нанизана на спицу, изогнутую по параболе $y = ax^2$, и движется в однородном и постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$. На расстоянии h снизу от вершины параболы на оси y находится неподвижный точечный заряд Q. Считая, что трения нет, найти закон движения бусинки в квадратурах. В случае, когда бусинка испытывает действие силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\gamma\boldsymbol{v}$, записать уравнение Лагранжа ($a, \gamma = \text{const}$).

74. Бусинка массой m и зарядом e нанизана на прямую спицу, образующую угол α с вертикалью и вращающуюся вокруг вертикальной оси с линейной частотой ν в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Найти закон движения бусинки в квадратурах.

75. Бусинка массой m и зарядом e нанизана на спицу, изогнутую по параболе $y = ax^2$ ($a = \text{const}$), которая вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$ и магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_y$. Найти закон движения бусинки в квадратурах.

76. Бусинка массой m_1 может без трения скользить по горизонтальной

спице. К бусинке с помощью невесомого стержня длины l, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, прикреплена другая бусинка массой m_2 и зарядом Q. Система находится в вертикальном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и слабом горизонтальном однородном и постоянном электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа.



77. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности вертикального конуса с углом при вершине 2α в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. В вершине конуса закреплен заряд Q. Записать лагранжиан, указать интегралы движения и найти закон движения частицы в квадратурах.

78. Частица массой m и зарядом e движется по сфере радиуса R в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также однородных и постоянных электрическом $\boldsymbol{E} = -E_0\boldsymbol{e}_z$ и магнитном $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$ полях. Найти интегралы движения и закон движения частицы в квадратурах.

79. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \mathrm{const}$) в постоянных и однородных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, электрическом и магнитном полях, напряженности которых соответственно $\boldsymbol{E} = -E_0\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{H} = H_0\ \boldsymbol{e_z}$. Записать лагранжиан и найти закон движения частицы в квадратурах.

80. Точка массой m и зарядом e движется по внутренней поверхности конуса с углом раствора α в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также электрическом и магнитном полях, напряженности которых соответственно $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Записать лагранжиан

и найти закон движения частицы в квадратурах. Ось конуса совпадает с осью z, его вершина находится в начале координат, конус расположен в полупространстве $z > 0$.

81. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \mathrm{const}$) в постоянных и однородных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и магнитном поле, напряженность которого $\boldsymbol{H} = H_0\, \boldsymbol{e_z}$. Записать лагранжиан и найти закон движения частицы в квадратурах.

82. Точка массой m и зарядом e движется по внутренней поверхности конуса с углом раствора α в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также магнитном поле, напряженность которого $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Записать лагранжиан и найти закон движения частицы. Ось конуса совпадает с осью z, его вершина находится в начале координат, конус расположен в полупространстве $z > 0$.

83. Частица массой m и зарядом e движется по сфере радиуса R в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и однородном и постоянном магнитное поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Найти интегралы движения и закон движения частицы в квадратурах.

84. Частица массой m и зарядом e движется в магнитном поле бесконечного проводника с током I. Найти закон движения частицы в квадратурах. Полем тяготения пренебречь.

85. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности вертикального конуса с углом при вершине 2α в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. В вершине конуса закреплен заряд Q. Имеется также однородное магнитное поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$, направленное вдоль оси конуса. Конус расположен в полупространстве $z > 0$. Построить лагранжиан частицы и найти закон ее движения в квадратурах.

86. Частица массой m и зарядом e движется в однородных и постоянных магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$ и поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \text{const}$). Записать лагранжиан в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах.

87. Частица массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле, заданном в калибровке векторного потенциала $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2}\,H_0(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$, и электрическом поле $\boldsymbol{E} = -ax\boldsymbol{e}_x - ay\boldsymbol{e}_y$, ($a = \text{const}$). Найти закон движения частицы, если $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$.

88. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \text{const}$) в постоянных магнитном $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$ и электрическом полях $\boldsymbol{E} = -E_0\boldsymbol{e}_z$. Записать лагранжиан и найти закон движения частицы.

89. Частица массой m и зарядом q движется по поверхности вертикального конуса с углом при вершине 2α в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и постоянном электрическом поле $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_x$. Кроме того, в вершине конуса закреплен заряд Q. Записать лагранжиан и уравнения Лагранжа частицы, если конус расположен в полупространстве $z > 0$.

90. Частица массой m и зарядом e движется в неоднородном магнитном поле
$$\boldsymbol{H} = \frac{H_0}{\mathrm{ch}^2 ay}\,\boldsymbol{e}_z \quad (H_0 = \text{const}).$$
Найти закон движения частицы в квадратурах.

91. Частица массой m и зарядом e движется в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$, испытывая при этом действие силы сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -2\gamma\boldsymbol{v}$. Найти закон движения частицы при заданных начальных условиях: $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_x$.

92. Однородный стержень массой m и длиной l шарнирно закреплен в верхней точке и совершает произвольное трехмерное движение

(произвольно вращается вокруг вертикальной оси и произвольно отклоняясь от вертикали). По стержню равномерно распределен заряд q. Вдоль вертикали вниз направлены однородные и постоянные поле тяготения $\boldsymbol{g}$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}$. Построить лагранжиан стержня.

2.4. Одномерное движение. Качественное исследование движения

• Лагранжиан частицы массой m, совершающей одномерное движение (число степеней свободы $s = 1$) в потенциальном стационарном поле $U(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \tag{2.32}$$

$(-\infty < x < +\infty)$.

• Закон движения частицы в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - U(x)\Big)}}, \tag{2.33}$$

где значение обобщенной энергии, интеграла движения, однозначно определяется начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \text{const}. \tag{2.34}$$

• Знаки «±» в квадратуре (2.33) определяются направлением движения частицы, то есть соответствуют знакам обобщенной скорости

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - U(x)\Big)}. \tag{2.35}$$

Знак «+» следует брать, когда частица движется в сторону увеличения координаты x (в этом случае $\dot{x} > 0$); знак «$-$» следует брать, когда частица движется в сторону уменьшения координаты x (в этом случае $\dot{x} < 0$).

• Множество значений, которые может принимать обобщенная координата x при движении частицы, определяется неравенством

$$E \geq U(x) \tag{2.36}$$

(условие классически доступной области движения).

• Если при движении частицы множество значений ее обобщенной координаты x ограничено, движение называется финитным, в противном случае – инфинитным.

• Период финитного движения:

$$T = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\Big(E - U(x)\Big)}}, \tag{2.37}$$

где точки поворота $x_{1,2}$ определяются равенством обобщенной энергии и потенциала:

$$E = U(x_{1,2}). \tag{2.38}$$

• В точках поворота обобщенная скорость частицы $\dot{x} = 0$.

93. Найти закон движения одномерной частицы в потенциальном поле $U(x)$ вблизи точки поворота x_0 при условии, что $U'(x_0) \neq 0$.

94. Найти закон движения одномерной частицы в потенциальном поле $U(x)$ вблизи точки поворота x_0 при условии, что $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) < 0$.

95. Найти период финитного движения частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > L, \\ -U_0, & |x| \le L. \end{cases}$$

96. Частица массой m движется в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 + kx^2, & x > 0, \\ \infty, & x < 0 \qquad (U_0, k > 0) \end{cases}$$

с энергией E. Каков период движения частицы?

97. Найти время задержки, вызванное наличием потенциального поля

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > L, \\ -U_0, & |x| \le L, \end{cases}$$

при прохождении частицей массой m пространственной области $-\infty < x < +\infty$.

98. Частица массой m движется в потенциальном поле

$$U(x) = k|x|, \quad (k > 0)$$

с энергией E. Каков период движения частицы?

99. Найти период колебаний частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = ax^2, \quad (a > 0).$$

100. Найти период одномерного финитного движения частицы массой m в потенциале

$$U(x) = -\frac{a}{x^2}, \quad (a > 0).$$

101. Определить, как зависит от энергии E период финитного движения частицы массой m в потенциальном поле

$$U = \begin{cases} -U_0\left(1 - \dfrac{x}{a}\right), & x > 0, \\ \\ -U_0\left(1 + \dfrac{x}{a}\right), & x < 0 \qquad (U_0, a = \text{const} > 0). \end{cases}$$

102. Найти период колебаний частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = -\frac{a}{|x| + b}, \quad (a, b > 0).$$

103. Найти закон движения частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = -U_0 \cos\frac{x}{a}, \qquad (U_0,\ a > 0),$$

если в начальный момент времени $\dot{x}(0) = -2\sqrt{U_0/m}, \quad x(0) = 0.$

104. Частица массой m движется в потенциальном поле $U(x) = \dfrac{a}{x^2}$, ($a > 0$). По какому закону меняется координата с течением времени, если в начальный момент она была положительной, а скорость равна нулю?

105. Частица массой m движется в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{x^2}, & x > L, \\ \infty, & x \le L \qquad (\alpha > 0) \end{cases}$$

с энергией $-\dfrac{\alpha}{L^2} < E < 0$. Чему равен период движения частицы?

106. Частица массой m движется в потенциальном поле

$$U_1(x) = \begin{cases} a - k|x|, & |x| < a/k, \\ 0, & |x| \ge a/k \qquad (a, k > 0) \end{cases}$$

с энергией $E > a$. На какое время после прохождения над потенциальным барьером эта частица отстанет от другой частицы с той же массой, которая движется в потенциальном поле $U_2(x) = 0$ и имеет такие же начальные условия? В начальный момент времени частицы имеют координату $x_0 < -a/k$ и положительную проекцию скорости.

107. Вычислить в первом порядке по α и β поправку к периоду колебаний одномерного гармонического осциллятора с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2},$$

обусловленную малой добавкой (возмущением) к потенциалу

$$\delta U(x) = -\alpha x^3 - \beta x^4, \qquad \alpha, \beta \to +0.$$

108. Найти время задержки при прохождении частицей массой m области от $x = -\infty$ до $x = \infty$, обусловленное наличием потенциального поля

$$U(x) = \frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 ax}, \quad (a, U_0 = \text{const} > 0).$$

109. Найти период финитного движения частицы массой m в потенциале

$$U(x) = A\left(\exp\left(-\frac{2x}{a}\right) - 2\,\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\right) \quad (A, a = \text{const} > 0).$$

110. Определить, как зависит от энергии период финитного движения частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = U_0\ \operatorname{tg}^2 \alpha x,$$

где α — постоянная.

111. Определить, как от энергии E зависит период финитного движения частицы массой m в потенциальном поле

$$U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 ax},$$

где U_0 и a – положительные постоянные.

2.5. Движение в центральном поле

• Центральное поле – поле, в котором сила, действующая на движущуюся в нем частицу, зависит от расстояния до силового центра и направлена вдоль линии, соединяющей частицу и силовой центр:

$$\boldsymbol{F} = -F(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.39}$$

(здесь предполагается, что система координат выбрана так, что силовой центр находится в начале координат).

• Всякое центральное поле потенциально, причем потенциал центрального поля, также как и сила, зависит от расстояния между силовым центром и частицей, движущейся в его поле:

$$U(r) = \int F(r)dr. \tag{2.40}$$

• Движение в любом центральном поле является плоским. Следовательно, частица, движущаяся в центральном поле, имеет две степени свободы ($s = 2$). Плоскость, в которой лежит траектория частицы, движущейся в центральном поле, называется плоскостью Лапласа. Ориентация плоскости Лапласа в пространстве определяется сохраняющимся вектором момента импульса $\boldsymbol{L}$ (интеграл движения): вектор момента импульса $\boldsymbol{L}$ ортогонален плоскости Лапласа,– и задается начальными условиями.

• В полярных координатах плоскости Лапласа лагранжиан частицы, движущейся в произвольном центральном поле $U(r)$:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\Big) - U(\rho). \tag{2.41}$$

• Интегралы движения:

$$E = \frac{m}{2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\Big) + U(\rho), \tag{2.42}$$

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}. \tag{2.43}$$

• Физический смысл интеграла движения p_φ:

$$p_\varphi = |\boldsymbol{L}| \tag{2.44}$$

($\boldsymbol{L}$ – вектор момента импульса частицы).

• Закон движения частицы в произвольном центральном поле $U(r)$ в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\Big(E - U_{\text{eff}}\left(\rho\right)\Big)}}, \tag{2.45}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}\left(\rho\right)\right)}}, \tag{2.46}$$

• Эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}}\left(\rho\right) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}. \tag{2.47}$$

• Знаки «$\pm$», в (2.45) и (2.46) определяют знак обобщенной скорости $\dot{\rho}$:

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}\left(\rho\right)\right)}. \tag{2.48}$$

Выбор знака определяется направлением движения частицы по отношению к силовому центру: если частица движется в сторону от силового центра (координата ρ растет, $\dot{\rho} > 0$), перед квадратными корнями выбирают «+»; если частица движется в сторону к силовому центру (координата ρ уменьшается, $\dot{\rho} < 0$),– выбирают знак «$-$».

• Множество значений, принимаемых обобщенной координатой ρ при движении частицы в центральном поле определяется неравенством:

$$E \geq U_{\text{eff}}\left(\rho\right) \tag{2.49}$$

(условие классически доступной области движения).

• Монотонное изменение координаты φ соответствует «наматыванию» траектории вокруг силового центра.

• Период финитного движения в центральном поле:

$$T = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\Big(E - U_{\text{eff}}\,(\rho)\Big)}}, \tag{2.50}$$

где точки поворота $\rho_{1,2}$ определяются равенством обобщенной энергии и эффективного потенциала:

$$E = U_{\text{eff}}\,(\rho_{1,2}). \tag{2.51}$$

• В точках поворота обращается в нуль лишь радиальная составляющая вектора скорости частицы: $v_\rho = \dot{\rho} = 0$, трансверсальная же составляющая $v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \neq 0$.

• Траектория финитного движения замкнута, если существуют такие целые числа k, $n \in \mathbf{Z}$, что

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\Big(E - U_{\text{eff}}\,(\rho)\Big)}} = \pi\frac{k}{n}\,. \tag{2.52}$$

• Падение частицы на силовой центр возможно, если

$$\left.\left(U(\rho)\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m}\right)\right|_{\rho\to 0} \leq 0. \tag{2.53}$$

112. Доказать, что вектор Лапласа–Рунге–Ленца

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L} - \frac{\alpha \boldsymbol{r}}{r}$$

является интегралом движения задачи Кеплера $\left(U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}\right)$ ($\boldsymbol{L}$– вектор момента импульса частицы).

113. Найти время падения частицы массой m в центр поля

$$U(r) = -\frac{b}{r^2}, \quad b > 0,$$

с расстояния R из состояния покоя, при условии $L^2/2m < b$, $E > 0$.

114. Найти уравнение траектории частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0.$$

Рассмотреть случаи, соответствующие всем возможным значениям энергии E частицы.

115. Найти уравнение траектории частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha < 0.$$

Рассмотреть случаи, соответствующие всем возможным значениям энергии E частицы.

116. Найти период финитного движения частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0.$$

117. Определить, при каких значениях энергии E и момента импульса L возможно финитное движение частицы без падения на силовой центр, потенциал которого

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

118. Частица массой m движется в поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

При каких значениях энергии E и момента импульса L возможно инфинитное движение частицы с падением на силовой центр?

119. Определить, при каких значениях энергии E и момента импульса L возможно только рассеяние частицы массой m в поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

120. Определить, при каких значениях n возможно падение частиц на силовой центр, потенциал которого

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}.$$

121. Найти уравнение траектории частицы массой m с энергией $E < 0$ и моментом импульса L при движении в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

при условии падения частицы на центр.

122. Найти уравнение траектории частицы массой m с энергией $E > 0$ и моментом импульса L при движении в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

при условии падения частицы на центр.

123. Найти уравнение траектории частицы массой m с энергией $E > 0$ и моментом импульса L при рассеянии на силовом центре, потенциал которого

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

124. Найти количество оборотов вокруг силового центра, совершаемых частицей массой m при рассеянии на силовом центре, потенциал которого

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0$$

при условии, что $L^2/2m > \alpha$, L – момент импульса частицы.

125. Найти уравнение траектории финитного движения частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

126. Найти угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек $r_{\max}$ (угловое смещение апоцентра) при финитном движении частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

2.6. Задача рассеяния

• Задача рассеяния позволяет по известному характеру рассеяния пучка частиц на силовом центре, наблюдаемому экспериментально, получить информацию о параметрах как частиц пучка, так и силового центра.

• В задаче рассеяния предполагается, что пучок

1) однороден по своему сечению (то есть все частицы пучка имеют одни и те же параметры, все частицы пучка имеют одинаковую энергию);

2) пучок достаточно разрежен, чтобы можно было пренебречь взаимодействием частиц пучка между собой (то есть единственное, что влияет на движение каждой частицы пучка, – это взаимодействие с силовым центром).

• Под рассеянием понимается изменение направления движения частиц пучка, обусловленное взаимодействием с силовым центром.

• Экспериментально измеряемой величиной является дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, которое определяется отношением числа частиц, рассеянных в единицу времени, к плотности потока налетающего на силовой центр пучка частиц:

$$d\sigma = \frac{dN_{\text{расс}}/dt}{j}. \tag{2.54}$$

• Плотность потока падающего пучка показывает, какое количество частиц пучка пролетает в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению движения частиц:

$$j = \frac{dN}{dt\,dS}. \tag{2.55}$$

• Прицельный параметр p – это длина перпендикуляра, опущенного из силового центра на первоначальное направление движения частицы пучка.

• Для аналитического расчета дифференциального сечения рассеяния пучка частиц в центральном поле силового центра необходимо знать зависимость прицельного параметра p от угла рассеяния θ:

$$p = p(\theta), \tag{2.56}$$

тогда для вычисления $d\sigma$ можно воспользоваться одной из формул:

$$d\sigma = 2\pi p(\theta)\Big|dp(\theta)\Big|, \tag{2.57}$$

$$d\sigma = \pi\Big|dp^2(\theta)\Big|, \tag{2.58}$$

$$d\sigma = 2\pi p(\theta)\left|\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right|d\theta, \tag{2.59}$$

$$d\sigma = \frac{p(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right|d\Omega. \tag{2.60}$$

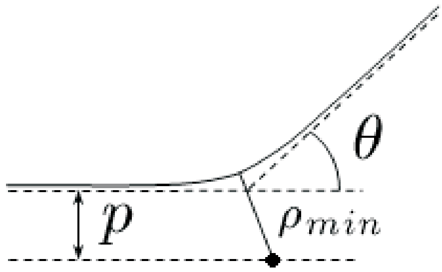
($d\Omega$ – элемент телесного угла: $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$)

• Зависимость $p(\theta)$ может быть найдена из уравнения траектории:

$$\pi - \theta = 2 \int\limits_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\Big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\Big)}} \tag{2.61}$$

с учетом того, что

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \equiv U(\rho) + \frac{Ep^2}{\rho^2}. \tag{2.62}$$



Соотношение (2.61) приведено для случая, когда при рассеянии частица не успевает совершить полный оборот вокруг силового центра, и изменение угловой обобщенной координаты φ материальной точки при рассеянии $\Delta\varphi < \pi$. В противном случае равенство необходимо модифицировать надлежащим образом.

Соотношение (2.62) справедливо для потенциалов, убывающих на пространственной бесконечности:

$$U(\rho)\Big|_{\rho\to\infty} = 0.$$

• В случае, когда реализуется падение частиц пучка на силовой центр, информативной и экспериментально измеряемой величиной является сечение падения частиц на силовой центр (сечение захвата), которое определяется отношением числа частиц, упавших на силовой центр в единицу времени, к плотности потока налетающего на силовой центр пучка частиц:

$$\sigma_{\text{пад}} = \frac{dN_{\text{упавш}}/dt}{j}. \tag{2.63}$$

• Предельный прицельный параметр p_0 – значение прицельного параметра, имея который частицы пучка асимптотически выходят на круговую орбиту вокруг силового центра. Его значение может быть найдено из условия совпадения значения энергии частиц пучка с максимумом эффективного потенциала:

$$\begin{cases} E = U_{\text{eff}}(\rho_0, p_0), \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} U_{\text{eff}}(\rho_0, p_0) = 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} U_{\text{eff}}(\rho_0, p_0) < 0. \end{cases}$$

• Аналитически сечение падения частиц на силовой центр (сечение захвата) может быть вычислено по формуле

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi p_0^2. \tag{2.64}$$

127. Частица массой m с энергией E упруго рассеивается на шаре радиуса R. Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния.

128. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = a \ln \frac{x}{b}, \quad b \leq x \leq 3b, \quad (a, b > 0)$$

вокруг оси x.

129. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = b \sin \frac{x}{a}, \quad 0 \le x < \pi a, \quad (a, b > 0)$$

вокруг оси x.

130. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = b - \frac{a^2}{x}, \quad \frac{a^2}{b} \le x < \infty, \quad (a, b > 0)$$

вокруг оси x.

131. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = a x^{1/2}, \quad (a > 0)$$

вокруг оси x.

132. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x, на гладкой упругой поверхности, образованной вращением графика функции

$$y = f(x) = a - \frac{b}{x^2}, \quad \sqrt{\frac{b}{a}} \le x < \infty, \quad (a, b > 0)$$

вокруг оси x.

133. Найти дифференциальное сечение рассеяния позитронов зарядом e на ядре атома с зарядом Ze.

134. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц с энергией E на сферической потенциальной яме глубиной U_0:

$$U = \begin{cases} 0,\ r > R, \\ -U_0,\ r < R. \end{cases}$$

135. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц массой m и энергией E в центральном поле, потенциал которого

$$U = \begin{cases} 0, \ r > R, \\ U_0, \ r < R. \end{cases}$$

136. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц массой m и энергией E в центральном поле, потенциал которого ($\alpha > 0$)

$$U = \begin{cases} 0, & r > R, \\ \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\alpha}{R}, & r < R. \end{cases}$$

137. Найти сечение падения на силовой центр для частиц массой m, движущихся в потенциале

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$$

с энергией E, $n > 2$, $\alpha > 0$.

138. Найти сечение падения на силовой центр для частиц массой m, движущихся в потенциале

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$$

с энергией E.

139. Найти сечение падения на центр для частиц массой m, движущихся в потенциале

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$$

с энергией E.

140. Найти сечение падения на центр для частиц массой m, движущихся в потенциале

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

с энергией E.

141. Найти полное сечение падения на силовой центр для частиц массой m с энергией E, движущихся в центральном поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

142. Найти полное сечение падения на силовой центр для частиц массой m с энергией E, движущихся в центральном поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^6} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

2.7. Малые линейные колебания

• Лагранжиан свободной колебательной системы с s степенями свободы в квадратичном приближении по малым отклонениям от положения равновесия имеет вид:

$$\mathcal{L}_0^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} t_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} u_{ij}x_ix_j, \tag{2.65}$$

где t_{ij}, u_{ij} – постоянные коэффициенты, $x_i = q_i - q_{0i}$ – малое отклонение обобщенной координаты q_i от положения равновесия q_{0i}.

• Положение равновесия q_{0i} определяется условием минимума потенциала системы $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$.

Необходимым условием минимума потенциала $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ в точке q_{0i} является требование экстремума

$$\frac{\partial U(q_0)}{\partial q_i} = 0. \tag{2.66}$$

• Достаточное условие минимума потенциала $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ как функции нескольких переменных (критерий Сильвестра) состоит в том, чтобы все угловые миноры матрицы U, состоящей из вторых частных производных потенциала $u_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 U(q)}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_0}$ $\Big((U)_{ij} = u_{ij}\Big)$, вычисленных в точке экстремума q_{0i} (2.66), были положительны:

$$\delta_1 = u_{11} > 0, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots \quad \delta_s = \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s1} & \cdots & u_{ss} \end{vmatrix} > 0.$$

- Уравнения Лагранжа для системы с лагранжианом (2.65) – уравнения малых линейных колебаний:

$$\sum_j \Big(t_{ij}\ddot{x}_j + u_{ij}x_j\Big) = 0. \tag{2.67}$$

Решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений (2.67) ищется в виде периодических функций

$$x_j(t) = \mathrm{Re}\Big(A_j\, e^{i\omega t}\Big) \tag{2.68}$$

с комплексной амплитудой A_j.

Подстановка (2.68) в уравнения (2.67) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_j \Big(-\omega^2 t_{ij} + u_{ij}\Big)A_j = 0, \tag{2.69}$$

которая имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя:

$$\det\Big(-\omega^2 t_{ij} + u_{ij}\Big) = 0. \tag{2.70}$$

Характеристическое уравнение (2.70) в общем случае имеет s решений $\omega^2_{(i)}$, которые определяют собственные частоты колебательной системы: $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \ldots, \omega_{(s)}$.

Полагая последовательно $\omega = \omega_{(k)}\,(k = \overline{1,s})$ в системе (2.69), для каждой собственной частоты находим комплексную амплитуду $A_j^{(k)}$.

В итоге закон малых колебаний (общее решение системы дифференциальных уравнений (2.67)) имеет вид

$$x_j(t) = \mathrm{Re} \sum_k C_k A_j^{(k)} e^{i\omega_{(k)} t}. \tag{2.71}$$

Комплексные константы C_k, $k = \overline{1,s}$ ($2s$ вещественных констант) однозначно находятся из $2s$ начальных условий

$$x_i(0) = x_{0i}, \quad \dot{x}_i(0) = v_{0i}, \quad i = \overline{1,s}. \tag{2.72}$$

• В случае нулевой собственной частоты временная зависимость соответствующего частного решения системы (2.67) дается линейной функцией времени. Вместо (2.68) его необходимо записать в виде:

$$x_j^{(\omega=0)}(t) = \mathrm{Re}\,(A_j(a + bt)) \tag{2.73}$$

с комплексными константами a и b (A_j – комплексная амплитуда (собственный вектор матрицы системы (2.69)), отвечающий нулевой частоте).

• В случае кратных собственных частот $\omega_{(n)}$, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, вид соответствующего частного решения системы (2.67) зависит от соотношения между кратностью N частоты $\omega_{(n)}$ и числом K линейно независимых собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_K$ матрицы системы (2.69) (определяемое ее рангом r), в которой частота ω положена равной исследуемой кратной частоте $\omega_{(n)}$:

$$K = s - r,$$

где s – размер матрицы системы ($s \times s$), который совпадает с числом степеней свободы колебательной системы, что эквивалентно числу уравнений в алгебраической системе (2.69).

Если $K = N$, то соответствующее частное решение строится аналогично (2.68) с амплитудой, равной линейной комбинации собственных векторов v_i:

$$x_j^{(n)}(t) = \mathrm{Re}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} C_i v_j^i\right) e^{i\omega_{(n)}t}\right); \tag{2.74}$$

Если $K < N$, то решение системы (2.67), согласно общей теории, должно искаться в виде произведения многочлена по t степени $(N-K)$ на $e^{i\omega_{(n)}t}$:

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}\Big(a_{11} + a_{12}t + \ldots + a_{1(N-K)}t^{N-K}\Big)e^{i\omega_{(n)}t}, \\ \ldots \\ x_s = \mathrm{Re}\Big(a_{s1} + a_{s2}t + \ldots + a_{s(N-K)}t^{N-K}\Big)e^{i\omega_{(n)}t}. \end{cases} \tag{2.75}$$

Однако, как показал Вейерштрасс, каждому корню характеристического уравнения кратности N соответствует ровно N линейно независимых решений линейной системы алгебраических уравнений (2.69) (то есть для каждой собственной частоты N-й кратности можно найти N линейно независимых столбцов амплитуд), то есть случай $K < N$ для уравнений, описывающих колебательные системы, невозможен. Следовательно, в случае кратных частот соответствующее частное решение записывается всегда в виде (2.74).

Невозможность частному решению для кратных частот иметь вид (2.75) понятна с физической точки зрения: наличие в законе колебаний членов, содержащих наряду с экспоненциальными также и степенные временные множители, противоречило бы закону сохранения энергии.

• Свойством комплексных амплитуд, соответствующих различным собственным частотам $\omega_{(k)}$ и $\omega_{(n)}$ $(k \neq n)$, является их ортогональность с весом T (T – матрица квадратичной формы кинетической энергии, состоящей их коэффициентов t_{ij}):

$$A_{(k)}^T T A_{(n)} = 0 \quad (k \neq n) \tag{2.76}$$

(символ T над амплитудой A^T означает транспонирование).

• Учет внешних потенциальных сил, действующих на тела колебательной системы, осуществляется путем добавления к лагранжиану (в предположении, что внешние обобщенные силы являются функциями лишь времени $Q_i = Q_i(t)$) слагаемого

$$\Delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} Q_i(t) q_i. \tag{2.77}$$

• Полный лагранжиан колебательной системы, подверженной действию заданных внешних сил в квадратичном приближении по малым отклонениям от положения равновесия

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_0^{(2)} + \Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} t_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} u_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{s} Q_i(t) x_i. \tag{2.78}$$

Уравнения вынужденных колебаний – неоднородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_j \Big(t_{ij}\ddot{x}_j + u_{ij}x_j\Big) = Q_i(t), \tag{2.79}$$

решение которой представляет собой комбинацию общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы

$$x_i(t) = x_i^{\text{общ., однор.}}(t) + x_i^{\text{частн., неодн.}}(t) \tag{2.80}$$

Общее решение однородной системы есть закон малых линейных колебаний (2.71).

Частное решение неоднородной системы зависит от вида неоднородностей системы (2.79). В случае, когда внешние силы – периодические функции частоты Ω

$$Q_i(t) = \mathrm{Re}\Big(f_i\, e^{i\Omega t}\Big), \tag{2.81}$$

частное решение системы (2.79) ищется в виде периодической функции той же частоты Ω:

$$x_k^{\text{частн., неодн.}}(t) = \mathrm{Re}\Big(B_k\, e^{i\Omega t}\Big) \tag{2.82}$$

с комплексной амплитудой B_i, которая находится из алгебраической системы, получаемой подстановкой (2.82) в (2.79):

$$\Big(-\Omega^2 T + U\Big)B = F \tag{2.83}$$

(в матричном виде, где матрицы T и U образованы коэффициентами t_{ij} и u_{ij}, а столбцы B и F – элементами B_i и f_i соответственно)

$$B = \Big(-\Omega^2 T + U\Big)^{-1} F. \tag{2.84}$$

• Нормальные координаты ξ_i– это такие обобщенные координаты, в которых лагранжиан колебательной системы представляет собой сумму лагранжианов одномерных гармонических осцилляторов с частотами, равными собственным частотам колебательной системы:

$$\mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{1}{2}\,\dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\,\omega_{(i)}^2 \xi_i^2\right). \tag{2.85}$$

• Для нахождения нормальных координат необходимо:

1. Построить нормированные на единицу (с весом T) комплексные амплитуды $\tilde{A}_i^{(k)}$:

$$\tilde{A}^{(i)T} T \tilde{A}^{(k)} = \delta^{ik}. \tag{2.86}$$

2. Построить матрицу A из компонент столбцов нормированных амплитуд $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^{(1)} & \tilde{A}_1^{(2)} \dots & \tilde{A}_1^{(s)} \\ \tilde{A}_2^{(1)} & \tilde{A}_2^{(2)} \dots & \tilde{A}_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_s^{(1)} & \tilde{A}_s^{(2)} \dots & \tilde{A}_s^{(s)} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \tilde{A}_i^{(j)}. \tag{2.87}$$

3. Нормальные координаты ξ_i находятся преобразованием обобщенных координат $x \to \xi$:

$$x_i = \sum_j A_{ij}\xi_j \tag{2.88}$$

или в матричном виде

$$x = A\xi. \tag{2.89}$$

Матрица A удовлетворяет условию, аналогичному (2.86):

$$A^T T A = I, \tag{2.90}$$

что позволяет обратить (2.89) и окончательно записать (в матричном виде):

$$\xi = A^T T x. \tag{2.91}$$

143. Найти собственные частоты системы с лагранжианом

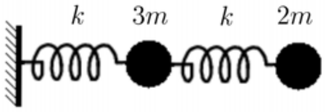
$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \frac{5}{2}\,\dot{y}^2 + 3\,\dot{x}\dot{y} - \frac{5}{2}x^2 - 4y^2 - 6xy.$$

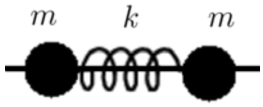
144. Найти собственные частоты системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \frac{5}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y} - 2x^2 - \frac{7}{2}y^2 + xy.$$

145. Найти закон малых колебаний бусинки массой m, надетой на гладкую спицу, изогнутой в виде параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$, находящейся в вертикальной плоскости, в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$ при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

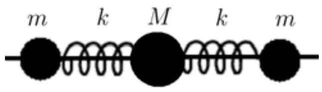
146. Найти закон малых линейных колебаний системы, состоящей из двух шариков массами $3m$ и $2m$ и двух одинаковых пружин жесткостями k каждая.





147. Найти закон малых колебаний двух бусинок массой m каждая, связанных друг с другом пружиной жесткостью k и нанизанных на гладкую горизонтальную спицу.

148. Найти закон малых линейных колебаний трех бусинок массами m, M и m, связанных двумя одинаковыми пружинами жесткостью k каждая и нанизанных на гладкую горизонтальную спицу.



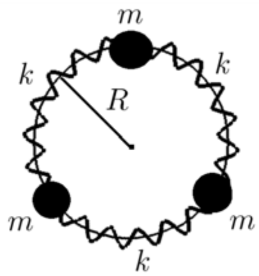
149. Материальная точка массой m движется в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$ по кривой $y = a/x + bx$ $(a, b > 0)$, расположенной в вертикальной плоскости. Найти закон малых линейных колебаний точки, если в начальный момент времени она находилась в положении равновесия и имела начальную скорость $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_x$.

150. Найти закон малых колебаний системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(6\dot{q}_1^2 + 11\dot{q}_2^2 + 22\dot{q}_3^2 + 12\dot{q}_1\dot{q}_2 + 22\dot{q}_1\dot{q}_3 + 28\dot{q}_2\dot{q}_3\right) - $$
$$-\frac{1}{2}\left(9q_1^2 + 38q_2^2 + 49q_3^2 + 30q_1q_2 + 40q_1q_3 + 82q_2q_3\right).$$

151. Найти закон малых линейных колебаний трех бусинок массой m каждая, нанизанных на гладкое горизонтальное кольцо радиусом R и

связанных друг с другом тремя одинаковыми пружинами жесткостью k каждая.



152. Колебательная система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(q_2\,\dot{q}_1^2 + q_1\,\dot{q}_2^2\right) - \left(\frac{1}{q_1 q_2} + q_1 + q_2\right).$$

Найти закон малых линейных колебаний, возможных в такой системе.

153. Колебательная система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\,\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) - \ln\left(q_1 q_2\right) - \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}.$$

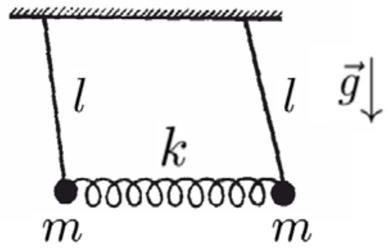
Найти закон малых линейных колебаний, возможных в такой системе.

154. Найти закон малых колебаний системы, которая описывается лагранжианом

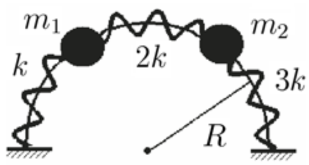
$$\mathcal{L} = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{5}{2}\,\dot{q}_2^2 - 3\left(q_1^2 + 2q_1 q_2 + 3q_2^2\right)$$

при заданных начальных условиях: $q_1(0) = q_2(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = 3$.

155. Найти закон малых свободных колебаний связанных маятников при заданных начальных условиях $\alpha_1(0) = \alpha_0$, $\alpha_2(0) = 0$, $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$. Массы маятников m, длины нитей l, жесткость пружины k. Ускорение свободного падения g.



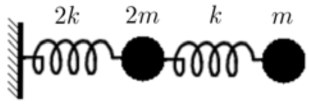
156. Шарики массами m_1 и m_2 скреплены пружинками жесткостями k, $2k$ и $3k$ и могут без трения колебаться вдоль спицы, изогнутой в виде полуокружности радиуса R. Система расположена в горизонтальной плоскости. Построить лагранжиан и найти закон малых свободных колебаний. Считать $2m_1 = m_2$.



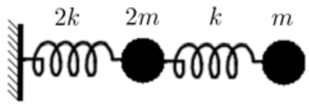
157. Частица массой m и зарядом $q > 0$ движется по поверхности вертикального конуса с углом 2α при вершине в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и слабом постоянном электрическом поле $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_x$. В вершине конуса закреплен точечный заряд $Q > 0$. Найти частоты и амплитуды малых колебаний вблизи положения равновесия.

158. Найти закон малых колебаний бусинки массой m, надетой на гладкую спицу, изогнутой в виде параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$, находящейся в вертикальной плоскости, в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$ при условии, что на бусинку действует внешняя переменная сила $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x F_0 \sin\omega_0 t$.

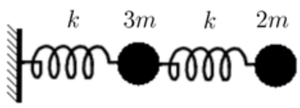
159. Найти закон малых вынужденных колебаний системы, состоящей из двух шариков массами $2m$ и m и двух пружин жесткостями $2k$ и k, если на шарик массой $2m$ действует внешняя горизонтальная сила $F = F_0 \sin\Omega t$. Считать, что поле тяжести отсутствует.



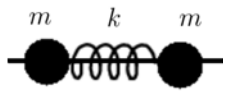
160. Найти закон малых вынужденных колебаний системы, состоящей из двух шариков массами $2m$ и m и двух пружин жесткостями $2k$ и k, если стенка совершает колебания по закону $x_{\text{ст}} = A \sin \Omega t$. Считать, что поле тяжести отсутствует.



161. Найти закон малых вынужденных колебаний системы, состоящей из двух шариков массами $3m$ и $2m$ и двух пружин жесткостью k каждая, если на шарик массой $2m$ действует внешняя горизонтальная сила $F = F_0 \cos \Omega t$. Считать, что поле тяжести отсутствует.

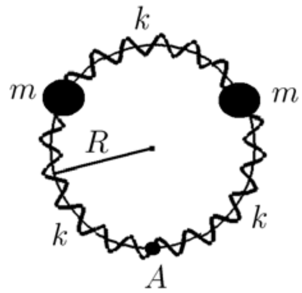


162. Найти закон малых колебаний двух бусинок массой m каждая, связанных друг с другом пружиной жесткостью k и нанизанных на гладкую горизонтальную спицу, если левая бусинка испытывает действие горизонтальной силы $F_1 = f_1 \cos \Omega t$, а правая – $F_2 = f_2 \sin \Omega t$.

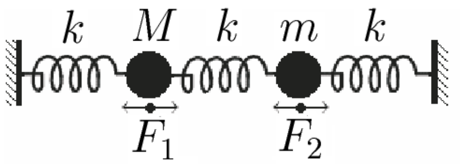


163. Две бусинки массой m каждая связаны тремя одинаковыми пружинами жесткостью k каждая и нанизаны на гладкое горизонтальное кольцо радиуса R. Точка A крепления двух пружин

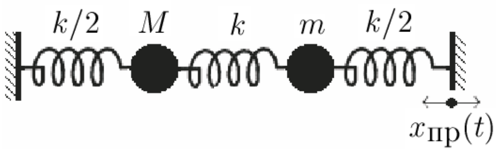
колеблется по заданному закону: $\alpha_A(t) = a \sin \Omega t$. Найти закон малых колебаний бусинок.



164. Шарики массами m и M скреплены пружинками жесткостями k и могут без трения колебаться вдоль прямой в горизонтальной плоскости. На шарик массой M действует внешняя периодическая сила $F_1(t) = f_1 \cos \Omega t$, а на шарик массой m – сила $F_2(t) = f_2 \sin \Omega t$. Построить лагранжиан системы и найти закон малых вынужденных колебаний. Считать $M = 3m/2$.

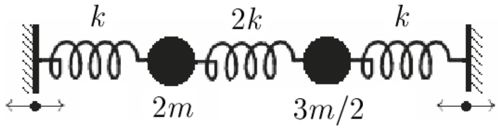


165. Шарики массами m и M скреплены пружинками жесткостями k и $k/2$ и могут без трения колебаться вдоль прямой в горизонтальной плоскости. Правая стенка совершает вынужденные колебания по закону $x_{\text{пр}}(t) = X_0 \cos \Omega_0 t$. Построить лагранжиан и найти закон малых колебаний. Считать $M = 4m$.

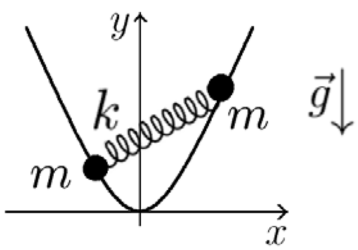


166. Два шарика массами $2m$ и $3m/2$, три пружины жесткостями k, k и $2k$ образуют колебательную систему, изображенную на

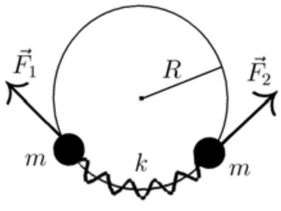
рисунке. Шарики могут двигаться в горизонтальном направлении. Левая стенка совершает вынужденные колебания согласно закону $X_1(t) = A_1 \sin \Omega_1 t$, а правая – согласно закону $X_2(t) = A_2 \cos \Omega_2 t$. Найти закон малых вынужденных колебаний системы.



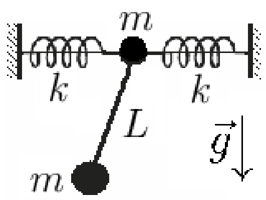
167. Две одинаковые бусинки массой m каждая нанизаны на спицу, изогнутую по параболе $y = ax^2$ $(a > 0)$, расположенной вертикально в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_y$, и связаны невесомой пружиной жесткостью k. Найти закон малых линейных колебаний и нормальные координаты. Принять длину недеформированной пружины равной нулю. Размерами бусинок пренебречь.



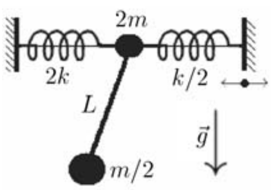
168. Две бусинки массой m каждая нанизаны на гладкое горизонтальное кольцо радиуса R и связаны пружиной жесткостью k. Бусинки подвержены действию внешних периодических сил, направленных по касательной к кольцу: $F_1 = f_1 \sin \Omega t$ и $F_2 = f_2 \cos \Omega t$. Найти закон колебаний бусинок.



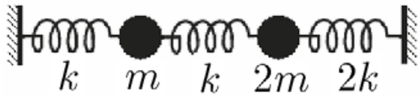
169. Два шарика массой m каждый, две пружины жесткостями k и невесомый стержень длиной l образуют колебательную систему. Система расположена в вертикальной плоскости и находится в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Верхний шарик вдоль спицы может двигаться только в горизонтальном направлении и испытывает действие горизонтальной силы $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$. Построить лагранжиан и найти закон малых вынужденных колебаний.



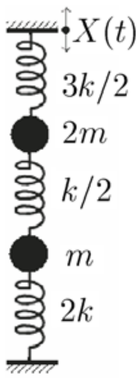
170. К шарику массой $2m$, прикрепленному к двум пружинам жесткостями $2k$ и $k/2$, на нити длиной L подвешен другой шарик массой $m/2$. Первый шарик может двигаться только вдоль горизонтальной прямой, второй – в вертикальной плоскости. Правая стенка совершает вынужденные колебания согласно закону $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Найти закон вынужденных колебаний шариков.



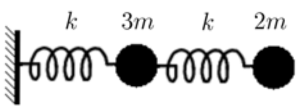
171. Два грузика массами m и $2m$, связанные пружинками жесткостями k, k и $2k$, могут двигаться вдоль прямой в горизонтальной плоскости. Левая стенка совершает колебания в соответствии с законом $x_{\text{ст}}(t) = A\cos\omega_0 t$. Найти закон малых вынужденных колебаний системы.



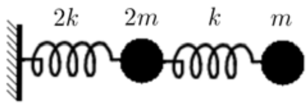
172. Два шарика массами $2m$ и m, три пружины жесткостями $3k/2$, $k/2$ и $2k$ образуют колебательную систему, изображенную на рисунке. Шарики могут двигаться в вертикальном направлении в однородном поле тяжести. Верхняя стенка совершает вынужденные колебания согласно закону $X(t) = A\cos\dfrac{\Omega}{4}t$. Найти закон малых вынужденных колебаний шариков.



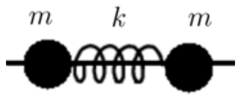
173. Найти нормальные координаты колебательной системы, изображенной на рисунке. Привести лагранжиан к нормальному виду.



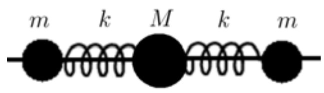
174. Найти нормальные координаты колебательной системы, изображенной на рисунке. Привести лагранжиан к нормальному виду.



175. Найти нормальные координаты колебательной системы, изображенной на рисунке. Привести лагранжиан к нормальному виду.



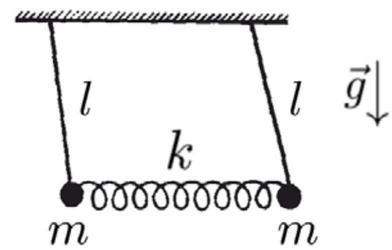
176. Найти нормальные координаты колебательной системы, изображенной на рисунке. Привести лагранжиан к нормальному виду.



177. Найти нормальные координаты системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = m\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\,k\,x_1^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_2^2 - k\,x_1\,x_2.$$

178. Найти нормальные координаты колебательной системы, изображенной на рисунке. Привести лагранжиан к нормальному виду.



179. Найти закон малых колебаний и нормальные координаты системы с лагранжианом ($\gamma = \mathrm{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(m_1\,\dot{x}^2 + m_2\,\dot{y}^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(\omega_1^2\,x^2 + \omega_2^2\,y^2\Big) + \gamma\,xy.$$

180. Найти закон малых колебаний и нормальные координаты системы с лагранжианом ($\beta = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(m_1\,\dot{x}^2 + m_2\,\dot{y}^2\Big) + \beta\,\dot{x}\,\dot{y} - \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2\Big).$$

181. Система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(q_1^2\dot{q}_1^2 + q_2^2\dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} + 2q_1q_2\right).$$

Найти закон малых линейных колебаний, возможных в такой системе. Найти нормальные координаты. Привести лагранжиан к нормальному виду.

182. Колебательная система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + m\dot{x}_2^2 - \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} - \sqrt{\frac{3}{8}}\,kx_1x_2$$

Найти закон малых колебаний системы, если

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \quad & \dot{x}_1(0) &= v_1, \\ x_2(0) &= a, \quad & \dot{x}_2(0) &= v_2. \end{aligned}$$

Найти нормальные координаты.

183. Колебательная система описывается лагранжианом

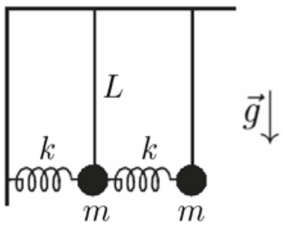
$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\Omega\Big(x\dot{y} - y\dot{x}\Big) + mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

Считая, что $\Omega^2 << g/l$, найти закон малых линейных колебаний при начальных условиях

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad & \dot{x}(0) &= V, \\ y(0) &= 0, \quad & \dot{y}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Найти нормальные координаты.

184. Построить лагранжиан системы двух связанных маятников, изображенной на рисунке, в приближении малых колебаний. Система совершает колебания в вертикальной плоскости в однородном и постоянном поле тяжести g. Найти закон малых колебаний и нормальные координаты.

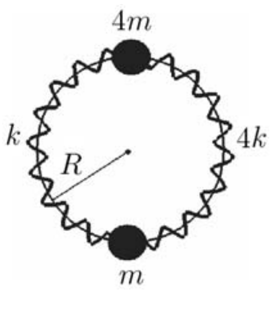


185. Система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = a\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \beta\,\dot{x}\dot{y} + b\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

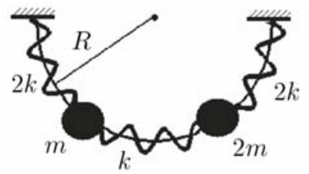
Найти закон малых колебаний, возможных в такой системе, и нормальные координаты $(a, b, \beta, l = \mathrm{const})$.

186. Две бусинки массами m и $4m$, соединенные пружинками с жесткостями k и $4k$, насажаны на горизонтальную спицу, изогнутую в форме окружности радиуса R. В приближении малых колебаний построить лагранжиан и найти закон движения. Найти нормальные координаты.

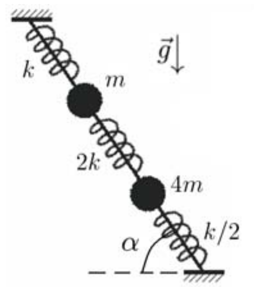


187. Две бусинки массами m и $2m$ соединены пружинками жесткостями k, $2k$ и $2k$ насажаны на гладкую горизонтальную спицу, изогнутую в виде полуокружности радиуса R. Построить лагранжиан в приближении

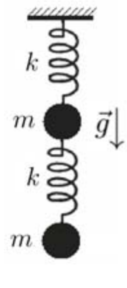
малых колебаний и найти закон малых свободных колебаний. Найти нормальные координаты.



188. Две бусинки массами m и $4m$ насажаны на прямую гладкую спицу, наклоненную под углом α к горизонту, и находятся в вертикальном однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$. Расстояние вдоль вертикали между точками крепления спицы равно h. Найти закон малых колебаний системы и нормальные колебаний.



189. Два шарика массой m каждый подвешены на невесомых пружинках жесткостями k и могут двигаться вдоль вертикали в однородном и постоянном поле тяжести. Построить лагранжиан, найти собственные частоты колебательной системы, закон малых колебаний. Привести лагранжиан к нормальному виду и найти нормальные координаты.



2.8. Динамика твердого тела

• Тензор инерции системы N точечных масс

$$J_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \Big(\boldsymbol{r}_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha\, i} x_{\alpha\, j} \Big), \tag{2.92}$$

где $\boldsymbol{r}_\alpha$ и $x_{\alpha\, i}$ – радиус-вектор и его компоненты точечной массы под номером α в системе координат, жестко связанной с системой тел (материальных точек), с началом в ее центре масс.

Непрерывный аналог (2.92)

$$J_{ij} = \int dm \Big(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \Big) = \int d^3x\, \rho(\boldsymbol{r}) \Big(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \Big), \tag{2.93}$$

где $\rho(\boldsymbol{r})$ – объемная плотность распределения массы ($d^3x \equiv dV$ – элемент объема твердого тела).

• Твердое тело можно понимать как систему бесконечного числа материальных точек, расстояние между любыми двумя точками которой остается неизменным со временем.

• В самом общем случае твердое тело имеет 6 степеней свободы, и для однозначного задания его положения требуется 6 обобщенных координат (три координаты определяют положение центра масс, еще три задают ориентацию трех осей жестко связанной с твердым телом системы координат относительно осей неподвижной системы координат).

• Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{1}{2} M \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}\, \omega_i \omega_j, \tag{2.94}$$

где M – масса твердого тела, $\boldsymbol{V}$ – скорость движения центра масс твердого тела, ω_i – проекции вектора угловой скорости вращения твердого тела на оси системы координат, жестко связанной с ним.

• Лагранжиан твердого тела

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}\,\omega_i\omega_j - U(\boldsymbol{r},t), \tag{2.95}$$

где $U(\boldsymbol{r},t)$ – потенциальная энергия твердого тела.

• Выбирая должным образом направления осей системы координат, жестко связанной с твердым телом, можно добиться диагонализации тензора инерции

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

Диагональные компоненты J_1, J_2, J_3 тензора инерции называют главными моментами инерции твердого тела. Оси системы координат, в которой тензор инерции диагонален, называют главными осями инерции твердого тела.

• Если известны компоненты тенора инерции $J_{ij}^{\text{ц.м.}}$ в системе координат с началом в центре масс тела, то компоненты J'_{ij} тензора инерции в другой системе координат, начало которой отстоит от центра масс на вектор $\boldsymbol{a}$ (начало вектора $\boldsymbol{a}$ совпадает с центром масс), могут быть вычислены по формуле

$$J'_{ij} = J_{ij}^{\text{ц.м.}} + M\Big(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\Big) \tag{2.97}$$

(теорема Штейнера).

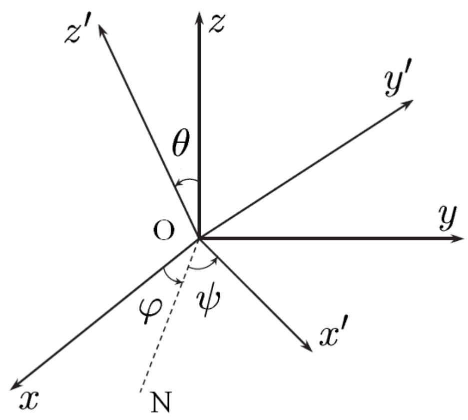
• Углы Эйлера θ, φ, ψ позволяют задать ориентацию осей системы координат x', y', z', жестко связанной с твердым телом, по отношению к осям неподвижной системы координат x, y, z.

θ – угол нутации – вводится как угол между осями z и z' (отсчитывается в направлении от оси z к оси z', $0 \leq \theta \leq \pi$);

φ – угол прецессии – вводится как угол между осью x и линией узлов ON (отсчитывается в направлении от оси x к линии узлов ON, $0 \leq \varphi < 2\pi$);

ψ – угол собственного вращения – вводится как угол между осью x' и линией узлов (отсчитывается в направлении от линии узлов ON к оси x', $0 \leq \psi < 2\pi$).

Линия узлов ON – линия пересечения координатных плоскостей xy и $x'y'$.



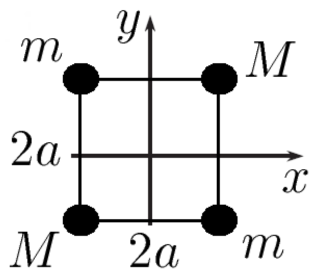
• Кинематические уравнения Эйлера позволяют записать проекции вектора угловой скорости произвольного вращения твердого тела на оси системы координат x', y', z', жестко связанной с ним:

$$\omega_{x'} = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \tag{2.98}$$

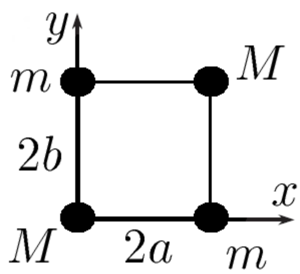
$$\omega_{y'} = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \tag{2.99}$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \tag{2.100}$$

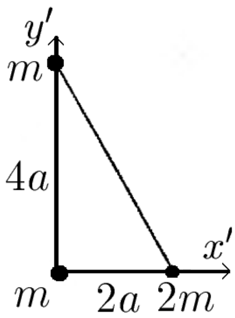
190. В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены точечные массы m и M. Найти компоненты тензора инерции относительно а) осей x, y, z; б) осей x', y', совпадающих с диагоналями квадрата, и z (ось z перпендикулярна плоскости рисунка).



191. Найти главные оси инерции и главные моменты инерции системы, состоящей из точечных масс m и M, расположенных в вершинах прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$.



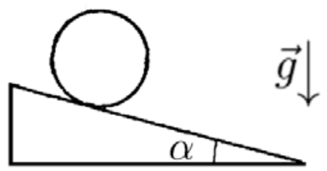
192. Найти главные оси инерции и главные моменты инерции системы, состоящей из точечных масс m и $2m$, расположенных в вершинах прямоугольного треугольника с катетами $2a$ и $4a$.



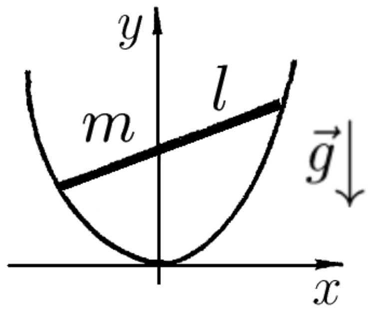
193. Определить моменты инерции однородного параболоида вращения высотой h и радиусом a плоской поверхности в системе координат с началом в центре масс.

194. Найти главные моменты инерции полой тонкостенной однородной полусферы массой m и радиусом R.

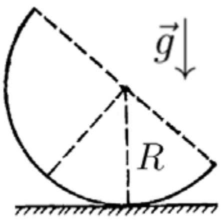
195. Диск массой m и радиусом R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости. Записать лагранжиан диска. Найти закон его движения.



196. Концы тонкого стержня массой m и длиной l скользят по спице, изогнутой по параболе $y = ax^2$ $(a > 0)$ с вертикально расположенной осью y в однородном поле тяжести. Найти период малых колебаний стержня.



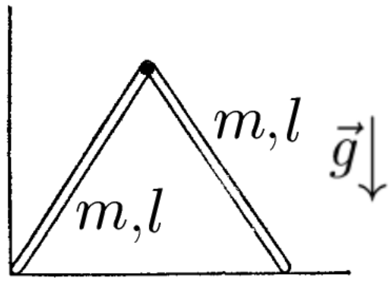
197. Однородный полый полуцилиндр массой m и радиусом R находится на шероховатой горизонтальной поверхности и может совершать линейные плоскопараллельные колебания. Найти период этих колебаний.



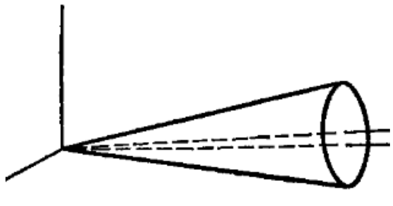
198. Монета массой m и радиусом R может двигаться произвольным образом по горизонтальной поверхности. Построить лагранжиан

монеты и найти закон ее движения в квадратурах. Главные моменты инерции монеты $J_1 = J_2 = J_0$ и $J_3 = J$.

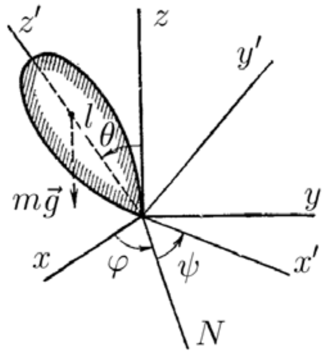
199. Стержень массой m и длиной l шарнирно закреплен в вершине прямого угла, плоскость которого расположена вертикально. К концу стержня шарнирно прикреплен такой же стержень, конец которого скользит по гладкой горизонтальной поверхности. Система находится в однородном поле тяжести. Построить лагранжиан системы и закон ее движения.



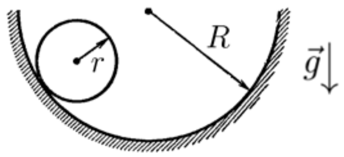
200. Найти кинетическую энергию однородного конуса, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности, если масса конуса m, его высота h, а радиус основания R.



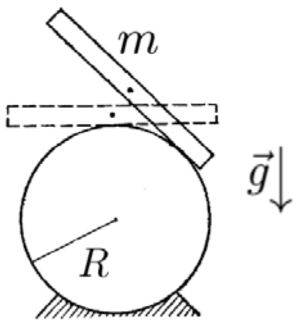
201. Построить лагранжиан и найти закон движения в квадратурах для однородного симметричного волчка массой m, если расстояние от нижней точки волчка до его центра масс l, а главные моменты инерции $J_1 = J_2$ и J_3. В качестве обобщенных координат использовать углы Эйлера.



202. Однородный цилиндр массой m и радиусом r перекатывается без проскальзывания по цилиндрической поверхности радиусом R в однородном поле тяжести. Построить лагранжиан цилиндра. Найти период его малых колебаний.

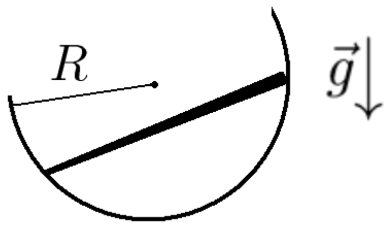


203. На неподвижный горизонтальный цилиндр радиусом R положен абсолютно шероховатый брусок массой m с прямоугольным поперечным сечением высотой $2l$ так, что продольное направление бруска перпендикулярно оси цилиндра. Определить период линейных колебаний бруска, если его главный момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси цилиндра, равен ma^2.



204. Найти частоту линейных колебаний неоднородного тонкого стержня

массой m и длиной l, концы которого скользят по расположенному в вертикальной плоскости гладкому обручу радиусом R. Плотность массы стержня линейно зависит от расстояния до одного их его концов.



205. Найти минимальное значение частоты вращения симметричного волчка вокруг вертикальной оси, при которой оно является устойчивым. Масса волчка m, расстояние от нижней точки волчка до его центра масс l, а главные моменты инерции $J_1 = J_2$ и J_3.

206. Найти минимальное значение частоты вращения диска, поставленного на ребро, при которой оно является устойчивым. Масса диска m, его радиус R, а главные моменты инерции $J_1 = J_2 = J_0$ и $J_3 = J$.

207. Найти минимальную скорость катящегося диска, при которой его движение является устойчивым. Масса диска m, его радиус R, а главные моменты инерции $J_1 = J_2 = J_0$ и $J_3 = J$.

208. Однородный цилиндр массой m и радиуса R проткнут тонким однородным стержнем массой m, расположенным на расстоянии b от оси цилиндра параллельно ей. Цилиндр может без проскальзывания перекатываться по горизонтальной поверхности. Найти частоту малых колебаний цилиндра вблизи положения его равновесия.

Глава 3

Метод Гамильтона

3.1. Функция и уравнения Гамильтона

• Функция Гамильтона, или гамильтониан (этот термин и будем ниже использовать), определяется соотношением

$$H = H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\dot{q},q,t)\Bigg|_{\dot{q}_i=\dot{q}_i(p,q,t)}, \tag{3.1}$$

где предполагается, что в правой части необходимо выразить обобщенные скорости $\dot{q}_i$ через канонические переменные p_i, q_i на основе системы уравнений

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = \overline{1,s}),$$

определяющих обобщенные импульсы как функции обобщенных координат и скоростей.

• Равенство (3.1), позволяющее по заданному лагранжиану $\mathcal{L}$ построить гамильтониан H, выражает прямое преобразование Лежандра, которое, согласно теореме о неявной функции, может быть осуществлено при выполнении условия

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \tag{3.2}$$

• Обратное преобразование Лежандра позволяет по заданному гамильтониану H построить ларанжиан $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)\Big|_{p_i = p_i(\dot{q}, q, t)}, \tag{3.3}$$

где предполагается, что в правой части необходимо выразить обобщенные импульсы p_i через переменные $\dot{q}_i, q_i$ на основе системы уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = \overline{1, s})$$

и, согласно теореме о неявной функции, это может быть осуществлено при выполнении условия

$$\det\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0. \tag{3.4}$$

• Динамика системы с гамильтонианом $H(p, q, t)$ описывается каноническими уравнениями Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d. \end{cases} \tag{3.5}$$

где Q_i^d – обобщенная диссипативная сила (2.5):

$$Q_i^d = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha^d \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i}. \tag{3.6}$$

• По своему смыслу гамильтониан представляет собой обобщенную энергию системы, записанную в канонических переменных p, q:

$$H(p, q, t) = E(p, q, t). \tag{3.7}$$

209. Показать, что из справедливости уравнений Лагранжа следуют уравнения Гамильтона.

210. Показать, что из справедливости уравнений Гамильтона следуют уравнения Лагранжа.

211. Построить гамильтониан системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\Big) - U(r).$$

212. Построить лагранжиан системы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho, \varphi).$$

213. Построить лагранжиан системы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2 + e\varphi(\boldsymbol{r}, t).$$

214. Построить гамильтониан системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}} - U(\boldsymbol{r}, t).$$

215. Построить гамильтониан системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - e\varphi(\boldsymbol{r}, t).$$

216. Построить лагранжиан системы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi - \frac{eH_0}{2c}\,\rho^2\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + mgz.$$

217. Построить лагранжиан системы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \frac{c}{n(\boldsymbol{r})}\sqrt{\boldsymbol{p}^2},$$

где $n(\boldsymbol{r})$ – заданная функция координат. Объяснить полученный результат.

218. Показать, что для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{c}{n(\boldsymbol{r})}\sqrt{\boldsymbol{p}^2},$$

условие (3.4) нарушено.

219. Показать, что из уравнений Гамильтона для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{c}{n(\boldsymbol{r})}\sqrt{\boldsymbol{p}^2},$$

следует закон преломления Снеллиуса

$$n(\boldsymbol{r})\sin\theta = \mathrm{const},$$

где θ – угол между вектором скорости $\dot{\boldsymbol{r}}$ и вектором $\boldsymbol{\nabla} n(\boldsymbol{r})$.

220. Шарик массой m и зарядом q подвешен на нити длиной l и совершает колебания в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и слабом горизонтальном электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Построить гамильтониан шарика. Записать уравнения Гамильтона.

221. Частица массой m и зарядом q движется по поверхности конуса с углом полного раствора 2α в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и вертикальном электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Построить гамильтониан частицы.

222. Бусинка массой m и зарядом q нанизана на спицу, изогнутую по параболе $y = bx^2$ ($b > 0$), которая вращается вокруг оси y с постоянной угловой скоростью ω в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Построить гамильтониан бусинки.

223. Бусинка массой m и зарядом q нанизана на прямую спицу, которая вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, образуя постоянный угол α с вертикалью, в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Построить гамильтониан бусинки.

224. Две бусинки массами m_1 и m_2 и зарядом q каждая нанизаны на спицу, изогнутую по параболе $y = ax^2$, которая вращается вокруг оси y с постоянной угловой скоростью ω в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g}$ и магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Бусинки связаны пружиной жесткостью k и длиной l_0 в недеформированном состоянии. Построить гамильтониан системы.

225. Лагранжиан математического маятника имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 - m\omega^2\Big(1 - \cos\varphi\Big).$$

Построить гамильтониан маятника, выбирая в качестве обобщенной координаты

$$x = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

226. Частица массой m и зарядом e движется в однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. В калибровке векторного потенциала

$$A_x = -H_0 y, \quad A_y = A_z = 0$$

построить гамильтониан. Составить уравнения Гамильтона и найти закон движения.

3.2. Скобки Пуассона

• Скобка Пуассона определяется равенством

$$\{A(p,q,t),B(p,q,t)\} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right). \qquad (3.8)$$

• Свойства скобок Пуассона

1^0. Некоммутативность:

$$\{A,B\} = -\{B,A\}. \qquad (3.9)$$

2^0. Билинейность:

$$\{c_1A + c_2B, D\} = c_1\{A,D\} + c_2\{B,D\}, \qquad (3.10)$$

$$\{D, c_1A + c_2B\} = c_1\{D,A\} + c_2\{D,B\} \qquad (3.11)$$

$(c_1, c_2 = \mathrm{const})$.

3^0. «Правило Лейбница»

$$\{AB, D\} = A\{B,D\} + B\{A,D\}. \qquad (3.12)$$

4^0. Неассоциативность

$$\{A,\{B,C\}\} + \{C,\{A,B\}\} + \{B,\{C,A\}\} = 0 \qquad (3.13)$$

(тождество Якоби).

• Фундаментальные скобки Пуассона:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \qquad (3.14)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \qquad (3.15)$$

$$\{q_i, q_j\} = 0. \qquad (3.16)$$

• Полная производная по времени от произвольной функции $F(p,q,t)$ канонических переменных

$$\frac{d}{dt}F(p,q,t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H,F\} \qquad (3.17)$$

(верно в предположении, что отсутствуют диссипации $Q_i^d = 0$).

• Уравнения Гамильтона (3.5) могут быть записаны в эквивалентной форме через скобки Пуассона (диссипации отсутствуют):

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \{H, p_i\}, \\ \dot{q}_i = \{H, q_i\}. \end{cases} \tag{3.18}$$

• Тензор Леви-Чивиты ε^{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга, такой что

$$\varepsilon^{123} = 1. \tag{3.19}$$

(Для тензора Леви-Чивиты третьего ранга мы не делаем различия между ко– и контравариантными индексами: $\varepsilon^{ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}$, поскольку речь идет о трехмерном евклидовом пространстве с правой системой координат.)

Полная антисимметричность означает, что перестановка любых двух индексов ведет к смене знака:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{jik}, \\ \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{ikj}, \\ \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{kji}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

С помощью тензора Леви-Чивиты можно компактно в тензорном виде записывать компоненты векторного произведения векторов. Если

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C},$$

то i-я компонента вектора $\boldsymbol{A}$ может быть записана как

$$A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k, \tag{3.21}$$

где считается справедливым правило суммирования Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам понимается суммирование $\left(\sum\limits_{j,k=1}^{3}\right)$.

Так i-я компонента вектора момента импульса $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$:

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

а i-ая компоненты вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$:

$$H_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k.$$

Важными являются следующие свойства тензора Леви-Чивиты.

1^0. Произведение двух компонент тензора Леви-Чивиты может быть представлено в виде определителя размером 3×3, составленного из δ–символов (тензоров Кронекера):

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abc} = \begin{vmatrix} \delta^i_a & \delta^i_b & \delta^i_c \\ \delta^j_a & \delta^j_b & \delta^j_c \\ \delta^k_a & \delta^k_b & \delta^k_c \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

(строки пронумерованы индексами первого тензора Леви-Чивиты, а столбцы – второго.)

2^0. Свертка двух тензоров Леви-Чивиты по одному индексу может быть представлена в виде определителя 2×2, составленного из δ–символов (тензоров Кронекера):

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kbc} = \begin{vmatrix} \delta^i_b & \delta^i_c \\ \delta^j_b & \delta^j_c \end{vmatrix} = \delta^i_b\delta^j_c - \delta^i_c\delta^j_b. \tag{3.23}$$

3^0. Свертка двух тензоров Леви-Чивиты по двум индексам:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijn} = 2\delta^n_k. \tag{3.24}$$

4^0. Свертка двух тензоров Леви-Чивиты по трем индексам:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6. \tag{3.25}$$

227. Вычислить скобки Пуассона а) $\{p_k, F(q)\}$, б) $\{q_k, F(p)\}$.

228. Для классической частицы массой m, движущейся в произвольном электромагнитном поле, вычислить скобку Пуассона для компонент вектора скорости $\{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}$. Ответ выразить через напряженность магнитного поля.

229. Вычислить скобку Пуассона $\{L_i, x_j\}$, где L_i – компоненты вектора момента импульса (то же в задачах 230–235).

230. Вычислить скобку Пуассона $\{L_i, p_j\}$.

231. Вычислить скобку Пуассона $\left\{L_i, \boldsymbol{r}^{\,2}\right\}$.

232. Вычислить скобку Пуассона $\left\{L_i, \boldsymbol{p}^{\,2}\right\}$.

233. Вычислить скобку Пуассона $\{L_i, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\}$.

234. Вычислить скобку Пуассона $\{L_i, L_j\}$.

235. Вычислить скобку Пуассона $\left\{L_i, \boldsymbol{L}^2\right\}$.

236. Найти F_{ijk}, задаваемое скобкой Пуассона

$$F_{ijk} = \Big\{ \left(x_i p_j + f(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\,\delta_{ij}\right),\, \varepsilon_{kmn} p_m x_n \Big\},$$

где по дважды повторяющимся индексам понимается суммирование, f – заданная функция.

237. Найти F_{ijk}, задаваемое скобкой Пуассона

$$F_{ijk} = \Big\{ \left(p_i p_j + f(\boldsymbol{r}^2)\, x_i x_j\right),\, x_j p_n p_m \Big\},$$

где по дважды повторяющимся индексам понимается суммирование, f – заданная функция.

238. Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} I_{ij} L_i L_j + B_i L_i,$$

где L_i – компоненты вектора момента импульса, I_{ij} и B_i – постоянные тензоры, по дважды повторяющимся индексам понимается суммирование. Считая известной скобку Пуассона

$$\{L_i, L_j\} = -\varepsilon_{ijk} L_k,$$

получить уравнения движения для L_i.

239. Система описывается динамическими переменными A, B, C, скобки Пуассона которых известны:

$$\{A, B\} = C - \frac{AB}{C}, \quad \{A, C\} = -A \quad \{B, C\} = B.$$

Гамильтониан этой системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{4} C^4.$$

Написать уравнения движения для переменных A, B, C и найти закон движения $A(t), B(t), C(t)$ системы.

240. Для частицы, движущейся в центральном поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (задача Кеплера), с гамильтонианом

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$$

вычислить скобку Пуассона $\{H, \boldsymbol{A}\}$, где $\boldsymbol{A}$ – вектор Лапласа–Рунге–Ленца

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\alpha \boldsymbol{r}}{r}$$

($\boldsymbol{L}$ – вектор момента импульса частицы).

241. Показать путем вычисления скобки Пуассона $\{L_z, H\}$, что компонента L_z момента импульса частицы, движущейся в центральном поле, является интегралом движения. Гамильтониан частицы

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_z^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

3.3. Интегралы движения в методе Гамильтона

• Интегралом движения называется функция канонических переменных p, q и времени, сохраняющая свое значение неизменным при эволюции системы:

$$F(p(t), q(t), t) = \text{const для } \forall t, \tag{3.26}$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{d}{dt}F(p(t), q(t), t) = 0. \tag{3.27}$$

• Достаточным условием того, чтобы функция $F(p(t), q(t), t)$ была интегралом движения, является одновременное выполнение двух условий (согласно (3.17)):

$$1) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{3.28}$$

$$2) \quad \{H, F\} = 0. \tag{3.29}$$

• Правила нахождения интегралов движения по виду гамильтониана:

1. Если гамильтониан явно от времени не зависит,

$$H = H(p, q),$$

и отсутствуют диссипации ($Q_i^d = 0$), то сам гамильтониан является интегралом движения

$$H(p, q) = \text{const}.$$

2. Если для гамильтониана имеется циклическая координата q_k,

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0,$$

то есть гамильтониан устроен так, что

$$H = H(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_s; q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_s; t), \tag{3.30}$$

и отсутствуют диссипации ($Q_i^d = 0$), то обобщенный импульс p_k, соответствующий циклической координате q_k, является интегралом движения:

$$p_k = \text{const}.$$

3. Если имеет место факторизация зависимости гамильтониана от пары канонически сопряженных переменных в некоторую функцию $f(p_k, q_k)$, то есть гамильтониан устроен так, что

$$H = H\Big(f(p_k, q_k), p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_s; q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_s; t\Big),$$

то в отсутствие диссипаций ($Q_i^d = 0$) функция $f(p_k, q_k)$ является интегралом движения:

$$f(p_k, q_k) = \text{const}.$$

(Также справедливо тривиальное обобщение на случай, когда имеет место факторизация нескольких пар канонически сопряженных переменных.)

• Теорема Пуассона: если две функции $F(p, q, t)$ и $G(p, q, t)$ являются интегралами движения, то скобка Пуассона

$$\{F(p, q, t), G(p, q, t)\}$$

также является интегралом движения.

• Для нахождения закона движения системы в квадратурах необходимо найти столько интегралов движения, сколько степеней свободы имеет система.

242. Найти закон движения в квадратурах для системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\Big) - \frac{a\cos\varphi}{\rho^2} \quad (a = \text{const}).$$

243. Частица в центральном поле $U(r)$ в сферических координатах описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\Big) - U(r).$$

Найти закон движения частицы в квадратурах.

244. Частица движется по поверхности сферы радиусом R в однородном поле тяготения $\boldsymbol{g}$. Построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

245. Частица массой m и зарядом e движется по сфере радиусом R в поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также однородных и постоянных электрическом $\boldsymbol{E} = -E_0\boldsymbol{e}_z$ и магнитном $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$ полях. Построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

246. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \text{const}$) в постоянных и однородных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, электрическом и магнитном полях, напряженности которых соответственно $\boldsymbol{E} = -E_0\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

247. Частица массой m и зарядом e движется по внутренней поверхности конуса с углом раствора α в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также электрическом и магнитном полях, напряженности которых соответственно $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Ось конуса совпадает с осью z, его вершина находится в начале координат, конус расположен в полупространстве $z > 0$. Построить гамильтониан. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

248. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$ ($a = \text{const}$) в постоянных и однородных поле тяжести

$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и магнитном поле, напряженность которого $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Построить гамильтониан точки. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

249. Частица массой m и зарядом e движется по внутренней поверхности конуса с углом раствора α в постоянном и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также магнитном поле, напряженность которого $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Ось конуса совпадает с осью z, его вершина находится в начале координат, конус расположен в полупространстве $z > 0$. Построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

250. Частица массой m и зарядом e движется по сфере радиусом R в поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ и однородном и постоянном магнитное поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения в квадратурах.

251. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,p_1^2\left(\frac{1}{2}\,p_2^2 + \frac{1}{2}\,\omega_0^2 q_2^2\right) + \frac{1}{2}\,\omega_0^2 q_1^2.$$

Найти закон движения системы.

252. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2} + a\,\frac{p_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right) + b\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right)\left(\frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2}\right).$$

Найти закон движения системы явно $(a, b = \mathrm{const})$.

253. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}\right)^n.$$

Найти закон движения системы $(n > 2,\ \lambda = \mathrm{const})$.

254. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2}{p_2^2 + \sin^2 q_2} + \sin^2 q_1.$$

Найти закон движения системы.

255. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2}\right).$$

Найти закон движения системы.

256. Используя метод интегралов движения, найти явно закон движения системы, которая описывается лагранжианом ($a = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + x^4\,\dot{y}^2\Big) - \frac{a\,\text{ch}y}{x^4}.$$

257. Частица массой m и зарядом e движется в однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0 \boldsymbol{e}_z$. В калибровке векторного потенциала

$$\boldsymbol{A} = -H_0 y\,\boldsymbol{e}_x$$

построить гамильтониан частицы. Указать интегралы движения. Найти закон движения.

258. Частица описывается лагранжианом ($a = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\Big) - a\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Найти закон движения частицы в квадратурах.

259. Найти в явном виде закон движения системы, которая описывается лагранжианом ($a = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + x^4\,\dot{y}^2\Big) - \frac{a\,\text{ch}y}{x^4}.$$

260. Система описывается гамильтонианом ($\lambda = \mathrm{const}$)

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2} + \lambda\left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2}\right)\sin\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right).$$

Найти закон движения системы в явном виде.

261. Шарик массой m и зарядом e может двигаться по внутренней поверхности, образованной вращением графика некоторой функции $y = f(x)$ вокруг оси y, в однородных и постоянных магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\,\boldsymbol{e}_y$ и поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_y$. Построить гамильтониан и найти закон движения в квадратурах.

262. Частица массой m и зарядом e движется в постоянном и однородном магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\,\boldsymbol{e}_y$ по поверхности, образованной вращением верхней ветви параболы $y = a\,x^3$ $(a > 0)$ вокруг оси y. Построить гамильтониан частицы и найти закон ее движения в квадратурах.

263. По поверхности конуса с углом полураствора α может двигаться частица массой m и зарядом e. В вершине конуса закреплен точечный заряд q. Система находится в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, а также электрическом и магнитном полях напряженностями соответственно $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$. Построить гамильтониан и найти закон движения в квадратурах.

264. Система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{U(\varphi)}{r^2\,\sin^2\theta}.$$

Построить гамильтониан, указать интегралы движения и найти закон движения в квадратурах ($U(\varphi)$ – некоторая заданная функция).

265. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности вертикального конуса с углом при вершине 2γ в однородном поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_z$. В вершине конуса закреплен точечный заряд

Q. Построить гамильтониан частицы и найти ее закон движения в квадратурах.

266. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности вращения $z = f(x^2 + y^2)$ в однородных и постоянных магнитном $\boldsymbol{H} = H_0\,\boldsymbol{e}_z$ и электрическом $\boldsymbol{E} = -E_0\,\boldsymbol{e}_z$ полях. Построить гамильтониан частицы, указать по его виду интегралы движения и найти закон движения частицы в квадратурах.

267. В вершине параболоида $z = \beta\rho^2$ $(\beta > 0)$ находится неподвижный точечный электрический заряд Q. По поверхности параболоида может двигаться точечный заряд e массой m. Система находится в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_z$ и магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\,\boldsymbol{e}_z$. Построить гамильтониан и найти закон движения заряда в квадратурах.

3.4. Канонические преобразования

• Преобразования канонических переменных $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} P_i = P_i(p, q, t), \\ Q_i = Q_i(p, q, t), \end{cases} \tag{3.31}$$

которые не меняют вида уравнений Гамильтона (относительно которых уравнения Гамильтона ковариантны), называются каноническими преобразованиями.

• Условие согласованности «старых» уравнений Гамильтона в «старых» переменных (p, q) с гамильтонианом $H(p, q, t)$ и «новых» уравнений Гамильтона в «новых» переменных (P, Q) с гамильтонианом $K(P, Q, t)$:

$$c\left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) = \sum_i P_i dQ_i - K dt + dF_1(q, Q, t), \qquad (3.32)$$

где $c = \text{const}$.

• Необходимое и достаточное условие каноничности преобразования (3.31) состоит в существовании одной из четырех производящих функций, удовлетворяющих определенным уравнениям (формулам канонического преобразования, см. таблицу).

• Константа c называется валентностью канонического преобразования.

• Каноническое преобразование с валентностью $c = 1$ называется унивалентным.

• Критерий каноничности: преобразование (3.31) является каноническим тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\left\{\begin{array}{l} \Big\{P_i(p, q, t), Q_j(p, q, t)\Big\}_{p,q} = c\,\delta_{ij}, \\ \Big\{P_i(p, q, t), P_j(p, q, t)\Big\}_{p,q} = 0, \\ \Big\{Q_i(p, q, t), Q_j(p, q, t)\Big\}_{p,q} = 0, \end{array}\right.$$

где нижний индекс у скобок Пуассона $\{,\}_{p,q}$ означает, что они вычисляются по «старым» переменным (p, q).

• Равенство

$$K = cH + \frac{\partial F}{\partial t}$$

в формулах канонического преобразования следует понимать следующим образом (на примере производящей функции класса $F_1(q, Q, t)$):

Таблица: Формулы канонического преобразования для производящих функций разных классов.

Класс производящих функций	Условие существования производящей функции	Формулы канонического преобразования
$F_1(q, Q, t)$	$\det\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$	$\begin{cases} cp_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \\ K = cH + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}. \end{cases}$
$F_2(q, P, t)$	$\det\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$	$\begin{cases} cp_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}, \\ K = cH + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases}$
$F_3(p, Q, t)$	$\det\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$	$\begin{cases} cq_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i}, \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \\ K = cH + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}. \end{cases}$
$F_4(p, P, t)$	$\det\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$	$\begin{cases} cq_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i}, \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i}, \\ K = cH + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}. \end{cases}$

$$K(P,Q,t) = cH\Big(p(P,Q,t), q(P,Q,t), t\Big) + \frac{\partial F_1\Big(q(P,Q,t), Q, t\Big)}{\partial t} \quad (3.33)$$

(аналогично для F_2, F_3 и F_4) и позволяет найти явный вид «нового» гамильтониана системы после совершения канонического преобразования (3.31).

268. Выяснить, какому унивалентному каноническому преобразованию соответствует производящая функция

$$F = \sum_i Q_i q_i.$$

269. Найти производящую функцию тождественного преобразования $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} P_i = p_i, \\ Q_i = q_i. \end{cases}$$

270. Найти производящую функцию преобразования масштабирования $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} P_i = \alpha p_i, \\ Q_i = \beta q_i, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$.

271. Найти производящую функцию преобразования $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} P_i = \alpha q_i, \\ Q_i = \beta p_i, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$.

272. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$ является каноническим и найти его производящую функцию:

$$\begin{cases} P = q + e^{-q} + \ln p, \\ Q = pe^{q}. \end{cases}$$

273. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$ является каноническим и найти его производящую функцию:

$$\begin{cases} P = q^{-4}\left(p^4 - \dfrac{1}{2}q^6\right), \\ Q = pq^{-1}. \end{cases}$$

274. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$ является каноническим и найти его производящую функцию:

$$\begin{cases} P = -qp + q^5, \\ Q = \ln(p - q^4). \end{cases}$$

275. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$ является каноническим и найти его производящую функцию:

$$\begin{cases} P = \ln \dfrac{p}{4q^3}, \\ Q = \dfrac{1}{4}\,pq. \end{cases}$$

276. Подвергнуть одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 q^2$$

каноническому унивалентному преобразованию с производящей функцией

$$F = \frac{1}{2}\,m\omega q^2 \mathrm{ctg} Q.$$

Найти явный вид преобразования. Построить «новый» гамильтониан K. Записать «новые» уравнения Гамильтона и их решить. Зная решения последних, записать решения «старых» уравнений Гамильтона.

277. Подвергнуть одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 q^2$$

преобразованию $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} P = \dfrac{i}{\sqrt{2m\omega}}\Big(m\omega q - ip\Big)e^{-i\omega t}, \\ Q = \dfrac{1}{\sqrt{2m\omega}}\Big(m\omega q + ip\Big)e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Доказать, что преобразование является каноническим. Найти его производящую функцию. Построить «новый» гамильтониан K. Записать «новые» уравнения Гамильтона и их решить. Зная решения последних, записать решения «старых» уравнений Гамильтона.

278. Подвергнуть систему с гамильтонианом

$$H = \frac{pq^3}{2t}$$

преобразованию $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} P = pq^3\left(1 + t\exp(q^{-2})\right), \\ Q = q^{-2} + \ln\Big(tpq^3\Big). \end{cases}$$

Доказать, что преобразование является каноническим. Найти его производящую функцию. Найти «новый» гамильтониан K.

279. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = (\gamma\, p)^{1/\alpha}\, q^{(1-\alpha)/\alpha}, \\ P = -\,(\gamma\, p)^{(\alpha-1)/\alpha}\, q^{(2\alpha-1)/\alpha} \end{cases}$$

является каноническим $(\alpha, \gamma = \mathrm{const})$. Найти его производящую функцию.

280. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = -p\,q, \\ P = \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\, q^{\gamma}\, p^{\alpha}\right) \end{cases}$$

является каноническим ($\alpha, \gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

281. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = -\,(b\,q)^{\alpha+1}\, p^{\alpha+2}, \\ P = (b\,q)^{-\alpha}\, p^{-\alpha-1} \end{cases}$$

является каноническим ($\alpha, b = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

282. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = 2\,\mathrm{ch} q\, t, \\ P = \dfrac{p}{t\,\mathrm{sh} q\, t} \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

283. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = a\,p + \left(\dfrac{3\,q}{a\,b\,t}\right)^{1/(b-1)}, \\ P = -\,\dfrac{3\,q}{a} \end{cases}$$

является каноническим ($a, b = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

284. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = \ln q \\ P = p\,q \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

285. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = \ln\left(\dfrac{p}{\alpha\, q^{\alpha-1}}\right) \\ P = p\, q \end{cases}$$

является каноническим ($\alpha = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

286. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -\gamma\, q \\ P = p + \exp(\gamma q - 1) \end{cases}$$

является каноническим ($\gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

287. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = q + \ln p - e^{p}, \\ P = p \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

288. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -\gamma\, p\, e^{-q}, \\ P = e^{q} \end{cases}$$

является каноническим ($\gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

289. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -\dfrac{1}{2}\,\gamma\, p\, \sin 2q, \\ P = \ln \mathrm{tg} q \end{cases}$$

является каноническим ($\gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

290. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = (\gamma\, p)^{1/2}\, \dfrac{1}{\sqrt{q}}, \\ P = -q^{3/2}\, \sqrt{\gamma\, p} \end{cases}$$

является каноническим ($\gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

291. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -p\, q, \\ P = \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\, p^{\alpha}\, q^{\beta}\right), \end{cases}$$

является каноническим ($\alpha, \beta = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

292. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -\left(\dfrac{p}{\alpha + 1}\right)^{1/\alpha} - q, \\ P = -p, \end{cases}$$

является каноническим ($\alpha = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

293. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -q - \gamma\, p + t\, \cos(q\, t), \\ P = q, \end{cases}$$

является каноническим ($\gamma = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

294. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = -q + \ln p, \\ P = -p \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

295. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = \operatorname{arctg}(p\,q), \\ P = \lambda\Big(1 + (p\,q)^2\Big)\ln q \end{cases}$$

является каноническим ($\lambda = \mathrm{const}$). Найти его производящую функцию.

296. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} P = \ln\left(p^{19}\,q^{20}\right), \\ Q = p\,q \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

297. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = q^{-2} + \ln\left(2\,p\,q^3\right), \\ P = p\,q^3 + 2\,p\,q^3 \exp\left(\dfrac{1}{q^2}\right) \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

298. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} P = 2\,q\,\left(e^{(p+q)^2} + 1\right) + 2\,p\,\left(e^{(p+q)^2} - 1\right), \\ Q = p + q \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

299. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = -q \operatorname{ctg} p, \\ P = 2\,\ln\cos p \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

300. Доказать, что преобразование $(p,q) \to (P,Q)$:

$$\begin{cases} Q = q\,p, \\ P = \ln\left(q^{20}\,p^{19}\right) \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

301. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right), \\ P = 2\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

302. При каких значениях параметров α и β преобразование$(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q = q^{\alpha}\cos\beta p, \\ P = q^{\alpha}\sin\beta p \end{cases}$$

является каноническим? Какова в этом случае его производящая функция?

303. Найти производящую функцию преобразования канонических переменных $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) \to (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R})$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \dfrac{e}{c}\,\boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}, t), \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}, \end{cases}$$

соответствующего калибровочному преобразованию

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}, t), \qquad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}.$$

для заряженной частицы в электромагнитном поле ($\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ – произвольная скалярная функция).

304. Подвергнуть систему с гамильтонианом $H = H(p, q)$ преобразованию $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} P = p, \\ Q = \mu q + \dfrac{\partial\varphi(p, t)}{\partial t}, \end{cases}$$

где $\mu = \mathrm{const}$, $\varphi(p, t)$– заданная функция. Доказать, что преобразование является каноническим. Найти его производящую функцию. Найти «новый» гамильтониан K.

305. Доказать, что преобразование канонических переменных $(p_x, p_y; x, y) \to (P_x, P_y; X, Y)$:

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2p_x}\cos x - y\right), \\[2ex] X = \dfrac{1}{a}\left(\sqrt{2p_x}\sin x + p_y\right), \\[2ex] P_y = \dfrac{a}{2}\left(-\sqrt{2p_x}\sin x + p_y\right), \\[2ex] Y = \dfrac{1}{a}\left(\sqrt{2p_x}\cos x + y\right) \end{cases}$$

является каноническим. Найти его производящую функцию.

306. Доказать, что преобразование $(p, q) \to (P, Q)$:

$$\begin{cases} Q_i = q_i, \\ P_i = p_i - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\, g(q, t), \end{cases}$$

где $g(q, t)$ – некоторая заданная функция обобщенных координат и времени, является каноническим. Найти его производящую функцию.

307. Для системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + fx \qquad (f = \mathrm{const})$$

построить явный вид преобразования $(p, x) \to (P, X)$:

$$\begin{cases} P(t) = p(t + \tau), \\ X(t) = x(t + \tau) \end{cases}$$

и найти его производящую функцию.

308. Для одномерного гармонического осциллятора с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

построить явный вид преобразования $(p, x) \to (P, X)$:

$$\begin{cases} P(t) = p(t+\tau), \\ Q(t) = q(t+\tau) \end{cases}$$

и найти его производящую функцию.

309. Частица массой m, движущаяся в центральном поле, описывается в цилиндрических координатах лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right).$$

Совершить каноническое унивалентное преобразование

$$(p_\rho, p_\varphi, p_z; \rho, \varphi, z) \to (P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3)$$

с производящей функцией

$$F = P_1\sqrt{\rho^2 + z^2} + P_2 \operatorname{arctg}\frac{\rho}{z} + P_3\,\varphi.$$

Записать явный вид этих преобразований и построить «новый» гамильтониан K.

3.5. Метод Гамильтона–Якоби

• Метод Гамильтона–Якоби основан на идее о принципиальной возможности для любого гамильтониана подобрать некоторое каноническое преобразование, приводящее к «новому» гамильтониану $K = 0$.

• Уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) = 0, \tag{3.28}$$

где первый аргумент функции Гамильтона в виде частной производной означает, что в функции Гамильтона необходимо все обобщенные импульсы заменить на частные производные по соответствующим обобщенным координатам:

$$p_i \to \frac{\partial F}{\partial q_i}. \qquad (3.28)$$

• По своему смыслу, функция F в уравнении Гамильтона–Якоби (3.5) есть производящая функция некоторого канонического унивалентного преобразования, приводящего к «новой» функции Гамильтона $K = 0$.

• В физических приложениях необходимо знать частное решение уравнения Гамильтона–Якоби (3.5) – полный интеграл,– некоторое решение, зависящее от стольких произвольных констант, каково число независимых переменных (оно равно $s + 1$) в уравнении, причем одна из них входит аддитивным образом:

$$F = F(q_1, q_2, \ldots, q_s; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s; t) + \beta_{s+1}. \qquad (3.28)$$

• Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби находится методом разделения переменных, причем переменные делят аддитивно, и в случае полного разделения переменных имеем:

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = T(t) + Q_1(q_1) + Q_2(q_2) + \ldots + Q_s(q_s). \qquad (3.28)$$

• Согласно теореме Якоби, закон движения может быть найден путем дифференцирования полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби по неаддитивным константам и приравнивания производных новым произвольным константам:

$$\alpha_i = \frac{\partial F(q, \beta, t)}{\partial \beta_i} \qquad \Rightarrow \qquad q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \equiv q_i(t). \qquad (3.29)$$

• Константы β_i, являющиеся по своему смыслу интегралами движения, могут быть найдены с помощью формул канонического преобразования:

$$p_i = \frac{\partial F(q,\beta,t)}{\partial q_i} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_i = \beta_i(p,q,t) = \mathrm{const}. \tag{3.29}$$

310. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения в квадратурах для одномерной частицы массой m, движущейся вдоль ось x в потенциальном поле $U(x)$.

311. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения в квадратурах для частицы массой m, движущейся в центральном поле $U(r)$, в полярных координатах плоскости Лапласа.

312. Методом Гамильтона–Якоби в сферических координатах найти закон движения в квадратурах для частицы массой m, движущейся в центральном поле $U(r)$.

313. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения в квадратурах для системы, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\Big) - \frac{a\cos\varphi}{\rho^2} \quad (a = \mathrm{const}).$$

314. Частица описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\Big) - a\dot\varphi\cos\theta \quad (a = \mathrm{const}).$$

Найти закон движения частицы в квадратурах методом Гамильтона–Якоби.

315. Методом Гамильтона–Якоби найти явно закон движения системы, которая описывается функцией Лагранжа ($a = \mathrm{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot x^2 + x^4\,\dot y^2\Big) - \frac{a\,\mathrm{ch}y}{x^4}.$$

316. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2} + a\,\frac{p_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right) + b\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right)\left(\frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2}\right).$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы в явном виде $(a, b = \mathrm{const})$.

317. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2} + \lambda\left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2}\right)\sin\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right).$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы явно $(\lambda = \mathrm{const})$.

318. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}\right)^n.$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы. $(\lambda, n = \mathrm{const},\ n > 1)$.

319. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{1}{2}\,p_1^2\left(\frac{1}{2}\,p_2^2 + \frac{1}{2}\,\omega_0^2 q_2^2\right) + \frac{1}{2}\,\omega_0^2 q_1^2.$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы.

320. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2}\right).$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы.

321. Частица массой m и зарядом e движется по поверхности вращения $z = a\rho^6$ $(a = \mathrm{const})$ в однородных и постоянных поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}_z$ и электрическом поле $\boldsymbol{E} = -\,E_0\,\boldsymbol{e}_z$. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения частицы в квадратурах.

322. Система описывается гамильтонианом
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1-q_2} + \left(p_3^2+\frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1+q_2\right)\right).$$
Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы.

323. Система описывается функций гамильтонианом
$$H = g(t)\,\frac{\exp\Big(p_1+q_1\Big)^2 - \exp\Big(p_2+q_2\Big)^2}{\exp\Big(2(p_1+q_1)\Big)+\exp\Big(2(p_2+q_2)\Big)},$$
где $g(t)$ – заданная функция времени. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы.

324. В параболических координатах ξ, η, φ
$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi-\eta), \quad \varphi = \varphi$$
методом Гамильтона–Якоби найти закон движения в квадратурах для частицы массой m, движущейся в центральном поле
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

325. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 \sin q_2\right) - \frac{1}{2}\Big(q_1^2+q_2^2\Big).$$

326. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой лагранжианом
$$\mathcal{L} = \dot q_1^2\,\mathrm{tg} q_1 + \frac{\cos q_2}{\cos q_1}\,\dot q_2^2.$$

327. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой гамильтонианом
$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right) - q_2^2 + \frac{1}{q_3^2} + \frac{1}{\sin^2 q_1}$$

при заданных начальных условиях

$$q_i(0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right), \qquad \dot{q}_i(0) = (\sqrt{2}, 1, 0).$$

328. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + q_1 + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3^2}$$

при заданных начальных условиях

$$q_i(0) = (0, 1, 1), \qquad \dot{q}_i(0) = (1, 0, 0).$$

329. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{\sin^2 q_1} + \mathrm{th}^2 q_2$$

при заданных начальных условиях

$$q_i(0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \qquad \dot{q}_i(0) = (1, 2, 1).$$

330. Методом Гамильтона–Якоби в полярных координатах плоскости Лапласа найти закон движения частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

при заданных начальных условиях

$$\boldsymbol{r}(0) = x_0 \boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{v}(0) = v_1 \boldsymbol{e}_x + v_2 \boldsymbol{e}_y.$$

331. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4}\, q_2^2\, q_1^5\, p_1^2 + \frac{13}{251}\, p_2^2\, q_2^3 + \frac{7}{9}\, q_2^2\, q_1^7.$$

332. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = A(x_1)\,\dot{x_1}^2 + B(x_1)\Big(\dot{x_2}^2 + C(x_2)\,\dot{x_3}^2\Big) - D(x_1),$$

где A, B, C, D – заданные функции указанных аргументов.

333. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\Big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\Big)} - U(\rho).$$

334. Методом Гамильтона–Якоби в декартовых координатах найти закон движения свободной трехмерной релятивистской частицы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}}.$$

335. Методом Гамильтона–Якоби в сферических координатах найти закон движения релятивистской частицы, движущейся в центральном поле $U(r) = -\,\dfrac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}} - U(r).$$

336. Методом Гамильтона–Якоби в сферических координатах найти закон движения трехмерного релятивистского осциллятора с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

337. Для системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \sqrt{a\,\dot{x}^2 + b\,x^2 + c}\,,$$

где a, b, c – константы, найти закон движения методом Гамильтона–Якоби.

338. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\Big(p_1^2\, q_1^4 + p_2^2\, q_1^2 - 2\, q_1^2\, q_2\Big).$$

339. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом ($b = \text{const}$)

$$H = \frac{1}{2}\Big(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\cos^2 q_1}\Big) + b\,\sin q_1.$$

340. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = \frac{\Big(p_1^2 + q_1^2\,\cos q_1\Big)}{2}\, q_2^2 + \frac{1}{2}\, p_2^2\,\cos q_2.$$

341. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = p_1^2 + \sin q_1 + \frac{\Big(p_2 + p_3 \cos q_2\Big)^2}{q_2^2}.$$

342. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = p_1^2 + q_1^2 + \frac{p_2^2 + p_3^2}{q_2^2 + q_3^2}.$$

343. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_3^2}{q_2^2\, q_3^2}\right).$$

344. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1 - q_2} + \left(p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)(q_1 + q_2)\right].$$

345. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом
$$H = \frac{p_1^2\, q_1^2 + p_2^2\, q_2^2}{2\, p_1^2\, q_1^2 + 3\, p_2^2\, q_2^2}\, \sin t.$$

346. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом
$$H = \frac{p_1^2 + \sin^2 q_1 + p_2^2 + \cos^2 q_2}{p_1^2 - \sin^2 q_1 + p_2^2 - \cos^2 q_2}.$$

347. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dot{q}_2^2\right) + \dot{q}_3^2 - 2\, q_1^2\, q_2^2.$$

348. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2\, q_1^4 + \dot{q}_2^2\, q_1^2\right) - \frac{q_2^2}{q_1^2}.$$

349. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2\, q_1^2 + \dot{q}_2^2\, q_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - \cos q_1.$$

350. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - \frac{1}{2}\, q_1^2\, q_2^2.$$

351. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\, \sin q_2\right) - \frac{1}{2}\,(q_1^2 + q_2^2).$$

352. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2\, \operatorname{tg} q_1 + \frac{\cos q_2}{\cos q_1}\, \dot{q}_2^2\right).$$

353. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(q_1^4\,\dot{q}_1^2 + \frac{\sin q_2}{\cos q_1}\,\dot{q}_2^2\right) - q_2^2\cos q_1.$$

354. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \frac{1}{4}\,\dot{q}_2^2\operatorname{ctg} q_2 + \dot{q}_3^2 - q_1^2\,q_2^2\,\sin q_1.$$

355. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}_1^2}{4\,q_2^2} + \frac{\dot{q}_2^2}{4\,q_2^2} - 3\,q_1^2\,q_2^2 + f(q_2),$$

где $f(q_2)$ – некоторая непрерывная и дифференцируемая функция.

356. Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{\exp\Big(2(p_1+q_1)\Big) + \exp\Big(2(p_2+q_2)\Big)}{\exp\Big(p_1+q_1\Big) + \exp\Big(p_2+q_2\Big)}\,f(t),$$

где $f(t)$ – заданная функция времени.

357. Найти уравнение траектории и закон движения частицы массой m и зарядом e в неоднородном электрическом поле $\boldsymbol{E} = (ax, 0, bz)$ методом Гамильтона–Якоби.

358. В сферических координатах методом Гамильтона–Якоби найти уравнение траектории и закон движения (в квадратурах) частицы массой m в центральном поле $U(r) = ar^2$, $a > 0$.

359. Стержень массой m и длиной l скользит по сторонам прямого угла без трения. Найти закон движения стержня методом Гамильтона–Якоби при условии, что в начальный момент времени стержень покоится, а угол, который он составляет с горизонталью, равен α_0.

3.6. Переменные действие–угол. Адиабатические инварианты

• Переменные действие–угол – особые канонические переменные, которые могут быть введены для систем, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Система является обобщенно-консервативной, то есть для нее обобщенная энергия является интегралом движения. В частности, гамильтониан H системы не зависит явно от времени

$$H = H(p, q)$$

и отсутствуют диссипации ($Q_i^d = 0$).

2. Существует набор канонических переменных (p, q), допускающий полное разделение переменных, то есть гамильтониан системы устроен так, что имеет место факторизация для каждой пары (p_i, q_i) канонически сопряженных переменных в некоторую функцию Ψ_i:

$$H = H\left(\Psi_1(p_1, q_1), \Psi_2(p_2, q_2), \ldots \Psi_s(p_s, q_s)\right), \qquad (3.29)$$

причем одна функция Ψ может входить в другую.

3. Система совершает периодическое или условно-периодическое движение, то есть либо 1) каждая из переменных в канонически сопряженной паре $(p_i(t), q_i(t))$ является периодической функцией

одного периода T_i (случай либрации), либо 2) каждый обобщенный импульс p_i является периодической функцией соответствующей обобщенной координаты q_i: $p_i = p_i(q_i)$, при этом сама обобщенная координата $q_i(t)$ не является периодической функцией времени (случай вращения).

• Для того чтобы перейти к переменным действие–угол, необходимо совершить каноническое унивалентное преобразование, взяв в качестве производящей функции координатную часть полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби.

• Переменная действие (или просто действие) вводится как интеграл по полному периоду изменения импульса p_i как функции соответствующей координаты q_i:

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i. \tag{3.29}$$

• Особенностью переменных действия является их постоянство

$$\mathcal{J}_i = \text{const}. \tag{3.29}$$

• Переменная угол w, как канонически сопряженная переменная к переменной действия, эволюционирует во времени по линейному закону

$$w_i(t) = \frac{\partial H(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}_i} t + w_{0i}, \tag{3.29}$$

причем производные в линейном по t слагаемом, по сути, определяют собственные частоты системы:

$$\omega_i = \frac{\partial H(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}_i}. \tag{3.29}$$

• «Новый» гамильтониан K, полученный после совершения канонического преобразования к переменным действие–угол, зависит только от переменных действия и представляет собой«старый» гамильтониан H, выраженный через переменные действия:

$$K = H(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_s). \tag{3.29}$$

• Адиабатически медленным называется такое изменение со временем параметра $\lambda(t)$, при котором величина его изменения за характерный временной промежуток системы, равный периоду системы T, пренебрежимо мала по сравнению со значением самого параметра:

$$\left|\frac{d\lambda}{dt}\right| \ll \frac{\lambda}{T}. \tag{3.29}$$

• Будем считать, что если зафиксировать значение параметра λ

$$\lambda = \mathrm{const},$$

то система будет удовлетворять требованиям 1, 2 и 3. В таком случае при адиабатически медленном изменении параметра λ система в каждый момент времени близка по своим свойствам к консервативным системам с полностью разделяющимися переменными и совершающими периодическое или условно-периодическое движение.

При выполнении этих требований переменные действия являются адиабатическими инвариантами, то есть сохраняют свои значения неизменными, являясь функциями изменяющихся со временем энергии и параметров системы.

360. Используя переменные действие–угол, найти собственную частоту одномерного гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

361. Для задачи Кеплера в полярных координатах

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{\rho}$$

вычислить переменные действия $\mathcal{J}_\rho$ и $\mathcal{J}_\varphi$ и записать гамильтониан в переменных действие–угол.

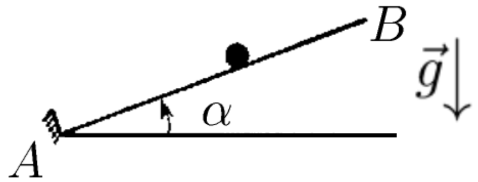
362. Лагранжиан системы имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4\,\dot{y}^2 + 3\,\dot{z}^2\right) - \alpha\, xy - \frac{m}{2}\left(\omega_1^2\, x^2 + \omega_2^2\, y^2 + \omega_3^2\, z^2\right).$$

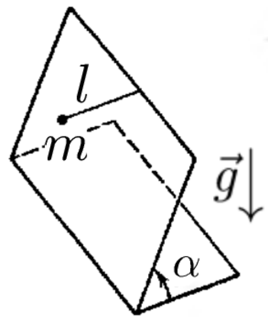
Записать гамильтониан в переменных действие–угол.

363. Длина математического маятника $l = l(t)$ изменяется со временем адиабатически медленно. Определить, как со временем меняются энергия малых колебаний маятника и его амплитуда.

364. Шарик массой m, двигаясь по гладкой наклонной плоскости AB в однородном поле тяжести $\boldsymbol{g}$, в нижней точке A испытывает упругое столкновение со стенкой. Найти, как со временем изменяются энергия и максимальная высота подъема шарика при адиабатически медленном изменении угла α наклонной плоскости.



365. Математический маятник массой m и длиной l совершает малые колебания, скользя по гладкой наклонной плоскости с углом α при основании. Определить, как меняется со временем амплитуда колебаний маятника при адиабатически медленном изменении угла α.



366. Выяснить, как со временем меняется радиус орбиты частицы массой m и зарядом e в магнитном поле $\boldsymbol{H} = H_0 \boldsymbol{e}_z$ при адиабатически медленном изменении его напряженности $H_0 = H_0(t)$.

367. Определить, как со временем меняется энергия системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\Big) - \frac{k}{2}\Big(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha\, x_1\, x_2\Big)$$

$(0 < \alpha < 1)$, при адиабатически медленном изменении параметра α.

368. Определить, как со временем меняется энергия системы, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\Big) - \frac{k}{2}\Big(x_1^2 + 2x_2^2 - x_1\, x_2\Big),$$

при адиабатически медленном изменении параметра k.

369. Определить, как со временем меняется амплитуда малых колебаний математического маятника, представляющего собой материальную точку массой m и зарядом e, подвешенную на нити длиной l, и находящегося в однородном постоянном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\, \boldsymbol{e}_z$ и однородном электрическом поле с медленно меняющейся по модулю напряженностью $\boldsymbol{E} = -E_0\, \boldsymbol{e}_z$.

370. Бусинка массой m и зарядом e надета на спицу, изогнутую по параболе $y = -b\,x^2$ $(b > 0)$, и совершает малые колебания в вертикальной плоскости в однородном и постоянном электрическом поле $\boldsymbol{E} = E_0\, \boldsymbol{e}_y$.

Найти, как меняется со временем амплитуда колебаний бусинки при адиабатически медленном изменении параметра b параболы. Полем тяготения пренебречь.

371. Определить, как со временем меняется энергия частицы массой m, движущейся в центральном поле $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$ $(\alpha < 0)$ при адиабатически медленном изменении параметра α. Лагранжиан частицы в полярных координатах плоскости Лапласа

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{\rho}.$$

372. Определить, как изменяется энергия частицы массой m и зарядом e в центральном поле $U(r)$ при адиабатически медленном включении слабого однородного магнитного поля напряженностью $\boldsymbol{H}$.

373. Как изменяется механическая энергия и параметр орбиты финитного движения частицы массой m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0,$$

при адиабатически медленном изменении параметра α?

Список рекомендованной литературы

1. Г. Голдстейн. Классическая механика. – М.: Наука, 1975.
2. Ф. Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2005.
3. Ю. Г. Павленко. Лекции по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2002.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. – М.: Физматлит, 2004.
5. И. И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Лань, 2009.
6. В. В. Петкевич. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981.
7. Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, А. И. Черных. Лекции по аналитической механике. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
8. Г. Голдстейн, Ч. Пул, Д. Сафко. Классическая механика. – М.: Институт компьютерных исследований, 2012.
9. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. – М.: УРСС, 2003.
10. И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. Сборник задач по теоретической механике для физиков. – М.: Лань, 2008.

11. Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. Сборник задач по классической механике. – М.: Наука, 1977.

12. Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко. Сборник задач по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2002.

13. Ю. Г. Павленко. Задачи по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2003.

14. Е. Н. Поляхова. Сборник задач по аналитической механике. – М.: УРСС, 2009.

15. В. Г. Невзглядов. Теоретическая механика. – М.: Физматгиз, 1959.