**Тема 1. Множества точек пространства .**

1.1. – окрестностью точки А пространства называется открытый шар радиуса с центром в т. А.

1.2. Прямоугольной окрестностью точки является m-мерный параллелепипед

(x10-δ1,x10+ δ 1;x20- δ 2,x20+ δ 2;…;xn0- δ n,xn0+ δ n) с центром в точке M0(x10,x21,…,xn0) а δ 1, δ 2,… δ n – целые наперед заданные числа.

1.3. Окрестностью точки А пространства называется любое открытое связное множество, содержащее точку А.

1.4. Точка А называется внутренней точкой множества D, если т. А, целиком принадлежащая множеству D.

1.5. Точка А называется изолированной точкой множества D, если т. А, в которой нет других точек из D, кроме А.

1.6. Точка А называется граничной точкой множества D, если в – окрестности т. А содержатся точки, как принадлежащие множеству D, так и не принадлежащие ему.

1.7. Границей множества {M} называется множество всех граничных точек этого множества.

1.8. Множество {М} называется открытым, если все его точки внутренние.

1.9. Множество {М} называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

1.10. Точка А называется предельной точкой множества D, если т. А, содержатся точки из D, отличные от А.

1.11. Множество {M} называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей {M}.

1.12. Множество точек {М( - некоторые числа, называется прямой в пространстве . Эта прямая проходит через точку

1.13. Множество точек L={М( - непрерывные ф-ии на сегменте , называется непрерывной кривой в пространстве .
**Тема 2. Последовательности точек пространства .**

1.1. Последовательность {Mn} называется ограниченной, если все ее члены лежат в некотором шаре. (эквивалентное опр.: (О – начало коорд))
1.2. Последовательность {Mn} называется неограниченной, если (O – начало коорд.)
1.3. Точка А назыв пределом последовательности {Mn}, если
1.4. Последовательность {Mn} называется сходящейся, если последовательность .
1.5. Последовательность {Mn} называется фундаментальной, ели
1.6. Точка А называется предельной точкой последовательности точек пространства - {Mn} , если в любой – окрестности точки содержатся точки последовательности {Mn}, отличные от А.
2.1. Критерий Коши сходимости последовательности. Для того, чтобы последовательность {Mn} сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.
2.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности точек пространства можно выделить сходящуюся последовательность.
**Тема 3. Функции, предел, непрерывность.**
1.1. Функция u=f(M) называется ограниченной сверху на D, если
1.2. Функция u=f(M) называется неограниченной сверху на D, если
1.3. Функция u=f(M) называется ограниченной снизу на D, если .
1.4. Функция u=f(M) называется неограниченной снизу на D, если
1.5. Число U называется точной верхней гранью ф-ии u=f(M) на множестве {M}, если: 1)
1.6. Число U называется точной нижней гранью ф-ии u=f(M) на множестве {M}, если: 1)
1.7. (По Коши).Число b называется пределом функции f (M) в точке А (при МА), если удовлетворяющей условию

1.8. (По Гейне). Число b называется пределом функции f (M) в точке А, если для любой сходящейся к А последовательности {Мn} такой, что Мnє{М}, МnА, соответствующая последовательность значений функции {f(Mn }) сходится к b.
1.9.(По Гейне) Число b называется пределом функции u=f(M) при M→, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число а, что для всех M из области задания функции, удовлетворяющих условию ρ(O,M)>a, выполняется неравенство |f(M)-b|<ε

1.10. (По Коши). Число в называется пределом ф-ии u=f(M) при M

1.11. Функция u=f( называется непрерывной в точке А( по переменной , если . (… если ф-я f( одной переменной непрерывна в т. .
1.12. Функция u=f( называется непрерывной в точке А по совокупности переменных, если
1.13. Функция u=f( называется непрерывной на множестве {M}, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

2.1. (по Коши). Число b называется пределом функ­ции f(M) в точке А (при М -> А), если ε > 0 3δ > 0 такое, что M, удовлетворяющей условиям М є {М}, 0 < ρ(М, А) < δ, выполняется неравенство |f(М) – b| < ε.

2.2. Теорема о непрерывности суммы 2-ух непрерывных ф-ий. Если функции f(M) и g(М) определены на множестве {М} и непрерывны в точкеAє{М}, то функция f(M)+g(M) , непрерывна в точке А
2.3. Теорема о непрерывности произведения 2-ух непрерывных ф-ий. Если функции f(M) и g(М) определены на множестве {М} и непрерывны в точке Aє{М}, то функция f(M)\*g(M) , непрерывна в точке А.
2.4. Теорема о непрерывности частного 2-ух непрерывных ф-ий. Если функции f(M) и g(М) определены на множестве {М} и непрерывны в точке Aє{М}, причем ф-я g(М) , то функция f(M)/g(M) , непрерывна в точке А.
2.5. Теорема о прохождении непрерывной ф-ии через любое промежуточное значение. Пусть функция u=f(M)= непрерывна во всех точка связного множества {M}, пусть - две любые точки из {M}, f(M1)=u1, f(M2)=u2и пусть u0 – любое число из сегмента [u1,u2]. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки и целиком , найдется точка М0 такая, что f(M0)=u0.

2.6. Первая теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве.
2.7. Вторая теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных граней.
2.8. Теорема о непрерывности сложной ф-ии нескольких переменных. Пусть ф-ии , непрерывны в точке А(, а ф-я непрерывна в точке В( где Тогда сложная ф-я u= непрерывна в т. А.
2.9. Теорема Кантора для ф-ии нескольких переменных. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве ф-я равномерно непрерывна на этом множестве.
4.1. Теорема о непрерывности суммы 2-ух непрерывных ф-ий. Если функции f(M) и g(М) определены на множестве {М} и непрерывны в точкеAє{М}, то функция f(M)+g(M) , непрерывна в точке А. (т.к. функции f(M) и g(М) непрерывны в точке А, то они в этой точке имеют предельные значения, тогда существует предельное значение ф-ии f(M)+g(M)существует и равно f(A)+g(A), но эта величина равна частному значению данной ф-ии. Ч.т.д.)
4.2. Теорема о непрерывности произведения 2-ух непрерывных ф-ий. Если функции f(M) и g(М) определены на множестве {М} и непрерывны в точке Aє{М}, то функция f(M)\*g(M) , непрерывна в точке А. (т.к. функции f(M) и g(М) непрерывны в точке А, то они в этой точке имеют предельные значения, тогда существует предельное значение ф-ии f(M)\*g(M)существует и равно f(A)\*g(A), но эта величина равна частному значению данной ф-ии. Ч.т.д.)
4.5. Теорема о прохождении непрерывной ф-ии через любое промежуточное значение. Пусть функция u=f(M)= непрерывна во всех точка связного множества {M}, пусть - две любые точки из {M}, f(M1)=u1, f(M2)=u2и пусть u0 – любое число из сегмента [u1,u2]. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки и целиком , найдется точка М0 такая, что f(M0)=u0. (Пусть L={M( – непрерывная кривая, соединяющая точки и целиком , в частности, . На кривой L: причем ф-я F(t) непрерывна на [], В силу теоремы для ф-ии одной переменной Но , где т. Итак,
4.6. Первая теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве. (Допустим, что u=f(M) не ограничена на {M}. Тогда . Т.е. - бесконечно большая. Изогранич. послед. можно выделить сходящуюся послед. Пусть . Поэтому функция f(M) непрерывна в т. А. Следовательно , а это противоречит тому, что - бесконечно большая. Ч.т.д.)
4.7. Вторая теорема Вейерштрасса. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных граней. (докажем, что функция f(x) достигает на множестве {M} своей точной верхней грани К (нижняя аналогично). От противного. Функция ни в одной точке множества не равна К, тогда для всех точек множества справедливо f(x)<K и можно рассмотреть на множестве всюду положительную ф-ю F(x)=1/(K-f(x)). Т.к. знаменатель и непрерывен на множестве{M}, то ф-я также непрерывна на множестве {M} => ф-я ограничена на множестве {M}, т.е. найдется положительное число В:Последнее неравенство перепишем так: f(x). Это справедливо для всех х из {M}, что противоречит тому, что К-точная верхняя грань (наименьшая из всех верхних граней) функции на множестве. Ч.т.д.)
**Тема 4. Дифференцируемые функции.**1.1.Частной производной ф-ииu=f(называется . (Если он существует)
1.2. Функция u=f( называется дифференцируемой в т. М (), если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде , где –некоторые числа, –функции аргументов бесконечно малые при и равные нулю при
1.3. Первым дифференциалом ф-ииu=f( в точке М называется линейная функция аргументов
1.4. Плоскость Р, проходящая через точку N0 поверхности S, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если при величина является бесконечно малой более высокого порядка, чем , т.е. .
1.5. Функция u=f(x1,…,xm) называется дифференцируемой n раз в точке М0, если все ее частные производные ( n-1) порядка дифференцируемы в этой точке.
1.6. Второй дифференциал d2u ф-ии u(x,y) в точке М0 определяется как дифференциал в т. М0 от первого дифференциала du при следующих условиях: 1) du рассматривается только как ф-я независимых переменных х и у; 2)при вычислении дифференциалов от приращения независимых переменных х и у берутся такими же, как и в выражении для du, т.е. равными dx и dy. (.
1.7. N-ый дифференциал dnu ф-ии u(x,y) в точке М0 определяется как дифференциал в т. М0 от (n-1) дифференциала при следующих условиях: 1) du рассматривается только как ф-я независимых переменных х и у; 2)при вычислении дифференциалов от приращения независимых переменных х и у берутся такими же, как и в выражении для dn-1u, т.е. dnu=d(dn-1u).
1.8. Функция u=f(x,y,z) является сложной функцией одной переменной величины l. Если эта функция имеет в точке l = 0 производную по переменной l, то эта производная называется производной по направлению от функции u=f(x,y,z) в точке M0 и обозначается символом ∂u/∂l. (x=x0 + lcosα , y=y0 + lcosβ, z=z0 + lcosγ). [Если то он называется производной ф-ииu=f(M) в т. Мо по направлениюи обозначается ]
1.9. Градиентом дифференцируемой функции u=f(x,y,z) в точке Мo называется вектор следующего вида grad u=- единичные векторы осей координат.

2.1. Необходимое условие дифференцируемости ф-ии. Если ф-я u=f(дифференцируема в т. М(то она имеет в т. М частные производные по всем переменным.

2.2. Достаточное условие дифференцируемости ф-ии. Если ф-яu=f() имеет частные производные по всем переменным в некоторой - окрестности т. М(), причем в самой т. М эти частные производные непрерывны, то ф-я дифференцируема в т.М.
2.3. Достаточные условия равенства смешанных производных. Если в некоторой окрестности точки М0(х0, у0) ф-я u=f(x,y) имеет смешанные частные производные fxy(x,y) и fyx(x,y), причем эти смешанные частные производные непрерывны в точке М0, то они равны в этой точке: fxy(x0,y0)= fyx(x0,y0).
2.4. Теорема о касательной плоскости к гр-ку ф-ии. Если ф-я u=f(x,y) дифференцируема в т. М0(х0,у0), то в точке N0(x0,y0,f(x0,y0)) существует касательная плоскость к поверхности S (гр-ку этой ф-ии), причем уравнение касательной плоскости имеет вид .

2.5. Tеорема о дифференцируемости сложной ф-ии.Пусть1) функции x=φ(u,v), y=(u,v) дифференцируемы в некоторой точке(), 2) функция z=f(x,y), дифференцируема в соответствующей точке(), где x0=φ(), y0=(). Тогда сложная функция z=f(φ(u,v),(u,v)), дифференцируема в точке ().
2.6. Частная производная сложной ф-ии.
2.7.Выражение производной функции f(x,y.z) по заданному направлению в данной точке через частные производные производные в этой точке
2.8. Выражение производной функции f(x,y.z) по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке
2.9. Формула Лагранжа. (при n=0 из формулы: du).
2.10. Второй дифференциал. .
2.11. N дифференциал.
2.13. Формула Тейлора (Лагранж). Если ф-я u=f( (n+1) – раз диффер. в некоторой -окрестности т. , то из этой -окрестности приращения ф-ии, где N- некоторая точка, лежащая на отрезке , а дифференциалы вычисляются по формуле: .
2.14. Формула Тейлора (Пеано). Пусть n- целое число, ф-я u=f(M)=f( (n+1) – раз диффер. в некоторой -окрестности т. и n раз дифференцируема в самой точке М0, то из этой -окрестности приращения ф-ии, где – расстояние, а – бесконечно малая при ф-ю более высокого порядка малости, чем .
4.1. Необходимое условие дифференцируемости ф-ии. Если ф-я u=f(дифференцируема в т. М(то она имеет в т. М частные производные по всем переменным. (По условию дифференцируемости , где –некоторые числа, –функции аргументов бесконечно малые при и равные нулю при . Положим все Тогда Отсюда при , т.е. Ч.т.д.)
4.2. Достаточное условие дифференцируемости ф-ии. Если ф-яu=f() имеет частные производные по всем переменным в некоторой - окрестности т. М(), причем в самой т. М эти частные производные непрерывны, то ф-я дифференцируема в т.М. (Док-во приведем для ф-ии 2 переменных (для сокращения). Пусть частные производные существуют в - окрестности т. М(х,у) и непрер. в самой т. М. Возьмем столь малыми, чтобы т. лежала в этой - окрестности т. М.где Т.к. непрер. в т. М(x,y), то Следовательно , т.е. выполняется условие дифференцируемости)

4.5. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости сложной ф-ии.Пусть1) функции x=φ(u,v), y=(u,v) дифференцируемы в некоторой точке(), 2) функция z=f(x,y), дифференцируема в соответствующей точке(), где x0=φ(), y0=(). Тогда сложная функция z=f(φ(u,v),(u,v)), дифференцируема в точке (). (Дадим произвольные приращения аргументам u и v в т.(Ф-ииx=φ(u,v), y=(u,v) получат приращения , которые можно представить в видегде при Этим приращениям соответствует некоторое приращение ф-ииz=f(x,y)в точке(), котороеможнозаписать: , где . Подставим (4) –> (5): , где при . Значит сложнаяфункция z=f(φ(u,v),(u,v)), дифференцируема в точке (). Ч.т.д.)

4.7.  Формула Тейлора. Если ф-я u=f( (n+1) – раз диффер. в некоторой -окрестности т. , то из этой -окрестности приращения ф-ии, где N- некоторая точка, лежащая на отрезке , а дифференциалы вычисляются по формуле: . (Зафиксируем точку М. Уравнения отрезка можно записать в виде . На отрезке u=f( - сложная ф-я одной переменной t, причем она (n+1)-раз дифференцируема на отрезке Заметим, что . Т.к. – линейные ф-ииt, то диф-лы можно вычислить: (3): Итак, Подставляя (6), (7) в (5) и учитывая (4), получаем формулу (2). Ч.т.д.)

**Тема 5. Локальный экстремум.**1.1. Говорят, что ф-я u=f(M) имеет в т. локальный максимум (минимум), если существует такая -окрестности т. , в которой при
2.1. Необходимое условие экстремума (диф ф-ии). Если в т. ф-я u=f(имеет локальный экстремум и если в т. существует частная производная , то
2.2. Достаточное условие экстремума (дважды диф. ф-ии). Пусть ф-я u=f(M)=f( ифференцируема в некоторой окрестности точки и дважды дифференцируема в самой точке М0, причем М0 – точка возможного экстремума данной ф-ии, т.е. . Тогда если второй дифференциал является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой от переменных dx1,…,dxm, то ф-я u=f(M) имеет в т. М0 локальный минимум (максимум). Если же является знакопеременной квадратичной формой, то в точке М0 ф-я u=f(M) не имеет локального экстремума.
4.1. Необходимое условие экстремума. Если в т. ф-я u=f(имеет локальный экстремум и если в т. существует частная производная , то (Зафиксируем все аргументы кроме , положив и рассмотрим ф-ю одной переменной Эта ф-я имеет локальный экстремум в т. и имеет производную в т.. По теореме о необходимом условии экстремума для ф-ии одной переменной )
**Тема 6. Неявные функции.**

1.1. Функция, заданная таким способом: y=f(x) [или y=f(x1, x2,…,xm)] называется неявной ф-ей и является решением уравнения F(x,y)=0 [или F(x1, x2,…,xm,y)=0]относительно у (т.е. [или F(x1, x2,…,xm, f(x1, x2,…,xm))=0])
1.3. Функции называются зависимыми в области D, если одна из них (безразлично какая) зависит в области D от остальных функций. [Функция называется зависимой в области D от остальных функций из совокупности, если ее можно представить в виде: , где Ф – дифференциуемая ф-я своих аргументов]
1.4. Функции называются независимыми в области D, если ни одна из них не зависит в области D от остальных функций. [Функция называется независимой в области D от остальных функций из совокупности, если ее нельзя представить в виде: , где Ф – дифференциуемая ф-я своих аргументов]
2.1. Теорема о существовании и непрерывности ф-ии y=f(x), заданной неявно ур-ем F(x,y)=0. Пусть 1) ф-я F(x,y) непрерывна в прямоугольнике Q={(x,y):a<x<b, c}; 2) (т.е. на нижней и верхней сторонах прямоугольника Q ф-я F(x,y), имеет значения разных знаков); 3) ф-я F(x,y) является строго монотонной ф-ей аргумента у на сегменте [c,d]. Тогда на (a,b) существует единственная неявная ф-я, определяемая ур-ем F(x,y)=0, и эта ф-я непрерывна на (a,b).
2.2. Теорема о дифференцируемости ф-ии y=f(x), заданной неявно ур-ем F(x,y)=0. Пусть: 1)ф-я F(x,y) дифференцируема в некоторой окрестности W точки Мо(х0,у0); 2) частная производная Fy непрерывна в точке Мо; 3)F(x0,y0)=0, Тогда существует такой прямоугольник , в котором ур-е F(x,y)=0 определяет единсвенную неявную ф-ю вида y-f(x), причем f(x0)=y0, ф-я f(x) дифференцируема на интервале ( и ее производная вычисляется по формуле .
2.5. Теорема о существовании и дифференцируемости ф-ий y и z, заданных неявно сисемой. Пусть 1)ф-ии F и G, входящие в систему, дифференцируемы в некоторой окрестности W точки ; 2) частные производные непрерывны в точке Мо; 3)F(Mo)=0, G(Mo)=0, Тогда существует такой параллелепипед , в котором система уравнений определяет единственную совокупность неявных ф-ий, и эти ф-ии дифференцируемы при
2.6. Теорема о достаточных условиях независимости ф-ии.
Пусть ф-ии , где nm, дифференцируемы в некоторой окрестности точки и пусть якобиан этих ф-ий по каким-либо переменным не равен 0 в точке М0. Тогда эти ф-ии независимы в .

2.7. Теорема о зависимости и независимости ф-ий.
Пусть: 1) ф-ии дифференцируемы в окрестности точки , а частные производные непрерывны в т М0; 2) функциональная матрица А (матрица из частных производных ф-ий ) имеет минор r-го порядка, неравный 0 в точке М0; 3) все миноры r+1 ранга матрицы А (если такие имеются) равны 0 в w.
Тогда r ф-ий, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в w, а каждая из остальных ф-ий зависит в некоторой окрестности т. М0 от этих r ф-ий.
**Тема 8. Кратные интегралы.**1.1. Плоская фигура называется квадрируемой, если точная верхняя грань множества площадей всех вписанных многоугольных фигур равна точной нижней грани множества площадей всех описанных многоугольных фигур.
1.2. Площадь криволинейной трапеции. , [ограничена непрерывными кривыми y=f1(x), y=f2(x), a (где , и двумя отрезками прямых х=а, x=b.]
1.3. Сумма называется интегральной суммой ф-ии f(x,y), где G – квадрируемая область; u=f(M)=f(x,y) – ограниченная ф-я, определенная на G; Gi (i=) – разбиение области G, такое что 2 любые части не имеют общих внутренних точек; – произвольная точка в Gi.
1.4. Число I называется пределом интегральных сумм при d -> 0, если такое, что для любого разбиения области G, у которого d<, и для любого выбора промежуточных точек Mi выполняется неравенство |.
2.1. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.
Пусть: 1) двойной интеграл ; 2) существует определенный интеграл . Тогда существует определенный интеграл (он называется повторным)и справедливо равенство , т.е. двойной интеграл равен повторному.
2.2. Теорема о формуле для замены переменной в двойном интеграле.
Пусть g и G – замкнутые квадрируемые области, функция f(x,y) ограничена в области G и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек площади нуль, а отображение удовлетворяет условиям :1)отображение взаимно однозначное; 2) ф-ии и имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка; 3) якобиан отображения отличен от нуля во всех точках области g. Тогда справедливо равенство: .
2.3. Теорема о сведении тройного интеграла к повторному.
Пусть 1) Существует тройной интеграл 2) существует определенный интеграл . Тогда существует двойной интеграл (он называется повторным и справедливо равенство , т.е. тройной интеграл равен повторному.
2.4. Теорема о формуле замены переменных для тройного интеграла.
Пусть и Т – замкнутые кубируемые области, ф-я f(x,y,z) ограничена в области Т и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема 0, а отображение удовлетворяет условиям: 1) отображение взаимнооднозначно; 2)ф-ии имеют в области непрерывные частные производные первого порядка; 3) Якобиан отображения отличен от 0 в области . Тогда справедливо равенство:
2.5. Масса и координаты центра тяжести.

.

, где – плотность, Т – материальное тело.
2.6. Моменты инерции плоской фигуры.
 - относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy.
 – относительно осей координат Ох, Оy, Oz.
 - относительно начала координат.

Тема 7 Условный экстремум1,1 Говорят, что функция ,.., имеет в точке условный минимум(максимум) при условиях связи , если существует такая окрестность точки что для любой точки этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям , выполняется неравенство )

1,2 Задача об условном экстремуме функции ,.., при условиях связи эквивалентна задаче об условном экстремуме функции Лагранжа ( при тех же условиях связи,поскольку в точке M, удовлетворяющих уравнениям связи, справедливо равенство Ф(M)=f(M).

2.1 Необходимые условия Лагранжа условного экстремума.Пусть :1) Функция ,.., дифференцируема в точке и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи ;2) уравнения удовлетворяют в некоторой окрестности точки условиям теоремы о существовании системы неявных функций

Теорема о дифференцируемости ф-ии z=f(x,y), заданной неявно ур-ем F(x,y,z)=0. Пусть: 1) функция F(=F(M) дифференцируема в некоторой окрестности W точки Mo( 2) частная производная Fy непрерывна в точке ; 3) F(M0)=0, Тогда существует такой параллелепипед в котором ур-е F(x,y,z)=0 определяет единственную неявную ф-ю y=f(, причем f(, функция y=f( дифференцируема при и ее частные производные вычисляются по формуле . (i=1,2,…,m). Тогда существуют числа, такие что все частные производные первого порядка функции Лагранжа равны нулю в точке .
1.3. Функции называются зависимыми в области D, если одна из них (безразлично какая) зависит в области D от остальных функций. [Функция называется зависимой в области D от остальных функций из совокупности, если ее можно представить в виде: , где Ф – дифференциуемая ф-я своих аргументов]
1.4. Функции называются независимыми в области D, если ни одна из них не зависит в области D от остальных функций. [Функция называется независимой в области D от остальных функций из совокупности, если ее нельзя представить в виде: , где Ф – дифференциуемая ф-я своих аргументов]

2.1. Теорема о существовании и непрерывности ф-ии y=f(x), заданной неявно ур-ем F(x,y)=0. Пусть 1) ф-я F(x,y) непрерывна в прямоугольнике Q={(x,y):a<x<b, c}; 2) (т.е. на нижней и верхней сторонах прямоугольника Q ф-я F(x,y), имеет значения разных знаков); 3) ф-я F(x,y) является строго монотонной ф-ей аргумента у на сегменте [c,d]. Тогда на (a,b) существует единственная неявная ф-я, определяемая ур-ем F(x,y)=0, и эта ф-я непрерывна на (a,b).
2.2. Теорема о дифференцируемости ф-ии y=f(x), заданной неявно ур-ем F(x,y)=0. Пусть: 1)ф-я F(x,y) дифференцируема в некоторой окрестности W точки Мо(х0,у0); 2) частная производная Fy непрерывна в точке Мо; 3)F(x0,y0)=0, Тогда существует такой прямоугольник , в котором ур-е F(x,y)=0 определяет единсвенную неявную ф-ю вида y-f(x), причем f(x0)=y0, ф-я f(x) дифференцируема на интервале ( и ее производная вычисляется по формуле .
2.5. Теорема о существовании и дифференцируемости ф-ий y и z, заданных неявно сисемой. Пусть 1)ф-ии F и G, входящие в систему, дифференцируемы в некоторой окрестности W точки ; 2) частные производные непрерывны в точке Мо; 3)F(Mo)=0, G(Mo)=0, Тогда существует такой параллелепипед , в котором система уравнений определяет единственную совокупность неявных ф-ий, и эти ф-ии дифференцируемы при
2.6. Теорема о достаточных условиях независимости ф-ии.
Пусть ф-ии , где nm, дифференцируемы в некоторой окрестности точки и пусть якобиан этих ф-ий по каким-либо переменным не равен 0 в точке М0. Тогда эти ф-ии независимы в .
2.7. Теорема о зависимости и независимости ф-ий.
Пусть: 1) ф-ии дифференцируемы в окрестности точки , а частные производные непрерывны в т М0; 2) функциональная матрица А (матрица из частных производных ф-ий ) имеет минор r-го порядка, неравный 0 в точке М0; 3) все миноры r+1 ранга матрицы А (если такие имеются) равны 0 в w.
Тогда r ф-ий, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в w, а каждая из остальных ф-ий зависит в некоторой окрестности т. М0 от этих r ф-ий.
**Тема 10 Поверхностные интегралы**

Определение площади поверхностью.

Число S называется пределом сумм при , если такое, что для любого разбиения поверхности Ф , у которого d<, и для любого выбора точек выполняется неравенство |S(. Если существует , то поверхность Ф называется квадрируемой, а число S – площадью поверхности Ф.

1,1 Пусть на квадрируемой поверхности Ф определена функция . Разобьем Ф кусочно гладкими кривыми на n квадрируемых частей. На каждой части выберем произвольную точку ,и составим интегральную сумму , где . Пусть .

Число называется пределом интегральных сумм I( при такое, что для любого разбиения Ф, у которого , и для любого выбора точек выполняется неравенство |(|<. Предел интегральных сумм называется поверхностным интегралом первого рода от функции по поверхности Ф и называется или

1,2 Если поверхность ограничивает некоторое тело, то у него различают внешнюю и внутреннюю стороны. Примером такой поверхности является сфера. Если поверхность задача уравнением , то у нее различают верхнюю и нижние стороны. Указанные поверхности имеют две стороны. Также существуют односторонние поверхности. Если каждой точке M области G поставлен в соответствие вектор a(M), то говорят, что в области G задано векторное поле. Векторное поле a(M)= называется непрерывным в области G , если его координаты- функции - являются непрерывными в области G. Гладкая поверхность Ф в каждой внутренней точке M имеет нормаль N(M), причем существует окрестность этой точки, вырезающая часть поверхности, на которой поле нормалей непрерывно. Если можно задать векторное поле нормалей, непрерывное на всей поверхности, то такая поверхность называется двусторонней. Поверхность, на которой не существует непрерывного вектора нормалей, называется односторонней.

Двусторонняя поверхность Ф характеризуется следующем свойством: для любой точки M и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Фи не пересекающегося с границей поверхности , выбранное в точке М направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления(на противоположное) при возвращении в тчк М.

На односторонней поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

На каждой двусторонней поверхности можно два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению: N(M) и –N(M). Выбор одного из этих полей называется выбором стороны поверхности. Т.О. двусторонняя поверхность имеет две стороны. Двусторонние поверхности называются также ориентируемыми, а выбор определенной стороны (выбор одного из полей) называется ориентацией поверхности. ***НАПРИМЕР***: плоскость, сфера, гиперболоиды-двусторонние поверхности, лист Мёбиуса-односторонняя поверхность.

1,1Пусть Ф- гладкая и кусочно гладкая ограниченная поверхность. Выберем одну из ее сторон, определяемую полем нормалей N(M). Пусть составляет с осями координат, и пусть на поверхности *Ф заданы* три функции P(M),Q(M),R(M).

Поверхностные интегралы первого рода

, ,

, называют поверхностным интегралом второго рода соответственно от функций P,Q,R по выбранной стороне поверхности Ф. Они обозначаются:

2.1Запишите формулу площади поверхности, заданной уравнением

*z* = *h* (*x*,*y*), (*x*,*y*) *D* , и сформулируйте условия ее применимости.

*Если область G ограничена и замкнута, ее границей является кусочно гладкая кривая без самопересечений, функция f(x,y) непрерывно дифференцируема в области G*

2.2 Гладкая параметрически заданная поверхность, не имеющая особых точек, квадрируема, и ее площадь S выражается формулой , где

, , (u,v)

E,G,F определяются

Справедливо:

Формулу можно записать в виде dudv

2.3 Поверхность Ф является графиком непрерывно дифференцируемой функции z=z(x,y),(x,y)

2.4 Пусть Ф-гладкая поверхность,не имеющая особых точек,заданная параметрически уравнением (u,v), и пусть f(x,y,z) непрерывна на Ф,тогда

E,G,F определяются

2.5, S задана в виде z=z(x,y) (x,y)

(Такие обозначение связаны с тем,что элемент площади dydz можно рассматривать как площадь проекции элемента поверхности с площадью dS на координатную плоскость Oyz, т.е dxdy=

2.6 Поверхностный интеграл второго рода , по выбранной стороне поверхности Ф является интегралом первого рода соответственно от функции,

Пусть гладкая двусторонняя поверхность Ф задана параметрически уравнением

 (u,v) и не имеет особых точе.Выберем ту сторону поверхности,на которой N(M) =.Тогда находим

И получаем

*.*

2.7 Запишем общий поверхностный интеграл второго рода:

В виде:

Направляющие косинусы , являются координатами единичного вектора нормали n(M) к поверхности Ф в точке М.

Такие обозначение связаны с тем,что элемент площади dydz можно рассматривать как площадь проекции элемента поверхности с площадью dS на координатную плоскость Oyz, т.е dxdy=, dydz=dScos

**Тема 9. Криволинейные интегралы.**1.1. Длиной кривой L называется предел длин ломаных, вписанных в кривую при (кривая задается параметрически уравнениями
1.2. Число I называется криволинейным интегралом 1 рода от ф-ии f(x,y) по кривой L, если существует предел и обозначается . (где .
1.3. Число I1 называется криволинейным интегралом 2 рода, если предел и обозначается следующим образом: (где - интенральная сумма).
1.4. Число I2 называется криволинейным интегралом 2 рода, если предел и обозначается следующим образом: (где - интенральная сумма).
2.2. Вычисление криволинейного интеграла с помощью определенного.
Если L – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями и ф-я f(x,y) кусочно непрерывна вдоль кривой L, то существует криволинейный интеграл и справедливо равенство: .
[Если L задана уравнениями y=y(x), y(x) имеет непрерывную производную на [a,b]: ]; [Если кривая L задана в полярных координатах уравнением r=r имеет непрерывную производную на []: ]; [для гладкой пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями : ]
2.3. Вычисление криволинейного интеграла с помощью определенного
Если АВ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями , а ф-я Р=Р(х,у) кусочно непрерывна вдоль кривой АВ, то существует интеграл и справедливо равенство: .
2.4. Вычисление криволинейного интеграла с помощью определенного
Если АВ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями , а ф-я Q=Q(х,у) кусочно непрерывна вдоль кривой АВ, то существует интеграл и справедливо равенство: .
2.6. Связь криволинейного интеграла первого и второго рода.
Пусть АВ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями , ф-ии Р=Р(х,у) и Q=Q(х,у) кусочно непрерывны вдоль кривой АВ и - единичный касательный вектор к кривой АВ в т. М(х,у), причем направление соответствует направлению движения от А к В ( - угол между вектором в т. М(х,у) и осью Ох). Тогда имеет место равенство: , где а=Р(х,у)i+Q(x,y)j.
2.7. Теорема о формуле Грина.
Пусть ф-ии P(x,y), Q(x,y) и их частные производные непрерывны в простой области G. Тогда справедливо равенство: где криволинейный интеграл берется по границе L области G в положительном направлении.