Физический факультет МГУ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Практикум Введение в технику эксперимента

- ***Общие сведения о работе практикума ВТЭК.***
- ***Основные формулы оценки погрешностей измерений.***

Ананьева Н.Г.

2016

Общие сведения о работе практикума ВТЭК.

Практические занятия (практикумы) необходимы как для демонстрации теоретического материала, изучаемого на лекциях и семинарах, так и для приобретения навыков работы с приборами, обработки и представления результатов.

В первом семестре выполняются два практикума: «Общий физический практикум» – ОФП и «Введение в технику эксперимента» – ВТЭК.

ВТЭК и ОФП – отличия: во ВТЭКе учим работать с приборами, определять и рассчитывать погрешности, оформлять результаты – чтобы хоть немного разгрузить ОФП.

Занятия практикума проходят строго по расписанию. К выполнению задачи в другое время студенты не допускаются.

Практикантская книжка – документ о выполнение задач практикума – надо приносить на каждое занятие и в начале занятия класть на стол преподавателя.

Занятия ВТЭК проходят 1 раз в 2 недели.

Учебный план:

- 6 занятий – 6 задач (включая «Графическое оформление результатов эксперимента»)
- 7 занятие – для того, чтобы сдать последние задачи.

  За семестр должно быть получено 6 оценок, если они выше «3» – зачет. Пропущенные занятия и задачи, за которые получена отметка «неуд», отрабатываются на ДП (одновременно с ДП ОФП и зачетной сессией).

Подготовка к занятию.

Задачи, которые студенты выполняют в практикуме, заранее записывают в практикантскую книжку.

Описания задач – на сайте: http://genphys.phys.msu.ru/rus/ofp/vtek/ или получить за 3 дня у инженера в лаборатории практикума ВТЭК. Чтобы получить описание, с собой надо иметь практикантскую книжку.

Для лабораторного журнала практикума должна быть заведена отдельная **жестко сшитая** тетрадь не менее 48 листов – *рабочая тетрадь.*

Дома в рабочей тетради готовится **конспект**, занятие начинается с **допуска** – беседы о предстоящей работе.

Что такое конспект.

В конспекте должно быть самое основное (цель, методы …). Если встречаются непонятные термины – ищите в учебниках (литература обычно приводится в конце описания) или справочниках. Выводы формул в методичках

обычно приводятся в сильно сокращенном виде – необходимо самостоятельно провести полные выкладки.
Конспект должен быть полным, но не излишне подробным. По тому, как Вы написали конспект (выбрали, что в задаче основное), преподаватель делает предварительную оценку Вашей подготовки к работе:
- слишком подробный конспект = не вникая в суть дела, переписали все;
- конспект не большой, но не связный логически, какие-то вопросы не освещены = задачу не поняли и случайным образом выбрали материал.
Окончательная оценка подготовки (допуска) ставится после беседы, даются рекомендации: лучше учить теоретический материал или учиться излагать мысли и научный материал.

Примерная схема оформления задачи практикума:

Задача №… . Название задачи.

Теоретическая часть: цель задачи, схема установки, теоретические основы (из описания задачи, из рекомендованной литературы).

Упражнение 1. Название упражнения.
Кратко описать, что выполняете в упражнении, если необходимо, зарисовать схему установки для данного упражнения, записать приборы, используемые в упражнении.
Практическое выполнение: Измерения заносить в таблицы.
Правило оформления таблиц: в столбцах отмечают измеряемые величины, их погрешности, величины, рассчитанные на основе измерений, а по строкам (вниз) идет номер измерения.

N	Измеряемые величины, погрешности измерений					
1						
2						
. . .						

Обработка результатов:
Расчеты погрешностей, косвенных измерений. Графики**.**
В расчетах обязательно записать расчетную формулу, числа, подставленные в эту формулу, после этого можно писать ответ**.** Указание погрешностей измерений обязательно, в том числе и на графиках.

Упражнение 2. Название упражнения.
…
Итоги работы: Полученные результаты: …
Выводы: например:
- сравнить полученные Вами результаты со справочными данными;
- оценить разные методы измерения;
…

Выполнение задачи и защита результатов.

Все непосредственно снятые **результаты измерений** заносят сразу в рабочую тетрадь ручкой (не карандашом) – без черновиков. Измерения зано-

сят в **таблицы**. В конце занятия результаты **подписывают у преподавателя**. После обработки и оформления результаты надо защитить – сдать задачу. ***Задача сдается преподавателю, который принимал допуск***, крайний срок – 4 недели (но лучше не тянуть). Сдать задачу можно каждую неделю, когда работает Ваш преподаватель. Преподаватель проверяет расчеты, обсуждаются полученные результаты, может быть продолжена беседа по теоретическому материалу. Преподаватель может попросить выполнить любое из проведенных измерений.

Обработка задач на компьютере.

Существует много программ для обработки результатов эксперимента. Единой, принятой на факультете, нет. Преподаватели практикума не обязаны знать все компьютерные приложения и проверять студенческие навыки программирования. Считать можно как угодно, но в тетради должен быть отчет: **расчетная формула, числа, подставленные в эту формулу, ответ.** Графики можно строить на компьютере. **Распечатывать обязательно.** Выполнять все правила построения графиков обязательно.

Основные формулы оценки погрешностей измерений

Желательно приобрести и изучить пособие И.В. Митина, В.С. Русакова «Анализ и обработка экспериментальных данных».

Есть специальная наука – метрология, которая изучает, как надо проводить измерения и обрабатывать их (метрология как отдельный курс на факультете не изучается – только некоторые вопросы в практикумах).

Измерения могут быть **прямые** и **косвенные**. ***Измерения считают прямыми, когда мы непосредственно с прибора считываем показания.*** Например, определяем время забега спортсмена на дистанции 1000 метров, запустив секундомер на старте и остановив на финише. Если для этих же целей мы используем обычные часы с секундной стрелкой, мы ***вычисляем*** время забега: время финиша минус время старта. Вычисленное время забега будет косвенным измерением. ***Если с прямыми измерениями надо провести какие-либо математические операции для получения необходимого нам результата, то результат вычислений является косвенным измерением.***

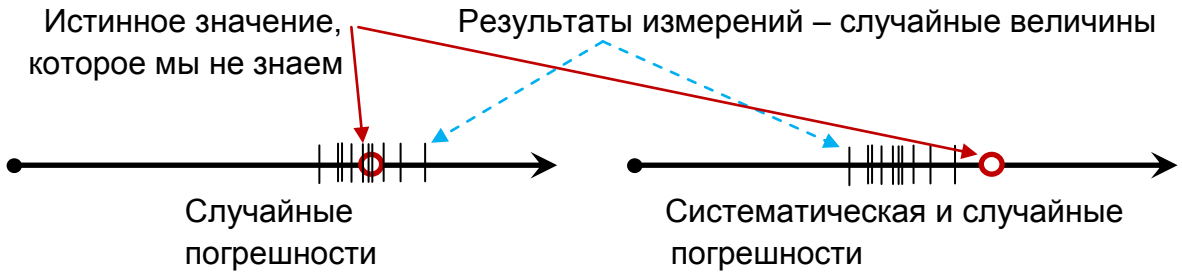
Прямые измерения.

Результат измерения есть случайная величина, т.е. заранее непредсказуема – меняется от опыта к опыту. Это – одна из аксиом метрологии. Причин расхождения показаний от измерения к измерению может быть много:

- Сама измеряемая величина не имеет четких границ или изменяется со временем (например, рост человека; расстояние, освещаемое автомобильной фарой).
- Используемая нами модель измеряемого объекта может отличаться от действительности: например, мы хотим измерить диаметр мяча, а мяч не идеально круглый.
- При считывания показаний с приборов мы ограничены количеством цифр на цифровом индикаторе или числом делений в аналоговых приборах.
- Измерительные приборы не идеальны. Например, линейка может быть длиннее или короче эталонной.
- Условия проведения эксперимента влияют на результат измерения. Например, если мы измерим диаметр резинового мячика штангенциркулем зимой на улице и в комнате, результаты будут отличаться. А с какой силой прижимаем штангенциркуль к мячу? (мяч не деформируется?)
- …

Для оценки «неточностей» измерений используется понятие **погрешность** или ошибка измерений или **неопределенность измерений**.

Погрешности измерений принято делить на **случайные** и **систематические**. На рисунке проиллюстрированы результаты измерений со случайными и систематическими погрешностями.



Случайные погрешности.

Теория вероятности и математическая статистика (ТВМС) дает математические формулы обработки погрешностей измерений. На физическом факультете ТВМС изучается на 3 курсе. Пока приведем формулы для обработки результатов измерений без выводов.

Случайные величины потому и названы случайными, что мы не можем заранее знать, каков будет следующий результат. Однако, как правило, случайные величины принимают значения в некотором интервале величин. Кроме того, какие-то значения более предпочтительны, чем другие. То есть, величины случайные, но есть некоторые тенденции их поведения.

Возьмем, например, игральную кость (кубик): при каждом броске у нас будет выпадать число от 1 до 6 с равной ***вероятностью****. А если у кубика смещен центр тяжести, то какие-то значения будут выпадать чаще.*

Математики описывают поведение случайной величины при помощи **функции плотности вероятности**. Наиболее известные (чаще встречающиеся): распределение Гаусса и равномерное распределение функции плотности вероятности.

При анализе случайной величины сначала необходимо определить ее функцию распределения плотности вероятности, и далее, в зависимости от этой функции, проводить обработку результатов. *В практикумах мы будем предполагать, что выполненные нами измерения имеют* ***Гауссово распределение*** *функции плотности вероятности*, поэтому обрабатываем результаты по приведенной ниже схеме.

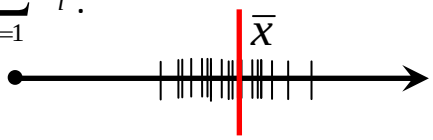
Прямые измерения, проведенные в одинаковых условиях. Оценка случайной погрешности.

Если бы мы провели бесконечно много измерений, мы бы получили полный набор всех значений, которые может принимать случайная величина. Реально количество измерений конечно, то есть мы получаем **выборку** – конечное число значений: $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_N\}$.

Проведем измерения какой-либо физической величины в однотипных условиях N раз. Получим случайную выборку: $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_N\}$.

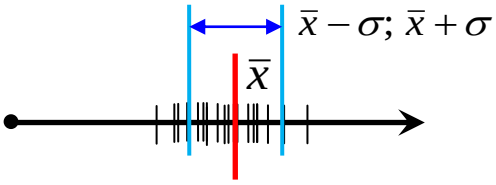
Обработка:

Наилучшей оценкой истинного значения измеряемой физической величины является ***среднее арифметическое*** $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.



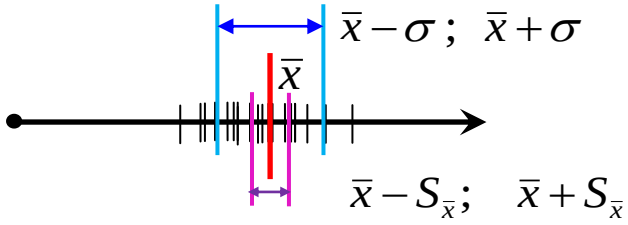
Разброс $\{x_i\}$ вокруг среднего значения $\bar{x}$ характеризуется ***выборочным стандартным отклонением*** ***<u>случайной величины</u>*** $\{x_i\}$ (***среднеквадратичной погрешностью)***

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} .$$



При $N \to \infty$ выборочное стандартное отклонение S_x стремится к постоянной величине σ, называемой ***стандартным отклонением***, квадрат которой σ^2 называется ***дисперсией***. С точки зрения теории вероятности смысл величины σ таков: результат *каждого измерения* с некоторой вероятностью будут находиться в интервале
$(\bar{x}-\sigma;\quad \bar{x}+\sigma)$. В случае, когда у нас Гауссово распределение функции плотности вероятности случайных величин (измерений), результат *каждого измерения* попадает в этот интервал с вероятностью примерно 70%.

Если бы мы провели бесконечное число измерений, то получили бы истинное среднее значение и среднеквадратичное отклонение. Но число измерений всегда конечно: это выборка из всех бесконечных возможностей. Если мы проведем несколько серий по N измерений, то средние значения измерений в каждой серии могут быть разными. Разброс среднего арифметического $\bar{x}$ характеризуется *стандартным отклонением* ***среднего арифметического*** (не путать с S_x !):



$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$

Истинное значение средней величины (которое мы получили бы при бесконечном числе измерений) находится в интервале $(\bar{x}-S_{\bar{x}};\quad \bar{x}+S_{\bar{x}})$ с вероятностью примерно 70% (для Гауссова распределения функции плотности вероятности). Если необходимо узнать результат с большей или меньшей вероятностью, то надо умножить σ на коэффициент Стьюдента**.**

Формулы для оценки случайных погрешностей измерений должны применяться для достаточно большого числа измерений (10 – 100 и более), иначе можно получить слишком большие отклонения от истинных значений (3 – 5 измерений – это еще не статистика). Но в практикумах, в целях экономии времени, мы вынуждены ограничиваться небольшим количеством измерений (3-5-10).

Косвенные измерения.

Если использовать математическую терминологию, то результат косвенных измерений – это функция n переменных, где переменные – это прямо измеренные величины: $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_i = \bar{x}_i \pm \sigma_{\bar{x}_i}$ $(i = 1\ldots n)$ – результаты прямых измерений n независимых величин, $\sigma_{\bar{x}_i}$ - погрешности средних значений прямых измерений.

Например, скорость движения велосипедиста по кольцевому треку: v = S / t. Скорость – это функция двух переменных S и t, непосредственно измеренных.
Мы несколько раз измеряем время прохождения полного кольца, считаем среднее время и погрешность среднего. Длину трека измерили с погрешностью σ_S.

В качестве наилучшего значения средней величины косвенных измерений $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ принимается значение функции y от средних значений результатов прямых измерений $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)$.

Для расчета стандартного отклонения нам потребуется рассчитывать частные производные от функции многих переменных.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – частная производная функции f, по i-той переменной, считаем ее как обычную производную по x_i , остальные переменные считаем константами, равными средним значениям.

Стандартное отклонение рассчитываем по формуле:

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_2=\overline{x_2} \\ \ldots \\ x_n=\overline{x_n}}} \cdot \sigma_{\overline{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_1=\overline{x_1} \\ x_3=\overline{x_3} \\ \ldots \\ x_n=\overline{x_n}}} \cdot \sigma_{\overline{x_2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\substack{x_1=\overline{x_1} \\ \ldots \\ x_{n-1}=\overline{x_{n-1}}}} \cdot \sigma_{\overline{x_n}}\right)^2}$$

или

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_{j\neq i}=\overline{x_j}} \cdot \sigma_{\overline{x_i}}\right)^2}$$

Считаем частные производные для примера $v = S / t$ *:*

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{S}{t^2}$$

Погрешность среднего значения скорости

$$\sigma_{\bar{v}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{t}^2}\sigma_{\bar{S}}^{\ 2} + \left(\frac{\bar{S}}{\bar{t}^2}\sigma_{\bar{t}}\right)^2}$$

Приборные погрешности.

Приборы бывают **аналоговые** и **цифровые**. У аналоговых приборов обычно стрелочные индикаторы, у цифровых – цифровые. С цифровых индикаторов проще считывать показания, но когда необходимо следить за несколькими измеряемыми величинами и не требуется высокая точность измерений, используют стрелочные индикаторы. Например, в современных автомобилях на приборной панели есть и стрелочные, и цифровые индикаторы. Многие аналоговые приборы (например, портативные амперметры и вольтметры) могут работать без источников питания.

Приборные погрешности обусловлены:

- разными условиями проведения измерений (температура, влажность, и т.д.) – в инструкции к прибору указывают необходимые условия – их надо соблюдать;
- разбросом параметров деталей в приборах при промышленном производстве. Только точные дорогие приборы собирают и проверяют индивидуально. Когда на заводе выпускают партию приборов, то по *выборке* из партии приборов всей партии присваивают некоторую погрешность измерений. В этой партии будут попадаться приборы и более точные, и более грубые. Причем основную погрешность будет вносить систематическая составляющая именно из-за разброса параметров деталей.
- невозможно абсолютно точно считать результат измерения: мы ограничены количеством цифр на цифровом индикаторе или числом делений в аналоговых приборах.

В зависимости от принципа действия прибора погрешности измерения могут рассчитываться:

- от измеренного значения (в некоторых стрелочных приборах);
- от предела (диапазона) измерения (в большинстве стрелочных приборах);
- и от предела измерения и от измеренного значения (в большинстве цифровых приборах).

Какой именно метод расчета погрешности измерения надо использовать для конкретного прибора (по какой формуле рассчитать погрешность), написано в паспорте прибора.

Суммарные погрешности.

Источники погрешностей (неопределенности) измерений могут быть разными: это и сама измеряемая величина, и измерительные приборы, погрешность считывания показаний с приборов и т.д. Как правило, они независимы. Тогда общая погрешность – стандартное отклонение – находится квадратичным суммированием отдельных погрешностей (например, для погрешностей случайных, приборных, считывания по шкалам, округления и т.д.)

$$\sigma_{\Sigma}= \sqrt{S_{случ}^2 + \sigma_{прибор}^2 + \sigma_{счит}^2 + \sigma_{окр}^2 + \ldots}$$

На практике чаще всего бывает, что какие-то погрешности значительно меньше других – на порядок (в 10 раз) и более. Тогда ими можно пренебречь.

Случайная погрешность стремиться к «0» при увеличении числа измерений. Приборная погрешность от количества измерений не зависит. Чтобы уменьшить суммарную погрешность имеет смысл провести столько измерений, чтобы $S_{случ}$ была примерно в 10 раз меньше $\sigma_{прибор}$.

В задаче 35 (ВТЭК), проводятся измерения напряжения (на автоматизированных установках) 5, 10, ..., 1000 раз. Рассчитав случайную погрешность измерений, надо будет определить, а сколько измерений имеет смысл проводить.

Округление результата.

При окончательной записи результата необходимо провести округление полученных чисел.

В правилах округления фигурирует понятие «значащая цифра». **Значащие цифры**: все цифры от первой слева, не равной «0», до последней справа.

Примеры: 123,5 – четыре значащие цифры;
0,0023 –две значащие цифры;
1200 – четыре значащие цифры;
1000,00 –шесть значащих цифр.

Правила округления.

- Сначала округляют погрешность – до одной, двух **значащих цифр**.
- После этого округляют результат так, чтобы последняя значащая цифра результата соответствовала последней значащей цифре погрешности.

Рассмотрим примеры:

123,468 $\pm$ 1,5678 – **начинаем округлять с погрешности: в погрешности оставляем две значащие цифры, если первая «1» или «2»; во всех остальных случаях в погрешности оставляем одну значащую цифру.** В приведенном примере: $\pm$ 1,6. *Смысл округления в том, чтобы убрать бесполезную информацию: если у нас результат с некоторой вероятностью может принимать значения от 121,9 до 125,1, то сомнительной будет уже третья значащая цифра. А нужны ли нам тогда пятая и последующие значащие цифры?* Округляем результат, получим: 123,5 $\pm$ 1,6.

1,00056 $\pm$ 0,08231 $\rightarrow$ 1,00 $\pm$ 0,08

12895 $\pm$ 786 $\rightarrow$ ~~12900 $\pm$ 800~~ – неправильно! Мы оставили в погрешности три значащих цифры. Вынесем множитель 10^n. Причем общепринято, чтобы n было кратно 3 (у нас и приставки к единицам измерения величин кратны 10^3: ***кило***метры, ***милли***амперы и т.д.) $\rightarrow$ (12,9 $\pm$ 0,8) 10^3. **У погрешности и результата должен быть один и тот же множитель.**

При проведении расчетов косвенных измерений имеет смысл оставлять 3-4 значащие цифры в погрешности прямых измерений (и соответственно округлять результат): ***округлять с запасом, чтобы расчеты не вносили дополнительные погрешности.*** Конечный итог представить по приведенным выше правилам.