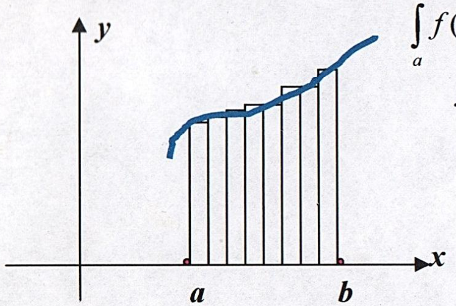
18

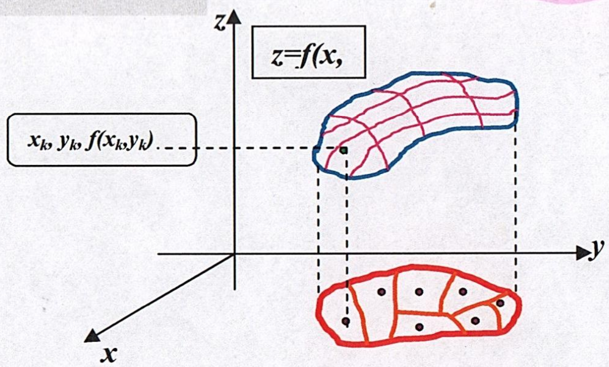
Вопрос № 1

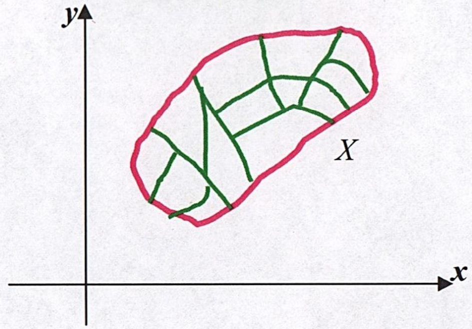
Кратный интеграл



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum f(x_k)\Delta x_k \;;$$

$y=f(x)$

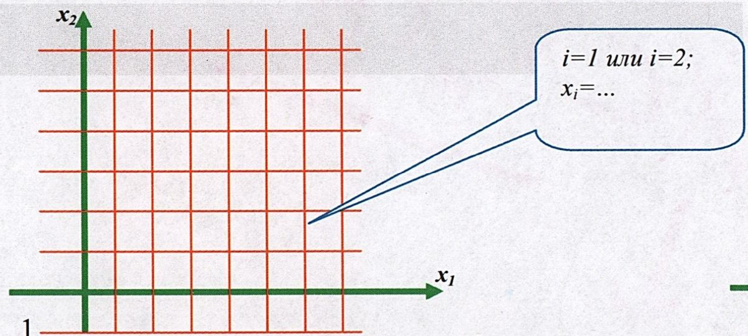


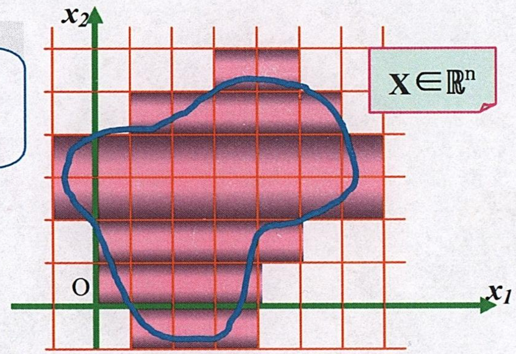


$=f(x_k,y_k)$

$$P_k = (x_k, y_k) \quad ; |\Delta_k| = \Delta x_k \; ; \; \sigma(f,T,\xi) = \sum_k f(p_k)\cdot \mu(X_k); \; X = \bigcup_k X_k \; ; \; \mu(X_i \cap X_j) = 0 \quad \iint_X f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} f(P_k)\cdot \mu(X_k); \; S_{трап.} = \int_a^b f(x)dx \; ; \; V_{тела} = \iint_X f(x,y)dxdy$$

Измеримые множества в $\mathbb{R}^n$





Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Рассмотрим $x_i = \dfrac{m}{10^k}$; $m \in \mathbb{Z}$

Если $k=1$, то $x=m/10$ (вертикальные линии): $1 \le i \le n$

Опр. 1 T_k – все квадраты (кубы) такого вида со стороной $\dfrac{1}{10^k}$ («квадраты ранга k»; квадраты берутся с границей; «квадраты»= «кубы»).

Опр.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $s_k(X) := \bigcup\limits_{\substack{Q \in T_k \\ Q \subset X}} Q$; (квадраты, целиком лежащие в фигуре). $S_k(X) := \bigcup\limits_{\substack{Q \in T_k \\ X \cap Q \ne \varnothing}} Q$

Опр. 3. мера: $Q \in T_k$; $\mu(Q) := \left(\dfrac{1}{10^k}\right)^n$; $X = \bigcup\limits_m Q_m$; $\mu(X) := \sum\limits_m \mu Q_m$

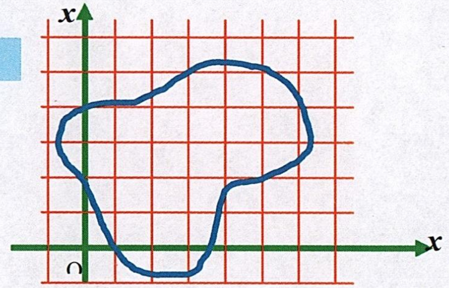
IX

Вопрос № 2

Утв. 1. $X\subset\mathbb{R}^n \Rightarrow a)\ \ s_k(X)\subset X\subset S_k(X)$

б) $\underline{\underline{s_0}}(X)\subset \underline{\underline{s_1}}(X)\subset\ldots\subset X\subset \underline{\underline{S_m}}(X)\subset\ldots\subset \underline{\underline{S_1}}(X)\subset \underline{\underline{S_0}}(X)$

в) $0\le \mu \underline{\underline{s_0}}(X)\le\ldots\le \mu \underline{\underline{s_m}}(X)\le\ldots\le \mu \underline{\underline{S_m}}(X)\le\ldots\le\ldots\le \mu \underline{\underline{S_0}}(X)$



Замечание 1. $\{\mu s_k(X)\}\nearrow$ (не убывает), $\{\mu S_k(X)\}\searrow$ (не возрастает).

Опр. 4. $\mu_* X := \lim\limits_{k\to\infty}\mu s_k(X)$, $\mu^* X := \lim\limits_{k\to\infty}\mu S_k(X)$ (оба предела существуют по Теореме о пределе монотонной последовательности, если множество X ограничено).

Если $\mu_*(X)$ существует и конечно, то это число называется **нижней *n*-мерной мерой Жордана множества *X*.**

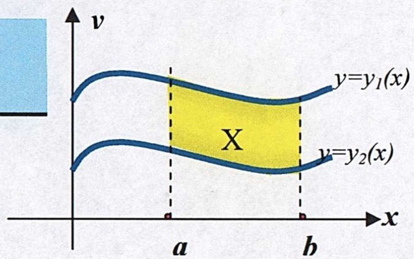
Если $\mu^*(X)$ существует и конечно, то это число называется **верхней *n*-мерной мерой Жордана множества *X*.**

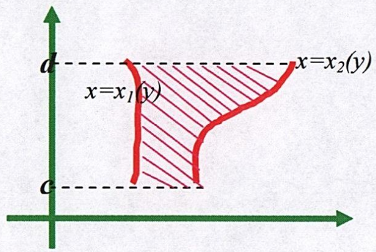
Опр. 5. Если существует и конечно $\mu_*(X)$ и $\mu^*(X)$ и $\mu_*(X)=\mu^*(X)$, то множество X называется измеримым по Жордану, а $\mu(X)=\mu_*(X)=\mu^*(X)$ называется ***n*-мерной мерой Жордана множества *X*.**

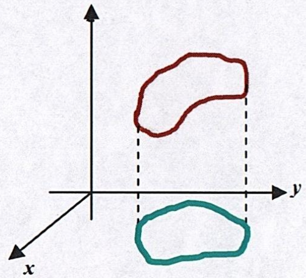
Замечание 2. Т.к. $\mu s_k(X)\le\ldots\le\mu S_k(X)$,

то $\mu_* X\le\mu^* X$ (предельный переход неравенства).

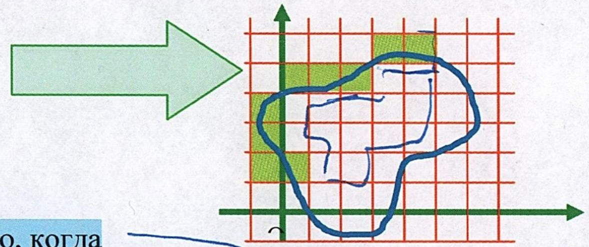
$$\iint\limits_X f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx=\int\limits_c^d\Big(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\Big)dy \text{ - объём.}$$

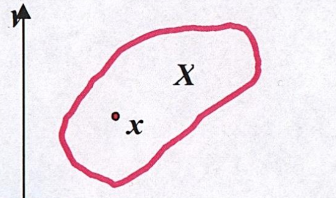






$s_k(X)$	$\cup Q$:	$Q\subset X$	везде $Q\in T_k$
$S_k(X)$	$\cup Q$:	$Q\cap X\neq\varnothing$	
$\sigma_k(X)$	$\cup Q$:	$Q\subset S_k,\ Q\not\subset s_k$	





Замечание 3. $s_k(X)\cup\sigma_k(X)=S_k(X)\Rightarrow \mu s_k+\mu\sigma_k=\mu S_k$

Напоминание. т. x называется внутренней по определению, когда $\exists\ U(x)\subset X$.

Т. x называется граничной по определению, если $\forall\ U(x)$: $U(x)\cap X\neq\varnothing$, $U(x)\cap(\mathbb{R}^n\setminus x)\neq\varnothing$

Обозначения: ∂X – «граница» (множество граничных точек); X_{int} – множество внутренних точек.

$\overline{X}=X_{\text{int}}\cup\partial X$ (замыкание множества X).

Замечание 4. Если точка $x\in(s_k)_{int}\Leftrightarrow$ все кубы, содержащие т. x, принадлежат s_k.

18

<u>*Утв.2*</u> $S_k(X) = ((s_k(X))_{\text{int}} \bigcup \sigma_k(X), \quad \text{и} \quad ((s_k(X))_{\text{int}} \bigcap \sigma_k(X) = \varnothing.$

Доказательство. $S_k(X) = s_k(X) \bigcup \sigma_k(X) = \bar{s}_k(X) \bigcup \sigma_k(X) = [(s_k(X)_{\text{int}} \bigcup \partial s_k(X)] \bigcup \sigma_k(X)$

Докажем, что $\partial s_k(X) \subset \sigma_k(X)$. Рассмотрим $\forall x \in \partial s_k(X)$. $x \in \partial s_k(X) \Rightarrow x \notin (s_k(X))_{\text{int}} \Rightarrow$ *по Замечанию* $4 \Rightarrow \exists$ *куб* Q, содержащий т. *x*, такую, что $Q \notin s_k(X)$. Т.к. Q *включает в себя* x, то $Q \subset S_k(X)$. $x \in Q$ $(Q \not\subset s_k,\ Q \subset S_k) \Rightarrow Q \subset \sigma_k(X) \Rightarrow x \in \sigma_k(X)$.

<u>**В Ы В О Д**</u>: $\Rightarrow S_k(X) = (s_k(X)_{\text{int}} \bigcup \sigma_k(X))$. Осталось проверить, что $s_k(X)_{int} \cap \sigma_k(X) = \varnothing$. Пусть

$x \in (s_k(X))_{\text{int}} \Rightarrow$ *по Замечанию* $4 \Rightarrow \forall Q$, *содержащего* x, $Q \subset s_k(X) \Rightarrow Q \not\subset \sigma_k(X) \Rightarrow x \notin \sigma_k(X)$.

по определению **по Утв.2** **по определению**

<u>*Утв. 3.*</u> $\forall\ X \subset \mathbb{R}^n\ \partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$.

?

Докажем, что $\partial X \boxed{\subset \sigma_k(X)}$. По определению $X \subset S_k(X) \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{S_k(X)} = S_k(X)$, $\partial X \subset \overline{X} \subset S_k(X) = (s_k(X))_{\text{int}} \bigcup \sigma_k(X)$, $s_k(X) \subset X \Rightarrow (s_k(X))_{\text{int}} \subset X_{\text{int}}$

Пусть $x \in \partial X$. Тогда $\cancel{x \in X_{\text{int}}} \Rightarrow (????) x \notin X_{\text{int}} \Rightarrow x \notin (s_k(X))_{\text{int}} \Rightarrow x \in \sigma_k(X)$

по Утв.2

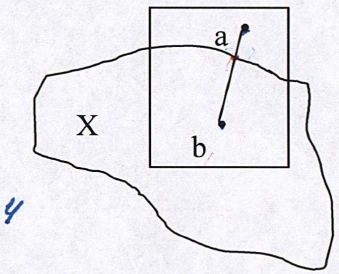
$\cap$ X_{int}

Билет 19

19

Докажем, что $\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$. Пусть $x \in \sigma_k(X)$. Тогда $x \in S_k(X)$, т.е. $\exists\ Q:\ x \in Q,\ Q \subset S_k(X)$ (т.е. $Q \cap X \neq \varnothing$). С другой стороны, $Q \not\subset s_k(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing$, $Q \cap \partial X) \neq \varnothing$. Из $x \in Q \subset S_k(X) \Rightarrow Q \bigcap \partial X \neq \varnothing \Rightarrow Q \subset S_k(\partial X)$.



$x \in \sigma$

$X \subset \mathbb{R}^n$	$S_k(X)$	S_k	**$Q \cap X \neq \varnothing$**
$s_k(X)$	**s_k**		**$Q \subset X$**
$\sigma_k(X)$	σ_k		Q: $Q \subset S_k$, $Q \not\subset s_k$

видимо всем. т. о „двойном включении"

<u>*Утв. 3.*</u> $\forall\ X \subset \mathbb{R}^n\ \partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$.

1) $\partial X \subset \sigma_k(X)$. – доказали.
2) Пусть т. $x \in \sigma_k(x)$, т.е. $\exists Q$, содержащее x: $Q \subset S_k(X), Q \not\subset s_k(X) \Rightarrow Q \cap X \neq \varnothing$, $Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing$. (весь отрезок принадлежит Q).

$a \in \mathbb{R}^n \setminus X$, $b \in X$. $x(t) = a + t(b-a)$, $t_0 = \sup\limits_{x(t) \in R^n \setminus X_{int}} t$. Возьмем $\xi := x(t_0) \Rightarrow \xi \in \partial X, \xi \in Q \Rightarrow Q \bigcap \partial X \neq \varnothing \Rightarrow Q \subset S_k(\partial X) \Rightarrow x \in S_k(\partial X)$, т.е. доказали.

$t_0 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus X} t$

<u>*Утв. 4.*</u> 1) $\mu^* X = 0 \Rightarrow X$ – *измеримо и* $\mu X = 0$

$x(1) = b$ $\quad t := 0 \to 1$

$x(0) = a$ $\quad x := a \to b$

Вопрос № 3

2) *X* измеримо => *X* ограничено.

3) $X_1 \subset X_2$ $\quad \begin{matrix} \mu_* X_1 \le \mu_* X_2 \\ \mu^* X_1 \le \mu^* X_2 \end{matrix}$

19

4) X – ограничено => $\mu_* X$ и $\mu^* X$ - конечны.

Доказательство.

1) Т.к. $\mu_* X \le \mu^* X$, то $\mu_* X = 0 \Rightarrow \mu X = \mu_* X = \mu^* X$.
2) Пусть X – не ограничено => $\mu S_k(X)=\infty$=> $\mu^*(X)=\infty$ (противоречие).
3) $X_1 \subset X_2$=> $S_k(X_1) \subset S_k(X_2)$, $s_k(X_1) \subset s_k(X_2) \Rightarrow \mu S_k(X_1) \le \mu S_k(X_2)$, $\mu s_k(X_1) \le \mu s_k(X_2). \Rightarrow$ *при* $k \to \infty$ имеем: $\begin{matrix} \mu_* X_1 \le \mu_* X_2 \\ \mu^* X_1 \le \mu^* X_2 \end{matrix}$
4) $Q_m = \{|x_i| \le m\}, i = 1,...,n;$ X ограничено => $\exists m:$ Q_m *содержит* $x \Rightarrow S_k \subset Q_m \Rightarrow \mu S_k(X) \le (2(m+1))^n \Rightarrow \mu^* X \le (2(m+1))^n$, $\mu_* \le \mu^*$.

Утв. 5. (Без доказательства).

1) $X_1, X_2, ..., X_m$ - измеримы => $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ - измеримо; $\bigcap_{i=1}^{m} X_i$ - измеримо

2) *X, Y* – измеримы => *X\Y* – измеримо.

3) $X_1, X_2, ..., X_m$ - измеримы, $X_i \cap X_j (i \ne j) = \varnothing$ => $\mu(\bigcup_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu X_i$.

из утв. 5 с учётом того, что $S_k(X)$ и $s_k(X)$ – измеримы ($\cup Q$) (объединение кубов)

критерий измеримости

Утв. 6. (*X* измеримо) ⇔ (*X* – ограничено, ∂X – измеримо. и $\mu\partial X=0$).

Доказательство.

$\boxed{=>}$ *X* измеримо => *X* – ограничено. По Утв.3 $\partial X \subset \sigma_k(X)$=> $0 \le \mu^* \partial X \le \mu^* \sigma_k(X) = \mu \sigma_k(X) = \mu S_k(X) - \mu s_k(X) \to 0.$=> $\mu^*\partial X=0$ => ∂X – измеримо и $\mu\partial X=0$.

(по Утв.4 и 3; при $k \to \infty$; μX; μX; по Утв.4 и 3)

$\boxed{<=}$ По Утв. 3 $\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$, $0 \le \mu S_k(X) - \mu s_k(X) = \mu \sigma_k(X) \le \mu S_k(\partial X) \to \mu^* \partial X = \mu \partial X = 0$.

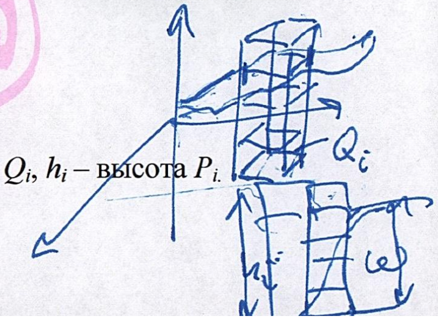
X – ограничено $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X)$ – конечный, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k(X)$ – конечный $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k(X)$ $(0 \le \mu S_k - \mu s_k \le \mu S_k(\partial X) \to 0$. Доказали.

График функции как множество меры ноль.

Вопрос № 4

20

Утв. 1. $X \subset R^n$ – компакт, $f: X \to R$, $f \in C^k$; $Y := \{(x, y) | x \in X, y = f(x)\}$ $\Rightarrow Y \subset R^{n+1}$ – измеримо, и $\mu^{(n+1)} Y = 0$.



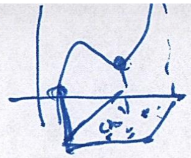
Доказательство.

~~$Q_i \subset X$~~ - кубы ранга *k* (размерность Q_i равна *n*). P_i – «столбик» кубов из $S_k(Y)$ ранга *k* размерности *n+1*, расположенные над Q_i, h_i – высота P_i.

$\supset$ / Q_i – кубы такие: $Q_i \cap X \ne \varnothing$

для k_0 [① $\varepsilon>0$ ② Из Кантора $\exists\delta:\ \delta=\frac{\sqrt{n}}{10^{k_0}}$. по нему нашли $k_0(\delta)$ ③ $\omega(f,Q_i)<\varepsilon$ при k_0, которое обеспечивает $\rho(x_1,x_2)<\delta$.

Тогда уже $h_i < \varepsilon + \frac{2}{10^{k_0}} = \varepsilon_1$



$k_0\in i$, $h_i < \varepsilon + \frac{2}{10^{k_0}} = \varepsilon_1$

Тогда

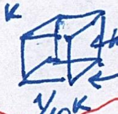
$h_i \le \omega(f,Q_i) + \dfrac{2}{10^k};\ (\omega(f,Q_i) = \sup\limits_{x_1,x_2\in Q_i} |f(x_1)-f(x_2)|;\ \dfrac{1}{10^k} -$ *длина ребра). По Т.Кантора*: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta:\ \forall x_1,x_2\in X\ \ \rho(x_1,x_2)<\delta\ \ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists k_0\in N:\ \forall k\in N, k>k_0\ \ \forall i\ \ h_i<\varepsilon.$

надо δ-ть

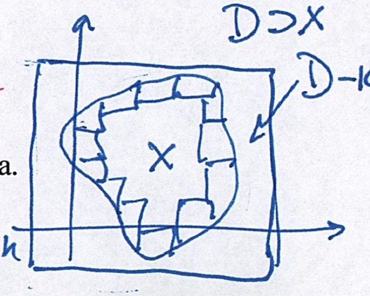
① Взяли ε>0. ② Построили $\varepsilon_1=\varepsilon - 2/10^k$. ③ В условиях т.Кантора взяли выбранное ε_1 и для него выполнили условия Т.Кантора. ④ Тогда получилось $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert<\varepsilon_1=\varepsilon-\frac{2}{10^k}$. ⑤ То есть $\omega<\varepsilon_1=\varepsilon-\frac{2}{10^k}$. ⑥ Отсюда $h_i<\omega+2/10^k<\varepsilon$, которое мы взяли в ①.

Объяснение, как из Т.Кантора следует: $\sup\limits_{x_1,x_2\in Q_i}\rho(x_1,x_2)=\dfrac{\sqrt{n}}{10^k}\to 0\ \ при\ \ k\to\infty$. $<\delta \Rightarrow$ находим k



$Q_i\in R^n$, $1/10^k$

$D\supset X$, D-куб



Рассмотрим $\mu^{(n+1)}S_k(Y)=\sum\limits_i\mu^{(n+1)}p_i=\sum\limits_i h_i\mu^{(n)}Q_i<\sum\limits_i\varepsilon\mu^{(n)}Q_i=\varepsilon\sum\limits_i\mu^{(n)}Q_i=\varepsilon\cdot\mu^{(n)}S_k(X)\le\varepsilon\cdot\mu^{(n)}D$ - фиксированная величина. $=\varepsilon_c$

Утв.4.

Оценка верна $\forall\varepsilon\Rightarrow\mu^{(n+1)}S_k(Y)\to 0$ при $k\to\infty$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists k_0$: $\forall k>k_0\ \ \mu^{(n+1)}S_k(Y)<\varepsilon\Rightarrow\mu^*Y=0\ \ \Rightarrow\exists\mu Y=0$. (Доказали).

h, $\mu Q_i\left(\frac{1}{10^k}\right)^n$

Разбиение измеримых множеств.

Вопрос № 5

~~...~~

Опр. 1. Пусть $X\subset R^n$, X – измеримо. Набор измеримых подмножеств $X_j\subset X$ называется ~~конечным~~ конечного разбиением множества X, если:

1) $\bigcup\limits_{j=1}^n X_j=X$, 2) $\forall i\ne j\ \ \mu(X_i\cap X_j)=0$.

Опр. 2. Диаметр (или параметр) разбиения *T* множества *X* называется $\max\limits_j\ diamX_j$. Обозначение: *λ(T)*. $(diamX_j := \sup\limits_{x_1,x_2\in X_j}\rho(x_1,x_2))$

Торрента

Опр. 3. Говорят, что разбиение T_2 является измельчением разбиения ($T_1<T_2$), если $\forall Y_l\in T_2\ \ \exists X_j\in T_1\ \ Y_l\subset X_j$.

ранг разбиения k: сторона $\frac{1}{10^k}$

$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{12}}{10^{k_0}}}$

Утв. 1. 1) $T_1<T_2,\ T_2<T_3 \Rightarrow T_1<T_3$ 2) $\forall T_1,T_2\ \ \exists T_3:\ \ T_1<T_3\ \ и\ \ T_2<T_3$.

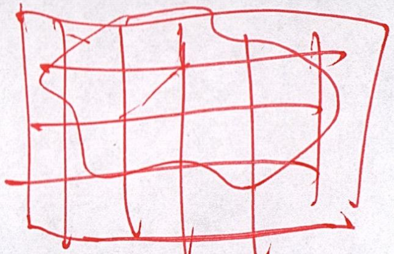
Утв. 2. Пусть $X=\bigcup\limits_{j=1}^n X_j$ - разбиение, X – измеримо. Тогда $\mu X=\sum\limits_{j=1}^n\mu X_j$.

Доказательство.

Рассмотрим $X^*:=\bigcup\limits_{i,j}(X_i\cap X_j)$ $\mu X^*=0$ $(\tilde{X}_j:=X_j\setminus X^*)$ «пустая решетка» $X\setminus X^*=\cup\tilde{X}_j$ и при этом $\tilde{X}_j\cap\tilde{X}_i=\varnothing$ $(i\ne j)\Rightarrow\mu(X\setminus X^*)=\sum\limits_j\mu\tilde{X}_j=\sum\limits_j\mu X_j$ ($=\mu X$)

$\mu(X\setminus X^*)=\mu(\cup\tilde{X}_j)=\sum\limits_j\mu\tilde{X}_j=\sum\limits_j(\mu X_j-\mu X_j^*)=\boxed{\sum\limits_j\mu X_j}$

$\mu X-\mu X^*=\mu X$



21

Утв. 3. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists T: \;\; \lambda(T) < \varepsilon$ (дано измеримое множество).

Доказательство.

Рассмотрим $X_j := X \bigcap Q_j \quad \mu(X_i \bigcap X_j) = 0, \;\; (i \neq j),$ т.к. $X_i \bigcap X_j$ – часть куба размерности n, (который имеет n-мерную меру 0).

Кратный интеграл

Вопрос № 6

22

Опр.1. $f: \;\; R^n \to R, \;\; X \subset R^n$ – измеримо, T – разбиение X ($X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j, \;\; X_j$ – измеримо),

$\xi^{(j)} \in X_j$ – «отмеченные точки»,

$\sigma(f,T,\xi) := \sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi^{(j)}) \mu X_j$ – «интегральная сумма».

$$\boxed{I = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f,T,\xi)}$$

Опр.2. $f: \;\; R^n \to R, \;\; X \subset R^n$ – измеримо. Если $\exists$ *число* $I \in R: \; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta: \;\; \forall T$ *такого, что* $\lambda(T) < \delta$ *имеем* $\forall \xi \;\; |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon$, то функция f называется интегрируемой по Риману на множестве X ($f \in R(X)$ и число I называется интегралом от функции f на множестве X: $I = \int\limits_X f(x)dx$

При n=2 $I = \iint\limits_X f(x)dxdy$, при n=3 $I = \iiint\limits_X f(x)dxdydz$.

Опр.3. T – разбиение множества X, $X = \bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j$.

$m_j = \inf\limits_{x \in X_j} f(x)$

$M_j = \sup\limits_{x \in X_j} f(x)$

$s_T := \sum\limits_{j=1}^{m} m_j \mu X_j$ - нижняя сумма Дарбу,

$S_T := \sum\limits_{j=1}^{m} M_j \mu X_j$ - верхняя сумма Дарбу.

Утв.1. Пусть f определена на X, $X \subset R^n$ - измеримо. Тогда:

$\forall T, \forall \xi : s_T \le \sigma(f,T,\xi) \le S_T$

$\forall T_1, T_2 : s_{T_1} \le S_{T_2}$

f – интегрируема на $X \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S_t - s_T) = 0.$

$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S_t - s_T) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{j=1}^{m} \omega(f, X_j)\mu X_j = 0.$

– критерий ~~интегрируемости~~ – доказательство такое же, как и для случая $X=[a,b]$ (надо повторить)

22

Утв. 2. $X \subset R^n$ - измеримо, X – компакт; $f \in C(X) \Rightarrow f \in R(X)$. **(Интегрируемость функции, непрерывной на компакте).**

Доказательство.

$f \in C(X)$, X – компакт => по Т. Вейерштрасса f – ограничена на X. По Т. Кантора f – равномерно непрерывна на X,

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in X : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. ИЛИ (доказать эквивалентность!):

$\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists \delta : \forall Y \subset X : diam Y < \delta \Rightarrow \omega(f, Y) < \varepsilon_1$ (*).

① Нам дали $\varepsilon>0$. Надо найти δ: $diam X_j<\delta \Rightarrow$ ~~$\sum \omega(f,X_j)<\varepsilon$~~ $\sum \omega(f,Y)\mu X_j<\varepsilon$

Надо доказать: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta : \forall T \;\; \lambda(T) < \delta \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{m} \omega(f, X_j)\mu X_j < \varepsilon.$

② Строим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\mu X}$

В качестве δ возьмем $\delta(\varepsilon_1)$ из (*): условие выполняется $\forall Y \subset X : diam Y < \delta \Rightarrow$ условие выполняется для множеств Xj, т.к.

$diam X_j < \delta: \;\; \omega(f, X_j) < \varepsilon_1 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{m} \omega(f, X_j)\mu X_j < \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon \mu X_j = \varepsilon \mu X, \; \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\mu X}.$ ← ?

③ Из т. Кантора по ε_1 находим $\delta(\varepsilon_1)$

④ => по тексту.

... $< \cancel{\mu X} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{\mu X}} = \varepsilon$

Утв. 3. **(без доказательства)**.

X – измеримо, X – компакт, f – ограничена на X. Пусть Y – множество точек разрыва функции f; $Y \subset X$, $\mu Y = 0 \Rightarrow f \in R(X)$.

Замечание. Если $\mu X = 0$, то интегрируема любая функция, в том числе и неограниченная.

Свойства кратного интеграла.

Вопрос № 7

23

13 марта семинар

Утв.1.

1) Пусть X – измеримо => $\int\limits_X dx = \mu X \;\; (\int\limits_X dx = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{j=1}^{m} \mu X_j = \mu X)$.

2) $f, g \in R(X), \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in R(X), \;\; и \;\; \int\limits_X (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int\limits_X f(x)dx + \mu \int\limits_X g(x)dx$ (доказывается аналогично).

3) X, Y - измеримы, $X \subset Y, f$ – ограничена и интегрируема на Y => $f \in R(X)$.

4) X – измеримо, $X = \bigcup_{j=1}^{m} X_j$ - разбиение, f - ограничена на X: $\forall j : f \in R(X_j) \Rightarrow f \in R(X)$.

5) f,g – ограничены и интегрируемы на X => $f \cdot g \in R(X)$ (без доказательства).

6) f,g – ограничены и интегрируемы на X, $\exists C > 0 : \forall x \in X \;\; |g(x)| > C \Rightarrow \frac{f}{g} \in R(X)$. (без доказательства).

7) $f, g \in R(X), \forall x \in X \;\; f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_X f(x)dx \le \int_X g(x)dx$. (доказывается аналогично).

8) $f \in R(X), f$ – ограничена на X $\Rightarrow |f(x)| \in R(X)$, и $\left|\int_X f(x)dx\right| \le \int_X |f(x)|dx$. (без доказательства).

23

Утв.2. (Т. о среднем) f,g – ограничены и интегрируемы на X, $\exists m, M : \;\; \forall x \in X \;\; m \le f(x) \le M$, $g(x)$ не меняет знак на $X \Rightarrow \;\; \exists \mu \in [m, M]: \;\; \int_X f(x)g(x)dx = \mu \int_X g(x)dx$ (без доказательства).

Следствие. Если в условиях Утв.2 достоверно известно, что X – линейно связно, и $f(x) \in C(X)$, то $\exists \xi \in X : \;\; \int_X f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_X g(x)dx$.

Опр.1. $X \subset \mathbb{R}^n$- линейно связно, если $\forall \;\; p_1, p_2 \in X \;\; \exists$ непрерывная кривая $\gamma(t): \;\; \forall t \;\; \gamma(t) \in X; \gamma(0) = p_1, \gamma(1) = p_2$.

~~Сведение кратного интеграла к повторному.~~

Вопрос № 8

непрерывность однократного интеграла с переменными пределами не

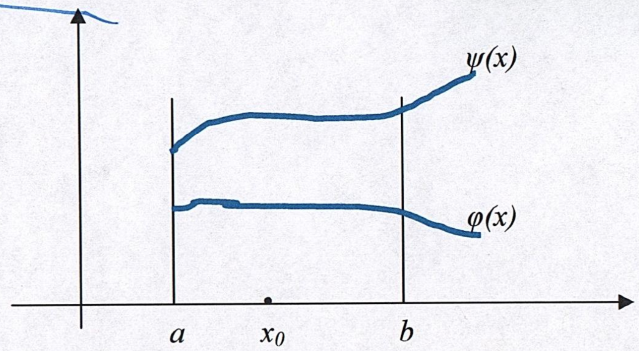
$E: \; \{(x,y) | \; a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ $\qquad \varphi \in C([a,b]); \;\; \psi \in C([a,b])$.

E – компакт (замкнуто и ограничено). E – измеримо (объяснение: $\mu\partial E$=0).

условие на $f(x,y)$

$f : R^2 \to R \;\;\; f(x,y) \in R([\varphi(x), \psi(x)]) \;\; \forall x \in [a,b]$. (*как функция аргумента* y).

$f : E \to R$



$\int_{x^2}^{x^2+1} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{x^2+1} = \frac{(x^2+1)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3}$

Тогда определена функция на *[a,b]*: $F(x,\cancel{y}) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ "~~повторный~~ интеграл".

23

Утв.1 $f \in C(E) \Rightarrow F \in C([a;b])$.

Доказательство.

$y \leftrightarrow t$

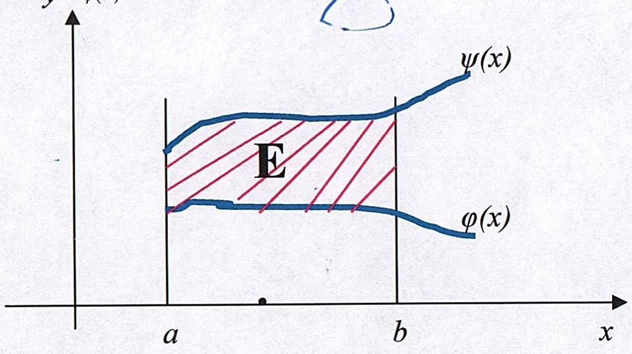
$y = \varphi(x) + t\cdot(\psi(x) - \varphi(x))$

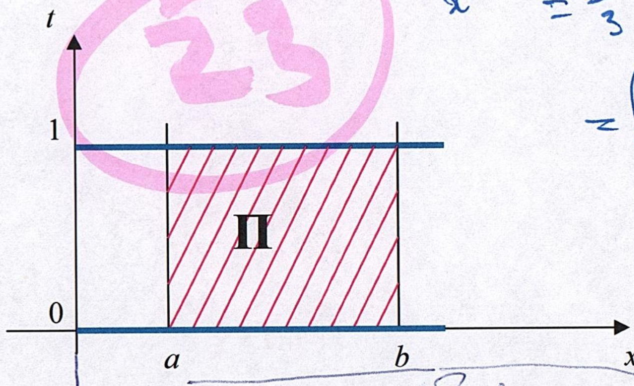
$y = \varphi(x) \quad t = 0$

$y = \psi(x) \quad t = 1$

$[(\varphi(x), \psi(x))] \quad [0,1]$

$(x,y) \qquad (x,t)$.





8-495-287-4914 д.

8-926-603-20-46 моб

Коренко

Ульвеста Алексеевна

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \begin{cases} y = \varphi(x) + t\cdot(\psi(x) - \varphi(x)) \\ 0 \le t \le 1 \\ dy = (\psi(x) - \varphi(x))\cdot dt \end{cases} = \int_0^1 \underbrace{f(x, \varphi(x) + t\cdot(\psi(x) - \varphi(x)))\cdot(\psi(x) - \varphi(x))}_{=g(x,t)}\cdot dt$$

$\int_0^1 y\,dy$

$\int \underbrace{f(x,y)}\,dy \to$

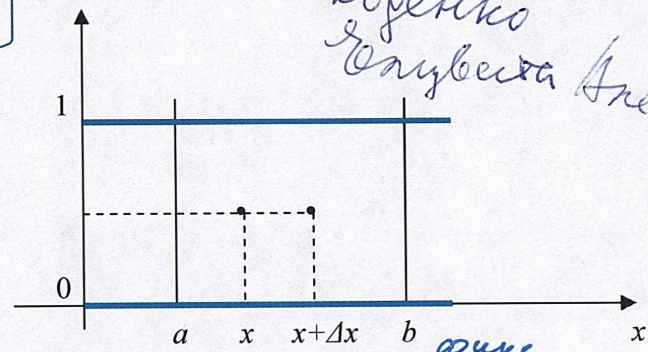
$\to \int \underbrace{f(x,(\varphi,\psi,t))}\,dt$

$F(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$

$\int_0^1 - (?)$

$|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left|\int_0^1 g(x+\Delta x, t) - g(x,t)dt\right| \le \varepsilon\cdot(1-0) = \varepsilon$

dt



фикс.

$f \in C(E) \Rightarrow g \in C(\Pi) \xrightarrow{\text{т.Кантора}} g$ – *равномерно непрерывна на* $\Pi \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta : \forall x \in [a,b] \ (x + \Delta x \in [a,b]) \ \forall\Delta x \ (\Delta x < \delta) \ \forall t \in [0,1]$

$|g(x+\Delta x, t) - g(x,t)| < \varepsilon$ – *пояснение.*

$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Leftrightarrow \forall x, \forall\Delta x: \ \underset{x_1}{x}, \ \underset{x_2}{x+\Delta x}$

Итак, $\forall x \in [a,b] \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta \ \forall\Delta x(|\Delta x| < \delta) \ x + \Delta x \in [a,b] \ |F(x+\Delta x) - F(x)| < \varepsilon \Rightarrow F \in C(x) \ \forall x \in [a,b]$.

$s_T < \sigma \le S_T$ $\to I$

$\lim S_T \to I$, $s_T \to I$

24

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\cdot(b-a),\quad M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Утв.2. Пусть $f\in C(E) \Rightarrow \iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ «повторный интеграл».

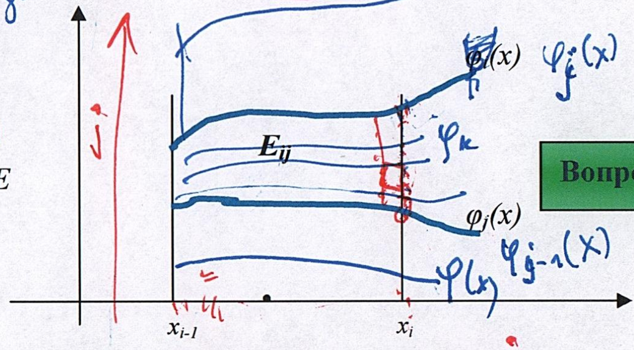
вставить (дописать)

Доказательство.

$\varphi_j(x) := \varphi(x)+\frac{j}{k}\left(\psi(x)-\varphi(x)\right)$

$0\le i\le k,\ \ x_i = a+\frac{b-a}{k}i,\ \ x_0=a,\ \ x_k=b,\ \ \varphi_0(x)=\varphi(x), \varphi_k(x)=\cancel{\varphi(x)}$ $\psi(x)$. T_k – разбиение множества E

Лемма. (Доказательство потом). $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(T_k)=0$.



Рассмотрим $M_{ij} := \sup\limits_{E_{ij}} f(x,y),\ \ m_{ij} = \inf\limits_{E_{ij}} f(x,y),\ \ S_{T_k} = \sum\limits_{i,j=1}^{k} M_{ij}\mu E_{ij},\ \ s_{T_k} = \sum\limits_{i,j=1}^{k} m_{ij}\mu E_{ij}$

i

$$f\in C(E)\Rightarrow f\in R(E)\Rightarrow \exists \lim_{\lambda(T)\to 0} S_T = \iint_E f(x.y)dxdy,\ \ \exists\lim_{\lambda(T)\to 0} s_T = \iint_E f(x.y)dxdy \xrightarrow{\text{всилу Леммы}} \exists\lim_{k\to\infty} S_{T_k} = \iint_E f(x.y)dxdy, \exists\lim_{k\to\infty} s_{T_k} = \iint_E f(x.y)dxdy.$$

$|E_{ij}|$

Рассмотрим

$$\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_a^b dx \sum_{j=1}^{k}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy = \cancel{\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\sum_{j=1}^{k} f(x,y)dy} = \sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \cancel{\sum_{j=1}^{k}}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy \le \sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\cancel{\sum_{j=1}^{k}}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} M_{ij}dy = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\cancel{\sum_{j=1}^{k}}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}\mu E_{ij} \le S_{T_k}$$

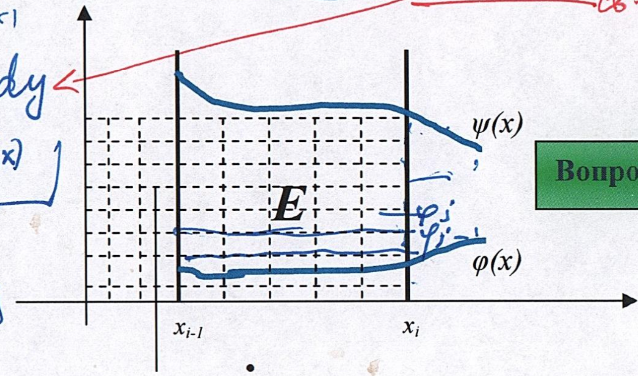
св-во Утв.1 Билет 23

$$s_{T_k} \le \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \le S_{T_k}$$

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy$

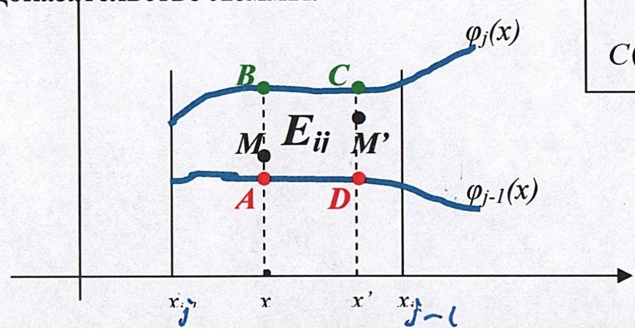
$\shortparallel$

μE_{ij}



$$\iint \quad \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \iint_E f(x,y)dxdy$$

Доказательство Леммы.



$A(x,\varphi_{j-1}(x))$	$B(x,\varphi_j(x))$
$C(x',\varphi_j(x))$	$D(x',\varphi_{j-1}(x))$

$b < a < c$

$\to I$

$\boxed{\lambda(T)\to 0 \Longleftrightarrow \lambda(T_k)\underset{k\to\infty}{=}0}$

7.10

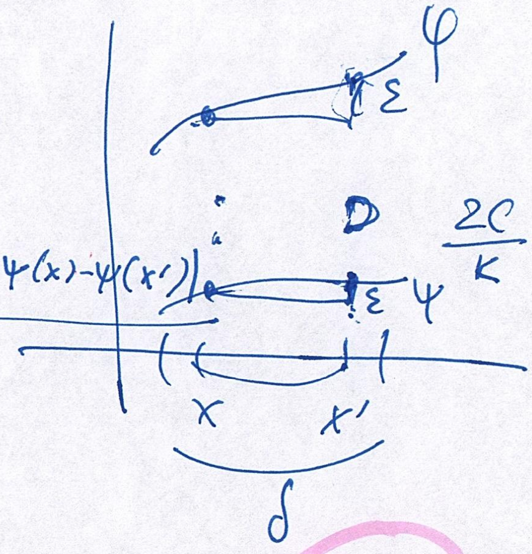
$$|MM'| \le |MB| + |BC| + |CM'| \le |AB| + |BC| + |CD| = \underbrace{(\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x))}_{<\frac{2C}{k}} + \sqrt{(x-x')^2 + (\varphi_j(x) - \varphi_j(x'))^2} + \underbrace{(\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x'))}_{<\frac{2C}{k}}$$

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| = \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{k} \le \frac{|\psi(x) + \varphi(x)|}{k} \le \frac{2C}{k}$$

$$|\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x')| = \ldots \le \frac{2C}{k} \qquad (\exists C : \forall x \in [a,b] \ \ |\varphi(x)| \le C, \ \ |\psi(x)| \le C).$$

$$|x - x'| \le |x_i - x_{i-1}| = \frac{|b-a|}{k}$$

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x')| = \left|\varphi(x) + \frac{j}{k}(\psi(x) - \varphi(x)) - \varphi(x') - \frac{j}{k}(\psi(x') - \varphi(x'))\right| \le |(\varphi(x) - \varphi(x'))| + \frac{j}{k}|\varphi(x) - \varphi(x')| + \frac{j}{k}|\psi(x) - \psi(x')|$$



φ, ψ – непрерывны на [a,b] => они равномерно непрерывны на [a,b].

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \ \ \forall x, x' \in [a,b] \ \ |x - x'| < \delta \ \ |\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon, \ \ |\psi(x) - \psi(x')| < \varepsilon$$

$\cancel{\psi(x)-\psi(x')}$ (оставил!)

Возьмем $k_0 = k_0(\delta)$ такую, что $\forall k > k_0 \ \ \frac{b-a}{k} < \delta, \cancel{\frac{b-a}{k}} < \varepsilon, \frac{4C}{k} < \varepsilon$ $\quad |\ldots| \le \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + (3\varepsilon)^2} = \varepsilon \cdot (1 + \sqrt{10})$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_0 : \forall k > k_0 \ \ diam E_{ij} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \lambda(T_k) = 0$

24

Сведение кратного интеграла к повторному (в случае n=3).

Вопрос № 11

$$D \subset R^2, \ D - \ \textit{измеримо}, \ D \ - \ \textit{компакт}, \ \varphi \in C(D), \psi \in C(D)$$

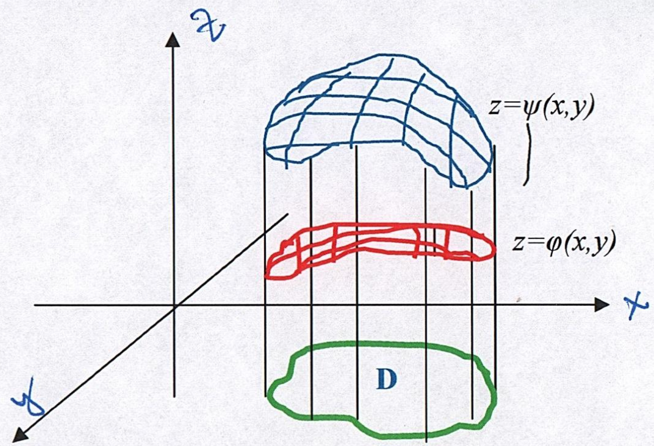
$$E := \{(x,y,z) | \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

Утв.1 (без доказательства).

$$f \in C(E) \Rightarrow \ \exists \ \textit{и} \ \textit{равны} \ \textit{интегралы}: \ \iiint_E f(x,y,z)dxdydz \ \ \textit{и} \ \ \iint_D dxdy \boxed{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz}$$

g(x) g(x,y)

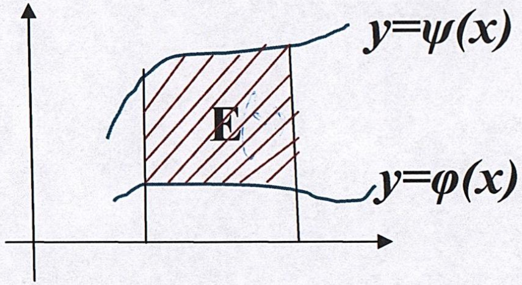
В двумерном случае было: $\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \boxed{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy}$

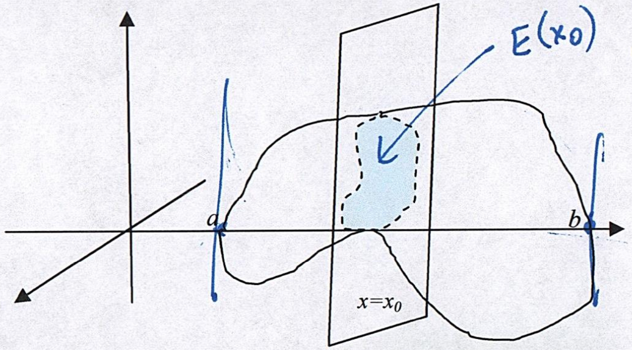


Утв. 2. (без доказательства). ?

$E(x_0) := E \bigcap \{(x,y,z) | x = x_0\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{E(x_0)} f(x,y,z)dydz.$$





Формула замены переменных в кратном интеграле.

Вопрос № 12

25

$G, \widetilde{G}$ – области (область – открытое линейно связное множество). $F: G \to \widetilde{G}$. Требования:

1) F – взаимно однозначно

2) $F \in C^1(G)$

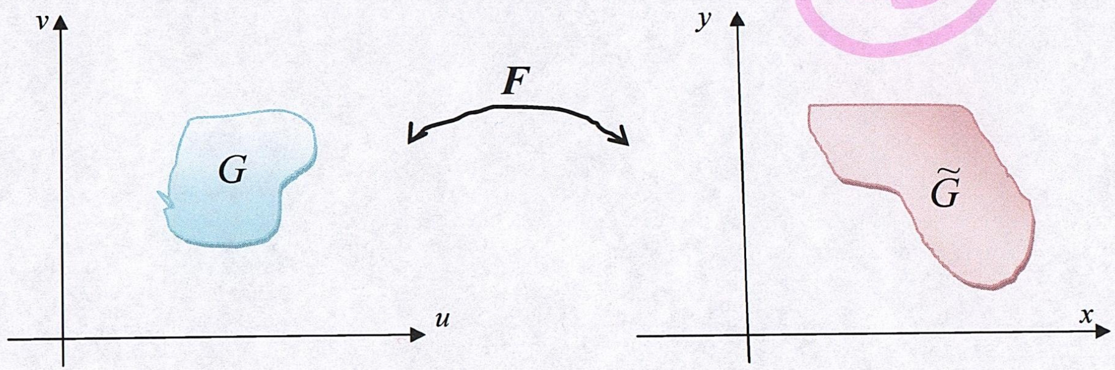
3) $J_n \neq 0$. – видимо $I_{u,v} \neq 0$

$F:(u,v) \to (x,y)$

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

$(F \in C^1(G) \Leftrightarrow x \in C^1(G), y \in C^1(G))$.



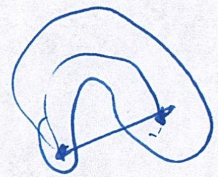
Опр.1 $J_{u,v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ - якобиан отображения F, $J_{u,v} = J_{u,v}(u,v)$.

Замечание. В этих условиях можно доказать:

1) $\exists$ *обратное отображение* $F^{-1}: \widetilde{G} \to G$, F^{-1} – *взаимно – однозначно.*

2) $F^{-1} \in C^1(\widetilde{G})$

3) $J_{x,y} = \dfrac{1}{J_{u,v}}$

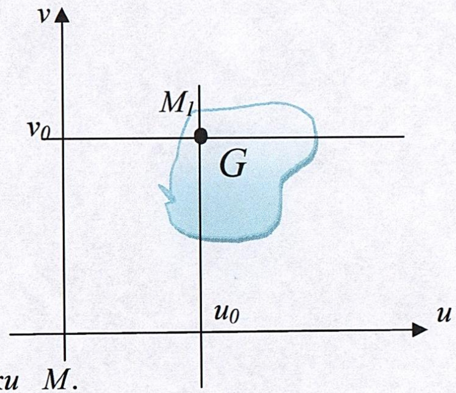


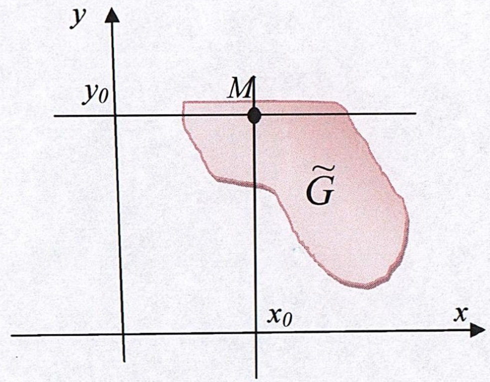
Аналогия:

$f'(x)$ – *непрерывна* $\Rightarrow$ *либо* $f'(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)$, *либо* $f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)\Rightarrow f(x)$ – *строго монотонна* $\Rightarrow\ \exists$ *обратная и* $\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'}$.

$u=u_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x(u_0,v) \\ y=y(u_0,v) \end{cases}$ – параметрически заданная кривая на множестве *(x,y)*

$v=v_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x(u,v_0) \\ y=y(u,v_0) \end{cases}$ – параметрически заданная кривая на множестве *(x,y)*





«Координатные линии».

$M_1(u_0,v_0)$

$M(x_0,y_0)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))$, (x_0,y_0) – *декартовы координаты точки* M.

(u_0,v_0) – *криволинейные координаты точки* M.

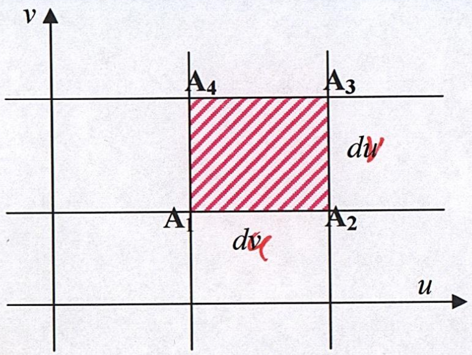
Вопрос №13

Утв. 1. (доказательство нестрогое).

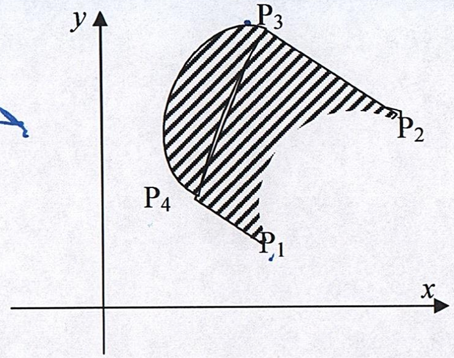
Пусть $X\subset\overline{X}\subset G$, F – *определенное выше отображение*, X – *измеримо, тогда и* $\overline{X}$ – *измеримо и* $\mu F(X)=\iint\limits_X |J_{u,v}|dudv$

Доказательство (нестрогое).

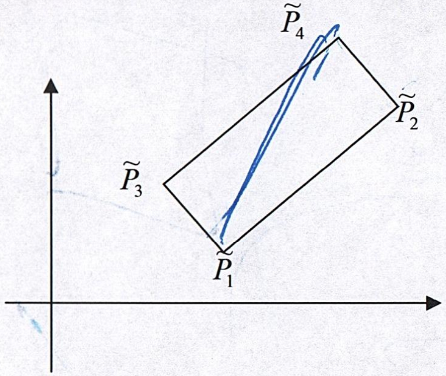
Пример. x(u,v)=u; y(u,v)=v; (x,y)→(u,v). Тогда $J_{u,v}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$.



$A_1(u,v)$
$A_2(u+du,v)$
$A_3(u+du,v+dv)$
$A_4(u,v+dv)$



$P_1(x(u,v),y(u,v))$
$P_2(x(u+du,v),y(u+du,v))$
$P_3(x(u+du,v+dv),y(u+du,v+dv))$
$P_4(x(u,v+dv),y(u,v+dv))$



$$P_1(x(u,v), y(u,v)) = \widetilde{P}_1(x(u,v), y(u,v))$$

$$P_2(x(u+du,v), y(u+du,v)) \approx \widetilde{P}_2(x + \frac{\partial x}{\partial u}du, y + \frac{\partial y}{\partial u}du)$$

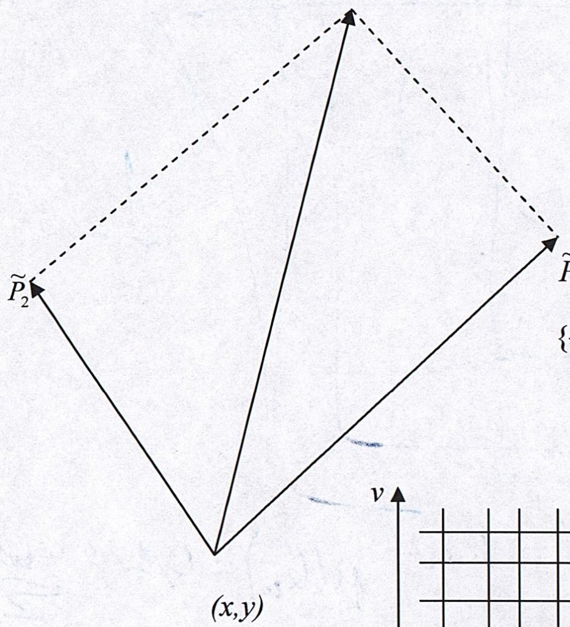
Пояснение: $x(u+du,v) \approx x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)du.$

$$P_3(x(u+du,v+dv), y(u+du,v+dv)) \approx \widetilde{P}_3(x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$$

$$P_4(x(u,v+dv), y(u,v+dv)) \approx \widetilde{P}_4(x + \frac{\partial x}{\partial v}dv, y + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$$

+ матрица в тетрадь

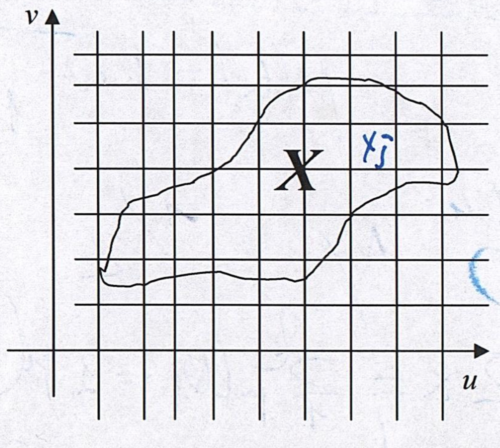
$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}dudv - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}dudv$

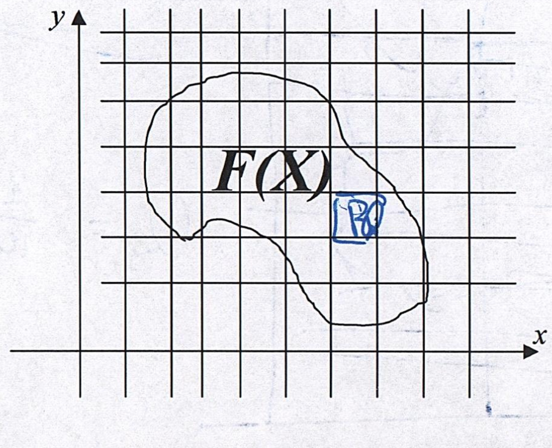


$$S(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2\widetilde{P}_3\widetilde{P}_4) = 2S(\Delta\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2\widetilde{P}_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix} = |J_{u,v}||dx||dy|.$$

$\{\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\}$

$\cancel{dxdy} \doteq |J_{u,v}|\cdot|du|\cdot|dv|$





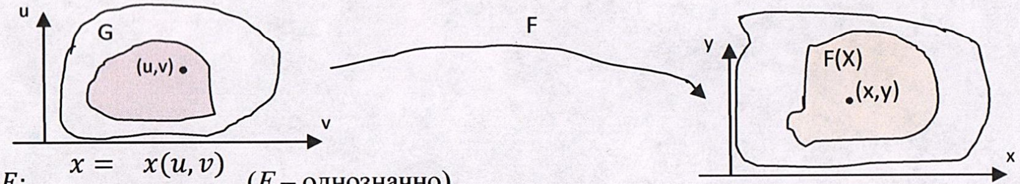
$$\mu F(X_j) \approx |J_{u,v}|\cdot|du|\cdot|dv|$$

$$\mu X_j = |du|\cdot|dv|$$

$$\mu F(X) = \sum_j \mu F(X_j) \approx \underbrace{\sum_j |J_{u,v}|\cdot|du|\cdot|dv|}_{\text{интегральная сумма}}$$

интегральная сумма

Утв.2 Пусть $X \subset \bar{X} \subset G$ - измеримо, F – определено выше, $f \in C(\overline{F(X)})$, $(f: F(X) \to \mathbb{R})$. Тогда $\iint_{\overline{F(X)}} f(x,y)dxdy = \iint_{\bar{X}} f\big(x(u,v)\big), y(u,v)\big) \cdot |J_{u,v}|dudv.$



F: $\begin{matrix} x = & x(u,v) \\ y = & y(u,v) \end{matrix}$ (F – однозначно).

Доказательство. (для случая выпуклого множества X).

Рассмотрим разбиение множества X: $X_j := Q_j \cap X$. X может быть несвязным, если X – не выпукло (но по условию X – выпукло).

$\{X_j\}$ – разбиение T множества X.

$\{F(X_j)\}$ – разбиение $\bar{T}$ множества $F(X)$.

$\mu F(X_j) = \iint_{X_j} |J_{u,v}|dudv = \iint_{(X_j)_{int}} |J_{u,v}|dudv = |J_{u,v}(u_j^*, v_j^*)| \cdot \iint_{(X_j)_{int}} dudv = |J_{u,v}(u_j^*, v_j^*)| \cdot \mu X_j$ - *следствие из теоремы о среднем для* $f = |J_{u,v}|, g = 1.$

X – измеримая область (открытое линейно связное множество); $f, g \in R(X), g -$ *не меняет знак на* X, $\cancel{f \in C(X) \Rightarrow}$ $\exists \xi \in X$ (f *ограничена*):
f ∈ C(X)

$$\int_X f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_X g(x)dx.$$

Рассмотрим тогда $\sigma(f, T, \xi) = \sum_j f(x_j, y_j)\mu F(X_j) = (1) = \sum_j f\big(x(u_j^*, v_j^*), y(u_j^*, v_j^*)\big) \cdot |J_{u,v}(u_j^*, v_j^*)|\mu X_j = (2).$

Будем рассматривать интегральные суммы, в которых отмеченные точки выбраны специальным образом, а именно: $x_j = x(u_j, v_j)$; $y_j = y(u_j, v_j)$

Тогда $\sum_j(1) \to \iint_{\overline{F(X)}} f(x,y)dxdy,$ а $\sum_j(2) \to \iint_{\bar{X}} f(u,v)\cancel{dudv}|J_{u,v}| \cdot dudv$ (при стремлении параметра разбиения к нулю). $(\lambda(T) \to 0, \lambda(\bar{T}) \to 0)$.

$\sum_j(1) = \sum_j(2).$