Вопрос № 1

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f \in D(p_0) \Leftrightarrow \Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon(\Delta p)|\Delta p|$

$(\varepsilon(\Delta p) \to 0$ при $\Delta p \to 0)$.

$$\boxed{\Delta p = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}}$$

Утв. (было): $f \in D(p_0) \Leftrightarrow \Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon_1(\Delta p)\Delta x_1 + \ldots + \varepsilon_n(\Delta p)\Delta x_n, \quad (\varepsilon_k(\Delta p) \to 0$ при $\Delta p \to 0)$.

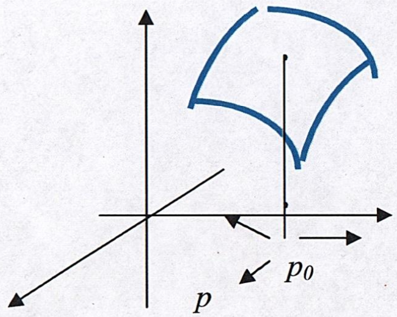
Достаточное и необходимое условие дифференцируемости.

Утв.1 (Необходимость 1).

$f \in D(p_0) \Rightarrow f \in C(p_0)$

Доказательство.

$$\Delta f = \underbrace{A_1 \underbrace{\Delta x_1}_{0}}_{0} + \ldots + A_n \Delta x_n + \underbrace{\varepsilon(\Delta p) \underbrace{|\Delta p|}_{0}}_{0}, \quad |\Delta x_1| \le |\Delta p| \Rightarrow \lim_{\Delta p \to 0} \Delta f = 0, \quad \text{т.е.} \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$$



Утв.2 (Необходимость 2).

$$f \in D(p_0) \Rightarrow \text{в т. } p_0 \quad \exists \ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = A_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Доказательство.

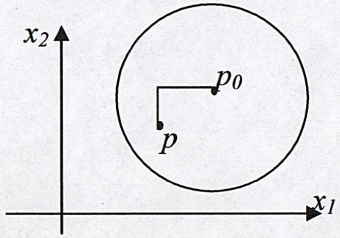
$f \in D(p_0) \Rightarrow \Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon_1(\Delta p)\Delta x_1 + \ldots + \varepsilon_n(\Delta p)\Delta x_n$.

Будем рассматривать смещения Δp вида $(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$. Поэтому (см. (1)):

$$\Delta f = f(p) - f(p_0) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots x_n^0) = (1) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots x_n^0) = (\text{правая} \quad \text{часть}) = \varepsilon_k(\Delta p)\Delta x_k + A_k \Delta x_k.$$

Поделим на Δx_k :

$$\frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots x_n^0)}{\Delta x_k} = A_k + \underbrace{\varepsilon_k(\Delta p)}_{0} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_0) = A_k, \quad \text{ч.т.д.}$$



Вопрос № 1

Утв. 3

Пусть в $U(p_0)$ определены $f, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(p_0), k = 1,\ldots,n \Rightarrow f \in D(p_0)$.

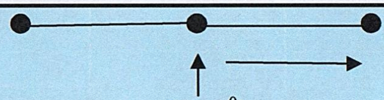
Доказательство (для случая n=2).

$$f(p) - f(p_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) + f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) = (*)$$

Замечание. $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a); \quad f(x_1^0 + \Delta x) - f(x_1^0) = f'(\xi)\Delta x$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, \xi_2)\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0)\Delta x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\Delta x_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\right)}_{\varepsilon_1(\Delta p)}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\Delta x_2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)}_{\varepsilon_2(\Delta p)}\Delta x_2$$

Проверим, что $\varepsilon_1(\Delta p) \to 0, \varepsilon_2(\Delta p) \to 0$ *при* $\Delta p \to 0 : (\xi_1, x_2^0) \to (x_1^0, x_2^0), \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \in D(p_0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0) \to \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$.

Замечание. $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) \to p$  $p_0 \leftarrow (x_1^0, x_2^0)$

(ξ_1, x_2^0)

Аналогично, $\varepsilon_2(\Delta p) \to 0$ *при* $\Delta p \to 0$.

Частные производные высших порядков

Вопрос № 4

Утв. (Теорема Шварца)

Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в окрестности $U(p_0)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in C(p_0), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \in C(p_0)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$.

Доказательство.

Рассмотрим функции:

$$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y) - f(x_0, y_0 + t \cdot \Delta y)$$

$0 < \xi_1 < 1$

$0 < \xi_2 < 1$

$0 < t < 1$

$x_0 < x_0 + t\Delta x < x_0 + \Delta x$

y_0 $\qquad$ $y_0 + \Delta y$

1) Заметим, что $\varphi(1) - \varphi(0) = F(\Delta x, \Delta y)$.

2) По теореме Лагранжа $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_1) \cdot (1-0)$, $\xi_1 \in (0,1)$, $\quad (\varphi \in D(0,1))$.

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0)\Delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0)\right) \cdot \Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0 + \xi_2 \Delta y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\varphi'(\xi_1) = F(\Delta x, \Delta y) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] = \textit{применяем}$$

Т.Лагранжа к каждой квадратной скобке =

3) Заметим также, что:

$\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) = F(\Delta x, \Delta y)$

По теореме Лагранжа:

Δy?

$$\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}'(\xi_3)(1-0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + \xi_3 \Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \xi_3 \Delta y)\right)\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \xi_4 \Delta x, y_0 + \xi_3 \Delta y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta p \to 0 \Rightarrow (x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0 + \xi_2 \Delta y) \to (x_0, y_0) = p_0; \quad (x_0 + \xi_4 \Delta x, y_0 + \xi_3 \Delta y) \to (x_0, y_0) = p_0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \xi_1 \Delta x, y_0 + \xi_2 \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \xi_4 \Delta x, y_0 + \xi_3 \Delta y) \quad (\textit{сократили на } \Delta x \Delta y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ при } \Delta p \to 0.$$

Дифференцирование сложных функций

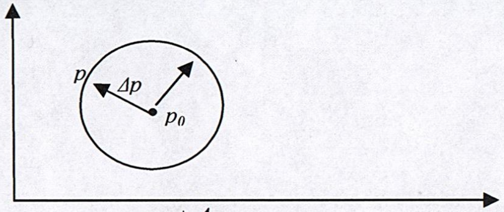
Вопрос № 2

Утв. 1. Пусть $x_1(t),\dots,x_n(t)\in D(t_0)$; $f\in D(p_0)$, где $p_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)=(x_1(t_0),\dots,x_n(t_0))$. Тогда функция

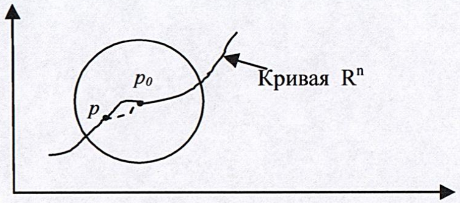
$$f(x_1(t),\dots,x_n(t))\in D(t_0),\text{ и } \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

Пояснение.
$$f(x_1,\dots,x_n)\to f\to\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n};\quad t\to\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}\to f(x_1,\dots x_n);\quad R\to R^n\to R$$
$$f(x_1(t),\dots,x_n(t))\to f\to\frac{df}{dt}$$

Доказательство.



$p=p_0+\Delta p$



$\Delta t: t=t_0+\Delta t$

$p=(x_1(t_0+\Delta t),\dots,x_n(t_0+\Delta t))$, (берем точки p, лежащие на кривой)

$x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t)$

Будем сейчас рассматривать не произвольные смещения Δp, а только смещения вида $\Delta p=(\Delta x_1(\Delta t),\dots,\Delta x_n(\Delta t))=(x_1(t_0+\Delta t)-x_1(t_0),\dots,x_n(t_0+\Delta t)-x_n(t_0))$

стремится к нулю при $\Delta t\to 0$, в силу непрерывности функций $x_1(t),\dots,x_n(t)$ ***в точке t_0.***

Поэтому, если доопределить $\Delta p(0)=\vec{0}$, *то функция* $\Delta p(\Delta t)$ *непрерывна в нуле.*

(*считаем* $\Delta p: \mathrm{R}\to\mathrm{R}^n$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta p(\Delta t)=(0,\dots,0)$).

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k+\varepsilon_1(\Delta p)\cdot\Delta x_1+\dots+\varepsilon_n(\Delta p)\cdot\Delta x_n$$

стремится к нулю при $\Delta p\to 0$

Вопрос № 2

Делим на Δt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta t} + \varepsilon_1(\Delta p) \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \ldots + \varepsilon_n(\Delta p) \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta t} \quad (*)$$

$\varepsilon_1(\Delta p)$ доопределим по непрерывности, т.е. $\begin{cases} \varepsilon_1(0) = 0 \\ \ldots \\ \varepsilon_n(0) = 0 \end{cases}$

Тогда $\varepsilon_1(\Delta p) \in C(\vec{0})$. Кроме того, $\Delta p \in C(0) \Rightarrow$ по теореме о композиции $\varepsilon_1(\Delta p(\Delta t)) \in C(0) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1(\Delta p(\Delta t)) = 0$. Переходим к пределу в (*) при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$ (была функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Утв. 2. Пусть $x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v) \in D((u_0, v_0))$; $f \in D(p_0)$, где $p_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) = (x_1(u_0,v_0), \ldots, x_n(u_0,v_0))$.

Тогда функция $f(x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v)) \in D(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial v}$

Доказательство.

Зафиксируем $v = v_0$. Рассмотрим функцию $f(x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v))$. Применяя Утв.1, получаем: $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u}$.

Формула для $\frac{\partial f}{\partial v}$ доказывается аналогично.

Замечание. Обозначим $f = f(x_1, \ldots x_n)$, $\Delta x_1 = dx_1, \ldots, \Delta x_n = dx_n$, $x_1 = x_1(u,v), \ldots, x_n = x_n(u,v)$.

Тогда

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot dv$$

…………..

$$dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x_n}{\partial v} \cdot dv$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot dv\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x_n}{\partial v} \cdot dv\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u}\right) \cdot du + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial v}\right) \cdot dv = (\text{Утв.}2) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv$$ $\longleftarrow$ ***Инвариантность формы первого дифференциала***

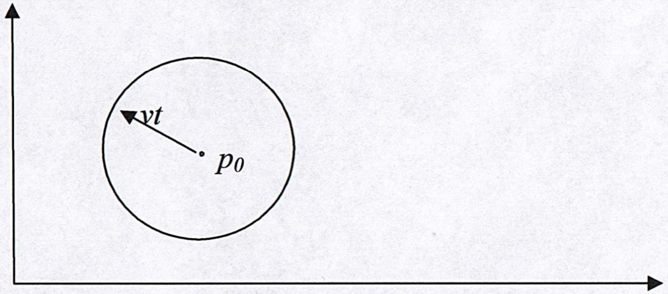
Производная по направлению. Градиент.

Вопрос № 3

Опр.1 Пусть

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определена на $U(p_0) \subset \mathbb{R}^n$, дан $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$, такой, что $|v| = 1$.

Предел $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(p_0 + v\cdot t) - f(p_0)}{t}$,если он существует и конечен, называется производной функции f по направлению v. Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, – $tg\alpha$ (геометрический смысл).



Пример. $v_1 = (1,0\dots,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial v_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ (следует из Утв.1)

Утв.1 Пусть $f \in D(p_0)$, тогда $\forall v \quad (|v| = 1) \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial v}$ в т.p_0, и $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot v_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot v_n \quad (v = v_1, \dots v_n))$.

Доказательство.

Рассмотрим сложную функцию $f(p_0 + vt) = f(t)$. По Утв.1 из предыдущего пункта:

$\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{dx_1}{dt} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\dfrac{dx_n}{dt}$. При этом $p_0 + vt = (x_1^0 + v_1 t, \dots, x_n^0 + v_n t)$

$$x_1^0 + v_1 t = x_1(t), \qquad x_n^0 + v_n t = x_n(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot v_n$$

Вопрос № 3

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = v_1, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t} = v_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(p_0+vt)-f(p_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

.

Опр. 2 Пусть $f \in D(p_0)$, вектор $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ называется градиентом функции *f,* обозначение *grad* ***f*** или ∇f .

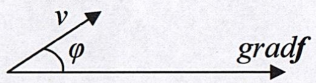
Утв.2 $\max\limits_{v}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| = \frac{\partial f}{\partial v^0}$, где $v^0 \| \, grad f \quad (v^0 \textit{параллелен} \quad grad f)$..

Пояснение. Градиент – направление, в котором функция растет (убывает) наиболее быстро.

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot v_n = (grad f, v) = |grad f|\cdot \underbrace{|v|}_{=1}\cdot \cos\varphi = |grad f|\cdot \cos\varphi$$

$\max\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \Leftrightarrow \varphi = 0$ или π, φ – угол между v и $grad f$.



Пример.
$f(x,y) = x^2 + y^2$; $p_0 = (1,1)$. ***Вычислим*** $grad f$ в т. p_0:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad grad f = (2\cdot 1, 2\cdot 1) = (2,2)$ в т. p_0.

Линия уровня – это по определению f(x,y)=const, grad$\perp$ **уровню всегда.**

Формула Тейлора

Вопрос № 5

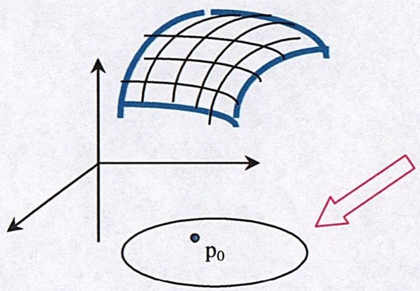
Опр. 1. Говорят, что функция $f{:}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ принадлежит классу $C^{(n)}(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$,если у f $\exists$ и непрерывны в D частные производные до порядка n.

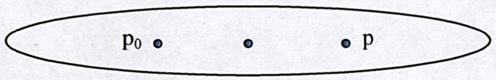
Замечание. $f\in C^{(n)}(D)\Rightarrow f\in D(D);.....(C^3\subset C^2)$.

Утв. 1. **(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).**

$f{:}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Пусть $f\in C^{(n+1)}(U(p_0))$. Тогда $\forall p\in U(p_0)\exists\vartheta: 0<\vartheta<1$, такое, что:

$$f(p)=f(p_0)+\frac{1}{1!}(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2})f(p_0)+...+\frac{1}{n!}(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^n f(p_0)+\frac{1}{(n+1)!}(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^{n+1}f(p_0+\vartheta\Delta p))$$





$\vartheta=0\Rightarrow p_0$

$\vartheta=1\Rightarrow p$

$\overline{p}_0+\vartheta\cdot\overline{\Delta p}$

Обсуждение.

$$(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^2 f(p_0):=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0)\cdot(\Delta x_1)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0)\cdot\Delta x_1\cdot\Delta x_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0)\cdot(\Delta x_2)^2$$

$$f(p)=\underbrace{f(p_0)}_{k=0}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)\cdot(\Delta x_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0)\cdot(\Delta x_2)}_{k=1}+\underbrace{...}_{k=2,}$$

$(т.к.\ \sum_{k=0}^{n}\ )$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(p_0 + t\Delta p)$ на отрезке [0;1]; $\varphi(0) = f(p_0); \varphi(1) = f(p)$. Заметим, что

$$\varphi(t) \in C^{(n+1)}([0;1]): \varphi'(t) = \frac{d}{dt}(f(p_0 + t\Delta p)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_2 = (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) f(p_0 + t\Delta p)$$

Пояснение.

$$f(p_0 + t\Delta p) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, x_2^0 + t\Delta x_2)$$

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_2) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_2)\cdot\Delta x_1 +$$

$$+ (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0 + t\Delta p)\cdot\Delta x_2)\cdot\Delta x_2 = (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^2 f(p_0 + t\Delta p)$$

(Видно, что $\varphi^{(k)}(t)$ существует и непрерывна на отрезке [0;1]). По формуле Тейлора для $\varphi(t)$ на отрезке [0;1]):

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)(1-0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)(1-0)^n + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)(1-0)^{n^{n+1}},$$ т.е.

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{1!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) f(p_0) + \ldots + \frac{1}{n!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^n f(p_0) + \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{n+1} f(p_0 + \vartheta\Delta p)).$$

Утв. 2 **(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).**

$$f \in C^{(n+1)}(U(p_0)) \Rightarrow f(p) = f(p_0) + \frac{1}{1!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) f(p_0) + \ldots + \frac{1}{n!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^n f(p_0) + \boxed{\frac{1}{(n+1)!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{n+1} f(p_0)} + \boxed{o(|\Delta p|^{n+1})}.$$

Доказательство.

По Утв.1:

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{1!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) f(p_0) + \ldots + \frac{1}{n!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^n f(p_0) + \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{n+1} f(p_0 + \vartheta\Delta p))$$

Замечание.

$h(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow h(x) = h(x_0) + \alpha(\Delta x),$ *где* $\alpha(\Delta x) \to 0$ *при* $x \to x_0, \Delta x \to 0.$

Вопрос № 5

Например: $\dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(p_0+\vartheta p)=\boxed{\dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(p_0)}+\boxed{\alpha(\Delta p),}$ *где* $\alpha(\Delta p)\to 0$ *при* $\Delta p\to 0,$ *т.к.* $f\in C^{n+1}$.

Аналогично для остальных частных производных порядка *n+1.*

Для *n=1: n+1=2:*

$$(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^{(2)} f(p_0+\vartheta p)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0+\vartheta\Delta p)\cdot(\Delta x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0+\vartheta\Delta p)\cdot\Delta x_1\cdot\Delta x_2+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0+\vartheta\Delta p)\cdot(\Delta x_2)^2=(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0)+\alpha_{11}(\Delta p))\cdot(\Delta x_1)^2+2(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0)+\alpha_{12}(\Delta p))\cdot\Delta x_1\Delta x_2+(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0)+\alpha_{22}(\Delta p))\cdot(\Delta x_2)^2=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0)\cdot(\Delta x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p_0)\cdot\Delta x_1\Delta x_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0)\cdot(\Delta x_2)^2+\underbrace{\alpha_{11}(\Delta p)\cdot(\Delta x_1)^2+2\alpha_{12}(\Delta p)\cdot\Delta x_1\Delta x_2+\alpha_{22}(\Delta p)\cdot(\Delta x_2)^2}_{A=}$$

Надо доказать, что это $\bar{o}(|\Delta p|^2)$.

$$A=\left[\alpha_{11}(\Delta p)\cdot\frac{(\Delta x_1)^2}{|\Delta p|^2}+2\alpha_{12}(\Delta p)\cdot\frac{\Delta x_1\Delta x_2}{|\Delta p|^2}+\alpha_{22}(\Delta p)\cdot\frac{(\Delta x_2)^2}{|\Delta p|^2}\right]\cdot|\Delta p|^2,$$ т.к. $\Delta x_k^{\ 2}\le|\Delta p|^2$, и $|\Delta x_k\Delta x_l|\le|\Delta p|$,

стремится к нулю ***ограничена***

получаем, что $A=\alpha(\Delta p)\cdot|\Delta p|^2$ и $\alpha(\Delta p)\to 0$ $\quad при\cdot\Delta p\to 0$.

Экстремумы

Вопрос № 6

Опр.1 Пусть f определена на $U(p_0)$. Точка p_0 называется:

1) точкой строгого локального минимума, если $\forall p \in \dot{U}(p_0) \quad f(p) > f(p_0)$.
2) точкой строгого локального максимума, если $\forall p \in \dot{U}(p_0) \quad f(p) < (p_0)$.
3) точкой нестрогого локального минимума, если $\forall p \in \dot{U}(p_0) \quad f(p) \geq (p_0)$.
4) точкой нестрогого локального максимума, если $\forall p \in \dot{U}(p_0) \quad f(p) \leq f(p_0)$.

Утв.1 (Необходимое условие). Пусть f определена на $U(p_0)$и $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_0)$, где p_0 – точка локального экстремума. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_0) = 0$.

'k-б

Доказательство.
Следует из теоремы Ферма, примененной к функции $h(x_k) := f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$

Утв. 2. (Достаточное условие).
(для случая $n=2$)

Пусть f определена на $U(p_0)$, $f \in C^{(2)}(U(p_0)), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0$.

Обозначим $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Тогда:

Вопрос № 6

1) $A > 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \min$

2) $A < 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \max$

3) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ нет экстремума

«Доказательство».

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^0,x_2^0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1^0,x_2^0)(\Delta x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1^0,x_2^0)(\Delta x_2)^2\right) + \overset{=}{o}(|\Delta p|^2)$$

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^0,x_2^0) + \frac{|\Delta p|^2}{2}\left(A\frac{\Delta x_1^2}{|\Delta p|^2} + 2B\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{|\Delta p|^2} + C\frac{\Delta x_2^2}{|\Delta p|^2} + \overset{=}{o}(1)\right)$$

(было: $f'(x_0)$)

Опр. $L(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ – квадратичная форма. Квадратичная форма $L(x,y)$ называется положительно определенной, если $\forall(x,y) \quad (x^2+y^2 \neq 0): \quad L(x,y) > 0.$

Утв. $A > 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow L(x,y)$ положительно определена.

$$\left.\begin{matrix} L(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ \tilde{L}(x,y) = -Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 \end{matrix}\right| \Longrightarrow \left| \begin{matrix} A > 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \\ -A > 0, \begin{vmatrix} -A & -B \\ -B & -C \end{vmatrix} > 0 \end{matrix}\right.$$

Неопределенный интеграл

Вопрос № 7

Опр.1 Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на Δ (Δ – промежуток, т.е. отрезок, интервал или полуинтервал: (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,\infty)$), если $F \in D(\Delta)$ и в любой точке промежутка Δ $F'(x)=f(x)$.

Опр.2 Функция $F(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на Δ, если $\exists$ конечный набор $M = \{x_1, \ldots x_k\}$ точек $x_1, \ldots x_k \in \Delta$, таких что $F \in D(\Delta \backslash M)$, $F \in C(\Delta)$ и $\forall\ x \in \Delta \backslash M$ $F'(x)=f(x)$.

Утв.1. $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на Δ => $\forall\, C \in \mathbb{R}$ функция $F(x)+C$ – первообразная функции $f(x)$ на Δ.
Доказательство.
$(F(x)+C)'= F'(x)=f(x)$.

Утв.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$ на Δ => $\forall\, C \in R$: $\forall\, x \in \Delta$ $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Доказательство:
Рассмотрим функцию $g(x)= F_1(x) - F_2(x)$. $\forall\, x \in \Delta$ $g'(x)= f(x) - f(x)=0$.
Докажем, что в $\forall\, x_1, x_2 \in \Delta$: $g(x_1) = g(x_2)$.
По теореме Лагранжа $g(x_2) - g(x_1) = g'(c)\ (x_2 - x_1)=0$.

Опр. 3. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$. Обозначение: $\int f(x)dx$

Утв. 3. Пусть $f \in D(\Delta)$ Тогда $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
df
Доказательство. Следует из определения.
Утв. 4.

Утв. 5. Пусть у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют первообразные на промежутке Δ. Тогда у функции $f(x) + g(x)$ существует первообразная на промежутке Δ: $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
Доказательство. Следует из того, что $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Вопрос № 7

Утв. 6. Пусть у функции $f(x)$ существует первообразная на промежутке Δ. Тогда у функции $\lambda f(x)$ $(\lambda \in R)$ существует первообразная на промежутке Δ и $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Доказательство. Следует из того, что $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$.

Утв. 7. *Пусть $f, g \in D(\Delta)$ и у функций $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)g(x)$ существует первообразная на (Δ). Тогда у функции $f(x)g'(x)$ существует первообразная на Δ и выполняется:*

$\int (f(x) \cdot g(x)')dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ **(Формула интегрирования по частям).**

dg(x) *df(x)*

Другая запись: $\int fdg = f \cdot g - \int gdf$

Доказательство.

Следует из формулы: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Определенный интеграл

Вопрос № 8

Опр. 1. Набор точек $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ называется разбиением отрезка $[a,b]$. Эти точки (их конечное число) называются точками разбиения. Отрезки $\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$ называют отрезками разбиения. $|\Delta_k| = \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина отрезка разбиения.

Опр.2 . Пусть $T=[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$ - разбиение отрезка $[a,b]$. Параметром разбиения T является число $\lambda(T)=max\ \Delta x_k$, «мелкость « разбиения.

Опр.3. Разбиение T_2 отрезка $[a,b]$ называют измельчением разбиения T_1 отрезка $[a,b]$, если $T_1\subset T_2$ (обозначается $T_1<T_2$).

Утв. 1. а) Пусть $T_1 < T_2 < T_3$ (T_1 измельчение T_2) $\Rightarrow T_1< T_3$ (следует из определения).
б) $\forall T_1,T_2\ \exists T:\ T_1<T$ и $T_2<T$.(возьмем в качестве $T= T_1 \cup T_2$).
в) $T_1< T_2 \Rightarrow \lambda(T_1)\leq \lambda(T_2)$.

Опр. 4. Пусть T – разбиение отрезка $[a,b]$. Выберем в каждом отрезке разбиения по точке $\xi_k \in \Delta_k, k=1,2,\ldots,n$. Набор $\xi_k \in =\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$– набор отмеченных точек. Пара (T, ξ) называется разбиением с отмеченными точками.

Опр. 5. Пусть на $[a,b]$. задана $f\colon [a,b]. \to \mathbb{R}$. $\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ – интегральное измельчение.

(соответствует функции f с разбиением T с отмеченными точками ξ).

Опр. 6. Число $I \in \mathbb{R}$ называется интегралом Римана функции f на отрезке $[a,b]$. если $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta:\ \forall (T, \xi)$, такого что $\lambda(T)< \delta:\ |\sigma(f,T,\xi)-I| < \varepsilon$.
Если такое число I существует, функция называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$: $f \in R([a,b])$.

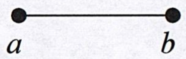
$\int_a^b f(x)dx$

Замечание. Можно писать, что $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,\xi)$. $= \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Такие пределы мы не изучали, но известно, что для них справедливы все утверждения пределов.

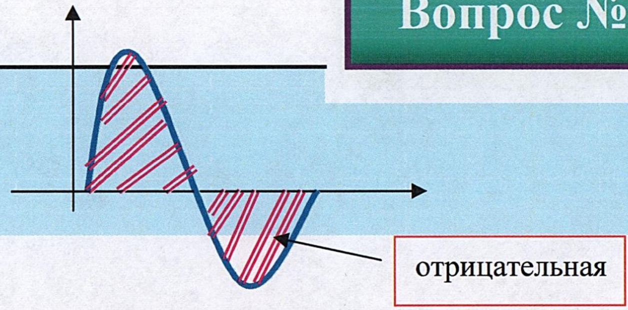
Вопрос № 8

Опр.7. $\int_a^a f(x)dx := 0$ (интеграл нулевой длины). $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

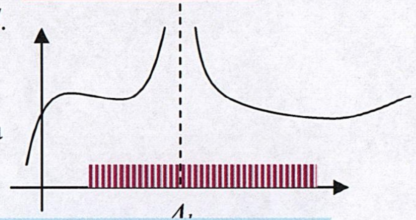


Замечание.

1. Пусть $f(x)\geq 0$, $\sigma(f,T,\xi)$ = сумме площадей прямоугольников.
2. $\int_a^b f(x)dx$ – площадь под графиком.

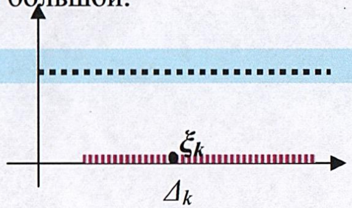


Утв. 2. (Необходимое условие интегрирования). $f\in R([a,b])$ (интегрируема на $[a,b]$)) => f ограничена на $[a,b]$. *Обратное не обязательно.*



Доказательство. Пусть T – разбиение. Предположим, что f не является ограниченной на $[a,b]$ => $\exists k$: f не ограничена на Δ_k => за счет выбора точки ξ_k сумму $\sigma(f,T,\xi)$ можно сделать сколь угодно большой.

Пример (неинтегрируемая ограниченная функция). Функция Дирихле.



$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

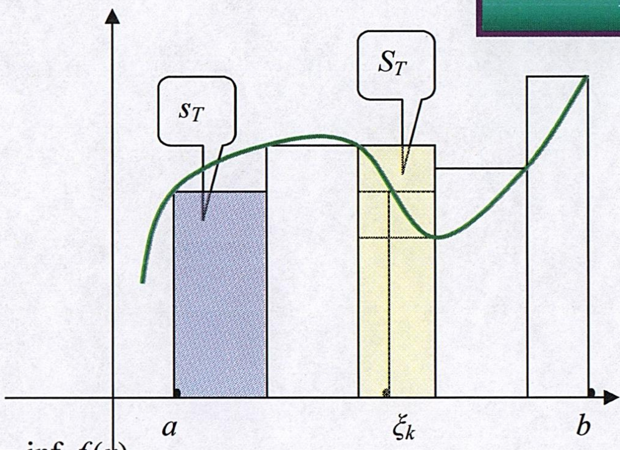
$$\left.\begin{array}{l} \text{1) Берем все } \xi\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a \\ \text{2) Берем все } \xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \text{ не существует}$$

Нижние и верхние суммы Дарбу

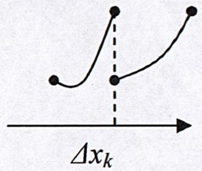
Вопрос № 9

Опр.1. Пусть T – разбиение отрезка $[a,b]$, $m_k = \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x)$.

$s_T := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ - нижняя сумма Дарбу; $S_T := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ - верхняя сумма Дарбу.



может не быть максимума:



Утв.1. $\forall (T, \xi)$: $s_T \le \sigma(f,T,\xi) \le S_T$.
Доказательство (=> из определения).

Утв. 2. $\forall\ T_1,T_2\ :\ s_{T_1} \le S_{T_2}$
(любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней суммы Дарбу).
Доказательство.
$\forall\ T_1,T_2\ :\ T_1<T_2\ ,\ \overset{=}{s}_{T_1} \le \overset{=}{s}_{T_2}$

1) $\overset{=}{s}_{T_1} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k} m_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{j_k} \Delta x_{kj} = \sum\limits_{k} (\sum\limits_{j=1}^{j_k} m_k \cdot \Delta x_{kj}) \le \sum\limits_{k} (\sum\limits_{j=1}^{j_k} m_{kj} \cdot \Delta x_{kj}) = \overset{=}{s}_{T_2}$, здесь $m_{kj} = \inf\limits_{x\in\Delta_{kj}} f(x)$.

2) $\forall\ T_1,T_2$ таких, что $T_1<T_2 : \underline{\underline{S}}_{T_1} \le \underline{\underline{S}}_{T_2}$

3) По T_1 и T_2 строим $T=T_1 \cup T_2$, тогда:

$$\left.\begin{matrix} T_1<T \\ \\ T_2<T \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{=}{s}_{T_1} \underset{\text{по } 1)}{\le} \overset{=}{S}_T \le \underline{\underline{S}}_T \underset{\text{по } 2)}{\le} \underline{\underline{S}}_{T_2}$$

Утв. 3. $\overset{=}{s}_T = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi), \quad \underline{\underline{S}}_T = \sup\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$.

Доказательство.
$\overset{=}{s}_T = \sum\limits_{k=1}^{n} \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x)\Delta x_k = \inf\limits_{\substack{(\xi_1,\ldots\xi_n) \\ \xi_k\in\Delta_k, k=1,\ldots,n}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Опр. $\omega(f,[a,b]) := \sup\limits_{x_1,x_2\in[a,b]} |f(x_2) - f(x_1)|$ - -колебание функции f на отрезке

Утв. 4. $\underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k))\Delta x_k$.

Доказательство. $\underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x))\Delta x_k - \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x))\Delta x_k$ (условно разница между max и min).

Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости.

Вопрос № 10

Опр.1. Пусть f ограничена на $[a,b]$. $I_* = \sup\limits_T \overline{\overline{s}}_T$ – нижний интеграл Дарбу, $I^* = \inf\limits_T \underline{\underline{S}}_T$ – верхний интеграл Дарбу.

Замечание. т.к. $\forall\ T_1, T_2\ \ \overline{\overline{s}}_{T_1} \le \underline{\underline{S}}_{T_2}$, то множество $\{\overline{\overline{s}}_T\}$ ограничено сверху => $I_*\ \exists$. и множество $\{\underline{\underline{S}}_T\}$ ограничено снизу => $I^*\ \exists$.

(Учитываем, что f ограничена на $[a,b]$.) => $\forall\ T\ \exists$ ~~$\overline{\overline{s}}_{T_1}$ и $\underline{\underline{S}}_{T_2}$~~). ($I_* \le I^*$ предположим $I_* > I^*$????)

$s_T \le I_* \le I^* \le S_T$

Утв. 1. Критерий интегрируемости.
Пусть f ограничена на $[a,b]$. Тогда $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(t)\to 0} (\underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T) = 0$.

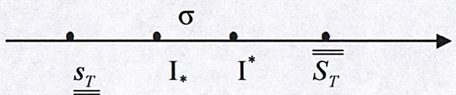
Доказательство.
=> Дано: $f \in R([a,b])$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta:\ \forall\ (T, \xi)$, такого что $\lambda(T) < \delta:\ |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon$

Надо доказать: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta:\ \forall\ (T, \xi)$, такого что $\lambda(T) < \delta:\ \underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T < \varepsilon$.

Имеем: $|\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon$, *т.е.* $I - \varepsilon < \sigma(f,T,\xi) \le I + \varepsilon$

Перейдем к inf по ξ: $I - \varepsilon \le \inf \sigma(f,T,\xi) \le I + \varepsilon$, $I - \varepsilon \le \overline{\overline{s}}_T \le I + \varepsilon$. Аналогично для $\underline{\underline{S}}_T : I - \varepsilon \le \underline{\underline{S}}_T \le I + \varepsilon$, т.е. доказали, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta:\ \forall\ (T, \xi)$, такого что $\lambda(T) < \delta:\ \underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T < \varepsilon$

<= Дано: $\exists \lim\limits_{\lambda(t)\to 0} (\underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T) = 0$. По замечанию $\forall\ T\ \exists\ \overline{\overline{s}}_T \le I_* \le I^* \le \underline{\underline{S}}_T$ => $0 \le I_* - I^* \le \underline{\underline{s}}_T - \overline{\overline{S}}_T$ => $I_* = I^*$.



при $\lambda(T)\to 0$: 0 0 0

Обозначим их общее значение: $I := I_* = I^*$

$-I$

кроме того, $\forall T$: $\overline{\overline{s}}_T \le \sigma(f,T,\xi) \le \underline{\underline{S}}_T$ Теперь $\forall T$, такого что $\lambda(T) < \delta$ $0 \le \underline{\underline{S}}_T - \overline{\overline{s}}_T < \varepsilon$ (по условию), $\overline{\overline{s}}_T \le \sigma(f,T,\xi) \le \underline{\underline{S}}_T$, $\overline{\overline{s}}_T \le I \le \underline{\underline{S}}_T$ => $|\sigma(f,T,\xi)| < \varepsilon$, ч.т.д.

Следствие.
Пусть f ограничена на $[a,b]$. Тогда $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(t)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k = 0$.

Интегрируемость непрерывных функций.

Вопрос № 11

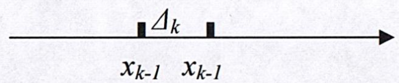
Утв. 1. $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R([a,b]$

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса f является ограниченной на $[a,b]$. По теореме Кантора f является равномерно непрерывной на $[a,b]$ т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Рассмотрим такое произвольное T, что $\lambda(T)<\delta$.

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)\Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)$$



меньше ε: $|\Delta_k| < \delta \Rightarrow \forall \xi_{k1}, \xi_{k2} \in \Delta_k : |f(\xi_{k1}) - f(\xi_{k2})| < \varepsilon.$

Утв. 2. Пусть f монотонна на $[a,b]$. Тогда $f \in R([a,b])$.

Доказательство.

$\omega(f, \Delta_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$

Далее:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta = \delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$= \delta(f(x_n) - f(x_0)) < \varepsilon. \ (*)$$

Нам надо: $\forall\varepsilon>0 \ \exists \ \delta$: $\forall T$, такого, что $\lambda(T)< \delta$ **(а стало быть, $\Delta x_k \le \lambda(T)<\delta$)** : $\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)\Delta x_k < \varepsilon$. Получается, если взять $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(x_n) - f(x_0)}$, получим (*). ч.т.д.

Замечание. Не ограниченная функция не может быть интегрирована.

Арифметические свойства определенного интеграла

Вопрос № 12

Утв. 1. $f,\ g\in R([a,b]);\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}\Rightarrow \lambda f+\mu g\in R([a,b])$; и $\int\limits_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)dx+\mu\int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство.

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a,b]$ с заданными точками ξ. Тогда $\sigma(\lambda f+\mu g,T,\xi)=\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\mu\sum\limits_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k=\lambda\overbrace{\sigma(f,T,\xi)}^{\int_a^b f(x)dx}+\mu\overbrace{\sigma(g,T,\xi)}^{\int_a^b g(x)dx}$, ч.т.д.

при $\lambda(T)\to 0$

Утв. 2. Пусть $f\in R([a,b])\Rightarrow\ \forall\,[c,d]\ \subset[a,b]$: $f\in R([c,d])$.

Доказательство.

Рассмотрим T_1 – разбиение $[c,d]$. Дополним до разбиения T отрезка $[a,b]$ так, чтобы $\lambda(T_1)\geq\lambda(T)$. Имеем:

T: $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k$ (1) , T_1: $\sum\limits_{k=1}^{m}\omega(f,\widetilde{\Delta}_k)\Delta x_k$ (2)

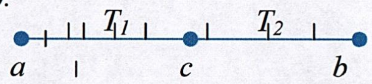
При $\lambda(T)\to 0$ сумма (1) $\to 0$ по условию (критерий интегрируемости) => сумма (2) $\to 0$: $0\leq\overset{0}{\sum(2)}\leq\overset{0}{\sum(1)}$ =>по критерию интегрируемости $\exists\int\limits_c^d f(x)dx$.

Кроме того, поскольку $f\in R([a,b])$, то f ограничена на $[a,b]$=> f ограничена на $[c,d]$.

Утв. 3. Пусть $f\in R([a,b])\Rightarrow\ \forall\ c\in[a,b]$: $f\in R([a,c]),\ f\in R([c,b])$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

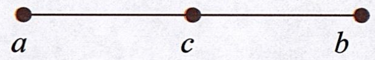
Доказательство.

Интегрируемость на $[a,c]$ и $[c,b]$ следует из Утв.2. Далее: $T=T_1\cup T_2$, $\lambda(T_1)\leq\lambda(T),\ \lambda(T_2)\leq\lambda(T),\ \sigma(f,T,\xi)=\sigma(f,T_1,\xi)+\sigma(f,T_2,\xi)$.



При $\lambda(T)\to 0$ имеем $\lambda(T_1)\to 0,\ \lambda(T_2)\to 0$ =>левая часть $\to\int\limits_a^b f(x)dx$ правая часть $\to\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

Утв. 4. Пусть $a\leq c\leq b$, $f\in R([a,c]),\ f\in R([c,b])\Rightarrow f\in R([a,b])$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

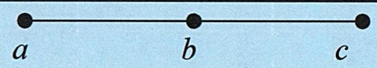


Доказательство.

T отрезка $[a,b]$. Рассмотрим $T_1:=T\cup\{c\}$: $\lambda(T_1)\leq\lambda(T)$; $\left|\sigma(f,T,\xi)-\sigma(f,T_1,\xi)\right|\leq\overset{0}{3M\lambda(T)}$, где $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f,T_1,\xi_1)=\int\limits_a^c+\int\limits_c^b\ \Rightarrow\exists\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f,T,\xi)=\int\limits_a^c+\int\limits_c^b.$$

Замечание. В равенстве $\int\limits_a^b=\int\limits_a^c+\int\limits_c^b$ необязательно предполагать $a\leq c\leq b$: $\int\limits_a^c+\int\limits_c^b=(\int\limits_a^b+\int\limits_b^c)+\int\limits_c^b=\int\limits_a^b+\int\limits_b^c-\int\limits_b^c=\int\limits_a^b$.



Интегрирование кусочно-непрерывных функций. Интегрирование произведения и частного

Вопрос № 13

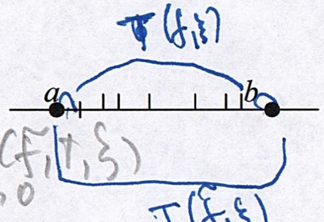
Опр. 1 f называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если

$\exists x_0, x_1, \dots x_n: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b: \quad f \in C(x_{k-1}, x_k), k = 1,2,\dots,n,$ а в точках x_k – разрывы 1 – го рода.

Лемма. Пусть $f \in C((a,b),)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = B$. Тогда $f \in R([a,b])$.

Доказательство.

Рассмотрим $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in (a,b) \\ A, x = a \\ B, x = b \end{cases} \quad => \tilde{f}(x) \in R([a,b])$



$\left|\sigma(f,T,\xi) - \sigma(\tilde{f},T,\xi)\right| \le 2M\,\lambda(T),\ => \exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,\xi),$ ~~т.к.~~ $f \in R([a,b,])$.

стремится к нулю при $\lambda(T) \to 0$

Утв. 1 f - кусочно-непрерывная на => $f \in R([a,b,])$.

Доказательство.

По Лемме $\forall k \quad f \in R([a,b])$. По Утв.4 (предыдущий пункт) отсюда следует, что $f \in R([a,b,])$.

Утв.2 $f,g \in R([a,b,]) => f \cdot g \in R([a,b,])$.

Доказательство.

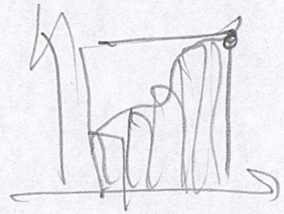
$f,g \in R([a,b,]) => f,g$ ограничены на $[a,b,] => f \cdot g$ ограничено на $[a,b,]$.

$$\left|f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)\right| = \left|f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)\right| = \left|g(x_2)\cdot(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1)\cdot(g(x_2) - g(x_1))\right| \le$$

$$\le \left|g(x_2)\right|\cdot\left|f(x_2) - f(x_1)\right| + \left|f(x_1)\right|\cdot\left|g(x_2) - g(x_1)\right| \le M_2 \cdot \omega(f,\Delta_k) + M_1 \cdot \omega(g,\Delta_k) \Rightarrow \omega(f\cdot g,\Delta_k) \le M_2\cdot\omega(f,\Delta_k) + M_1\cdot\omega(g,\Delta_k).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f\cdot g,\Delta_k)\cdot\Delta x_k \le M_2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k + M_1\cdot\sum_{k=1}^{n}\omega(g,\Delta_k)\cdot\Delta x_k$$

стремятся к нулю при $\lambda(T) \to 0$ => $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega(f\cdot g,\Delta x) \to 0$ *при $\lambda(T) \to 0$* => по критерию интегрируемости $f \cdot g \in R([a,b,])$.



Вопрос № 13

Утв. 3. $f \in R([a,b]) \Rightarrow \exists C>0 : \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \ge C \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \in R([a,b])$.

Доказательство.

$$\left|\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)}\right| = \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|f(x_2)\cdot f(x_1)|} \le \frac{1}{C^2}|f(x_1)-f(x_2)|.$$

Замечание. $\omega(f,\Delta_k) := \omega_k(f)$ – обозначение, $\omega_k(\frac{1}{f}) \le \frac{1}{C^2}\omega_k(f)$, $\omega_k(f) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta_k}|f(x_1)-f(x_2)|$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(\frac{1}{f})\cdot\Delta x_k \le \frac{1}{C^2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\cdot\Delta x_k$$

стремится к нулю, т.к. $f \in R([a,b])$

стремится к нулю

$$\frac{1}{f(x)} \in R([a,b]).$$

(f ограничена на $[a,b]$, т.к. f – интегрируема на $[a,b]$ => $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена на $[a,b]$).

$$0 \le C \le |f(x)| \le C_1 > 0$$

$$\infty > \frac{1}{C_1} \le \frac{1}{|f(x)|} \le \frac{1}{C} < \infty.$$

Утв.4. $f, g \in R([a,b]), \exists$ ~~C~~ $const$ $:C$ $: \forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \ge C \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in R([a,b])$.

Доказательство: по Утв.3 $\dfrac{1}{g} \in R([a,b])$, по Утв.2 $f \cdot \dfrac{1}{g} \in R([a,b])$, ч.т.д.

Интегрирование неравенств.

Вопрос № 14

Утв.1 Пусть $f, g \in R([a,b]); \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство $f(\xi_k) \le g(\xi_k)$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\boxed{\Delta x_k} \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\boxed{\Delta x_k}$$

больше нуля

$$\underbrace{\sigma(f,T,\xi)}\le\underbrace{\sigma(g,T,\xi)}$$

при $\lambda(T)\to 0$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \le \quad \int\limits_a^b g(x)dx$$

Утв.2 $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b]),$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \quad (1) \quad (a<b).$

Доказательство.

Лемма (которую будем использовать)

$||a|-|b|| \le |a-b|$

Доказательство Леммы.

$$\begin{cases} |a| = |b+(a-b)| \le |b| + |a-b| \to |a|-|b| \le |a-b| \\ |b| = |a+(b-a)| \le |a| + |a-b| \to |b|-|a| \le |a-b| \end{cases}$$

$(||a|-|b|| \le |a-b| \Leftrightarrow -|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b|)$ $\Rightarrow$ Лемма доказана.

Теперь докажем основное утверждение.

$\omega_k(|f|) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta_k} ||f(x_2)|-|f(x_1)|| \le \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta_k} |f(x_2)-f(x_1)| = \omega_k(f)$, кроме того: $f \in R([a,b,])$=> f ограничена на $[a,b,]$ => $|f|$ ограничена на $[a,b,]$.

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}\omega_k(|f|)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \leftarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$b_i > 0$

$|\sum a_i b_i|$

x_i

$\sum |a_i| b_i =$

$= \sum |a_i b_i|$

x_i

~~$|x+y|\le$~~

~~$|x-y|\ge$~~

$\left|\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|$

$|x+y| \le |x|+|y|$

$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum |f(\xi_k)|\Delta x_k$

$|x_1+x_2| \le |x_1|+|x_2|$

$|a|-|b| \le |a-b|$

$||a|-|b|| \le |a-b|$

$\le$

$\sigma(f,T,\xi)$

$\sigma(|f|,T,\xi)$

$\sigma(|f|,T,\xi) \ge \sigma(f,T,\xi) > (\ )$

Билет 15 – м.
Бесов, стр. 231

Вопрос № 15

Непрерывность интеграла.

Неравенство (1) справедливо для $a \le b$, а неравенство $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right| \; \forall a,b.$

$F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Если $f \in R([a,b])$ то $F(x)$ определена $\forall x \in [a,b]$.

$(F(x_0+\Delta x) - F(a)) - (F(x_0) - F(a)) =$

$= F(x_0+\Delta x) - F(x_0)$

Утв. 1. $f \in R([a,b]) \Rightarrow F \in C([a,b])$

Доказательство.

Пусть $x_0, x_0+\Delta x \in [a,b]$. Рассмотрим $|F(x_0+\Delta x) - F(x_0)| = \left|\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} Cdt\right| = C|\Delta x_0| \to 0$ *при* $\Delta x_0 \to 0$. ⇨

$(f \in R([a,b]) \Rightarrow \exists C \ge 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \le C)$

⇨ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(F(x_0+\Delta x) - F(x_0)) = 0$, т.е. $F \in C(x_0)$, т.к. x_0 – произвольная $\Rightarrow F \in C([a,b])$.

Теорема о среднем

Утв.1 Пусть $f, g \in R([a,b])$ и $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$. $\exists m, M : \forall x \in [a,b] \quad m \le \cancel{g}(x) \le M \Rightarrow \exists \mu \in [m,M] : \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int_a^b \cancel{f}(x)dx$.

f(x) g(x)

Следствие

Если, кроме того, $f \in C([a,b])$ то $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\int_a^b \cancel{f}(x)dx$. В частности, если $g(x) \equiv 1$, то $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

g(x)

Доказательство. (Утв.1)

1) $g(x) \ge 0: \quad \forall x : m \le f(x) \le M \quad \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$

a) $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow 0 \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ годится любое μ.

б) $\int_a^b g(x)dx \neq 0 \;\; (>0) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b g(x)dx > 0$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

возьмем такое μ => $\int_a^b fgdx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

2) *g(x)<0* => аналогично (только при умножении делении знаки неравенства меняются).

Доказательство следствия. $f \in C([a,b]) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]; \forall x \in [a,b]: f(x) \leq f(x_1) = M$ (max); $f(x) \geq f(x_2) = m$(min); - (по т. Вейерштрасса).

Применяем Утв. 1 к случаю $m = m_1, M = M_1 \Rightarrow \exists \mu \in [m_1, M_1]$. По теореме о промежуточном значении $\exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = \mu$.. Следствие доказано.

~~средним~~