Е. С. Соболева
Г. М. Фатеева

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е. С. Соболева
Г. М. Фатеева

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рекомендовано УМО
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия
по уравнениям математической физики
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по естественно-научным специальностям

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2012

УДК 517.95
ББК 22.161.6
С54

Соболева Е.С., Фатеева Г.М. **Задачи и упражнения по уравнениям математической физики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 96 с. — ISBN 978-5-9221-1053-2.

Настоящее издание содержит около 200 задач, снабженных ответами. Для задач, отмеченных звездочкой, приведены решения.

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия по уравнениям математической физики для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественно-научным специальностям.

ISBN 978-5-9221-1053-2

ЗАДАЧИ

§ 1. Классификация уравнений и их характеристики

1°. Уравнение

$$a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=0$$
$$a^2+b^2+c^2\neq 0, \tag{1.1}$$

принадлежит
— гиперболическому типу, если $(b^2-ac)\big|_{M_0}>0$;
— параболическому типу, если $(b^2-ac)\big|_{M_0}=0$;
— эллиптическому типу, если $(b^2-ac)\big|_{M_0}<0$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a(x,y)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2-2b(x,y)\,\frac{dy}{dx}+c(x,y)=0 \tag{1.2}$$

называется уравнением характеристик для (1.1). Из (1.2) следует, что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Пусть $\varphi(x,y)=c$ и $\psi(x,y)=c$ — независимые первые интегралы (1.2). Они определяют два семейства характеристик.

1). Дискриминант $D>0$. Оба семейства вещественные. Невырожденная замена

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y),\qquad J=\begin{vmatrix}\xi'_x & \eta'_x\\ \xi'_y & \eta'_y\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.3}$$

приводит уравнение гиперболического типа к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=F\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big). \tag{1.4}$$

Заменой

$$\alpha=\frac{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}{2},\qquad \beta=\frac{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}{2}$$

это уравнение приводится ко второму каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\Phi\Big(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\Big). \tag{1.5}$$

2). $D < 0$ (эллиптическое уравнение). Характеристики комплексно-сопряженные, $\psi(x,y) = \overline{\varphi(x,y)}$. Вещественная замена

$$\xi = \frac{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}{2}, \qquad \eta = \frac{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}{2i} \tag{1.6}$$

приводит уравнение (1.1) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big). \tag{1.7}$$

3). $D = 0$ (параболическое уравнение). Имеем только одно семейство характеристик, так как $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$. Любая невырожденная замена $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = g(x,y)$ (часто полагают $\eta = x$ либо $\eta = y$) приводит уравнение (1.1) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big). \tag{1.8}$$

Отметим, что производные по старым переменным выражаются в новых переменных по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) +$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \tag{1.9}$$

2°. Примеры. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

а) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \tag{1.10}$$

б) $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \neq 0; \tag{1.11}$$

в) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.12}$$

Решения. а). Уравнение (1.10) относится к гиперболическому типу, ибо $D = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Дифференциальным уравнением характеристик для него является уравнение

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + 2\sin x\frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0,$$

откуда следует, что $\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm 1$; в итоге имеем $y = \cos x \pm x + c$.

Сделаем следующую невырожденную замену: $\xi = y - \cos x + x$, $\eta = y - \cos x - x$, якобиан которой

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \sin x + 1 & \sin x - 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\sin x + 1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sin x - 1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x + 1)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin^2 x - 1) +$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x - 1)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cos x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cos x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x + 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin x + 1 + \sin x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x - 1).$$

Подставляя в уравнение (1.10), получим

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

что позволит нам решить уравнение в явном виде.

В самом деле, обозначим $\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$. Тогда получим $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ и, следовательно, v не зависит от ξ, т. е. $v = h(\eta)$, где $h(\eta)$ — произвольная гладкая функция. А так как $\frac{\partial u}{\partial \eta} = h(\eta)$, то

$$u(\xi,\eta) = \int h(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{1.13}$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение исходного уравнения:

$$u(x,y) = f_1(y - \cos x - x) + f_2(y - \cos x + x),$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции.

б). Уравнение (1.11) есть уравнение эллиптического типа, так как $D = -x^4 < 0$. Дифференциальным уравнением характеристик для него служит уравнение

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} = -x \pm ix \qquad \text{или} \qquad y = -\frac{x^2}{2} \pm i\frac{x^2}{2} + C.$$

Положим $\xi = y + \frac{1}{2}x^2$, $\eta = \frac{1}{2}x^2$. При $x \neq 0$ преобразование невырожденное:

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0.$$

В новых переменных (см. (1.9)) уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

в). Уравнение (1.12) относится к уравнениям параболического типа, так как $D = 0$, и ему соответствует следующее дифференциальное уравнение характеристик:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} + x^2 = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = -x.$$

Интегрируя его, получим одно семейство характеристик $y + \frac{1}{2}x^2 = c$. Положим $\xi = y + \frac{1}{2}x^2$, $\eta = x$, тогда

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Выразив производные, входящие в уравнение, через производные по новым переменным (см. (1.9)), подставив найденные выражения в уравнение (1.12), приводим его к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

3°. **Задачи.** Определить тип и найти характеристики уравнений.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

2. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$

4. $\sin^2 x\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \sin 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

6. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

7. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнений.

8. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

10. $(x^2-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Привести к каноническому виду следующие уравнения.

12. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 13\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

15. $3x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

16. $(1+x^2)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

17. $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 9x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

18. $e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{x+y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + e^{2y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xu = 0.$

19. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0.$

20. $e^x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

21. $xy^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x^3\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x \neq 0.$

22. $2y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 14xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 25x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\frac{y^2}{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + 25\,\frac{x^2}{y}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$

23. $2\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\sin 2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 8\cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

24. $y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

25. $\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

26. $x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x > 0.$

27. $x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x < 0.$

Найти общее решение следующих уравнений.

28. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0.$

29. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2(x + y).$

30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\,\frac{\partial u}{\partial x}.$

31. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2x\,\frac{\partial u}{\partial y}.$

32. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

33. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^2y.$

34. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

35. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = y.$

Привести к каноническому виду и решить уравнения.

36. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 12\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

37. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 6\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

38. $4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

39. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 64\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

40. $x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

41. $x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

42. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{ctg} x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

43. $3x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

44. $3x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 1.$

45. $3x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^4y^5.$

Переходя к полярным координатам, решить уравнения.

46. $x\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

47. $x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x^2 + y^2).$

48. $x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

49. $y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial u}{\partial y} + x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

§ 2. Задача Коши

1°. Задачей Коши для уравнения

$$a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \tag{2.1}$$

называется задача определения его решения, удовлетворяющего дополнительным условиям на некоторой кривой Γ:

$$u(x,y)\big|_\Gamma = u_0(x,y)\big|_\Gamma, \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\Gamma = u_1(x,y)\big|_\Gamma, \tag{2.2}$$

где l — некасательное к Γ направление, например нормаль n. Если кривая Γ не является характеристикой (см. (1.2)), то в некоторой окрестности Γ решение задачи Коши существует и единственно при некоторых условиях гладкости на коэффициенты уравнения и кривую Γ [8]. В противном случае задача либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений (см. решения задач 60* и 62).

2°. Пример. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2.3}$$

$$u|_{y=3x+1} = 6x^2 + 1, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=3x+1} = 1. \tag{2.4}$$

Решение. Это уравнение — гиперболического типа и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0$$

заменой $\xi = y - x$, $\eta = y - 2x$. Его общее решение имеет вид (см. (1.13))

$$u(x, y) = f_1(y - x) + f_2(y - 2x). \tag{2.5}$$

Из условий Коши при $y = 3x + 1$ получим

$$u|_{y=3x+1} = f_1(2x+1) + f_2(x+1) = 6\,x^2 + 1, \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=3x+1} = f_1'(2x+1) + f_2'(x+1) = 1. \tag{2.7}$$

Продифференцируем по x уравнение (2.6):

$$2\,f_1'(2x+1) + f_2'(x+1) = 12\,x. \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) следует, что

$$f_1'(2x+1) = 12\,x - 1.$$

Пусть $t = 2\,x + 1$, тогда

$$f_1'(t) = 6\,t - 7, \qquad f_1(t) = 3\,t^2 - 7\,t + C_1. \tag{2.9}$$

Из (2.6) и (2.9) найдем

$$f_2(x+1) = 6x^2 + 1 - f_1(2x+1) =$$
$$= 6x^2 + 1 - 3(2x+1)^2 - 7(2x+1) - C_1 = -6x^2 - 26x - 9 - C_1.$$

Пусть $z = x + 1$, тогда

$$f_2(z) = -6(z-1)^2 - 26(z-1) - 9 - C_1 = -6z^2 - 14z + 11 - C_1.$$

Из (2.5), (2.9) и (2.10) найдем

$$u(x, y) = f_1(t)\big|_{t=y-x} + f_2(z)\big|_{z=x+1} =$$
$$= 3(y-x)^2 - 7(y-x) + C_1 - 6(y-2x)^2 - 14(y-2x) + 11 - C_1 =$$
$$= -21x^2 + 18xy - 3y^2 + 35x - 21y + 11.$$

3°. Решить задачи Коши.

50. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad u|_{y=0} = 1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = x.$

51. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3, \quad u|_{y=x} = x^2(x^3+2), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x} = 3x(x^3+1).$

52. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{x=0} = 1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 2.$

53. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=x} = 1.$

54. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 2x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$

55. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 8, \quad u|_{x=0} = -2y, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = 2(y-1).$

56. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{y=x} = 2\sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x} = 2\cos x.$

57. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 8\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{y=1-x} = 2x^2 + 13x + 5,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=1-x} = 4(2x+5).$

58. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 8\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{y=2x+1} = 116x^2 + 28x + 1,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=2x+1} = 28x + 2.$

59. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 2(x + \cos x).$

60*. Почему нельзя найти такую функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяла бы уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и условиям $u|_{y=2x+1} = x^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=2x+1} = 14x$.

61. Почему нельзя найти такую функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяла бы уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и условиям $u|_{y=x+1} = x + x^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=x+1} = x^2 - x$?

62. Какой должна быть функция $u(x,y)$, чтобы существовало решение задачи Коши $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u|_{y=3x+2} = = 4x^2 + 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=3x+2} = g(x)$?

В первом квадранте ($x > 0$, $y > 0$) построить область, в которой для данного уравнения определено решение задачи Коши с условиями Коши, заданными на конечном интервале L.

63*. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u|_{y=3x} = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=3x} = \psi(x)$, $L = \{y = 3x, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

64. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u|_{y=0} = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x)$, $L = \{y = 0, 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

65. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u|_{x=0} = \varphi(y)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(x)$, $L = \{x = 0, 2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

66. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u|_{x=0} = \varphi(y)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(x)$, $L = \{x = 0; 2 \leqslant y \leqslant 3\}$.

§ 3. Задача Гурса

1°. Задачей Гурса называется задача определения решения волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$ по данным на характеристиках $u = \varphi$ при $x - at = x_0 - at_0$, $u = \psi$ при $x + at = x_0 + at_0$, $\varphi(t_0, x_0) = \psi(t_0, x_0)$.

Задача Гурса встречается при изучении процессов сорбции и десорбции, в процессах сушки воздушным потоком, прогревания труб водным потоком и др.

2°. Пример. Найти решение задачи Гурса в параллелограмме $OABC$ (см. рис. 1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

$$u(t,x)\big|_{x-at=0} = \varphi(x), \tag{3.2}$$

$$u(t,x)\big|_{x+at=0} = \psi(x), \tag{3.3}$$

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

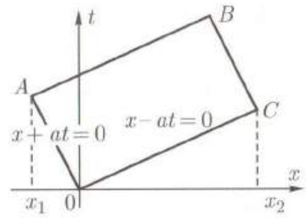


Рис. 1

Решение. Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$u(t,x) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \tag{3.4}$$

Из условий (3.2) и (3.3) имеем

$$f_1(0) + f_2(2x) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_2,$$
$$f_1(2x) + f_2(0) = \psi(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant 0,$$

откуда

$$f_2(z) = \varphi\left(\frac{z}{2}\right) - f_1(0), \qquad f_1(z) = \psi\left(\frac{z}{2}\right) - f_2(0)$$

и так как $f_1(0) + f_2(0) = \varphi(0)$, окончательно получаем

$$u(t,x) = \psi\left(\frac{x - at}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x + at}{2}\right) - \varphi(0).$$

Из условия

$$0 \leqslant \frac{x - at}{2} \leqslant x_2, \qquad x_1 \leqslant \frac{x + at}{2} \leqslant 0$$

следует, что решение определяется в параллелограмме $OABC$.

3°. Решить задачи Коши.

67. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в прямоугольнике $OABC$ по значениям решения на отрезке OA характеристики $t + x = 0$, $u|_{t=-x} = x$, на отрезке OC характеристики $t - x = 0$, $u|_{t=x} = x^2$ (см. рис. 1).

68*. Доказать, что решение задачи Гурса для уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)$ с условиями, заданными на характеристиках $u|_{y=0} = \varphi_1(x)$,

$u|_{x=0} = \varphi_2(y)$, где $f(x,y)$ — непрерывная функция, φ_1 и φ_2 — дифференцируемые функции и $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, дается формулой $u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^y\int\limits_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$.

69. Решить задачу Гурса для уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 4\,xy$ с условиями $u|_{y=0} = \sin x$, $u|_{x=0} = y$.

70. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ по его значениям на двух характеристиках $u(x,y)\big|_{y=x} = \varphi_1(x)$, $u(x,y)\big|_{y=5x} = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

71. Доказать, что решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$ в области $0 < y < ax$, $x > 0$, $y > 0$, удовлетворяющее условиям $u|_{y=0} = f(x)$, $u|_{y=ax} = g(x)$, дается формулой $u(x,y) = f(x) + g\left(\dfrac{y}{a}\right) - f\left(\dfrac{y}{a}\right)$, если функции f, g дифференцируемы и $f(0) = g(0)$.

Указание. См. ответ и решение задачи 68.

§ 4. Вывод волнового уравнения. Постановки приводящих к нему задач

1*. Уравнения гиперболического типа получаются при математическом описании колебательных процессов. При выводе уравнения следует установить величины, определяющие явления и воспользоваться физическими законами, которым оно подчиняется.

Простейшим одномерным уравнением этого типа является уравнение колебания струны.

Струной называется упругая гибкая нить, которая в состоянии равновесия натянута (вдоль оси Ox) и потенциальная энергия элемента которой в процессе свободных колебаний пропорциональна приращению длины этого элемента. Коэффициент пропорциональности называется натяжением T струны. Основной величиной, характеризующей колебание струны, является отклонение $u = u(t,x)$ струны в плоскости xOu от положения равновесия в точке x в момент времени t.

2*. Пример. Вывести уравнение «малых» поперечных колебаний однородной струны плотности ρ_0 под действием внешней силы линейной плотности $f_0(t,x)$.

Решение. Для вывода уравнения колебаний выделим участок струны от x до $x+\Delta x$ и спроектируем все действующие на этот участок силы на оси координат (рис. 2).

Мы изучаем только малые поперечные колебания, поэтому можно считать внешние силы и силы инерции направленными вдоль оси Ou.

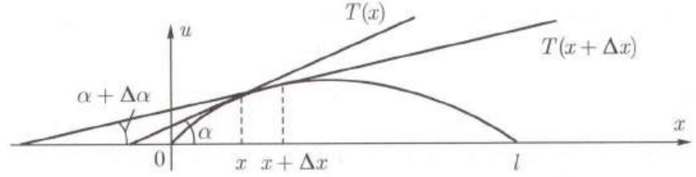


Рис. 2

Кроме того, будем считать величину $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ столь малой, что квадратом ее можно пренебречь. В этих предположениях длину выделенного участка струны можно считать постоянной, так как $S = \int\limits_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u'^2_x}\,dx \approx \Delta x$. Тогда по закону Гука величина натяжения $T_0 = |T|$ не зависит ни от времени, ни от координаты x.

Обозначим через $\alpha(x)$ угол наклона касательной в точке x. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx 1$. Найдем проекцию всех сил в момент времени t на ось Ou. Проекция сил натяжения равна

$$T_0\left[\sin\alpha(x+\Delta x) - \sin\alpha(x)\right] = T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right) = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x^*}\Delta x,$$

здесь $x^* \in (x,\ x+\Delta x)$.

Пусть $f_0(t,x)$ — непрерывная линейная плотность внешних сил. Тогда на выделенный участок действует сила $f_0(t,x)\,\Delta x$. Если $\rho(x)$ — непрерывная линейная плотность струны, то масса выделенного участка будет $\rho(x)\,\Delta x$ и проекция силы инерции на ось Ou равна $\rho(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\Delta x$. По второму закону Ньютона имеем

$$T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x^*}\Delta x + f_0(t,x)\,\Delta x = \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\Delta x.$$

Следовательно, сокращая на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем уравнение вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x),$$

где

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho(x)}, \qquad f(t,x) = \frac{f_0(t,x)}{\rho(x)}.$$

3°. Решить задачи.

72*. Одномерная гибкая струна длины l под действием силы тяжести совершает малые колебания относительно вертикального положения, совпадающего с осью Ox. Верхний конец ее закреплен в точке $x = l$. Вывести уравнение колебаний нити.

73. Используя уравнение задачи 72 на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, поставить задачу Коши о вынужденных колебаниях однородной бесконечной струны, если в момент $t = 0$ струна имела форму $\varphi(x)$, и скорость в каждой точке была $\psi(x)$.

74. Используя уравнение задачи 72 при $0 < x < l$, $t > 0$, поставить смешанные задачи вынужденных колебаний струны с начальной формой и начальными скоростями, задаваемыми соответственно функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при следующих краевых условиях на концах:

а) концы струны закреплены жестко;

б) правый конец закреплен жестко, а левый приклеплен к колечку пренебрежимо малой массы, которое может свободно без трения двигаться по вертикальному стержню. Такой конец можно назвать свободным;

в) концы струны закреплены упруго, т. е. каждый из концов испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению конца;

г) к концам струны $x = 0$ и $x = l$ приложены поперечные силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ соответственно.

Указание: а) если концы закреплены жестко, то смещения их равны нулю; б) на свободном конце вертикальная составляющая силы натяжения равна нулю.

75. Струна $(0 \leqslant x \leqslant l)$ с линейной плотностью $\rho(x)$ совершает поперечные колебания $u(t, x)$ в плоскости (x, u). Найти кинетическую энергию K.

76. Найти потенциальную энергию струны $(0 \leqslant x \leqslant l)$, совершающей свободные поперечные колебания $u(t, x)$ в плоскости (x, u), когда

а) концы струны закреплены жестко;

б) концы струны закреплены жестко, и степенями $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ выше второй можно пренебречь.

Указание. См. решение задачи 72.

77. Используя задачи 75 и 76, записать закон сохранения энергии для однородной струны с жестко закрепленными концами, совершающей малые поперечные колебания, $\rho(x) = \rho_0$, $f(t, x) = 0$.

78. Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются, и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра, совпадающей с осью Ox.

Пусть $u(t, x)$ — смещение вдоль оси Ox сечения x в момент времени t и пусть при $t = 0$ $u(0, x) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi(x)$. Учитывая, что $u(t, x)$ удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a^2 = \gamma \dfrac{p_0}{\rho_0}$, $0 < x < l$, $t > 0$ (p_0, ρ_0 — начальные давление и плотность, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$, где c_p, c_v — теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме соответственно), поставить краевые задачи для случая, когда концы трубки

а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками;

б) открыты.

79. Мембраной называется гибкая упругая пленка, которая в состоянии покоя занимает область D плоскости (x, y) с границей Γ и для которой работа, затрачиваемая на деформацию элемента мембраны пропорциональна приращению площади этого элемента (коэффициент пропорциональности T называется натяжением мембраны). Пусть ρ — поверхностная плотность мембраны, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — начальные (при $t = 0$) отклонения $u(t, x, y)$ и скорости точек (x, y) мембраны соответственно. Учитывая, что $u(t, x, y)$ при малых свободных колебаниях удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, поставить задачи, если

а) край мембраны закреплен жестко;

б) край мембраны свободен;

в) к краю мембраны приложена поперечная сила $F(t, x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$;

г) край мембраны закреплен упруго, т. е. точки края испытывают сопротивление, пропорциональное их отклонению;

д) на мембрану действует поперечная сила плотности $f_0(t, x, y)$, а край мембраны закреплен жестко;

е) мембрана колеблется в среде, оказывающей сопротивление колебаниям, пропорциональное отклонению, а край мембраны закреплен жестко.

§ 5. Постановки задач для уравнений параболического типа

1°. Изучение явлений переноса (передачи тепла, диффузии) приводят к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.1}$$

Вывод уравнения основан на законе Фурье теплопередачи или на законе Фике о диффузии, согласно которым тепловой поток (диффузионный поток) пропорционален градиенту температуры (концентрации).

2°. Пример. Вывести уравнение, которому удовлетворяет температура в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью.

Решение. Пусть ось стержня направлена вдоль оси Ox, S — площадь поперечного сечения, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность стержня, k — коэффициент теплопроводности, $u(t,x)$ — температура стержня в точках поперечного сечения (ввиду предположения о тонкости стержня она не зависит от точек сечения) в момент времени t.

Для простоты S, c, ρ, k будем считать постоянными.

Выделим малый участок стержня $[x, x+\Delta x]$ и рассмотрим изменение его температуры за время Δt.

Количество тепла, протекающее через поперечное сечение x стержня за время Δt (тепловой поток), согласно закону Фурье равно $-kS\,\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\,\Delta t$ (знак «$-$» объясняется тем, что тепло перетекает от более нагретых мест к менее нагретым).

При отсутствии внутренних источников изменение количества тепла на участке от x до $x+\Delta x$ будет

$$-kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\,\Delta t + kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x)\,\Delta t$$

и по теореме Лагранжа может быть записано в виде

$$kS\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x^*}\cdot \Delta x\cdot \Delta t, \quad x^*\in(x,x+\Delta x). \tag{5.2}$$

Это количество тепла расходуется на изменение температуры выделяемого участка за время Δt, т. е. на величину

$$u(t+\Delta t,x)-u(t,x)=\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t^*}\cdot\Delta t, \quad t^*\in(t,t+\Delta t),$$

и по закону Ньютона будет равно

$$c\rho S\Delta x\,\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t^*}\cdot\Delta t. \tag{5.3}$$

Приравнивая (5.2) и (5.3) и сокращая на $\Delta x\,\Delta t$ при $\Delta x\,\Delta t\to 0$, получим уравнение (5.1), где $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$.

3°. Решить задачи.

80. Поставить задачу Коши об определении температуры в бесконечном тонком изолированном стержне, если температура в начальный момент равна $\varphi(x)$.

81. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0\leqslant x\leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией x. Рассмотреть случаи, когда

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;
б) на концы стержня подается извне заданный тепловой поток;
в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

82. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью в направлении оси Ox, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные оси Ox.

83. Вывести уравнение диффузии взвешенных частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а концентрация частиц зависит только от одной геометрической координаты z (высоты) и времени t. Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

§ 6. Формула Даламбера

1°. Решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty<x<+\infty, \qquad 0<t\leqslant T, \tag{6.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — достаточно гладкие функции, дается формулой Даламбера

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{6.2}$$

2°. Пример. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad u|_{t=0}=\sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sin^2 3x.$$

Решение. Применяя формулу Далмбера, получим

$$u(t,x)=\frac{\sin 3(x-3t)+\sin 3(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}\sin^2 3z\,dz=$$

$$=\sin 3x\cos 9t+\frac{1}{12}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}(1-\cos 6z)\,dz=$$

$$= \sin 3x \cos 9t + \frac{t}{2} - \frac{1}{72} \sin 6z \Big|_{x-3t}^{x+3t} =$$

$$= \sin 3x \cos 9t - \frac{1}{36} \sin 36t \cos 6x + \frac{t}{2}.$$

3°. Применяя формулу Даламбера, найти решение задачи Коши.

84. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$

85. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x.$

86. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2}.$

87. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = xe^{-x^2}.$

88*. Пользуясь формулой Даламбера, доказать

а) единственность решения задачи Коши для волнового уравнения;

б) непрерывную зависимость решения этой задачи от начальных условий, т. е. доказать, что для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon, T)$ такое, что если

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta,$$

то

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

если

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad u_i\Big|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_i(x), \quad i = 1, 2.$$

89*. а). Проверить, что функция $v_n(t,x) = \dfrac{1}{n^2}\,\mathrm{sh}\, nt \sin nx$ является решением задачи Коши для уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + + \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = 0$, $v_n\big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{\partial v_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{n}\sin nx$, $|x| < \infty$, где $n = \mathrm{const}$, причем справедлива оценка $\left|\dfrac{\partial v_n}{\partial t}\right|_{t=0} < \dfrac{1}{n}$.

б). Доказать, что в этом случае нет непрерывной зависимости решения от начальных данных, т. е. доказать, что $\exists\ \varepsilon_0 = 1$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ и $\forall\, t_0 > 0\ \exists\ n$ и $\exists\ x_n$ такие, что хотя $|v_n(0,x)| < \delta$ и $\left|\dfrac{\partial v_n(0,x)}{\partial t}\right| < \dfrac{1}{n} < \delta$, но $|v_n(t_0, x_n)| > \varepsilon_0$.

Этот пример, доказывающий некорректность постановки задачи Коши для уравнения Лапласа, построил французский математик Ж. Адамар.

В задачах 90, 91 нарисовать форму бесконечной струны в указанные моменты времени, если начальный профиль задается функцией $\varphi(x)$, а начальная скорость равна нулю.

90. $\varphi(x)$ — кусочно-линейная функция, изображенная на рис. 3, $t_1 = \dfrac{1}{4a}$, $t_2 = \dfrac{1}{2a}$, $t_3 = \dfrac{3}{4a}$, $t_4 = \dfrac{1}{4a}$.

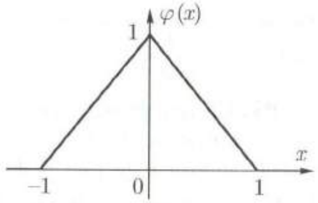


Рис. 3

91.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\sin \dfrac{\pi}{2}x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 2, \end{cases}$$

$t_1 = \dfrac{1}{3}$, $t_2 = \dfrac{2}{3}$, $t_3 = 1$ при $a = 1$.

92. В момент $t = 0$ неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющим форму, изображенную на рис. 4. В какой точке x_0 и в какой момент $t_0 > 0$ отклонение струны будет максимальным? Какова величина этого отклонения, если начальная скорость равна нулю?

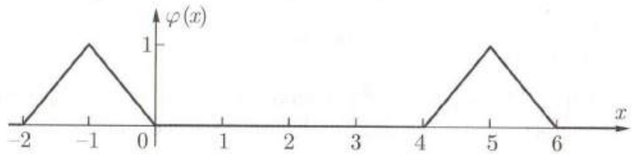


Рис. 4

В задачах 93, 94 нарисовать форму бесконечной струны ($a = 1$) в указанные моменты времени, если она, находясь в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент удар от молоточка и приобретает начальную скорость $\psi(x)$.

93*. $\psi(x)$ — ступенчатая функция, изображенная на рис. 5, $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$, $t_3 = \dfrac{3}{2}$, $t_4 = 2$.

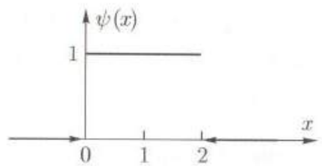


Рис. 5

94.

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi, \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad t_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

95. Пользуясь формулой Даламбера, доказать, что при нечетных начальных данных задачи Коши ее решение в точке $x = 0$ удовлетворяет условию $u(t, 0) = 0$.

96. Пользуясь формулой Даламбера, доказать, что при четных начальных данных задачи Коши ее решение в точке $x = 0$ удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0$.

97. Полуограниченная однородная струна ($a = 1$, $0 \leqslant x < \infty$) с закрепленным концом $x = 0$ возбуждена начальным отклонением $\varphi(x)$, изображенным на рис. 6. Определить графически форму струны в моменты времени $t_1 = 0{,}5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 3{,}5$, $t_6 = 4$, $t_7 = 4{,}5$, $t_8 = 5$, $t_9 = 6$, предполагая, что начальная скорость отсутствует.

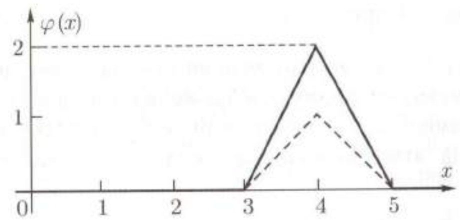


Рис. 6

Указание. Продолжить функцию $\varphi(x)$ при $x < 0$ нечетным образом и построить решение задачи Коши для неограниченной струны (см. задачу 95).

98. Полуограниченная однородная струна $0 \leqslant x < \infty$ с закрепленным концом $x = 0$ возбуждена начальным отклонением

$$u(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ -\sin\dfrac{\pi x}{l} & \text{при} \quad l < x < 2l, \\ 0 & \text{при} \quad 2l \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

а начальная скорость равна нулю. Определить графически форму струны в моменты времени $t_1 = \dfrac{l}{4a}$, $t_2 = \dfrac{l}{a}$, $t_3 = \dfrac{5l}{4a}$, $t_4 = \dfrac{3l}{2a}$, $t_5 = \dfrac{7l}{4a}$, $t_6 = \dfrac{9l}{4a}$.

99. Нарисовать форму полубесконечной струны $x \geqslant 0$ в указанные моменты времени, если начальный профиль задается функцией $\varphi(x)$, начальная скорость равна нулю, а на конце $x = 0$ выполнено условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ (задача со свободным концом).

100. Нарисовать форму полубесконечной струны $x \geqslant 0$, если начальная скорость, профиль струны $\varphi(x)$ и моменты времени t_i те же, что в задаче 98.

Указание. Применить метод четного продолжения начальных данных при $x < 0$, используя результат задачи 96.

§ 7. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1°. Решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с условием $u(0, x) = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t \leqslant T$, дается интегралом Пуассона

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int\limits_{\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

2°. Пример. Дан однородный стержень, один конец которого простирается до бесконечности в положительном направлении оси Ox. Фиксированный конец $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре $0°$. Начальное распределение температуры стержня $u(0, x) = \varphi(x)$, $x \geqslant 0$. Определить температуру стержня в любой момент времени t.

Решение. Начальные условия заданы только при $x \geqslant 0$. Для того чтобы удовлетворить условию $u(t,x)\big|_{x=0} = 0$, продолжим функцию $\varphi(x)$ нечетным образом на всю ось, т. е. рассмотрим в качестве начальной температуры функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x) & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

которая определена уже везде. При таком начальном условии решением будет функция

$$u^*(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} \varphi^*(x)\, dx. \tag{7.2}$$

Рассматривая $u^*(t, x)$ в области $x \geqslant 0$, получим

$$u(t,x) = u^*(t,x), \qquad x \geqslant 0.$$

Из (7.2) будем иметь

$$u^*(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\varphi(-\xi)\,d\xi + {}\right.$$
$$\left. {} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\varphi(\xi)\,d\xi\right).$$

Заменим в первом интеграле $-\xi$ на ξ, тогда

$$u^*(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,\varphi(\xi)\big(e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}\big)\,d\xi.$$

В полученном решении уже нет вспомогательной функции и при $x=0$ разность, стоящая в последней скобке, обращается в 0, т. е. это и есть искомое решение.

Замечание. Можно проверить, что при четном продолжении начальной функции в точке $x=0$ будет выполнено условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, т. е. отсутствует тепловой поток.

3°. Решить задачи.

101. Доказать, что решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad |x| < \infty, \qquad t > 0,$$

с начальным условием $u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x)$, где

а) $\varphi(x)$ — четная функция, дается формулой

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} + e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}\right] dt;$$

б) $\varphi(x)$ — нечетная функция, дается формулой

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}\right] dt.$$

102*. Решить задачу Коши для уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi(x)$,

$$u(0,x) = \begin{cases} T_1, & \text{для} \quad x > 0,\\ \frac{1}{2}(T_1+T_2) & \text{для} \quad x = 0,\\ T_2, & \text{для} \quad x < 0,\end{cases}$$

и найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$.

103*. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $\varphi(x)$, если $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(x) = T_1$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(x) = T_2$.

Указание. Доказать, что $\lim\limits_{t\to+\infty}(u(t,x) - v(t,x)) = 0$, где $v(t,x)$ — решение задачи 102.

§ 8. Задача Штурма–Лиувилля. Метод Фурье

I.1°. Задача Штурма–Лиувилля заключается в следующем: найти все значения λ, называемые *собственными значениями*, при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \tag{8.1}$$
$$k(x) > 0, \qquad q(x) \geqslant 0, \qquad \rho(x) > 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \qquad \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0, \tag{8.2}$$

а также найти эти нетривиальные решения, называемые *собственными функциями*.

I.2°. Пример. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0. \tag{8.3}$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, его характеристическое уравнение $k^2 + \lambda = 0$ и общее решение имеет вид

а) $X(x) = C_1x + C_2$, если $\lambda = 0$;

б) $X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$, если $\lambda < 0$;

в) $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$, если $\lambda > 0$.

В случаях а) и б) граничным условиям $X(0) = X(\pi) = 0$ можно удовлетворить лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Действительно,

а) $\begin{cases} X(0) = C_2 = 0,\\ X(\pi) = C_1\pi + C_2 = 0\end{cases} \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0, \qquad X(x) \equiv 0;$

б) $\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0,\\ X(\pi) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0.\end{cases}$

Это — однородная система с определителем, отличным от нуля. Тогда $C_1 = C_2 = 0$ и опять $X(x) \equiv 0$, т. е. $\lambda \leqslant 0$ не являются собственными значениями.

в) Рассмотрим

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(\pi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0. \end{cases}$$

Если $X(x) \not\equiv 0$, то $C_2 \neq 0$ и для λ получим спектральное уравнение

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = \pi n. \tag{8.4}$$

Итак, $\lambda = n^2$ — собственные значения при $n = 1, 2, \ldots$,

$$X_n(x) = \sin nx \tag{8.5}$$

— соответствующие им собственные функции.

I.3°. Решить следующие задачи Штурма–Лиувилля, т. е. найти собственные числа и собственные функции следующих краевых задач.

104. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0.$

105. $y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$

106. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(l) = 0.$

107. $y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y(l) = 0.$

Для решения задач 108, 109 использовать свойства функций Бесселя (см. § 9, п. 1°).

108. $y''(r) + \dfrac{1}{r}y'(r) + \omega^2 y(r) = 0,\ y(R) = 0,\ y(r)$ — ограниченное решение.

109. $y''(r) + \dfrac{1}{r}y'(r) + \omega^2 y(r) = 0,\ y'(R) = 0,\ y(r)$ — ограниченное решение.

110. Для задач 104–107:

а) проверить ортогональность собственных функций $y_k(x)$ на интервале $(0, l)$;

б) найти норму собственных функций $y_k(x)$ в $L_2(0, l)$;

в) нарисовать графики первых трех собственных функций $y_k(x)$.

111. Разложить функцию $\varphi(x)$, $0 < x < l$, в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма–Лиувилля 104–107:

а) $\varphi(x) = 1$; б) $\varphi(x) = x$;

в) $\varphi(x) = x^2$; г) $\varphi(x) = x(l - x)$.

II.1°. Метод Фурье, или метод разделения переменных, применим к линейным однородным уравнениям с однородными краевыми условиями.

Рассмотрим этот метод на примере уравнения диффузии (теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant t_0, \tag{8.6}$$

с краевыми условиями

$$\alpha_1 u(t, 0) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \tag{8.7}$$

$$\alpha_2 u(t, l) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0,$$

где α_i, β_i $(i = 1, 2)$ — постоянные, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, и начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l. \tag{8.8}$$

Будем искать нетривиальное решение уравнения (8.6), удовлетворяющее условиям (8.7), в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного:

$$u(t, x) = T(t)X(x). \tag{8.9}$$

Подставляя (8.9) в уравнение (8.6) и в краевые условия (8.7), получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \mathrm{const} = -\lambda; \tag{8.10}$$

таким образом будем иметь два обыкновенных уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T = 0, \tag{8.11}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{8.12}$$

и граничные условия (8.2):

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \qquad \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0.$$

Задача (8.10), (8.2) является задачей Штурма–Лиувилля. Тогда существует счетное множество собственных значений λ_n и соответствующих им собственных ортогональных функций $X_n(x)$.

При $\lambda = \lambda_n$ решение уравнения (8.10) имеет вид

$$T_n(t) = Ae^{-\lambda_n a^2 t}. \tag{8.13}$$

Функция $u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)$ удовлетворяет уравнению (8.6) с краевыми условиями (8.7).

Искомое решение задачи (8.6)–(8.8) будем искать в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} X_n(x). \tag{8.14}$$

При $t=0$

$$u(0,x)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x).$$

Таким образом, C_n есть коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по ортогональной системе $\{X_n(x)\}$:

$$C_n=\frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx}{\int\limits_0^l X_n^2(x)\,dx}. \tag{8.15}$$

II.2°. Примеры

1. Решить первую краевую задачу при $t>0$, $0<x<\pi$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.16}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0, \tag{8.17}$$

$$u|_{t=0}=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi. \end{cases} \tag{8.18}$$

Решение. Полагая $u(t,x)=X(x)T(t)$, разделим переменные в уравнении (8.16) и краевых условиях (8.17), получим уравнения (8.11), (8.12):

$$T'(t)+4\lambda T=0,\qquad X''(x)+\lambda X(x)=0,\qquad X(0)=X(\pi)=0,$$

т. е. для $X(x)$ получили задачу Штурма–Лиувилля (8.3), поэтому $\lambda_n=n^2$, $X_n=\sin nx$, $n=1,2,\ldots$, и искомое решение по формуле (8.14) будет

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4n^2t}\sin nx,$$

где

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} u(0,x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2},$$

$$C_{2k}=0,\qquad C_{2k-1}=\frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)^2},$$

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\,e^{-4(2k-1)^2t}\sin(2k-1)x.$$

2. Решить первую краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u(t,0)=u(t,\pi)=0, \tag{8.19}$$

$$u|_{t=0}=0{,}2\,\sin x, \tag{8.20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0{,}21\,\sin 7x. \tag{8.21}$$

Решение. Разделяя переменные, получим, что T удовлетворяет уравнению

$$T''+9\lambda T=0, \tag{8.22}$$

а для $X(x)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля (см. (8.3)):

$$X''+\lambda X=0,\qquad X(0)=X(\pi)=0.$$

Из формул (8.4), (8.5) имеем

$$\lambda_n=n^2,\qquad X_n=\sin nx,$$

тогда из (8.22) $T_n''+9n^2T=0$ следует, что $T_n=a_n\cos 3nt+ +b_n\sin 3nt$. Решение задачи (8.19) имеет вид

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 3nt+b_n\sin 3nt)\,\sin nx.$$

Найдем коэффициенты a_n, b_n, используя начальные условия (8.20), (8.21):

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx=0{,}2\,\sin x,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}3nb_n\sin nx=0{,}21\,\sin 7x.$$

Пользуясь единственностью разложения в ряд Фурье, получим $a_1= =0{,}2$, $a_n=0$ при $n>1$; $b_n=0$ при $n\neq 7$; $3\cdot 7b_7=0{,}21$, $b_7=0{,}01$.

Итак, $u(t,x)=0{,}2\,\cos 3t\,\sin x+0{,}01\,\sin 21t\,\sin 7x$.

II.3°. Решить задачи.

112. Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Концы трубки закрыты жесткими непроницаемыми перегородками. Найти смещение $u(t,x)$ частиц газа при $t>0$, если начальное смещение $u(0,x)=\varphi(x)$, а начальные скорости равны $\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x)$:

а) $\varphi(x)=0{,}1\,\sin\dfrac{7\pi x}{l}$, $\quad\psi(x)=0$;

б) $\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0{,}3\sin\dfrac{3\pi x}{l}$;

в) $\varphi(x) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}; \quad \psi(x) = B\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

Указание. Смещение $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (см. задачу 78).

113. Найти отклонение $u(t,x)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент она имела форму $\varphi(x)$ и начальную скорость $\psi(x)$:

а) $\varphi(x) = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{5\pi x}{l}, \quad \psi(x) = 1$;

б) $\varphi(x) = \dfrac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \psi(x) = 0$;

в) $\psi(x) = 0, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 3h\,\dfrac{x}{l}, & 0 < x \leqslant \dfrac{l}{3}, \\ \dfrac{3}{2}\,h\,\dfrac{l-x}{l}, & \dfrac{l}{3} < x < l. \end{cases}$

114. Однородная струна длины l, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В начальный момент в точке $x=c$ она возбуждается ударом молоточка. Найти отклонение $u(t,x)$ в любой момент времени в следующих трех случаях:

а) молоточек плоский ширины $\dfrac{\pi}{h}$, что соответствует следующей начальной скорости:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & \text{если } |x-c| < \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{если } |x-c| > \dfrac{\pi}{2h}; \end{cases}$$

б) молоточек выпуклый той же ширины, что соответствует следующей начальной скорости:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0\cos h(x-c), & \text{если } |x-c| < \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{если } |x-c| > \dfrac{\pi}{2h}; \end{cases}$$

в) молоточек очень острый и передает импульс J в точке c. Это следует понимать так: импульс равномерно распределен по участку $|x-c| < \dfrac{\pi}{2h}$ и в силу закона сохранения импульса $J = \dfrac{\pi}{h}\rho v_0$, где ρ — линейная плотность струны, v_0 — приобретаемая на этом участке скорость. Требуется найти предел решения этой задачи при $h \to \infty$.

Указание. Воспользоваться решением задачи а), учитывая, что $v_0 = \dfrac{Jh}{\pi\rho}$.

115. Продольные колебания стержня описываются уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u(t,x)$ — продольное смещение точки x стержня в момент времени t, $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, E — модуль упругости, ρ — плотность. Найти продольные колебания стержня длины l, у которого один конец жестко закреплен, а другой свободен (что соответствует условию $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$) при следующих начальных условиях: $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$,

а) закреплен конец $x=0$, $\varphi(x) = \sin\dfrac{3\pi x}{2l}$, $\psi(x) = \sin\dfrac{5\pi x}{2l}$;

б) закреплен конец $x=0$, $\varphi(x) = kx$, $\psi(x) = 0$;

в) закреплен конец $x=l$, $\varphi(x) = \cos\dfrac{5\pi x}{2l}$, $\psi(x) = \cos\dfrac{7\pi x}{2l}$;

г) закреплен конец $x=l$, $\varphi(x) = l^2 - x^2$, $\psi(x) = 0$;

д) закреплен конец $x=l$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x(l-x)$.

116. Решить следующие смешанные задачи:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad u(t,4) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 16 - x^2;$$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$

$$u(t,0) = \frac{\partial u(t,3)}{\partial x} = 0, \quad u(0,x) = x, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0.$$

117. Свободные колебания струны при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости, описываются уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2m\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < l$, $t > 0$. Найти решение этого уравнения в случае закрепленной струны, если в начальный момент она имела форму $\varphi(x)$ и начальную скорость $\psi(x)$:

а) $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = 0, \quad m = 1, \quad a^2 = 5, \quad l = \pi$;

б) $\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \sin 2x, \quad m = 2, \quad a^2 = 5, \quad l = \pi$.

118. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < \pi$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(t,x)$ в стержне, если концы стержня $x=0$ и $x=\pi$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x)$. Рассмотреть случаи:

а) $\varphi(x) = u_0 = \text{const}$; б) $\varphi(x) = 4x(\pi - x)$.

119. На концах стержня, длина которого равна 100, а боковая поверхность теплоизолирована, поддерживается температура тающего льда. Определить температуру $u(t,x)$ в произвольной точке стержня в момент времени t, если известно начальное распределение температуры

$$u(0,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \dfrac{100-x}{15}, & \text{если } 25<x\leqslant 100.\end{cases}$$

120. Дана тонкая трубка длины l, содержащая растворенное вещество. Найти распределение концентраций $u(t,x)$ вещества при $t>0$, если

а) на концах трубки поддерживается постоянная концентрация $u|_{x=0}=u_1$, $u|_{x=l}=u_2$, а начальная концентрация равна $u|_{t=0}=$ $=u_0=\text{const}$. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)$;

б) на концах трубки концентрация одинакова и постоянна $u|_{x=0}=$ $=u|_{x=l}=u_1$, а начальная концентрация задается формулой $u|_{t=0}=\varphi(x)=x(l-x)$. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)$.

Указание. Искомую функцию представить в виде суммы двух решений $u(t,x)=v(t,x)+w(x)$, причем $w(x)|_{x=0}=u_1$, $w(x)|_{x=l}=u_2$, а $v(t,x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям. За $w(x)$ можно взять линейную функцию $w=u_1++\dfrac{u_2-u_1}{l}x$, тогда начальное условие для $v=(t,x)$ будет $v|_{t=0}==u|_{t=0}-w|_{t=0}=\varphi(x)-w(x)$.

121. Найти распределение температуры в тонком однородном стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура $u|_{t=0}=\varphi(x)$:

а) $\varphi(x)=u_0=\text{const}$;

б) $\varphi(x)=\begin{cases}u_0, & \text{если } 0<x<\dfrac{l}{2},\\ 0, & \text{если } \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)$;

в) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0<x<\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2u_0}{l}(l-x), & \text{если } \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$

Указание. Граничные условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

122. Найти распределение температуры $u(t,x)$ в стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если

а) левый конец стержня теплоизолирован, т. е. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, правый поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=l}=u_2$, начальная температура $u|_{t=0}=\dfrac{A}{l}x$, где $A=\text{const}$.

Указание. Искать решение в виде $u(t,x)=u_2+v(t,x)$.

б) левый конец стержня поддерживается при заданной постоянной температуре $u|_{x=0}=u_1$, а на правый конец подается извне заданный тепловой поток, т. е. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=q$, начальная температура стержня $u|_{t=0}=u_0(x)$.

Указание. Искать решение в виде $u(t,x)=qx+u_1++v(t,x)$.

123. Пусть сосуд с поперечным сечением $s=1$ и высотой l заполнен раствором соли. Этот сосуд с содержимым погружен в емкость с большим количеством воды, так что открытый край сосуда находится непосредственно под поверхностью воды. Примем, что верхний край сосуда всегда находится в соприкосновении с чистой водой. Здесь протекает процесс диффузии соли в соответствии с законом Фурье $\dfrac{\partial c}{\partial t}=\eta\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, где $c(t,x)$ — концентрация соли в растворе, η — коэффициент диффузии, t — время, x — высота слоя раствора в сосуде.

Граничные и начальные условия процесса: $\left.\dfrac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, $c|_{x=l}=0$, $c|_{t=0}=c_0$.

Определить концентрацию соли $c(t,x)$ в зависимости от времени и от высоты слоя жидкости в сосуде.

124. При рассмотрении процесса взаимной диффузии двух газов возникает следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$

$$u|_{t=0}=1,\quad 0<x<l,\quad u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\quad t>0,$$

где функция $u(t,x)$ определяет парциальное давление одного из газов. Найти решение этой краевой задачи.

125. Методом Фурье при $t>0$ решить следующие краевые задачи:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<l$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$, $u|_{t=0}=u_0$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<l$, $u|_{x=0}=0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$, $u|_{t=0}=\sin\dfrac{7\pi x}{2l}$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = \pi - x$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = x^2 - 1$.

126. Методом Фурье при $t > 0$ решить следующие краевые задачи:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 1$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u$, $0 < x < \pi$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = x^2 - \pi x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = \sin\dfrac{\pi x}{2l}$.

127. Методом Фурье при $t > 0$ решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad h > 0.$$

128*. Методом Фурье при $t > 0$ решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad h > 0.$$

Эта задача соответствует распространению тепла в стержне, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой, h — коэффициент теплообмена.

129. Методом Фурье при $t > 0$ решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = U, \quad h > 0.$$

130. Дан однородный шар радиуса R с центром в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки до центра шара и равна $u_0(r)$. Определить температуру в любой точке внутри шара при $t > 0$, если $u_0(r) = U = \text{const}$ и

а) во все время наблюдения поверхность шара поддерживается при температуре, равной нулю;

б) на поверхности шара происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, т. е. выполнено краевое условие $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=R} = 0$.

Указание. Учитывая сферическую симметричность, имеем $u = u(t, r)$. Перепишем уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$ в виде $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$, $0 < r < R$, $t > 0$. Переходим в этом уравнении к новой функции $v(t, r) = r\,u(t, r)$, в результате задача а) сводится к задаче $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $0 < r < R$, $t > 0$, $v(t, 0) = v(t, R) = 0$, $t > 0$, $v(0, r) = r\,u_0(r) = rU$; задача б) сводится к задаче $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $0 < r < R$, $t > 0$; $v(0, r) = r\,u_0(r) = rU$, $v(t, 0) = 0$, $\left.\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\sigma}{R}v\right)\right|_{r=R} = 0$, $\sigma = hR - 1 > -1$.

131. Методом Фурье решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < y < l, \qquad t > 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x, y).$$

III.1°. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге ставится следующим образом: найти непрерывную в замкнутом круге функцию u, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{8.23}$$

а на границе круга

$$u|_{r=r_0} = f|_{r=r_0}, \tag{8.24}$$

где f — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Запишем уравнение (8.23) в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \tag{8.25}$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде $u(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$. Из (8.25) следует, что

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{const}.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{8.26}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0. \tag{8.27}$$

Заметим, что $u(r, \varphi)$ должна быть 2π-периодической по аргументу φ, т. е. $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Такими решениями уравнения (8.26) будут лишь

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi \quad \text{при } \sqrt{\lambda} = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8.28}$$

Решим уравнение (8.27) при $\lambda = n^2$. Если $\lambda = 0$, то из (8.27) следует

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad R(r) = C_1 \ln r + C_2, \tag{8.29}$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Поскольку $u(r,\varphi)$ непрерывна в круге и, следовательно, ограничена, а $\ln r \to -\infty$ при $r \to 0$, $C_1 = 0$.

При $\lambda = n^2 \neq 0$ решением будет $R(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r^n$. Опять следует положить $C_1 = 0$, так как $R(r)$ непрерывна внутри круга.

Итак, найдены частные решения $u_n(r,\varphi) = r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$, и решение задачи Дирихле в круге следует искать в виде

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{8.30}$$

III.2°. Пример. Решить задачу Дирихле в круге:

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{x^2+y^2=4} = 1 + y^2.$$

Решение. Перейдем к полярным координатам в граничном условии $u(r,\varphi)\big|_{r=2} = 1 + 4\sin^2\varphi \equiv f(\varphi)$. Тогда из формулы (8.30) следует

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$u(2,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 1 + 4\sin^2\varphi = \\ = 1 + 2(1 - \cos 2\varphi) = 3 - 2\cos 2\varphi.$$

Из единственности разложения в ряд Фурье получим $\frac{a_0}{2} = 3$, $a_2 = 2$, $a_n = 0$ при $n \neq 0, 2$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$u(r,\varphi) = 3 - 2\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos 2\varphi = \\ = 3 - \frac{r^2}{2}\cos^2\varphi = 3 - \frac{1}{2}r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Итак, $u(r,\varphi) = 3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

III.3°. Решить задачи.

132. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где

а) $f(\varphi) = \cos^2\varphi$; б) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$;
в) $f(\varphi) = \cos^4\varphi$; г) $f(\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

133. Построить однородные гармонические полиномы степени не выше третьей.

Указание. Воспользоваться формулой

$$P_n(x,y) = a_n r^n \cos n\varphi + b_n r^n \sin n\varphi = a_n \mathrm{Re}\,(x+iy)^n + b_n \mathrm{Im}\,(x+iy)^n.$$

134. Найти гармоническую функцию внутри круга радиуса R с центром в начале координат, если на границе круга заданы условия

а) $u|_{r=R} = A + Bx$; б) $u|_{r=R} = Axy$; в) $u|_{r=R} = y^2$;
г)* $u|_{r=R} = x^3$; д) $u|_{r=R} = x^3 + y^3$.

135. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что

а) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos\varphi$; б) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos 2\varphi$; в) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sin^3\varphi$.

136. Найти функцию, гармоническую вне единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где

а) $f(\varphi) = \cos^2\varphi$; б) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$;
в) $f(\varphi) = \cos^4\varphi$; г) $f(\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

137. При граничных условиях задачи 134 найти гармоническую функцию вне круга радиуса R.

Указание. См. указание к задаче 136.

138. При граничных условиях задачи 135 найти гармоническую вне круга радиуса R функцию.

Указание. См. указание к задаче 136.

139. Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если на его поверхности поддерживается температура $f(\varphi)$:

а) $f(\varphi) = A\sin\varphi$;

б) $f(\varphi) = \begin{cases} -T_0 & \text{при } -\pi < \varphi < 0, \\ T_0 & \text{при } 0 < \varphi < \pi; \end{cases}$

в) $f(\varphi) = \begin{cases} A\sin\varphi & \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ \frac{4}{3}A\sin^3\varphi & \text{при } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$

140. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

а) $u|_{r=1} = u_1 = \mathrm{const}$, $u|_{r=2} = u_2 = \mathrm{const}$,
б) $u|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi$, $u|_{r=2} = \sin^2\varphi$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\varphi) = c_1 + c_2\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + a_{-n}r^{-r})\cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n r^n + b_{-n}r^{-r})\sin n\varphi.$$

141. Найти гармонические функции $u(r,\varphi)$ внутри кольца $A < r < B$, удовлетворяющие соответственно краевым условиям:

а) $u|_{r=A} = 0$, $u|_{r=B} = \cos\varphi$;

б) $u|_{r=A} = 1$, $u|_{r=B} = \sin 2\varphi$;

в) $u|_{r=A} = q\cos\varphi$, $u|_{r=B} = Q + T\sin 2\varphi$.

Указание. См. указание к задаче 140.

142. Найти гармонические функции в круговом секторе $0 < r < R_0$, $0 < \varphi < \varphi_0$, удовлетворяющие соответственно краевым условиям:

а) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = 0$, $u|_{r=R} = \sin 6\varphi$;

б) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$, $u|_{r=R} = A\varphi$;

в) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0$, $u|_{r=R} = \cos 2\varphi$.

143. Найти гармоническую функцию в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$, если на границе его она принимает следующие значения:

а) $u|_{x=0} = A\sin\dfrac{\pi y}{b}$, $u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0$;

б) $u|_{x=0} = A\sin\dfrac{\pi y}{b}$, $u|_{x=a} = u|_{y=b} = 0$, $u|_{y=0} = B\sin\dfrac{\pi x}{a}$.

144*. В полосе $0 < x < l$, $t > 0$ решить смешанную задачу для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad u|_{x=0} = \alpha, \quad u|_{x=l} = \beta, \quad u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Указание. Искать решение в виде $u(t,x) = v(t,x) + w(x)$, где $w(x)$ является решением задачи

$$a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x) = 0, \qquad w\big|_{x=0} = \alpha, \qquad w\big|_{x=l} = \beta.$$

Решить методом разделения переменных следующие задачи.

145.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \qquad (b = \text{const}),$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \qquad u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Указание. Решение можно искать в виде $u(t,x) = v(t,x) + w(x)$, где функция $w = bx(l-x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению и нулевым граничным условиям, а функция v удовлетворяет однородному уравнению, нулевым граничным и следующим начальным условиям: $v|_{t=0} = bx(x-l)$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

146. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$ при условиях $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

147. Решить следующую смешанную задачу: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$ $(0 < x < \pi)$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = \sin 2x$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

148. Решить первую краевую задачу $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x$ $(0 < x < \pi)$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = 2\sin 3x + 3\sin 2x - \sin x$.

В задачах 149–154, пользуясь заменой $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$, подобрать функцию $w(t,x)$ так, чтобы приведенные ниже задачи сводились к задачам для неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями и соответствующим образом измененными начальными условиями.

149. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $u(t,0) = \mu(t)$, $u(t,l) = \nu(t)$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$.

Указание. Искать $w(t,x)$ в виде $w(t,x) = (\alpha_1 x + \beta_1)\mu(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\nu(t)$.

150. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t)$, $u|_{x=l} = \nu(t)$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$.

Указание. См. указание к задаче 149.

Решить следующие смешанные задачи.

151. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 1$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 0$.

152. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t,0) = t^2$, $u(t,\pi) = t^3$, $t > 0$, $u(0,x) = \sin x$, $\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0$, $0 < x < \pi$.

153. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t,0) = e^{-t}$, $u(t,\pi) = t$, $t > 0$, $u(0,x) = \sin x \cos x$, $\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 1$, $0 < x < \pi$.

Указание. См. указание к задаче 149.

154. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = x\,t(2-t) + 2\cos t$, $0 < x < \pi$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = t^2$, $u|_{t=0} = \cos 2x$.

§ 9. Задачи на метод Фурье с использованием специальных функций

I.1°. Многие задачи математической физики приводят к уравнению Бесселя:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)\,y(x) = 0. \tag{9.1}$$

Так как в точке $x = 0$ коэффициент при старшей производной обращается в нуль, не все решения уравнения Бесселя будут ограничены в этой точке. Ограниченные решения $y = J_n(x)$ уравнения (9.1), где

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}, \tag{9.2}$$

называются функциями Бесселя первого рода n-го порядка.

Для функций $J_n(x)$ составлены подробные таблицы.

Укажем некоторые свойства функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

$J_0(x)$ — четная функция, $J_1(x)$ — нечетная функция,

$$J_0(0) = 1, \qquad J_1(0) = 0, \tag{9.3}$$

$$J_0'(x) = -J_1(x), \qquad \big(xJ_1(x)\big)' = xJ_0(x). \tag{9.4}$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ имеют бесконечно много нулей, которые располагаются в порядке возрастания и обозначаются соответственно μ_k и ν_k, именно:

$$J_0(\mu_k) = 0, \qquad J_1(\nu_k) = 0. \tag{9.5}$$

Графики этих функций представляют собой затухающие колебания.

Ограниченными решениями уравнения

$$y''(x) + \frac{1}{2}\,y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \tag{9.6}$$

служат функции $J_0(\lambda x)$.

Системы функций $\{J_0(\mu_k x)\}$ и $\{J_0(\nu_k x)\}$ являются ортогональными системами на $[0,\,1]$ с весом x, т. е.

$$\int_0^1 x\,J_0(\mu_k x)\,J_0(\mu_n x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \ne n, \\ \frac{1}{2}\,J_1^2(\mu_n) & \text{при } k = n; \end{cases} \tag{9.7}$$

$$\int_0^1 x\,J_0(\nu_k x)\,J_0(\nu_n x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \ne n, \\ \frac{1}{2}\,J_0^2(\nu_n) & \text{при } k = n. \end{cases} \tag{9.8}$$

Справедлива

Теорема 1. *Всякая дважды дифференцируемая на отрезке* $[0,\,1]$ *и обращающаяся в 0 при* $x = 1$ *функция может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций* $\{J_0(\mu_k x)\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_k x),$$

где

$$A_n = \frac{\int_0^1 x\,f(x)\,J_0(\mu_n x)\,dx}{\frac{1}{2}\,J_1^2(\mu_n)}. \tag{9.9}$$

Справедлива также

Теорема 2. *Если функция* $g(x)$ *дважды дифференцируема на отрезке* $[0,\,1]$ *и* $g'(1) = 0$, *то ее можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,J_n(\nu_n x),$$

где

$$B_n = \frac{\int_0^1 x\,g(x)\,J_0(\nu_n x)\,dx}{\frac{1}{2}\,J_0^2(\nu_n)}. \tag{9.10}$$

I.2°. Пример. Найти решение внутри круга радиуса r_0 задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big), \tag{9.11}$$

$$u|_{r=r_0} = 0, \tag{9.12}$$

$$u|_{t=0} = AJ_0\Big(\frac{\mu_1 r}{r_0}\Big), \quad \text{где} \quad J_0(\mu_1) = 0; \tag{9.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{9.14}$$

Решение. Запишем уравнение в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9.15}$$

Так как начальные условия не зависят от угла φ, то решение $u(t,r)$ тоже не зависит от φ.

Согласно методу Фурье положим

$$u(t,r)=T(t)\,R(r). \tag{9.16}$$

Разделяя переменные в (9.15) и в (9.12), получим следующие уравнения:

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\mathrm{const}\,(=-\lambda^2), \tag{9.17}$$

$$T(t)\,R(r_0)=0.$$

Для $R(r)$ возникает задача Штурма–Лиувилля (см. задачу 108):

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\lambda^2R(r)=0,\quad R(r_0)=0. \tag{9.18}$$

Это уравнение Бесселя, которое имеет ограниченные решения только при положительном коэффициенте при $R(r)$ (этим оправдывается выбор константы $-\lambda^2$).

Этими ограниченными решениями будут функции $R(r)=J_0(\lambda r)$. Используя граничное условие (9.18), получим $J_0(\lambda r_0)=0$, т. е. $\lambda r_0=\mu_n$ или $\lambda_n=\frac{\mu_n}{r_0}$. Таким образом,

$$R_n(r)=J_0\Big(\frac{\mu_n}{r_0}r\Big). \tag{9.19}$$

Из (9.17) имеем $T_n''(t)+\lambda_n^2T(t)=0$ или

$$T_n(t)=a_n\cos\Big(\frac{\mu_n}{r_0}at\Big)+b_n\sin\frac{\mu_n}{r_0}at$$

(см. § 8, п. 2°), следовательно $u(t,r)$ имеет вид

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,R_n(r)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\mu_n}{r_0}at+b_n\sin\frac{\mu_n}{r_0}at\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n}{r_0}r\Big). \tag{9.20}$$

Воспользуемся условиями (9.13) и (9.14):

$$u(0,r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0\Big(\frac{\mu_n}{r_0}r\Big)=AJ_0\Big(\frac{\mu_1}{r_0}r\Big),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{r_0}ab_nJ_0\Big(\frac{\mu_n}{r_0}r\Big)=0.$$

Из этих равенств следует, что все $b_n=0$, $a_n=0$ при $n\neq1$, $a_1=A$.

Итак, искомое решение

$$u(t,r)=AJ_0\Big(\frac{\mu_1}{r_0}r\Big)\cos\frac{\mu_1}{r_0}at.$$

I.3°. Решить задачи.

155. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса r_0, закрепленной по краю, если

а) начальное отклонение и начальная скорость зависят только от r: $u|_{t=0}=f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(r)$;

б) начальное отклонение $f(r)=A(r_0^2-r^2)$, $0<r<r_0$, начальная скорость $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$.

156. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса r_0. Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени t, если

а) на поверхности цилиндра поддерживается все время нулевая температура, а температура внутри цилиндра в начальный момент равна $u|_{t=0}=AJ_0\Big(\frac{\mu_n r}{r_0}\Big)$, где μ_n — положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0$;

б) поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре u_0, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

157. Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0\leqslant r\leqslant r_0$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$, если нижнее основание цилиндра имеет температуру T, а остальная поверхность — температуру, равную нулю.

158. Найти стационарную температуру $u(r,z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания r_0 и высотой h, если

а) температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания равна $u_0(r)$;

б) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом, а температура верхнего основания равна $u_0(r)$.

159*. Найти решение первой краевой задачи для стационарной диффузии в полубесконечной трубке:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-a\frac{\partial u}{\partial z}-bu=0,\qquad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$0\leqslant z<\infty,\qquad u|_{r=r_0}=0,\qquad u|_{z=0}=u_0(r),\qquad |u(r,z)|<\infty.$$

160. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра радиуса r_0, если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация.

Указание. $u(r)$ есть решение задачи $\Delta u-k^2u=0,\quad r\leqslant r_0,$ $u|_{r=r_0}=u_0=\mathrm{const}$.

II.1°. При разделении переменных в трехмерном пространстве возникают уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\Big)+\lambda y=0 \tag{9.21}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+\Big(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\Big)z=0, \tag{9.22}$$

которые называются соответственно уравнениями Лежандра (9.21) и присоединенных функций Лежандра (9.22). Эти уравнения при $x^2=1$ имеют особенности. Коэффициент при старшей производной обращается в ноль. Поэтому ограниченные на $[-1,\,1]$ решения у них существуют только при $\lambda=n(n+1)$, где $n\geqslant 0$ — целое число.

Решениями уравнения (9.21) являются полиномы Лежандра

$$y(x)=P_n(x)\equiv\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \tag{9.23}$$

$$\Big(P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ldots\Big).$$

Решениями уравнения (9.22) служат функции

$$z(x)=P_N^{(m)}(x)\equiv(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m},\qquad m\leqslant n, \tag{9.24}$$

$$\Big(P_1^{(1)}=(1-x^2)^{\frac12},\qquad P_2^{(1)}=3(1-x^2)^{\frac12},\qquad P_2^{(2)}=3(1-x^2),$$
$$P_3^{(1)}=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac12}\cdot(5x-1),\qquad P_3^{(2)}=15(1-x^2)\,x,$$
$$P_3^{(3)}=15(1-x^2)^{\frac32},\ldots\Big).$$

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,\,1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)\,P_k(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } k=n.\end{cases} \tag{9.25}$$

Присоединенные функции Лежандра также образуют ортогональную систему на $[-1,\,1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при } k=n.\end{cases} \tag{9.26}$$

Теорема 3. *Всякая дважды дифференцируемая на отрезке* $[-1,\,1]$ *функция разлагается по полиномам Лежандра в абсолютно и равномерно сходящийся ряд.*

II.2°. Пример. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса r_0 и такую, что

$$u|_{r=r_0}=\cos 2\theta. \tag{9.27}$$

Решение. Так как граничное условие не зависит от угла φ, то решение также не будет зависеть от φ и уравнение Лапласа будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)=0. \tag{9.28}$$

Полагая $u(r,\theta)=R(r)\,T(\theta)$ и разделяя переменные в уравнении (9.28), получаем два уравнения:

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dR}{dr}\Big)}{R}=\lambda, \tag{9.29}$$

$$\frac{1}{T(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\Big)=-\lambda. \tag{9.30}$$

Обозначим $\cos\theta=t$. Тогда уравнение (9.30) примет вид

$$\frac{d}{dt}\Big((1-t^2)\frac{dT}{dt}\Big)+\lambda T(t)=0.$$

Это — уравнение Лежандра и оно имеет ограниченные решения только при $\lambda=n(n+1)$. Поэтому $T(\theta)=P_n(\cos\theta)$.

Уравнение (9.29) есть уравнение Эйлера и его общее решение имеет вид

$$R(r)=c_1r^n+c_2r^{-(n+1)}.$$

Так как решаем задачу внутри шара, то $u(r,\theta)$ следует искать в следующем виде:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{9.31}$$

Из условия (9.27) имеем

$$u(r_0;\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$$

(см. (9.23)).

Итак, искомое решение

$$u(r,\theta) = \frac{4}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\cos 2\theta - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}.$$

II.3°. Решить задачи.

161. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса r_0 с центром в начале координат, такую, что $u|_{r=r_0} = f(\theta)$, где а) $f(\theta) = \cos\theta$; б) $f(\theta) = \cos^2\theta$; в) $f(\theta) = \sin^2\theta$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

где P_n — полиномы Лежандра: $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

162. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса r_0 с центром в начале координат и такую, что

а) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \sin^2\theta$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = A\cos\theta$.

Указание. Решение внешней задачи следует искать в виде

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta),$$

где P_n — полиномы Лежандра (см. указание к задаче 161).

163. Найти гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ функцию, такую, что $u|_{r=1} = f_1(\theta)$, $u|_{r=2} = f_2(\theta)$, если

а) $f_1(\theta) = \cos^2\theta$, $f_2(\theta) = \frac{1}{8}(\cos^2\theta + 1)$;

б) $f_1(\theta) = \cos 2\theta$, $f_2(\theta) = 4\cos^2\theta - \frac{4}{3}$;

в) $f_1(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta$, $f_2(\theta) = 1 + \cos 2\theta$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta),$$

где P_n — полиномы Лежандра (см. указание к задаче 161).

164. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса r_0 с центром в начале координат и такую, что

а) $u|_{r=r_0} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$;

б) $u|_{r=r_0} = \sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta)$;

в) $u|_{r=r_0} = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\theta\cos\theta$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \alpha_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} r^n\cdot(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi)\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

165*. Исходя из уравнения Шрёдингера для основного состояния атома водорода (квантовые числа $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$) и условия нормировки $\|\psi\|^2 = 1$, определить волновую функцию ψ_1 и потенциал ионизации (абсолютная величина энергии основного состояния E_1 атома водорода).

Указание. Разделяя переменные в уравнении

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_1 + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0$$

в основном состоянии атома водорода, получим $\psi_1(r,\theta,\varphi) = cV_1(r)$, где $V_1(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2V_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV_1}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_1 + \frac{e^2}{r}\right)V_1 = 0, \qquad c = \text{const}.$$

Решение этого уравнения следует искать в виде $V_1 = e^{-ar}$. Условие нормировки

$$c^2\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi V_1^2(\rho)\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\rho = 1.$$

§ 10. Дополнение. Ряды Фурье. Интегральная формула Фурье

I.1°. Напомним, что кусочно-непрерывная функция $f(x)$, имеющая кусочно-непрерывную производную (причем в точках разрыва $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$), в интервале $(-l, l)$ может быть представлена рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{10.1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10.2}$$

В частности:

а) если $f(x)$ — функция четная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{10.3}$$

б) если $f(x)$ — функция нечетная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10.4}$$

2. Если функция $f(x)$ задана на оси $-\infty < x < +\infty$, кусочно-непрерывна вместе со своей производной в каждом конечном промежутке и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, то в точках непрерывности она допускает интегральное представление:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda, \tag{10.5}$$

где

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi.$$

Применяя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и учитывая, что $f(x)$ — действительная функция, перепишем представление (10.5) в виде интеграла Фурье от действительных функций:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{10.6}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \tag{10.7}$$

(в точках разрыва $f(x)$ левую часть в (10.6) надо заменить на $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$). В частности, если $f(x)$ — четная функция, то

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi;$$

если $f(x)$ — нечетная функция,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

I.2°. Пример 1. Разложить в интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Изобразить графики частичных сумм $S_1(x)$ и $S_2(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье при $|x| < \pi$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Решение. Так как функция $f(x)$ нечетная, ее тригонометрический ряд Фурье (15.4) содержит только синусы кратных дуг $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где коэффициенты b_n равны

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\Big].$$

Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \qquad x \neq 0.$$

Полагая $x = \frac{\pi}{2}$, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. Частичные суммы данного тригонометрического ряда равны $S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$, $S_2(x) = S_1(x) + \frac{4}{3\pi}\sin 3x$ (см. рис. 7).

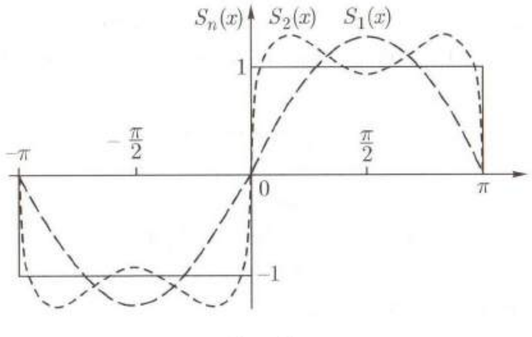


Рис. 7

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Данная функция четная и периодическая с периодом $T = \pi$, т. е. $2l = \pi$ и, следовательно, имеет разложение (10.3):

$$\cos^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx, \qquad |x| < \infty.$$

Так как известно, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, то из единственности разложения в ряд Фурье следует, что все коэффициенты a_n при $n \neq 0, 2$ равны нулю, а $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ (коэффициенты можно было бы считать и по известным формулам). Таким образом, равенство $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ является разложением Фурье данной функции.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\cos x|$.

Решение. Эта функция, как и в примере 2, является четной, периодической с периодом $T = \pi$, поэтому

$$|\cos x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx, \qquad |x| < \infty.$$

Здесь коэффициенты a_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} [\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x]\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right] = \frac{4}{\pi}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Следовательно,

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Пример 4. Найти интегральное представление Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| < l, \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad |x| = l, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > l. \end{cases}$$

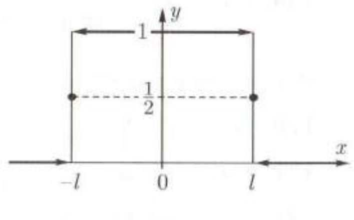


Рис. 8

Так как функция $f(x)$ четная, имеем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\cos \lambda x\, d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^l 1\cdot\cos\lambda\xi\, d\xi + \int_l^{+\infty} 0\cdot\cos\lambda\xi\, d\xi\right\} =$$

$$= \frac{\sin\lambda\xi}{\pi\lambda}\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} = \frac{\sin\lambda l}{\pi\lambda}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda x\, d\lambda \qquad (|x| \neq l).$$

В точке разрыва первого рода при $x = l$ будем иметь

$$\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda l\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\lambda l}{\lambda}\, d\lambda.$$

Отсюда, полагая $l = \frac{1}{2}$, получаем замечательный интеграл Дирихле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \pi.$$

3°. Решить задачи.

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции. Нарисовать график суммы S полученного ряда при $|x| < \infty$.

166. $f(x) = \begin{cases} a & \text{при} \quad 0 < x < l, \\ \dfrac{a}{2} & \text{при} \quad x = l, \\ 0 & \text{при} \quad l < x < 2l. \end{cases}$

167. $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

168. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в интервале $(0, 2\pi)$.

169. $f(x) = \begin{cases} ax & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ bx & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции.

170. $f(x) = \sin 2x$.

171. $f(x) = \sin^2 x$.

172. $f(x) = \sin x \cos 3x$.

173. $f(x) = \cos 3x \cos 4x$.

174. $f(x) = \sin x \sin 4x$.

175. $f(x) = \sin^3 x$.

176. $f(x) = \cos^3 x$.

177. $f(x) = \sin^4 x$.

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции.

178. $f(x) = \cos \dfrac{x}{2}$ в интервале $[-\pi, \pi]$.

179. $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

180. $f(x) = x \cos x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

181. $f(x) = x \sin x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

182. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

183. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ 3 - x & \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Нарисовать график суммы S ряда Фурье на всей оси.

184. Разложить функцию $f(x)$ на $(0, \pi)$ в ряд Фурье по косинусам:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x & \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = \sin ax$; в) $f(x) = e^x$.

185. Разложить функцию $f(x)$ на $(0, \pi)$ в ряд Фурье по синусам:

а) $f(x) = \cos 2x$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$

в) $f(x) = x \sin x$, $0 < x < \pi$.

186. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье:

а) на отрезке $[-\pi, \pi]$ по косинусам;

б) на интервале $(0, \pi)$ по синусам;

в) на интервале $(0, 2\pi)$ по синусам и косинусам.

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

187. Исходя из разложения

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

почленным интегрированием получить разложение в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функций x^2, x^3 и x^4.

Представить интегралом Фурье следующие функции.

188. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad |x| = 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$

189. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < \pi, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad |x| = \pi, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi. \end{cases}$

190. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a}, & \text{если} \quad |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > a. \end{cases}$

191. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi. \end{cases}$

192. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

193. Функцию $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < +\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее

а) четным образом;

б) нечетным образом.

Указание. Использовать равенства

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\,(-a\cos bx + b\sin bx) + c,$$

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx + b\cos bx) + c.$$

194. Представить интегралом Фурье четную функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 193, а):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$

195. Представить интегралом Фурье нечетную функцию $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 193, б):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sgn}\alpha.$$

196. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Указание. Воспользоваться равенством

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}, \qquad a > 0.$$

ОТВЕТЫ

§ 1. Классификация уравнений и их характеристики

1. Гиперболический; $x - y = c_1$, $3x - y = c_2$.

2. Гиперболический; $xy = c_1$, $\frac{x^3}{y} = c_2$.

3. Параболический; $\frac{x^2}{2} + y = c$.

4. Параболический; $y - \ln|\sin x| = c$.

5. Эллиптический; $(2x - y) \pm ix = c_{1,2}$.

6. Эллиптический; $(y^2 - x^2) \pm 2ix^2 = c_{1,2}$.

7. Эллиптический; $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \pm i\ln(y + \sqrt{1+y^2}) = c_{1,2}$.

8. Область гиперболичности $y < 0$, область параболичности $y = 0$, область эллиптичности $y > 0$.

9. Область параболичности — оси Ox и Oy, область эллиптичности — I и III четверти, область гиперболичности — II и IV четверти.

10. Область гиперболичности $x^2 + y^2 > 1$, область параболичности $x^2 + y^2 = 1$, область эллиптичности $x^2 + y^2 < 1$.

11. Область гиперболичности $x^2 > y$, область параболичности $x = y$, область эллиптичности $x^2 < y$.

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + 3\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta} + 2u = 0$, $\xi = y - x$, $\eta = 2y - x$.

13. $9\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial u}{\partial\xi} + 3\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$, $\xi = y - 2x$, $\eta = 3x$.

14. $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - 4\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0$, $\xi = y - 2x$, $\eta = x$.

15. $\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + 5\xi\frac{\partial u}{\partial\xi} + 12\eta\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$, $\xi = xy$, $\eta = x^2y^3$.

16. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0$, $\xi = y$, $\eta = \operatorname{arctg} x$.

17. $(\xi - 2\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 4\xi\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0$, $\xi = 2y^2 + 3x^2$, $\eta = y$.

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{\xi}{1+\xi e^{\eta}} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \eta e^{-2\eta} u = 0$, $\xi = e^{-y} - e^{-x}$, $\eta = x$.

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} - \dfrac{1}{2(\xi-\eta)} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\xi = x^2 + y$, $\eta = y$.

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{1}{\xi} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\xi = e^{-x/2}$, $\eta = e^{-y/2}$.

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{2\eta^2}{\xi - \eta^2} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$.

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = 2y^2 - 7x^2$, $\eta = x^2$.

23. $9(e^{2/3(\xi-\eta)} - 1) \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 4 \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$, $\xi = y + 4 \ln \sin x$, $\eta = y + {}$ ${}+ \ln \sin x$.

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{1}{\xi - \eta} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{2\eta} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = x^2$.

25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\xi = y \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, $\eta = y$.

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\xi = y$, $\eta = 2\sqrt{x}$.

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + \dfrac{1}{2(\xi - \eta)} \left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$, $\xi = y + 2\sqrt{-x}$, $\eta = y - 2\sqrt{-x}$.

28. $u(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$.

29. $u(x,y) = xy(x+y) + f_1(x) + f_2(y)$.

30. $u(x,y) = e^{2y} f_1(y) + f_2(x)$.

31. $u(x,y) = e^{x^2} f_1(y) + f_2(x)$.

32. $u(x,y) = x f_1(y) + f_2(y)$.

33. $u(x,y) = x^2 y^3 + y f_1(x) + f_2(x)$.

34. $u(x,y) = e^{y} f_1(x) + f_2(x)$.

35. $u(x,y) = e^{-x} f_1(y) + xy + f_2(y)$.

36. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$, $u = f_1(y + 6x) + f_2(y + 2x)$.

37. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$, $u = f_1(y - 2x) + f_2(y - 3x)$.

38. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $u = y f_1(2y - 3x) + f_2(2y - 3x)$.

39. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $u = x f_1(y - 8x) + f_2(y - 8x)$.

40. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + \dfrac{1}{2\eta} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $u = \sqrt{\dfrac{x}{y}}\, f_1(xy) + f_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\eta = \dfrac{y}{x}$, $\xi = xy$.

41. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $u = y f_1\left(\dfrac{y}{x}\right) + f_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$.

42. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$, $u = f_1(y - x + \cos x) + f_2(y - x - \cos x)$.

43. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$, $u = f_1(xy) + f_2(x^2 y^3)$.

44. $\xi\eta \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = -1$, $u = -\ln(xy) \ln(x^2 y^3) + f_1(xy) + f_2(x^2 y^3)$.

45. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 2\xi$, $u = x^4 y^5 + f_1(xy) + f_2(x^2 y^3)$.

46. $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $u = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2}\,)$.

47. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 2r$, $u = (x^2 + y^2) + f\left(\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\right)$.

48. $r^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}\, f_1\left(\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\right) + f_2\left(\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\right)$.

49. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$, $u = f_1\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + f_2(\sqrt{x^2 + y^2}\,)$.

§ 2. Задача Коши

50. $u = 1 + xy + y^2$.

51. $u = x^2 y^3 + xy + y^2$.

52. $u = 2e^{x} - 1$.

53. $u = \sin y - 1 + e^{x-y}$.

54. $u = 2(x - y) - 1 + e^{2y}$.

55. $u = 1 - x - 3y + (x + y - 1)e^{2x}$.

56. $u = 5 \sin \dfrac{x+y}{2} - 3 \sin \dfrac{5x+y}{6}$.

57. $u = 8x^2 + 8xy + 2y^2 + 12x + 3y$.

58. $u = 64x^2 + 24xy + y^2$.

59. $u = 2xy + 3\sin\frac{2}{3}y\cos\left(x + \frac{y}{3}\right)$.

60. *Решение.* Характеристиками данного уравнения служат прямые $y - 2x = C_1$ и $y + 2x = f_2 + C_2$, и его общее решение имеет вид $u(x,y) = f_1(y-2x) + f_2(y+2x)$, где f_i, $i = 1, 2$, — дважды дифференцируемые функции.

Заметим, что граничные условия $u|_{y=2x+1}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=2x+1}$ заданы на одной из характеристик. Используя первое из условий и вид решения, получим

$$u|_{y=2x+1} = f_1(1) + f_2(4x+1) = x^2,$$

откуда

$$f_2(4x+1) = x^2 - f_1(1) \quad \text{или} \quad f_2(t) = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - f_1(1).$$

Тогда

$$u(x,y) = f_1(y-2x) - f_1(1) + \frac{(y+2x-1)^2}{16},$$

откуда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -2f_1'(y-2x) + \frac{y+2x-1}{4},$$

или при $y = 2x+1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=2x+1} = -2f_1'(1) + x \neq 14x,$$

что противоречит второму из данных условий.

Таким образом, условия Коши на характеристиках, вообще говоря, произвольно задавать нельзя. Задача или не будет иметь решения, как в данном случае, или будет иметь бесконечно много решений, если второе условие не противоречит первому.

61. См. решение задачи 60.

62. $g(x) = -16x + C$ (см. решение задачи 60).

63. *Решение.* Найдем характеристики уравнения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - 2 = 0,$$
$$y = -2x + c, \qquad y = x + c.$$

Замена $\xi = y + 2x$, $\eta = y - x$ приведет заданное уравнение к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$, его общее решение $u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, или $u(x,y) = f_1(y+2x) + f_2(y-x)$. Решение однозначно определяется данными Коши внутри четырехугольника $ABCD$, образованного характеристиками, проходящими через точки A и C, т.е. концы отрезка L. Их уравнения $y = x+2$, $y = 5-2x$, $y = x+4$, $y = 10-2x$ (рис. 9).

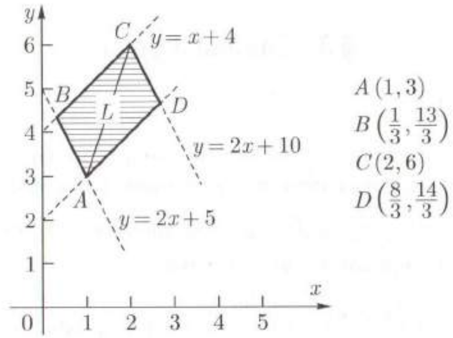


Рис. 9

64.

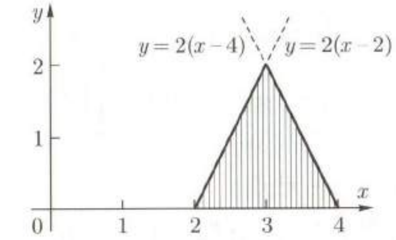


Рис. 10

65.

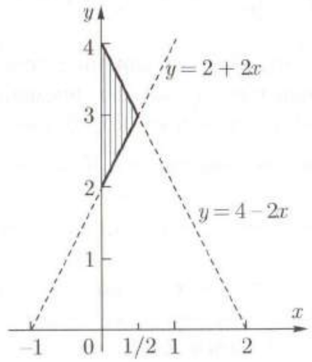


Рис. 11

66.

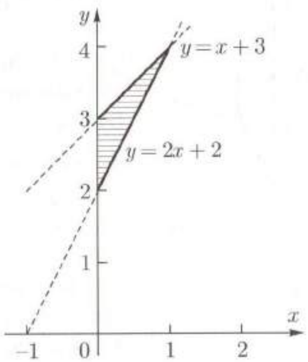


Рис. 12

§ 3. Задача Гурса

67. $u(t,x) = \left(\frac{x-t}{2}\right)^2 + \frac{x+t}{2}$.

68. *Решение.* Запишем уравнение характеристик $dx\,dy = 0$, т. е. характеристиками служат семейства прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Интегрируя уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)$ последовательно по x на интервале $(0,x)$ и по y на интервале $(0,y)$, получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(0,y)}{\partial y} + \int_0^x f(\xi,y)\,d\xi,$$

$$u(x,y) = u(x,0) + u(o,y) - u(0,0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Учитывая условия на характеристиках, получим

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y\int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

69. $u(x,y) = \sin x + y + x^2y^2$.

70. $u(x,y) = \varphi_1\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \varphi_2\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi_1(0)$.

§ 4. Вывод волнового уравнения. Постановки приводящих к нему задач

72*. $g\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где g — ускорение свободного падения.

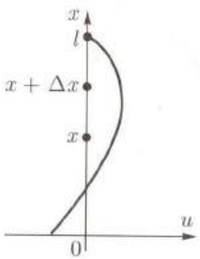


Рис. 13

Решение. Пусть $u(t,x)$ — отклонение точки x от положения равновесия в момент времени t. Будем рассматривать столь малые колебания, что величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ можно пренебречь. Как и в примере (п. 2°) выделим участок нити от x до $x + \Delta x$ (см. рис. 13) и спроектируем все действующие на этот участок силы.

Натяжение нити в точке x равно весу части нити, расположенной вниз от этой точки, т. е. $T(x) = g\rho x$, где ρ — линейная плотность.

Проекция силы на горизонтальную ось Ou равна $T(x)\sin\alpha$, где α — угол наклона касательной к оси Ox.

В силу малости колебаний как и в примере (п. 2°) $\sin\alpha \simeq \frac{\partial u}{\partial x}$, $\cos\alpha \simeq 1$.

Горизонтальная составляющая сил натяжения, действующих на участок от x до $x + \Delta x$, выражается разностью

$$\left(g\rho x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(g\rho x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x} = g\rho\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x^*}\Delta x,$$

здесь $x^* \in (x, x+\Delta x)$ по теореме Лагранжа.

Вертикальная составляющая силы натяжения в точке x равна $g\rho x\cos\alpha \simeq g\rho x$. На отрезке $[x,\, x+\Delta x]$ она будет $g\rho(x+\Delta x) - g\rho x = g\rho\Delta x$ и будет уравновешиваться весом этого участка нити, направленного вертикально вниз, т. е. можно считать, что движение выделенного участка происходит только под действием горизонтальной составляющей силы натяжения. Приравнивая эту силу произведению массы $\rho\,\Delta x$ участка нити на его ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и сокращая на Δx при $\Delta x \to 0$, получим уравнение $g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

73. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = \psi(x)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

74. а) $\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(t,x)$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = \psi(x)$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$.

б) *Решение.* В случае свободного конца для получения условия при $x = 0$ спроектируем на ось Ou силы, действующие на участок KM (рис. 14). Так как натяжение в точке $x = 0$ действует лишь параллельно оси Ox, то проекция сил натяжения на участок KM равна $T_0\,\frac{\partial u(t,\Delta x)}{\partial x}$. Проекция внешней силы равна $f_0(t,0)\,\Delta x$, а проекция силы инерции равна $\rho\,\frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial t^2}\,\Delta x$. Приравнивая нулю их сумму, получим

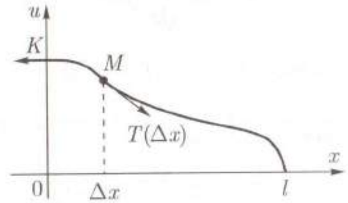


Рис. 14

$$T_0\,\frac{\partial u(t,\Delta x)}{\partial x} + f_0(t,0)\,\Delta x - \rho\,\frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial t^2}\,\Delta x = 0.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда вследствие непрерывности и ограниченности входящих функций получим условие $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$. Итак, учитывая уравнение, начальные и краевые условия, приходим к следующей задаче для функции $u(t,x)$:

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(t,x), \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0.$$

в) *Решение.* Действие упругих сил на левом конце дается выражением $-ku(t,0)$. Приравняем в этом случае проекцию всех сил, действующих на участок KM (рис. 14), на ось Ou нулю. К левой части уравнения п. б) добавится еще один член $-ku(t,0)$. Тогда будем иметь

$$T_0\,\frac{\partial u(t,\Delta x)}{\partial x} - k\,u(t,0) + f_0(t,0)\,\Delta x - \rho\,\frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial t^2}\,\Delta x = 0$$

и при $\Delta x \to 0$ получим $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0$, $h = \frac{k}{T_0}$.

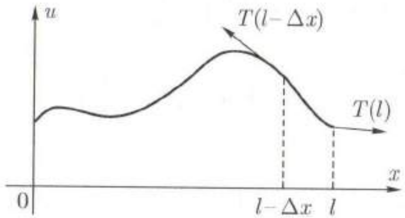


Рис. 15

На правом конце (рис. 15) проекция всех сил имеет вид

$$-T_0\,\frac{\partial u(t,l-\Delta x)}{\partial x} - k\,u(t,l) + f_0(t,l)\,\Delta x - \rho\,\frac{\partial^2 u(t,l)}{\partial t^2}\,\Delta x = 0,$$

поскольку $\sin\alpha(l-\Delta x) \approx \left.\frac{\partial u(t,l)}{\partial x}\right|_{x=l-\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ получим $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0$. Окончательная постановка задачи будет:

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(t,x), \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0.$$

г) $\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(t,x)$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$,

$$T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = F_1(t), \qquad T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = F_2(t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0.$$

75. $K = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$

76. а) $U = T_0\int\limits_0^l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1\right] dx$; б) $U = \frac{T_0}{2}\int\limits_0^l \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx.$

77. $\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right] dx =$

$$= \int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}\right)^2\right] dx.$$

78. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$, $\quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $\quad 0 < x < l$, $\quad t > 0$.

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$, $\quad 0 < x < l$, $\quad t > 0$.

79. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u$, $\quad (x,y) \in D$, $\quad t > 0$, $\quad u|_\Gamma = 0$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u$, $\quad (x,y) \in D$, $\quad t > 0$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$, $\quad n$ — внешняя нормаль к Γ, $u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u$, $\quad (x,y) \in D$, $\quad t > 0$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \frac{1}{T_0}F(x,y,t)|_\Gamma$, $\quad n$ — внешняя нормаль к Γ, $u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u$, $\quad (x,y) \in D$, $\quad t > 0$, $\quad \left.\left(T_0\,\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_\Gamma = 0$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$, $\quad h > 0$ — коэффициент жесткости упругого крепления края мембраны, n — внешняя нормаль;

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + \frac{1}{\rho}f_0(t,x,y)$, $\quad (x,y) \in D$, $\quad t > 0$, $\quad u|_\Gamma = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$;

е) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u - \alpha u$, $\quad \alpha = \frac{\beta}{\rho}$, $\quad \beta$ — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления среды $(-\beta u)$, $u|_\Gamma = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$, $\quad (x, y \in D)$.

§ 5. Постановки задач для уравнений параболического типа

80. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, где k — коэффициент теплопроводности материала стержня, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность массы.

81. а) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$, $-k\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_1(t)$, $k\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = q_2(t)$ (здесь k — коэффициент теплопроводности материала стержня, σ — площадь поперечного сечения);

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda(u-\theta)\Big|_{x=0}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = -\lambda(u-\theta)\Big|_{x=l}$, где $\lambda = \dfrac{h}{k}$, h — коэффициент теплообмена, k — коэффициент теплопроводности, $\theta(t,x)$ — температура внешней среды.

Эти условия следуют из равенств выражений для теплового потока на концах стержня. С одной стороны, тепловой поток на конце $x = l$ по закону Фурье равен $Q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$, а с другой стороны, он же по закону Ньютона равен $Q = h[u - \theta(t,x)]$.

82. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\dfrac{\partial u}{\partial x}$, где u — концентрация диффундирующего вещества, D — коэффициент диффузии, v — скорость движения среды.

Указание. Для получения этого уравнения нужно выделить элемент с постоянной площадью поперечного сечения, параллельный оси Ox и рассмотреть количества вещества, проходящие через сечения x и $x + \Delta x$ за счет диффузии и за счет переноса движущейся средой.

83. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v\dfrac{\partial u}{\partial z}$, где u — концентрация взвешенных частиц, D — коэффициент диффузии, v — скорость оседания частиц, причем ось z направлена вниз. Условие непроницаемости плоскости $z = z_0$ имеет вид $D\dfrac{\partial u}{\partial z} - vu = 0$ при $z = z_0$.

Указание. Для получения этого уравнения нужно, как и в задаче 82, выделить элемент, параллельный оси Oz и рассмотреть количества вещества, проходящие через сечения z и $z + \Delta z$ за счет диффузии и за счет оседания частиц (вместо потока диффундирующего вещества за счет движения среды).

§ 6. Формула Даламбера

84. $u(t,x) = \sin x \cos t$.

85. $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\sin x \sin 2t$.

86. $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\Big[e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2}\Big] + \dfrac{1}{2a}\Big[\operatorname{arctg}(x+at) - \operatorname{arctg}(x-at)\Big]$.

87. $u(t,x) = \dfrac{1}{4}\Big[-e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}\Big]$.

88. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи Коши и $v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Тогда в силу линейности волнового уравнения $v(t,x)$ является его решением и представимо формулой Даламбера:

$$v(t,x) = \frac{\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)}{2} + \frac{\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} [\psi_1(y) - \psi_2(y)]\,dy.$$

Учитывая условия для начальных функций $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi_1 - \psi_2$, получим

$$|v(t,x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \delta\,dy \leqslant \delta + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2aT = \delta(1+T) < \varepsilon,$$

если $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+T}$. Если же $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$, то $v \equiv 0$, т. е. доказана единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи Коши для волнового уравнения.

89. б) *Решение.* Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sh} nt_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nt_0} - e^{-nt_0}}{2n} = +\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{|x|<\infty} |v_n(t,x)| = \frac{\operatorname{sh} nt_0}{n} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Поэтому если $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи Коши такие, что $u_1(t,x) - u_2(t,x) = v_n(t,x)$ (например, $u_1 = v_n(t,x)$, $u_2 = 0$), то несмотря на то, что решения в начальный момент $t = 0$ сколь угодно близки вместе с производными, а именно $u_1(0,x) = u_2(0,x)$ и

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} < \frac{1}{n},$$

при любом достаточно малом $t_0 > 0$ они могут сколь угодно сильно отличаться друг от друга.

90.

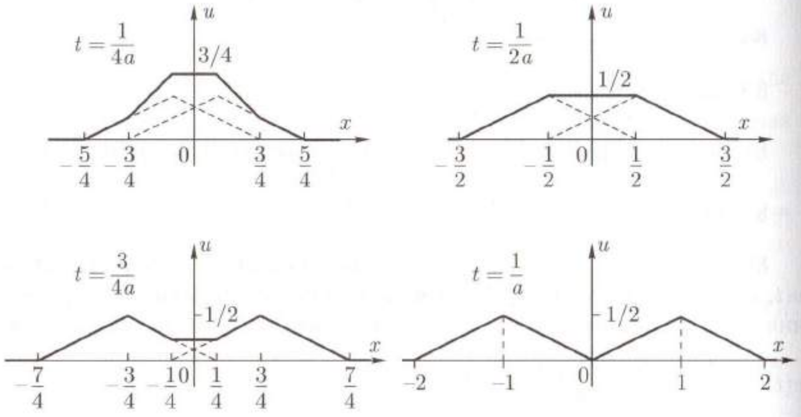


Рис. 16

91.

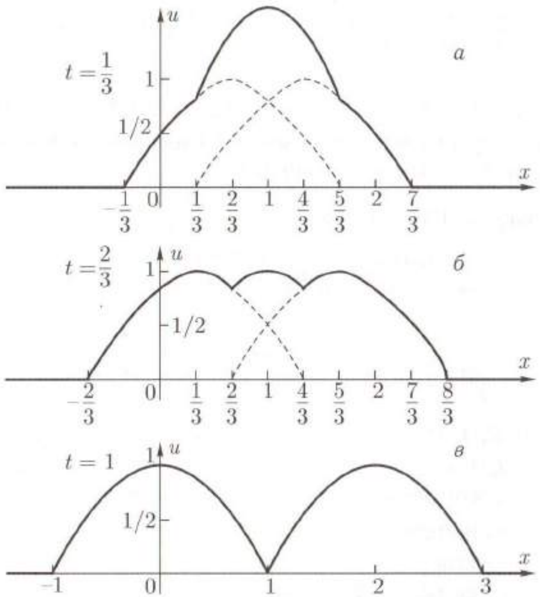


Рис. 17. *а*) $u = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x$, $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$; *б*) $u = \sin\frac{\pi}{2}x$, $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$

92. $\max u(t,x) = u(3,2) = 1$.

93. *Решение.* По формуле Даламбера

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy = \Phi(x+t) - \Phi(x-t),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi(y)\,dy$. Поэтому

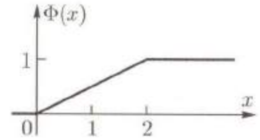


Рис. 18

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2, \end{cases}$$

(рис. 18). Формула для u означает, что график $\Phi(x)$ нужно сдвинуть влево на t, а график $(-\Phi(x))$ — вправо на t и взять их сумму (рис. 19).

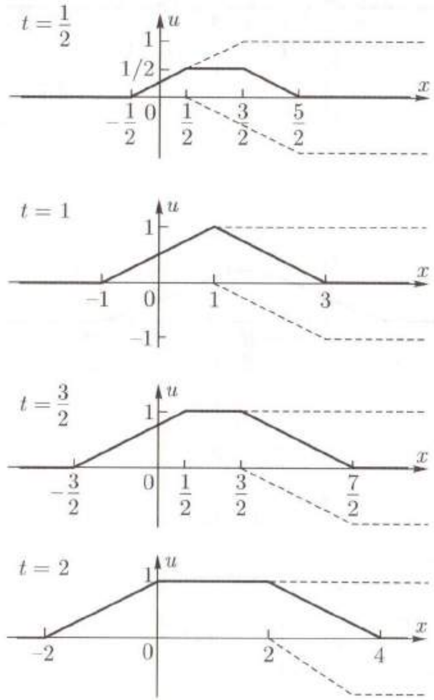


Рис. 19

94.

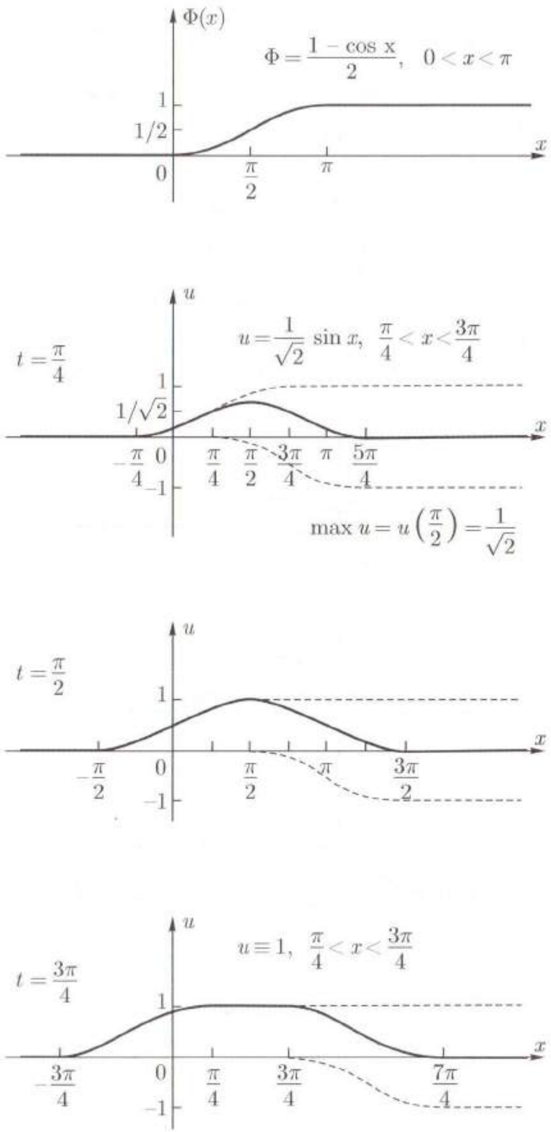


Рис. 20

97. $u(t,x) = \frac{1}{2}[\widehat{\varphi}(x-at) + \widehat{\varphi}(x+at)]$, $x > 0$, где $\widehat{\varphi}(x)$ — нечетное продолжение функции $\varphi(x)$.

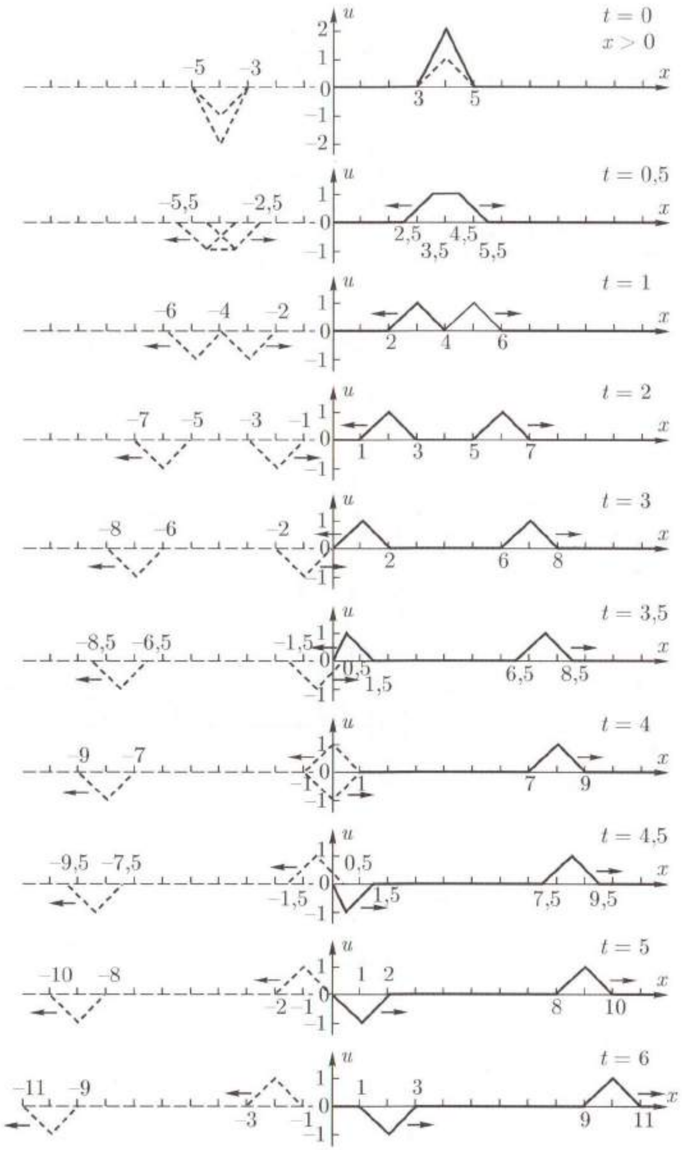


Рис. 21

98.

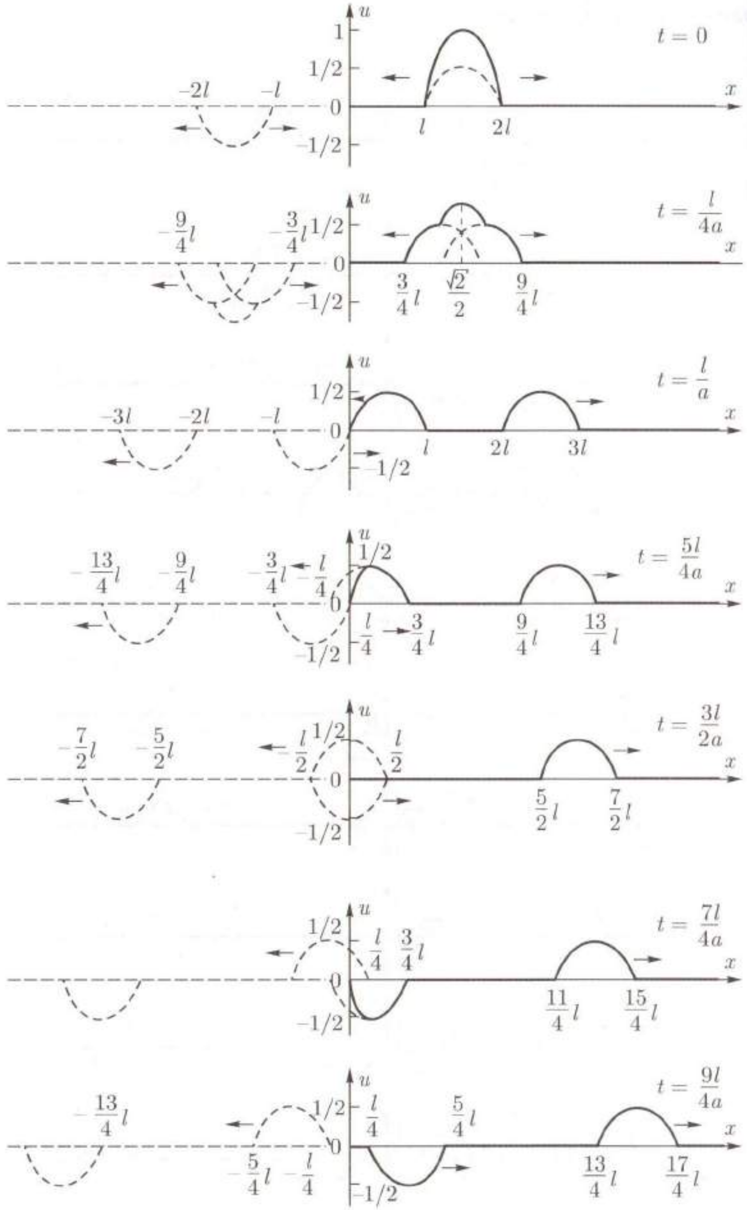


Рис. 22

99. $u(t,x) = \frac{1}{2}[\widehat{\varphi}(x-at) + \widehat{\varphi}(x+at)]$, $x > 0$, $\widehat{\varphi}(x)$ — четное продолжение функции $\varphi(x)$ при $x < 0$.

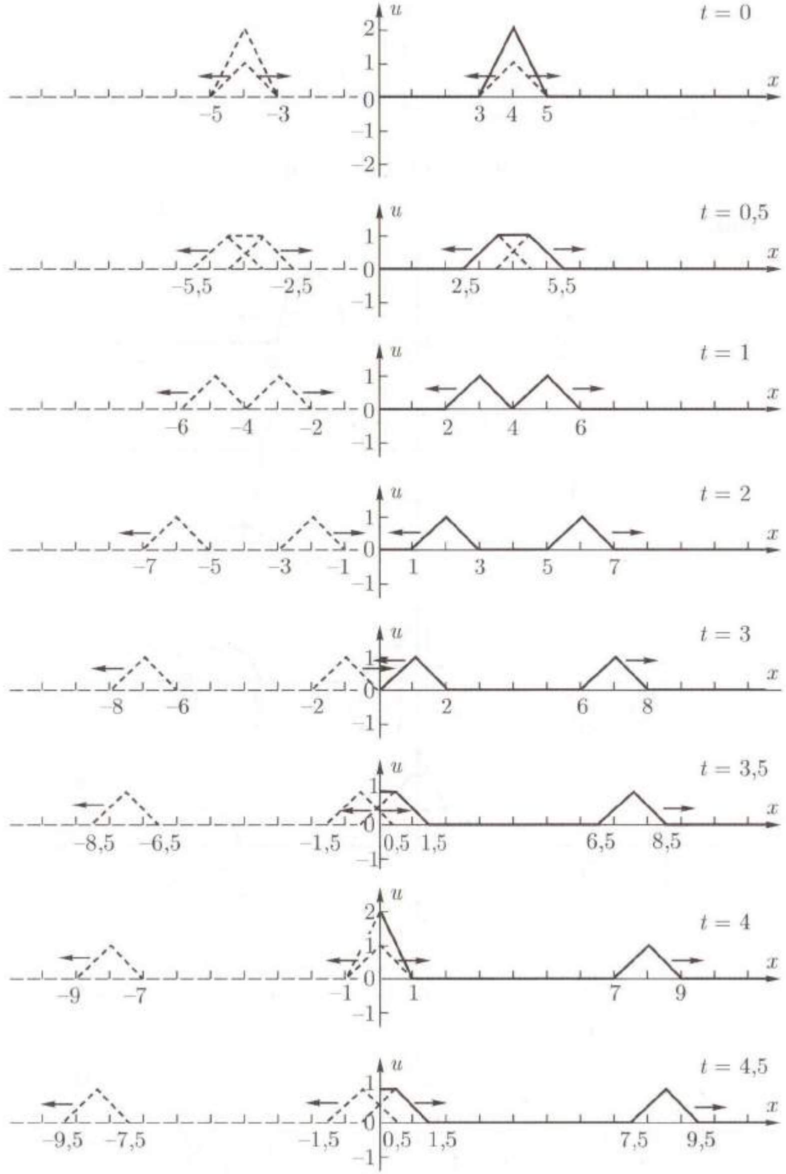


Рис. 23.

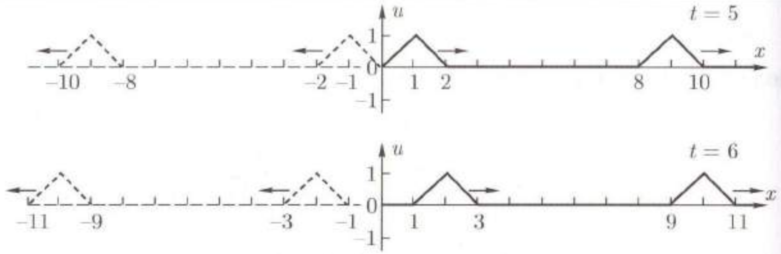


Рис. 23 (продолжение)

100.

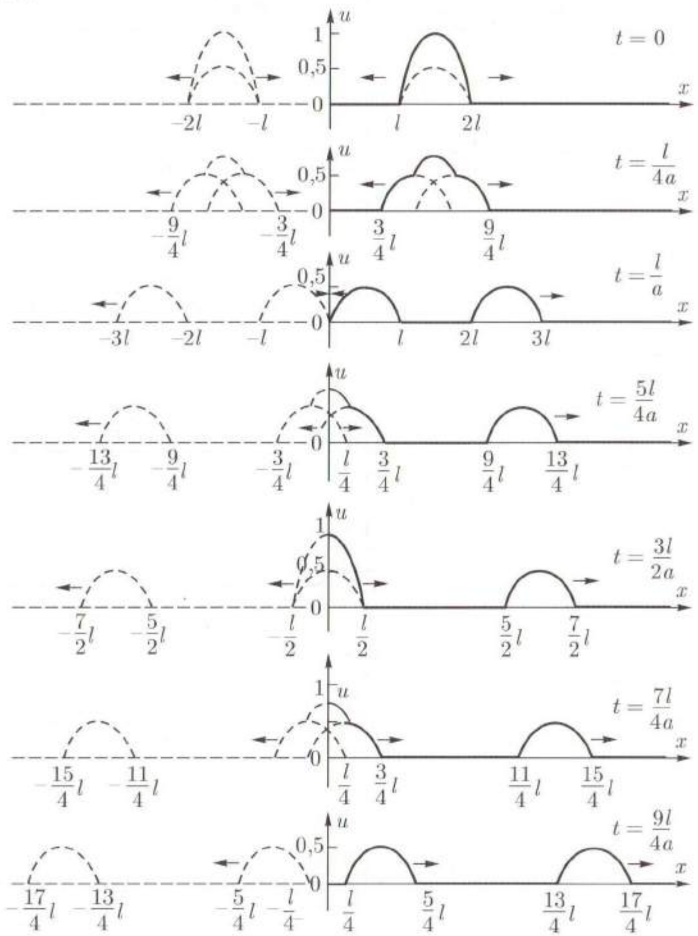


Рис. 24

§ 7. Задача Коши для уравнения теплопроводности

102.
$$u(t,x) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\,\Phi\Big(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\Big),$$
где
$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \quad \lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{T_1+T_2}{2}.$$

Отметим, что при $x=0$ решение $u(t,0) = \frac{1}{2}\,(T_1+T_2)$ при любом t.

Решение. Используя интеграл Пуассона, запишем решение в виде
$$u(t,x) = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}} =$$
$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Учитывая, что
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
преобразуем
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$
и
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Отсюда
$$u(t,x) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\,\Phi\Big(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\Big),$$
где $\Phi(z)$ — интеграл ошибок, т. е. $\Phi(z) = fr2\sqrt{\pi}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha$. Далее, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{T_1+T_2}{2}$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi\Big(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\Big) = 0$ при любом фиксированном x.

103. *Решение.* Пусть $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$, где $u(t,x)$ есть решение нашей задачи, а $v(t,x)$ — решение задачи 102. Тогда при $t=0$ $w(o,x) = \varphi(x) - v(0,x) = u_0(x)$, откуда $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_0(x) = 0$.

Докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} w(t,x)=0$. Для этого разобьем интеграл, дающий решение, на три интеграла и оценим каждый из них:

$$w(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{\sqrt{a^2t}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{-N}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}+\int\limits_{-N}^{N}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}+$$

$$+\int\limits_{N}^{+\infty}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\Bigr).$$

Здесь N выбрано из условия, что для любого $\varepsilon>0$ N настолько большое, что при $|\xi|>N$ имеем $|u_0(\xi)|<\varepsilon$. Тогда

$$\Bigl|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{N}^{+\infty}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\Bigr|<\varepsilon\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{N}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}<\varepsilon\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

То же для

$$\Bigl|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-N}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\Bigr|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим теперь

$$\Bigl|\int\limits_{-N}^{N}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\Bigr|\leqslant M\int\limits_{-N}^{N}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}$$

(так как $|u_0(x)|<M$), делая замену $\dfrac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}=\alpha$, получим

$$M\int\limits_{-N}^{N}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}=M\left(\int\limits_{-\frac{N-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{0}e^{-\alpha^2}\,d\alpha+\int\limits_{0}^{\frac{N-x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right).$$

Так как N фиксировано, то при $t\to\infty$ оба интеграла стремятся к нулю. Поэтому при достаточно больших t будет выполнено

$$\Bigl|\int\limits_{-N}^{N}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\Bigr|<\varepsilon.$$

Этим доказано, что $w(t,x)$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x)=\dfrac{T_1+T_2}{2}$ (см. задачу 102).

Таким образом, показано, что решение задачи Коши стабилизируется при $t\to\infty$ к среднему арифметическому предельных значений начальной функции при $x\to\pm\infty$.

§ 8. Метод Фурье. Задача Штурма–Лиувилля

104. $\lambda_k=-\dfrac{\pi^2k^2}{l^2}$, $\quad Y_k=\sin\dfrac{\pi kx}{l}$, $\quad k\in N$.

105. $\lambda_0=0$, $\;Y_0(x)=1$, $\;\lambda_k=-\Bigl(\dfrac{k\pi}{l}\Bigr)^2$, $\;Y_k=\cos\dfrac{\pi kx}{l}$, $\;k\in N$.

106. $\lambda_k=-\Bigl[\dfrac{(2k-1)\pi}{2l}\Bigr]^2$, $\;Y_k=\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}$, $\;k\in N$.

107. $\lambda_k=-\Bigl[\dfrac{(2k-1)\pi}{2l}\Bigr]^2$, $\;Y_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}$, $\;k\in N$.

108. $\omega_k^2=\dfrac{\mu_k^2}{k^2}$, $\;Y_k=J_0(\omega_kr)$. Здесь $J_0(\mu_k)=0$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $k\in N$.

109. $\omega_k^2=\dfrac{\nu_k^2}{R^2}$, $\;Y_k=J_0(\omega_kr)$. Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно, $J_1(\nu_k)=0$, $k=0,1,\ldots$.

110. б) $\|Y_k\|=\sqrt{\dfrac{l}{2}}$;

в)

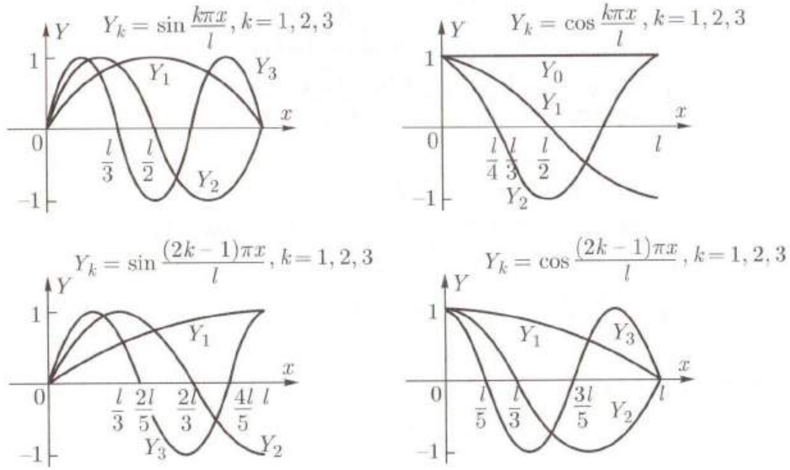


Рис. 25

111. а) 1. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$.

2. 1.

3. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

4. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

б) 1. $-\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$.

2. $\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$.

3. $\dfrac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

4. $\dfrac{4l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2}\Big]\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

в) 1. $\dfrac{2l^2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\dfrac{2[(-1)^n-1]}{\pi^2 n^3}\Big\}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$.

2. $\dfrac{l^2}{3}+\dfrac{4l^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n^2}\cos\dfrac{\pi n x}{l}$.

3. $\dfrac{16l^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}-\dfrac{2}{(2n-1)^3\pi}\Big]\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

4. $\dfrac{4l^2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Big[1-\dfrac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\Big]\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

г) 1. $\dfrac{8l^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$.

2. $\dfrac{l^2}{6}-\dfrac{l^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2\pi n x}{l}$.

3. $\dfrac{8l^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^{n}}{(2n-1)^2}+\dfrac{4}{\pi(2n-1)^3}\Big]\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

4. $-\dfrac{8l^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\Big[1+\dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\Big]\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$.

112. а) $u(t,x)=0{,}1\sin\dfrac{7\pi x}{l}\cos\dfrac{7\pi a t}{l}$;

б) $u(t,x)=0{,}1\,\dfrac{l}{\pi a}\sin\dfrac{3\pi x}{l}\sin\dfrac{3\pi a t}{l}$;

в) $u(t,x)=\Big(A\cos\dfrac{\pi a t}{l}+\dfrac{Bl}{\pi a}\sin\dfrac{\pi a t}{l}\Big)\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

113. Задача сводится к решению уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$ при условиях $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$:

а) $u(t,x)=$

$$=\frac{1}{8}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi a t}{l}+\frac{4l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n-1)\pi a t}{l};$$

б) $u(t,x)=\dfrac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\dfrac{(2n-1)\pi a t}{l}$;

в) $u(t,x)=\dfrac{9h}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi n}{3}\sin\dfrac{\pi n x}{l}\cos\dfrac{\pi n a t}{l}$.

114. а) $u(t,x)=\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi n c}{l}\sin\dfrac{\pi^2 n}{2hc}\sin\dfrac{\pi n x}{l}\sin\dfrac{\pi n a t}{l}$.

б) $u(t,x)=\dfrac{4hv_0}{\pi a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n c}{l}\cos\dfrac{\pi^2 n}{2hl}}{n\Big(h^2-\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big)}\sin\dfrac{\pi n x}{l}\sin\dfrac{\pi n a t}{l}$;

в) $u(t,x)=\dfrac{2J}{\pi a\rho}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n c}{l}\sin\dfrac{\pi n x}{l}\sin\dfrac{\pi n a t}{l}$.

115. а) $u(t,x)=\cos\dfrac{3\pi a t}{2l}\sin\dfrac{3\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{5\pi a}\sin\dfrac{5\pi a t}{l}\sin\dfrac{5\pi x}{2l}$;

б) $u(t,x)=\dfrac{8kl}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi a t}{2l}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$;

в) $u(t,x)=\cos\dfrac{5\pi}{2l}at\cos\dfrac{5\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{7\pi a}\sin\dfrac{7\pi a t}{2l}\cos\dfrac{7\pi x}{2l}$;

г) $u(t,x)=\dfrac{32l^2}{a\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}\cos\dfrac{(2k-1)\pi a t}{2l}$;

д) $u(t,x)=$

$$=\frac{-16l^2}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\Big[1+\frac{4(-1)^k}{\pi(2k-1)}\Big]\sin\frac{(2k-1)\pi a t}{2l}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

116. а) $u(t,x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 8^4}{3[(2n+1)\pi]^4}\sin\dfrac{3(2n+1)\pi t}{8}\cos\dfrac{(2n+1)}{8}\pi x$;

б) $u(t,x)=24\pi^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{6}\cos\dfrac{2(2n-1)\pi t}{3}$.

117. а) $u(t,x)=e^{-t}\sin x\Big(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\Big)$;

б) $u(t,x)=\dfrac{1}{4}e^{-2t}\sin 4t\sin 2x$.

118. а) $u(t,x) = \dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)^2a^2t}\sin(2k+1)x;$

б) $u(t,x) = 32\sum\limits_{k=0}^{\infty}1(2k+1)^3e^{-(2k+1)^2a^2t}\sin(2k+1)x.$

119. $u(t,x) = \dfrac{160}{3\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi n}{4}e^{-a^2\pi^2n^2t/100^2}\sin\dfrac{\pi nx}{100}.$

120. а) $u(t,x) = u_1 + \dfrac{u_2-u_1}{l}x + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\{(u_0-u_1)[1-(-1)^n]+$
$+(-1)^n(u_2-u_1)\}e^{-n^2\pi^2a^2t/l^2}\sin\dfrac{n\pi x}{l},\quad \lim\limits_{t\to\infty}u(t,x) = u_1 + (u_2-u_1)\dfrac{x}{l};$

б) $u(t,x) = u_1 + \dfrac{8l^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}-$
$-4u_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l},\quad \lim\limits_{t\to\infty}u(t,x) = u_1.$

121. а) $u(t,x) = u_0;$

б) $u(t,x) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{l},$
$\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x) = \dfrac{u_0}{2};$

в) $u(t,x) = \dfrac{u_0}{2} - \dfrac{4u_0}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}e^{-4(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cos\dfrac{2(2n+1)\pi x}{l},$
$\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x) = \dfrac{u_0}{2}.$

122. а) $u(t,x) = u_2+$
$+\dfrac{4(A-u_2)}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi t}{4l^2}\cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi x-$
$-\dfrac{8A}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/4l^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l};$

б) $u(t,x) = q(x) + u_1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[a_n - \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{(2n+1)\pi u_1 + 2lq(-1)^n}{(2n+1)^2}\right]\times$
$\times e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/4l^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$, где $a_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x\,dx.$

123. а) $c(t,x) = \dfrac{4c_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2\eta t/4l^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

124. $u(t,x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2\eta t/4l^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

125. а) $u_0;$

б) $e^{-49\pi^2a^2t/4l^2}\sin\dfrac{7\pi x}{2l};$

в) $\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)^2t}\cos\dfrac{(2n+1)x}{2};$

г) $\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}e^{\frac{-(2n+1)^2\pi^2t}{4}}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}.$

126. а) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}e^{-\left(\frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}+1\right)t}\sin\dfrac{2n+1}{l}\pi x;$

б) $-\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}e^{-(2n+1)^2t}e^{-4t}\sin(2n+1)x;$

в) $e^{-\left(\frac{3\pi^2}{4l^2}+1\right)t}\sin\dfrac{\pi x}{2l}.$

127. $u(t,x) = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi\,d\xi\right\}e^{-a^2\lambda_k^2t}\cos\lambda_kx,$
где λ_k — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l = h$.

128. *Решение.* Согласно методу Фурье, разделяя переменные, получим уравнения $T' + a^2\lambda T = 0$, $X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$ и граничные условия $X'(0) - hX(0) = 0$, $X'(l) + hX(l) = 0$ (так как известно, что все собственные значения этой задачи неотрицательны, то вместо λ можно писать λ^2). Отсюда $X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$. Из граничных условий находим, что

$$\begin{aligned}&hC_1 - \lambda C_2 = 0,\\&(h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l)C_1 + (h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l)C_2 = 0.\end{aligned}$$

Эта система линейных однородных относительно C_i уравнений имеет нетривиальные решения только при условии, что ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} h & -\lambda \\ h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l & h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l\end{vmatrix} = 0.$$

После замены $\mu = \lambda l$, $p = hl > 0$ определитель приводится к виду $2\operatorname{ctg}\mu = \dfrac{\mu}{p} - \dfrac{p}{\mu}$. Это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых (рис. 26).

Обозначим через μ_1, μ_2, $\mu_3,\ldots$ — положительные корни нашего уравнения. Тогда собственные значения будут $\lambda_n^2 = \left(\dfrac{\mu_n}{l}\right)^2$,

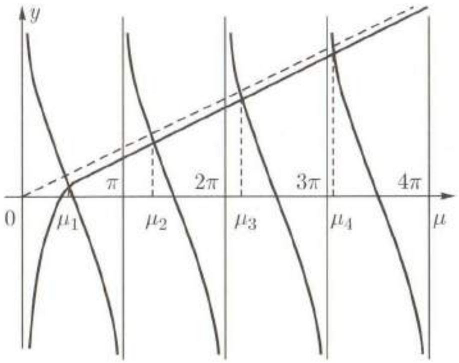


Рис. 26

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Каждому собственному значению соответствует собственная функция

$$X_n(x) = \cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}.$$

При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения для функции $T(t)$ примет вид $T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}$, где a_n — произвольные постоянные. Таким образом,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right).$$

Подставляя $t = 0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) = \sum_{n-1}^{\infty} a_n X_n(x).$$

Собственные функции ортогональны, т. е. $\int\limits_0^l X_n(x)X_m(x)\,dx = 0$ $(n \neq m)$. Вычисляя квадрат нормы собственных функций $X(x)$, получим

$$\int\limits_0^l X_n^2(x)\,dx = \int\limits_0^l\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)^2 dx = \frac{l}{2}\,\frac{p(p+2)+\mu_n^2}{\mu_n^2}.$$

Коэффициенты a_n вычисляются по следующей формуле:

$$a_n = \frac{2}{l}\,\frac{\mu_n^2}{p(p+2)+\mu_n^2}\int\limits_0^l \varphi(x)\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) dx.$$

Следовательно,

$$u(t,x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t} \times \frac{\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + p\sin\frac{\mu_n x}{l}}{p(p+2)+\mu_n^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^l \varphi(x)\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + p\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) dx.$$

129. $u(t,x) = 2U\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{h - (-1)^n\sqrt{h^2+\lambda_n^2}}{\lambda_n[l(h^2+\lambda_n^2)+h]}\,e^{-a^2\lambda_n^2 t}\Phi_n(x),$

где $\Phi_n(x) = \lambda_n\cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x$, λ_n — положительные корни уравнения $h\operatorname{tg}\lambda l = -\lambda$.

130. а) $u(t,r) = \dfrac{2}{Rr}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\sin\dfrac{\pi n r}{R},$

где $a_n = \int\limits_0^R r\,u_0(r)\sin\dfrac{\pi n r}{R}\,dr$, если $u_0(r) = T$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}R^2}{\pi n}T$;

б) $u(t,r) = \dfrac{2}{Rr}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\dfrac{\sigma^2+\mu_n^2}{\sigma(\sigma+1)+\mu_n^2}\,e^{-(\mu_n a/R)^2 t}\sin\dfrac{\mu_n r}{R},$

где $a_n = \int\limits_0^R r\,u_0(r)\sin\dfrac{\mu_n r}{R}\,dr$, μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\mu/\sigma$, $\sigma = hR - 1$ $(\sigma > -1)$; если

$$u_0(r) = T, \quad \text{то} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}R^2(1+\sigma)}{\mu_n\sqrt{\sigma^2+\mu_n^2}}T \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

131. $u(t,x,y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\,e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2(n^2+m^2)t}\sin\dfrac{\pi m x}{l}\sin\dfrac{\pi n y}{l},$

$$a_{mn} = \frac{4}{l^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l u_0(x,y)\sin\frac{\pi m x}{l}\sin\frac{\pi n y}{l}\,dx\,dy.$$

132. а) $\frac{1}{2}(1 + r^2\cos 2\varphi)$; б) $\frac{r}{4}(3\sin\varphi - r^2\sin 3\varphi)$;

в) $\frac{3}{8} + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^4}{8}\cos 4\varphi$; г) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}r^4\cos^4\varphi$.

133. $P_0 = a_0$, $P_1(x,y) = a_1 x + b_1 y$, $P_2(x,y) = a_2(x^2 - y^2) + b_2 xy$, $P_3(x,y) = a_3(x^3 - 3xy^2) + b_3(3x^2 y - y^3)$.

134. а) $A + Bx$; б) Axy; в) $\frac{1}{2}(R^2 - x^2 + y^2)$;

г) *Решение.* Решение ищем в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

При $r=R$ имеем $u(R,\varphi)=x^3=R^3\cos^3\varphi=\frac{R^3}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$. Положим $r=R$, тогда

$$u(R,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)=\frac{R^3}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi).$$

Из единственности разложения функции в ряд Фурье следует, что $a_1=\frac{3R^3}{4}$, $a_3=\frac{R^3}{4}$, а остальные коэффициенты равны нулю, следовательно,

$$u(r,\varphi)=\frac{R^3}{4}\left[\frac{3r}{R}\cos\varphi+\left(\frac{r}{R}\right)^3\cos 3\varphi\right].$$

Так как $r^n\cos n\varphi=\operatorname{Re}(x+iy)^n$, то $r\cos\varphi=x$, $r^3\cos 3\varphi=x^3-3xy^2$. Итак, $u(x,y)=\frac{3}{4}R^2x+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}xy^2$;

д) $\frac{3}{4}R^2(x+y)+\frac{x^3+y^3}{4}-\frac{3}{4}xy(x+y)$.

135. а) $Ar\cos\varphi+C$; б) $\frac{A}{2R}r^2\cos 2\varphi+C$;

в) $\frac{1}{4}\left(3r\sin\varphi-\frac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi\right)+C$.

Здесь C — произвольная постоянная.

136. а) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos 2\varphi}{r^2}\right)$; б) $\frac{1}{4}\left(\frac{3\sin\varphi}{r}-\frac{\sin 3\varphi}{r^3}\right)$;

в) $\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\varphi}{2r^2}+\frac{\cos 4\varphi}{8r^4}$; г) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\frac{\cos 4\varphi}{r^4}$.

137. а) $A+\frac{R^2B}{r}\cos\varphi=A+B\frac{xR^2}{x^2+y^2}$;

б) $\frac{A}{2}R^4\frac{\sin 2\varphi}{r^2}=A\frac{R^4xy}{(x^2+y^2)^2}$;

в) $\frac{A}{2}R^2\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{r^2}R^2\right)=\frac{1}{2}AR^2\left[1-\frac{R^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$;

г) $\frac{R^4}{4}\left(\frac{3\cos\varphi}{r}+\frac{R^2\cos 3\varphi}{r^3}\right)=\frac{R^4}{4}\left[\frac{3x}{x^2+y^2}+\frac{R^2(x^3-3xy^2)}{(x^2+y^2)^3}\right]$.

138. а) $-AR^2\frac{\cos\varphi}{r}$; б) $-\frac{AR^3}{2}\frac{\cos 2\varphi}{r^2}$; в) $-\frac{3}{4}\frac{R^2\sin\varphi}{r}+\frac{R^4\sin 3\varphi}{12r^3}$.

139. а) $\frac{Ar}{R}\sin\varphi$;

б) $\frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}$;

в) $\frac{A}{9\pi}+\frac{Ar\sin\varphi}{R}-\frac{A}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin 3\varphi-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{\cos 2n\varphi}{4n^2-9}$.

140. а) $u_1+(u_2-u_1)\frac{\ln r}{\ln 2}$; б) $\frac{3}{2}-\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{2}{3r^2}-\frac{1}{6}r^2\right)\cos 2\varphi$.

141. а) $\frac{B}{B^2-A^2}\left(r-\frac{A^2}{r}\right)\cos\varphi$;

б) $\frac{\ln\frac{r}{B}}{\ln\frac{A}{B}}+\frac{B^2}{B^4-A^4}\left(r^2-\frac{A^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi$;

в) $Q\frac{\ln\frac{r}{A}}{\ln\frac{B}{A}}+\frac{Aq}{A^2-B^2}\left(r-\frac{B^2}{r}\right)\cos\varphi-\frac{B^2T}{A^4-B^4}\left(r^2-\frac{A^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi$.

142. а) $\frac{r^6}{R^6}\sin 6\varphi$; б) $A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\sin 2n\varphi$; в) $\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\varphi$.

143. а) $A\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}\sin\frac{\pi y}{b}$;

б) $A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}+B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$.

144. *Решение.* Функция w является решением уравнения $a^2\frac{d^2w}{dx^2}+f(x)=0$. Интегрируя дважды это уравнение, будем иметь

$$w(x)=\int_0^x w'(y)\,dy=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left(\int_0^y f(\xi)\,d\xi\right)dy+c_1x+c_2.$$

Учитывая $w|_{x=0}=\alpha$, $w|_{x=l}=\beta$, получим

$$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(\xi)\,d\xi\,dy+\frac{x}{la^2}\int_0^l\int_0^y f(\xi)\,d\xi\,dy+\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha.$$

Функция $v(t,x)=u(t,x)-w(x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2},\quad v|_{x=0}=v|_{x=l}=0,\quad v|_{t=0}=-w(x),\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

откуда следует, что

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $a_k = -\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l w(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$

145. $bx(l-x) - \dfrac{8\,l^2 b}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n-1}{l}\pi t \sin\frac{2n-1}{l}\pi x}{(2n-1)^3}.$

146. $-\dfrac{bx}{12}(x^3 - 2x^2 l + l^3) + \dfrac{8bl^4}{\pi^5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n+1}{l}\pi t \sin\frac{2n+1}{l}\pi x}{(2n+1)^5}.$

147. $\dfrac{5}{4}\cos 2t\sin 2x + 2\displaystyle\sum_{n\neq 2}\frac{(-1)^n}{n^3}(\cos nt - 1)\sin nx - \frac{\sin 2x}{4} =$

$$= \cos 2t \sin 2x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(\cos nt - 1)\sin nx.$$

148. $(t-1)\sin x + 3\,e^{-4t}\sin 2x + 2\,e^{-9t}\sin 3x.$

149. $w(t,x) = \left(1 - \dfrac{x}{l}\right)\mu(t) + \dfrac{x}{l}\nu(t).$

150. $w(t,x) = (x-l)\mu(t) + \nu(t).$

151. $u(t,x) = x - l + \dfrac{8l}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{(2n+1)^2}\cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$

152. $u(t,x) = \left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right)t^2 + \dfrac{x}{\pi}t^3 + \sin x\cos t +$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[(-1)^n 3t - 1 + \cos nt - \frac{(-1)^n}{n}3\sin nt\right]\sin nx.$$

153. $u(t,x) = \left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right)e^{-t} + \dfrac{x}{\pi}t + \dfrac{1}{2}\cos 2t\sin 2x -$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2)}\left[e^{-t} + n^2\cos nt - \left(2n + \frac{1}{n}\right)\sin nt\right]\sin nx.$$

154. $u(t,x) = xt^2 + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t}\cos 2x.$

§ 9. Задачи на метод Фурье с использованием специальных функций

155. а) $u(t,r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n}{r_0}at + b_n\sin\frac{\mu_n}{r_0}at\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$

где

$$a_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^{r_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr,$$

$$b_n = \frac{2}{a\mu_n r_0 J_1^2(\mu_n)}\int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr, \quad J_0(\mu_n) = 0;$$

б) $u(t,r) = 8Ar_0^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{r_0}.$

Указание. Используя формулы $J_0'(x) = -J_1(x)$ и $\displaystyle\int_0^x xJ_1(x)\,dx = xJ_0(x)$, доказать равенство $\displaystyle\int_0^x x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x)$ и им воспользоваться.

156. а) $u(t,x) = A\,e^{-(a\mu_n/r_0)^2 t}J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right), \quad J_0(\mu_n) = 0;$

б) $u(t,r) = u_0\left[1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_0'(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}\right].$

157. Решением задачи $\Delta u = 0$, где

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r,z)| < \infty, \quad u(r_0,z) = u(r,l) = 0, \quad u(r,0) = T,$$

является функция

$$u(r,z) = 2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)}\left(\operatorname{ch}\frac{\mu_n z}{r_0} - \operatorname{ctg}\frac{\mu_n l}{r_0}\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

158. а) $u(r,z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\operatorname{sh} \dfrac{\mu_n z}{r_0}}{\operatorname{sh} \dfrac{\mu_n h}{r_0}} J_0\Big(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\Big),$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$,

$$a_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^{r_0} r\, u_0(r) J_0\Big(\frac{\mu_n r}{r_0}\Big)\, dr;$$

б) $u(r,z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sh} \dfrac{\nu_n z}{r_0} \operatorname{sh} \dfrac{\nu_n h}{r_0} J_0\Big(\dfrac{\nu_n r}{r_0}\Big),$

где ν_n — положительные корни уравнения $J_1(\nu) = 0$,

$$a_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\nu_n)} \int\limits_0^{r_0} r\, u_0(r) J_0\Big(\frac{\nu_n r}{r_0}\Big)\, dr.$$

159*. *Решение.* Положим $u(r,z) = R(r)Z(z)$ и, разделяя переменные в данном уравнении, получим

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} - b = \frac{-Z'' + aZ'}{Z} = \mathrm{const} = \gamma.$$

Отсюда следует, что $Z'' - aZ' + \gamma Z = 0$. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, оно имеет ограниченные решения только в случае, если хотя бы один из корней характеристического уравнения

$$s'' - as + \gamma = 0 \quad (a > 0)$$

неположителен,

$$s_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\gamma}}{2},$$

что возможно лишь при $\gamma = -m^2$. Тогда

$$s = -\frac{\sqrt{a^2 + 4m^2} - a}{2} \quad \text{и} \quad Z = C\, e^{sz}.$$

Функция $R(z)$ должна удовлетворять уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + (m^2 - b^2)R = 0,$$

и условию $R(r_0) = 0$. Ограниченные решения этого уравнения существуют только при $\lambda^2 \equiv m^2 - b^2 > 0$ и $R(r) = J_0(\lambda r)$. Так как $R(r_0) = 0$, то $J_0(\lambda r_0) = 0$, откуда $\lambda r_0 = \mu_n$, где μ_n — нули функции $J_0(\mu)$. Итак,

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(r,z),$$

$$A_n = \frac{\int\limits_0^{r_0} r u_0(r) J_0\Big(\mu_n \dfrac{r}{r_0}\Big)\, dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_n)}, \qquad u_n = J_0\Big(\mu_n \frac{r}{r_0}\Big)\, e^{s_n z},$$

где s_n — отрицательный корень уравнения $s^2 - as - \Big(b + \dfrac{\mu_n^2}{r_0^2}\Big) = 0$.

160. $u(x,y) = u_0 \dfrac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)}.$

161. а) $u(r,\theta) = \dfrac{r}{r_0} \cos\theta;$

б) $u(r,\theta) = \dfrac{1}{3}\Big(1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}\Big) + \dfrac{r^2}{r_0^2}\cos\theta;$

в) $u(r,\theta) = \dfrac{4}{3}\Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^2 P_2(\cos\theta) - \dfrac{1}{3}.$

162. а) $u(r,\theta) = -\dfrac{2r_0^2}{3r} + \dfrac{r_0^4}{9r^3}(3\cos^2\theta - 1) + C$, где C — произвольная постоянная;

б) $u(r,\theta) = C - \dfrac{A}{2}\dfrac{r_0^3}{r^2}\cos\theta$, где C — произвольная постоянная.

163. а) $u(r,\theta) = \dfrac{1}{3r} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{r^3}P_2(\cos\theta) = \dfrac{1}{3r} + \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{3r^3};$

б) $u(r,\theta) = \dfrac{2}{3r} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}r^2 P_2(\cos\theta) = \dfrac{1}{3}\Big[\dfrac{2}{r} - 1 + r^2(3\cos^2\theta - 1)\Big];$

в) $u(r,\theta) = \dfrac{4}{3}\Big(1 - \dfrac{1}{r}\Big) + \dfrac{1}{14}\Big(\dfrac{8}{r^2} - r\Big)P_1(\cos\theta) + \dfrac{32}{93}\Big(r^2 - \dfrac{1}{r^3}\Big)P_2(\cos\theta).$

164. а) $u(r,\theta,\varphi) = \Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^2 \cos\Big(2\varphi + \dfrac{\pi}{3}\Big)\sin^2\theta;$

б) $u(r,\theta,\varphi) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^2(3\cos 2\theta + 1) + \dfrac{r}{r_0}\sin\theta\sin\varphi;$

в) $u(r,\theta,\varphi) = \Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^3 \sin\Big(2\varphi + \dfrac{\pi}{6}\Big)\sin^2\theta\cos\theta.$

165. *Решение.* Будем искать решение в виде $\psi_1 = = cV_1(r) = c\,e^{-br}$. Подставим это выражение в уравнение для V_1:

$$\frac{d^2V_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV_1}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\Big(E_1 + \frac{e^2}{r}\Big)V_1 = 0.$$

Сокращая на множитель e^{-br}, получим

$$b^2 - \frac{2}{r}b + \frac{2\mu}{\hbar^2}\Big(E_1 + \frac{e^2}{r}\Big) \equiv 0,$$

откуда $b^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}E_1 = 0$, $-2b + \frac{2\mu e^2}{\hbar^2} = 0$. Тогда $b = \mu e^2/\hbar^2$, $E_1 = -\frac{\mu e^4}{\hbar^2}$. Таким образом, $\psi_1 = e^{-\mu e^2 r/\hbar^2} = c\,e^{-\rho}$.

Заметим, что b — величина, обратная боровскому радиусу $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$, а $\rho = \frac{r}{a}$ — величина безразмерная;

$$\|\psi_1\|^2 = c^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho^2 \exp(-2\rho)\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi c^2 \cdot 2\int_0^{\infty} \rho^2 \exp(-2\rho)\, d\rho = \frac{\pi}{2}c^2 \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t)\, dt = \frac{\pi c^2}{2}\Gamma(3) = \pi c^2 = 1,$$

откуда $c = 1/\sqrt{\pi}$, т. е. $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\rho)$, $E_1 = -\mu\frac{e^4}{2\hbar^2}$.

§ 10. Дополнение. Ряды Фурье. Интегральная формула Фурье

166.

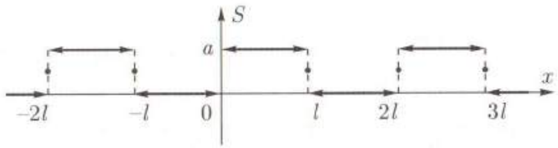


Рис. 27

$$f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}.$$

167.

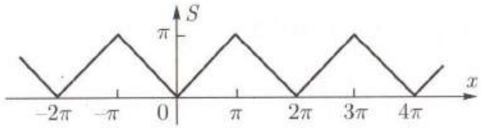
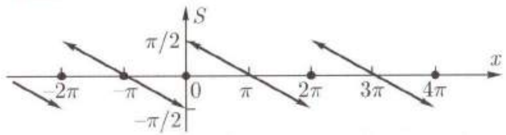


Рис. 28

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

168.



$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Рис. 29.

169. $f(x) =$
$$= \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

170. $f(x) = \sin 2x$.

171. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

172. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x$.

173. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 7x$.

174. $f(x) = \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x$.

175. $f(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

176. $f(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$.

177. $f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

178. $f(x) = \frac{2}{\pi}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cos nx}{4n^2-1}\Big)$.

179. $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

180. $f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}$.

181. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$.

182. $f(x) = 1\pi + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

183.

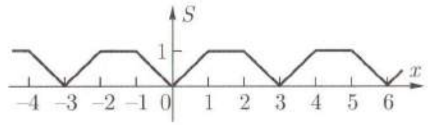


Рис. 30

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\pi k}{3}\cos\frac{2\pi kx}{3} \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}.$$

184. а) $f(x) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi n}{4}\cos nx;$

б) если a — нецелое, то

$$\sin ax = \frac{2\sin^2\dfrac{a\pi}{2}}{\pi a} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n\cos\pi a]}{a^2-n^2}\cos nx;$$

если a — целое и четное: $a = 2m$, то

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2-(2n-1)^2};$$

если $a = 2m-1$, то

$$\sin(2m-1)x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2m-1} + 2(2m-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2m-1)^2-(2n)^2}\right);$$

в) $e^x = \dfrac{e^\pi - 1}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}\cos nx.$

185. а) $\cos 2x = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)};$

б) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{k}{4k^2-1}\sin 2kx;$

в) $x\sin x = \dfrac{\pi}{2}\sin x - \dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

186. а) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2};$

б) $x^2 = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\dfrac{\pi^2}{n} - \dfrac{2[1-(-1)^n]}{n^3}\right\}\sin nx;$

в) $x^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2} - \dfrac{\pi\sin nx}{n}\right),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

187. $x^2 = \pi^2 3 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2},$

$$x^3 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3},$$

$$x^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} + 48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}.$$

188. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$

189. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda.$

190. $f(x) = \dfrac{2}{\pi a}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$

191. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$

192. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$

193. а) $e^{-|x|} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda;$

б) $e^{-|x|}\operatorname{sgn} x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda.$

194. $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$

195. $\dfrac{x}{1+x^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$

196. $e^{-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2/4}\cos\lambda x\,d\lambda.$

Список литературы

1. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985.
2. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1980; — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. *Владимиров В. С.* и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1982.
4. *Герасимов Я. И., Древинг В. П.* и др. Курс физической химии / Уч. пос. — Изд. 2. Т. 2. — М.: Химия, 1973.
5. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.
6. *Демидович Б. П., Моденов В. П.* Дифференциальные уравнения / Уч. пос. — С-Пб.: Иван Федоров, 2003.
7. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — Изд. 2. — М.: Наука, 1984.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — Изд. 3. — М.: Физматлит, 1961; — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 (в печати).
9. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975.
10. *Соболева Е. С., Фатеева Г. М.* Уравнения математической физики / Методическое пособие. Изд. хим. ф-та МГУ, Ч. 1. — 1992; Ч. 2. — 1995.
11. *Розендорн Э. Р., Соболева Е. С., Фатеева Г. М.* Уравнения с частными производными. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 (в печати).

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАЧИ

ОТВЕТЫ

Учебное издание

СОБОЛЕВА Евгения Сергеевна
ФАТЕЕВА Галина Михайловна

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Корректор *В.Р. Игнатова*
Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*
Оформление переплета: *И.В. Каверзнева*

Подписано в печать 19.01.09. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 300 экз.
Заказ № 1694

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей издадельства
в ООО "Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-1053-2

9 785922 110532

ДЛЯ ЗАМЕТОК