I. Механика

I. Механика материальной точки

Билет №1. Кинематика точки. Система отсчета пространственно-временное представление движения. Радиус-вектор положения. Закон движения. Траектория, путь, перемещение. Скорость, ускорение. Координатное описание движения точки.

Кинематика - наука, описывающая движение точки, в то время как динамика выявляет законы, которым подчиняется движение точки.

Для описания движения необходимо ввести систему отсчета - совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов.

Движение - это изменение взаимного расположения тел, если тело поместить в пространство, где нет больше никаких других тел, то ничего о движении нельзя будет сказать, т.к. нет ничего, относительно чего можно будет изменять свое положение. Но движение происходит как в пространстве, так и во времени, время - обязательная составляющая движения. Поэтому движение описывается как изменения положения тела в пространстве в течение времени.

Чтобы описывать движение количественно, необходимо связать с телами, образующими систему отсчета, некую систему координат. Простейшей системой координат является декартова прямоугольная: на теле отсчета выбирается точка O - начало ~~отсчета~~ координат, и в трех взаимно перпендикулярных направлениях выбираются координатные оси Ox, Oy, Oz. Положение материальной точки описывается радиус-вектором r, проведенным в нее из начала координат.

Радиус-вектор точки можно записать в виде:

$$r = xi + yj + zk.$$

Здесь i, j, k - орты (тройка единичных $(|i| = |j| = |k| = 1)$ взаимоперпендикулярных векторов, направленных вдоль координатных осей Ox; Oy; Oz). ~~ие стра~~

Проекции радиус-вектора:

$$x = r_x = r\cos\alpha_x$$
$$y = r_y = r\cos\alpha_y$$
$$z = r_z = r\cos\alpha_z$$

$\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z$ - углы, которые радиус-вектор составляет с направлением координатных осей.

Эти проекции являются декартовыми координатами точки.

Линия, по которой движется материальная точка, т.е. которую описывает конец ее радиус-вектора, называется траекторией. Траекторию можно математически описать при помощи формул, выражающих зависимость координат точки от времени:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

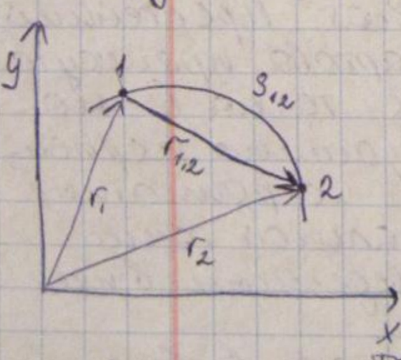
Эти формулы - кинематический закон движения (уравнение траектории в параметрической форме, где роль параметра играет время).

Кинематический закон движения:

- определяет форму траектории
- показывает, в какой точке траектории находится движущаяся точка в тот или иной момент времени.

При дифференцировании формул закона движения можно найти проекции скорости и ускорения точки

Т.е. кинематический закон движения дает полную информацию о движении точки.



Длина участка S_{12} траектории между точками 1 и 2 - пройденный путь

Вектор r_{12}, проведенный из начальной точки в конечную - перемещение

$$r_{12} = r(t_2) - r(t_1)$$

t_2 и t_1 - моменты времени, в которых точка была в положении 2 и 1.

Перемещение равно приращению радиуса-вектора точки.

Скорость

Характеризует быстроту движение точки

1) Средняя скорость на участке 1-2 траектории:
$\upsilon = \frac{S_{12}}{t_{12}}$ темп движения в среднем.

2) Истинная (мгновенная)

Разобьем путь на малые участки ΔS_i, проходимые за отрезки времени Δt_i, и вычислим среднюю скорость $\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$, и перейдем к пределу при $\Delta t_i \to 0$:

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$ Величина мгновенной скорости точки - производная пути по времени.

или $$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$ если взять приращение радиус-вектора

т.е. скорость - вектор, являющийся производной радиус-вектора точки по времени.

$$|\upsilon| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{|dr|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$ модуль вектора скорости

Направление вектора скорости указывает направление движения точки в данный момент. Т.е по касательной к траектории.

Зная кинематический закон движения, можно рассчитать скорость точки.

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k,$$

множители перед ортами - декартовы проекции

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt},$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2};$$

$$\cos \alpha_x = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \quad \cos \alpha_y = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \quad \cos \alpha_z = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}$$

$\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z$ - углы между направлением вектора υ и координатных осей

Ускорение

Характеризует быстроту изменения скорости υ.

1) Среднее ускорение

$$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

2) Мгновенное ускорение

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Ускорение точки – производная скорости по времени; вторая производная радиус-вектора точки по времени.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt} i + \frac{d\upsilon_y}{dt} j + \frac{d\upsilon_z}{dt} k = \frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k.$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a^2_x + a^2_y + a^2_z},$$

$$\cos\alpha_x = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\alpha_y = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\alpha_z = \frac{a_z}{a}.$$

Так можно рассчитать ускорение по известному кинематическому закону движения.

Билет №2 Закон движения точки с постоянным ускорением. Начальные условия и однозначность закона движения. Обратимость движения. Ускорение свободного падения. Движение вблизи поверхности земли.

Равноускоренное движение – $a = const$.
Для нахождения закона движения необходимо решить дифференциальное ур-е:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A.$$

Поскольку

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$ (мы рассмотрим проекцию ускорения по Ox).

Общее решение этого уравнения:

$$x(t) = C_1 + C_2 t + \frac{At^2}{2}.$$

C_1 и C_2 – произвольные константы, соответствующие начальной координате и начальной скорости.
Т.е.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{\upsilon}_0(t) + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

или в координатной форме

$$x(t) = x_0(t) + \upsilon_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Аналогично для проекций на Oy и Oz

При этом скорость описывается следующими уравнениями:
$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\quad v_x(t) = v_{x0} + a_x t$
Равноускоренное движение - знаки a_x и $v_x(t)$ совпадают. Равнозамедленное - имеют противоположные знаки.

Однозначное определение закона движения материальной точки возможно только при условии, что известны скорость и координата точки в начальный момент времени. Например, закон движения с постоянным ускорением описывается уравнением

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{v}_0(t) + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ - начальная координата и начальная скорость точки. Но этим уравнением задается целое семейство кривых, описывающих траекторию движения. Для данных конкретных условий им будет соответствовать одна конкретная кривая, что определяет однозначность закона движения при задании начальных условий.

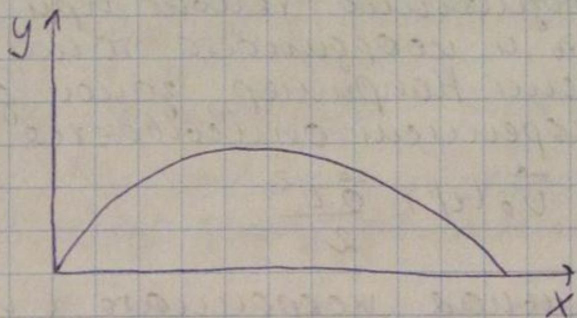
Уравнение траектории в параметрической форме (параметр - время) - кинематический закон движения. Но если выразить время из одного уравнения и подставить в два других, то можно исключить параметр времени из уравнения движения. Тогда оно будет нам показывать только форму траектории.

Теперь если в какой-либо точке траектории заменить ~~в~~ направление движения на противоположное, т.е. изменить знак скорости, то точка будет двигаться "вспять", и промежутки времени между прохождением двух любых точек траектории будут одинаковы как при прямом, так и при обратном движении. Каждой точке траектории соответствует определенное значение модуля скорости частицы независимо от направления движения по данной траектории.

Но обратимость движения имеет место тогда, когда выполняется закон сохранения механической энергии.

Ускорение свободного падения - ускорение, которое Земля сообщает телам, направлено вертикально вниз. $\vec{g} = 9{,}81\ м/с^2$ примерно.

Рассмотрим движение тела у поверхности земли, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0.



В системе отсчета, связанной с землей, тело вдоль горизонтальной оси OX движется равномерно, а вдоль вертикальной оси OY - равноускоренно с ускорением свободного падения g.

Пусть в начальный момент времени тело находилось в начале координат, тогда:

$x_0 = 0;$ $\qquad y_0 = 0$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha;$ $\qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$a_x = 0;$ $\qquad a_y = -g.$

тогда кинематические уравнения

$$v(t) = at + v_0$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

или в проекциях

$$x(t) = x_0(t) + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

имеем:

$$v_x = v_0 \cos\alpha;$$
$$x(t) = v_0 t \cos\alpha;$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt;$$
$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

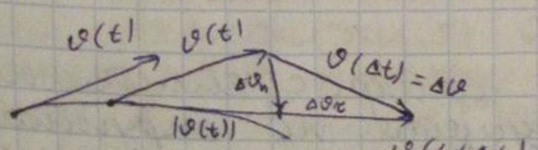
Поскольку в точке наибольшего подъема вертикальная составляющая скорост равна нулю, то время подъема $\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Отсюда найдем высоту наибольшего подъема:
$$H_{max} = y(\tau) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Время всего движения равно 2τ (без сопротивления воздуха).
Дальность полета:
$$L = x(2\tau) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
Отсюда следует, что максимальная дальность достигается при броске под углом 45°.
Уравнение траектории получим, решив систему.
$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha; \\ y(t) = v_0 t \sin\alpha - g t^2/2 \end{cases}$$
получим уравнение параболы:
$$y = x\,tg\alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Билет №3. Плоское криволинейное движение точки. Нормальная (поперечная) и тангенциальная (продольная) составляющие ускорения. Радиус кривизны траектории.

Плоское криволинейное движение - движение в одной плоскости, и скорость и ускорение точки при ее движении меняются ~~произвольно~~ по величине и направлению, а траектория - произвольная кривая.
Рассмотрим случай плоского криволинейного движения. Пусть $v(t)$ и $v(t+\Delta t)$ - скорости точки в моменты времени t и $t+\Delta t$, и $v(t+\Delta t) > v(t)$.



$v(t+\Delta t) = v(t) + v(\Delta t)$.
Изобразим это в виде векторов.
А потом отложим на векторе $v(t+\Delta t)$ модуль вектора $v(t)$.
Тогда вектор Δv можно представить в виде суммы двух векторов: $\Delta v_\tau + \Delta v_n = \Delta v$, и, разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу

при $\Delta t = 0$, получим:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta_n}{\Delta t}$$

т.е. ускорение можно разложить на две составляющих:

1) тангенциальное $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta_\tau}{\Delta t}$

$$|a_\tau| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vartheta_\tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

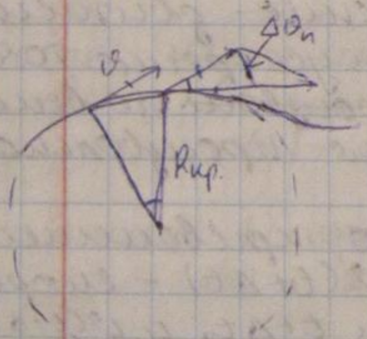
$\Delta \vartheta_\tau = \Delta \vartheta$ (см. рисунок)

Вектор a_τ направлен по касательной, т.е. туда же, куда и $\Delta \vartheta_\tau$. При замедленном движении - в противоположную сторону.

2) Нормальное $a_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta_n}{\Delta t}$

Если мы заменим малый участок траектории малой дугой круга кривизны, радиус которого $R_{кр}$ - радиус кривизны траектории, а обратная величина $K = 1/R_{кр}$ - кривизна траектории, то

$\frac{\Delta \vartheta_n}{\vartheta} = \frac{\Delta S}{R_{кр}}$ (из подобия равнобедренных треугольников, у которых углы при вершине равны как углы со взаимоперпендикулярными сторонами)



Отсюда $\Delta \vartheta_n = \frac{\Delta S\, \vartheta}{R_{кр}}$

Разделив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta_n}{\Delta t} = \frac{\vartheta}{R_{кр}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\vartheta^2}{R_{кр}}$$

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{R_{кр}}.$$

Совпадает с формулой центростремительного ускорения точки, движущейся по окружности. Направлено перпендикулярно скорости $\vartheta(t)$ (по нормали)

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{R_{кр}}\right)^2}.$$

Тангенциальное ускорение обусловлено изменением модуля скорости.
При неравномерном движении $a_\tau \neq 0$
При равномерном $a_\tau = 0$; $a = a_n$
Нормальное ускорение обусловлено изменением направления скорости, возникает при любом криволинейном движении.
При прямолинейном $a_n = 0$; $a = a_\tau$
При криволинейном $a_n \neq 0$.
При равномерном ($a_\tau = 0$) прямолинейном ($a_n = 0$) движении $a = 0$.

Билет №4. Движение точки по окружности. Центростремительное ускорение

Движение по окружности - частный случай криволинейного движения, где радиус кривизны равен радиусу окружности R, а нормаль направлена к центру окружности. В этом случае нормальное ускорение - центростремительное

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Угловая скорость - вектор ω, такой, что

$$|\omega| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$ $\Delta\varphi$ - малый угол, описываемый радиус-вектором R за малый промежуток времени Δt.

- Характеризует быстроту изменения угла φ со временем
- Численно равна углу, описываемому радиус-вектором точки за единицу времени.

Направление угловой скорости определяется правилом правого винта (буравчика)
Если расположить острие буравчика вдоль оси вращения, а его рукоятку вращать вместе с радиус-вектором R точки, то поступательное движение буравчика определит направление вектора ω
Если окружность с центром в начале координат лежит в плоскости xOy, то тогда угловая скорость направлена вдоль Oz, и ее проекция ω_z на эту ось равна производной угла φ по времени.

$$\omega = \omega_z k; \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловое ускорение β - производная угловой скорости по времени: $\beta = \frac{d\omega}{dt}$

Направлено вдоль оси вращения Oz.

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} k = \frac{d^2\varphi}{dz^2} k,$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Векторы β и ω сонаправлены при ускоренном движении и разнонаправлены при замедленном.

Поскольку $\Delta S = R\Delta\varphi$

ΔS - длина дуги

R - радиус

$\Delta\varphi$ - угол

то, разделив обе части этого равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим соотношение между модулями линейной и угловой скоростей: $\vartheta = R\omega$,

Продифференцировав еще раз по времени, получим: $a_z = R\beta$, но $a_z = \frac{d\vartheta}{dt}$ (тангенциальное ускорение)

Центростремительное ускорение:

$$a_{ц.с} = \frac{\vartheta^2}{R} = \omega^2 R$$

В векторной форме $a_{ц.с} = -\omega^2 R$, т.к. направлено против радиус-вектора точки.

Билет №5. Динамика точки. Инерциальные системы отсчета. Понятие о массе и силе. Импульс точки. Законы Ньютона. 2-ой закон Ньютона как система уравнений движения. Основная задача механики.

Если кинематика дает описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так, то динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения.

I закон Ньютона:

Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

или:

Скорость любого тела остается постоянной (или равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.

Системы отсчета, в которых выполняется I закон - инерциальные. Не выполняется - неинерциальные. Любая система отсчета, движущаяся относительно некой инерциальной системы прямолинейно и равномерно - тоже инерциальная.

Уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой, все инерциальные системы эквивалентны, поэтому никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя сказать, движется она, или покоится.

Гелиоцентрическая система отсчета (центр связан с Солнцем) - инерциальная. Земля движется относительно Солнца с ускорением, она еще и вращается, поэтому систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, инерциальной считать нельзя. Но это ускорение мало, и им в основном пренебрегают.

Взаимодействие между телами приводит к изменению их скоростей. Но одинаковое взаимодействие сообщает разным телам разные ускорения, т. к. тела обладают инертностью - противятся попыткам изменить их состояние движения.

Масса - количественная характеристика инертности.

Если в замкнутой системе из ~~других~~ двух тел привести эти тела во взаимодействие, то их скорости получат приращения Δv_1 и Δv_2, противоположные по знаку. Отношение модулей приращения не зависит от способа и интенсивности вз-я и равно:

$$\frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} = \frac{m_2}{m_1}; \text{ отсюда } m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2.$$

Т.к. $m = const$, то
$$\Delta(m_1 \vartheta_1) = -\Delta(m_2 \vartheta_2)$$
Импульс - величина $p = m\vartheta$.
Для тела, движущегося непоступательно,
$$p = \sum_i \Delta m_i \vartheta_i.$$
Вообще $\Delta p_1 = -\Delta p_2$; $\Delta(p_1 + p_2) = 0$;
т.е. $p = p_1 + p_2 = const$
Полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих частиц постоянен.
II закон:
Скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе F:
$$\frac{dp}{dt} = F,$$ F - результирующая - сумма всех сил F_i, действующих на тело.
(уравнение движения тела).
или: $ma = F$ ($p = m\vartheta$; $m = const$; $d\vartheta/dt = a$).
Произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе
III закон:
Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.
$$F_{12} = -F_{21}.$$
Сила характеризует взаимодействие тел друг с другом, воздействия их друг на друга.
II закон Ньютона является векторным, в скалярной форме он выражается через систему уравнений движения:
$$ma_x = F_x;$$
$$ma_y = F_y;$$
$$ma_z = F_z$$
Они позволяют решить основную (прямую) задачу динамики материальной точки, состоящую в том, чтобы в каждом конкретном случае уметь находить ее кинематический закон движения. Для этого необходимо знать массу точки, и формулы всех действующих на нее сил. Но это только при $a = const$ и $F = const$.
В общем случае

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F,$$ или:

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \end{cases}$$

уравнения движения материальной точки.

Общее решение системы содержит 6 произвольных постоянных, т.е 6 дополнительных условий, в качестве которых используются начальные условия.

Билет №6. Виды сил в механике. Силы тяготения (закон всемирного тяготения). Масса гравитационная и инертная. Силы упругости, силы трения

Силы:

- Сильные (между нейтронами и протонами - стабильность атомных ядер)
- Слабые (при взаимопревращениях элементарных частиц)
- Электромагнитные (вз-я заряженных тел; межмолекулярные вз-я => силы трения и упругости)
- Гравитационные (вз-я макроскопических тел)

Гравитационные силы (тяготения).

Все тела притягиваются друг к другу, удовлетворяя III закону Ньютона. Направлены по прямой, соединяющей точки, навстречу друг другу, и имеют одинаковый модуль.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$ r - расстояние между точками, m - их массы

G - гравитационная постоянная

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}r$$

Если r - вектор, проведенный в точку, на которую действует сила F, из точки, со стороны которой она действует.

Инертная масса - масса из II закона Ньютона, характеризует инертные св-ва тела

Гравитационная масса - масса из закона всемирного тяготения, отвечает за гравитационное вз-е

Вообще они равны. Точнее - пропорциональны (для тел с большой скоростью света).

Гравитационные силы — всегда притяжение.
Сила F, действующая на материальную точку, находящуюся в поле тяготения, пропорциональна ее массе m.
Силы ΔF_k, действующие на рассматриваемую точку со стороны малых элементов Δm_k тел, порождающих поле, пропорциональны массе m:

$$\Delta F_k = -G \frac{m \Delta m_k}{r_k^3} r_k$$

При нахождении результирующей m выносится за знак суммы:

$$F = \sum_k \Delta F_k = -m\left(G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} r_k\right)$$

Тогда ур-е движения материальной точки, находящейся под действием только сил тяготения:

$$ma = -m\left(G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} r_k\right)$$

Слева — инертная масса, справа — гравитационная, но мы их все равно сокращаем.

$$a = g = \frac{F}{m} = -G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} r_k.$$

Не зависит от массы материальной точки.
Упругие силы.
Деформации и обусловленные ими силы называются упругими, если тело после снятия внешних воздействий, вызвавших эти деформации, восстанавливает первоначальную форму. При небольших деформациях они пропорциональны величине, характеризующей деформацию.
При растяжении (сжатии) упругой невесомой пружины длиной l_0 до длины l на нее действуют силы, пропорциональные изменению длины Δl пружины:

$F = k\Delta l$; k — коэфф. жесткости пружины

Если один конец пружины закреплен неподвижно, а другой движется прямолинейно вдоль Ox, тогда упругая сила, действующая на тело на втором конце пружины, равна:

$$F_x = -kx$$

X — координата тела.

Силы трения
Возникают при контакте макроскопических тел направлены по касательной к их поверхности
· Сила жидкого трения
действует со стороны жидкой или газообразной среды, в которой движется тело
· Сила сухого трения
действует со стороны другого твердого тела, с которым первое контактирует
- Сила трения покоя
- Сила трения скольжения
Модуль силы трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления N подставки на тело и почти не зависит от скорости тела:

$$F_{тр.ск.} = \mu N$$

Направление противоположно скорости ϑ тела относительно подставки.

В векторной форме $F_{тр.ск} = -\frac{\mu N}{\vartheta}\vartheta$

μ - коэффициент трения скольжения.

Когда тело покоится, на него действует сила трения покоя $F_{тр.пок.}$, равная по модулю и противоположная по направлению действующей на тело силе: $F_{тр.пок.} = -F$.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действует со стороны среды сила, имеющая две составляющие: сила лобового сопротивления $F_{л.с}$, направленная против скорости ϑ тела, и подъемная сила $F_п$, перпендикулярная скорости тела.

При движении тела вдоль оси симметрии подъемная сила не возникает. При малой скорости

$\vec{F} = -b\vec{\vartheta}$ сила лобового сопротив.

b - коэфф. жидкого трения
зависит от формы и размеров тела и св-в среды
При больших скоростях

$$F = b_1 \vartheta^2$$

или в векторной форме $F = -b_1 \vartheta \vec{\vartheta}$

II. Механика системы материальных точек

Билет №9. Центр масс. Теорема о движении центра масс. Импульс системы. Закон изменения и сохранения импульса системы.

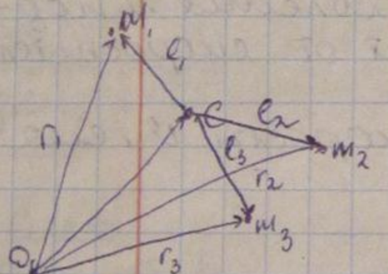
Для всякой системы материальных точек существует точка пространства - центр масс, расположенный относительно точек системы так, что сумма произведений масс m_i точек на их радиусы-векторы ℓ_i относительно центра масс равны 0.

$$\sum_i m_i \ell_i = 0$$

$$\ell_i = r_i - r_c$$

тогда $\sum_i m_i (r_i - r_c) = 0$, или

$$\sum_i m_i r_i - r_c \sum_i m_i = 0$$



отсюда

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

Для системы, состоящей из двух точек, $m_1\ell_1 + m_2\ell_2 = 0$, т.е. центр масс лежит на прямой, соединяющей эти точки. Положение центра масс не изменится, если две материальные точки m_1 и m_2 заменить одной с массой $m_1 + m_2$, расположенной в центре масс двух точек.

Скорость центра масс:

$$\vartheta_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vartheta_i}{\sum_i m_i}$$

Ускорение центра масс:

$$a_c = \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \frac{d\vartheta_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum m_i}$$

пусть $\sum_i m_i = m$ - полная масса системы. Тогда

$$m\frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum m_i a_i$$

по II закону Ньютона запишем это через силы:

$$\sum_i m_i a_i = \sum f_{ik} + \sum F_i$$

где f - внутренние силы, F - внешние силы.

Но $\sum_{ik} f_{ik} = 0$, т.к. по II закону Ньютона $F_{ik} = -f_{ki}$, и они все взаимоуничтожаются. Тогда

$$m \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum_i F_i \text{(внешн)}$$

Это уравнение движения центра масс - теорема о движении центра масс: центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы $m = \sum m_i$, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Импульс материальной точки - величина, равная произведению массы на ее скорость. Векторная величина.

$$p = m v$$

Импульс системы материальных точек:

$$p = \sum_i m_i v_i$$

Разделим и умножим правую часть на массу системы $m = \sum_i m_i$:

$$p = \sum m_i \cdot \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$$

скорость центра масс

$$p = m v_c$$

Импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

А теперь продифференцируем это:

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} = m \frac{d^2 r_c}{dt^2},$$

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i \text{(внешн.)}$$

Производная по времени импульса системы материальных точек равна сумме внешних сил, действующих на точки системы. - закон изменения импульса. Если его применить к одной точке, то он переходит во II закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i$$

В замкнутой системе сумма внешних сил равна нулю, и тогда P - const. (закон сохранения импульса).

Если система не замкнутая, но есть направление координатной оси (н-р. Ox), ~~однако~~ сумма проекций внешних сил на которое равна нулю, то

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_i F_{ix}(\text{внешн}) = 0,$$

т.е. $p_x = const$.

Т.е. сохраняется проекция импульса на то направление, на которое сумма проекций внешних сил равна нулю.

Если система незамкнута, и рассматриваются близкие моменты времени t и $t+\Delta t$, то можно считать, что $p(t) \approx p(t+\Delta t)$, т.к. изменением импульса за малый промежуток Δt можно пренебречь

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}; \qquad \frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum F; \qquad \Delta p = \bar{F}\Delta t$$

$\bar{F}$ среднее значение суммарной внешней силы на интервале времени Δt.

$F\Delta t$ - импульс силы

Если внешние силы не очень велики, а Δt мал, то импульсом силы, т.е. изменением импульса Δp, можно пренебречь.

Билет №8 и 9 Момент силы и момент импульса (относительно точки и относительно оси). Уравнение моментов для материальной точки (закон изменения и сохранения момента импульса точки).

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, на которые действуют внешние силы. Их уравнения движения:

$$m_1 \dot{v}_1 = F_{12} + F_1 \qquad m_2 \dot{v}_2 = F_{21} + F_2$$

Первое уравнение умножим на радиус-вектор первой частицы r_1, второе - на радиус-вектор второй:

$$m_1 [r_1; \dot{v}_1] = [r_1; F_{12}] + [r_1; F_1]$$

$$m_2 [r_2; \dot{v}_2] = [r_2; F_{21}] + [r_2; F_2].$$

А поскольку $[r\dot{v}] = \frac{d}{dt}[rv]$

$\left(\frac{d}{dt}[rv] = [r\dot{v}] + [\underset{v}{\dot{r}}v] = [r\dot{v}]\right)$, то

$$m_1 \frac{d}{dt}[r_1; v_1] = [r_1; F_{12}] + [r_1; F_1]$$

$(F_{21} = -F_{12})$

$$m_2 \frac{d}{dt}[r_2; v_2] = -[r_2; F_{12}] + [r_2; F_2]$$

Массу можно вносить и выносить под знак производной по времени и в векторное произведение:

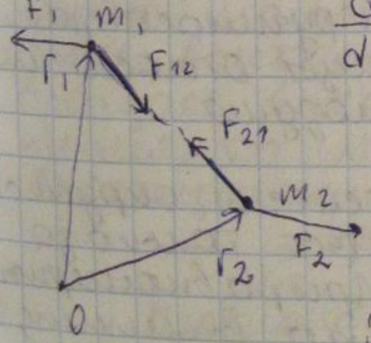
$$m\frac{d}{dt}[rv] = \frac{d}{dt}[r; mv] = \frac{d}{dt}[r; p].$$

Сложим вместе предыдущие уравнения

$$\frac{d}{dt}\left\{[r_1; p_1] + [r_2; p_2]\right\} = [(r_1 - r_2), F_{12}] + [r_1; F_1] + [r_2; F_2]$$

Поскольку $r_1 - r_2 = r_{21}$, то $[r_1 - r_2; F_{12}] = 0$.

Тогда



$$\frac{d}{dt}\left\{[p_1; r_1] + [r_2; p_2]\right\} = [r_1; F_1] + [r_2; F_2]$$

Если система замкнута, то

$\cancel{[r_1; F_1] + [r_2; F_2] = const}$

$[r_1; p_1] + [r_2; p_2] = const$.

Это момент импульса относительно точки O.

Для отдельной точки это вектор

$$M = [r, p] = [r, mv].$$

Момент импульса системы относительно точки O — векторная сумма моментов импульса частиц, входящих в систему:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i [r_i; p_i].$$

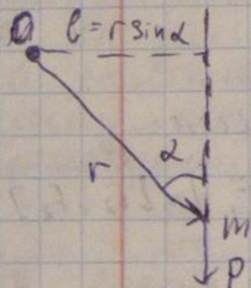
Проекция вектора момента импульса относительно точки на некоторую ось z - момент импульса частицы относительно этой оси:

$$M_z = [rp]_{пр.\, z}$$

Момент импульса системы относительно оси z - величина $M_z = \sum_i [r_i, p_i]_{пр\, z}$ - сумма проекций

Модуль вектора момента импульса частицы равен $M = rp\sin\alpha = lp$

$l = r\sin\alpha$ - длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы.



Эта длина - плечо импульса относительно точки O.

На рисунке вектор момента импульса перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен от нас.

Если частица движется вдоль прямой, изображенной на рисунке пунктиром, то момент импульса изменяется только по величине, модуль момента $M = mvl$, плечо $l = const$.

Если частица m движется по окружности радиуса R, то момент импульса частицы относительно центра окружности O равен по модулю

$$M = mvR.$$

Вектор M перпендикулярен к плоскости окружности. Т.к. $R = const$, M может изменяться только за счет изменения модуля скорости. При равномерном движении по окружности $M = const$ и по величине, и по направлению.

Пусть на некоторую материальную точку действует сила F. Момент M силы F относительно точки O - вектор, являющийся векторным произведением радиуса-вектора r, проведенного из точки O в точку приложения силы, и силы F:

$$M = [r, F].$$

(почти как момент импульса!

при проекции на ось

Модуль момента силы $M = rF\sin\alpha$

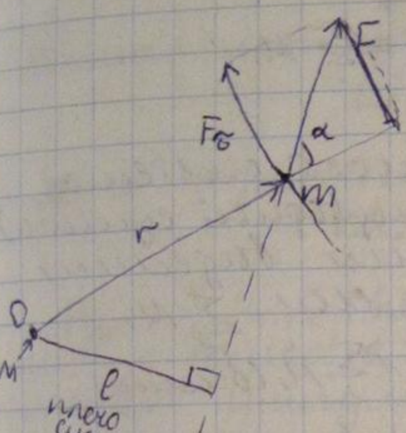
α - угол между векторами r и F.

или, если ℓ - плечо силы F, то $M = F\cdot\ell$

$(\ell = r\sin\alpha)$

Плечо силы - кратчайшее расстояние между точкой O и линией действия силы.

Но $F\cdot\sin\alpha = F_\tau$



F_τ - модуль составляющей F_τ силы F, перпендикулярной r и M.

Поэтому $M = F_\tau\cdot r$

Т.е. момент силы можно выразить:

$$M = \begin{cases} Fr\sin\alpha \\ F\cdot\ell \\ F_\tau\cdot r \end{cases}$$

Вектор M проходит ч/з точку O и направлен на нас.

Если к некоторой точке приложено несколько сил, то момент суммы этих сил относительно некоторой оси равен сумме моментов всех этих сил относительно той же оси

Знак момента силы определяется направлением вектора F_τ. Если F_τ направлена так, что вращает в сторону положительного направления вращения, то M положителен, если же наоборот - то M отрицателен.

Уравнение моментов.

для одной материальной точки

Продифференцируем формулу $L = [r, p]$

L - момент импульса

$$\frac{dL}{dt} = \Big[\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\vartheta}, \underbrace{p}_{m\vartheta}\Big] + \Big[r, \frac{dp}{dt}\Big]$$

векторы ϑ и $m\vartheta$ между собой имеют угол $\alpha = 0$. Поэтому их произведение равно 0.

$\frac{dp}{dt} = F$, тогда $\frac{dL}{dt} = [r, F]$; M - момент результирующей силы F.

F - результирующая $\left(\frac{dp}{dt} = \sum F \text{ - II закон Ньютона}\right)$

Закон изменения момента импульса материальной точки:

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad \text{(ур-е моментов)}$$

Если это записать для всех N материальных точек системы и просуммировать правые и левые части уравнения, то

$$\sum_i \frac{dL_i}{dt} = \sum_i M_i \qquad \frac{dL}{dt} = \sum_i M_i$$

производная момента импульса системы (сумма производных равна производной суммы)

Среди суммы моментов всех сил выделим сумму моментов внутренних сил $\sum_{ik} M_{ik}$ и сумму моментов внешних сил $\sum_i M_i$ (внешн).

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{ik} M_{ik} + \sum_i M_i(\text{внешн}).$$

Вследствие III закона Ньютона сумма моментов внутренних сил равна нулю (для каждой пары сил вз-я $M_{ik} = -M_{ki}$)

т.е. $$\frac{dL}{dt} = \sum_i M_i(\text{внешн}).$$

Производная по времени момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил относительно той же точки, действующих на систему. - закон изменения момента импульса.

Если $\sum_i M_i(\text{внешн}) = 0$, то $\frac{dL}{dt} = 0$, и $L = const$.

Момент импульса системы материальных точек остается постоянным, если сумма моментов внешних сил относительно той же точки равна нулю - закон сохранения момента импульса.

Момент импульса и момент силы можно представить в виде суммы их составляющих вдоль координатных осей:

$$L = L_x + L_y + L_z; \qquad M = M_z + M_y + M_x.$$

Эти составляющие являются моментами силы или импульса относительно осей $Ox; Oy; Oz$

Чтобы получить формулу для момента M_z силы относительно Oz, разложим вектора r и F на составляющие - параллельную и перпендикулярную оси.
Тогда $M_z = [r_\perp, F_\perp]$ $\perp$ - перпенд. составл.
Если α - угол между $r_\perp$ и $F_\perp$, то все предыдущие формулы справедливы для такого вектора.
Аналогично выражается момент импульса:

$$L_z = [r_\perp, p_\perp].$$

Полный момент импульса для системы:

$$L_z = \sum_i L_{iz}.$$

Закон изменения импульса относительно Oz

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{iz}\,(\text{внешн})$$

При $\sum M_{iz}$ (внешн) выполняется закон сохранения момента импульса относительно оси - момент импульса системы материальных точек относительно оси остается постоянным, если равна нулю сумма моментов внешних сил относительно этой оси.

Билет № 10. Работа силы. Кинетическая энергия точки. Вычисление работы для основных видов сил. Консервативные (потенциальные) силы. Неконсервативные силы.

Пусть на материальную точку действует сила F. Работа ΔA силы F на малом перемещении Δl - скалярное произведение силы на перемещение:

$$\Delta A = (F, \Delta l).$$

т.е. $\Delta A = F \Delta l \cos \alpha$, α - угол между направлением силы и перемещения.
или $\Delta A = F_l \Delta l$
$F_l = F\cos\alpha$ проекция силы на направление перемещения
$\Delta A = F \Delta l_F$ $\Delta l_F = l\cos\alpha$ - проекция перемещения на направление силы.
т.е. работу можно выразить как:

$$\Delta A = \begin{cases} F \Delta l \cos\alpha; \\ F_l \Delta l; \\ F \Delta l_F; \\ F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \end{cases}$$ - проекции на координатные оси

Если угол α между направлениями силы и перемещения острый, то $\cos\alpha > 0$; $\Delta A > 0$. Работа положительна.

Если угол α тупой, то $\cos\alpha < 0$; $\Delta A < 0$.

Если сила перпендикулярна перемещению - $\Delta A = 0$.

Работа A_{12} на конечном участке пути от точки 1 до точки 2 складывается из малых работ на отдельных малых участках пути. Если их просуммировать и перейти к пределу при $\Delta l \to 0$, то

$$A_{12} = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_i F_l \Delta l^i = \int_1^2 F_l dl$$

т.е. $$d\vec{A} = \vec{F} d\vec{S}$$

S - перемещение точки за время dt,

или $$dA = F \cos\alpha \cdot dS$$

Работа силы упругости:

При растяжении пружины (медленном) F_x внешн $= -F_x$ упр $= kx$; x - удлинение пружины.

$$A = \int F_x dx = \int kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

При сжатии пружины на величину X совершается такая же по величине и знаку работа. проекция силы Fвнешн. отрицательна; dx отрицательна, произведение $F_x dx > 0$.

Поскольку $dS = v dt$, то $dA = F v dt$; $A = \int_{t_1}^{t_2} F v dt$ работа, совершаемая в промежуток времени.

Формулу для работы можно записать и так:

$$dA = F dS_F$$

dS_F - проекция элементарного перемещения dS на направление силы F. Если сила имеет постоянную величину и направление, то

$$A = F \int_1^2 dS = FS = FS_F$$

Вычисление разных видов работ.

1) Работа силы тяжести.

$\Delta A = F \Delta l \cos\alpha$.

Если тело перемещается с высоты H_1 до высоты H_2, то $\Delta l = \Delta H$, а $F_{тяж} = m \cdot g$. Тогда

$\Delta A_{тяж} = m \cdot g \cdot \Delta H \cdot \cos\alpha$. $\quad A = \int mg\, dH$

Если мы бросаем тело вертикально вверх или вниз:

1) Вверх; $\cos\alpha = 180^\circ$; $A_{тяж} < 0$.

2) Вниз; $\cos\alpha = 0^\circ$; $A_{тяж} > 0$.

2) Работа силы трения

$\Delta A = F \Delta l \cos\alpha$

$F_{тр.} = \mu \cdot N$, μ - коэфф трения; N - модуль силы р-ии опоры.

$\Delta l \to \Delta S$ перемещение тела

$\Delta A = \mu \cdot N \cdot \Delta S \cos\alpha$; и т.д.

Свойства работы:

Работа меняет знак, если:

1) Направление силы в каждой точке траектории меняется на обратное

2) Начальная и конечная точки пути меняются местами

Энергия - способность системы совершить работу.

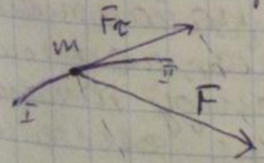
- Кинетическая - зависит только от скоростей
- Потенциальная - от координат материальных точек

Кинетическая энергия

Пусть материальная точка массой m движется под действием результирующей F

Тогда $m a_\tau = F_\tau$

a_τ и F_τ - тангенциальное ускорение и тангенциальная проекция силы.



Умножим обе части равенства на величину малого перемещения dl:

$m a_\tau dl = F_\tau dl$, но $\delta A = F_\tau dl$, а $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$

и $dl = \upsilon dt$, отсюда

$m \frac{d\upsilon}{dt} \upsilon dt = \delta A$; $\quad m\upsilon d\upsilon = \delta A$,

$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \delta A$,

и $W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$ - кинетическая энергия материальной точки.

$dW_k = \delta A$.

и если взять определенный интеграл - $W_k(2) - W_k(1) = A_{12}$

Работа результирующей силы, действующей на материальную точку, равна приращению кинетической эне гии точки.

Аналогично и для системы:

$$\sum_i^N w_k^i(2) - \sum_i^N w_k^i(1) = \sum_i^N A_{12}^i$$

Кинетическая энергия системы материальных точек определяется как сумма кинетических энергий ее точек:

$$W_k = \sum_i w_k^i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Работа всех сил, действующих на материальные точки системы, идет на приращение кинетической энергии системы.

Потенциальные (консервативные) силы – работа которых зависит от координат точек системы в начальном и конечном состоянии и не зависит от способа перехода системы из начального состояния в конечное (от формы траектории). Поэтому при циклическом перемещении работа их равна нулю.

$A_{12} = -A_{21}$; $A_{12} + A_{21} = 0$.

Для внутренних сил есть критерий потенциальности: если силы взаимодействия в системе удовлетворяют III закону Ньютона и не зависят ни от каких переменных, кроме расстояния между точками системы (н-р, не зависят от скоростей), то они потенциальны. Работа внутренних сил определяется начальной и конечной конфигурациями системы, которые определяются заданием расстояний между точками системы, и не зависит от перемещения системы как целого.

Потенциальные силы: силы тяготения, упругие.

Силы трения – непотенциальны. Направление силы трения противоположно направлению движения тела, поэтому ее работа, даже на замкнутом пути, отрицательна.

Билет №11. Потенциальная и кинетическая энергии системы материальных точек. Различные виды потенциальной энергии. Закон изменения и сохранения энергии в механике.

Свойство потенциальных сил: их работа, совершаемая над точками системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2, может быть представлена как разность значений ее потенциальной энергии в ее начальном и конечном состоянии.

$$\Delta A_{п.с.} = -\Delta W_п \quad т.к. \quad \Delta W_п = W_п(2) - W_п(1)$$

Потенциальная энергия системы материальных точек - скалярная физическая величина, измеряемая работой, которая совершается потенциальными силами над точками системы при переходе ее из рассматриваемого положения в положение, в котором потенциальная энергия системы принимается равной 0.

$$A_{12}^{п.с} = W_п(1) - W_п(2)$$

Свойства:

1) Зависит от положения системы (от координат всех ее N материальных точек)
2) Не может быть представлена как сумма потенциальных энергий отдельных точек системы
3) Зависит от выбора нулевого положения т.е. определена с точностью до произвольной постоянной
4) Полная потенциальная энергия складывается из потенциальных энергий, обусловленных силами каждого вида.

Различные виды потенциальной энергии.

1) Потенциальная энергия пружины.

Упруго деформированная пружина, соединенная с двумя телами, действует на них с силами, равными по модулю и направленными вдоль пружины. Эти силы зависят от расстояния между телами и не зависят от скоростей, т.е система обладает потенциальной энергией.

Пусть 1-е тело покоится и является началом координат, работа над вторым совершается силой упругости, ее проекция $F_x = -kx$,

$$\Delta A = F_x \Delta x = -kx \Delta x;$$

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

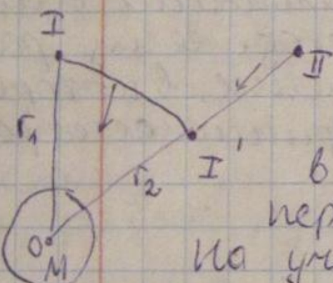
Пусть $x_1 = x$; $x_2 = 0$, тогда

$$W_п(x) = \frac{kx^2}{2}$$

2) Потенциальная энергия гравитационно взаимодействующих шара и материальной точки

Система с гравитационно взаимодействующими шаром массой M (неподвижным) и материальной точкой массой m.

Гравитационные силы потенциальны.



Пусть точка перемещается из положения I ($r=r_1$) в положение II ($r=r_2$) путем I → I' → II

На участке II' работа равна 0, т.к. в каждой его точке сила тяготения перпендикулярна малому перемещению.

На участке I'II сила направлена против перемещения, и $\Delta A = F_r \Delta r = \left(-G_т \frac{mM}{r^2}\right)\Delta r$,

$$A_{I\,II} = \int_{r_1}^{r_2} \left(-G_т \frac{mM}{r^2}\right) dr = -G_т mM \int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,dr = G_т mM \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{G_т mM}{r_2} - \frac{G_т mM}{r_1}.$$

Состояние с нулевой потенциальной энергией — отсутствие вз-я, т.е. в нашем случае $r_2 \to \infty$.

А $r_1 = r$ тогда $W_п(r) = -G_т \frac{mM}{r}$

3) Потенциальная энергия материальной точки, находящейся в однородном поле сил

Пусть на материальную точку действует постоянная сила F, величина и направление которой одинаковы во всех точках рассматриваемой области пространства (материальная точка находится во внешнем постоянном однородном силовом поле).

Если мы устремим Oz в направлении, противоположном силе F, и вычислим ее работу при перемещении из положения 1 (z_1) в положение 2 (z_2) любым способом перемещения, то при $F_x = F_y = 0$ и $F_z = -F$ получим:

$$\Delta A = F_x \Delta z = -F \Delta z.$$

$$A_{12} = \int_{z_1}^{z_2} (-F)\, dz = Fz_1 - Fz_2$$

т.е. работа зависит только от начального и конечного положения точки, т.е. материальная точка обладает потенциальной энергией.

При $z_1 = z$ и $z_2 = 0$

$$W_n(z) = Fz$$

частный случай $W_n = mgh$ для тела, поднятого над поверхностью земли.

Закон изменения и сохранения механической энергии

Теорема о кинетической энергии:

$$W_k(2) - W_k(1) = \sum_{i=1}^{N} A_{12}^{(i)}$$

Работа всех сил, действующих на материальные точки системы, идет на приращение кинетической энергии системы.

Из работы всех сил в правой части выделим работу потенциальных сил:

$$W_k(2) - W_k(1) = A_{12}^{n} + A'_{12}$$

Но $W_{12}^{n} = W_n(1) - W_n(2)$, тогда

$$W_k(2) - W_k(1) = W_n(1) - W_n(2) + A'_{12},$$

$$[W_k(2) + W_n(2)] - [W_k(1) + W_n(2)] = A'_{12},$$

Пусть механическая энергия $W = W_k + W_n$.

Тогда $W(2) - W(1) = A'_{12}$

Приращение механической энергии системы материальных точек равно работе непотенциальных и неучтенных сил. Это - закон изменения механической энергии.

Если $A' > 0$, работа эта идет на увеличение механической энергии.

Если $A' < 0$, механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии.

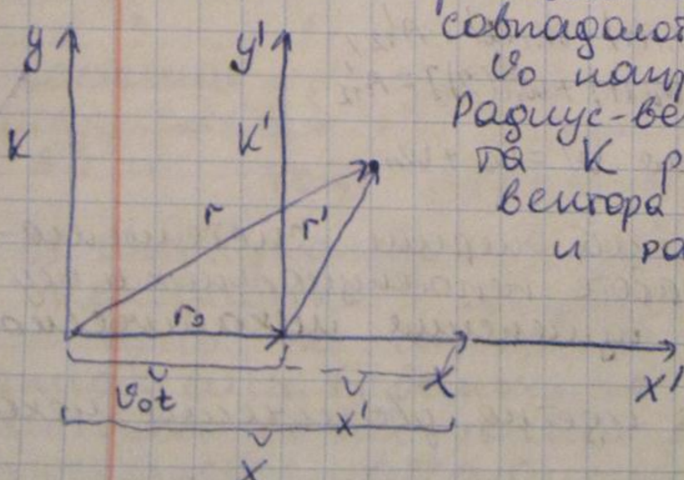
Если $A' = 0$, то $W(1) = W(2)$, и $W = const$.
Это закон сохранения механической энергии. При этом кинетическая энергия может переходить в потенциальную и обратно, но не в другие виды энергии.
A' – силы трения, сопротивления, силы, возникающие при неупругих деформациях.
В дифф. форме:

$$\frac{dW}{dt} = N', \quad N' = \frac{dA'}{dt}$$ – мощность непотенц. сил

III. Системы отсчета, движущиеся относительно друг друга.

Билет №12. Соотношения между кинематическими характеристиками точки, определенными для двух произвольно движущихся друг относительно друга систем отсчета. Переносная и относительная составляющая скорости точки. Переносная, относительная, кориолисова составляющие ускорения точки.

Для начала рассмотрим две системы отсчета K и K', K' движется относительно K поступательно, равномерно и прямолинейно. В начальный момент времени $t = 0$ обе системы отсчета совпадают друг с другом, скорость v_0 направлена по Ox.
Радиус-вектор точки в системе отсчета K равен сумме ее радиус-вектора в системе отсчета K' и радиуса-вектора r_0:



$$r = r' + r_0, \quad r_0 = v_0 t\, i$$

отсюда

$$x = x' + v_0 t$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

$(r = xi + yj + zk, \quad r' = x'i' + y'j' + z'k', \quad r_0 = v_0 t i; \quad i = i', j = j'$

$K = K'$; при сложении векторов суммируются их декартовы проекции на соответственные оси).

Эти формулы, связывающие координаты точки в двух системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно — преобразования Галилея.

Дифференцируем по времени:

$$\vartheta = \vartheta' + \vartheta_0; \quad \vartheta_x = \vartheta'_x + \vartheta_0; \quad \vartheta_y = \vartheta'_y; \quad \vartheta_z = \vartheta'_z.$$

скорость — результат сложения

Еще раз дифференцируем:

$$a = a'; \quad a_x = a'_x; \quad a_y = a'_y; \quad a_z = a'_z$$

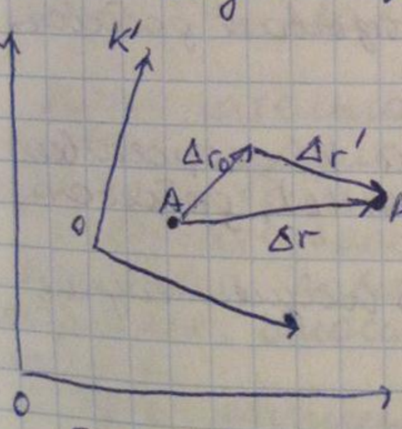
ускорение инвариантно

Т.е. скорость ϑ точки относительно K складывается из ее скорости ϑ' относительно K' (относительной скорости) и скорости ϑ_0 самой K' относительно K (переносной скорости)

Переносная — скорость самой системы отсчета

относительная — скорость самой точки относительно движущейся системы отсчета.

Случай произвольного движения.



Малое перемещение Δr точки относительно K — сумма переносного перемещения Δr_0 (вместе с K') и относительного перемещения $\Delta r'$ (относительно K').

$$\Delta r = \Delta r_0 + \Delta r'$$

Разделим это на $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$$

ϑ_0 — переносная

ϑ' — относительная

Т.е. скорости складываются.

Продифференцируем это по времени еще раз

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta^0}{dt} + \frac{d\vartheta'}{dt}; \quad a = \frac{d\vartheta^0}{dt} + \frac{d\vartheta'}{dt}.$$

$\frac{d\vartheta_0}{dt} = a_0$ и $\frac{d\vartheta'}{dt} = a'$ только при поступательном.

А при непоступательном ускорения не складываются.

Хаос

Рассмотрим систему отсчета K', равномерно вращающуюся относительно неподвижной K с угловой скоростью ω. Они имеют общее начало координат и совпадающие Oz, вокруг них и идет вращение. Пусть относительно K' точка движется прямолинейно. Скорость ее равна

$$v = v_0 + v'$$

v_0 - переносная $\quad v'$ - относительная

$$a = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dv'}{dt}.$$

Рассмотрим $\frac{dv_0}{dt}$.

$dv_0 = v_0(t+dt) - v_0(t)$.

Прибавим и отнимем некое слагаемое $\tilde{v}_0(t+dt)$:

$dv_0 = [v_0(t+dt) - \tilde{v}_0(t+dt)] + [\tilde{v}_0(t+dt) - v_0(t)]$.

Здесь $\tilde{v}_0(t+dt) - v_0(t)$ - переносное ускорение a_0

$\frac{d\tilde{v}_0}{dt} = a_0 = -\omega^2 r$ (центростремительное).

т.к. точки K' движутся равномерно по окружностям, а переносное ускорение - ускорение фиксированной точки в системе отсчета K'.

А $[v_0(t+dt) - \tilde{v}_0(t+dt)] = dv_0$ (доб.) вызывает добавочное ускорение $a_0(доб.) = \frac{dv_0(доб)}{dt}$

При поступательном движении K' скорости всех ее точек одинаковы; $\tilde{v}_0(t+dt) = v_0(t+dt)$, добавочного ускорения не возникает.

$\frac{dv_0(доб.)}{dt} = a_0(доб) = [\omega, v']$ в нашем случае.

т.е. $\frac{dv_0}{dt} = \underbrace{-\omega^2 r}_{a_0} + \underbrace{[\omega, v']}_{a_0(доб.)}$

Рассмотрим $\frac{dv'}{dt}$.

Здесь тоже $dv' = dv'_{отн.} + dv'_{доб}$; $\quad \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'_{отн}}{dt} + \frac{dv'_{доб}}{dt}$.

$dv'_{отн}$ - изменение вектора v' относительно K', дает относительное ускорение

$dv'_{доб.}$ обусловлено поворотом вектора v' относит. K и приводит к добавочному ускорению

При поступательном движении К' относ. К с одинаковой ориентацией их осей $d\vartheta' = d\vartheta'_{\text{отн. к'}}$ и добавочное ускорение не возникает, т.к. изменение относительной скорости ϑ' в обеих системах отсчета одинаково.

$$d\vartheta'_{доб} = [\omega; \vartheta'] dt;$$

$$\frac{d\vartheta'_{доб}}{dt} = a'_{доб} = [\omega; \vartheta'].$$

тогда $\frac{d\vartheta'}{dt} = a' + a'_{доб}$

итого $a = \underbrace{-\omega^2 r}_{a_{центр.с.}} + a' + \underbrace{2[\omega; \vartheta']}_{a_{доб}}$

$2[\omega, \vartheta'] = a_{кор}$.

Это добавочное ускорение - ускорение Кориолиса. Это справедливо для любого относительного движения точки.

Билет №13. Частные случаи относительного движения систем отсчета: поступательное с постоянной скоростью, поступательное ускоренное, вращающаяся относительно неподвижной оси система отсчета. Угловая скорость системы отсчета.

Поступательное с постоянной скоростью - там отсутствуют кориолисовы составляющие. См. преобразования Галилея.

Поступательное равноускоренное.

Пусть есть равноускоренная система отсчета К', движущаяся относительно инерциальной системы отсчета К.

Ур-е движения для К - II закон Ньютона

$$ma = \sum_i F_i$$

$a = a_0 + a'$ относит. К' (кориолисова здесь нет, т.к. движение поступательное)

$$m(a_0 + a') = \sum_i F_i; \quad ma' = \sum_i F_i - ma_0$$

$F = -ma_0$ - сила инерции - дополнит. слагаемое

Они действуют в любой точке неинерциальной системы отсчета, образуя поле сил инерции. В равноускоренных системах отсчета оно однородно т.к. a_0 во всех ее точках одинаково.

Вообще силы инерции не совсем силы, т.к. силы характеризуют взаимодействие тел, а силы инерции всего лишь следствие ускоренного движения тел.

Пусть некое тело лежит на поверхности земли или подвешено на пружине в покое. На тело действуют силы тяжести mg. В подставке и пружине возникают силы, уравновешивающие силы тяжести: сила N реакции опоры и T натяжение пружины.

$$N = -mg; \quad T = -mg$$

По III закону Ньютона само тело давит на подставку с силами, равными по модулю и обратными по знаку:

$$P = -N = -T = mg \quad \text{вес тела.}$$

В случае сил инерции $P = F_{тяж} + F_{инерц.} = mg - ma_0$

Равномерно вращающаяся система отсчета

Пусть неинерциальная система отсчета K' равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = const$ относительно инерциальной системы отсчета K.

Для K: $\quad ma = \sum_i F_i$

$$m(-\omega^2 r + a' + 2[\omega; \vartheta']) = \sum_i F_i$$

(см. предыдущий билет).

$$ma' = \sum_i F_i + \underbrace{m\omega^2 r}_{F_{ин.ц.б.}} + \underbrace{2m[\vartheta'; \omega]}_{F_{ин.кор.}}$$

Уравнение движения имеет вид II закона Ньютона, но к нему добавляется 2 силы инерции

1) Центробежная сила инерции - направлена от оси вращения.

$$F = m\omega^2 r$$

2) Сила инерции Кориолиса - обусловлена наличием кориолисова ускорения

$$F = 2m[\vartheta'; \omega]$$

Билет №14. Преобразование II закона Ньютона при переходе к движущейся системе отсчета. Принцип относительности Галилея. Силы кинематического происхож дения - силы инерции. Центробежная и кориолисова сила инерции.

При переходе из одной инерциальной системы отсчета в движущуюся относительно нее другую инерциальную систему отсчета (движущуюся равномерно и поступательно) ~~за~~ ускорение тел оказывается одним и тем же (см. преобразования Галилея). Сила F, действующая на частицу в неподвижной системе K, совпадает с силой F', которая в системе K' движущейся, т.к. сила зависит от расстояний между частицами, а они не меняются. Масса тоже одинакова. Т.е. уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Это - принцип относительности Галилея:

"Все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, и никакими механическими опытами невозможно установить, покоится ли данная система или движется прямолинейно и равномерно.

Если мы будем переходить из неподвижной к равноускоренной или вращающейся системе, т.е. из инерциальной в неинерциальную, то возникают силы инерции.

Неинерциальная система K' движется относительно инерциальной K с ускорением w'. Но в K тело имеет также ускорение w, ~~а~~ отличное от w'.

Тогда $w - w' = a$.

Для поступательно движущихся систем a - ускорение неинерциальной системы.

Для вращающихся $a = a(r')$, r' - радиус-вектор, определяющий положение точки относит. неинерциальной системы.

По II закону Ньютона для K $\quad w = \dfrac{F}{m}$ $\quad$ F - результир. всех сил

Для K' $\quad w' = w - a = \dfrac{F}{m} - a$.

Т.е. даже при $F = 0$ в неинерциальной системе тело будет двигаться с ускорением $-a$, так, будто на него действует сила $-ma$ - сила инерции.

$$F_{in} = -m(w-w') = -ma.$$

Тогда II закон Ньютона:

$$mw' = F + F_{in}.$$

Центробежная сила инерции

Пусть есть диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему оси z' с угловой скоростью ω, и вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной.

Сила натяжения пружины:

$$F_{пр.} = -m\omega^2 R$$

$-\omega^2 R$ - центростремительное ускорение

R - расстояние от шарика до центра диска.

Но относительно диска шарик покоится, т.е. есть еще одна уравновешивающая сила:

$$F_{цб} = m\omega^2 R$$

Направлена вдоль радиуса от центра диска.

Это - центробежная сила инерции. Возникает во вращающихся относительно инерциальных системах отсчета, действует на тела в этих системах независимо от того, покоятся они или движутся.

Можно представить в виде двойного векторного произв.

$$F_{цб} = m[\omega;[r;\omega]].$$

Сила Кориолиса

Тоже при движении тела относительно вращающейся системы отсчета.

Пусть частица m движется относительно вращающейся системы отсчета равномерно по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, с центром в этой оси.

Скорость частицы относительно вращающейся системы ϑ'; относительно неподвижной $\vartheta = \vartheta' + \omega R$, где ω - угловая скорость вращающейся системы, R - радиус окружности.

Чтобы частица двигалась со скоростью $\vartheta = \vartheta' + \omega R$, на нее должна действовать сила F, направленная к центру окружности:

$$F = m w_n \qquad w_n = \frac{\vartheta^2}{R}.$$

w_n - нормальное ускорение

$$F = m \cdot w_n = \frac{m\vartheta^2}{R} = \frac{m(\vartheta' + \omega R)^2}{R} = \underbrace{\frac{m\vartheta'^2}{R}}_{mw'_n} + 2m\vartheta'\omega + m\omega^2 R.$$

$$mw'_n = F - 2m\vartheta'\omega - m\omega^2 R$$

т.е. частица движется так, будто бы на нее действуют кроме силы F еще $F_{цб} = m\omega^2 R$, направленная от центра, и $F_к = 2m\vartheta'\omega$ - кориолисова сила. Действует только на движущиеся тела, т.к. при $\vartheta' = 0$ отсутствует.

Можно записать ее в виде $F_к = 2m[\vartheta'; \omega]$.

Сила Кориолиса всегда лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Билет №15. Механические степени свободы. Степени свободы твердого тела. Частные виды движения твердого тела и их описание (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоскопараллельное движение). Вектор мгновенной угловой скорости твердого тела.

Число независимых координат (параметров), значения которых, изменяясь при движении системы, однозначно определяют ее положение в пространстве - число степеней свободы.

Материальная точка имеет три степени свободы, т.к. ее положение вполне определяется тремя независимыми параметрами - координатами $x(t), y(t), z(t)$.

Система, состоящая из N точек, обладает $3N$ степенями свободы. Но если на условия движения точек наложены ограничения, число степеней свободы уменьшается.

Абсолютно твердое тело, если на его движения не наложены ограничения, обладает 6 степенями свободы: 3 из них - ~~полож~~ координаты какой-либо его точки, 2 угловые координаты, определяющие направление какой-либо оси тела, проходящей ч/з центр масс, и 1 угловая координата, определяющая возможное вращение тела относительно этой оси.

Виды движения твердого тела.

1) Поступательное

Подвижная система движется в пространстве так, что ее оси остаются параллельными самим себе, все малые элементы тела имеют одинаковые скорости и ускорения, их траектории лишь смещены друг относительно друга. Радиус-векторы r_i и r_k i-й и k-й точек тела связаны соотношением:

$$r_k(t) - r_i(t) = R_{ik}$$

R_{ik} - вектор, проведенный из i в k-ю точку.

$R_{ik} = const$. Не меняется ни его модуль, ни его направление.

Отсюда и $\quad \vartheta_i(t) - \vartheta_k(t) = 0;$

$\vartheta_i(t) = \vartheta_k(t)$ - равенство скоростей

$a_i(t) = a_k(t)$ - равенство ускорений.

Поступат. движ. описывается кинематическим законом движения одной произвольной точки тела, поэтому такое тело обладает 3-мя степенями свободы. Например, уравнением движения центра масс: $\quad ma_c = \sum\limits_i F_i \quad$ a_c - ускорение центра масс

$\sum\limits_i F_i$ - сумма сил, действующих со стороны других тел.

2) Вращательное вокруг неподвижной оси

Если начало координат поместить в любой точке оси вращения, и ось z направить вдоль этой оси, то при движении будет меняться только угол φ собственного вращения тела, т.е. у тела 1 степень свободы.

Все точки тела остаются при вращении на одном и том же расстоянии от оси, поэтому в равные промежутки времени Δt различные точки будут описывать дуги различных окружностей.

Алгебраическая скорость: $\vartheta = \dfrac{dS}{dt}$

R - радиус траектории точки M

φ_1 - угол, отсчитываемый от начальн. положения точки

$S = R\varphi_1$

$\Delta S = R\Delta\varphi$ приращение дуги S за время Δt

$\vartheta = R\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\dfrac{d\varphi}{dt}$ скорость точки M.

мгновенная
Это - угловая скорость тела $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ одинакова для всех точек тела.

$\vartheta = R\omega$. направлена по касательной к окружности в сторону изменения φ.

ω характеризует направление вращения тела.

ω - вектор, направленный по оси вращения тела. Его модуль - абсолютная величина угловой скорости.

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

v - скорость точки, определяемой радиус-вектором r.

2) Вектор мгновенной скорости вращающегося тела:

$$\vec{\vartheta} = [\vec{\omega}; \vec{r}].$$

3) Плоскопараллельное движение тела.

Все точки тела движутся в параллельных друг другу плоскостях. Это поступательное движение тела вместе с осью, перпендикулярной этим плоскостям, и вращение относительно этой оси.

Т.е. плоскопараллельное движение можно представить как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой полюсом, и поворота вокруг полюса.

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Билет №16. Вращательная динамика твердого тела. Уравнение моментов для вращения твердого тела относительно неподвижной оси. Моменты инерции - составляющие меры вращательной инертности твердого тела.

Пусть есть твердое тело, способное вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Поскольку твердое тело можно рассматривать как систему частиц с неизменными расстояниями между ними, то для него справедливо ур-е моментов:

$$\frac{dM}{dt} = \sum N_{внешн.}$$

M - момент импульса тела
$\sum N_{вн}$ - сумма моментов внешних сил, действующих на тело.
Пусть O - точка на оси вращения, из нее выходят радиус-векторы.
Момент импульса i-той частицы:

$$M_i = [r_i ; m_i \vartheta_i] = m_i [r_i ; \vartheta_i]$$

$r_i \perp \vartheta_i$, поэтому модуль вектора

$$M_i = m_i r_i \vartheta_i = m_i r_i \omega R_i$$

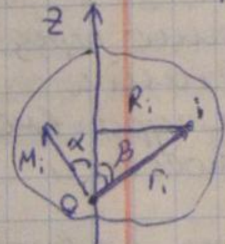
R_i - расстояние частицы от оси вращения.
Проекция M_i на ось z:

$$M_{zi} = M_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha_i = m_i (r_i \cos\alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_z$$

α_i - угол между M_i и Oz.

$$r_i \cos\alpha_i = r_i \sin(90-\alpha_i) = r_i \sin\beta_i = R_i.$$

т.к. угол между M_i и r_i прямой



$M_i \perp R_i$

Если применить это для всех частиц, то получим момент импульса тела относительно совпадающей с осью вращения оси z:

$$M_z = \sum M_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2$$

Здесь величина $I = \sum m_i R_i^2$ - момент инерции тела относительно данной оси.
Равна сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси.

$M_z = I\omega_z$ и в целом $M = I\omega$.

Аналогична формуле $p_z = m\vartheta_z$
Поскольку $\frac{d}{dt} M_z = \sum N_{z\,внеш}$, то

$I \beta_z = \sum N_{z\,внеш}$ ур-е моментов (ур-е движения для вращ. тел)

$\beta_z = \dot{\omega}_z$ проекция углового ускорения на ось z.
Аналогично ур-ю $m w_z = \sum F_z$.

Момент инерции.

Существует для всех тел, не обязательно вращающихся.
Поскольку $\rho = \frac{m}{V}$, $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$,

то $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$; и
$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i,$$

или для однородного тела $I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i$

или $I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$.

Из уравнения моментов следует, что угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции: $\beta = \sum M_i / I$, а значит, физический смысл момента инерции: чем он больше, тем меньшее по величине угловое ускорение приобретает тело под действием данного момента приложенных сил. Момент инерции относительно некоторой оси является мерой инерции тела, вращающегося относительно этой оси, как масса - мера инерции тела при его поступательном движении.

Билет №17. Момент инерции однородного толстостенного шара.

Для начала найдем момент инерции однородной круглой пластинки малой толщины относительно оси Oz, проходящей ч/з ее центр перпендикулярно ее плоскости.

Масса пластинки $m = \rho \cdot h \cdot \pi R^2$.

Разобьем пластинку на множество элементарных колец радиусом r_i и шириной Δr_i. Масса такого кольца $m_i = \rho \cdot h \cdot 2\pi r_i \Delta r_i$
толщина мала.

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$

$$I_z = \sum \rho \cdot h \cdot 2\pi r_i^3 \Delta r_i$$

или $I_z = \int_0^R 2\rho h \pi r^3 dr = 2\rho h \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2\rho h \pi R^4}{4} = \frac{\rho h \pi R^4}{2}$

$= \frac{mR^2}{2}$ $\quad (m = \rho h \pi R^2$ - масса ~~пластинки~~ пластинки)

Теперь найдем момент инерции однородного шара:

масса $\quad m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$.

Разобьем шар на множество элементарных пластинок, толщиной Δz_i; перпендикулярных оси Oz.

Масса такой пластинки радиусом r_i

$$m_i = \rho\pi r_i^2 \Delta z_i$$

Ее момент инерции:

$$\Delta I_z = \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{\rho\pi r_i^4 \Delta z_i}{2} = \rho\frac{\pi(R^2 - z_i^2)^2 \cdot \Delta z_i}{2},$$

$$I_{ш} = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \int_{-R}^{+R} dz - \rho\pi R^2 \int_{-R}^{+R} z^2 dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{+R} z^4 dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \cdot 2R - \rho\pi R^2 \frac{2}{3}R^3 + \frac{1}{2}\rho\pi\frac{2}{5}R^5 =$$

$$= \frac{8}{15}\rho\pi R^5.$$

И теперь настало время для тонкостенного шара: это, по сути, изменение dI_0 момента инерции шара при изменении его радиуса на dR:

$$I = \frac{dI_0 \cdot dR}{dR} = \frac{d}{dR}\left(\frac{8}{15}\pi\rho R^5\right)dR = \frac{8}{3}\pi\rho R^4 dR =$$

$$= (\rho \cdot 4\pi R^2 dR)\frac{2}{3}R^2 = \frac{2}{3}mR^2.$$

где $m = \rho \cdot \underline{4\pi R^2 dR}$

объем ~~сф~~ поверхности сферы - это площадь сферы $4\pi R^2$, умноженная на малое изменение радиуса dR.

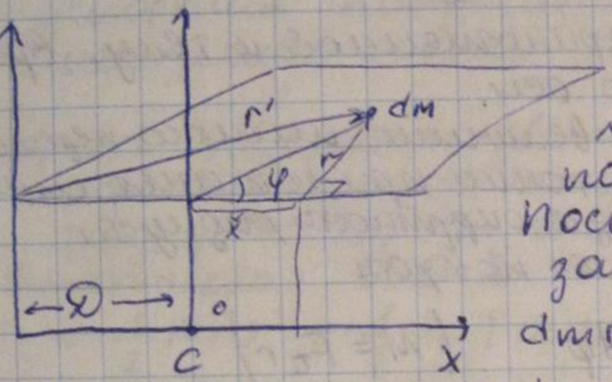
Билет №18. Теорема о вычислении моментов инерции при параллельном переносе осей - теорема

Гюйгенса- Штейнера. Кинетическая энергия твёрдого тела при вращении вокруг неподвижной оси.

Теорема: Момент инерции I' тела относительно некоторой оси, не проходящей через центр масс C тела, равен моменту инерции I относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния D между осями:

$$I' = I + mD^2.$$

Доказательство.



Проведем ось Ox с началом отсчета O в центре масс так, чтобы она проходила через обе оси перпендикулярно к ним.

Поскольку $dI = dm\,r^2$, запишем это так:

$$dm\,r'^2 = dm\,(r^2 + D^2 + 2Dr\cos\varphi) =$$
$$= dm\,r^2 + dm\,D^2 + 2D\,dm\,x.$$

$dI' = dm\,r'^2$

dI' - момент инерции малого элемента массы dm тела относительно оси, не проходящей ч/з центр масс.

$r'^2 = r^2 + D^2 + 2Dr\cos\varphi$ - по теореме косинусов.

r - расстояние от элемента тела до оси, проходящей ч/з центр масс.

$r\cos\varphi = x$ координата элемента тела в системе отсчета с началом в центре масс.

Тогда

$$\underbrace{\int r'^2 dm}_{I'} = \underbrace{\int r^2 dm}_{I} + \underbrace{\int D^2 dm}_{D^2 m} + \underbrace{\int 2Dx\,dm}_{2D\int x\,dm}$$ интеграл по объему

Радиус-вектор центра масс находится по формуле:

$r_c = \frac{\int r\,dm}{m}$, т.е. $x_c = \frac{1}{m}\int x\,dm$; $\int x\,dm = x_c m$;

Но координата центра масс $x=0$, т.е. $\int x\,dm = 0$.

Отсюда $I' = I + D^2 m$.

Кинетическая энергия вращающегося тела.

Пусть тело массой m вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω.

Кинетическая энергия $dW_к$ малого элемента тела массы dm, движущегося по окружности радиуса r с линейной скоростью ϑ, равна

$$dW_к = \frac{1}{2} dm \vartheta^2 = \frac{1}{2} dm \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} dI \omega^2,$$

dI – момент инерции этого элемента.

$$W_к = \int dW_к = \frac{1}{2}\omega^2 \int dI = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Найдем работу силы F, приложенной к телу, вращающемуся относительно оси.

$$A_{12} = \int_1^2 F_i \, dl;$$

dl – величина малого перемещения точки приложения силы по дуге окружности радиуса r

но $dl = r d\varphi$

$d\varphi$ – угол поворота

$$A_{12} = \int_1^2 F_i \, dl = \int_1^2 F_\tau r d\varphi = \int_1^2 M_\tau d\varphi \quad (M = F_\tau r).$$

Билет № 19. Динамика поступательного движения твердого тела. Динамика плоско-параллельного движения твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела при плоско-параллельном движении.

1) Поступательное движение

Подчиняется II закону Ньютона; формулы такие же, как и для материальной точки (см. билет 15).

2) Плоскопараллельное движение

Перемещение тела из положения 1 в положение 2 можно представить как сумму двух перемещений – поступательного из положения 1 в 1' и поворота вокруг оси O.

Элементарное перемещение какой-либо точки тела dS можно разложить на два перемещения "поступательное" $dS_п$ и "вращательное" $dS_в$.

$dS_п$ для всех точек тела одно и то же.

Скорость точки: $\vartheta = \frac{dS}{dt} = \frac{dS_п}{dt} + \frac{dS_в}{dt} = \vartheta_0 + \vartheta'$

Линейная скорость ϑ' точки с радиус-вектором r, обусловленная вращением тела, равна:
$$\vartheta' = [\omega r].$$
Общая скорость: $\vartheta = \vartheta_0 + [\omega r]$.
Элементарное перемещение твердого тела при плоском движении можно представить как поворот вокруг некоторой оси - мгновенной оси вращения.
Плоское движение можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей.
Ускорение также находится как геометрическая сумма ускорения "поступательного" и "вращательного".
Кинетическая энергия тела при плоском движении.
Скорость плоского движения: $\vartheta_i = \vartheta_0 + [\omega; r_i]$
ϑ_0 - скорость некоторой точки O тела;
r_i - радиус-вектор из точки O к элементарной массе тела.
Кинетическая энергия i-й элементарной массы:
$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vartheta_i^2 = \frac{1}{2} m_i [\vartheta_0 + [\omega; r_i]]^2 =$$
$$= \frac{1}{2} m_i [\vartheta_0^2 + 2\vartheta_0 [\omega; r_i] + [\omega; r_i]^2).$$
$[\omega; r_i] = \omega R_i$; R_i - расстояние массы m_i от оси вращения.
Т.е. $T_i = \frac{1}{2} m_i [\vartheta_0^2 + 2[\vartheta_0; \omega] r_i + \omega^2 R_i^2]$.
Теперь просуммируем это по всем элементарным массам, вынося постоянные множители:
$$T = \frac{1}{2}\vartheta_0^2 \underbrace{\sum m_i}_{= m} + [\vartheta_0; \omega] \underbrace{\sum m_i r_i}_{= m \cdot r_c} + \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum m_i R_i^2}_{= I_0} =$$
$$= \frac{1}{2} m \vartheta_0^2 + m r_c [\vartheta_0; \omega] + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$
I_0 - относит. оси, проходящей ч/з точку O.
r_c - радиус-вектор центра масс тела
Возьмем в качестве точки O центр масс тела C.
Тогда $r_c = 0$, ϑ_c - скорость центра масс. I_c - момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей ч/з точку C, и
$$T = \frac{m\vartheta_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

Т.е. кинетическая энергия тела при плоском движении слагается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей ч/з центр масс тела.

Соответствие

Поступательное		Вращательное	
Линейная координата x		угловая координата φ	
Линейная скорость	$\vartheta = \frac{dr}{dt}$; $\vartheta_x = \frac{dx}{dt}$	Угловая скорость ω;	$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$
Линейное ускорение	$a = \frac{d\vartheta}{dt}$; $a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Угловое ускорение	$\beta = \frac{d\omega}{dt}$; $\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Масса	$m = \int dm$	Момент инерции	$I = \int r^2 dm$
Импульс	$p_x = m\vartheta_x$	Момент импульса	$L_z = I\omega$
Сила F_x		Момент силы	$M_z = [r_\perp; F_\perp]$

2 закон Ньютона

$$ma = \sum_i F_i$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_{ix}$$

Ур-е моментов

$$I\beta = \sum_i M_{(i)z}$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_{(i)z}$$

Кинетическая энергия:

$$W_x = \frac{m\vartheta^2}{2}$$

Кинетическая энергия

$$W_x = \frac{I\omega^2}{2}$$

Работа:

$$A = \int_1^2 F_x dx$$

Работа:

$$A = \int_1^2 M_x d\varphi$$

Механические колебания.

Билет №20. Гармонические колебания. Скорость и ускорение гармонического колебательного движения точки. Метод векторных диаграмм.

Колебания - процессы, в которых одна или несколько основных физических величин является периодическими или почти периодическими функциями времени.

$$f(t+T) = f(t)$$

T - период колебаний.

Гармонические колебания - происходящие по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t+\bar{\varphi}),\quad \bar{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$A>0$ - амплитуда колебания - максимальное значение колеблющейся величины

$\sin(\omega t+\varphi) = 1$ X достигает максимального значения A.

$X_{max} = A$

Период - время одного полного колебания

частота - число колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Фаза - величина $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, характеризует ~~фазу~~ стадию колебания.

φ - начальная фаза, значение фазы в начальный ~~[illegible]~~ момент времени.

Скорость и ускорение

Пусть материальная точка совершает гармоническое колебание вдоль Ox, ее координата изменяется по гармоническому закону.

Пусть $\varphi = 0$, $x(t) = A\sin\omega t$.

Скорость и ускорение направлены вдоль Ox.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A\sin\omega t)}{dt} = A\omega\cos\omega t.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(A\omega\cos\omega t)}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Выразим в первой формуле cos через sin, а во второй (-sin) через sin.

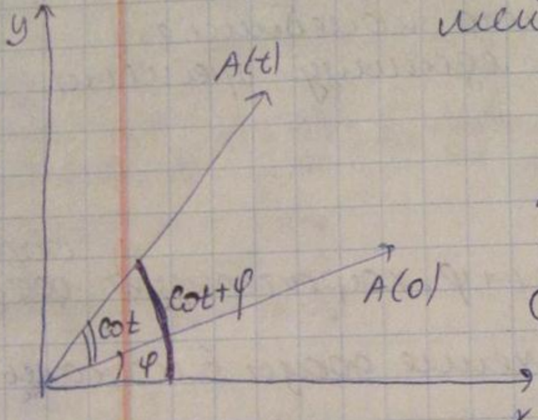
$v_x = A\omega\sin(\omega t + \pi/2)$ Амплитуды: $A\omega = v_{x_0}$

$a_x = A\omega^2\sin(\omega t + \pi)$ $A\omega^2 = a_{x_0}$

Т.е. скорость и ускорение тоже меняются по гармоническому закону с той же частотой, но с разными амплитудами. Начальные фазы скорости $\pi/2$, ускорения π, т.е. скорость опережает координату по фазе на $\pi/2$, а ускорение - в противофазе с координатой.

Векторная диаграмма

Рассмотрим вектор A, равномерно движущийся в плоскости XOY с постоянной угловой скоростью ω. За время t он повернется на угол ωt и будет составлять с направлением оси Ox угол $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, φ - угол, характеризующий положение вектора в начальный момент $t = 0$.



Тогда проекции вектора будут меняться по гармоническому закону:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

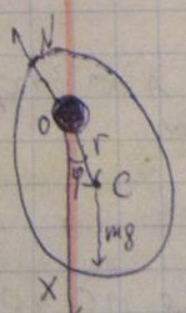
Амплитуда - модуль вектора A

Круговая частота - угловая скорость

Фаза - угол, который вектор A составляет с Ox.

Билет N 21. Физический и математический маятники.

- Физический маятник - твердое тело, которое может свободно вращаться относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести тела.



Уравнение его движения - уравнение моментов в проекции на ось вращения Oz:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_i M_{iz}$$

I - момент инерции маятника относительно оси вращения

$\sum M_{iz}$ - сумма проекций моментов сил относительно Oz на Oz.

Oz - на меня направлена

Силы:

· Сила тяжести Mg

· Сила реакции N оси, на которую насажен маятник.

Силами трения пренебрегаем.

Момент силы N равен 0, т.к. она направлена радиально от оси вращения

$M = [r, mg]$ — суммарный момент сил

Его проекция на O_z: $M_z = -mgr\sin\varphi$

т.е. ур-е движения $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr\sin\varphi$.

Пусть φ мал настолько, что $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда

$$M_z = -(mgr)\varphi;$$

$$I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr\varphi; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{I}\varphi = 0.$$

решение этого ур-я: $\varphi(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$,

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$

т.е. малые колебания физического маятника являются гармоническими.

Круговая частота зависит от массы маятника m, его момента инерции I и от расстояния r между осью вращения и центром тяжести маятника.

Амплитуда A и начальная фаза α определяются через начальные данные.

– Математический маятник – тело, подвешенное на невесомой нити, если размеры тела пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити.

Можно рассматривать как частный случай физического, у которого, как у материальной точки, момент инерции $I = ml^2$, l – длина нити.

Круговая частота колебания математического маятника: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Всякому физическому маятнику можно сопоставить математический, имеющий одинаковую с ним круговую частоту собственных колебаний ω_0

Длина нити $l_{пр}$ такого мат. маятника – приведенная длина физ. маятника:

$$l_{пр} = \frac{g}{\omega_0^2}$$

Билет № 22. Динамика колебаний груза на пружине. Уравнение свободных незатухающих колебаний и его решение с учетом произвольных начальных условий. Энергия свободных колебаний.

Рассмотрим тело массой m, прикрепленное к концу упругой невесомой пружины жесткостью k, другой конец которой закреплен неподвижно. Тело лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Начало отсчета в центре масс тела в положении равновесия.

Запишем II закон Ньютона в проекции на Ox: на тело действует упругая сила $F_x = -kx$ (сила тяжести и сила реакции опоры проекций на Ox не имеют).

Уравнение движения: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

или $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. пусть $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Такие ур-я решаются подстановкой $x(t) = e^{\lambda t}$.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$ характеристическое ур-е.

Оно имеет мнимые корни:

$$\lambda_1 = +i\omega_0; \quad \lambda_2 = -i\omega_0$$

Поэтому общее решение ур-я имеет вид

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t},$$

C_1 и C_2 – комплексные постоянные.

Чтобы сделать из комплексной ф-ии вещественную, мы приравниваем комплексное выражение к его комплексно сопряженному:

$$C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

При $C_1 = C_2^*$ и $C_2 = C_1^*$ это соотношение будет выполнено.

Этому условию удовлетворяют $c_1 = \frac{a}{2} e^{i\alpha}$

Подставим их в наше решение: $c_2 = \frac{a}{2} e^{-i\alpha}$

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{i(\omega_0 t+\alpha)} + e^{-i(\omega_0 t+\alpha)}\right) = a\cos(\omega_0 t+\alpha)$$

Общее решение ур-я: $x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$

Т.е. решением уравнения движения является гармоническое колебание - типичный пример свободных колебаний.

При отсутствии сил трения уравнение движения пружинного маятника является уравнением свободных незатухающих колебаний.

Полная энергия гармонического колебания ~~ко~~ (незатухающего) постоянна.

В момент наибольшего отклонения от равновесия полная энергия E состоит только из потенциальной: $E = U_{max} = \frac{ka^2}{2}$ U - потенциальная энергия

В момент прохождения точки равновесия полная энергия состоит только из кинетической

$$E = E_{k\,max} = \frac{m\vartheta^2_{max}}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (\omega_0 a = \vartheta).$$

Причем $\frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}$, т.к. $m\omega_0^2 = k$.

Изменение соотношения кинетич. и потенц. энергии

Кинетическая: $E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\alpha)$.

потенциальная: $U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\alpha)$.

Т.к. $m\omega_0^2 = k$ и $E = E_k + U$, то

$$E = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}.$$

Т.е. полная энергия свободных колебаний постоянна.

E_k и U изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. в 2 раза превышающей частоту гармонического колебания.

Билет № 23. Затухающие колебания. Декремент затухания.

Силы трения или сопротивление обуславливают постепенное затухание колебаний.

Н-р, при наличии силы вязкого трения

$$F_x = -b\frac{dx}{dt};$$ b - коэф. вязкого трения.

Рассмотрим ур-е движения пружинного маятника с учетом силы вязкого трения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}.$$

Пусть $\beta = \frac{b}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

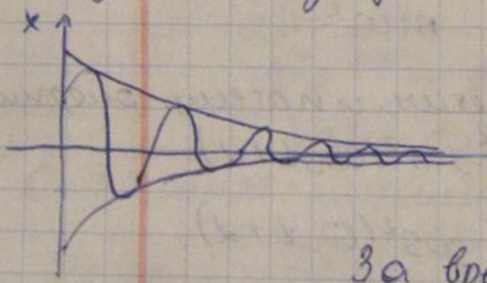
Общее решение: $x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$,

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta}$; A и φ - произвольные постоянные.

При малом β $(\beta \ll \omega_0)$

$A(t) = Ae^{-\beta t}$ - медленно убывающая со временем амплитуда.

Тогда это - затухающие колебания.



β - коэффициент затухания прямо пропорционален коэффициенту b вязкого трения и обратно пропорционален массе m тела - проявление инертных свойств тела.

За время $1/\beta$ амплитуда уменьшится в e раз.

Декремент затухания Δ показывает, во сколько раз убывает амплитуда колебаний за время $\tau = T$, равное периоду колебаний:

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания -

$$\delta = \ln\Delta = \beta T.$$

$\delta = \frac{\Delta A}{A}$; ΔA - убыль амплитуды за период колебаний.

Логарифмический декремент затухания равен относительной убыли амплитуды за период колебаний.

С ростом коэф. трения колебания затухают быстрее, уменьшается их круговая частота. Начиная с некоторого b критического тело, выведенное из положения равновесия, асимптотически приближается к равновесию, либо вообще его не достигая, либо проходя 1 раз.

Закон изменения энергии для затухающих колебаний:

$$\Delta(W_к + W_п) = \delta A_{тр};$$

$\Delta(W_к + W_п) < 0$, т.к. $\delta A_{тр} < 0$, т.к. ~~Атр~~ силы трения направлены против скорости.

Полная механическая энергия постепенно убывает, переходя в тепловую.

Билет № 24. Вынужденные колебания. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Закон сохранения энергии при установившихся вынужденных колебаниях.

Вынужденные колебания происходят под действием некой вынуждающей силы, периодически действующей на систему и изменяющейся по периодическому закону.

Уравнение движения для вынужденных колебаний записывается так:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$-kx$ - сила упругости

$-r\dot{x}$ - сила сопротивления (или трения)

$F_0 \cos \omega t$ - внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону.

Пусть $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$, тогда

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Уравнение вынужденных колебаний.

β - коэффициент затухания
ω_0 - собственная частота системы
ω - частота силы

Это ур-е - неоднородное. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного ур-я и частного решения неоднородного.

Общее решение однородного ур-я, как решение ур-я затухающих колебаний:

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha)$$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; a_0 и α - произвольные постоянные.

Частное решение можно найти методом векторной диаграммы.

Пусть частное решение имеет вид

$$x = a\cos(\omega t - \varphi),$$

тогда $\dot{x} = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \omega a\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$;

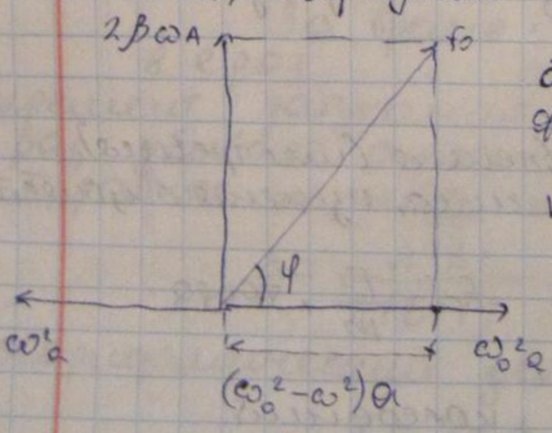
$$\ddot{x} = -\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a\cos(\omega t - \varphi + \pi).$$

Теперь мы это все подставим в исходное ур-е движения:

$$\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega a\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + \omega_0^2 a\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cos\omega t.$$

А значит, постоянные a и φ (амплитуда и начальная фаза) должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $f_0\cos\omega t$ была равна сумме первых трех гармонических функций.

Если представить ф-ию $\omega_0^2 a\cos(\omega t - \varphi)$ вектором длины $\omega_0^2 a$, направленным вправо, то функция $2\beta a\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ будет вектором длины $2\beta\omega a$, повернутым на угол $\pi/2$, а $\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi + \pi)$ - вектор длины $\omega^2 a$, повернутым на угол π.



Сумма этих трех векторов будет совпадать с вектором ф-ии $f_0\cos\omega t$.

А это выполняется только при амплитуде a, определяющейся условием:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_0^2;$$

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

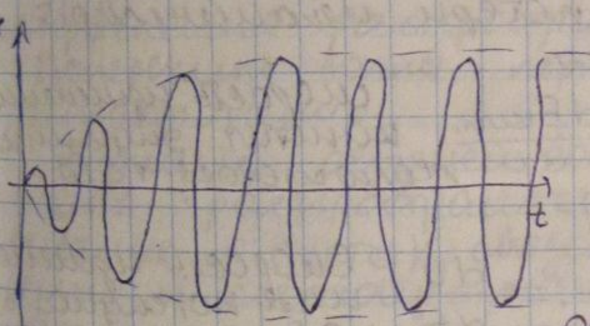
а $tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. φ – величина отставания по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы.

a и φ характеризуют решение ур-я вынужденных колебаний.

Поэтому a – амплитудная характеристика вынужденного колебания, а φ – фазовая.

Подставив значения a и φ в исходное частное решение, мы получим решение ур-я вынужденных колебаний (частное), а прибавив к нему общее – получим общее

~~Общее реш.~~ Слагаемое $a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t+\alpha)$ играет роль только в начале колебаний – установлении колебаний. А потом оно уменьшается настолько, что им можно пренебречь.



Амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. При некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда достигает максимального значения. При этой частоте система оказывается наиболее отзывчивой на действие вынуждающей силы, такое явление – резонанс. А соответствующая частота – резонансная.

Найдем $\omega_{рез}$ – резонансную частоту. Для этого найдем максимум функции, характеризующей амплитуду:

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

т. е. минимум ф-ии $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$.

Продифференцируем это по ω и приравняем к 0.

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

$\omega = 0$ $\quad \omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

0 не подходит для знаменателя, отрицательное не имеет физического смысла

т. е.

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Отсюда $a = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

при отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда бы обращалась в бесконечность.

Энергия вынужденных колебаний.

Если записать ур-е вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{x} = a, \quad \dot{x} = \vartheta$$

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta\vartheta + f_0\cos\omega t$$

Умножим на скорость:

$$a\cdot\vartheta = -\omega_0^2 x\cdot\vartheta - 2\beta\cdot\vartheta\cdot\vartheta + f_0\cos\omega t\cdot\vartheta$$

и запишем в виде:

$$f_0\cos\omega t\cdot\vartheta = a\cdot\vartheta + \omega_0^2 x\cdot\vartheta + 2\beta\vartheta\cdot\vartheta$$

поскольку мощность - произведение силы, скорости и косинуса угла между вектором силы и скорости, то:

$f_0\cos\omega t\cdot\vartheta(t)$ - мощность, развиваемая внешней вынуждающей силой;

$2\beta\vartheta\cdot\vartheta = F_{сопр.}(t)\cdot\vartheta(t) = P_{потерь}(t)$ - мощность силы сопротивления, описывает потери механической энергии в единицу времени.

$$a(t)\cdot\vartheta(t) = \vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\frac{\vartheta^2}{2}}{dt} = \frac{dE_{кин.}}{dt}$$ скорость изменения кинетич. энергии колеблющегося тела.

$$\omega_0^2 x\cdot\vartheta = \omega_0^2 x\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right)}{dt} = \frac{dU}{dt}$$ Скорость изменения потенциальной энергии системы (мощность силы упругости).

Но мощность - это изменение энергии в единицу времени. Тогда, умножив на dt, получим:

$$\Delta E_{внешн.} = \Delta(E_к + U) + E_{потерь}.$$

т.е. энергия, полученная системой в рез-те работы внешней силы, расходуется на увеличение механической энергии системы и работу против сил сопротивления ($E_{потер.}$ - потерянная механическая энергия). Работа внешней силы за период колебаний равна работе против силы сопротивления.

Вся энергия, поступающая в систему, превращается в теплоту.

Механические волны.

Билет №25 Волновое движение. Распределение (поле) возмущений. Волновое уравнение (в частных производных) для одномерного случая. Продольные и поперечные волны. Плоская монохроматическая волна.

Изменение некоторой физической величины в какой-либо области пространства (возмущение) не остается локализованным, а начинает распространяться с характерной для данных условий скоростью - возникает бегущая волна.

Возмущение ξ - функция пространственных координат и времени: $\xi = \xi(x; y; z; t)$ - ф-ия, описывающая поле возмущений. Дает полную информацию о волне, определяя значение возмущения в любой точке пространства в любой момент времени.

Продольные волны - возмущения направлены вдоль направления распространения волнового процесса.

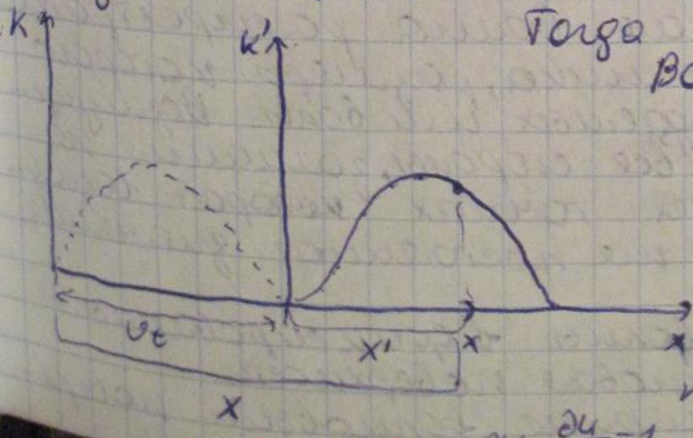
Поперечные волны - перпендикулярно направлению распространения.

Формула бегущей волны.

Волна распространяется по прямой линии; в системе отсчета K, связанной с началом возбуждения, и остающейся неподвижной, $\xi = \xi(x, t)$.

Возмущение распространяется прямолинейно со скоростью υ. Пусть есть система отсчета K', которая в начальный момент времени совпадает с K, а потом движется вместе с волной со скоростью υ. В K' возмущение не зависит от времени: $\xi' = f(x')$.

Тогда $x' = x - \upsilon t$.



Тогда $\xi = f(x - \upsilon t)$.

Волновое уравнение

$\xi = f(x - \upsilon t)$ - сложная ф-ия двух переменных:

$\xi = f(x - \upsilon t) = f[u(x, t)]$,

где $u(x, t) = x - \upsilon t$.

Найдем ее частные производные по x и t

при $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = -\upsilon$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\right) = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}.$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = (-\vartheta)\frac{df}{du}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\vartheta\frac{df}{du}\right) =$$

$$= -\vartheta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\xi}{du}\right) = -\vartheta\frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \vartheta^2\frac{d^2 f}{du^2}.$$

т. е. $\dfrac{\partial^2 \xi}{dx^2} = \dfrac{d^2 f}{du^2}$ и $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \vartheta^2 \dfrac{d^2 f}{du^2}$,

и $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\vartheta^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$; или $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\vartheta^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$.

волновое дифференциальное уравнение.

Монохроматические волны – представляют собой распространение гармонических колебаний. Поэтому $\xi(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)$ или $\xi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$.

Длина волны λ – путь, который проходит возмущение (состояние с определенной фазой) за время, равное периоду колебаний T:

$$\lambda = \vartheta T.$$

Волновое число k обратно длине волны.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Пусть монохроматическая волна распространяется от точечного источника, размеры которого меньше длины порождаемых им волн. Возмущение распространяется во все стороны, занимая некоторую поверхность, во всех точках которой возмущение имеет одно и то же постоянное значение фазы – фронт волны.

Положение фронта волны в фиксированный момент времени – волновая поверхность.

Линии, перпендикулярные волновым поверх-

постям - лучи.
Сферическая волна - волна со сферическим фронтом. Ее волновые поверхности - концентрические сферы, лучи - радиальные прямые.
Волна, у которой фронт является плоскостью - плоская волна. Лучи параллельны, возмущения распространяются одинаково вдоль всех лучей, зависят только от координаты x и от времени.
Описываются формулой:

$$\xi(x,t) = A\sin(\omega t - kx).$$

Молекулярная физика.

1. Кинетическая теория.

Билет №26. Одномерная модель случайных блужданий.

Рассмотрим одномерные (вдоль оси X) случайные движения частицы.

- За один шаг - смещение на расстояние h от своего положения
- Сдвиг в полож. направл. имеет вероятность p
- Сдвиг в отриц. направл. имеет вероятность $q = 1-p$.

Найдем величину смещения частицы за N шагов:
Смещение за 1 шаг - случайная величина ξ, принимающая значение $+h$ и $-h$.
При $\xi = +h$ - метка в правый ящик
При $\xi = -h$ - в левый ящик.
За N шагов - n меток в правом, $N-n$ - в левом.

$$x = n\cdot h + (N-n)\cdot(-h) = (2n - N)h;$$

$$\overline{x} = (2\overline{n} - N)h;$$

$$\overline{x^2} = \overline{(2n-N)^2}h^2 = (N^2 - 4N\overline{n} + 4\overline{n^2})h^2.$$

Но это же биномиальное распределение, и отсюда $\overline{n} = M(\xi) = Np$; $\overline{n^2} - (\overline{n})^2 = D(\xi) = Np(1-p)$.
Тогда $\overline{x} = (2\overline{n} - N)h = (2Np - N)h = (2p-1)Nh;$

$$\overline{x^2} = (N^2 - 4N\overline{n} + 4\overline{n^2})h^2 =$$

$= (N^2 - 4N\bar{n} + 4Np(1-p) + 4(\bar{n})^2) h^2 =$

$(\bar{n^2} - (\bar{n})^2 = Np(1-p))$

$= (N^2 + 4Np(1-p) - 4N\bar{n} + 4(\bar{n})^2) h^2 = \ldots$

$= -4N\bar{n} + 4(\bar{n})^2 = 4(\bar{n})^2 - 4N\bar{n} = 4((\bar{n})^2 - 4N\bar{n});$

$\bar{n^2} - (\bar{n})^2 = Np(1-p),$

$\bar{n^2} = Np(1-p) + (\bar{n})^2$

$N\bar{n^2} = (N^2 p(1-p) + (\bar{n})^2) \cdot N,$

$\bar{x_2} = (N^2 - 4N^2 p + 4N^2 p^2 + 4Np(1-p)) h^2.$

(вместо $\bar{n^2}$ мы подставили $Np(1-p) + (\bar{n})^2$, а вместо $\bar{n}$ - Np.

Пусть шаги влево и вправо равновероятны, тогда $p = \frac{1}{2}$, и

$\bar{x} = 0; \quad \bar{x^2} = Nh^2.$

Среднее смещение частицы обращается в нуль. Если промежуток времени между двумя последовательными шагами будет τ, то N шагов будут сделаны за время $t = N\tau$, и если $D = \frac{h^2}{2\tau}$, то получим закон случайного блуждания:

$\bar{x^2} = 2Dt.$

Билет №27. Основное ур-е молекулярно-кинетической теории газов.

Молекулярно-кинетическая теория:
- Все тела состоят из атомов, молекул или ионов
- Частицы находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении
- Частицы взаимодействуют друг с другом путем абсолютно упругих столкновений

Основные доказательства:
- Диффузия
- Броуновское движение
- Изменение агрегатных состояний в-ва

Пусть имеется кубический сосуд с ребром длиной l, и в нем 1 частица массой m, скорость ее движения ϑ_x. Перед столкновением со стенкой сосуда импульс частицы равен $m\vartheta_x$, после $-m\vartheta_x$. Поэтому стенке передается импульс $p = 2m\vartheta_x$.
Время, через которое частица сталкивается с одной и той же стенкой — $t = \frac{2l}{\vartheta_x}$.

Отсюда $F_x = \frac{p}{t} = \frac{2m\vartheta_x^2}{2l}$.

Поскольку давление $p = F/S$, то $F = p\cdot S$,
и тогда $P_x \cdot S = \frac{m\vartheta_x^2}{l}$; $P_x = \frac{m\vartheta_x^2}{lS}$.

Но $V_{сосуда} = Sl$, тогда

$$P_x = \frac{m\vartheta_x^2}{V}, \quad и \quad P_y = \frac{m\vartheta_y^2}{V}, \quad и \quad P_z = \frac{m\vartheta_z^2}{V}$$

Т.е. $P_x = N\frac{m\vartheta_x^2}{V}$ Но $\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2$;

$$\bar{\vartheta}_x^2 = \bar{\vartheta}_y^2 = \bar{\vartheta}_z^2 = \frac{1}{3}\bar{\vartheta}^2.$$

Все направления движения молекул равновероятны.

Отсюда $P_x = P_y = P_z = P = \frac{Nm\bar{\vartheta}^2}{3V}$, или $PV = \frac{N}{3}m\bar{\vartheta}^2 = \frac{N\cdot 2}{3}\frac{m\bar{\vartheta}^2}{2}$.

Но $E_k = \frac{m\bar{\vartheta}^2}{2}$ среднее значение кинетической энергии молекул.

$PV = \frac{2}{3}NE_k = \nu RT$; $\nu = \frac{N}{N_A}$; $R = N_A \cdot k$, т.е.

$$E_k = \frac{3}{2}kT$$

k – постоянная Больцмана
T – температура

Билет № 28. Распределение молекул идеального газа по скоростям – распределение Максвелла. Св-ва ф-ии распределения.