УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С892

Высшая математика и ее приложения к биологии

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *Г. И. Архипов* (Математический институт РАН им. В. А. Стеклова);
кандидат физико-математических наук, доцент *А. Б. Плаченов* (Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет))

Сударев Ю. Н.

С892 Основы линейной алгебры и математического анализа : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Ю. Н. Сударев, Т. В. Першикова, Т. В. Радославова. — М. : Издательский центр «Академия», 2009. — 352 с. — (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к биологии).

ISBN 978-5-7695-4645-7

В учебное пособие включен материал по основным разделам курса высшей математики (аналитической геометрии, линейной алгебры и основам математического анализа). Отдельные главы и подразделы пособия содержат материал повышенной сложности, предназначенный для студентов, обучающихся по специальности «Биофизика».

Для студентов биологических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе лекций по математике, которые читались в течение нескольких десятков лет вначале на биолого-почвенном, а затем на биологическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В нем представлены все основные разделы математики, необходимые студенту-биологу как для последующего изучения более сложных математических вопросов, так и для усвоения таких дисциплин, как физика и физическая химия.

В учебном пособии изложены основы аналитической геометрии и линейной алгебры, основы математического анализа, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких действительных переменных, интегральное исчисление, теория дифференциальных уравнений и теория рядов. Некоторые из этих разделов (они отмечены звездочкой) предназначены для студентов, изучающих углубленный курс математики, например, для тех, кто специализируется в области биофизики.

В книге даны некоторые примеры применения математики к биологии (например, модель роста деревьев, задача о «хищнике и жертве» и др.).

Из чисто математических новшеств отметим формулировку критерия Лебега интегрируемости функции по Риману (см. гл. 6), который обычно не включают в математические курсы естественных факультетов, считая его слишком сложным для тех, кто не специализируется в области математики. Однако, как показал многолетний опыт, этот критерий в том виде, как он здесь изложен, успешно усваивается студентами-биологами и позволяет легко доказать ряд важных теорем об интегрируемости функций, которые в противном случае пришлось бы формулировать без доказательства.

Главы 1 и 2 написаны Т. В. Радославовой; гл. 8 и 9 — Т. В. Першиковой; гл. 3—7 — Ю. Н. Сударевым.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Матрицы и действия с ними

Определение 1.1. *Матрицей размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел из m строк и n столбцов. Числа, из которых состоит матрица, будем называть элементами матрицы и нумеровать двумя индексами, первый из которых означает номер строки, в которой стоит элемент, а второй — номер столбца. Квадратные матрицы размера $n \times n$ будем называть матрицами порядка n.

Таким образом, матрица A это набор $m \times n$ чисел $(a_{i,j})$, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Запятую между индексами можно опускать там, где это не вызывает недоразумений. Например, $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица размера 2×3 с элементами $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 4$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 2$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(0, 0, 0, 0)$, (0) — нулевые матрицы размеров 2×2, 3×1, 1×4 , 1×1 соответственно.

Определение 1.2. Две матрицы A и B одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если равны все их соответствующие элементы, т. е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$.

Матрицы можно складывать и умножать на число.

Определение 1.3. *Суммой* $A + B$ двух матриц одинакового размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{1.1}$$

для любых $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$.

Упражнение 1.1. Докажите, что сложение матриц по формуле (1.1) *коммутативно*, т. е. $A + B = B + A$ для любых матриц A и B размера $m \times n$, и *ассоциативно*, т. е. $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых матриц A, B, C одинакового размера $m \times n$.

Определение 1.4. *Произведением* λA матрицы A на число λ называется матрица C, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \tag{1.2}$$

для любых $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Упражнение 1.2. Докажите, что умножение матриц на число по формуле (1.2) обладает свойством $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$ и имеет место *дистрибутивность* двух видов:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A;$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

для любых чисел λ_1, λ_2, λ и матриц A, B одинакового размера $m \times n$.

Матрицы можно перемножать, если их размеры таковы, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Определение 1.5. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times k$ и $k \times n$ соответственно. Произведением AB этих матриц называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}, \tag{1.3}$$

для любых $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Здесь для обозначения суммы использован знак $\sum$. Когда l «пробегает» значения от 1 до k, выражение $a_{il}b_{lj}$ под знаком суммы принимает поочередно значения всех слагаемых.

Пример 1.1. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 4 & -30 \end{pmatrix}$. Здесь A — матрица размера 2×3; B — матрица размера 3×2; $C = AB$ — квадратная матрица порядка 2. Чтобы узнать, например, элемент c_{21}, нужно, согласно формуле (1.3), почленно перемножить соответствующие элементы, стоящие во второй строке матрицы A и в первом столбце матрицы B, а затем сложить получившиеся произведения:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -4(-1) + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 4.$$

Заметим, что умножение матриц, определяемое формулой (1.3), обладает свойствами *ассоциативности*, т. е. $(AB)C = A(BC)$, и *дистрибутивности*, т. е. $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$. Эти свойства легко проверить для матриц малого размера.

Пример 1.2. Проверим свойство дистрибутивности для квадратных матриц второго порядка. Обозначим $D = (A+B)C$ и $F = AC + BC$. Тогда для $i, j = 1, 2$ по формулам (1.1) и (1.3)

$$d_{ij} = (a_{i1} + b_{i1})c_{1j} + (a_{i2} + b_{i2})c_{2j} = a_{i1}c_{1j} + b_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + b_{i2}c_{2j};$$

$$f_{ij} = (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j}) + (b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j}) = d_{ij},$$

и формула $(A+B)C = AC + BC$ доказана.

Упражнение 1.3. Докажите, что умножение матриц порядка 2 обладает свойством ассоциативности.

Однако *коммутативность при умножении матриц не имеет места.*

Для доказательства последнего утверждения достаточно привести следующий пример.

Пример 1.3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда по (1.3)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

т. е. $AB \neq BA$, и коммутативность умножения матриц не имеет места.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, т. е. n — *натуральное число*, и $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Говорят, что элементы a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ образуют *главную диагональ* матрицы. Вторая диагональ квадратной матрицы называется *побочной*.

Определение 1.6. Квадратная матрица

$$E = (e_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

главная диагональ которой состоит из единиц, а все остальные элементы суть нули, называется *единичной матрицей.*

Таким образом, для единичной матрицы $e_{ii} = 1$, если $i = 1, \ldots, n$; $e_{ij} = 0$ для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, если $i \neq j$.

Легко убедиться, что

$$AE = EA = A \tag{1.4}$$

для любой матрицы A порядка n.

Упражнение 1.4. Проверьте равенства (1.4) для $n = 2$.

Кроме того, если еще какая-нибудь матрица C обладает таким же свойством $AC = CA = A$, то $C = CE = E$, т. е. *единичная матрица единственна.*

Определение 1.7. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{1.5}$$

Обратная матрица существует не для всякой квадратной матрицы порядка n (случаи существования обратных матриц будут рассмотрены в подразд. 1.2).

Заметим, что если для матрицы A существует обратная матрица, то она единственна. Действительно, если наряду с (1.5) выполняется

$$CA = AC = E$$

для некоторой матрицы C, то $C = CE = C(AA^{-1}) = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$ и, значит, *обратная матрица единственна.*

Определение 1.8. Матрица A^T, которая получается из матрицы A, если в ней поменять местами строки и столбцы с одинаковыми номерами, называется *транспонированной* к матрице A, т. е.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. (*Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии.*) Предположим, что m человек заболели заразной болезнью. Обследуется вторая группа из n человек. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ — матрицу контактов первого порядка первой группы больных из m человек со второй группой из n человек; $a_{ij} = 1$, если j-й человек из второй группы контактировал с i-м человеком из первой группы.

Рассмотрим контакты еще одной, третьей, группы из s человек с людьми из второй группы. Пусть $B = (b_{kl})$ — соответствующая матрица контактов первого порядка между второй и третьей группой.

Непрямые контакты, или контакты второго порядка между больными из первой группы и людьми из третьей группы, описываются с помощью матрицы

$$C = AB;$$

$c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ дает число контактов второго порядка между i-м больным из первой группы и j-м человеком из третьей группы. Действительно, слагаемое $a_{ik}b_{kj}$ этой суммы равно единице только если $a_{ik} = 1$ и $b_{kj} = 1$, т.е. если были прямые контакты i-го больного с k-м человеком из второй группы и затем этого k-го человека из второй группы с j-м из третьей. Это означает, что был непрямой контакт между i-м больным и j-м человеком из третьей группы. Просуммировав все выражения вида $a_{ik}b_{kj}$ по k от 1 до n, получим число всех непрямых контактов между i-м больным и j-м человеком из третьей группы.

Например, пусть $m = 3$, $n = 6$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица контактов первого порядка между первой и второй группой. Пусть также $s = 7$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица контактов первого порядка между второй и третьей группой. Тогда $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица контактов второго порядка между первой группой больных и третьей группой. Так, $c_{3,1} = 2$ показывает, что имелись два контакта второго порядка между третьим больным и первым человеком из третьей группы (через 3-го и 6-го из второй); $c_{1,1} = 1$ — у первого человека из третьей группы был один непрямой контакт с первым больным (через 3-го человека из второй группы), а всего у первого человека из третьей группы было $1 + 2 = 3$ непрямых контакта с больными из первой группы. У пятого человека из третьей группы контактов с больными из первой группы не было.

Пример 1.5. Рассмотрим весьма распространенную схему применения матриц.

Пусть Y — некоторое множество из N элементов и $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — его разбиение на n групп из $N_1, N_2, \dots, N_n$ элементов соответственно. Рассмотрим вектор-столбец (т.е. матрицу, состоящую из одного столбца) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $x_i = \dfrac{N_i}{N}$ — доля i-й группы во всем множестве. Ясно, что $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Назовем вектор x *вектором распределения* соответствующего разбиения. Например, если Y — некоторая популяция и $N_1, N_2, \dots, N_n$ — разбиение популяции по некоторому признаку (например, по цвету глаз), то $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ может быть назван *вектором распределения генотипа по данному признаку.*

Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 есть вектор распределения $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, а в некоторый следующий момент t_1 вектор распределения $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}$. В качестве t_1 может быть выбран момент, когда сформируется следующее поколение, и тогда x^1 — распределение генотипа следующего поколения.

Пусть известен закон, по которому компоненты вектора x^1 получаются из x^0 следующим образом:

$$x_1^1 = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0;$$
$$x_2^1 = a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^1 = a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \ldots + a_{nn}x_n^0.$$

Матрицу $A = (a_{ij})$ будем называть *матрицей перехода* к следующему состоянию множества Y. В случае популяции a_{ij} может иметь следующий смысл: a_{ij} есть доля потомства i-й группы предыдущего поколения, попавшего в j-ю группу разбиения по заданному признаку в следующем поколении. Ясно, что $0 \le a_{ij} \le 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, можно записать в матричном виде $x^1 = Ax^0$.

Пусть вектор распределения в следующий момент t_2 получается из x^1 по тому же закону: $x^2 = Ax^1 = AAx^0 = A^2x^0$, и так же в каждый следующий момент: $x^3 = Ax^2 = AA^2x^0 = A^3x^0$, и так далее, $x^k = A^kx^0$. Исследуя свойства матрицы A, можно сделать некоторые выводы относительно распределения x. Так, в примере 2.24 исследуется вопрос о *стационарном распределении* (см. подразд. 2.4).

1.2. Определители и их свойства

Каждой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие некоторое число, которое называется определителем матрицы и обозначается $\det A$ или $|A|$. Здесь рассмотрим определители матриц порядка $n = 2$ и $n = 3$.

Определение 1.9. *Определителем матрицы* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *второго порядка* называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (1.6)$$

Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *третьего порядка* называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \qquad (1.7)$$

Замечание. Определители матриц произвольного порядка n будут рассмотрены в гл. 2.3. Здесь сформулируем свойства определителей, верные и для определителей произвольного порядка n. Для $n = 2, 3$ эти свойства легко проверяются исходя из определения, что и предлагается далее читателю проделать самостоятельно.

Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы определитель не меняется, т. е. $|A| = |A^T|$.

2. При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на какое-нибудь число λ на это же число умножается и определитель.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\lambda a_{22} - a_{21}\lambda a_{12} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

3. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) матрицы A представляется в виде суммы двух слагаемых, то определитель матрицы A равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых в соответствующем столбце (строке) стоят первые слагаемые, а во второй — вторые.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\beta_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\beta_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+\beta_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \beta_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \beta_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Если какая-нибудь строка или столбец матрицы состоит из нулей, то определитель матрицы равен нулю.

5. При перестановке двух каких-либо строк (столбцов) матрицы определитель меняет знак, а по абсолютному значению не меняется.

6. Если в матрице имеются две одинаковые строки (столбца), то определитель равен нулю.

7. Если к элементам некоторой строки (столбца) матрицы почленно прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-нибудь число λ, то значение определителя не изменится.

Упражнение 1.5. Проверьте свойства $1-7$ для квадратных матриц порядка $n = 2$ и $n = 3$.

Пример 1.6. Докажем, например, свойство 5 для определителя 2-го порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если переставить строки в матрице A, то определитель получившейся матрицы равен

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -|A|.$$

Определение 1.10. Пусть (a_{ij}) — элемент матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка n, где $i, j = 1, \ldots, n$. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель порядка $n-1$ матрицы, которая получается из A вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит этот элемент a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (1.8)$$

т. е. A_{ij} — это минор M_{ij}, взятый с определенным знаком, зависящим от номера строки i и номера столбца j, в которых стоит элемент a_{ij}.

Теперь можно сформулировать еще два свойства определителей.

8. Пусть $i(j)$ — номер строки (столбца) матрицы A, где $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда определитель этой матрицы равен сумме произведений элементов, стоящих в i-й строке (j-м столбце), умноженных на их алгебраические дополнения, т. е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad (1.9)$$

— разложение определителя по i-й строке, и

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad (1.10)$$

— разложение определителя по j-му столбцу.

Например для $n = 3$, $i = 1$ из (1.9) и (1.8) получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

9. Сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки (столбца) равна нулю, т. е.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0; \qquad (1.11)$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0 \qquad (1.12)$$

для любых $i, j, k = 1, \ldots, n$, $i \neq k$ и $j \neq k$.

Свойства $1-8$ позволяют вычислять определители, предварительно преобразуя матрицы к более простому виду.

Пример 1.7. Вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Вычитая из третьей строки вторую, затем из второй первую и применяя свойство 6, получим $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1.8.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -13 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -13 & 1 \\ -11 & -2 \end{vmatrix} = 2[(-13)(-2) - (-11)1] = 2 \cdot 37 = 74.$$

Здесь мы вынесли 2 из третьей строки; вычли из первой строки третью, умноженную на 4, и вычли из второй строки третью. Затем разложили определитель по первому столбцу и вычислили получившийся определитель по формуле (1.6).

Пример 1.9. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$. Здесь все слагаемые, кроме первого, в формуле (1.7) равны нулю. Таким образом, *определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.*

Пример 1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -16 - (-5) = -11$. Здесь мы разложили определитель по элементам первой строки.

Пример 1.11. $D = |A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ можно вычислить, разложив по первой строке. По свойству 8 имеем

$$D = (-5)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 74 - (-15) - 4(-31) - 33 = -370 + 15 + 124 - 33 = -264.$$

Пример 1.12. $|E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$. Здесь для вычисления определителя применили формулу (1.9) $n-3$ раза (можно было также использовать формулу (1.10) и формулу (1.7) из определения 1.9).

Пример 1.13. Проверим свойство 9, именно формулу (1.11) для определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $i = 2$, $k = 1$.

Имеем

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 10 - 15 = 0.$$

Аналогично проверяется формула (1.12).

Теорема 1.1. Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей, т. е.

$$|AB| = |A||B|. \tag{1.13}$$

Для доказательства в случае $n = 2$ или $n = 3$ достаточно вычислить левые и правые части выражения (1.13) и убедиться в их равенстве. Теорема верна и в общем случае.

Упражнение 1.6. Проверьте равенство (1.13) для матриц порядка 2.

Определение 1.11. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $|A| \neq 0$, и вырожденной, если $|A| = 0$.

Теорема 1.2. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырожденная. При этом обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^T, \tag{1.14}$$

где A_{ij} — матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A, и $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Доказательство. Пусть матрица A имеет обратную. Так как $|E| = 1$ и по теореме 1.1 $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$, то $|A| \neq 0$ и матрица A невырожденная, и, очевидно, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Обозначим $B = \dfrac{1}{|A|}(A_{ij})^T$ и $C = AB$. Покажем, что $C = E$, это и будет означать, что $B = A^{-1}$. Используя свойства 8 и 9, получим

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

т. е. $C = E$ и формула (1.14) доказана. ■

Пример 1.14. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $|A| = -4$, по формулам (1.14), (1.8)

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1 & -3/4 & 3/4 \\ 1 & 5/4 & -1/4 \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.3. Системы линейных уравнений

Исторически понятие определителя возникло при решении системы линейных уравнений. Рассмотрим для примера систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Умножим первое уравнение на a_{22}, второе на a_{12} и вычтем из первого второе. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = (b_1a_{22} - b_2a_{12})$. Аналогично, умножив первое уравнение на a_{21}, а второе — на a_{11} и вычитая, получим $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)$. Таким образом,

$$|A|x = |A_1|; \quad |A|y = |A_2|, \tag{1.16}$$

где $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Матрица A — матрица коэффициентов при неизвестных в системе (1.15), называемая матрицей системы. Матрицы A_1 и A_2 получаются из матрицы A системы заменой первого и, соответственно, второго столбца на столбец правых частей системы (1.15). Теперь, если определитель $|A|$ отличен от нуля, то из (1.16) получаем

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}; \quad y = \frac{|A_2|}{|A|}. \tag{1.17}$$

Формулы (1.17) называются *формулами Крамера.*

Пусть теперь $|A| = 0$, тогда, как легко проверить, одна из строк матрицы A (для определенности, вторая) получается из другой умножением на некоторое число λ:

$$a_{21} = \lambda a_{11}; \quad a_{22} = \lambda a_{12}.$$

Если при этом и $b_2 = \lambda b_1$, то второе уравнение системы (1.15) получается из первого умножением на λ. Следовательно, система (1.15) эквивалентна своему первому уравнению и имеет бесконечно много решений. Если же $b_2 \neq \lambda b_1$, то система не имеет ни одного решения, т. е. несовместна.

Аналогичные результаты имеют место и в общем случае.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_1. \end{cases} \tag{1.18}$$

Если правые части уравнений в (1.18) равны нулю, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

называется *однородной*. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{1nn} \end{pmatrix}$ из коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*. Обозначим A_i, $i = 1, \dots, n$, матрицы, получающиеся из A заменой i-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ правых частей системы. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3 (теорема Крамера). Если определитель $|A|$ матрицы системы n уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \tag{1.20}$$

Для случая $n = 2$ эта теорема фактически доказана в рассмотренном примере системы двух уравнений. Докажем теорему для случая $n = 3$.

1. Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

имеет решение x_1, x_2, x_3. Умножив первое уравнение системы на A_{11}, второе — на A_{21}, третье — на A_{31} и сложив (здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A), получим уравнение

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) +$$
$$+ x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31},$$

в котором при x_1 по свойству 8 определителей стоит коэффициент $|A|$, а при x_2, x_3 стоят коэффициенты, по свойству 9 равные нулю. Таким образом,

$$x_1|A| = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A_1|.$$

Аналогично получим $x_2|A| = |A_2|$; $x_3|A| = |A_3|$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}; \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

и доказано, что если система имеет решение, то оно единственно и определяется по формулам Крамера (1.20).

2. Покажем, что формулы Крамера дают решение системы. В самом деле, подставив $x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$, $k = 1, 2, 3$, в i-е уравнение, $i = 1, 2, 3$, и использовав свойства 8 и 9 определителей, получим

$$a_{i1}\frac{|A_1|}{|A|} + a_{i2}\frac{|A_2|}{|A|} + a_{i3}\frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{|A|}[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) +$$
$$+ a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) + a_{i3}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33})] =$$
$$= \frac{1}{|A|}[b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + a_{i3}A_{31}) + b_2(a_{i1}A_{21} + a_{i2}A_{22} + a_{i3}A_{23}) +$$
$$+ b_3(a_{i1}A_{31} + a_{i2}A_{32} + a_{i3}A_{33})] = \frac{1}{|A|}b_i|A| = b_i,$$

так как скобки при b_k, $k \neq i$, равны нулю. Значит, x_k обращают все уравнения системы в тождества, и формулы Крамера (1.20) дают решение системы. ■

Приведем без доказательства теорему, которая может быть получена как следствие теорем гл. 2.

Теорема 1.4. Если определитель $|A|$ матрицы системы n линейных уравнений с n неизвестными равен нулю, то система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.

В случае $n = 3$ утверждение теоремы может быть проверено непосредственно, как было проделано в начале этого подраздела при $n = 2$.

Замечание. Систему уравнений (1.18) можно записать в виде *матричного уравнения*

$$Ax = b, \tag{1.21}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец неизвестных, а $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец правых частей системы. Если A — невырожденная матрица, то по теореме 1.2 у нее имеется обратная A^{-1} (см. формулу (1.14)). Умножив равенство (1.21) на A^{-1} слева, получим $x = A^{-1}b$. Матрица A^{-1} может быть найдена также посредством решения n систем линейных уравнений с n неизвестными: $AB_i = E_i$, где B_i — i-й столбец обратной матрицы; E_i — столбец, состоящий из нулевых элементов, кроме стоящего в i-й строке и равного единице ($i = 1, \ldots, n$).

1.4. Векторы и действия над ними

Пусть в пространстве задана *декартова* (*прямоугольная*) система координат, т. е. имеется начало координат O, три взаимно-перпендикулярных оси: ось *абсцисс* Ox, ось *ординат* Oy и ось *аппликат* Oz, и выбран отрезок единичной длины. Каждой точке A в пространстве взаимно-однозначно соответствует упорядоченный набор чисел (x_A, y_A, z_A), называемых *координатами* точки. Например, точки $A(x, y, z)$ и $B(-x, -y, -z)$ симметричны относительно начала координат, точки $B(x, y, z)$ и $C(-x, -y, z)$ симметричны относительно оси Oz, точки $D(x, y, 0)$ лежат на плоскости xOy.

Вектором называется направленный отрезок в пространстве. Векторы *равны*, если с помощью параллельного переноса их можно совместить. Далее чаще всего будет неважно, к какой точке приложен вектор, и будем рассматривать поэтому *свободные векторы*, т. е., строго говоря, *классы* равных между собой векторов.

Обозначим единичные векторы вдоль осей координат Ox, Oy и Oz, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно; это *координатные орты*, или *базис* пространства.

Будем говорить, что три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют *правую тройку векторов*, если при совмещении начал этих векторов кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ будет виден с конца вектора $\mathbf{c}$ совершающимся против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении. Если же поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ виден в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке, то будем говорить, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют *левую тройку векторов*.

Будем считать, что декартова система в пространстве выбрана так, что $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют правую тройку. В этом случае будем говорить, что *пространство положительно ориентировано*.

Каждый вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ единственным образом представляется в виде суммы $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Будем также использовать для вектора $\mathbf{a}$ обозначение $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$. Нулевой вектор $\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$ — это просто точка в пространстве, при этом направление его считается неопределенным. Координатные орты имеют координаты $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$.

Наряду с декартовой системой координат в пространстве будем рассматривать аналогичным образом введенную декартову систему координат на плоскости, т. е. Ox и Oy — взаимно-перпендикулярные оси, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ — координатные орты, при этом кратчайший поворот от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{j}$ есть поворот в положительном направлении; точки и векторы на плоскости будут иметь две координаты.

Пусть $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ — вектор в пространстве. *Длина* $|\mathbf{a}|$ этого вектора определяется формулой

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ приложен к точке $A(x_A, y_A, z_A)$ и его конец находится в точке $B(x_B, y_B, z_B)$, то $(x_B - x_A)$, $(y_B - y_A)$, $(z_B - z_A)$ — координаты вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, а *расстояние между точками* A и B равно *длине вектора* $\mathbf{a}$:

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{a}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Векторы можно умножать на число: если $\mathbf{a}$ — вектор и λ — произвольное число, то $\lambda\mathbf{a}$ есть вектор, длина которого равна $|\lambda||\mathbf{a}|$, $\lambda\mathbf{a}$ расположен на параллельной $\mathbf{a}$ прямой и направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$. При умножении вектора на число выполняются свойства:

$$\beta(\lambda\mathbf{a}) = (\beta\lambda)\mathbf{a}; \quad (\lambda + \alpha)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \alpha\mathbf{a}.$$

Векторы можно складывать друг с другом, сумму двух векторов можно находить по хорошо известным правилам параллелограмма или треугольника. При сложении векторов имеют место свойства *коммутативности*, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, *ассоциативности* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ и *дистрибутивности* $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b}\{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) + (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}, \\ \lambda\mathbf{a} &= \lambda(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = (\lambda a_x)\mathbf{i} + (\lambda a_y)\mathbf{j} + (\lambda a_z)\mathbf{k},\end{aligned}$$

т. е. при сложении векторов координаты складываются, а при умножении вектора на число координаты умножаются на это число.

Определение 1.12. *Скалярным произведением* $\mathbf{ab}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{1.22}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства.

Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.
2. Дистрибутивность: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.
3. $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$.
4. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2\cos 0 = |\mathbf{a}|^2$.
5. $\mathbf{ab} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно-перпендикулярны (нулевой вектор будем считать перпендикулярным любому другому вектору). Взаимно-перпендикулярные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем обозначать $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
6. Для координатных ортов имеют место соотношения: $\mathbf{ij} = 0$, $\mathbf{ik} = 0$, $\mathbf{jk} = 0$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$.

Найдем *выражение скалярного произведения векторов через координаты.* Пользуясь свойствами скалярного произведения, получим для $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b}\{b_x, b_y, b_z\}$

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) =$$
$$= a_xb_x\mathbf{i}^2 + a_yb_y\mathbf{j}^2 + a_zb_z\mathbf{k}^2 = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

т. е. имеет место формула

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{1.23}$$

Далее, зная скалярное произведение двух векторов и их длины, или зная координаты векторов, из (1.22) можно найти косинус угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{1.24}$$

Если известно скалярное произведение $\mathbf{ab}$ и длина вектора $\mathbf{b}$, то можно найти алгебраическое значение проекции вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$:

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi = |\mathbf{a}|\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Заметим, что если угол φ тупой, то $\text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} < 0$.

Определение 1.13. Косинусы углов между вектором и осями координат называются *направляющими косинусами* этого вектора.

Обозначим направляющие косинусы вектора $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Пользуясь формулой (1.24), учитывая, что по (1.23) $\mathbf{ai} = a_x$, $\mathbf{aj} = a_y$, $\mathbf{ak} = a_z$ и что длины координатных ортов равны единице, найдем

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}. \tag{1.25}$$

В частности, если $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ — *орт*, т. е. *вектор единичной длины*, то

$$\cos\alpha = e_x; \quad \cos\beta = e_y; \quad \cos\gamma = e_z. \tag{1.26}$$

Заметим, что направляющие косинусы любого вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.27}$$

Действительно, используя (1.25), получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\mathbf{a}|^2} =$$
$$= \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1.$$

Определение 1.14. *Векторным произведением* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как на сторонах, $\mathbf{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если их отложить от одной точки, и направлен так, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку векторов.

Таким образом, если $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (рис. 1.1), то:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
3) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая тройка векторов.

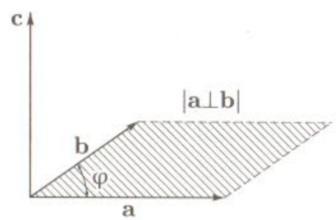

Рис. 1.1

Непосредственно из определения следуют свойства.

Свойства векторного произведения

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

2. *Антикоммутативность*: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

3. $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

4. $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$; $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$; $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

5. *Дистрибутивность*: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

Используя свойства векторного произведения, выведем формулу для выражения векторного произведения через координаты векторов. Пусть $\mathbf{a}\{a_x,a_y,a_z\}$ и $\mathbf{b}\{b_x,b_y,b_z\}$. Тогда

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\mathbf{j}-(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (1.28)$$

Отметим, что площадь $S_\triangle$ треугольника, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, как на сторонах, можно вычислить по формуле

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|. \qquad (1.29)$$

Пример 1.15. Найдем площадь S треугольника, двумя сторонами которого являются векторы $\mathbf{a}\{1;2;-1\}$ и $\mathbf{b}\{3;0;-4\}$. Имеем по формуле (1.28)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=-8\mathbf{i}+\mathbf{j}-6\mathbf{k}.$$

Значит по формуле (1.29)

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{64+1+36}=\frac{1}{2}\sqrt{101}.$$

Определение 1.15. Смешанным произведением $\mathbf{abc}$ трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$, т. е. скалярное произведение векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Из этого определения и свойств векторного и скалярного произведения следуют свойства.

Свойства смешанного произведения

1. *Антикоммутативность*: $\mathbf{abc}=-\mathbf{bac}$.

2. Дистрибутивность: $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc}=\mathbf{a}_1\mathbf{bc}+\mathbf{a}_2\mathbf{bc}$.

3. $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc}=\lambda(\mathbf{abc})$.

4. $\mathbf{abc}=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны (т. е. будучи отложенными из одной точки, лежат в одной плоскости).

Выведем *выражение смешанного произведения через координаты*. Пусть $\mathbf{a}\{a_x,a_y,a_z\}$, $\mathbf{b}\{b_x,b_y,b_z\}$, $\mathbf{c}\{c_x,c_y,c_z\}$. Тогда, используя формулу (1.28) и свойство 8 определителей, получим

$$\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)(c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

т. е.

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (1.30)$$

Выясним *геометрический смысл* смешанного произведения. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку. Построим параллелепипед на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, как на сторонах (рис. 1.2). Тогда площадь S лежащего в основании параллелепипеда параллелограмма $OBDA$ равна $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен плоскости основания и высота h параллелепипеда, опущенная из вершины C, равна $|\mathbf{c}|\cos\varphi$. Следовательно, объем параллелепипеда

$$V=Sh=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\varphi=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{abc}.$$

Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — левая тройка векторов, то проекция $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ имеют противоположные направления, $h=-|\mathbf{c}|\cos\varphi$ и $V=-\mathbf{abc}$. Таким образом,

$$\mathbf{abc}=\pm V, \qquad (1.31)$$

т. е. *смешанное произведение* $\mathbf{abc}$ *векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, *как на сторонах, взятому со знаком «+», если* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *образуют правую тройку, и со знаком «−», если* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *образуют левую тройку.*

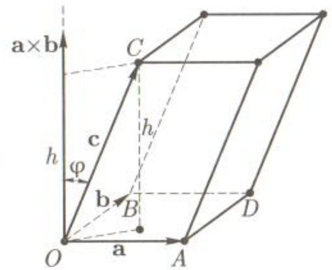

Рис. 1.2

Отметим, что объем $V_{\text{пир}}$ пирамиды, построенной на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, как на сторонах, учитывая (1.31), можно вычислить по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}|. \qquad (1.32)$$

Пример 1.16. Вычислим объем пирамиды с вершинами $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $O(0;0;0)$. Имеем $\overrightarrow{OA} = \{5;2;0\}$, $\overrightarrow{OB} = \{2;5;0\}$, $\overrightarrow{OC} = \{1;2;4\}$. Тогда по формулам (1.30) и (1.32)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 84, \quad V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\cdot 84 = 14.$$

Пример 1.17. Выясним геометрическую интерпретацию решений однородной линейной системы из трех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$, $\mathbf{a}_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, $\mathbf{a}_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда данная система эквивалентна системе
$$\begin{cases} \mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0; \\ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = 0; \\ \mathbf{a}_3\mathbf{x} = 0, \end{cases}$$
т. е. вектор $\mathbf{x}$ перпендикулярен каждому из векторов $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$. Необходимо рассмотреть три случая:

а) векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ некомпланарны, т. е. $\Delta = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 =$
$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда имеется единственный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, перпендикулярный $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, и значит, единственное решение системы $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

б) векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны, а значит $\Delta = 0$, но $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ не являются коллинеарными, т. е. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ лежат в одной плоскости α, но не лежат на одной прямой. В этом случае $\mathbf{x}$ перпендикулярен α и множество решений образует прямую l, перпендикулярную α;

в) векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ коллинеарны, т. е. лежат на одной прямой l. В этом случае множество решений образует плоскость β, перпендикулярную прямой l.

1.5. Плоскость и прямая в пространстве

Пусть α — плоскость в пространстве, $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ — некоторый вектор, перпендикулярный плоскости α; такой вектор называется *нормальным вектором* к плоскости; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая известная точка на плоскости.

Очевидно, что любая другая точка $M(x, y, z)$ будет лежать на плоскости α тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{N}$ взаимно-перпендикулярны, т. е. когда $\mathbf{N}\overrightarrow{M_0M} = 0$ (рис. 1.3). Перепишем это условие, используя выражение скалярного произведения через координаты:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1.33)$$

Получили *уравнение плоскости α, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной заданному вектору* $\mathbf{N}\{A, B, C\}$.

Перепишем последнее уравнение в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1.34)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Получим, что координаты точек плоскости удовлетворяют линейному уравнению первого порядка. Покажем, что обратное утверждение тоже верно, т. е. если задано линейное уравнение вида (1.34), то это уравнение будет уравнением некоторой плоскости.

Действительно, пусть x_0, y_0, z_0 удовлетворяют этому уравнению, т. е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычитая последнее уравнение из (1.34), получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т. е. векторы $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ взаимно-перпендикулярны. Это означает, что множество точек $M(x, y, z)$ с координатами, удовлетворяющими уравнению (1.34), лежит на плоскости с нормальным вектором $\mathbf{N}\{A, B, C\}$.

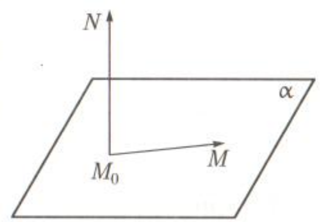

Рис. 1.3

Уравнение (1.34) называется *общим уравнением плоскости*.

Отметим некоторые частные случаи общего уравнения плоскости:

- при $D = 0$ получаем уравнение плоскости, проходящей через начало координат: $Ax + By + Cz = 0$;

• при $C = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oz: $Ax + By + D = 0$;

• при $C = D = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Oz: $Ax + By = 0$;

• при $B = C = 0$ — уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости yOz: $Ax + D = 0$;

• при $B = C = D = 0$ — уравнение координатной плоскости yOz: $x = 0$.

Пусть плоскость α отсекает на осях координат отрезки a, b, c. Тогда уравнение плоскости α может быть записано в виде *уравнения плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{1.35}$$

Действительно, (1.35) — линейное уравнение первого порядка, так как может быть переписано в виде (1.34), значит, это есть уравнение некоторой плоскости β. Плоскость β проходит через точки $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$, так как координаты этих точек удовлетворяют уравнению (1.35). Значит, плоскость β (1.35) отсекает на осях координат отрезки a, b, c. По известной аксиоме стереометрии через три различные точки в пространстве проходит единственная плоскость, следовательно, $\alpha = \beta$ и уравнение (1.35) будет уравнением плоскости α.

Пример 1.18. Рассмотрим следующую задачу. Пусть даны три различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Напишем уравнение плоскости α, проходящей через эти точки.

Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ лежат на плоскости α (рис. 1.4), и их векторное произведение перпендикулярно плоскости α (см. определение 1.14). Значит, в качестве нормального вектора к плоскости α может быть взят вектор

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{1.36}$$

Чтобы написать уравнение плоскости α осталось воспользоваться уравнением (1.33), где в качестве x_0, y_0, z_0 можно подставить координаты любой из заданных точек M_1, M_2, M_3.

Например, если $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(2; 3; 4)$, то $\overrightarrow{M_1M_2}\{-3; -1; 4\}$, $\overrightarrow{M_1M_3}\{1; 1; 5\}$ и по (1.36), (1.28) $\mathbf{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, и уравнение плоскости будет $-9(x - 1) + 19(y - 2) - 2(z + 1) = 0$, т. е. $9x - 19y + 2z + 31 = 0$.

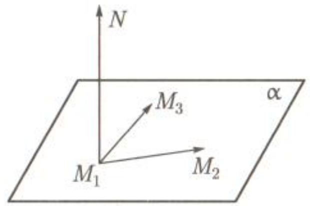

Рис. 1.4

Другой способ решения задачи: заметим, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, и $\overrightarrow{M_1M_3}$, где $M(x, y, z)$ — производная точка плоскости, компланарны, следовательно, их смешанное произведение по свойству 4 равно нулю, что дает *уравнение плоскости, проходящей через три различные точки*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.37}$$

В случае $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(2; 1; 3)$, $M_3(2; 3; 4)$ по формуле (1.37)

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим

$$(x - 1)(-9) - (y - 2)(-19) + (z + 1)(-2) = 0,$$

т. е. $9x - 19y + 2z + 31 = 0$ — уравнение искомой плоскости.

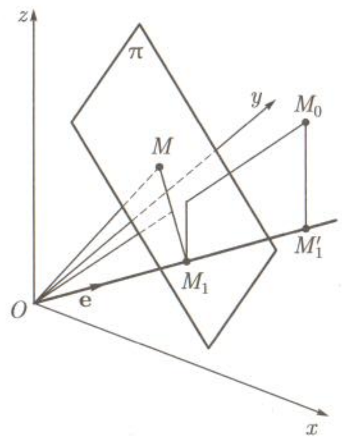

Рис. 1.5

Выведем так называемое *нормальное уравнение плоскости.*

Пусть p — расстояние от начала координат до плоскости π (рис. 1.5), точка M_1 — основание перпендикуляра, опущенного на π из начала координат, $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через $\mathbf{e}$ единичный вектор, сонаправленный с $\overrightarrow{OM_1}$; вектор $\mathbf{e}$ является нормальным вектором плоскости π. Если плоскость π проходит через начало координат, то обозначим $\mathbf{e}$ единичный нормальный вектор. Как видно из рисунка, $p = OM_1$ есть значение проекции вектора $\overrightarrow{OM}\{x, y, z\}$ на вектор $\mathbf{e}$, значит, $\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{e} = p$, т. е.

$$\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{e} - p = 0. \tag{1.38}$$

Координатами вектора $\mathbf{e}$ являются его направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (см. (1.26)), следовательно, равенство (1.38) можно переписать в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0; \tag{1.39}$$

это и есть *нормальное уравнение плоскости.*

Заметим, что если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая точка в пространстве, то *расстояние* d *от точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* π (см. рис. 1.5) равно

$$d = |\text{Пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{OM_0} - OM_1| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{1.40}$$

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как это уравнение и (1.39) определяют одну и ту же плоскость, то их соответствующие коэффициенты пропорциональны, т. е. при некотором λ

$$\cos\alpha = \lambda A; \quad \cos\beta = \lambda B; \quad \cos\gamma = \lambda C; \quad -p = \lambda D, \tag{1.41}$$

причем, используя свойство (1.27), имеем

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставив (1.41) в (1.40), получим формулу *расстояния от точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.42}$$

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения плоскостей и α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Очевидно, эти плоскости *параллельны* тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны, т. е. если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1.43}$$

Если пропорциональны все коэффициенты уравнений

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{1.44}$$

то плоскости α и β *совпадают.*

Далее, плоскости α и β *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{1.45}$$

Угол между плоскостями можно найти через угол между нормальными векторами плоскостей, так что

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.46}$$

Формулы (1.43) — (1.46) позволяют выяснить взаимное расположение двух плоскостей.

Рассмотрим теперь в пространстве прямую с направляющим вектором $\mathbf{a}\{l, m, n\}$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 1.6). Точка $M(x, y, z)$ будет лежать на прямой тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1.47}$$

Уравнения (1.47) называются *каноническими уравнениями прямой.* Если некоторые (не все!) координаты вектора $\mathbf{a}$ обращаются в нуль, то запись уравнения в виде (1.47) договорились сохранить, считая, что в этом случае числитель такой дроби в (1.47) тоже должен равняться нулю, и, значит, соответствующая координата точки на прямой не меняется. Например, если $l = 0$, то $x = x_0$ для всех точек прямой, и прямая перпендикулярна оси абсцисс.

Если на прямой известна еще одна точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то в качестве направляющего вектора $\mathbf{a}$ может быть взят вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$. Подставив координаты этого вектора вместо l, m, n в (1.47), получим *уравнения прямой, проходящей через две заданные точки*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{1.48}$$

Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ можно записать в виде

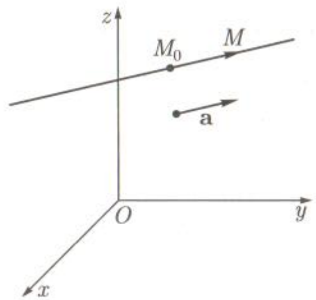

Рис. 1.6

$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}$, где t может принимать произвольные значения. Перепишем это равенство в координатах: $x - x_0 = lt$, $y - y_0 = mt$, $z - z_0 = nt$, откуда получим *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{1.49}$$

Прямая может быть получена как линия пересечения двух плоскостей. Рассматривая уравнения этих плоскостей совместно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{1.50}$$

которым должны удовлетворять координаты точек на прямой. Это *общие уравнения прямой.*

Угол φ между двумя прямыми с направляющими векторами $\mathbf{a}_1\{l_1, m_1, n_1\}$ *и* $\mathbf{a}_2\{l_2, m_2, n_2\}$ определяется как угол между этими векторами, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_1^2}}.$$

Угол ψ между прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ может быть определен через угол φ между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, т. е.

$$\sin\psi = |\cos\varphi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой* с направляющим вектором $\mathbf{a}\{l, m, n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, равно $|\overrightarrow{M_0M_1}|\sin\varphi$ и может быть вычислено по формуле

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ L & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{1.51}$$

Пример 1.19. Написать в канонической форме уравнения прямой d, заданной общими уравнениями (1.50).

Решение. Направляющий вектор $\mathbf{a}$ прямой d перпендикулярен нормальным векторам $\mathbf{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ заданных плоскостей, так как прямая лежит в каждой из этих плоскостей. Следовательно, в качестве $\mathbf{a}$ можно взять вектор $\mathbf{a} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$. В качестве координат точки M_0 на прямой можно взять какое-нибудь решение системы из уравнений заданных плоскостей.

Пример 1.20. Провести плоскость α через прямую d: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Найти расстояние от точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ до найденной плоскости.

Решение. Нормальный вектор $\mathbf{N}$ к искомой плоскости α перпендикулярен направляющему вектору прямой $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ и вектору $\overrightarrow{M_0M_1}\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$. Следовательно, можно взять $\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}$ и записать уравнение плоскости (1.33). Для нахождения расстояния от точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ до плоскости воспользуемся формулой (1.42).

Пример 1.21. Написать уравнение плоскости α, проходящей через прямую d, являющуюся пересечением плоскостей

$$\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Решение (первый способ). Как в примере 1.19 найдем направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, где $\mathbf{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\mathbf{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, и задача свелась к примеру 1.20.

Решение (второй способ). Воспользуемся *уравнением пучка плоскостей*, проходящих через заданную прямую:

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \nu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{1.52}$$

Здесь параметры μ и ν принимают произвольные значения. При каждой паре значений μ и ν (1.52) является линейным уравнением и, значит, задает некоторую плоскость. Эта плоскость проходит через прямую d, так как координаты точек прямой обращают в тождества уравнения плоскостей α_1 и α_2, и значит, выражения в скобках в (1.52) равны нулю. При $\mu = 0$ получаем уравнение плоскости α_2, при $\nu = 0$ — уравнение плоскости α_1. Чтобы выделить из пучка плоскость, проходящую через точку M_1, подставим в (1.52) координаты точки M_1. Получим для определения μ и ν уравнение

$$\mu(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \nu(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0.$$

Осталось подобрать μ и ν так, чтобы удовлетворялось это уравнение и подставить найденные значения μ и ν в уравнение пучка (1.52).

Пример 1.22. Найти точку пересечения прямой d: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ с плоскостью α: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение. Воспользуемся параметрическими уравнениями прямой (1.49). Координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ пересечения прямой с плоскостью должны удовлетворять уравнению плоскости. Обозначим t_1 соответствующее значение параметра. Тогда

$$A(lt_1 + x_0) + B(mt_1 + y_0) + C(nt_1 + z_0) + D = 0.$$

Определим из этого уравнения t_1, подставим в параметрические уравнения прямой и найдем x_1, y_1, z_1.

Пример 1.23. Написать уравнения перпендикуляра к прямой d с направляющим вектором $\mathbf{a}\{l, m, n\}$, проходящего через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Под перпендикуляром понимаем прямую, пересекающую данную прямую d, и перпендикулярную к ней.

Решение. Проведем через заданную точку M_0 плоскость α с нормальным вектором $\mathbf{N} = \mathbf{a}$, т. е. перпендикулярную прямой d. Уравнение этой плоскости (1.33). Найдем точку M_1 пересечения прямой d с плоскостью α (см. пример 1.22). Осталось написать уравнение (1.48) прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_0.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на d, равна расстоянию между точками M_0 и M_1, а также может быть вычислена по формуле (1.51).

1.6. Кривые второго порядка

Определение 1.16. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний r_1 и r_2 которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Таким образом, для точек эллипса и только для них выполняется условие

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (1.53)$$

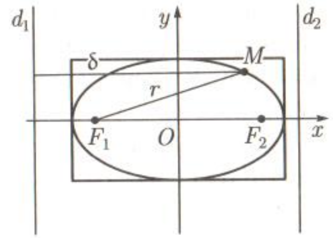

Рис. 1.7

Расстояния r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки; прямая, на которой лежат фокусы F_1 и F_2, называется *фокальной осью.* Обозначим $2c$ расстояние между фокусами.

Введем *каноническую систему координат* эллипса таким образом, что начало координат находится в середине отрезка F_1F_2 и осью Ox является фокальная ось (рис. 1.7). Из рисунка и определения эллипса ясно, что $a \geq c$. Если $a = c$, то эллипс вырождается в отрезок F_1F_2. Поэтому будем считать, что $a > c$. *Эксцентриситетом эллипса* называется число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$. Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$; a называется большой полуосью, b — малой полуосью эллипса.

Теорема 1.5. Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.54)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса.*

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Условие (1.53) записывается в виде

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перепишем последнее уравнение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя в квадрат почленно и раскрыв скобки, получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Снова возведя в квадрат и используя обозначение $a^2 - c^2 = b^2$, получим

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Таким образом, если точка принадлежит эллипсу, то она удовлетворяет каноническому уравнению (1.54).

Докажем обратное утверждение, а именно, что каждая точка $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.54), есть точка эллипса, тем самым теорема будет окончательно доказана.

Из (1.54) следует, что $|x| \le |a|$, $y| \le b$, и, значит, $|\varepsilon x| \le |x| \le a$. Также из (1.54)

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2.$$

Используя это выражение, для r_1 получим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} =$$
$$= \sqrt{2xc + a^2 + \varepsilon^2 x^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x.$$

Учли, что $|\varepsilon x| < a$, и значит, всегда $a + \varepsilon x > 0$. Точно так же

$$r_2 = a - \varepsilon x,$$

и, следовательно, условие (1.53) выполняется. ∎

Определение 1.17. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний r_1 и r_2 каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Таким образом, для точек гиперболы, и только для них, выполняется условие

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \qquad (1.55)$$

Как и в случае эллипса, r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки, а прямая, на которой лежат фокусы F_1 и F_2, называется *фокальной осью.* Обозначим $2c$ расстояние между фокусами и введем, как и в случае эллипса, каноническую систему координат гиперболы (рис. 1.8).

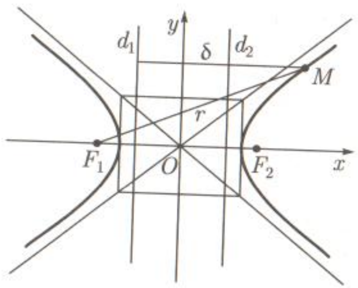

Рис. 1.8

Из рисунка и определения гиперболы ясно, что $c \ge a$. Если $c = a$, то гипербола, т. е. множество точек со свойством (1.55), вырождается во множество точек $(-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$ на фокальной оси Ox. Поэтому будем считать $c > a$. *Эксцентриситетом гиперболы* называется число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$. Обозначим также $b^2 = c^2 - a^2$.

Теорема 1.6. Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.56)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.5, и здесь не приводится.

Упражнение 1.7. Докажите, что координаты точек гиперболы удовлетворяют уравнению (1.56).

Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы. Можно показать, что точки гиперболы при неограниченном увеличении $|x|$ неограниченно приближаются к асимптотам.

Определение 1.18. *Директрисой эллипса* (*гиперболы*), соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная фокальной оси кривой и отстоящая от центра на расстояние $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Можно доказать, что как эллипс, так и гипербола являются геометрическим местом точек, отношение расстояния от которых до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равно ε (см. рис. 1.7 и 1.8).

Определение 1.19. *Параболой* называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки F, называемой фокусом, и от некоторой прямой d, называемой директрисой.

Обозначим p расстояние от фокуса до директрисы параболы. Введем *каноническую систему координат* параболы таким образом, что ось Ox проходит через точку F перпендикулярно директрисе, а начало координат находится на оси Ox посередине между фокусом и директрисой (рис. 1.9).

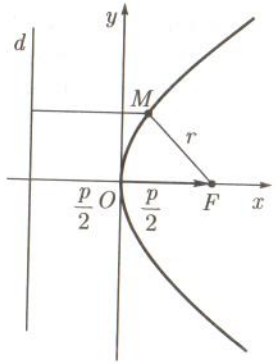

Рис. 1.9

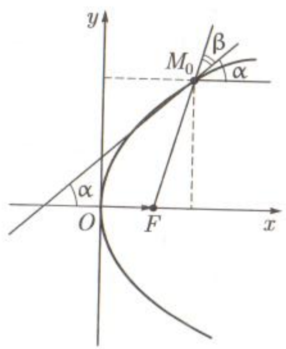

Рис. 1.10

Теорема 1.7. Уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{1.57}$$

Уравнение (1.57) называется *каноническим уравнением параболы.*

Доказательство. Из определения параболы и рис. 1.9 следует, что точка $M(x, y)$ лежит на параболе тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2},$$

т. е. $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2$, откуда $y^2 = 2px$. ■

Введем для параболы *эксцентриситет* $\varepsilon = 1$. Тогда, очевидно, парабола, как эллипс и гипербола, является геометрическим местом точек, отношение расстояния от которых до фокуса к расстоянию до директрисы равно ε.

Отметим еще одно свойство эллипса, гиперболы и параболы. Все эти кривые являются *коническими сечениями*, т. е. сечениями круглого конуса различными плоскостями (см. подразд. 1.7).

Пример 1.24. Найдем угол β, образованный фокальным радиусом M_0F точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на параболе, и касательной к параболе, проведенной в точке M_0 (рис. 1.10).

Ввиду симметрии можно считать, что точка M_0 лежит на верхней ветви параболы при $y \geq 0$, которая описывается функцией $f(x) = \sqrt{2px}$. Касательная в точке M_0 имеет угловой коэффициент $k_1 = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = x_0\dfrac{p}{\sqrt{2px_0}}$. Прямая FM_0 имеет угловой коэффициент $k_2 = \dfrac{y_0}{x_0 - \dfrac{p}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2px_0}}{2x_0 - p}$. Тангенс угла между касательной и прямой FM_0 определяется по формуле $k = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. Подставив сюда значения k_1 и k_2, получим $k = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{p}{\sqrt{2px_0}} = k_1$, т. е. *угол между фокальным радиусом точки и касательной к параболе в этой точке равен углу* α *наклона касательной.* Отсюда получаем следующее оптическое свойство параболы: *лучи света, параллельные оси параболы, после отражения от параболы попадают в фокус.*

Упражнение 1.8. Докажите, что фокальные радиусы произвольной точки эллипса образуют равные углы с касательной к эллипсу в этой точке.

Отсюда получим оптическое свойство эллипса: *луч света, выпущенный из какого-либо фокуса эллипса, после отражения от эллипса попадает в его другой фокус.*

Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка. *Общее уравнение* кривой второго порядка имеет вид

$$F(x, y) = 0, \tag{1.58}$$

где

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \tag{1.59}$$

— общий многочлен второй степени, причем хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен нулю.

Найдем новую декартову систему координат на плоскости, в которой уравнение кривой (1.58) приняло бы возможно более простой — *канонический* — вид. К новой декартовой системе координат можно перейти с помощью преобразований поворота на некоторый угол и параллельного переноса.

Пусть в (1.59) $a_{12} \neq 0$. Сделаем преобразование поворота на угол α, при этом, как можно показать,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.60}$$

Получим

$$F(x,y) = a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 +$$
$$+2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2a_1(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +$$
$$+ 2a_2(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_0 =$$
$$= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = F'(x',y'),$$

где $a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha$; $a'_{12} = a_{12}\cos^2\alpha + (a_{22}-a_{11})\cos\alpha\sin\alpha - a_{12}\sin^2\alpha$; $a'_{22} = a^2_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha$; $a'_1 = a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha$; $a'_2 = a_2\cos\alpha - a_1\sin\alpha$.

Очевидно, при преобразовании (1.60) степень многочлена не может повыситься, но она и не может понизиться, так как в противном случае вернувшись к старым координатам с помощью поворота на угол $(-\alpha)$ мы не сможем получить $F(x,y)$ второй степени.

Определим угол α так, чтобы $a'_{12} = 0$, т. е.

$$a_{12}\cos^2\alpha + (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha - a_{12}\sin^2\alpha = 0.$$

Решение этого уравнения всегда существует. Таким образом, уравнение кривой приводится к виду

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0.$$

В случае, если $a_{12} = 0$, выполнять преобразование поворота нет необходимости.

Следующим шагом будет выделение полных квадратов по тем переменным, у которых в выражении $F'(x,y)$ есть квадрат. Например, $a'_{11} \neq 0$. Тогда собираем в $F'(x',y')$ все члены, содержащие x'

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' = a'_{11}\left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 - \frac{a'^2_1}{a'^2_{11}},$$

и делаем преобразование переноса, содержащее для x' строку

$$x' = x'' - \frac{a'_1}{a'_{11}}.$$

Уравнение преобразуется к одному из следующих видов:

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + a''_0 = 0;$$
$$a''_{11}x''^2 + 2a''_2y'' + a''_0 = 0;$$
$$a''_{22}y''^2 + 2a''_1x'' + a''_0 = 0.$$

Далее, при необходимости, выполняем еще одно преобразование переноса. Например, в последнем уравнении, если $a''_1 \neq 0$ и $a''_0 \neq 0$, сделаем преобразование переноса

$$\begin{cases} x'' = x''' - \dfrac{a''_0}{2a''_1}; \\ y'' = y''', \end{cases}$$

и уравнение преобразуется в уравнение параболы

$$a'''_{22}y'''^2 + 2a'''_1x''' = 0.$$

Окончательно уравнение кривой второго порядка приведется к одному из следующих девяти видов (штрихи при x и y опущены).

Классификация кривых второго порядка

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — ***эллипс*** с полуосями a и b.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — ***мнимый эллипс***, не имеет ни одной действительной точки.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — ***гипербола*** с полуосями a и b.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — ***пара пересекающихся прямых*** $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ и $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — ***пара мнимых пересекающихся прямых***, имеет единственную действительную точку $(0,0)$.

6. $y^2 = 2px$ — ***парабола*** с параметром p.

7. $x^2 = a^2$ — ***пара параллельных прямых*** $x = \pm a$.

8. $x^2 = -a^2$ — ***пара мнимых параллельных прямых***, не имеет ни одной действительной точки.

9. $x^2 = 0$ — ***пара совпадающих прямых*** $x = 0$.

Пример 1.25. Приведем к каноническому виду уравнение кривой $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$. Сделаем преобразование поворота (1.60), т. е. подставим в уравнение кривой $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. После приведения подобных получим

$$x'^2(2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha) +$$
$$+ x'y'(4\cos^2\alpha - 6\cos\alpha\sin\alpha - 4\sin^2\alpha) +$$
$$+ y'^2(2\sin^2\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha) = 12.$$

Для определения угла поворота приравняем нулю коэффициенты при $x'y'$:

$$-4\cos\alpha\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Это приводит к уравнению относительно $\operatorname{tg}\alpha$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0,$$

корни которого $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Выберем угол поворота $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и после подстановки в преобразованное уравнение получим в новых координатах уравнение кривой $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{6} = 1$. Это уравнение гиперболы с полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{6}$.

Пример 1.26. Приведем к каноническому виду уравнение кривой $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 8 = 0$. В уравнении отсутствует член с произведением неизвестных xy. Выделим полные квадраты по x и y:

$$(x+2)^2 + 2(y-2)^2 - 4 = 0.$$

Сделаем преобразование переноса $x = x' - 2$, $y = y' + 2$, и приведем уравнение к виду $x'^2 + 2y'^2 = 4$, или $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{2} = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{2}$.

1.7. Поверхности второго порядка

Всякое уравнение второго порядка

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$, и хотя бы один из коэффициентов $a_{ij} \neq 0$, есть уравнение некоторой *поверхности второго порядка*. В некоторой канонической системе координат уравнение поверхности второго порядка может быть приведено к одному из следующих 17 типов.

Классификация поверхностей второго порядка

1. *Эллипсоид* (рис. 1.11) с полуосями a, b, c

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эллипсоид лежит внутри прямоугольного параллелепипеда $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-c \le z \le c$ и, следовательно, является ограниченной поверхностью. По этой причине все плоские сечения эллипсоида являются эллипсами. Например, в сечении плоскостью $z = h$, $|h| < c$ получаем эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Если какие-нибудь полуоси равны, то имеем эллипсоид вращения, а если все полуоси равны, $a = b = c$, то — сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ радиуса a.

2. *Мнимый эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

не имеет ни одной действительной точки.

3. *Однополостный гиперболоид* (рис. 1.12)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

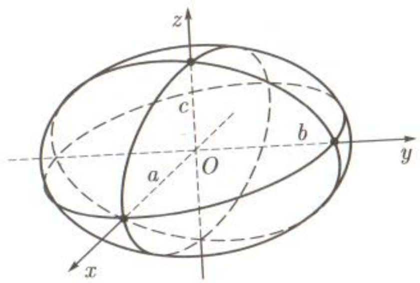

Рис. 1.11

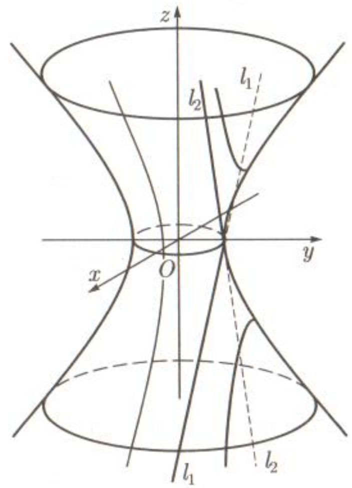

Рис. 1.12

В сечении плоскостью $z = h$ получаем эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

При сечении плоскостью $x = h$, $|h| \neq a$, или плоскостью $y = h$, $|h| \neq b$, имеем гиперболы, а плоскостью $x = \pm a$ или $y = \pm b$ — пары пересекающихся прямых.

У однополостного гиперболоида есть два семейства так называемых прямолинейных образующих

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \delta\left(1 - \dfrac{y}{b}\right); \\ \delta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \gamma\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

по одному представителю из которых l_1 и l_2 изображено на рис. 1.12.

Можно показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой из каждого семейства, целиком лежащей на этой поверхности.

4. *Двуполостный гиперболоид* (рис. 1.13)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

При сечении плоскостью $z = h$, $|h| > c$ получаем эллипс; при $|h| < c$ плоскость $z = h$ и двуполостный гиперболоид общих точек не имеют. Сечениями плоскостями $z = h$ и $y = h$ являются гиперболы.

5. *Конус* (рис. 1.14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Сечениями плоскостью $z = h$ являются эллипс, сечениями плоскостями $x = h$ и $y = h$, $h \neq 0$ — гиперболы, а при $h = 0$ получаем пары пересекающихся прямых. При надлежащем выборе плоскости можно получить в сечении и параболы (см. рис. 1.14). Поэтому эллипсы, гиперболы и параболы называются *коническими сечениями.*

6. *Мнимый конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

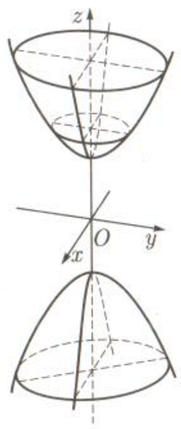

Рис. 1.13

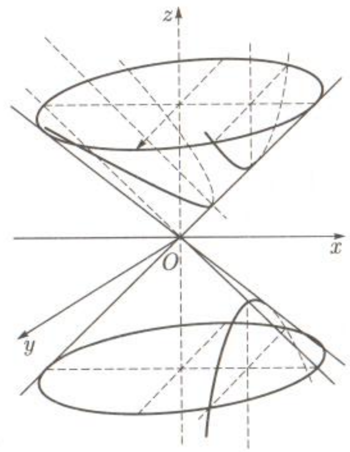

Рис. 1.14

Единственная действительная точка этой поверхности есть точка $(0; 0; 0)$.

7. *Эллиптический параболоид* (рис. 1.15)

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

В сечении плоскостью $z = h$, $h > 0$ лежит эллипс, при сечении плоскостью $x = h$ или $y = h$ получаем параболы.

8. *Гиперболический параболоид* (рис. 1.16)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

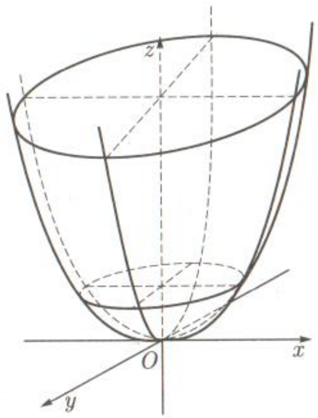

Рис. 1.15

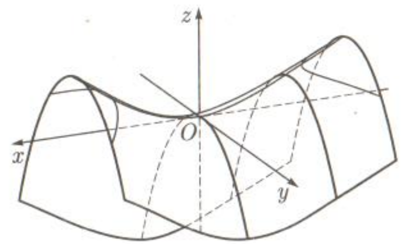

Рис. 1.16

В сечении плоскостями $z = h$, $h \neq 0$ получаем гиперболы; плоскостью $z = 0$ — пару пересекающихся прямых; плоскостями $x = h$ или $y = h$ — параболы. Гиперболический параболоид имеет два семейства прямолинейных образующих

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta; \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \delta z; \\ \delta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\gamma. \end{cases}$$

Следующие четыре поверхности называются цилиндрическими. Их уравнение в канонической системе координат

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — многочлен второй степени от двух переменных. Кривая $F(x, y) = 0$ в плоскости xOy называется направляющей и может быть эллипсом, действительным или мнимым, гиперболой или параболой. Прямые, параллельные оси Oz, проходящие через какую-либо точку направляющей, называются образующими.

9. ***Эллиптический цилиндр*** (рис. 1.17)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10. ***Мнимый эллиптический цилиндр***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

не имеет действительных точек.

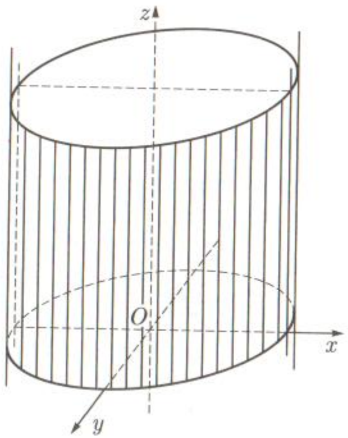

Рис. 1.17

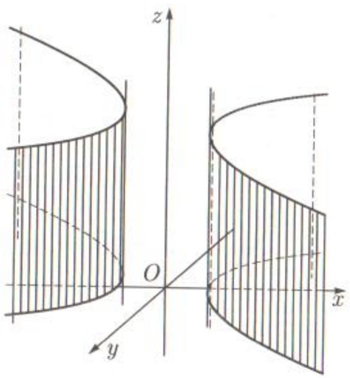

Рис. 1.18

11. ***Гиперболический цилиндр*** (рис. 1.18)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

12. ***Параболический цилиндр*** (рис. 1.19)

$$y^2 = 2px.$$

Наконец, следующие пять поверхностей распадаются на пары плоскостей.

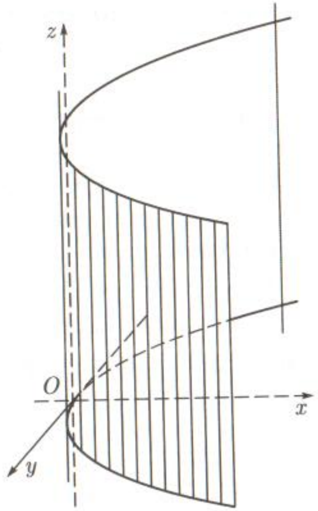

Рис. 1.19

13. ***Пара пересекающихся плоскостей***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

состоит из двух пересекающихся плоскостей $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ и $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$.

14. ***Пара мнимых пересекающихся плоскостей***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

имеет действительные точки только на оси Oz.

15. ***Пара различных параллельных плоскостей***

$$x^2 = a^2$$

состоит из плоскостей $x = \pm a$.

16. ***Пара мнимых параллельных плоскостей***

$$x^2 = -a^2$$

не имеет действительных точек.

17. ***Пара совпадающих плоскостей***

$$x^2 = 0$$

есть множество точек координатной плоскости $x = 0$.

1.8. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат

Для определения полярной системы координат на плоскости необходимо задать:

- *масштаб* (единицу измерения длины);
- *начало* или *полюс* O системы координат;
- *полярную ось* Or, т. е. полуось, исходящую из полюса.

Тогда для каждой точки M плоскости (рис. 1.20) определяется *полярный угол* — угол наклона φ вектора $\overrightarrow{OM}$ к полярной оси, $-\infty < \varphi < +\infty$, и *полярный радиус* r — длина вектора $\overrightarrow{OM}$. Эти пары чисел (φ, r) и называются *полярными координатами* точки M на плоскости.

Введем декартову систему координат с тем же масштабом, с началом координат в точке O и осью Ox, положительная полуось которой совпадает с полярной осью Or (см. рис. 1.20). Тогда имеем очевидные формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.61}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.62}$$

Формулы (1.61) и (1.62) позволяют перейти от полярных координат к декартовым и обратно. Угол φ в формулах (1.62) определяется с точностью до целого кратного 2π. Для однозначного задания φ обычно выбирают промежуток длиной в период, например от 0 до 2π.

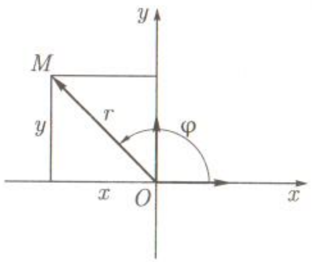

Рис. 1.20

Так, уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в полярных координатах примет вид $r = a$; уравнение $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ окружности радиуса a с центром в точке $(a, 0)$ в полярных координатах будет следующим: $r = 2a\cos\varphi$.

На рис. 1.21 представлена кривая, называемая *логарифмической спиралью*, уравнение которой в полярных координатах $r = a^{\varphi}$.

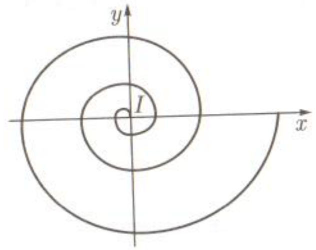

Рис. 1.21

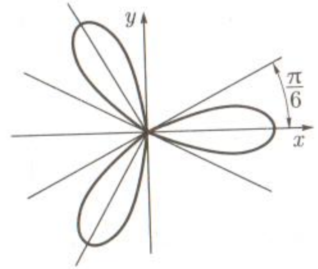

Рис. 1.22

На рис. 1.22 изображена кривая *«трехлепестковая роза»* с уравнением в полярных координатах $r = \cos 3\varphi$.

Замечание. Рассмотрим для эллипса, гиперболы и параболы полярную систему координат так, чтобы полюс совпал с одним из фокусов для эллипса и гиперболы и с фокусом в случае параболы; полярную ось выберем совпадающей с фокальной осью. Тогда для каждой из этих кривых в полярных координатах получится одно и то же уравнение

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \tag{1.63}$$

(для гиперболы это уравнение одной из ветвей). В формуле (1.63) для эллипса и гиперболы фокальный параметр $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Пусть теперь $M(x, y, z)$ — точка в пространстве с декартовыми координатами x, y, z. Введем на плоскости xOy полярную систему координат с началом в точке O и полярной осью Or, совпадающей с положительным направлением оси Ox (рис. 1.23). Тогда если φ, r — полярные координаты ортогональной проекции M_0 точки M на плоскость xOy и z — аппликата, то числа φ, r, z называются *цилиндрическими координатами* точки M,

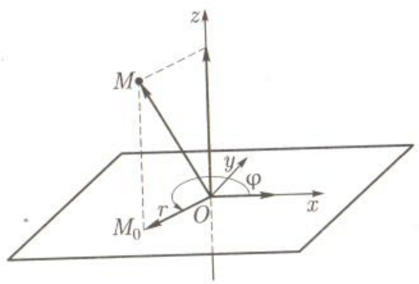

Рис. 1.23

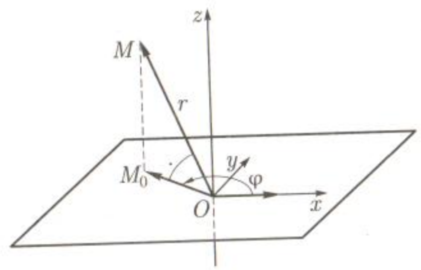

Рис. 1.24

при этом очевидны соотношения, связывающие цилиндрические и декартовы координаты точки

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi; \\ y = r\cos\varphi; \\ z = z. \end{cases} \tag{1.64}$$

Пример 1.27. Выведем уравнение гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = z$ в цилиндрических координатах. Подставив вместо x и y их выражения через r и φ из (1.64), получим $r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = z$, т. е. $z = r^2\cos 2\varphi$ — уравнение этого гиперболического параболоида в цилиндрических координатах.

Для каждой точки M пространства, не лежащей на прямой Oz, могут быть определены следующие величины (рис. 1.24):

• *полярный радиус* r точки M, равный длине вектора $\overrightarrow{OM}$; $r \geq 0$;

• *долгота* φ точки M — полярный угол ортогональной проекции M_0 точки M на плоскость xOy; $0 \leq \varphi < 2\pi$;

• *широта* ψ точки M — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и его проекцией $\overrightarrow{OM_0}$ на плоскость xOy; $-\dfrac{\pi}{2} \leq \psi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Числа φ, ψ, r называются *сферическими координатами* точки M в пространстве. Нетрудно видеть, что сферические и декартовы коодинаты точки связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi; \\ y = r\cos\psi\sin\varphi; \\ z = r\sin\psi. \end{cases} \tag{1.65}$$

Пример 1.28. Напишем уравнение гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = z$ в сферических координатах. Подставив выражения для x, y, z из (1.65), получаем $r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi - r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi = r\sin\psi$, откуда

$$r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi\cos 2\varphi}$$

— уравнение этой поверхности в сферических координатах.

1.9. Комплексные числа

В дальнейшем нам понадобится расширение множества действительных чисел — так называемые комплексные числа.

Определение 1.20. *Комплексные числа* — это упорядоченные пары (a, b) действительных чисел с покомпонентной операцией сложения

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{1.66}$$

и умножением, которое задается правилом

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1.67}$$

Комплексное число $z = (a, b)$ может быть отождествлено с точкой на плоскости с координатами (a, b) или с радиусом-вектором этой точки (рис. 1.25) с естественной покомпонентной операцией сложения (1.66) и умножением по формуле (1.67). В таком случае плоскость называется комплексной плоскостью. Множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbf{C}$.

Действительные числа, соответствующие точкам на действительной оси Ox, будем отождествлять с комплексными числами вида $(a, 0)$ и обозначать $(a, 0) = a$.

Обозначим число $(0, 1) = i$, тогда по формуле (1.67)

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Число i называется *мнимой единицей.* Числа вида $(0, b)$, соответствующие точкам на оси Oy, называются *чисто мнимыми*, и для них имеем

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi.$$

Таким образом, каждое комплексное число (a, b) представимо в виде

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi, \tag{1.68}$$

где $a, b \in \mathbf{R}$. Это *алгебраическая форма комплексного числа.* При этом a называется *действительной частью комплексного числа* и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, а b — *мнимой частью комплексного числа* и обозначается $b = \operatorname{Im} z$.

Арифметические действия над комплексными числами в форме (1.68) можно выполнять по алгебраическим правилам. Например

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = \\ = (a^2 - b^2) + (2ab)i.$$

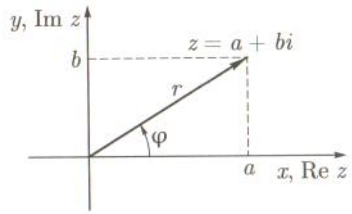

Рис. 1.25

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ считаются *рав-*

ными тогда и только тогда, когда равны соответственно их действительные и мнимые части, т. е. когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* к числу $z = a + bi$. *Модулем комплексного числа* называется величина

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Выведем формулу для деления комплексных чисел. Если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, причем $|z_2| \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 - b_2^2 i^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пусть $z \in \mathbf{C}$ и $z \neq 0$. Угол φ между радиусом-вектором точки z и действительной осью (см. рис. 1.25) называется *аргументом числа* z. Аргумент числа $z \in \mathbf{C}$ определяется не однозначно, а с точностью до кратного 2π. Множество всех значений аргумента z обозначается $\operatorname{Arg} z$. То значение аргумента, которое лежит в промежутке $[0, 2\pi)$, называется *главным* и обозначается $\arg z$. Иногда удобнее выбирать главное значение аргумента из промежутка $(-\pi, \pi]$. Очевидно, имеем (см. рис. 1.25) $\operatorname{Re} z = r\cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = r \sin\varphi$, где $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Следовательно,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.69}$$

— это *тригонометрическая форма комплексного числа*.

Л. Эйлер ввел показательную функцию

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.70}$$

Используя *формулу Эйлера* (1.70), получим *показательную форму* комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}, \tag{1.71}$$

где $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Формулы (1.69) и (1.71) показывают также связь комплексных чисел с полярными координатами.

Легко видеть, что комплексные числа обладают всеми свойствами действительных чисел: сложение и умножение коммутативны и ассоциативны, т. е. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$; $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$ для любых z_1, z_2, z_3; умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ для любых чисел z_1, z_2, z_3; для любого комплексного числа z выполняется $z + 0 = z$ и $1 \cdot z_1 = z_1$ и существует противоположное число $(-z) = (-1)z$, такое, что $z + (-z) = 0$; для любого ненулевого комплексного числа z существует обратное число z^{-1}, такое, что $z^{-1} z = 1$. Однако в отличие от действительного случая для комплексных чисел теряет смысл отношение порядка, т. е. для двух комплексных чисел невозможно ставить вопрос, которое из них больше.

Полезна следующая *формула Муавра*:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1.72}$$

которую нетрудно доказать по индукции, используя тригонометрические формулы для косинуса и синуса суммы двух аргументов (проделайте это самостоятельно в качестве упражнения). Формула (1.72) позволяет находить корни целой степени из комплексного числа. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и требуется найти такое комплексное число $c = \rho e^{i\psi}$, что $c^n = z$. Тогда согласно (1.72) имеем $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k \in \mathbf{Z}. \tag{1.73}$$

При $k = 0, 1, \ldots, n-1$ получаем n различных корней степени n из z, которые делят окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ на n равных дуг, т. е. лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Пример 1.29. Найдем все различные корни третьей степени из числа $z = -1$. Имеем $r = |z|$, $\varphi = \arg z = \pi$, так что $z = -1 = 1 \times e^{i\pi}$. По формуле (1.73) при $n = 3$

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z}.$$

При $k = 0$ получаем $\psi_0 = \dfrac{\pi}{3}$ и $c_0 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; при $k = 1$ — $\psi_1 = \pi$ и $c_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$; при $k = 2$ — $\psi_2 = \dfrac{5\pi}{3}$ и $c_2 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Числа c_0, c_1, c_2 — все различные корни третьей степени из -1.

Пример 1.30. Найдем все различные корни четвертой степени из числа $z = 1 = 1 \cdot e^{i0}$. По формуле (1.73)

$$c_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i\sin\frac{0+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

— все различные корни четвертой степени из числа $z = 1$.

Таким образом, $c_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$; $c_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$; $c_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$; $c_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Замечание. Из курса высшей алгебры известно, что любой многочлен n-й степени имеет ровно n, быть может комплексных, корней с учетом их кратностей. В частности, корни z_1, z_2 многочлена $az^2 + bz + c$ второй степени с действительными коэффициентами можно находить по известной формуле через дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, только в случае $D < 0$ эта формула примет вид $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}i}{2a}$.

Пример 1.31. Найдем все корни многочлена $P(z) = z^3 + 2z^2 + 5z - 26$. Нетрудно заметить, что $z = 2$ обращает уравнение $z^3 + 2z^2 + 5z - 26 = 0$ в тождество, так что $z_1 = 2$ — один из корней многочлена. Разложим многочлен на множители, один из которых $(z - 2)$. Имеем (например, применив деление столбиком или схему Горнера)

$$P(z) = (z-2)(z^2 + 4z + 13).$$

Чтобы найти оставшиеся два корня многочлена, надо решить уравнение

$$z^2 + 4z + 13 = 0.$$

По известным формулам находим $D = 16 - 4 \cdot 13 = -36 < 0$, так что

$$z_2 = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i;$$

$$z_3 = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 + 3i$$

и $z_1 = 2$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = -2 + 3i$ — все три корня данного многочлена.

Пример 1.32. Найдем все корни уравнения $z^5 + z^3 = 0$. Перепишем уравнение в виде $z^3(z^2 + 1) = 0$. Тогда находим, что $z = 0$ есть корень кратности 3; уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет корни $z = \pm i$. Всего у данного уравнения 5-й степени получилось пять корней (с учетом кратности корня $z = 0$).

Глава 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА*

2.1. Матрицы и определители n-го порядка

Пусть даны n элементов ($n \geq 1$)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Всевозможные расположения этих элементов называются перестановками из n элементов. Поскольку каждый элемент однозначно определяется своим номером, можно говорить просто о перестановках натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$, что и будем делать в дальнейшем. Всего из n элементов можно составить $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ перестановок.

Если какая-нибудь пара чисел i, k расположена в перестановке так, что большее число стоит впереди меньшего, то говорят, что эти числа образуют *инверсию.* Сосчитать число инверсий в какой-нибудь перестановке можно следующим образом. Сосчитаем сначала количество чисел, стоящих впереди единицы — все эти числа и только они образуют инверсии с единицей. Затем вычеркнем единицу и сосчитаем количество чисел, стоящих впереди двойки. Затем вычеркнем двойку и сосчитаем количество чисел, стоящих впереди тройки и т. д. Число инверсий в перестановке $i_1, i_2, \ldots, i_n$ будем обозначать $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$. Например, $[2, 5, 1, 4, 7, 3, 6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 0 + 1 = 7$.

Перестановки с четным числом инверсий называются *четными,* с нечетным — *нечетными.*

Пусть дана перестановка $i_1, i_2, \ldots, i_l, \ldots, i_k, \ldots, i_n$. Поменяем местами два ее числа i_l и i_k; при этом получим перестановку $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_l, \ldots, i_n$. Такая операция перемещения двух чисел перестановки называется *транспозицией.*

Теорема 2.1. От одной транспозиции четность перестановки меняется.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда меняются местами два соседних числа α и β перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_l, \alpha,$

$\beta, i_{l+3}, \ldots, i_n$. При этом число инверсий после транспозиции стало на единицу больше, если $\alpha < \beta$, или на единицу меньше, если $\beta < \alpha$. Значит, четность перестановки изменилась и теорема в этом случае верна.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть меняются местами числа α и β в перестановке $i_1, i_2, \ldots, i_{l-1}, \alpha, i_{l+1}, i_{l+2}, \ldots, i_{l+k}, \beta, i_{l+k+2}, \ldots, i_n$, между которыми находятся k чисел $i_{l+1}, i_{l+2}, \ldots, i_{l+k}$. Можно выполнить транспозицию α и β посредством нескольких транспозиций рядом стоящих чисел. Сначала поменяем местами α с i_{l+1}, потом α с i_{l+2} и так далее до α с i_{l+k}. При этом выполнено k транспозиций рядом стоящих чисел. Затем поменяем местами α и β, и после этого — β с i_{l+k}, β — с i_{l+k-1}, и так далее до β с i_{l+1}. В конечном счете α и β поменяются местами и при этом будет выполнено $2k+1$ транспозиций рядом стоящих чисел, при каждой из которых меняется четность перестановки. Следовательно, четность перестановки изменится $2k+1$ раз, т. е. четная перестановка станет нечетной, а нечетная четной, что и требовалось доказать. ■

Следствие. Число нечетных перестановок из n $(n > 1)$ первых натуральных чисел равно числу четных перестановок и равно $n!/2$.

Доказательство. Пусть из $n!$ перестановок n чисел p перестановок четных и q нечетных. Сделаем в каждой четной перестановке одну и ту же транспозицию, например поменяем местами первые два числа. Тогда каждая четная перестановка превратится в нечетную и все они будут разные. Следовательно, $p \le q$. Аналогично убеждаемся, что $q \le p$. Следовательно, $p = q$. ■

Пусть теперь имеется квадратная матрица A порядка n.

Определение 2.1. *Определителем n-го порядка матрицы A порядка n* называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки матрицы A. Если в каждом таком произведении множители расположены в порядке следования столбцов, то со знаком «+» берутся те произведения, у которых перестановка первых индексов четная, а со знаком «−» те, у которых она нечетная, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \qquad (2.1)$$

где суммирование распространяется на всевозможные перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ из n чисел $1, 2, \ldots, n$. Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или $\det A$.

Так как число перестановок из n $(n > 1)$ элементов равно $n!$, то по формуле (2.1) определитель матрицы A порядка n состоит из $n!$ слагаемых, половина из которых входит со знаком «+» и столько же со знаком «−».

Пример 2.1. Пусть $n = 3$; матрица A состоит из 9 элементов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Всевозможные произведения элементов из каждого столбца и каждой строки имеют вид $a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3}$, их $3! = 6$. Четными перестановками из 1, 2, 3 являются

$$1, 2, 3 \text{ — нуль инверсий;}$$
$$2, 3, 1 \text{ — две инверсии;}$$
$$3, 1, 2 \text{ — две инверсии.}$$

Им соответствуют произведения элементов матрицы $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$, которые в сумму входят со знаком «+». Нечетными перестановками из 1, 2, 3 являются

$$3, 2, 1 \text{ — три инверсии;}$$
$$2, 1, 3 \text{ — одна инверсия;}$$
$$1, 3, 2 \text{ — одна инверсия.}$$

Им соответствуют произведения $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$, $a_{11}a_{32}a_{23}$, которые в сумму входят со знаком «−». Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

что совпадает с определением 1.9 (см. гл. 1).

Лемма 2.1 (о знаке члена определителя). Произведение $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \ldots a_{i_n k_n}$ входит в определитель n-го порядка со знаком, определяемым выражением

$$(-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_n] + [k_1, k_2, \ldots, k_n]}. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Заметим, что если поменять местами два множителя в произведении $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\dots a_{i_nk_n}$, то как в первых, так и во вторых его индексах произойдет по одной транспозиции, и значит, четность суммы останется прежней. Теперь, если в произведении $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\dots a_{i_nk_n}$, переставляя множители, поставить на первое место элемент из первого столбца, затем на второе — элемент из второго столбца и так далее, т. е. сделать так, чтобы вторые индексы шли в порядке возрастания, то четность суммы $[i_1, i_2, \dots, i_n]+[k_1, k_2, \dots, k_n]$ будет совпадать с четностью числа инверсий $[m_1, m_2, \dots, m_n]$ в перестановке первых индексов окончательного расположения сомножителей (вторые индексы образуют нуль инверсий). Следовательно,

$$(-1)^{[m_1,m_2,\dots,m_n]} = (-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_n]+[k_1,k_2,\dots,k_n]}. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.2. Определим, с каким знаком произведение $a_{32}a_{43}a_{51}a_{15}a_{24}$ входит в определитель 5-го порядка. Так как

$$[3, 4, 5, 1, 2] = 3 + 3 = 6; \quad [2, 3, 1, 5, 4] = 2 + 1 = 3,$$

по формуле (2.2) произведение входит в определитель со знаком $(-1)^{6+3} = -1$.

Свойства определителей были сформулированы в гл. 1 (см. подразд. 1.2). Докажем некоторые из них для произвольного $n > 1$.

Свойство 1 (*равноправие строк и столбцов*)**.** При транспонировании, т. е. замене каждой строки определителя столбцом с тем же номером, определитель не меняется.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как каждый член определителя составлен из элементов разных строк и столбцов, каждый член определителя $|A|$ будет членом определителя $|A^T|$, и наоборот. По лемме 2.1 знак перед членом $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\dots a_{i_nk_n}$ в $|A|$ определяется выражением $(-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_n]+[k_1,k_2,\dots,k_n]}$, а в $|A^T|$ — выражением $(-1)^{[k_1,k_2,\dots,k_n]+[i_1,i_2,\dots,i_n]}$; но эти выражения равны, следовательно, знаки совпадают и определители равны, $|A| = |A^T|$. $\blacksquare$

Замечание. Из свойства 1 следует, что если какое-либо утверждение доказано для строк (или столбцов) матрицы определителя, то транспонируя матрицу, получим, что утверждение будет верно и для столбцов (соответственно строк).

Упражнение 2.1. Используя непосредственно определение, докажите свойства 2—5 определителей.

Докажем, например, свойство 5.

Свойство 5. При перестановке двух каких-либо строк (столбцов) матрицы знак определителя меняется, а по абсолютной величине не меняется.

Доказательство (для столбцов). Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что каждый член определителя $|A_1|$ совпадает с каким-нибудь членом определителя $|A_2|$, и наоборот, так что осталось только сравнить знаки. Возьмем какой-нибудь член определителя $|A_1|$ и расположим его множители в порядке возрастания столбцов

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_p p}\dots a_{i_q q}\dots a_{i_n n}. \tag{2.3}$$

Этот член входит в $|A_1|$ со знаком $(-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_n]}$. Этот же член входит в $|A_2|$ со знаком $(-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots,i_n]}$. Но перестановка $i_1, i_2, \dots, i_q, \dots, i_p, \dots, i_n$ получается из перестановки $i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n$ одной транспозицией i_p и i_q, следовательно, числа $[i_1, i_2, \dots, i_q, \dots, i_p, \dots, i_n]$ и $[i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n]$ разной четности, и значит, член (2.3) входит в $|A_2|$ с другим знаком, чем в $|A_1|$. Последнее утверждение верно для любого члена определителя. Следовательно, $|A_2| = -|A_1|$.

Для строк соответствующее утверждение следует из свойства 1. $\blacksquare$

Как следствие, из свойства 5 легко доказывается свойство 6.

Свойство 6. Если в матрице имеются две одинаковые строки (столбца), то определитель равен нулю.

Доказательство. Действительно, поменяем местами одинаковые строки (или столбцы). Тогда определитель по свойству 5 изменит знак, но при этом он не должен измениться, так как строки (столбцы) одинаковые. Таким образом, $|A| = -|A|$, что может быть лишь при $|A| = 0$. ■

Упражнение 2.2. Докажите свойство 7 определителей.

Теорема 2.2. Если все элементы k-го столбца (строки) матрицы A, кроме, быть может, одного a_{ik} равны нулю, то определитель $|A|$ равен произведению a_{ik} на алгебраическое дополнение этого элемента: $|A| = a_{ik}A_{ik}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда в матрице A все элементы первого столбца, кроме, быть может, a_{11}, равны нулю, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В каждый член определителя входит в точности по одному элементу из первого столбца. В нашем случае все члены определителя с элементами из первого столбца, взятыми не из первой строки, равны нулю. Следовательно, по (2.1)

$$|A| = \sum (-1)^{[1, i_2, \ldots, i_n]} a_{11} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} =$$

$$= a_{11} \sum (-1)^{[i_2, \ldots, i_n]} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n},$$

где $i_2, \ldots, i_n$ — всевозможные перестановки из чисел $2, \ldots, n$. Так как $\sum (-1)^{[i_2, \ldots, i_n]} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} = M_{11}$ и $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$ (см. определение 1.10 минора и алгебраического дополнения к элементу матрицы), получаем $|A| = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда все элементы k-го столбца матрицы A, кроме, быть может, a_{ik}, равны нулю, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{ik} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переставляя i-ю строку матрицы с $(i-1)$-й, $(i-2)$-й и так далее, и наконец, с первой строкой, а затем переставляя с $(k-1)$-м,

$(k-2)$-м, и так далее и, наконец, с первым столбцом, получим матрицу, у которой все элементы первого столбца равны нулю, кроме, быть может, первого, равного a_{ik}. Определитель этой матрицы по свойству 5 будет отличаться от исходного знаком $(-1)^{(k-1)+(i-1)} = (-1)^{k+i}$, а значит, по доказанному ранее, $|A| = (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik}$, так как M_{11} нового определителя равен M_{ik} исходного. ■

Свойство 8. Каждый определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (2.4)$$

(разложение по элементам i-й строки) и

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \quad (2.5)$$

(разложение по элементам k-го столбца).

Доказательство. Заметим, что если две матрицы отличаются друг от друга только элементами одной строки (столбца), то алгебраические дополнения элементов этих строк (столбцов) в обоих определителях одинаковы.

Докажем формулу разложения определителя по k-му столбцу. Для этого представим элементы k-го столбца в виде суммы n слагаемых. Получим по свойству 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} + 0 + \ldots + 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & 0 + a_{2k} + \ldots + 0 & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \ldots & 0 + 0 + \ldots + a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|,$$

где

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По теореме 2.2 $|A_1| = a_{1k}A_{1k}, |A_2| = a_{2k}A_{2k}, \dots, |A_n| = a_{nk}A_{nk}$, где $A_{ik}(i = 1, \dots, n)$ — алгебраические дополнения к элементам a_{ik} матрицы A. Следовательно, $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, и формула (2.4) доказана. Соответствующая формула (2.5) для разложения по строке легко получается аналогично или применением свойства 1. ■

Пример 2.3. Вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки (см. (2.4)):

$$|A| = (-5)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 74 - (-15) - 4(-31) - 33 = -370 + 15 + 124 - 33 = -264.$$

Свойство 9. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Пусть дан определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Докажем свойство для элементов i-го столбца. Рассмотрим другой определитель

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

отличающийся лишь тем, что в k-м столбце стоят соответствующие элементы i-го столбца ($k \neq i$). Определитель $|A_1|$ равен нулю, так как имеет два одинаковых столбца. Разложив его по элементам k-го столбца, получим

$$|A_1| = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = 0,$$

что и требовалось доказать, так как A_{ik} ($i = 1, \dots, n$) — алгебраические дополнения элементов a_{ik} k-го столбца матрицы A_1 равны алгебраическим дополнениям элементов k-го столбца матрицы A. ■

Упражнение 2.3. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ & & \ddots & \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

тремя способами:

а) переставляя столбцы;

б) по определению;

в) разложением по столбцу.

В упражнениях 2.4 и 2.5 матрицы A_1 и A_2 порядка k и l соответственно.

Упражнение 2.4. Докажите, что

$$\left|\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right| = |A_1||A_2|.$$

Упражнение 2.5. Докажите, что

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & A_2 \\ \hline A_1 & 0 \end{array}\right| = |A_1||A_2|(-1)^{kl}.$$

Определение 2.2. Рассмотрим прямоугольную матрицу A размера $m \times n$. Пусть $k \leq m$ и $k \leq n$. Выделим в этой матрице какие-нибудь k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами k-го порядка матрицы A*. *Рангом $r(A)$ матрицы A* называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, если ранг матрицы равен r, то среди миноров этой матрицы есть, по крайней мере, один минор r-го порядка, отличный от нуля, а все ее миноры $(r+1)$-го порядка и выше равны нулю. Для вычисления ранга матрицы ее можно сначала приводить к возможно более простому виду с помощью *элементарных преобразований*, т. е. преобразований вида:

- транспонирование;
- перестановка двух строк или столбцов;
- умножение всех элементов строки (или столбца) на любое число c, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам строки (или столбца) соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на одно и то же число.

Упражнение 2.6. Докажите, что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Будем обозначать $A \sim B$, если матрица B получается из A с помощью элементарных преобразований.

Пример 2.4. Вычислим ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычитая из третьей строки удвоенную первую, сокращая второй столбец на 2 и вычитая после этого из первого столбца утроенный второй, из третьего — второй и из четвертого — удвоенный второй, последовательно получаем

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке утроенную вторую, сокращая на 2 первый столбец и вычитая из четвертого, прибавляя первый к третьему, и поменяв местами первые два столбца, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $r(A) = 2$.

Обозначим строки матрицы A из примера 2.4 через $e_1 = (3, 2, 1, 2)$, $e_2 = (2, 0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 4, 5, 1)$. Очевидно, имеет место равенство $e_3 = 2e_1 - 3e_2$, понимаемое в смысле поэлементного сложения.

Вообще, если $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — строки какой-то матрицы A и, например,

$$e_m = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{m-1} e_{m-1},$$

где α_i, $i = 1, \ldots, m-1$ — какие-нибудь числа, то будем говорить, что m-я строка этой матрицы *линейно выражается* через первые $m-1$ строк, или что e_m *является линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$. В этом случае

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{m-1} e_{m-1} - e_m = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ понимается как нулевая строка (т. е. строка из n нулей).

Определение 2.3. Будем говорить, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ матрицы A *линейно зависимы*, если можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m = \mathbf{0}.$$

Если таких чисел α_i, $i = 1, \ldots, m$ не существует, т. е. последнее равенство имеет место только в том случае, когда все $\alpha_i = 0$, то говорят, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно независимы.

Упражнение 2.7. Докажите, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из строк линейно выражается через остальные.

Аналогичное понятие линейной зависимости можно ввести и для столбцов матрицы.

Теорема 2.3 (о ранге матрицы). Если ранг матрицы равен r, то в этой матрице можно найти r линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Доказательство. Пусть матрица A размера $m \times n$ имеет ранг r. Не ограничивая общности можно считать, что отличный от нуля минор D r-го порядка (так называемый *базисный минор*) расположен в верхнем левом углу матрицы, т. е. что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажем, что первые r строк матрицы A линейно независимы. Предположим, наоборот, что эти строки линейно зависимы. Тогда одна из них, для определенности e_r, линейно выражается через остальные:

$$e_r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{r-1} e_{r-1}.$$

Вычтем из r-й строки матрицы A первую, умноженную на α_1, вторую, умноженную на α_2, и так далее до $(r-1)$-й, умноженной на α_{r-1}. Тогда r-я строка матрицы A окажется состоящей из одних нулей. Отсюда следует, что определитель D равен нулю — противоречие. Следовательно, первые r строк матрицы A линейно независимы.

Докажем теперь, что все остальные строки матрицы A линейно выражаются через первые r строк. Пусть $r < k \le m$ и $1 \le l \le n$. Рассмотрим определитель $(r+1)$-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2l} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю при всех $k > r$ и всех l, так как если $l \le r$, то у него два одинаковых столбца, если же $l > r$, то это минор $(r+1)$-го порядка матрицы ранга r.

Разложим Δ по элементам последнего столбца

$$\Delta = a_{1l}A_1 + a_{2l}A_2 + \ldots + a_{rl}A_r + a_{kl}A_{r+1} = 0.$$

Здесь $A_1, \ldots, A_{r+1}$ — алгебраические дополнения к элементам последнего столбца, они зависят от k и не зависят от l, кроме того, $A_{r+1} = D \neq 0$. Значит,

$$a_{kl} = \alpha_1 a_{1l} + \alpha_2 a_{2l} + \ldots + \alpha_r a_{r1},$$

где $\alpha_i = -\dfrac{A_i}{D}$ $(i = 1, \ldots, r)$ не зависят от l. Таким образом, k-я строка матрицы A линейно выражается через первые r строк:

$$e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_r e_r. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк.

Следствие 2. Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

Следствие 3. Для того чтобы определитель матрицы A n-го порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ранг $r(A)$ матрицы был меньше порядка матрицы, т. е. чтобы $r(A) < n$.

Упражнение 2.8. Докажите следствия из теоремы о ранге матрицы.

Замечание. Можно показать, что для вычисления ранга матрицы можно применять следующее правило «окаймления»:

если уже найден минор k-го порядка $D_k \neq 0$, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор D_k (т. е. содержащие D_k целиком внутри себя). Если все такие окаймляющие миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Поясним, что если среди окаймляющих миноров $(k+1)$-го порядка найдется минор $D_{k+1} \neq 0$, то повторяем правило для него и т. д.

Пример 2.5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ минор $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Все окаймляющие миноры $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, $r(A) = 2$.

2.2. Произвольные системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.6}$$

Пусть A — матрица из коэффициентов при неизвестных и B — расширенная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ясно, что $r(B) \geq r(A)$. Критерий совместности системы линейных уравнений дает следующая теорема.

Теорема 2.4 (теорема Кронекера — Капелли). Для совместности системы m линейных уравнений с n неизвестными необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы B был равен рангу матрицы системы A.

Доказательство. Необходимость. Пусть система уравнений (2.6) совместна, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такие, что если их подставить в систему вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно, то уравнения обратятся в тождества, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1; \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases}$$

Вычитая из последнего столбца матрицы B первый, умноженный на α_1, второй, умноженный на α_2, и так далее до α_n, получим эквивалентную матрицу

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right),$$

для которой $r(C) = r(B)$. Но ранг матрицы C равен также рангу матрицы A, так как все ненулевые миноры матрицы C равны соответствующим минорам матрицы A и обратно.

Достаточность. Пусть $r(B) = r(A) = r$, и пусть, для определенности, базисный минор D матрицы A расположен в левом верхнем углу:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда первые r строк матрицы B линейно независимы, а остальные $m - r$ линейно выражаются через них, тогда и последние $m - r$ уравнений системы являются линейными комбинациями первых r уравнений. В этом случае достаточно решить лишь первые r уравнений, их решения будут автоматически удовлетворять $m - r$ оставшихся уравнений.

Возможны два случая:

1) $r = n$. Тогда систему, состоящую из первых r уравнений, можно решить, например, по формулам Крамера (1.19) (см. подразд. 1.3, теорему 1.3). В этом случае система имеет единственное решение, т. е. она совместная и определенная;

2) $r > n$. Возьмем первые r уравнений системы и, оставив в левых частях первые r неизвестных, остальные перенесем в правые части:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$, например по формулам Крамера, получим выражения для $x_1, x_2, \dots, x_r$ через $b_1, b_2, \dots, b_r$ и *«свободные неизвестные»* $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, т. е. получим *общие решения системы*. Придавая свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ произвольные значения, будем получать при этом соответствующие значения *«главных неизвестных»* $x_1, x_2, \dots, x_r$ и, значит, частные решения системы. Это случай совместной неопределенной системы. ■

Упражнение 2.9. Пусть $m = n$ и $|A| = 0$. Докажите, что если система совместна, то она неопределенная.

Рассмотрим примеры решения систем уравнений.

Пример 2.6. Для системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ имеем $r(A) = 3$, $r(B) = 3$ (базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$), следовательно, система совместная и определенная. Из первых трех уравнений получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Пример 2.7. Для системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4; \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$ имеем $r(A) = 2$, $r(B) = 2$, следовательно, система совместная и, так как $r = 2 < 4 = n$, неопределенная. Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, и из первых двух уравнений находим общее решение системы $x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$.

Пример 2.8. Для системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4; \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{cases}$ $r(A) = 2$, $r(B) = 3$ и, следовательно, система несовместная.

Рассмотрим теперь однородную систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородные системы всегда совместны, так как всегда имеется, например, нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Это следует также из критерия совместности, так как для однородной системы $r(B) = r(A)$. Выясним, когда однородная система является неопределенной, т. е. кроме нулевого имеет еще и ненулевые решения.

Теорема 2.5. Для того чтобы однородная система уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее матрицы коэффициентов был меньше n.

Доказательство. Если $r = n$, то по теореме Крамера система имеет единственное (нулевое) решение. Следовательно, если система имеет ненулевое решение, то $r < n$. С другой стороны, если $r < n$, то из доказательства критерия совместности следует, что система будет неопределенной, т. е. будет иметь и ненулевые решения. ■

Упражнение 2.10. Используя теорему 2.5 и следствие из теоремы о ранге матрицы, докажите следующую теорему.

Теорема 2.6. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладала ненулевыми решениями, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Упражнение 2.11. Проверьте непосредственно подстановкой, что любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений также будет ее решением.

Определение 2.4. Линейно независимая система решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ однородной системы уравнений называется *фундаментальной*, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией этих решений.

Теорема 2.7 (о существовании фундаментальных систем решений). Если ранг r матрицы коэффициентов системы однородных уравнений меньше числа неизвестных n, то эта система уравнений обладает фундаментальными системами решений.

Доказательство. Пусть $r(A) = r < n$, где A — матрица коэффициентов системы, и пусть, для определенности, базисный минор D порядка r стоит в левом верхнем углу матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

После переноса свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ первых r уравнений системы в правые части получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Решив эту систему при значениях неизвестных $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$, получим соответствующие значения $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_r = \alpha_r$ для первых r неизвестных. Это дает строку — решение исходной системы

$$e_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \ldots, 0).$$

Аналогично, придавая свободным неизвестным значения $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 0$, вычислим соответствующие значения неизвестных $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r$ и получим строку — решение

$$e_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

и т. д. Таким образом найдем $k = n - r$ решений системы однородных уравнений. Эти k решений между собой линейно независимы, так как ранг образованной ими матрицы из k строк

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

в точности равен k.

Покажем, что решения $e_1, e_2, \dots, e_k$ действительно образуют фундаментальную систему. Для этого осталось показать, что каждое решение однородной системы линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_k$. Итак, пусть

$$e(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r, \theta_{r+1}, \dots, \theta_n)$$

— произвольное решение системы однородных уравнений. Рассмотрим строку

$$e_0 = e - \theta_{r+1}e_1 - \theta_{r+2}e_2 - \dots - \theta_n e_k.$$

Легко видеть, что

$$e_0 = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r, 0, 0, \dots, 0)$$

и тоже является решением системы. Так как значения свободных неизвестных в e_0 равны 0, то и значения всех остальных неизвестных в e_0 равны 0, т. е. e_0 — нулевая строка

$$e_0 = e - \theta_{r+1}e_1 - \theta_{r+2}e_2 - \dots - \theta_{r+k}e_k = \mathbf{0},$$

и, значит,

$$e = \theta_{r+1}e_1 + \theta_{r+2}e_2 + \dots + \theta_{r+k}e_k. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, общее решение однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ke_k,$$

где $k = n - r(A)$, $e_1, e_2, \dots, e_k$ — фундаментальная система решений, а $c_1, c_2, \dots, c_k$ — произвольные числа.

Упражнение 2.12. Проверьте непосредственной подстановкой, что разность любых двух решений неоднородной системы линейных уравнений будет решением соответствующей однородной системы.

Упражнение 2.13. Проверьте непосредственной подстановкой, что сумма какого-нибудь частного решения $x_ч$ неоднородной системы с любым решением соответствующей однородной системы линейных уравнений будет решением неоднородной системы.

Таким образом, общее решение неоднородной системы линейных уравнений есть сумма какого-либо частного $x_ч$ и общего решений соответствующей однородной системы:

$$x = x_ч + c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ke_k,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_k$ — фундаментальная система решений; $c_1, c_2, \dots, c_k$ — произвольные постоянные.

При решении систем линейных уравнений на практике часто применяют *метод Гаусса* (или метод последовательного исключения неизвестных), который заключается в следующем. В системе линейных уравнений (2.6), не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то переставим первое уравнение системы с каким-нибудь другим, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю. Преобразуем систему, исключив неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого первое уравнение умножим на число $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из второго, затем умножим на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычтем из третьего и т. д. Приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Число уравнений в системе уменьшится, если в некоторых уравнениях в левой части все коэффициенты при неизвестных станут нулевыми, а в правой части получится нуль и мы эти уравнения отбросим.

Повторив процедуру для уравнений $2, \dots, m$ и исключив из уравнений $3, \dots, m$ неизвестное x_2 и т. д., получим либо какое-нибудь уравнение, в котором правая часть не равна нулю, а левая равна, тогда система несовместна, либо систему, матрица которой треугольная или трапециевидная. В случае треугольной матрицы разрешим последнее уравнение относительно x_n, подставим найденное значение x_n в предыдущее $(n-1)$-е уравнение, найдем из него x_{n-1} и т. д. Система окажется определенной. В случае трапециевидной матрицы выражаем из последнего уравнения x_m через остальные неизвестные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ и придавая им произвольные значения, будем получать различные решения системы. Система окажется неопределенной.

Пример 2.9. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Преобразуя расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -3 & -2 & 11 \\ 3 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right),$$

приходим к эквивалентной системе уравнений с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11; \\ \qquad\quad -8x_3 = 8, \end{cases}$$

решение которой $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

Пример 2.10. Дана система $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1; \\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 = -5; \\ \quad 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, система несовместна (получили уравнение $0=2$).

Пример 2.11. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Это однородная система, число уравнений меньше числа неизвестных, следовательно, эта система неопределенная. Преобразуя матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \qquad 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 0; \\ \qquad 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы $r = 3$, значит число свободных неизвестных $n - r = 4 - 3 = 1$. В качестве свободного неизвестного выберем x_4. Тогда из первого уравнения $x_2 = x_4$, из второго $x_3 = \dfrac{4}{5}x_4$, из третьего $x_1 = \dfrac{3}{5}x_4$. Полагая $\alpha = x_4$, находим общий вид решения

$$\left(\frac{3}{5}\alpha, \alpha, \frac{4}{5}\alpha, \alpha\right) = \alpha\left(\frac{3}{5}, 1, \frac{4}{5}, 1\right) = c(3,5,4,5).$$

Здесь $e_1(3,5,4,5)$ — фундаментальная система решений, состоящая из одного решения; c — произвольная постоянная.

2.3. Конечномерные векторные пространства

Определение 2.5. Множество V элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным*, или *векторным*, *пространством*, если для любых двух его элементов x, y определена сумма $x + y \in V$, и для каждого элемента x и каждого числа α определено произведение $\alpha x \in V$, причем для любых чисел α, β и любых элементов x, y, z из V выполнены следующие аксиомы векторного пространства:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует нулевой элемент $\mathbf{0} \in V$, такой, что $x + \mathbf{0} = x$ для любого $x \in V$;

4) для любого $x \in V$ существует противоположный элемент $(-x) \in V$, такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Элементы векторного пространства называются *векторами.*

Числа в определении векторного пространства могут быть действительными (вещественными), комплексными, рациональными и т. д. Соответственно векторные пространства будут называться действительными (вещественными), комплексными и т. д. Здесь будем рассматривать действительные векторные пространства.

Примеры векторных пространств рассмотрены в упражнении 2.14.

Упражнение 2.14. Докажите, что следующие множества образуют векторные пространства:

1) векторы на плоскости;

2) векторы в пространстве;

3) множество решений системы линейных однородных уравнений;

4) множество функций, непрерывных на отрезке;

5) множество $\mathbf{P}_n$ многочленов степени не выше n;

6) матрицы размера $m \times n$;

7) множество $\mathbf{R}^n$ упорядоченных наборов из n чисел.

Простейшие свойства векторного пространства

1. *Единственность нуля.* Пусть в V есть два нуля $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. По аксиоме 3 (см. определение 2.5) $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$; $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$, но $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$, следовательно, $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

2. *Единственность противоположного элемента.* Пусть два элемента y и z являются противоположными для x. Тогда $y + x + z = y + (x + z) = y + \mathbf{0} = y$. С другой стороны, $y + x + z = (y + x) + z = \mathbf{0} + z = z$. Следовательно, $y = z$.

3. Пусть x — произвольный элемент из V. Тогда $0 \cdot x = \mathbf{0}$. Действительно, так как $0 = 0 + 0$, то $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Прибавим к обеим частям этого равенства $(-0 \cdot x)$:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) =$$

$$= 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x.$$

Следовательно, $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

4. Для любого числа α имеет место равенство $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Действительно,

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}.$$

Прибавим $(-\alpha \cdot \mathbf{0})$:

$$\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) =$$

$$= \alpha \cdot \mathbf{0} + (\alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0})) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0},$$

т. е. $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$.

5. Если $\alpha x = \mathbf{0}$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = \mathbf{0}$. Действительно, если $\alpha = 0$, то $\alpha x = \mathbf{0}$. Если $\alpha \neq 0$, то

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

6. Для любого $x \in V$ элемент $(-1)x$ является противоположным. Действительно,

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Элемент $x + (-y)$ называется *разностью* $x - y$ векторов x и y.

Определение 2.6. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторного пространства V называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \mathbf{0}. \qquad (2.7)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми.*

Таким образом, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда из равенства (2.7) следует, что все α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ равны нулю.

Если же векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы, т. е. имеет место (2.7), причем не все α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, равны нулю. Например, пусть $\alpha_k \neq 0$, то

$$a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}a_{k-1},$$

т. е. a_k есть линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ (или a_k линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$).

Упражнение 2.15. Докажите, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда по крайней мере один из них линейно выражается через остальные.

Упражнение 2.16. Докажите, что:

1) любые три вектора на плоскости линейно зависимы;

2) любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Определение 2.7. Векторное пространство V называется *конечномерным*, именно *n-мерным*, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, но любая система, состоящая более чем из n векторов, является линейно зависимой. Число n в этом случае называется *размерностью* пространства и обозначается $d(V)$ или $\dim V$.

Определение 2.8. Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства называется его *базисом*.

Теорема 2.8. Каждый вектор x линейного n-мерного пространства можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольный базис n-мерного пространства V, и $x \in V$. Так как любые $n+1$ векторов из V линейно зависимы, то найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha x = \mathbf{0}.$$

При этом $\alpha \neq 0$, так как иначе из последнего равенства получили бы $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \mathbf{0}$, чего не может быть, так как e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — базис. Значит

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} e_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n.$$

Полагая $x_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$, будем иметь

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{2.8}$$

Это представление единственно. В самом деле, если есть еще одно представление $x = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, то

$$(y_1 - x_1)e_1 + (y_2 - x_2)e_2 + \ldots + (y_n - x_n)e_n = \mathbf{0}.$$

Отсюда, так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, получаем, что $y_i - x_i = 0$, т.е. $y_i = x_i$ для любых $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

Определение 2.9. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в пространстве V и $x \in V$. Тогда числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в представлении (2.8) называются *координатами вектора x в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Ясно, что если у двух векторов координаты совпадают, то и векторы совпадают. Следовательно, задавать векторы можно координатами по известному базису:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.9}$$

Упражнение 2.17. Докажите, что:

1) при сложении векторов их соответствующие координаты складываются:

$$y + x = (y_1 + x_1)e_1 + \ldots + (y_n + x_n)e_n = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n);$$

2) при умножении на число все координаты вектора умножаются на это число:

$$\alpha x = \alpha x_1 e_1 + \alpha x_2 e_2 + \ldots + \alpha x_n e_n = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n);$$

3) у нулевого вектора все координаты в любом базисе равны нулю:

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0);$$

4) у противоположного вектора координаты умножаются на -1:

$$-x = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Замечание. Соответствие (2.9), которое получено между элементами n-мерного векторного пространства и элементами из $\mathbf{R}^n$ — упорядоченными строками из n чисел, называется изоморфизмом. Изоморфизм позволяет свести изучение свойств произвольного n-мерного векторного пространства к изучению пространства $\mathbf{R}^n$.

Теорема 2.9. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — линейно независимые векторы пространства V и каждый вектор $x \in V$ линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в V.

Доказательство. Нужно доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — любая система векторов из V и $m > n$, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно зависимы. По условию

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11} e_1 + \ldots + \alpha_{1n} e_n; \\ a_2 &= \alpha_{21} e_1 + \ldots + \alpha_{2n} e_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m &= \alpha_{m1} e_1 + \ldots + \alpha_{mn} e_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$. В этой матрице $m(m > n)$ строк и n столбцов. Следовательно, ее ранг $r(A) \leq n \leq \leq m$, и значит, ее строки линейно зависимы. Это означает, что линейно зависимы и векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$, откуда следует, что $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис. ■

Упражнение 2.18. Докажите, что пространство $\mathbf{R}^n$ n-мерно. (*Указание.* Докажите, что векторы $e_1(1, 0, \dots, 0), e_2(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n(0, 0, \dots, 1)$ образуют базис в $\mathbf{R}^n$.)

Пример 2.12. Пространство $\mathbf{P}_n$ многочленов степени не выше n имеет размерность $n+1$. Действительно, многочлены $1, x, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы и любой многочлен $p \in \mathbf{P}_n$ выражается через них очевидным образом.

Теорема 2.10. В конечномерном пространстве каждое множество линейно независимых векторов можно включить в некоторый базис.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ — система линейно независимых векторов из V. Если любой из остальных векторов пространства V линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_k$, то $e_1, e_2, \dots, e_k$ — базис. Если найдется какой-нибудь вектор e_{k+1}, который линейно через $e_1, e_2, \dots, e_k$ не выражается, то присоединим его к $e_1, e_2, \dots, e_k$. Получим линейно независимую систему $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}$ из $k+1$ векторов. Действительно, если

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} = \mathbf{0},$$

то либо $\alpha_{k+1} = 0$, и тогда $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = \mathbf{0}$, и значит, $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, и $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}$ линейно независимы; либо $\alpha_{k+1} \neq 0$, тогда

$$e_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} e_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} e_k,$$

и e_{k+1} линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_k$ — противоречие.

Далее повторяем доказательство. Процесс когда-нибудь закончится, так как пространство V конечномерно, т. е. в нем может существовать только конечное число линейно независимых векторов. ■

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ имеются два базиса: $e_1, e_2, \dots, e_n$ (будем называть его «старый») и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ — «новый». Каждый элемент «нового» базиса можно разложить по элементам «старого»:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n; \\ e'_2 &= a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n, \end{aligned}$$

так что коэффициенты разложения можно записать по столбцам в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Определитель матрицы $|A| \neq 0$, так как в противном случае столбцы ее были бы линейно зависимы, а значит, были бы линейно зависимы и векторы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, чего быть не может, так как $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ — базис.

Покажем, как связаны координаты вектора x в «старом» и «новом» базисе. Пусть

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Подставив вместо e'_1 его разложение в «старом» базисе, получим

$$\begin{aligned} x &= x'_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \\ &+ x'_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n) + \dots + \\ &+ x'_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = \\ &= (a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + \dots + a_{1n} x'_n) e_1 + \\ &+ (a_{21} x'_1 + \dots + a_{2n} x'_n) e_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1} x'_1 + \dots + a_{nn} x'_n) e_n, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + \dots + a_{1n} x'_n; \\ x_2 &= a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + \dots + a_{2n} x'_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 + \dots + a_{nn} x'_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

ввиду единственности разложения вектора по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Равенства (2.10) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x = Ax'. \qquad (2.11)$$

Формулы (2.10) и (2.11) называют *формулами перехода к новому базису.*

Пример 2.13. Пусть e_1, e_2 — базис на плоскости, состоящий из единичных векторов, направленных по осям прямоугольной системы координат. Повернув оси на угол φ против часовой стрелки, получим новый базис e'_1, e'_2, причем $e'_1 = e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi$; $e'_2 = -e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi$. Так что матрица перехода к новому базису имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определение 2.10. *Подпространством* L векторного пространства V называется множество его элементов, само являющееся векторным пространством относительно введенных в V операций сложения векторов и умножения на число.

Упражнение 2.19. Докажите, что:

1) в трехмерном пространстве векторов подпространствами будут все векторы, параллельные какой-либо плоскости или прямой;

2) в пространстве $\mathbf{P}_n$ многочленов степени не выше n множество $\mathbf{P}_k$, $k \le n$ будет подпространством;

3) $\mathbf{P}_n$ — подпространство в пространстве всех многочленов;

4) множество всех многочленов — подпространство в пространстве непрерывных функций;

5) множество решений системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными с матрицей коэффициентов A будет подпространством в $\mathbf{R}^n$ размерности $k = n - r(A)$.

Определение 2.11. *Пересечением* $L_3 = L_1 \cap L_2$ *подпространств* $L_1 \in V$ и $L_2 \in V$ называется множество всевозможных векторов из V, принадлежащих одновременно L_1 и L_2. *Суммой* $L_4 = L_1 + L_2$ называется множество всех векторов вида $u + v$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$.

Упражнение 2.20. Докажите, что пересечение и сумма двух подпространств являются подпространствами.

Теорема 2.11. Если L_1 и L_2 — подпространства векторного пространства V, то

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2). \qquad (2.12)$$

Доказательство. В $L_3 = L_1 \cap L_2$ выберем какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_k$ и дополним его до базиса в L_1:

$$e_1, \ldots, e_k, \quad f_{k+1}, \ldots, f_p,$$

и до базиса в L_2:

$$e_1, \ldots, e_k, \quad g_{k+1}, \ldots, g_q.$$

Покажем, что векторы $e_1, \ldots, e_k$, $f_{k+1}, \ldots, f_p$, $g_{k+1}, \ldots, g_q$ линейно независимы. Тогда, так как любой $z \in L_4 = L_1 + L_2$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$, $f_{k+1}, \ldots, f_p$, $g_{k+1}, \ldots, g_q$, это будет базис в L_4.

Пусть

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k + \beta_{k+1} f_{k+1} + \ldots +$$
$$+ \beta_p f_p + \gamma_{k+1} g_{k+1} + \ldots + \gamma_q g_q = \mathbf{0}.$$

Тогда вектор

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k + \beta_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \beta_p f_p =$$
$$= -\gamma_{k+1} g_{k+1} - \ldots - \gamma_q g_q$$

с одной стороны, принадлежит L_1, а с другой — L_2. Значит, $a \in L_3$. Тогда $a = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \ldots + \sigma_k e_k$ и ввиду единственности разложения по базису в L_1 получаем, что $\alpha_1 = \sigma_1, \ldots, \alpha_k = \sigma_k$ и $\beta_{k+1} = 0, \ldots, \beta_p = 0$. Следовательно,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k + \gamma_{k+1} g_{k+1} + \ldots + \gamma_q g_q = \mathbf{0},$$

и значит, все α_i, $i = 1, \ldots, k$; γ_j, $j = k+1, \ldots, q$ равны нулю, так как $e_1, \ldots, e_k$, $g_{k+1}, \ldots, g_q$ — базис в L_2.

Итак, $e_1, \ldots, e_k$, $f_{k+1}, \ldots, f_p$, $g_{k+1}, \ldots, g_q$ — базис в L_4. Тогда

$$\dim L_4 = k + (p - k) + (q - k) =$$
$$= p + q - k = \dim L_1 + \dim L_2 \dim L_3,$$

откуда и следует формула (2.12). ■

Пример 2.14. В $\mathbf{R}^4$ подпространства L_1 и L_2 размерности 2: а) могут пересекаться по нулевому вектору и тогда их сумма совпадает со всем пространством; б) могут пересекаться по прямой, тогда их сумма имеет размерность $2 + 2 - 1 = 3$; в) могут совпадать, тогда $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 2$.

Если $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$, то L_1 и L_2 в $\mathbf{R}^4$ и: а) либо пересекаются по плоскости, $\dim L_1 + \dim L_2 = 2 + 4$; б) либо совпадают, $\dim L_1 + \dim L_2 = 3 + 3$, других возможностей нет.

Если $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 3$, то: а) либо L_1 и L_2 пересекаются по прямой; б) либо $L_1 \subset L_2$.

Определение 2.12. Если пространство L является суммой подпространств L_1 и L_2, пересечение $L_1 \cap L_2$ которых состоит лишь из нулевого вектора, то говорят, что L есть *прямая сумма* подпространств L_1 и L_2 и пишут

$$L = L_1 \oplus L_2.$$

Из теоремы 2.11 следует, что если $L = L_1 \oplus L_2$, то $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$.

Пример 2.15. $\mathbf{R}^3$ может быть прямой суммой $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$, где $\mathbf{R}^1$ — прямая, $\mathbf{R}^2$ — плоскость, проходящая через начало координат. $\mathbf{R}^3$ не может быть прямой суммой двух плоскостей.

Теорема 2.12. Если $L = L_1 \oplus L_2$, то каждый вектор из L единственным образом представляется в виде $u + v$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$.

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Тогда $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = \mathbf{0}$, поскольку подпространства L_1 и L_2 пересекаются только по нулевому вектору. Таким образом, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. ■

Определение 2.13. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — некоторая система векторов из V. Совокупность $\mathcal{L}$ всевозможных линейных комбинаций этих векторов $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$ образует подпространство в V. Это подпространство называют *линейной оболочкой векторов* $a_1, \ldots, a_k$, обозначают $\mathcal{L} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и говорят, что $\mathcal{L}$ натянуто на векторы $a_1, \ldots, a_k$.

Упражнение 2.21. Пусть A — матрица, в столбцах которой стоят координаты векторов a_i, $i = 1, \ldots, k$, по некоторому базису в V. Докажите, что $\dim \mathcal{L} = r(A)$.

2.4. Линейные операторы

Определение 2.14. Говорят, что в векторном пространстве V *задан линейный оператор* или *линейное преобразование* $\mathcal{A}$, если каждому вектору $x \in V$ поставлен в соответствие определенный вектор $\mathcal{A}(x)$, или $\mathcal{A}x$, принадлежащий V, и при этом для любых двух векторов x и y из V и произвольного числа α:

1) $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$.

Выберем в пространстве V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда, если $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, то в силу линейности оператора $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}x = x_1\mathcal{A}e_1 + \ldots + x_n\mathcal{A}e_n$. Так как $\mathcal{A}e_i$ тоже можно разложить по базису: $\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ni}e_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\mathcal{A}x = x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) +$$
$$+ x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \ldots +$$
$$+ x_n(a_{1n}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \ldots +$$
$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n,$$

так что если $\mathcal{A}x = x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n$, то

$$\mathcal{A}x = Ax = x',$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n, в i-м столбце которой стоят координаты разложения вектора $\mathcal{A}e_i$ по базису; матрица A называется *матрицей линейного преобразования* $\mathcal{A}$.

Обратно, каждая квадратная матрица A порядка n может рассматриваться как матрица некоторого линейного преобразования.

Будем обозначать линейный оператор и его матрицу одной и той же буквой: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — операторы, A, B, C — матрицы.

Определение 2.15. Оператор называется *невырожденным*, если $\mathcal{A}x = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$, иначе он называется *вырожденным*.

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ невырожден тогда и только тогда, когда однородная система уравнений

$$Ax = \mathbf{0} \tag{2.13}$$

имеет единственное (нулевое) решение, т. е. когда матрица A невырождена; оператор $\mathcal{A}$ вырожден тогда и только тогда, когда система (2.13) имеет ненулевые решения, т. е. когда матрица A вырождена.

Упражнение 2.22. Рассмотрите следующие примеры и докажите, что преобразование является линейным. Найдите матрицу преобразования:

1) поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат будет линейным преобразованием;

2) поворот пространства на угол φ вокруг оси Oz будет линейным преобразованием;

3) ортогональное проектирование векторов на плоскость xOy — вырожденное линейное преобразование;

4) пусть $\mathcal{A}x$ — симметричный вектор к вектору x относительно плоскости xOy. Тогда $\mathcal{A}$ — линейное преобразование;

5) в пространстве $\mathbf{P}_n$ многочленов степени не выше n оператор дифференцирования, очевидно, линейный и вырожденный (рассмотрите базис $\left\{1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}\right\}$);

6) тождественный оператор: $\mathcal{E}x = x$ для любого $x \in V$;

7) нулевой оператор: $\mathcal{O}x = \mathbf{0}$ для любого $x \in V$.

Упражнение 2.23. Докажите, что при линейном преобразовании векторного пространства образом подпространства снова является подпространство.

Определение 2.16. *Суммой* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *операторов* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется такой оператор $\mathcal{C}$, который ставит в соответствие вектору x вектор $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$.

Определение 2.17. *Умножением оператора* $\mathcal{A}$ *на число* α называется такой оператор, который ставит в соответствие вектору x вектор $\alpha\mathcal{A}x$.

Очевидно, сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на число будут линейными операторами с матрицами, равными сумме матриц и произведению матрицы на число соответственно. При этом выполняются все аксиомы векторных пространств. Следовательно, множество всех линейных операторов в пространстве V является линейным пространством.

Определение 2.18. *Произведением* $\mathcal{AB}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{C}$, определяемый следующим образом: $\mathcal{C}x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$.

Можно доказать, что произведение $\mathcal{AB}$ линейных операторов также будет линейным оператором, матрицей которого является матрица AB.

Отметим также, что для невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}$ существует *обратный* оператор $\mathcal{A}^{-1}$, такой, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Для доказательства достаточно рассмотреть оператор с матрицей A^{-1}.

Теорема 2.13. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор с матрицей A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и C — матрица перехода к новому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Тогда в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$A_1 = C^{-1}AC. \qquad (2.14)$$

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{C}$ с матрицей C. Для него, очевидно, $\mathcal{C}e_i = e'_i$. Это преобразование невырожденное, так что $\mathcal{C}^{-1}$ существует, имеет матрицу, равную C^{-1}, и для него $\mathcal{C}^{-1}e'_i = e_i$. Применив к равенству

$$\mathcal{A}e'_i = a'_{1i}e'_1 + a'_{2i}e'_2 + \ldots + a'_{ni}e'_n$$

оператор $\mathcal{C}^{-1}$, получим

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}e'_1 = a'_{1i}\mathcal{C}^{-1}e'_1 + a'_{2i}\mathcal{C}^{-1}e'_2 + \ldots + a'_{ni}\mathcal{C}^{-1}e'_n =$$

$$= a'_{1i}e_1 + a'_{2i}e_2 + \ldots + a'_{ni}e_n,$$

откуда

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}e_i = a'_{1i}e_1 + a'_{2i}e_2 + \ldots + a'_{ni}e_n,$$

и формула (2.14) доказана. ■

Из формулы (2.14) следует, что определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса, так как

$$|A_1| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}||A||C| = |A|.$$

Пример 2.16. Пусть в базисе e_1, e_2 оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Напишем матрицу этого преобразования в базисе $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$. Здесь матрица перехода $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, и $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, следовательно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.19. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве V. Совокупность $\mathcal{A}V$ всевозможных векторов вида $\mathcal{A}x$, где $x \in V$, называется *областью значений оператора* $\mathcal{A}$, или *образом пространства* V *при преобразовании* $\mathcal{A}$, и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Множество всевозможных векторов $x \in V$, для которых $\mathcal{A}x = \mathbf{0}$, называется *ядром оператора* $\mathcal{A}$ и обозначается $\ker \mathcal{A}$.

Упражнение 2.24. Докажите, что область значений и ядро оператора $\mathcal{A}$ являются подпространствами в V, причем размерность $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ совпадает с рангом $r(A)$ матрицы A.

Размерность области значений оператора $\mathcal{A}$ называется *рангом* оператора $\mathcal{A}$, а размерность ядра — *дефектом* линейного оператора $\mathcal{A}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.14. Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности n пространства:

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \ker \mathcal{A} = n.$$

Определение 2.20. Подпространство V_1 пространства V называется *инвариантным относительно линейного оператора* $\mathcal{A}$, если образ $\mathcal{A}x$ каждого вектора x из V_1 принадлежит V_1.

Упражнение 2.25. Докажите инвариантность подпространств в следующих примерах:

1) $\mathcal{A}$ — поворот вокруг оси Oz. Инвариантными подпространствами будут, например, плоскость xOy и ось Oz;

2) $\mathcal{A}$ — ортогональное проектирование пространства $\mathbf{R}^3$ на xOy. Инвариантными подпространствами будут все плоскости, проходящие через ось Oz; все прямые, лежащие в плоскости xOy и проходящие через начало координат (в частности, оси Ox и Oy);

3) в пространстве $\mathbf{P}_n$ многочленов степени не выше n подпространства $\mathbf{P}_k$ при всех k, $0 \le k \le n$, инвариантны относительно оператора дифференцирования;

4) в любом пространстве каждое подпространство инвариантно относительно тождественного и нулевого операторов;

5) в любом пространстве само пространство и его подпространство, состоящее только из нулевого вектора, инвариантны относительно любого линейного оператора.

Упражнение 2.26. Докажите, что пересечение и сумма подпространств, инвариантных относительно линейного оператора, инвариантны относительно этого оператора.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.15. Если $\mathcal{A}$ — невырожденный линейный оператор и L — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$, то L инвариантно и относительно $\mathcal{A}^{-1}$.

Пусть L — одномерное инвариантное подпространство относительно линейного оператора $\mathcal{A}$. Пусть $x \in L$, $x \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathcal{A}x \in L$, $\mathcal{A}x = \lambda x$, где λ — некоторое число. Если y — любой другой вектор из L, то $y = \alpha x$ и $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x = \alpha\lambda x = \lambda\alpha x = \lambda y$.

Определение 2.21. Вектор $x \neq \mathbf{0}$ называется *собственным вектором линейного оператора* $\mathcal{A}$, если найдется такое число λ, что $\mathcal{A}x = \lambda x$. Это число λ называется соответствующим вектору x *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$ (и матрицы A).

Таким образом, если L — одномерное инвариантное подпространство, то каждый ненулевой вектор из L является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ и притом с одним и тем же собственным значением. Обратно, если x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то порожденное им одномерное подпространство L (состоящее из всех векторов вида αx) будет, очевидно, инвариантным относительно $\mathcal{A}$.

Предположим, что x — собственный вектор, λ — соответствующее собственное значение. Тогда $\mathcal{A}x = \lambda x$. Выберем в пространстве V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, а матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе $A = (a_{ik})$. Тогда $Ax = \lambda x$ и $(A - \lambda E)x = \mathbf{0}$, т. е. собственный вектор является решением системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Для существования ненулевого решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. чтобы было $\det(A - \lambda E) = 0$ — *характеристическое уравнение* для A. Если λ — корень характеристического уравнения, то λ будет собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Легко заметить, что левая часть характеристического уравнения является многочленом степени n относительно переменной λ. Этот многочлен

$$k(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называют *характеристическим многочленом* оператора $\mathcal{A}$. Таким образом, для нахождения собственного вектора оператора нужно найти корни характеристического многочлена и затем — решение соответствующей однородной системы уравнений.

Теорема 2.16. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $k_e(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Если $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ — другой базис и C — матрица перехода, то в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$

$$k(\lambda) = \det(A_1 - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - \lambda E) =$$

$$= \det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) =$$

$$= \det(C^{-1})\det(A - \lambda E)\det(C) = \det(A - \lambda E) = k_e(\lambda). \quad \blacksquare$$

Пример 2.17. Для линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ характеристический многочлен $k(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$ имеет корни $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Собственные векторы находим из систем: для $\lambda_1 = 6$

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 + (4-6)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = c\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

— собственные векторы при $c \neq 0$; для $\lambda_2 = -1$

$$\begin{cases} (1+1)x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 + (4+1)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— собственные векторы при $c \neq 0$.

Теорема 2.17. Собственные векторы линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу рассматриваемых собственных векторов. Для одного вектора это ясно, так как по определению собственного вектора он отличен от $\mathbf{0}$ и, значит, из равенства $\alpha x = \mathbf{0}$ следует $\alpha = 0$. Пусть утверждение верно для $(k-1)$-го вектора, т. е. собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, отвечающие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, линейно независимы. Предположим, что k собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям, линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \mathbf{0} \qquad (2.16)$$

и не все α_i, $i = 1, \ldots, k$ равны нулю. Применив к (2.16) оператор, имеем

$$\alpha_1\lambda_1 x_1 + \alpha_2\lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k x_k = \mathbf{0}.$$

Вычтем из этого равенства равенство (2.16), умноженное на λ_k, получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Так как $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ линейно независимы и все λ_i, $i = 1, \ldots, k$, попарно различны, то отсюда следует, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, k-1$, и значит, из равенства (2.16) $\alpha_k x_k = \mathbf{0}$, откуда $\alpha_k = 0$, так как $x_k \neq \mathbf{0}$. Таким образом, все α_i равны 0, $i = 1, \ldots, k$, — противоречие с предположением о линейной зависимости. Значит, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно независимы. $\blacksquare$

Теорема 2.18 (о существовании инвариантных подпространств). Для всякого линейного оператора, действующего в вещественном пространстве размерности $n > 2$, существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет хотя бы один вещественный корень, то оператор имеет собственный вектор, и значит, в V существует одномерное инвариантное подпространство.

Если характеристический многочлен не имеет действительных корней, то по основной теореме алгебры характеристический многочлен имеет хотя бы один комплексный корень, т. е. существует комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, такое, что $\det(A - \lambda E) = 0$. Решив систему $(A - \lambda E)z = \mathbf{0}$, получим соответствующее комплексное решение

$$z = x + iy = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}.$$

Систему $(A - \lambda E)z = \mathbf{0}$, т. е. $A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$, или $Ax + iAy = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$, можно представить в виде двух систем отдельно для действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \mathcal{A}x = \alpha x - \beta y; \\ \mathcal{A}y = \alpha y + \beta x. \end{cases} \tag{2.17}$$

Значит, подпространство, порожденное векторами x и y, инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Это подпространство двумерно, так как x и y линейно независимы. Если бы они были линейно зависимы, например $y = \gamma x$, то $\mathcal{A}x = \alpha x - \beta\gamma x = (\alpha - \beta\gamma)x$ и получили бы, что x — собственный вектор с вещественным собственным значением $\alpha - \beta\gamma$. Это противоречит предположению о том, что вещественных корней у характеристического многочлена нет. ■

Пример 2.18. Рассмотрим вопрос: «Существует ли стационарное разбиение множества на группы с матрицей перехода к новому разбиению $A = (a_{ij})$, $0 \le a_{ij} \le 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в частности существует ли стационарное распределение генотипа (см. пример 1.5)?» Стационарное распределение — это такое распределение $x \ne \mathbf{0}$, которое в следующий момент времени (в следующем поколении) не изменится, т. е. должно выполняться $Ax = x$.

Таким образом, получили задачу о собственных значениях и собственных векторах для матрицы A (см. определение 2.21) и нас интересует, есть ли среди собственных значений λ матрицы A значение, равное единице.

Предположим, что $x \ne \mathbf{0}$ — собственный вектор, λ — соответствующее собственное значение. Тогда $Ax = \lambda x$ и для нахождения x нужно решить систему однородных уравнений (2.15). Эта система, как известно (см. теоремы 2.5 и 2.6), имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю, т. е. когда λ — корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е. уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Относительно λ это есть уравнение n-й степени. Покажем, что $\lambda = 1$ — корень этого уравнения. Прибавим к первой строке определителя вторую, затем третью и так далее до n-й строки. При этом, как известно из свойств определителя, определитель не изменится. Но после сделанных преобразований он будет равен

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} - 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2} - 1 & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix}$$

(в характеристическом уравнении приняли $\lambda = 1$). Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ по свойству матрицы перехода, первая строка этого определителя состоит из нулевых элементов, и значит, определитель равен нулю, а $\lambda = 1$ является корнем характеристического уравнения. Следовательно, найдутся и собственные векторы x, удовлетворяющие системе (2.15) с собственным значением $\lambda = 1$. Можно показать, что среди собственных векторов найдется такой, для которого $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, т. е. такой, который будет стационарным распределением.

Пример 2.19. Найдем стационарное распределение генотипа, когда матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$. Убедимся, что $\lambda = 1$ — корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1/2 - 1 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/3 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим систему уравнений для нахождения собственного вектора (см. систему (2.15)):

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 = 0; \\ \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, для нахождения решения достаточно рассмотреть первое уравнение. Так как мы ищем стационарное распределение генотипа, должны еще выполняться условия: $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2$, и $x_1 + x_2 = 1$. Подставив $x_2 = 1 - x_1$ в первое уравнение системы, получим решение $x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$, которое и будет стационарным распределением генотипа, что легко проверить, подставив найденное решение в уравнение $Ax = x$.

Глава 3

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Общее понятие функции

Рассмотрим некоторое множество (совокупность элементов произвольной природы) X. Пусть задан закон, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ элемент другого множества Y. Тогда скажем, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$ со значениями в Y. Множество X называется *областью определения* данной функции, а множество Y_1 элементов Y, которые имеют вид $f(x)$ при некотором $x \in X$, — *областью ее значений*. Сам закон может быть задан любым способом, никаких ограничений на способ задания не накладывается. Здесь будем иметь дело почти исключительно со случаем, где и X и Y являются некоторыми подмножествами множества действительных чисел, т. е. с действительной функцией действительной переменной. Один из наиболее популярных способов задания такой функции — формульный (например, $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и т. п.) Хотя, строго говоря, нужно помнить, что формула — это еще не функция, так как при одной и той же формуле и разных областях определения получаются разные функции. Тем не менее при решении конкретных задач действует (часто молчаливое) соглашение, что, если не оговорено противное, то областью определения функции считается естественная область определения, т. е. множество всех чисел, для которых имеет смысл данная формула. Так, областью определения функции $y = x^2$ будет вся числовая ось, а областью определения функции $y = \sqrt{x}$ — множество $x \in [0, \infty)$.

Формульный способ задания функции не единственный. Можно, например, рассмотреть функцию, которая каждому рациональному числу сопоставляет единицу, а каждому иррациональному числу — нуль. Эта функция называется функцией Дирихле. Также будут рассмотрены функции, которые задаются с помощью интегралов от других функций, бесконечных сумм и т. п.

Особый случай представляют функции, заданные на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Такие функции называются *последовательностями*. Для них обычно вместо $f(n)$ используется обозначение a_n, и аргумент трактуется как номер соответствующего числа. Так что можно понимать последовательность как некоторое множество перенумерованных чисел. Стандартное обозначение для последовательности: $\{a_n\}$ или в развернутом виде:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3.1}$$

Здесь a_n называют *общим членом* последовательности. Теперь определим понятие предела для такой последовательности и изучим свойства подобных пределов.

Следует отметить, что существуют геометрические способы представления функций. Для функций действительного переменного таким способом служит *график*, т. е. линия на плоскости, которая в декартовой системе координат задается уравнением $y = f(x)$. (По-другому: график — это множество точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$.)

Для последовательности $\{a_n\}$ такой способ представления неудобен, поскольку графиком в этом случае является дискретное множество точек на плоскости. Поэтому члены последовательностей обычно изображают в виде точек на числовой оси.

3.2. Предел последовательности

В математических формулировках постоянно встречаются слова «для любого» и «существует», для сокращения записи которых применяют кванторы: $\forall$ и $\exists$ соответственно. (Необходимо отметить, что роль кванторов значительно превосходит простое сокращение записи. Они являются важным элементом такого раздела математики, как математическая логика. Однако эти вопросы лежат за пределами данного курса.)

Определение 3.1. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$ (обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для любого положительного числа ε существует номер N, такой, что для любого большего или равного номера n выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. С использованием кванторов это можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Если члены последовательности изображать в виде точек на числовой оси, то соотношению (3.2) можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Для любого положительного ε найдется номер (вообще говоря, свой для каждого ε), начиная с которого все члены последовательности окажутся внутри ε-окрестности точки a.

Здесь под ε-окрестностью точки a понимается симметричный интервал с центром в точке a и радиуса ε (т. е. расстояния от центра интервала до его концов равны ε) (рис. 3.1).

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся последовательностью*.

Отметим, что для сходимости a_n к пределу a используется иногда обозначение $a_n \to a$.

Пример 3.1. $a_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Пример 3.2. Последовательность $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ предела не имеет.

Пример 3.3. Последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ также не имеет предела.

Пример 3.4. Постоянная последовательность $a_n = c$ имеет предел, равный c.

Теорема 3.1. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

Доказательство. Предположим, что, напротив, у последовательности $\{a_n\}$ имеется более одного предела. Возьмем два из них — a и b:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b, \quad a \neq b.$$

Выберем число ε, такое, что

$$0 < \varepsilon < \frac{|a-b|}{2}.$$

Тогда на числовой оси две ε-окрестности точек a и b не будут пересекаться (рис. 3.2).

В силу (3.2)

$$\exists N_1: \quad \forall n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \tag{3.3}$$

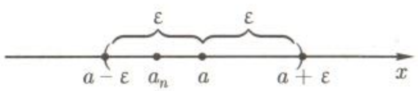

Рис. 3.1

Рис. 3.2

$$0 < \frac{1}{n}, \quad \text{но} \quad \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Теорема 3.4 (о сохранении знака). Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

2) $a > 0 \quad (a < 0)$.

Тогда $\exists N: \forall n \geqslant N \Rightarrow a_n > 0$ $(a_n < 0)$.

Доказательство. Пусть $a > 0$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$. В силу (3.2)

$$\exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \frac{a}{2},$$

или

$$a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2}.$$

Следовательно, $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$. Случай $a < 0$ аналогичен. ■

Теорема 3.5 (о «зажатой переменной»). Пусть даны три последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$ и $\{c_n\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1) \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad b_n \leqslant a_n \leqslant c_n; \\ &2) \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\forall \varepsilon > 0$. По определению предела

$$\begin{aligned} &\exists N_1: \ \forall n \geqslant N_1 \ \Rightarrow \ |b_n - a| < \varepsilon, \ \text{т. е.} \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon; \\ &\exists N_2: \ \forall n \geqslant N_2 \ \Rightarrow \ |c_n - a| < \varepsilon, \ \text{т. е.} \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Положим $N_3 = \max\{N; N_1; N_2\}$. Тогда в силу (3.6) и (3.7)

$$\forall n \geqslant N_3 \ \Rightarrow \ a - \varepsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < a + \varepsilon, \ \text{т. е.} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Определение 3.3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

В развернутом виде это можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Теорема 3.6 (о связи пределов с бесконечно малыми). Предел последовательности $\{a_n\}$ равен a тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$a_n = a + \alpha_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Положим $\alpha_n = a_n - a$. По определению предела

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall\, n \geqslant N \quad |a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Мы пришли к (3.8), а это значит, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, откуда и получается (3.9).

Пусть теперь, наоборот, выполнено (3.9). Тогда справедливо (3.8). Но $\alpha_n = a_n - a$; значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a. \quad \blacksquare$$

Выясним теперь некоторые свойства бесконечно малых.

Теорема 3.7. Сумма (разность) двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Положим

$$\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n.$$

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$. Поделим это число на 2. В силу (3.8)

$$\begin{aligned} &\exists N_1: \quad \forall\, n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}; \\ &\exists N_2: \quad \forall\, n \geqslant N_2 \quad \Rightarrow \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Полагая $N = \max\{N_1; N_2\}$, получим, что $\forall\, n \geqslant N$ выполняются оба неравенства (3.10), а тогда

$$|\gamma_n| = |\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. $\blacksquare$

Следствие. Сумма (разность) любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Действительно, если $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ — бесконечно малые, то их сумму δ_n можно представить в виде

$$\delta_n = (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n.$$

Величина, стоящая в скобках, является бесконечно малой по теореме 3.7. По этой же теореме будет бесконечно малой сумма величины в скобках и γ_n, т. е. δ_n. Аналогичные рассуждения можно провести и в случае любого конечного числа слагаемых. $\blacksquare$

Теорема 3.8. Произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{a_n\}$ — ограниченная. Тогда выполняется соотношение (3.5). Положим $\beta_n = \alpha_n a_n$. Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$ и поделим его на C, где C — постоянная из (3.5). В силу (3.8)

$$\exists N_1: \quad \forall\, n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Взяв $N_2 = \max\{N, N_1\}$, получим, что

$$\forall\, n \geqslant N_2 \Rightarrow |\beta_n| = |\alpha_n||a_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая. $\blacksquare$

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. В самом деле, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — две бесконечно малые последовательности. Бесконечно малая $\{\beta_n\}$ является сходящейся последовательностью и, следовательно, в силу теоремы 3.2 ограничена. Применив теорему 3.8 к произведению $\{\alpha_n \beta_n\}$, получим требуемое утверждение. $\blacksquare$

Следствие 2. Произведение любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство проводится аналогично тому, как это делалось в следствии к теореме 3.7.

Определение 3.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall\, C > 0 \quad \exists N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n| > C. \tag{3.11}$$

Коротко (3.11) записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Замечания. *1.* В этой записи символ «∞» не является пределом в обычном смысле, поэтому теоремы о пределах здесь, вообще говоря, не выполняются.

2. Хотя каждая бесконечно большая не будет ограниченной, существуют неограниченные последовательности, которые не удовлетворяют условию (3.11). Такой, например, является последовательность

$$1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots, 0, n, 0 \ldots$$

3. Если бесконечно большая величина, кроме того, сохраняет определенный знак, хотя бы начиная с некоторого номера, то это записывают следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Теорема 3.9. Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно большая. Тогда $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. Действительно, возьмем $\forall\,\varepsilon > 0$. Положим $C = \dfrac{1}{\varepsilon}$ и применим (3.11):

$$\exists\, N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда при тех же n

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0.$ ■

Упражнение 3.1. Докажите, что если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, причем $\alpha_n \neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — бесконечно большая.

Докажем теперь ряд теорем о действиях с пределами.

Теорема 3.10. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Доказательство. В силу теоремы 3.6

$$a_n = a + \alpha_n \quad \text{и} \quad b_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые. Поэтому

$$a_n \pm b_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n). \tag{3.12}$$

По свойствам бесконечно малых последовательность $\{\gamma_n\}$, где $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$, является бесконечно малой. Но тогда в силу той же теоремы 3.6

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$ ■

Теорема 3.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

Доказательство. Снова по теореме 3.6 имеем:

$$a_n = a + \alpha_n \quad \text{и} \quad b_n = b + \beta_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Откуда

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n \beta_n).$$

В силу свойств бесконечно малых выражение, стоящее в скобках, является бесконечно малой, и по теореме 3.6 получаем требуемое утверждение. ■

Теорема о пределе частного доказывается сложнее, поэтому предварительно придется доказать одну лемму.

Лемма 3.2. Пусть последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$;

2) $b \neq 0$, $b_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbf{N}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$.

Доказательство. Как и ранее, по теореме 3.6

$$b_n = b + \beta_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Далее

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b + \beta_n} - \frac{1}{b} = \left(-\frac{1}{b(b + \beta_n)}\right) \beta_n. \tag{3.13}$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2} > 0$. Тогда в силу определения бесконечно малой

$$\exists\, N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow |\beta_n| < \frac{|b|}{2}.$$

Используя свойство модуля, находим

$$|b + \beta_n| \geqslant |b| - |\beta_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Значит, для таких n выполняется соотношение

$$\left|-\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right| = \frac{1}{|b||b+\beta_n|} < \frac{1}{|b|\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} = \frac{2}{b^2}.$$

Таким образом, последовательность $\left\{-\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right\}$, входящая в (3.13), является ограниченной. По свойствам бесконечно малых вся правая часть (3.13) есть бесконечно малая $\{\gamma_n\}$. Из (3.13) находим

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} + \gamma_n\,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$$

Следовательно, по теореме 3.6 утверждение леммы верно. ■

Замечание. Второе условие леммы 3.2 можно несколько ослабить, убрав требование $b_n \neq 0$, поскольку в силу теоремы о сохранении знака (см. теорему 3.4), если $b \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, все b_n будут иметь тот же знак, что и b, а значит, будут отличны от нуля.

Теорема 3.12. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$;

2) $b \neq 0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Запишем дробь $\dfrac{a_n}{b_n}$ в виде произведения

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}.$$

Применив теорему 3.11 и лемму 3.2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}. \qquad ■$$

Теперь нужно ввести довольно тонкие понятия точной верхней и точной нижней граней некоторого множества.

Рассмотрим некоторый отрезок $[a, b]$, т. е. множество чисел вида $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$. В этом множестве есть, очевидно, наибольший (b) и наименьший (a) элементы. В то же время в интервале (a, b), т. е. множестве вида $\{x : a < x < b\}$ нет ни самого большого, ни самого маленького элементов, хотя ясно, что число b точнее всего ограничивает (a, b) сверху, а число a — снизу. Число b и

будет в этом случае точной верхней, а число a — точной нижней гранями множества (a, b). Эти же числа будут, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями и для отрезка $[a, b]$.

Перейдем теперь к точным определениям.

Определение 3.5. Множество A называется *ограниченным сверху (снизу)*, если

$$\exists b : \quad \forall a \in A \Rightarrow a \leqslant b \quad (a \geqslant b).$$

Число b при этом называется *верхней (нижней) границей* множества A.

Определение 3.6. *Точной верхней гранью* множества A называется наименьшая из его верхних границ, а его *точной нижней гранью* — наибольшая из его нижних границ.

Для точной верхней и точной нижней граней множества A используют обозначения

$$\sup A \quad \text{и} \quad \inf A$$

соответственно. (Читается: «супремум A» и «инфимум A».)

Дав такое определение, нам придется доказать его корректность. В самом деле, ведь не у всякого множества имеется наименьший элемент, как показывает пример интервала (a, b). Откуда может возникнуть уверенность в том, что среди верхних границ множества A такой элемент найдется?

Для этого сформулируем одну аксиому из теории чисел.

Аксиома 3.1 (аксиома отделимости). Пусть заданы два числовых множества A и B, причем для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется условие $a \leqslant b$. Тогда существует число c, такое, что

$$\forall a \in A \quad \text{и} \quad \forall b \in B \quad \Rightarrow \quad a \leqslant c \leqslant b. \tag{3.14}$$

Возьмем теперь в качестве A ограниченное сверху множество, а в качестве B — множество его верхних границ. Тогда в силу (3.14) соответствующее число c будет, с одной стороны, одной из верхних границ множества A ($a \leqslant c$), а с другой — наименьшей из них ($c \leqslant b$), т. е. точной верхней гранью $\sup A$. Отметим, что точная верхняя грань единственна, так как если бы их было две — c_1 и c_2, то выполнялись бы соотношения

$$c_2 \leqslant c_1 \quad \text{и} \quad c_1 \leqslant c_2,$$

откуда $c_1 = c_2$.

Аналогичные рассуждения доказывают существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества.

Теорема 3.13. Число c является точной верхней гранью множества A в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

$$1)\quad \forall a \in A \Rightarrow a \leqslant c;$$
$$2)\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: \quad a > c - \varepsilon. \tag{3.15}$$

Доказательство. Действительно, пусть $c = \sup A$, тогда первое условие выполняется, поскольку c — одна из верхних границ.

Если бы не выполнялось второе из соотношений (3.15), то это означало бы, что при некотором $\varepsilon > 0$ все $a \in A$ удовлетворяют противоположному неравенству $a \leqslant c - \varepsilon$, а это в свою очередь означало бы, что число $(c - \varepsilon)$ — одна из верхних границ. Но это невозможно, поскольку c — наименьшая из верхних границ. Следовательно, верны оба соотношения (3.15). ■

Пусть теперь c — некоторое число, удовлетворяющее соотношениям (3.15). Первое из них означает, что c — одна из верхних границ, а второе — что любое меньшее число не является верхней границей. Таким образом, c —наименьшая из верхних границ, т. е. $c = \sup A$.

Определение 3.7. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если

$$\forall n \quad a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}). \tag{3.16}$$

Если в (3.16) неравенство нестрогое, то будем называть последовательность $\{a_n\}$ *нестрого возрастающей* (*убывающей*).

Возрастающие и убывающие последовательности носят собирательное название *монотонных* последовательностей.

Теорема 3.14 (теорема Вейерштрасса). Всякая монотонная (быть может, нестрого) ограниченная последовательность имеет предел.

Доказательство. Докажем это утверждение для возрастающей последовательности $\{a_n\}$.

В силу ограниченности множество значений $\{a_n\}$ является ограниченным множеством чисел. Значит, существует $c = \sup A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (3.15) существует член последовательности a_N, такой, что

$$a_N > c - \varepsilon.$$

Тогда $\forall n \geqslant N$ выполняются неравенства

$$c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon, \quad \text{или} \quad |a_n - c| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Если $\{a_n\}$ монотонно убывает, то $\{b_n\}$, где $b_n = -a_n$, монотонно возрастает и, по доказанному, имеет предел c:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} b_n = -c.$$

Значит, теорема Вейерштрасса справедлива и в этом случае. ■

Свойства точной нижней грани аналогичны свойствам точной верхней грани. Аналогом теоремы (3.13) здесь служит следующая теорема.

Теорема 3.15. Число p является точной нижней гранью множества A в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \geqslant p$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: \quad a < p + \varepsilon$.

Предлагается доказать эту теорему самостоятельно.

Рассмотрим кратко еще одно понятие. Выберем некую возрастающую последовательность натуральных чисел

$$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$$

Члены последовательности $\{a_n\}$ с этими номерами образуют так называемую подпоследовательность исходной последовательности $\{a_n\}$:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

Теорема 3.16. Всякая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходящейся последовательности $\{a_n\}$ сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность.

Доказательство. Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем теперь K, такое, что $n_K \geqslant N$. Такое K, разумеется, найдется, так как $n_k \to \infty$. Тогда

$$\forall k \geqslant K \quad n_k > n_K \geqslant N, \quad \text{а значит,} \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K: \quad \forall k \geqslant K \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a. \qquad \blacksquare$$

Обратное утверждение неверно. Подпоследовательность может сходиться, тогда как сама последовательность является расходящейся. Это видно на примере последовательности

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Действительно, подпоследовательность ее элементов с нечетными индексами

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2k+1}, \ldots$$

состоит из единиц и имеет предел, равный единице. Однако сама последовательность расходится.

Эта же последовательность может служить иллюстрацией и к следующему очевидному следствию теоремы 3.16.

Следствие. Если у последовательности имеются две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, то исходная последовательность расходится.

Докажите следствие самостоятельно.

3.3. Предел функции действительного аргумента

Дадим определение предела для функции $f(x)$ действительного аргумента.

Под *окрестностью* точки x_0 будем понимать множество следующего вида:

$$\mathrm{U}(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}, \quad \text{где} \quad \delta > 0 \qquad (3.17)$$

Иначе, $\mathrm{U}(x_0)$ — это симметричный интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ с центром в точке x_0 и радиусом (расстоянием от центра до концевой точки), равным δ.

Проколотой окрестностью $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ точки x_0 будем называть окрестность с выколотым центром, т. е. множество вида

$$\dot{\mathrm{U}}(x_0) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\}, \quad \text{где} \quad \delta > 0. \qquad (3.18)$$

Здесь будем рассматривать функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

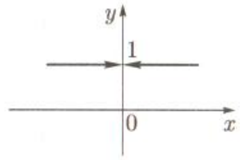

Рис. 3.3

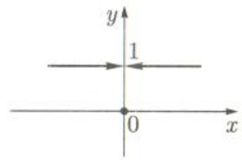

Рис. 3.4

Определение 3.8. Число a называется *пределом* функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если

подобна a_n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\mathrm{U}}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \qquad (3.19)$$

Коротко это записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Обратим внимание, что в (3.19) участвует проколотая окрестность. Это означает, что наличие предела, а также его значение полностью определяются поведением функции $f(x)$ в точках, близких к x_0, но отличных от самой x_0. В частности, $f(x)$ может быть вообще не определена в точке x_0 или определена в ней и равна какому угодно значению — это никак не отразится на ее пределе. Например, на рис. 3.3 и 3.4 представлены графики двух функций, одна из которых не определена в нуле, а другая определена и равна нулю в этой точке. Но и в том, и в другом случае предел при x, стремящемся к нулю, будет равен единице.

Теорема 3.17 (о единственности предела). Если у функции $f(x)$ имеется предел, то он единственный.

Доказательство. Действительно, пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = b; \quad a \neq b.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы интервалы $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не пересекались. Для этого достаточно взять $0 < \varepsilon < \dfrac{|b - a|}{2}$. По определению предела

$$\exists \dot{\mathrm{U}}_1(x_0): \quad \forall x \in \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

т. е. число $f(x)$ попадает в ε-окрестность точки a. Аналогично,

$$\exists \dot{\mathrm{U}}_2(x_0): \quad \forall x \in \dot{\mathrm{U}}_2(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

т. е. число $f(x)$ попадает в ε-окрестность точки b. Положим

$$\dot{\mathrm{U}}(x_0) = \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_2(x_0). \qquad (3.20)$$

Знак $\bigcap$ в (3.20) означает пересечение (т. е. общую часть) данных множеств. (Фактически $\dot{U}(x_0)$ совпадает с той из окрестностей $\dot{U}_1(x_0)$ и $\dot{U}_2(x_0)$, у которой радиус меньше.)

Тогда для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ число $f(x)$ одновременно попадает в два интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, которые не имеют общих точек. Следовательно, предположение о наличии у $f(x)$ двух пределов ложно, и $f(x)$ может иметь лишь один предел. ■

Определение 3.9. Функция $f(x)$ называется *локально ограниченной в точке* x_0, если

$$\exists C > 0 \quad \text{и} \quad \exists\, \dot{U}(x_0): \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leqslant C. \tag{3.21}$$

Теорема 3.18. Если $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к x_0, то она локально ограничена в точке x_0.

Доказательство. В самом деле, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда в силу (3.19)

$$\exists\, \dot{U}(x_0): \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < 1.$$

По свойству модуля

$$|f(x)| - |a| \leqslant |f(x) - a|.$$

Отсюда $\forall x \in \dot{U}(x_0)$

$$|f(x)| - |a| < 1, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| < |a| + 1.$$

Полагая $C = |a| + 1$, получим (3.21) (строгое неравенство всегда можно заменить нестрогим.) ■

Лемма 3.3. Пусть для функции $f(x)$ выполняются следующие условия:

1) $\exists\, \dot{U}(x_0)$: $\forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \geqslant 0$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Тогда $c \geqslant 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $c < 0$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|c|}{2}$. Тогда по определению предела

$$\exists\, \dot{U}_1(x_0): \quad \forall x \in \dot{U}_1(x_0) \Rightarrow |f(x) - c| < \frac{|c|}{2},$$

или

$$c - \frac{|c|}{2} < f(x) < c + \frac{|c|}{2}. \tag{3.22}$$

Но $c < 0$, значит, $|c| = -c$ и $c + \dfrac{|c|}{2} = c - \dfrac{c}{2} = \dfrac{c}{2} < 0$, а тогда из (3.22) вытекает, что $f(x) < 0$ для $\forall x \in \dot{U}_1(x_0)$.

Положим

$$\dot{U}_2(x_0) = \dot{U}(x_0) \bigcap \dot{U}_1(x_0).$$

Тогда $\forall x \in \dot{U}_2(x_0)$ выполняются одновременно неравенство $f(x) < 0$ и первое из условий леммы, что невозможно. Следовательно, $c \geqslant 0$. ■

Теорема 3.19 (о переходе к пределу в неравенствах). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\exists\, \dot{U}(x_0)$: $\forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. В самом деле, положим $\varphi(x) = g(x) - f(x)$. Тогда для функции $\varphi(x)$ выполнены все условия леммы 3.3. По этой лемме

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{n \to x_0} f(x) = b - a \geqslant 0, \quad \text{или} \quad a \leqslant b.$$

Здесь, как и в случае последовательностей, использовано то, что предел разности двух функций равен разности их пределов. Соответствующая теорема будет доказана далее (см. теорему 3.26). ■

Теорема 3.20 (о сохранении знака). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$;

2) $a > 0$ $(a < 0)$.

Тогда

$$\exists\, \dot{U}(x_0): \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Доказательство. Пусть, например, $a > 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. По определению предела

$$\exists \dot{U}(x_0): \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \frac{a}{2}.$$

Откуда

$$a - \frac{a}{2} < f(x) < a + \frac{a}{2}.$$

Следовательно, $f(x) > \dfrac{a}{2} > 0$. ■

Теорема 3.21 (о «зажатой переменной»). Пусть даны три функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \exists\,\dot{\mathrm{U}}(x_0):\quad \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x);\\ &2)\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу определения предела

$$\begin{aligned} &\exists\,\dot{\mathrm{U}}_1(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon,\\ &\qquad \text{т. е.}\quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon;\\ &\exists\,\dot{\mathrm{U}}_2(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_2(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon,\\ &\qquad \text{т. е.}\quad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Положим $\dot{\mathrm{U}}_3(x_0) = \dot{\mathrm{U}}(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_2(x_0)$.

Тогда из (3.23) и (3.24) следует, что

$$\forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_3(x_0) \Rightarrow a - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < a + \varepsilon,$$

откуда

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Пришли к определению предела для $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. ■

Дадим теперь определение бесконечно малой функции и изучим свойства таких бесконечно малых.

Определение 3.10. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Это определение в развернутом виде выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\dot{\mathrm{U}}(x_0):\ \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{3.25}$$

Теорема 3.22 (о связи пределов с бесконечно малыми). Для функции $f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists\dot{\mathrm{U}}(x_0):\ \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 3.6 с очевидной заменой a_n на $f(x)$, N — на $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ и т. д. Предлагается провести его самостоятельно.

Теорема 3.23. Сумма (разность) двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые. Положим

$$\gamma(x) = \alpha(x) \pm \beta(x).$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, поделим его на два и применим (3.25) с $\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\begin{aligned} &\exists\,\dot{\mathrm{U}}_1(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2};\\ &\exists\,\dot{\mathrm{U}}_2(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_2(x_0) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Положим

$$\dot{\mathrm{U}}(x_0) = \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_2(x_0).$$

Тогда $\forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)$ выполняются оба неравенства (3.26). Следовательно, для этих x

$$|\gamma(x)| = |\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\gamma(x)$ — бесконечно малая.

Как и для последовательностей, отсюда вытекает, что сумма (разность) любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая. ■

Теорема 3.24. Произведение бесконечно малой функции на локально ограниченную есть бесконечно малая.

Доказательство. Действительно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, а $f(x)$ — локально ограничена в точке x_0. Тогда для $f(x)$ выполняется соотношение (3.21). Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$ и разделим его на константу C из (3.21). Полагая в (3.25) $\dfrac{\varepsilon}{C}$ вместо ε, получим:

$$\exists\,\dot{\mathrm{U}}_1(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Положим

$$\dot{\mathrm{U}}_2(x_0) = \dot{\mathrm{U}}(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_1(x_0).$$

Тогда

$$\forall x \in \dot{\mathrm{U}}_2(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}C = \varepsilon.$$

Следовательно, $\alpha(x)f(x)$ — бесконечно малая. ■

Следствие. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Эти следствия доказываются точно так же, как и в случае последовательностей.

Определение 3.11. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к x_0, если

$$\forall C > 0 \quad \exists \dot{\mathrm{U}}(x_0)\colon \ \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > C.$$

Кратко это обозначается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

хотя надо ясно понимать, что у бесконечно большой нет настоящего предела, и, следовательно, теоремы о пределах к данному случаю неприменимы.

Как и для последовательностей, в случае, если $f(x)$ сохраняет знак в окрестности $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$, используют обозначения

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Теорема 3.25. Пусть функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $C = \dfrac{1}{\varepsilon}$. В силу определения бесконечно большой

$$\exists \dot{\mathrm{U}}(x_0)\colon \ \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > C = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда для тех же x

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Мы пришли к определению бесконечно малой. Выясним: верно ли утверждение, что если $f(x)$ — бесконечно малая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая? Здесь возникает сложность, связанная с тем, что бесконечно малая может обращаться в нуль в некоторых точках сколь угодно малой окрестности точки x_0, а тогда дробь $\dfrac{1}{f(x)}$ не будет определена в этих точках. Но если потребовать, чтобы $f(x)$ не обращалась в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то соответствующая теорема будет справедливой. Докажите ее самостоятельно в качестве простого упражнения. ■

Теперь докажем ряд теорем о действиях с пределами, аналогичных тем, что изучались нами в случае последовательностей.

Теорема 3.26 (о пределе суммы). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b.$$

Доказательство. Действительно, по теореме 3.22

$$f(x) = a + \alpha(x); \quad g(x) = b + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые. Тогда

$$f(x) \pm g(x) = (a \pm b) + (\alpha(x) \pm \beta(x)). \tag{3.27}$$

Но в силу свойств бесконечно малых выражение во второй скобке в правой части (3.27) является бесконечно малой. А тогда по той же теореме 3.22, но примененной в обратную сторону, получим утверждение теоремы. ■

Теорема 3.27 (о пределе произведения). Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$.

Доказательство. Вновь по теореме 3.22

$$f(x) = a + \alpha(x); \quad g(x) = b + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) = \\ &= ab + (a\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Как и ранее, убеждаемся, что выражение, стоящее в скобках в правой части (3.28), является бесконечно малой. И опять по теореме 3.22 получим требуемое утверждение. ■

Перед теоремой о пределе частного необходимо доказать лемму.

Лемма 3.4. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$;

2) $b\neq 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{b}$.

Доказательство. Заметим вначале, что по теореме о сохранении знака из второго условия леммы следует, что

$$\exists\,\dot{\mathrm{U}}(x_0):\quad \forall x\in\dot{\mathrm{U}}(x_0)\Rightarrow g(x)\neq 0.$$

Далее по теореме 3.22

$$g(x)=b+\beta(x),\quad \text{где}\quad \beta(x) \text{ — бесконечно малая.}$$

Тогда

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b+\beta(x)}-\frac{1}{b}=\left(-\frac{1}{b\big(b+\beta(x)\big)}\right)\beta(x). \tag{3.29}$$

Положим $\varepsilon=\dfrac{|b|}{2}>0$, тогда в силу определения бесконечно малой

$$\exists\,\dot{\mathrm{U}}_1(x_0):\ \forall x\in\dot{\mathrm{U}}_1(x_0)\Rightarrow|\beta(x)|<\frac{|b|}{2}.$$

Откуда

$$|b+\beta(x)|\geqslant|b|-|\beta(x)|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}.$$

Значит, в проколотой окрестности

$$\dot{\mathrm{U}}_2(x_0)=\dot{\mathrm{U}}(x_0)\bigcap\dot{\mathrm{U}}_1(x_0)$$

справедливо неравенство

$$\left|-\frac{1}{b\big(b+\beta(x)\big)}\right|=\frac{1}{|b||b+\beta(x)|}<\frac{1}{|b|\frac{|b|}{2}}=\frac{2}{|b|^2}=\frac{2}{b^2}.$$

Таким образом, величина, стоящая в скобках в (3.29), является локально ограниченной в точке x_0. Но тогда, по свойствам бесконечно малых, вся правая часть в (3.29), которую для краткости обозначим через $\gamma(x)$, является бесконечно малой.

Но

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{b}+\gamma(x).$$

Следовательно, по теореме 3.22

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{b}.$$ ■

Теорема 3.28 (о пределе частного). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\,,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$;

2) $b\neq 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}.$$

Доказательство. В самом деле, запишем дробь в виде произведения

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$$

и применим теорему о пределе произведения с учетом леммы 3.4

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=a\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$ ■

Теперь введем некоторые специальные типы пределов.

Определение 3.12. Назовем *проколотой окрестностью бесконечности* любое множество вида

$$\dot{\mathrm{U}}(\infty)=\{x\colon |x|>A\},\quad \text{где}\quad A>0.$$

Определение 3.13. Число a называется *пределом* $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\,\dot{\mathrm{U}}(\infty):\ \forall x\in\dot{\mathrm{U}}(\infty)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon\,.$$

Это кратко записывают следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a.$$

Видим, что данное определение есть, фактически, дословное повторение определения предела при $x \to x_0$ с заменой $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ на $\dot{\mathrm{U}}(\infty)$.

Поэтому все теоремы о пределах оказываются справедливыми и в этом случае.

Определение 3.14. Число a называется *пределом справа* функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \dot{\mathrm{U}}(x_0){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) : x > x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Определение 3.15. Число a называется *пределом слева* функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \dot{\mathrm{U}}(x_0){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) : x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Пределы справа и слева носят название *односторонних* пределов.

Теорема 3.29. Для того чтобы существовал $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = a. \tag{3.30}$$

Доказательство. Пусть сначала выполнено (3.30). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\exists \dot{\mathrm{U}}_1(x_0){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}_1(x_0){:}\;\; x > x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon;\\ &\exists \dot{\mathrm{U}}_2(x_0){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}_2(x_0){:}\;\; x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Положим $\dot{\mathrm{U}}(x_0) = \dot{\mathrm{U}}_1(x_0) \bigcap \dot{\mathrm{U}}_2(x_0)$. Тогда из (3.31) следует, что

$$\forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. ■

Пусть теперь, наоборот, дано, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Требуется доказать, что

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = a.$$

Доказательство этого утверждения тривиально. Проведите его самостоятельно.

Понятие односторонних пределов переносится и на случай $x \to \infty$.

Говорят, что $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \dot{\mathrm{U}}(\infty){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(\infty){:}\; x > 0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \dot{\mathrm{U}}(\infty){:}\;\; \forall x \in \dot{\mathrm{U}}(\infty){:}\; x < 0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Разумеется, здесь также справедлива теорема 3.29.

В случае бесконечно больших величин мы встречаемся с выражениями типа

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty \quad \text{и т. п.}$$

Упражнение 3.2. Расшифруйте самостоятельно, что означает каждое из подобных выражений.

Введем теперь число e, играющее важную роль в высшей математике.

Вначале укажем без доказательства известную формулу из элементарной математики, которая носит название «Бином Ньютона»

$$\begin{aligned} (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots\\ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где a и b — произвольные действительные числа; n — любое натуральное число; $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Коэффициенты в правой части (3.32) называются *биномиальными коэффициентами.*

Положим в (3.32) $a = 1$, тогда эта формула примет вид:

$$\begin{aligned} (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}\,b^2 + \cdots +\\ + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,b^k + \cdots + b^n. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Теорема 3.30. Существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.34}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Подставив в (3.33) $b = \frac{1}{n}$, получим:

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots +$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \tag{3.35}$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

В правой части (3.35) имеется ровно n слагаемых. Что произойдет с правой частью (3.35), если перейти от n к $n+1$? Знаменатели дробей в каждой скобке возрастут, вычитаемые уменьшатся, а выражения в скобках увеличатся. Кроме того, добавится еще одно положительное слагаемое. В итоге вся правая часть возрастет. Таким образом, при любом n справедливо соотношение

$$a_n < a_{n+1}.$$

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Заменим теперь в (3.35) каждую скобку единицей, а во всех факториалах, стоящих в знаменателях, числа, бóльшие 2, заменим на 2. При этом правая часть (3.35) увеличится, и получится оценка

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{3.36}$$

Но дроби в правой части (3.36) являются членами геометрической прогрессии. Применив известную формулу для суммы членов такой прогресии, получим оценку:

$$a_n < 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Итак, при любом n

$$2 < a_n < 3. \tag{3.37}$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность, а тогда по теореме Вейерштрасса она имеет предел, что и требовалось доказать. ■

Предел (3.34) называется *числом e*. Из (3.37) следует, что это число расположено между 2 и 3. На самом деле, это иррациональное число, которое представляется бесконечной десятичной дробью: $e = 2,71\ldots$ Можно показать (хотя, сделать это аккуратно не так уж просто), что числу e равен не только предел последовательности (3.34), но и предел функции, которая получается формальной заменой в (3.34) натурального n на действительное x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.38}$$

Убедимся теперь, что и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{3.39}$$

Действительно, заменим в (3.39) x на $\frac{1}{t}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

Последний предел очевидно совпадает с (3.38), ибо обозначение переменной роли не играет.

3.4. Непрерывность функции

Определение 3.16. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.40}$$

Можно, воспользовавшись определением предела, расшифровать (3.40). При этом вместо проколотой окрестности $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ можно взять полную окрестность $\mathrm{U}(x_0)$, поскольку функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее предел равен именно значению $f(x_0)$, а не какому-либо иному числу. Итак, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\mathrm{U}(x_0):\ \forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.41}$$

Установим арифметические свойства непрерывных функций.

Теорема 3.31. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда:

1) $f(x) \pm g(x)$ непрерывна в точке x_0;
2) $f(x)g(x)$ непрерывна в точке x_0;
3) если $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство этой теоремы очевидно следует из определения 3.16 и соответствующих теорем о пределах. Например, п. 2 доказывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

В силу (3.40) это означает, что функция $f(x)g(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Пункты 1 и 3 докажите самостоятельно.

Очевидно, что если некоторая функция постоянна в окрестности $\mathrm{U}(x_0)$, то она непрерывна в точке x_0. Ясно также, что $f(x) = x$ непрерывна в любой точке x_0, поскольку

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Из теоремы 3.31 следует, что непрерывными в любой точке будут функции

$$x^2 = x \cdot x;$$
$$x^3 = x^2 \cdot x;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ раз}}.$$

Но тогда непрерывным в любой точке будет многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, а также отношение таких многочленов при условии, что знаменатель отличен от нуля. Иначе, рациональная функция

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

непрерывна в любой точке своей области определения.

А что произойдет, если в непрерывную функцию вместо аргумента подставить другую непрерывную функцию? Будет ли такая сложная функция непрерывной? Для ответа на этот вопрос докажем одну теорему.

Теорема 3.32 (о предельном переходе под знаком непрерывной функции). Пусть заданы две функции $f(u)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(u)$ непрерывна в точке u_0;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(u_0)$.

Доказательство. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (3.41)

$$\exists\, \mathrm{U}(u_0)\colon\ \forall\, u \in \mathrm{U}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon. \tag{3.42}$$

Обозначим радиус окрестности $\mathrm{U}(x_0)$, фигурирующей в (3.42), через δ. Таким образом,

$$\mathrm{U}(u_0) = \{u\colon |u - u_0| < \delta\}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$,

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0 \quad \exists\, \dot{\mathrm{U}}(x_0)\colon\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |\varphi(x) - u_0| < \varepsilon_1. \tag{3.43}$$

Возьмем в (3.43) $\varepsilon_1 = \delta$. Тогда для любого x из $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ справедливо неравенство $|\varphi(x) - u_0| < \delta$, а это означает, что число $\varphi(x)$ попадает в окрестность $\mathrm{U}(u_0)$ из (3.42). Значит,

$$|f(\varphi(x)) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \dot{\mathrm{U}}(x_0)\colon\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \Rightarrow |f(\varphi(x)) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(u_0). \qquad ■$$

Из теоремы 3.32 вытекает следующая важная теорема.

Теорема 3.33 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(u)$ непрерывна в точке u_0;
2) $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0;
3) $\varphi(x_0) = u_0$.

Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В самом деле, из условий 2 и 3 теоремы следует, что

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0.$$

Но тогда мы оказываемся в условиях теоремы 3.32, согласно которой

$$\lim_{x\to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f(u_0) = f\left(\varphi(x_0)\right).$$

А это и означает, что $f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна в точке x_0. ■

Таким образом, получен ответ на поставленный ранее вопрос о том, что при подстановке в качестве аргумента одной непрерывной функции в другую получается снова непрерывная функция.

Приведем еще одно определение: функция называется *непрерывной на некоем множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Вспомним теперь общее определение функции, согласно которому каждому элементу x из множества X ставился в соответствие элемент y из множества Y, но при этом не исключался случай, когда разные x переходили в один и тот же y. Например, функция $f(x) \equiv 1$ всю числовую прямую переводит в одну точку 1.

Если же на функцию $y = f(x)$ наложить дополнительное условие, что из $x_1 \neq x_2$ следует, что $y_1 \neq y_2$, тогда на области значений этой функции можно определить *обратную функцию* $x = \varphi(y)$, которая каждому элементу y сопоставляет тот единственный элемент x, который переходит в этот y под действием функции $f(x)$.

Понятно, что обратной функцией к функции $x = \varphi(y)$ будет исходная функция $y = f(x)$, так что следует говорить о паре взаимно-обратных функций.

А теперь сформулируем (без доказательства) следующую теорему.

Теорема 3.34 (об обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке, непрерывна и строго монотонна на нем. Тогда у нее существует обратная функция $x = \varphi(y)$, определенная на своем промежутке, и также непрерывная и строго монотонная на нем (в ту же сторону).

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, непрерывна и строго монотонна на всей числовой оси. (Доказательство этого факта достаточно сложно и здесь не приводится.)

По теореме 3.34 у показательной функции существует обратная функция, называемая логарифмической $x = \log_a y$. Областью определения этой функции является область значений показательной функции, т. е. полупрямая $(0; +\infty)$. Логарифмическая функция непрерывна на этой полупрямой и строго монотонна в ту же сторону, что и показательная функция a^x (т. е. монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $a < 1$).

В частности, если в качестве основания a взять число e, то и показательная (e^x), и логарифмическая ($\ln y$) функции будут монотонно возрастающими. Обычно аргумент логарифмической функции, как и у всех остальных функций, обозначается буквой x, что, конечно, не меняет сути дела.

Рассмотрим теперь две функции

$$f(u) = \ln u \quad \text{и} \quad \varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Полагая $u_0 = e$ и $x_0 = 0$ и применяя теорему 3.32 о предельном переходе под знаком непрерывной функции, получим:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,,$$

$$\lim_{x\to 0} f\left(\varphi(x)\right) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln e = 1.$$

Итак, вычислен еще один важный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{3.44}$$

Возьмем функцию x^n, где n — целое число, отличное от нуля. Это частный случай рациональной функции. Поэтому она непрерывна на всей своей области определения, т. е. на всей числовой оси при натуральных n и всюду, кроме точки 0, при отрицательных n.

Рассмотрим теперь x^p при произвольном действительном p. Поскольку не при всех p такая функция определена для отрицательных значений x, докажем ее непрерывность для $\forall\, x > 0$. Для этого положим

$$f(u) = e^u \quad \text{и} \quad \varphi(x) = p\ln x$$

и применим теорему о непрерывности сложной функции. Поскольку

$$f\left(\varphi(x)\right) = e^{p\ln x} = e^{\ln x^p} = x^p\,,$$

то из этой теоремы следует непрерывность x^p на $(0, +\infty)$.

Заметим, что при некоторых p функция x^p оказывается определенной и для отрицательных значений x, но тогда она обладает свойством *четности* $(f(-x)=f(x))$ или *нечетности* $(f(-x)= -f(x))$, что позволяет вопрос о непрерывности функции при отрицательных x свести к вопросу о непрерывности на $(0, +\infty)$.

Что касается самой точки 0, то при $p \geqslant 0$ функция x^p будет непрерывной в этой точке (быть может, только в смысле непрерывности справа, которая определяется аналогично одностороннему пределу), а при $p < 0$ эта точка не входит в область определения данной функции.

Таким образом, x^p непрерывна на всей своей области определения.

Перейдем теперь к тригонометрическим функциям. Сначала установим важное неравенство:

$$\forall\, x \in R: \quad |\sin x| \leqslant |x|. \tag{3.45}$$

Пусть $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. На тригонометрическом круге угол $\angle AOB$, измеренный в радианах, равен x и расположен в первой четверти (рис. 3.5). Поэтому длина дуги $\smile{AB}$ также равна x, так как радиус круга равен 1, и больше длины стягивающей ее хорды AB, которая в свою очередь больше длины перпендикуляра BC, которая равна $\sin x$. Итак, для $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справедливо неравенство

$$\sin x < x.$$

Поскольку обе части неравенства положительны, его можно переписать в виде

$$|\sin x| < |x|. \tag{3.46}$$

Пусть теперь $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$. Тогда $(-x) \in (0; \frac{\pi}{2})$ и для него справедливо неравенство

$$|\sin(-x)| < |-x|.$$

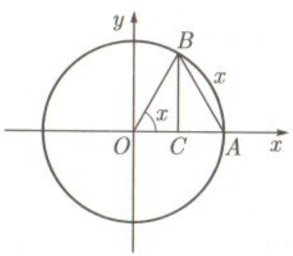

Рис. 3.5

Но $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ и $|-x| = |x|$. Следовательно, и для этих x выполняется (3.46).

Если $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$, и мы снова получаем (3.46).

Наконец, если $x = 0$, то

$$|\sin x| = |\sin 0| = 0 = |x|.$$

Таким образом, неравенство (3.45) выполняется для всех действительных x.

Теперь уже можно доказать непрерывность тригонометрических функций. Начнем с $\sin x$.

Возьмем произвольную точку x_0 и оценим разность $\sin x - \sin x_0$.

$$\begin{gathered} |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = \\ = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2}\cdot 1 = |x-x_0|. \end{gathered} \tag{3.47}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (3.46) и очевидной оценкой для косинуса.

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем окрестность точки x_0 радиуса ε:

$$\mathrm{U}(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Тогда из (3.47) следует, что

$$\forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Мы пришли к определению непрерывности. Поскольку x_0 была произвольной точкой, получаем, что функция $\sin x$ непрерывна на всей числовой оси.

Упражнение 3.3. Проведите аналогичное доказательство непрерывности $\cos x$.

Далее, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ представляют собой дроби:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

поэтому они непрерывны на всей своей области определения в силу теоремы о непрерывности частного.

Вернемся к функции $\sin x$. На всей числовой оси она не имеет обратной функции, так как каждое свое значение принимает в бесконечном числе точек. (Чтобы убедиться в этом, вспомните формулу для решения уравнения $\sin x = a$.)

Если ограничить область определения функции $\sin x$ отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то на нем функция $y = \sin x$ будет строго монотонной и непрерывной, а тогда по теореме об обратной функции

у нее существует обратная функция (аркси-
нус) $x = \arcsin y$, областью определения которой будет область значений функции $y = \sin x$, т. е. отрезок $[-1; 1]$.

Если переобозначить переменные, то получим график этой функции, представленный на рис. 3.6.

Аналогично определяются и остальные обратные тригонометрические функции: арккосинус, арктангенс и арккотангенс. Все они являются строго монотонными и непрерывными на своей области определения функциями. Их графики представлены соответственно на рис. 3.7, 3.8 и 3.9.

В заключение этого подраздела выведем еще один «замечательный» предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (3.48)$$

Рассмотрим чертеж, представленный на рис. 3.10. Для вычисления предела (3.48) нужно знать поведение функции $\frac{\sin x}{x}$ в некоторой проколотой окрестности точки 0. Возьмем проколотую окрестность $\dot{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ радиуса $\frac{\pi}{2}$ и вначале рассмотрим правую половину этой окрестности: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Из чертежа видно, что в этом случае треугольник AOB содержится в секторе AOB, который, в свою очередь, содержится в треугольнике AOC.

Выражая площадь каждой из этих фигур через угол x, измеренный в радианах, и учитывая, что радиус окружности равен 1, получим

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \qquad (3.49)$$

Здесь учли, что длина отрезка AC равна $\operatorname{tg} x$. Поскольку все величины в (3.49) положительны, получим неравенство

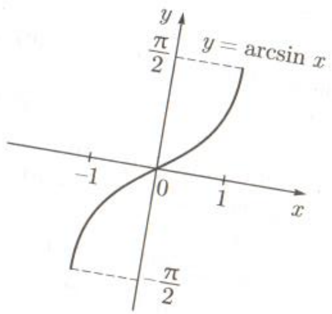

Рис. 3.6

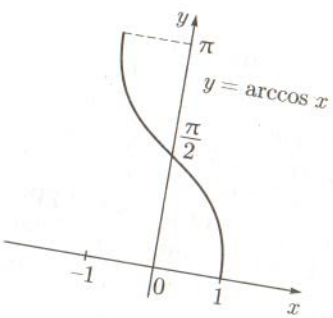

Рис. 3.7

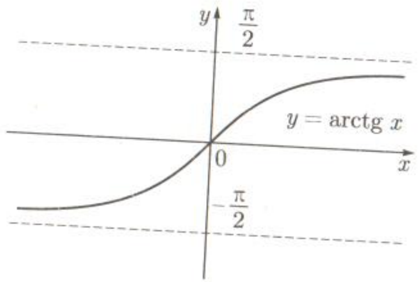

Рис. 3.8

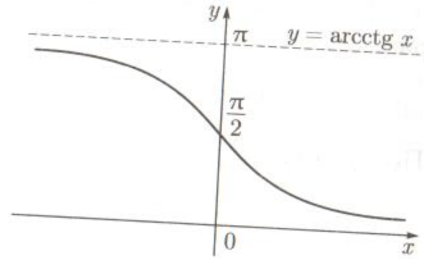

Рис. 3.9

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (3.50)$$

Если теперь $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, т. е. принадлежит левой половине окрестности $\dot{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$, то $(-x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и, следовательно,

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1.$$

Учитывая четность $\cos x$ и нечетность $\sin x$, находим, что неравенство (3.50) остается справедливым и в этом случае. Таким образом, (3.50) выполняется во всей окрестности $\dot{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$.

Заметим, что в силу непрерывности косинуса

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Тогда по теореме о «зажатой переменной» из (3.50) получим (3.48).

Изучим теперь так называемые локальные свойства непрерывных функций, т. е. поведение функции в малой окрестности заданной точки, которое выражается следующими двумя теоремами. Их можно вывести из соответствующих теорем о пределах, но здесь докажем их непосредственно.

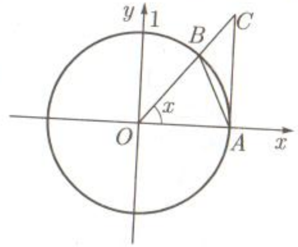

Рис. 3.10

Теорема 3.35. Если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0, то она локально ограничена в этой точке.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. В силу определения непрерывности

$$\exists\, \mathrm{U}(x_0): \quad \forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1.$$

По свойству модуля

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)|.$$

Тогда

$$|f(x)| - |f(x_0)| < 1,$$

или

$$|f(x)| < |f(x_0)| + 1.$$

Полагая $C = |f(x_0)| + 1$, получим определение локальной ограниченности. ■

Теорема 3.36. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то

$$\exists\, \mathrm{U}(x_0): \quad \forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Доказательство. Пусть, например, $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, тогда по определению непрерывности

$$\exists\, \mathrm{U}(x_0): \quad \forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

или

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}.$$

Но $f(x_0) - \dfrac{f(x_0)}{2} = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Значит, $f(x) > 0$. ■

Замечание. В теоремах 3.35 и 3.36, в отличие от соответствующих теорем о пределах фигурируют полные, а не проколотые окрестности точки x_0.

Теперь изучим общие свойства функций, непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$. Подчеркнем, что речь здесь идет именно об *отрезке*, т. е. промежутке, в который входят обе концевые точки a и b, а не о промежутке произвольного вида. Сформулируем несколько фундаментальных теорем. Доказательства этих теорем весьма непростые и будут приведены в приложении к данной главе (см. подразд. 3.6), а здесь ограничимся формулировками.

Следует отметить, что, изучая функции, непрерывные на отрезке, мы, вообще говоря, не предполагаем, что они определены вне этого отрезка. Поэтому при определении непрерывности в концевых точках a и b отрезка нужно следить за тем, чтобы переменная x не выходила за пределы $[a, b]$. Поэтому определение (3.16) в этом случае примет вид:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b),$$

т. е. речь идет о так называемой *односторонней непрерывности* в точках a и b. Но это уточнение не влияет ни на формулировки приведенных далее теорем, ни на их доказательство.

Теорема 3.37. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е.

$$\exists\, C > 0: \quad \forall\, x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \leqslant C.$$

Теорема 3.38. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней, т. е.

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]: \; f(x_1) = m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}; \; f(x_2) = M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

Теорема 3.39. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает значения противоположных знаков, то

$$\exists\, x_0 \in [a, b]: \quad f(x_0) = 0.$$

Теорема 3.40. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее область значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[m, M]$, где

$$m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}; \; M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

3.5. Асимптотическое поведение функций

Рассмотрим три функции: x, x^2, x^3. При $x \to 0$ все они являются бесконечно малыми, однако легко заметить, что стремятся к нулю они «с разной скоростью». Так, если $x = 0,01$, то $x^2 = 0,0001$, а $x^3 = 0,000001$. При меньших x разница будет еще нагляднее. Можно сказать, что x^2 стремится к нулю быстрее, чем x, а x^3 — быстрее, чем x^2. Если $x \to \infty$, то наоборот, x^3 растет быстрее всех, x^2 — медленнее, чем x^3, а x еще медленнее.

Возникает необходимость сравнивать между собой бесконечно малые и бесконечно большие величины по тому, с какой скоростью они изменяются при $x \to x_0$, т. е. изучать *асимптотическое* поведение функций в окрестности точки x_0.

Будем считать, что каждая из функций, изучаемых в данном подразделе, отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0.

Определение 3.17. Говорят, что функция $\alpha(x)$ *эквивалентна* функции $\beta(x)$ ($\alpha \sim \beta$) при $x \to x_0$, если в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 справедливо соотношение

$$\alpha(x) = \beta(x)q(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q(x) = 1. \tag{3.51}$$

Очевидно, что это определение равносильно следующему:

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1. \tag{3.52}$$

Для доказательства равносильности обоих определений достаточно обозначить через $q(x)$ дробь $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Таким образом, на множестве функций, отличных от нуля в некоторой $\dot{U}(x_0)$, вводится так называемые *отношение эквивалентности*. Это отношение обладает следующими свойствами:

1) $\alpha \sim \alpha$ (*рефлексивность*);
2) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (*симметричность*);
3) $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (*транзитивность*).

Действительно,

$$\alpha(x) = \alpha(x)\cdot 1, \quad \lim_{x\to x_0} 1 = 1.$$

Значит, верно первое свойство. Далее,

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha(x) = \beta(x)q(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q(x) = 1.$$

Тогда

$$\beta(x) = \alpha(x)\frac{1}{q(x)} = \alpha(x)q_1(x), \text{ где } \lim_{x\to x_0} q_1(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{q(x)} = 1.$$

Следовательно, верно и второе свойство. Наконец,

$$\alpha \sim \beta \;\Rightarrow\; \alpha(x) = \beta(x)q_1(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_1(x) = 1;$$

$$\beta \sim \gamma \;\Rightarrow\; \beta(x) = \gamma(x)q_2(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_2(x) = 1.$$

Поэтому

$$\alpha(x) = \gamma(x)q_1(x)q_2(x) = \gamma(x)q(x),$$

где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = \lim\limits_{x\to x_0} q_1(x)q_2(x) = 1$, т. е. справедливо и третье свойство.

Теорема 3.41. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$, где $C \neq 0$. Тогда $f(x) \sim C$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{C} = \frac{C}{C} = 1,$$

и приходим к (3.52). ■

Замечание. Подчеркнем, что здесь очень существенно условие $C \neq 0$. Так, нельзя сказать, что бесконечно малая эквивалентна нулю!

Теорема 3.42. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Доказательство. В силу эквивалентности f и g выполняется соотношение (3.51). Значит,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} q(x) = a \cdot 1 = a.$$

Учитывая, что отношение эквивалентности симметрично, приходим к выводу, что две эквивалентные функции либо обе имеют один и тот же предел, либо обе предела не имеют. ■

Теорема 3.43. Пусть при $x \to x_0$

$$f(x) \sim \alpha(x) \quad \text{и} \quad g(x) \sim \beta(x).$$

Тогда

$$f(x)g(x) \sim \alpha(x)\beta(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{и} \quad f^p(x) \sim \alpha^p(x), \tag{3.53}$$

причем последнее соотношение справедливо при условии существования $f^p(x)$ и $\alpha^p(x)$.

Доказательство. Докажем, например, первое из соотношений (3.53):

$$f(x) \sim \alpha(x) \Rightarrow f(x) = \alpha(x)q_1(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_1(x) = 1;$$

$$g(x) \sim \beta(x) \Rightarrow g(x) = \beta(x)q_2(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_2(x) = 1.$$

Откуда

$$f(x)g(x) = \alpha(x)\beta(x)q_1(x)q_2(x) = \alpha(x)\beta(x)q(x),$$

где $q(x) = q_1(x)q_2(x)$ и, очевидно, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = 1$. Следовательно, по определению $f(x)g(x) \sim \alpha(x)\beta(x)$. ■

Аналогично доказываются и остальные соотношения (3.53). Проведите доказательство самостоятельно.

Установим следующий факт:

$$\text{при} \quad x \to \infty \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \sim a_0x^n, \quad \text{где} \quad a_0 \neq 0. \tag{3.54}$$

Действительно,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = $$
$$= a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, стремится к единице при $x \to \infty$, что и доказывает (3.54).

Выведем таблицу эквивалентных величин (для удобства аргумент обозначим буквой t). В реальных задачах в роли t будут выступать различные функции от x. Таблица справедлива при $t \to 0$.

Таблица эквивалентных величин

1. $\sin t \sim t$;	5. $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$;
2. $\operatorname{tg} t \sim t$;	6. $\ln(1+t) \sim t$;
3. $\arcsin t \sim t$;	7. $a^t - 1 \sim t\ln a$; $a > 0$, $a \neq 1$;
4. $\operatorname{arctg} t \sim t$;	8. $(1+t)^p - 1 \sim pt$, $p \neq 0$.

Замечание. Формула 7 при $a = e$ принимает вид $e^t - 1 \sim t$; формула 1 — перефразированное утверждение (3.48).

Докажем справедливость формул, приведенных в таблице.

- *Формула 2*: $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t} \sim \dfrac{t}{1} = t$.
- *Формула 3*: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t} = \left|\begin{array}{c} \arcsin t = y \\ t = \sin y \\ y \to 0 \end{array}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y} = 1$.

- *Формула 4*: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} t}{t} = \left|\begin{array}{c} \operatorname{arctg} t = y \\ t = \operatorname{tg} y \\ y \to 0 \end{array}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{y} = 1$.
- *Формула 5*: $1 - \cos t = 2\sin^2\dfrac{t}{2} \sim 2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}t^2$.
- *Формула 6* — перефразированное равенство (3.44).
- *Формула 7*: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t - 1}{t\ln a} = \left|\begin{array}{c} a^t - 1 = y \\ t = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a} \\ y \to 0 \end{array}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)} = 1$.
- *Формула 8*: $(1+t)^p - 1 = e^{p\ln(1+t)} - 1 \sim p\ln(1+t) \sim pt$.

Определение 3.18. Будем говорить, что функция $\alpha(x)$ есть «о малое от $\beta(x)$» ($\alpha = o(\beta)$) при $x \to x_0$, если в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ справедливо соотношение

$$\alpha(x) = \beta(x)\omega(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0}\omega(x) = 0. \tag{3.55}$$

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые, то $\alpha = o(\beta)$ означает, что $\alpha(x)$ убывает быстрее, чем $\beta(x)$, т. е. является бесконечно малой *более высокого порядка* по сравнению с $\beta(x)$.

Например, при $x \to 0$

$$x^2 = o(x); \quad x^3 = o(x^2); \quad x^{10} = o(x^5).$$

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно большие, то утверждение $\alpha = o(\beta)$ означает, что при $x \to x_0$ функция $\alpha(x)$ растет медленнее, чем $\beta(x)$, т. е. является бесконечно большой *меньшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$.

Так, при $x \to \infty$

$$x = o(x^2); \quad x^2 = o(x^3); \quad x^5 = o(x^{10}).$$

Следует иметь в виду, что под символом $o(\beta)$ «скрывается» не одна функция, а бесконечное семейство функций $\alpha(x)$, для которых выполняется (3.55) при различных $\omega(x)$. Поэтому, например,

$$o(\beta) - o(\beta) = \beta\omega_1 - \beta\omega_2 = \beta(\omega_1 - \omega_2) = \beta\omega = o(\beta). \tag{3.56}$$

В правой части (3.56) мы получили $o(\beta)$, а не нуль, как можно было предположить.

Отметим также, что все свойства эквивалентных, включая и таблицу эквивалентных, без изменений переносятся на случай последовательностей.

Приведем несколько примеров вычисления пределов с использованием эквивалентных величин.

Пример 3.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{xx}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

Пример 3.6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}=\left|\begin{array}{c} x-1=t\\ x=1+t\\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+t}-1}{\sqrt[8]{1+t}-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{7}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{8}}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{7}t}{\frac{1}{8}t}=\frac{8}{7}.$$

Пример 3.7.

$$\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)=-\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=-\frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 3.8.

$$\lim_{x\to+\infty}x[\ln(2x+5)-\ln(2x+1)]=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{2x+5}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{4}{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{4}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2.$$

Пример 3.9.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}}=e.$$

3.6. Приложение*

В данном подразделе будут рассмотрены вопросы, которые могут быть включены в усиленные курсы математики (например, для студентов, специализирующихся в области биофизики).

Прежде всего упомянем о классификации точек разрыва функции. Если функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 (т. е. определена в окрестности этой точки, но не является непрерывной в x_0) и при этом существуют два конечных односторонних предела — $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$, то такая точка называется *точкой разрыва первого рода.* Причем, если эти два предела совпадают (но не равны $f(x_0)$), то такая точка называется *устранимой точкой разрыва.* Если хотя бы один из этих пределов бесконечен или вообще не существует, то такую точку называют *точкой разрыва второго рода.* Например, функция $\operatorname{sgn} x$ (читается: «сигнум икс»)

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1\,, & x>0;\\ 0\,, & x=0;\\ -1\,, & x<0,\end{cases}$$

имеет в нуле разрыв первого рода, а функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0;\\ 0\,, & x=0\end{cases}\quad\text{и}\quad g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0;\\ 0\,, & x=0\end{cases}$$

имеют в нуле разрыв второго рода. (Функция $f(x)$ имеет односторонние пределы, равные бесконечности; функция $g(x)$ не имеет пределов — ни конечных, ни бесконечных.)

Далее докажем ряд важных теорем, но предварительно дадим следующее определение.

Определение 3.19. Последовательность отрезков $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbf{N}$ называется *системой вложенных отрезков*, если каждый последующий отрезок содержится в предыдущем, т. е.

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$$

Теорема 3.44 (о вложенных отрезках). Пусть задана произвольная система вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, длины которых стремятся к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\right)$. Тогда существует единственная точка c, которая принадлежит всем этим отрезкам.

Доказательство. Очевидно, что последовательность левых концов отрезков a_n возрастает (в широком смысле), а последовательность правых концов b_n убывает.

Обозначим через A множество всех левых концов $\{a_n\}$, а через B — множество всех правых концов $\{b_n\}$. Покажем, что любой элемент множества A не превосходит любого элемента множества B.

Возьмем любое a_n и любое b_m. При $m=n$, очевидно, $a_n<b_n=b_m$. Если $m<n$, то $a_n<b_n\leqslant b_m$. Если же $m>n$, то $a_n\leqslant a_m<b_m$. Во всех случаях получим, что $a_n<b_m$. Тогда по аксиоме отделимости

$$\exists c: \quad \forall a_n \in A \quad \text{и} \quad \forall b_m \in B \Rightarrow a_n \leqslant c \leqslant b_m,$$

в частности, $\forall n \quad a_n \leqslant c \leqslant b_n$. Но это и означает, что c принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Предположим, что имеются две такие точки c_1 и c_2. Пусть для определенности $c_2 > c_1$. Тогда

$$\forall n \quad 0 < c_2 - c_1 \leqslant b_n - a_n. \tag{3.57}$$

Но правая часть (3.57) по условию стремится к нулю при $n \to \infty$, а $c_2 - c_1$ — постоянная. Отсюда следует, что $c_2 - c_1 = 0$, т. е. $c_2 = c_1$. Тем самым доказана единственность точки c. ■

Системой интервалов $\{J\}$ будем называть произвольное множество интервалов (т. е. промежутков без концевых точек)

$$J = \{x: \ a < x < b\}.$$

Определение 3.20. Будем говорить, что система интервалов $\{J\}$ образует *покрытие* множества A, если любой элемент $a \in A$ принадлежит хотя бы одному интервалу данной системы.

Теорема 3.45 (о конечном покрытии). Из любого бесконечного покрытия отрезка $[a,b]$ системой интервалов $\{J\}$ можно выделить конечную подсистему, покрывающую данный отрезок.

Доказательство. Действительно, предположим противное, что существует бесконечное покрытие $\{J\}$ отрезка $[a,b]$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Разделим этот отрезок на две равные части. По крайней мере для одной этой части из $\{J\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие, так как в противном случае конечное подпокрытие выделялось бы и для всего $[a,b]$. Такую половину отрезка обозначим через $[a_2,b_2]$ (удобно считать, что $[a_1,b_1]=[a,b]$). Разделим пополам $[a_2,b_2]$ и снова выберем ту половину $[a_3,b_3]$ этого отрезка, для которой нельзя выделить конечное подпокрытие. Продолжим неограниченно этот процесс. В результате получится система вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, для каждого из которых нельзя выделить конечное подпокрытие. Ясно, что длина каждого из этих отрезков равна $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Далее, по теореме 3.44 существует точка c, принадлежащая всем этим отрезкам. Эта точка находится на отрезке $[a,b]$, а значит, существует некоторый интервал J_c из системы, покрывающий эту точку (рис. 3.11).

Наименьшее расстояние от c до концов интервала J_c обозначим через δ ($\delta > 0$). Тогда, если $b_n - a_n < \delta$ (а такое n обязательно найдется, так как $b_n - a_n \to 0$), то отрезок $[a_n,b_n]$ целиком содержится в интервале J_c, т. е. один интервал J_c и будет конечным подпокрытием отрезка $[a_n,b_n]$. Но по построению отрезок $[a_n,b_n]$ не допускает выделения конечного подпокрытия. Полученное противоречие показывает, что утверждение теоремы справедливо. ■

Отметим: в данной теореме существенно использовалось, что покрывается именно *отрезок* и именно системой *интервалов*. Если отбросить одно из этих требований, то теорема, вообще говоря, перестает быть справедливой. Например, система интервалов $\left(\dfrac{1}{n}, 1\right)$, $n \in Z$ образует бесконечное покрытие интервала $(0,1)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия (подумайте, почему?).

Теперь перейдем к доказательству теорем о свойствах функций, непрерывных на отрезке, которые были сформулированы в подразд. 3.4.

Докажем вначале, что, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем (см. теорему 3.37).

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$. По локальному свойству непрерывных функций (см. теорему 3.35)

$$\exists\, C_{x_0} > 0 \quad \exists\, \mathrm{U}(x_0): \quad \forall\, x \in \mathrm{U}(x_0) \ \Rightarrow \ |f(x)| \leqslant C_{x_0}.$$

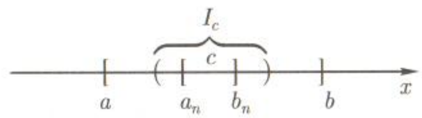

Рис. 3.11

Все такие окрестности, выбранные для каждой точки из $[a, b]$, образуют покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, поскольку каждая точка отрезка принадлежит одному из интервалов покрытия, а именно — своей окрестности.

В силу теоремы 3.45 из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т. е. конечный набор окрестностей

$$\mathrm{U}(x_1), \mathrm{U}(x_2), \ldots, \mathrm{U}(x_n),$$

покрывающих отрезок $[a, b]$. В каждой из этих окрестностей $\mathrm{U}(x_i)$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant C_{x_i}$. Положим

$$C = \max_i C_{x_i}.$$

Тогда для любого x из отрезка $[a, b]$ будет выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C$, что и доказывает теорему. ■

Итак, множество значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничено сверху и снизу. Значит, существуют точные верхняя и нижняя грани

$$M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\} \quad \text{и} \quad m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

Докажем теперь, что эти величины достигаются на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 3.38), т. е.

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]: \quad f(x_1) = m,\ f(x_2) = M.$$

Доказательство. Пусть, например, не достигается точная верхняя грань M, т. е. ни в одной точке отрезка $[a, b]$ $f(x)$ не совпадает с M. Поскольку всегда $f(x) \leqslant M$, на $[a, b]$ $f(x) < M$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}. \tag{3.58}$$

Эта функция на $[a, b]$ положительна и непрерывна (знаменатель не обращается в нуль). Тогда, как только что было доказано, она ограничена на $[a, b]$. В частности,

$$\exists\, C > 0: \quad \forall\, x \in [a, b] \ \Rightarrow\ g(x) \leqslant C. \tag{3.59}$$

Из (3.58) и (3.59) следует, что

$$\forall\, x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant M - \frac{1}{C}.$$

Но это означает, что $M - \dfrac{1}{C}$ — одна из верхних границ множества $\{f(x)\}$. Иначе, нашлась верхняя граница, которая меньше наименьшей из верхних границ M. Это невозможно. Следовательно, наше предположение ложно и существует точка на $[a, b]$, в которой значение $f(x)$ совпадает с M.

Для точной нижней грани доказательство аналогично. ■

Теперь докажем теорему о нуле (см. теорему 3.39). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков. Докажем, что тогда найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = 0$.

Доказательство. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и выберем ту половину, у которой значения $f(x)$ на концах противоположны по знаку; обозначим ее через $[a_2, b_2]$ (снова считаем, что $[a_1, b_1] = [a, b]$). Разделим $[a_2, b_2]$ пополам, вновь выберем ту половину, на концах которой функция $f(x)$ принимает значения, противоположные по знаку, и т. д.

Возможны два варианта: либо на каком-то шаге очередная точка деления окажется нулем функции $f(x)$ и именно ее примем за x_0, либо процесс будет продолжаться неограниченно и тогда получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины которых стремятся к нулю, а значит, существует точка c, принадлежащая всем отрезкам. Ясно, что последовательность

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots \tag{3.60}$$

сходится к c (докажите это!). Выберем из (3.60) подпоследовательность точек, в которых $f(x)$ положительна и обозначим эту подпоследовательность через $\{x'_n\}$ $(f(x'_n) > 0)$. Аналогично выберем из (3.60) подпоследовательность $\{x''_n\} : f(x''_n) < 0$. Последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ сходятся к c как подпоследовательности сходящейся к c последовательности (3.60). Но $f(x)$ непрерывна в точке c. Значит,

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f(c) & \text{и} & \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c). \\ f(x'_n) > 0 & & f(x''_n) < 0. \end{array} \tag{3.61}$$

Применив теорему о переходе к пределу в неравенствах, получим из (3.61), что

$$f(c) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f(c) \leqslant 0.$$

Но это означает, что $f(c) = 0$ и мы полагаем $x_0 = c$. ■

Отметим, что теорема о нуле служит основой одного из методов приближенного нахождения корней уравнения вида

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — непрерывная на некотором промежутке функция.

Если нельзя найти корень точно, но нам удастся определить отрезок $[a, b]$, содержащий лишь один искомый корень и такой, что на его концах $f(x)$ принимает значения противоположных знаков, то можно применить ту же процедуру деления отрезка пополам, что и в доказательстве теоремы о нуле. Если требуется найти корень с точностью до ε, то достаточно выбрать тот отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого меньше ε. За приближенное значение корня можно взять середину этого отрезка. Существуют другие, более эффективные, методы приближенного нахождения корней, которые будут рассмотрены далее.

Наконец, докажем последнюю теорему о том, что область значений непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ совпадает с отрезком $[m, M]$, где $m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, а $M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ (см. теорему 3.40).

Доказательство. В самом деле, число m — это наименьшее из возможных значений $f(x)$ на $[a, b]$, а M — ее наибольшее значение на $[a, b]$. Значит, за пределами отрезка $[m, M]$ не может быть значений функции $f(x)$. Как мы только что видели, сами значения m и M принимаются функцией $f(x)$ на $[a, b]$. Возьмем теперь произвольное число c: $m < c < M$ и рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - c$.

Выберем точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ (пусть для определенности $x_1 < x_2$):

$$f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$$

и рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subset [a, b]$. На этом отрезке $g(x)$ непрерывна и, кроме того, ясно, что

$$g(x_1) < 0, \quad g(x_2) > 0.$$

Значит, существует точка $x_0 \in [x_1, x_2]: g(x_0) = 0$. Но это означает, что $f(x_0) = c$.

В силу произвольности c получаем, что весь отрезок $[m, M]$ заполнен значениями $f(x)$, что и требовалось доказать. ■

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Дифференцируемость, производная, дифференциал

В этой главе рассмотрим функции, определенные в некоторой окрестности точки x_0. Пусть функция $f(x)$ определена в $\mathrm{U}(x_0)$. Введем обозначения:

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = f(x) - f(x_0). \tag{4.1}$$

Определение 4.1. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.2}$$

(Другие обозначения производной: y', $\dfrac{dy}{dx}$.)

Заметим, что при изменении Δx меняется x, а x_0 остается постоянным.

Из (4.2) немедленно следует, что функция, принимающая постоянное значение в $\mathrm{U}(x_0)$, имеет производную в точке x_0, равную нулю: $C' = 0$, и функция $y = x$ имеет в любой точке производную, равную единице: $x' = 1$.

Рассмотрим теперь произвольную линейную функцию

$$y = Ax + B.$$

Пусть в точке x_0 ее значение равно y_0:

$$y_0 = Ax_0 + B.$$

Тогда, очевидно

$$y - y_0 = A(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad \Delta y = A\Delta x. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что и обратно, если (4.3) выполняется при любом Δx, то функция $y(x)$ линейная.

Можно несколько ослабить требования к функции, допуская, что равенство (4.3) выполняется не точно, а «в главном» при малых Δx. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 4.2. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если в некоторой окрестности $U(x_0)$ справедливо соотношение

$$\Delta y = A\Delta x + \circ(\Delta x), \quad \text{или}$$
$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0. \tag{4.4}$$

Слагаемое $A\Delta x$, где коэффициент A не зависит от Δx, называют *главной линейной частью* приращения Δy, или *дифференциалом* (обозначение: dy).

Замечание. Линейная функция дифференцируема в любой точке, и ее дифференциал dy совпадает с приращением Δy. Это немедленно получается, если (4.3) записать в виде (4.4), полагая $\alpha(\Delta x) \equiv 0$.

Разумеется, далеко не каждая функция является дифференцируемой.

Выясним теперь связь между дифференцируемостью функции в точке x_0 и ее непрерывностью в этой точке, а также между дифференцируемостью и существованием производной $f'(x_0)$.

Вначале установим, как записывается определение непрерывности через приращения Δx и Δy. Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, данное ранее определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 в новых обозначениях выглядит так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство данной теоремы очевидно, так как из (4.4) следует (4.5).

Эта теорема показывает, что требование дифференцируемости сильнее требования непрерывности.

Теорема 4.2. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в точке x_0 производную.

Доказательство. Действительно, пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда выполняется (4.4). Поделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x). \tag{4.6}$$

Перейдем к пределу в (4.6) при $\Delta x \to 0$ и получим

$$f'(x_0) = A.$$

Обратно, пусть существует $f'(x_0)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

и по теореме о связи пределов с бесконечно малыми получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \text{где} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0. \tag{4.7}$$

Умножив обе части равенства (4.7) на Δx, получим (4.4) с $A = f'(x_0)$, т.е. $f(x)$ оказывается дифференцируемой в точке x_0, что и завершает доказательство. ■

Теорема 4.2 позволяет, в частности, использовать термин «дифференцируемость в точке» как синоним существования производной в этой точке.

Отметим, что в процессе доказательства теоремы установлено, что коэффициент A в (4.4) с необходимостью совпадает с $f'(x_0)$. Значит, дифференциал dy принимает вид

$$dy = y'(x_0)\Delta x.$$

Но x можно рассматривать как частный случай линейной функции, а тогда его приращение совпадает с дифференциалом, т. е. приходим к следующей формуле для вычисления дифференциала:

$$dy = y'_x dx. \tag{4.8}$$

Значит, выражение $\dfrac{dy}{dx}$ можно понимать не просто как другое обозначение производной, а как обычную дробь. Таким образом, производная функции в точке равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Приведем геометрическую интерпретацию дифференцируемости в точке. Для этого рассмотрим график функции $y = f(x)$ в окрестности точки M_0, на котором изображены наклонные прямые, проходящие через точку (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 4.1). Уравнения таких прямых можно записать в виде

$$y - y_0 = A(x - x_0), \tag{4.9}$$

где A —произвольный коэффициент.

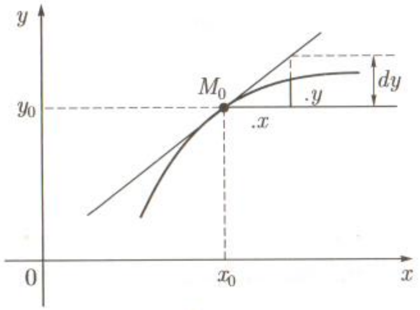

Рис. 4.1

Назовем *касательной* к графику в точке x_0 прямую (4.9), такую, что разность ординат графика $y_{\text{гр}}$ и этой прямой $y_{\text{к}}$ есть $\circ(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{к}} = \circ(\Delta x). \tag{4.10}$$

Визуально касательная — это та из прямых (4.9), которая «наитеснейшим образом» прилегает к графику в окрестности точки x_0 (см. рис. 4.1).

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 4.3 (о геометрическом смысле дифференцируемости). 1. У графика функции $y = f(x)$ имеется касательная в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция дифференцируема в этой точке.

2. Касательная единственна, и ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.11}$$

Доказательство. Пусть вначале $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо соотношение (4.4), которое запишем в виде

$$y_{\text{гр}} - y_0 = A(x - x_0) + \circ(\Delta x). \tag{4.12}$$

Отбросив в (4.12) слагаемое $\circ(\Delta x)$, получим уравнение прямой (ординату которой обозначим $y_{\text{к}}$):

$$y_{\text{к}} - y_0 = A(x - x_0). \tag{4.13}$$

Покажем, что это касательная в точке x_0. Действительно, после почленного вычитания (4.13) из (4.12) получим

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{к}} = \circ(\Delta x).$$

Значит, (4.13) — это уравнение касательной.

Обратно, пусть у графика $y = f(x)$ имеется касательная в точке x_0, описываемая уравнением (4.13), где A — некоторое число. Сложив (4.10) и (4.13), получим:

$$y_{\text{гр}} - y_0 = A(x - x_0) + \circ(\Delta x),$$

т. е. соотношение (4.4). А это и означает дифференцируемость $f(x)$ в точке x_0. Кроме того, число A в уравнении (4.13) оказалось равным коэффициенту в дифференциале dy, который, как известно, равен $f'(x_0)$. Таким образом, уравнение касательной с необходимостью принимает вид (4.11), что и доказывает второе утверждение теоремы. ■

При сравнении уравнения касательной (4.11) с определением дифференциала можно отметить, что *дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 совпадает с приращением ординаты касательной к ее графику в этой точке.*

4.2. Основные правила дифференцирования

Теорема 4.4. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $Cu(x)$, $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$ также дифференцируемы в этой точке. Функция $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ дифференцируема в точке x_0 при дополнительном условии $v(x_0) \neq 0$. При этом в точке x_0 выполняются следующие соотношения:

$$1)\quad (Cu)' = C\,u'; \qquad 2)\quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$3)\quad (uv)' = u'v + uv'; \qquad 4)\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $y = Cu$. Тогда

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = Cu(x) - Cu(x_0) = C\big(u(x) - u(x_0)\big) = C\Delta u.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\Delta u}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'.$$

Пусть далее $y = u \pm v$, тогда $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Пусть теперь $y = uv$, тогда

$$u(x) = u(x_0) + \Delta u\,; \quad v(x) = v(x_0) + \Delta v$$

и, соответственно,

$$\Delta y = \big(u(x_0) + \Delta u\big)\big(v(x_0) + \Delta v\big) - u(x_0)v(x_0) = \\ = \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Откуда получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + \\ + u(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v. \tag{4.14}$$

Но из дифференцируемости $v(x)$ в точке x_0 вытекает ее непрерывность в этой точке, т. е. соотношение $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Учитывая это, из (4.14) получим требуемую формулу.

Пусть, наконец, $y = \dfrac{u}{v}$, тогда

$$\Delta y = \frac{u(x_0) + \Delta u}{v(x_0) + \Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{\Delta u v(x_0) - u(x_0)\Delta v}{v(x_0)\big(v(x_0) + \Delta v\big)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) - u(x_0) \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\big(v(x_0) + \Delta v\big)} = \\ = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Здесь вновь воспользовались непрерывностью $v(x)$ в точке x_0. ■

Теорема 4.5 (правило дифференцирования сложной функции). Пусть
1) $f(u)$ дифференцируема в точке u_0;
2) $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0;
3) $\varphi(x_0) = u_0$.

Тогда сложная функция $y(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{4.15}$$

Доказательство. Действительно, в силу дифференцируемости функции $y = f(x)$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \text{ где } \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0. \tag{4.16}$$

Заметим, что из (4.16) нельзя определить значение $\alpha(\Delta u)$ при $\Delta u = 0$. Каково бы ни было это значение, равенство (4.16) останется справедливым. Будем считать, что $\alpha(0) = 0$. При этом функция $\alpha(\Delta u)$ будет непрерывной в нуле. Положим теперь $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\Delta u = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

Разделим обе части (4.16) на Δx и устремим Δx к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ в точке x_0, которая вытекает из дифференцируемости, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, но тогда и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$. Откуда и получим (4.15). ■

Замечание. Более наглядно, но менее точно, равенство (4.15) можно записать в виде

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Теорема 4.6 (о производной обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$ и строго монотонна на нем, и пусть в некоторой точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ существует $f'(x_0) \neq 0$. Тогда у обратной функции $x = \varphi(y)$ существует производная $\varphi'(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{4.17}$$

или, более наглядно,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

(Здесь под символом $\langle a, b \rangle$ понимаем промежуток произвольного вида. Это может быть отрезок, интервал, ось, полуось и т. п.)

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы об обратной функции (см. теорему 3.34) при данных условиях существует непрерывная и строго монотонная обратная функция $x = \varphi(y)$. Возьмем точку y_0 и дадим y приращение Δy, тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{4.18}$$

Здесь, если $\Delta y \neq 0$, то и $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $x = \varphi(y)$. Поэтому преобразование (4.18) законно. В силу непрерывности $\varphi(y)$, при $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$, значит,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

4.3. Некоторые вычислительные формулы

Таблица производных

1. $(x^p)' = p\,x^{p-1}$;	7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
2. $(e^x)' = e^x$;	8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;	9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;	10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;	11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;	12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Замечание. Приведенные формулы справедливы там, где существуют одновременно левая и правая части соответствующих равенств.

Докажем справедливость формул, приведенных в таблице.

• *Формула 1.* Рассмотрим вначале функцию $y = x^n$, где n — натуральное число. Возьмем произвольную точку x_0 и дадим x_0 приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = n x_0^{n-1} \Delta x + o(\Delta x)$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n x_0^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = n x_0^{n-1}.$$

Так что формула 1 справедлива при $n \in \mathbf{N}$.

Пусть теперь n —целое отрицательное число, тогда

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1'x^{-n} - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n\frac{1}{x^{-n+1}} = n x^{n-1}.$$

Так что формула 1 справедлива и в этом случае.

Справедливость формулы 1 в общем случае докажем чуть позже.

• *Формула 3.* Рассмотрим $y = a^x$, выберем точку x_0 и дадим ей приращение Δx, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} =$$

$$= a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

Тем самым обоснована формула 3.

• *Формула 2* немедленно следует из формулы 3, если положить $a = e$.

• *Формула 4*: если $y = \ln x$, то $x = e^y$, и по правилу (4.17) находим

$$(\ln x)'_x = \frac{1}{(e^y)'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

• *Формула 1.* Теперь можно доказать справедливость формулы 1 для любого действительного p и $x > 0$.

$$(x^p)' = \left(e^{p \ln x}\right)' = e^{p \ln x}(p \ln x)' = e^{p \ln x} p \cdot \frac{1}{x} = p\,x^p \cdot \frac{1}{x} = p\,x^{p-1}.$$

• *Формула 5*: функция $y = \sin x$. Рассмотрим произвольную точку x_0 и получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

• *Формулу 6* докажите самостоятельно.

• *Формула 7:* $y = \operatorname{tg} x$. Имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

• *Формула 8* доказывается аналогично формуле 7.
• *Формула 9.* Если $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$, поэтому

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Здесь перед корнем квадратным выбран положительный знак, поскольку на области изменения арксинуса косинус неотрицателен.

• *Формулы 10 — 12* докажите самостоятельно.

Вернемся еще раз к понятию дифференциала. Мы выяснили, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то для ее дифференциала справедлива формула (4.8). Подставим теперь вместо x некоторую дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$. Тогда в силу теоремы 4.5 сложная функция $y(t) = f(\varphi(t))$ будет дифференцируема в соответствующей точке и, значит, ее дифференциал можно будет вычислять по формуле

$$dy = y'_t \, dt.$$

Но в силу той же теоремы

$$y'_t = y'_x \, x'_t.$$

Значит,

$$dy = y'_x \, x'_t \, dt = y'_x \, dx,$$

где dx теперь уже не совпадает с приращением Δx, а является дифференциалом функции $x = \varphi(t)$. Таким образом, формула (4.8) сохраняется независимо от того, является ли x независимой переменной или представляет собой дифференцируемую функцию другой переменной.

Это свойство называют *инвариантностью* дифференциала.

Теперь перейдем к функциям, заданным параметрически. Пусть заданы две функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, определенные на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$. Может оказаться, что у функции $x = \varphi(t)$ имеется обратная функция $t = \omega(x)$. Подставив

эту функцию вместо аргумента в $\psi(t)$, получим сложную функцию от переменной x: $y(x) = \psi(\omega(x))$. В этом случае говорят, что эта функция от x задана параметрически (т. е. посредством параметра t) системой равенств

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b\rangle. \end{cases} \tag{4.19}$$

Наша цель — научиться вычислять производную y'_x такой функции.

Теорема 4.7 (о производной функции, заданной параметрически). Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$ заданы две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(t), \psi(t) \in C^1(\langle a, b\rangle)$;
2) $\varphi'(t) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$.

Тогда существует функция $y(x)$, заданная параметрически с помощью равенств (4.19); эта функция дифференцируема в любой точке x_0, такой, что $x_0 = \varphi(t_0)$, где $t_0 \in \langle a, b\rangle$, причем ее производная вычисляется по формуле

$$y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \text{или, более наглядно,} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Первое условие данной теоремы требует пояснений. Под символом $C^1(\langle a, b\rangle)$ понимается множество всех функций, непрерывных на $\langle a, b\rangle$ и имеющих на $\langle a, b\rangle$ непрерывную производную. Это множество носит название «класс C^1 на $\langle a, b\rangle$». Таким образом, первое условие теоремы означает, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на промежутке $\langle a, b\rangle$ и имеют на нем непрерывные производные.

В силу второго условия непрерывная функция $\varphi'(t)$ нигде не обращается в нуль на $\langle a, b\rangle$, откуда следует, что она сохраняет на $\langle a, b\rangle$ постоянный знак. Действительно, если бы, например, нашлись две точки $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$, в которых знаки $\varphi'(t)$ были бы различны, то по свойству непрерывных функций на отрезке $[t_1, t_2] \subset \langle a, b\rangle$ нашлось бы число t_3, такое, что $\varphi'(t_3) = 0$, а это запрещено условием 2. Значит, на всем $\langle a, b\rangle$ либо $\varphi'(t) > 0$, либо $\varphi'(t) < 0$, откуда следует строгая монотонность $\varphi(t)$ на $\langle a, b\rangle$ (см. подразд. 4.3).

Но тогда для функции $x = \varphi(t)$ выполнены все условия теоремы о производной обратной функции (см. теорему 4.6), в силу которой существует обратная функция $t = \omega(x)$, производная которой вычисляется по формуле

$$\omega'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)}, \quad \text{где} \quad x_0 = \varphi(t_0),\ t_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Подставив эту функцию вместо t в функцию $y = \psi(t)$ и применив теорему о производной сложной функции (см. теорему 4.5), получим

$$y'(x_0) = \psi'(t_0)\omega'(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)},$$

т. е. формулу (4.20). ■

4.4. Основные теоремы дифференциального исчисления

В этом подразделе будут доказаны три знаменитые теоремы, носящие имена Ферма, Ролля и Лагранжа, а также получены важные следствия из них.

Вначале дадим определение.

Определение 4.3. Точка x_0 является точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если

$$\exists\, \dot{\mathrm{U}}(x_0):\ \forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)\ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0) \quad \big(f(x) > f(x_0)\big). \tag{4.21}$$

Общее название локальных максимума и минимума — *локальный экстремум*. Если в неравенствах (4.21) фигурирует знак нестрогого неравенства «$\leqslant$» («$\geqslant$»), то мы говорим о *нестрогом* локальном экстремуме. В определении берется проколотая окрестность, поскольку неравенство $f(x) < f(x_0)$ не может, очевидно, выполняться при $x = x_0$. Но, разумеется, $f(x)$ определена и в самой точке x_0.

Обратим также внимание, что если функция определена на отрезке $[a, b]$ и принимает, допустим, максимальное значение в концевой точке b, то это не подпадает под определение локального максимума, поскольку, хотя $f(x) < f(b)$ для всех $x \in [a, b]$, отличных от b, мы не сможем окружить точку b окрестностью $\dot{\mathrm{U}}(b)$, целиком содержащейся в данном отрезке. Поэтому сформулированная далее теорема Ферма на этот случай не распространяется.

Теорема 4.8 (теорема Ферма). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум (быть может, нестрогий) и дифференцируема в этой точке. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. В самом деле, пусть, например, у $f(x)$ в точке x_0 имеется локальный максимум, т. е. выполнено (4.21). Возьмем произвольное $x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)$, такое, что $x < x_0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу в этом неравенстве, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Если теперь взять любое $x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)$, такое, что $x > x_0$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \leqslant 0. \tag{4.23}$$

Из (4.22) и (4.23) следует, что $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема 4.9 (теорема Ролля). Пусть задана функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:
1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b);
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Действительно, по свойствам функций, непрерывных на отрезке,

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]:\ \forall\, x \in [a, b] \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2). \tag{4.24}$$

Пусть вначале обе точки x_1 и x_2 находятся на концах отрезка. Тогда из (4.24) и третьего условия теоремы немедленно следует, что $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и в качестве точки c можно взять любую точку интервала (a, b).

Пусть теперь хотя бы одна из точек, например x_1, принадлежит интервалу (a, b). Тогда можно выбрать малую окрестность $\mathrm{U}(x_1)$, такую, что $\mathrm{U}(x_1) \subset (a, b)$. Значит, в точке x_1 по ф-ле 4.24 у $f(x)$ имеется локальный минимум, а тогда по теореме Ферма $f'(x_1) = 0$. Итак, в качестве точки c можно взять x_1. ■

Замечание. Второе условие теоремы не надо понимать так, что функция дифференцируема *только* в интервале (a, b). Она может быть, например, определена и дифференцируема на всей числовой оси.

Условия теоремы несколько избыточны. Ведь из дифференцируемости $f(x)$ в интервале (a, b) следует ее непрерывность в этом интервале. Так что первое условие можно было бы заменить на требование непрерывности (причем, односторонней) в концевых точках отрезка $[a, b]$. Однако в приведенном ранее виде это условие более наглядно, поэтому традиционно теорема формулируется именно так.

В качестве упражнения предлагаем читателям выяснить, почему теорема Ролля не применима к функции $\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$.

Теорема 4.10 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b).

Тогда существует точка c, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.25}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a), \tag{4.26}$$

где λ —пока произвольная постоянная. Очевидно, что эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и $\varphi(a) = 0$. Подберем в (4.26) такое значение λ (обозначим его λ_0), чтобы $\varphi(b)$ также равнялось нулю:

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \lambda_0(b - a) = 0.$$

Откуда

$$\lambda_0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Если подставить это значение λ_0 в формулу (4.26), то функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять всем требованиям теоремы Ролля. Тогда в силу этой теоремы

$$\exists\, c \in (a, b): \quad \varphi'(c) = 0.$$

Но $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda_0$, следовательно, $f'(c) - \lambda_0 = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda_0$, что равносильно (4.25). ■

Следствие. Пусть $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle a, b\rangle$ и во всех точках этого промежутка $f'(x) = 0$. Тогда $f(x)$ постоянна на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство. Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из $\langle a, b\rangle$, такие, что $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ для $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. В частности, непрерывность на $[x_1, x_2]$ следует из дифференцируемости. Поэтому

$$\exists\, c \in (x_1, x_2): \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \tag{4.27}$$

Но по условию во всех точках промежутка $\langle a, b\rangle$, в том числе и в точке c, $f'(x) = 0$. Из (4.27) находим, что $f(x_1) = f(x_2)$. В силу произвольного выбора точек x_1 и x_2 это и означает постоянство $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. ■

4.5. Приложение дифференциального исчисления к исследованию поведения функций

Дадим следующее определение.

Определение 4.4. Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) на промежутке $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall\, x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle: \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \big(f(x_1) > f(x_2)\big). \tag{4.28}$$

Теорема 4.11 (достаточный признак монотонности). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle a, b\rangle$ и во всех точках этого промежутка выполняется неравенство $f'(x) > 0$ $\big(f'(x) < 0\big)$. Тогда функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство. Возьмем произвольную пару точек $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : x_1 < x_2$ и применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа (выполнение условий этой теоремы обеспечено дифференцируемостью $f(x)$). Тогда

$$\exists\, c \in (x_1, x_2): \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) > 0 \quad (f'(c) < 0).$$

Отсюда и вытекает (4.28). ■

Теорема 4.12 (достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) $f(x)$ дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$;

3) $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Тогда у $f(x)$ имеется в точке x_0 локальный экстремум, причем, если знак производной меняется с «+» на «−», то — максимум, а если с «−» на «+», то — минимум.

Доказательство. Здесь требуется пояснить третье условие теоремы. Мы считаем, что $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, если для всех x из $\dot{\mathrm{U}}(x_0) : x < x_0$ она имеет один знак, а для всех x из $\dot{\mathrm{U}}(x_0) : x > x_0$ — противоположный знак.

Пусть для определенности знак $f'(x)$ меняется с «+» на «−». Возьмем произвольную точку $x_1 \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) : x_1 < x_0$ и применим к отрезку $[x_1, x_0]$ теорему Лагранжа. Отметим, что непрерывность $f(x)$ на промежутке $[x_1, x_0)$ следует из дифференцируемости, а непрерывность в точке x_0 оговорена в условии. Получим:

$$\exists\, c_1 \in (x_1, x_0): \qquad \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(c_1) > 0.$$

Следовательно, $f(x_1) < f(x_0)$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $x_2 \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) : x_0 < x_2$. Применив теорему Лагранжа к отрезку $[x_0, x_2]$, получим

$$\exists\, c_2 \in (x_0, x_2): \qquad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f'(c_2) < 0.$$

Следовательно, $f(x_2) < f(x_0)$.

Итак, доказано, что

$$\forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)\,,$$

а это и означает, что у функции $f(x)$ в точке x_0 имеется локальный максимум. ■

Перейдем теперь к вопросу о так называемом сравнении скоростей роста степенной, показательной и логарифмической функций, т. е. установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &1)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0, && \forall\, p \;\text{ и }\; a > 1;\\ &2)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon} = 0, && \forall\, p \;\text{ и }\; \varepsilon > 0;\\ &3)\quad \lim_{x\to 0+} x^\varepsilon |\ln x|^p = 0, && \forall\, p \;\text{ и }\; \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Докажем первое равенство. Если $p \leqslant 0$, то равенство очевидно, так как x^p представляет собой ограниченную в окрестности бесконечности функцию, а $\dfrac{1}{a^x}$ — бесконечно малую.

Пусть теперь $p > 0$. Тогда и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности и результат совсем не очевиден. Исследуем поведение функции $y = \dfrac{x^p}{a^x}$ на положительной полуоси $x \in (0, +\infty)$:

$$y' = \frac{p\,x^{p-1}a^x - x^p a^x \ln a}{a^{2x}} = \frac{x^{p-1}}{a^x}(p - x\ln a). \tag{4.30}$$

Ясно, что знак y' совпадает со знаком выражения в скобках в (4.30), т. е. он положителен при $x < x_p = \dfrac{p}{\ln a}$ и отрицателен при $x > x_p$. Изобразим график функции при $x \in (0, +\infty)$ (рис. 4.2).

В точке x_p функция принимает наибольшее значение на $(0, +\infty)$, которое обозначим C_p.

Возьмем теперь дробь $\dfrac{x^{p+1}}{a^x}$. В силу вышеизложенного, на $(0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{x^{p+1}}{a^x} \leqslant C_{p+1}. \tag{4.31}$$

Поделим все части (4.31) на x:

$$0 < \frac{x^p}{a^x} \leqslant \frac{C_{p+1}}{x}. \tag{4.32}$$

Очевидно, что левая и правая части (4.32) стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Отсюда по теореме о зажатой переменной получим первое равенство из (4.29).

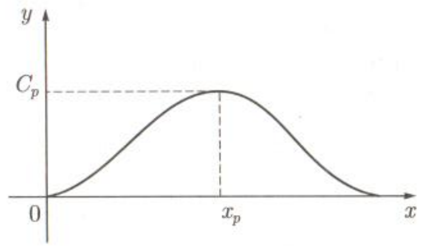

Рис. 4.2

Чтобы доказать второе соотношение из (4.29), сделаем замену переменной: $\ln x = t$. Тогда искомый предел выразится в виде

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^p}{e^{\varepsilon t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^p}{(e^{\varepsilon})^t} = 0.$$

Последний шаг был сделан на основании первого соотношения (4.29) и того, что $e^{\varepsilon} = a > 1$.

Третье соотношение (4.29) можно доказать, сделав замену переменной $t = \dfrac{1}{x}$. В результате получим

$$\lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon}|\ln x|^p = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\varepsilon}}\left|\ln\frac{1}{t}\right|^p = \lim_{t\to+\infty}\frac{|\ln t|^p}{t^{\varepsilon}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t)^p}{t^{\varepsilon}} = 0.$$

Последний шаг был сделан на основании второго соотношения (4.29).

Первые два соотношения (4.29) можно интерпретировать так, что при $x \to +\infty$ степенная функция растет медленнее показательной, а логарифмическая — медленнее степенной.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$. Тогда ее производная y' сама является функцией, определенной на этом промежутке, и можно рассматривать ее производную. Эта производная $(y')'$ носит название *второй производной* (или *производной второго порядка*) от функции y и обозначается y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично можно рассматривать производные третьего, четвертого порядка и т. д. Вообще, производной n-го порядка заданной функции называется производная от ее $(n-1)$-й производной: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается n-я производная так: $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$. Отметим, что в отличие от производной первого порядка обозначение $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ уже нельзя интерпретировать как настоящую дробь — это всего лишь единый символ для n-й производной.

Для выяснения «геометрического смысла» второй производной y'' рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой на промежутке $\langle a, b\rangle$.

Определение 4.5. График функции $f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на $\langle a, b\rangle$, если на этом промежутке он расположен не ниже (не выше) *каждой* касательной к этому графику, проведенной через произвольную точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

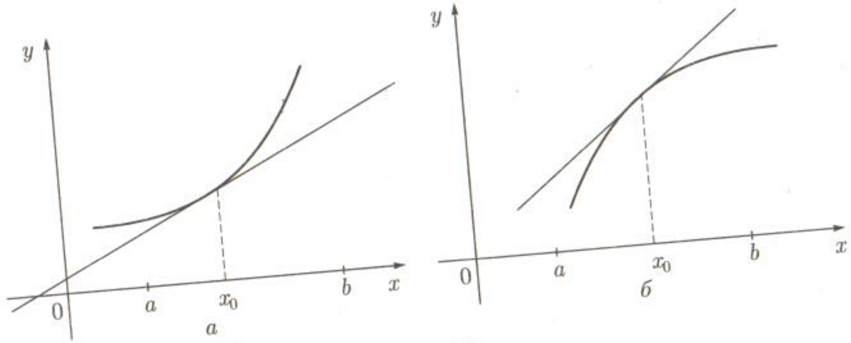

Рис. 4.3

На рис. 4.3 представлены графики функций, выпуклой вниз (рис. 4.3, *а*) и выпуклой вверх (рис. 4.3, *б*).

Теорема 4.13 (достаточный признак выпуклости). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на промежутке $\langle a, b\rangle$ и пусть на этом промежутке $f''(x) > 0$ $\big(f''(x) < 0\big)$. Тогда график $y = f(x)$ будет на $\langle a, b\rangle$ выпуклым вниз (вверх).

Доказательство. Действительно, наряду с графиком $y = f(x)$ рассмотрим касательную к этому графику, проведенную через его произвольную точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$, где $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение такой касательной, как известно, имеет вид

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Изучим знак разности ординат графика и касательной в произвольной точке $x_1 \in \langle a, b\rangle$:

$$y - y_k = f(x_1) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)\big) \geqslant 0 \tag{4.33}$$
$$= \big(f(x_1) - f(x_0)\big) - f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

К разности выражения в первых скобках правой части формулы применим теорему Лагранжа на отрезке $[x_0, x_1]$. (Заметим, что в силу существования $f''(x)$ сама функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ будут непрерывны на $\langle a, b\rangle$.) В силу этой теоремы

$$\exists c \in (x_0, x_1): \quad f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0). \tag{4.34}$$

Подставив (4.34) в (4.33), получим

$$y - y_k = \big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x_1 - x_0). \tag{4.35}$$

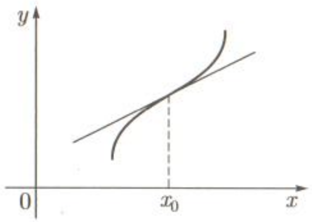

Рис. 4.4

Снова применив теорему Лагранжа, но уже к функции $f'(x)$ на отрезке $[x_0, c]$ (объясните, почему это можно сделать), придем к соотношению

$$y - y_k = f''(c_1)(c - x_0)(x_1 - x_0), \quad (4.36)$$

где $c_1 \in (x_0, c)$.

Заметим теперь, что где бы ни находилась точка x_1, справа или слева от x_0, произведение

$$(c - x_0)(x_1 - x_0)$$

положительно и, следовательно, знак разности $y - y_k$ совпадает со знаком $f''(c_1)$.

Если на промежутке $\langle a, b\rangle$ $f''(x) > 0$, то и $f''(c_1) > 0$. Значит, $y - y_k > 0$ и график лежит выше касательной для всех $x \neq x_0$ (в самой точке x_0 разность $y - y_k = 0$), т. е. график $y = f(x)$ является выпуклым вниз. Аналогично рассматривается случай $f''(x) < 0$. ■

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle a, b\rangle$ и $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда, если существует окрестность этой точки $\mathrm{U}(x_0) = \{x\colon x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, такая, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ график $y = f(x)$ является выпуклым в одну сторону, а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ — в другую, то точка x_0 называется *точкой перегиба* графика $y = f(x)$. В этой точке происходит изменение выпуклости и график переходит с одной стороны касательной на другую (рис. 4.4).

Итак, теперь можно ответить практически на все вопросы о поведении графика функции $y = f(x)$: определить возрастание и убывание графика, его выпуклость, точки локального экстремума и точки перегиба. Чтобы завершить эту тему, введем понятие *наклонной асимптоты* графика. Под ней будем понимать наклонную прямую, такую, что разность ординат графика и этой прямой в точке x будет стремиться к нулю при $x \to \infty$.

Теорема 4.14. Для того чтобы график функции $y = f(x)$ обладал наклонной асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие два предела:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} \bigl(f(x) - kx\bigr) = b. \quad (4.37)$$

При этом уравнение асимптоты имеет вид

$$y = kx + b. \quad (4.38)$$

Доказательство. В самом деле, пусть у графика имеется наклонная асимптота. Тогда в силу ее определения справедливо соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \Bigl(f(x) - (kx + b)\Bigr) = 0,$$

т. е.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0. \quad (4.39)$$

Поделив обе части (4.39) на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получим первое соотношение из (4.37). Вычитая из $f(x)$ слагаемое kx и снова переходя к пределу при $x \to \infty$, получим второе соотношение из (4.37). Столь же легко доказывается и обратное утверждение: если существуют оба предела (4.37), то прямая (4.38) является асимптотой графика $y = f(x)$ (проведите доказательство самостоятельно). Нужно отметить, что, вообще говоря, следует отдельно искать асимптоту при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, поскольку поведение функции на «$+\infty$» и на «$-\infty$» может быть совершенно разным. И лишь для рациональных функций можно быть уверенным, что, если наклонная асимптота есть, то она одна и та же как на «$+\infty$», так и на «$-\infty$». ■

4.6. Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Формулу (4.4) для ее приращения можно переписать в таком виде

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0,$$

или

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \quad (4.40)$$

Формулу же (4.40) можно интерпретировать так: функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 приближенно равна некоторому многочлену первого порядка, а погрешность такого приближения стремится к нулю быстрее, чем $x - x_0$ при $x \to x_0$.

Но задачу о приближении функции многочленом можно поставить не только для многочлена первого порядка, но и для многочлена любого порядка n.

Предварительно возьмем произвольный многочлен n-го порядка

$$P_n(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \quad (4.41)$$

и запишем его в другой, более удобной форме.

Положим $t = x - x_0$, т. е. $x = x_0 + t$ и подставим это выражение для x в (4.41):

$$\widetilde{P}_n(t) = b_0 + b_1(x_0 + t) + b_2(x_0 + t)^2 + \dots + b_n(x_0 + t)^n. \quad (4.42)$$

Раскрыв скобки в (4.42) и приведя подобные члены, получим

$$\widetilde{P}_n(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

Возвращаясь к прежней переменной, находим

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (4.43)$$

Представление (4.43) имеет перед (4.41) то преимущество, что здесь каждое слагаемое при $x \to x_0$ стремится к нулю со своей, отличной от других, скоростью.

Выясним теперь, как связаны коэффициенты a_k в (4.43) с производными многочлена $P_n(x)$ в точке x_0. Очевидно, что $a_0 = P(x_0)$. Продифференцируем (4.43):

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} \quad (4.44)$$

и подставим в полученное выражение $x = x_0$. Тогда

$$P_n'(x_0) = a_1.$$

Продифференцируем (4.44):

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{(n-2)}$$

и опять подставим $x = x_0$:

$$P_n'(x_0) = 2a_2.$$

Продолжая действовать подобным образом, можно установить следующую формулу:

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.45)$$

Теперь многочлен (4.43) можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4.46)$$

А теперь вернемся к нашей задаче. Требуется найти такой многочлен n-го порядка $P_n(x)$, для которого при $x \to x_0$ выполнялось бы соотношение

$$f(x) = P_n(x) + \circ[(x - x_0)^n],$$

или, в развернутом виде,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \circ[(x - x_0)^n]. \quad (4.47)$$

Теорема 4.15. Для заданной функции $f(x)$ существует не более одного многочлена, удовлетворяющего условию (4.47).

Доказательство. В самом деле, пусть наряду с $P_n(x)$ есть еще один многочлен $Q_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n$, такой, что

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + \circ[(x - x_0)^n]. \quad (4.48)$$

Перепишем (4.47) и (4.48), раскрыв символы $\circ[(x - x_0)^n]$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n, \quad (4.49)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + \beta(x)(x - x_0)^n. \quad (4.50)$$

Здесь $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$.

Вычитая (4.50) из (4.49), получим

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + \\ + \gamma(x)(x - x_0)^n = 0, \quad (4.51)$$

где $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ — бесконечно малая. Полагая $x = x_0$ в (4.51), получим, что $a_0 = b_0$, и равенство (4.51) примет вид

$$(a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + \gamma(x)(x - x_0)^n = 0. \quad (4.52)$$

Разделим обе части (4.52) на $(x - x_0)$ и устремим x к x_0. Найдем, что $a_1 = b_1$. Продолжая действовать подобным образом, установим, что

$$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

что и означает совпадение $P_n(x)$ с $Q_n(x)$. ■

Рассмотрим простейшие функции $\varphi_k(x) = (x - x_0)^k$. Мы видим, что, с одной стороны, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0) = 0\,,\\
&\varphi_2(x_0) = \varphi_2'(x_0) = 0\,,\\
&\varphi_3(x_0) = \varphi_3'(x_0) = \varphi_3''(x_0) = 0\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_k(x_0) = \varphi_k'(x_0) = \ldots = \varphi_k^{(k-1)}(x_0) = 0\,,
\end{aligned}$$

а с другой стороны, при $x \to x_0$

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(x) = \circ(x - x_0),\\
&\varphi_3(x) = \circ[(x - x_0)^2],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_k(x) = \circ[(x - x_0)^{k-1}].
\end{aligned}$$

Это не случайное совпадение. Существует тесная связь между количеством производных некоторой функции, обращающихся в нуль в точке x_0, и скоростью убывания этой функции при $x \to x_0$. Эта связь устанавливается в следующей теореме, которую приводим здесь без доказательства.

Теорема 4.16. Пусть функция $\varphi(x)$ определена в окрестности точки x_0 и удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0\,,$$

тогда при $x \to x_0$

$$\varphi(x) = \circ[(x - x_0)^n]\,.$$

А теперь предположим, что функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, а в самой этой точке имеет n-ю производную $f^{(n)}(x_0)$. Найдем многочлен n-го порядка $T_n(x)$, который в окрестности точки x_0 точнее всего приближал бы $f(x)$ в том смысле, что разность между $f(x)$ и этим многочленом убывала бы быстрее всего при $x \to x_0$. Здравый смысл подсказывает, что среди всех многочленов n-го порядка точнее всего приближать функцию будет тот, значение которого в точке x_0 совпадет с $f(x_0)$, а также значения всех его производных до n-го порядка включительно в точке x_0 будут равны значениям соответствующих производных функции. Иначе,

$$f(x_0) = T_n(x_0),\ f'(x_0) = T_n'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0). \quad (4.53)$$

Но тогда, учитывая (4.45), такой многочлен однозначно запишется в виде

x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4.54)$$

Многочлен (4.54) назовем *многочленом Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0.*

Теорема 4.17. Пусть у функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0, в самой этой точке существует n-я производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда при $x \to x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \circ\,[(x - x_0)^n]. \quad (4.55)$$

Формула (4.55) носит название *формулы Тейлора.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - T_n(x)$. В силу (4.53) для нее выполняются условия

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0\,.$$

Но тогда в силу теоремы 4.16 $\varphi(x) = \circ[(x - x_0)^n]$. Иначе,

$$f(x) - T_n(x) = \circ[(x - x_0)^n], \quad (4.56)$$

Перенесем в (4.56) $T_n(x)$ в правую часть и получим (4.55).

Отметим, что при $x_0 = 0$ (4.55) принимает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n) \quad (4.57)$$

и носит название *формулы Маклорена.* ■

Разность между функцией $f(x)$ и ее многочленом Тейлора $T_n(x)$ носит название *остаточного члена* $r_n(x)$ формулы Тейлора. В формуле (4.55) этот остаточный член записан в виде $\circ[(x - x_0)^n]$. В этом случае говорят, что остаточный член задан *в форме Пеано.* Стоит отметить, что существуют и многие другие формы записи остаточного члена.

Перепишем формулу (4.57) для некоторых важных функций. Для этого предварительно выясним, как выглядят их n-е производные.

Во-первых, очевидно, что

$x + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$

$$(e^x)^{(n)} = e^x\,, \quad (4.58)$$

так как e^x при дифференцировании не меняется.

Далее, пусть $y = x^p$, тогда

$$y' = p\,x^{p-1}, \quad y'' = p\,(p-1)x^{p-2}, \quad y''' = p\,(p-1)(p-2)x^{p-3}, \ldots$$

Вообще,

$$(x^p)^{(n)} = p\,(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n}. \tag{4.59}$$

Заметим, что если p — натуральное число, то при $n > p$ $(x^p)^{(n)} \equiv 0$. Кроме того, ясно, что

$$\left((1+x)^p\right)^{(n)} = p\,(p-1)\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \tag{4.60}$$

поскольку, применяя правило дифференцирования сложной функции, каждый раз нужно умножать найденное выражение на $(1+x)' = 1$. Таким образом, (4.60) получается из (4.59) заменой x на $(1+x)$.

Рассмотрим теперь функцию $\ln x$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad (\ln x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} =$$
$$= (-1)(-1-1)\cdots(-1-(n-1)+1)x^{-1-(n-1)}.$$

После очевидных упрощений приходим к формуле

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{4.61}$$

Аналогично (4.60) можно получить формулу

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \tag{4.62}$$

Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x.$$

Далее производные циклически повторяются, так что

$$y^{(n+4)} = y^{(n)}.$$

Легко проверить, что все это укладывается в формулу

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\,n\right). \tag{4.63}$$

Аналогично получается формула для производной косинуса

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\,n\right). \tag{4.64}$$

Теперь, учитывая все найденые формулы, можно записать пять основных разложений:

$$1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}); \tag{4.65}$$

$$4) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$5) \quad (1+x)^p = 1 + p\,x + \frac{p\,(p-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{p\,(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Иногда в качестве шестого разложения добавляют пятое разложение для специального случая $p = -1$, который часто встречается на практике:

$$6) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

4.7. Приложение*

Рассмотрим функцию $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие производные любого порядка, и найдем формулы вычисления производных различных порядков от этой функции.

$$y' = u'v + uv';$$
$$y'' = (u'v)' + (uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$
$$y''' = (u''v)' + 2(u'v')' + (uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Заметим, что коэффициенты в этих формулах совпадают с коэффициентами в формулах

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Естественно возникает предположение, что эта закономерность распространяется и на производные более высокого порядка. Иначе, должна выполняться формула

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}\,u^{(n-2)}v'' + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,u^{(n-k)}v^k + uv^{(n)}. \tag{4.66}$$

Коэффициенты в (4.66) — это биномиальные коэффициенты, т. е. коэффициенты в разложении $(a+b)^n$. Оказывается, что эта формула действительно имеет место (это можно доказать, например, с помощью математической индукции) и носит название *формулы Лейбница*. Вычислим, например, с ее помощью n-ю производную функции $y = x^2e^x$. Поскольку

$$(x^2)' = 2x\,,\ (x^2)'' = 2,\ \ldots\ (x^2)^{(k)} = 0\,,\ k = 3, 4,\ \ldots,$$
$$(e^x)^{(k)} = e^x\,,$$

полагая в (4.65) $u = e^x$, $v = x^2$, получим

$$y^{(n)} = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x\,.$$

А теперь вернемся к вопросу о приближенном вычислении корня алгебраического уравнения

$$f(x) = 0. \tag{4.67}$$

Ранее мы видели, что, если удается выделить отрезок $[a,b]$, на котором находится единственный корень x_0 уравнения (4.67), то приближенное значение x_0 с любой точностью можно получить методом деления отрезка $[a,b]$ пополам. Однако существуют более эффективные методы приближенного вычисления x_0, быстрее приводящие к цели. Здесь кратко опишем два таких метода: *метод хорд* и *метод касательных*.

Будем предполагать, что $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x) \in C^2\big([a,b]\big)$, т. е. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ вместе со своими производными первого и второго порядка;

2) значения $f(x)$ на концах $[a,b]$ имеют разные знаки: $f(a)f(b) < 0$;

3) $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знаки на $[a,b]$.

Заметим, что сохранение знака $f'(x)$ гарантирует монотонность $f(x)$ на $[a,b]$, а, значит, и единственность корня x_0 на этом

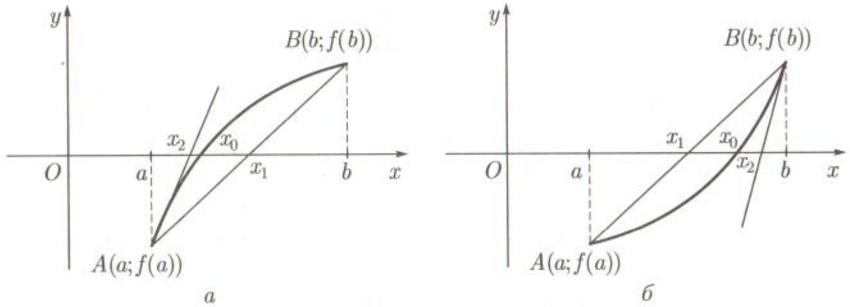

Рис. 4.5

отрезке. Сохранение же знака $f''(x)$ гарантирует выпуклость графика $y = f(x)$ на $[a,b]$ в одну сторону. Изобразим схематически график функции на $[a,b]$ для случаев выпуклости вверх и выпуклости вниз (рис. 4.5, *а*, *б*).

Напишем сначала уравнение прямой (хорды), проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \tag{4.68}$$

Корень x_0 — это абсцисса точки пересечения графика $y = f(x)$ с осью Ox. Приближенным значением для него будет абсцисса x точки пересечения хорды (4.68) с осью Ox, которая легко находится из уравненения (4.68), если положить $y = 0$:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}.$$

Теперь из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выбираем тот, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. На этом отрезке снова можно провести хорду, абсцисса точки пересечения которой с осью Ox будет следующим приближением к корню x_0 и т. д. В этом состоит *метод хорд*.

С другой стороны, можно провести касательную к графику $y = f(x)$ в точке $\big(c, f(c)\big)$, где $c \in [a,b]$, и абсциссу x_2 точки пересечения этой касательной с осью Ox выбрать в качестве приближенного значения для x_0. Уравнение такой касательной, как известно, имеет вид

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)\,.$$

Полагая здесь $y = 0$, найдем

$$x_2 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}\,.$$

Обычно в качестве c выбирают один из концов отрезка $[a, b]$, причем именно тот, на котором знаки $f(c)$ и $f''(c)$ совпадают. В этом случае, как можно показать, приближенное значение x_2 будет лежать в интервале (a, b).

Как и в методе хорд, можно теперь выбрать тот из отрезков $[a, x_2]$, $[x_2, b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, и уже на нем провести новую касательную, что даст новое приближение для корня x_0.

Этот метод носит название *метода касательных* или метода Ньютона. Можно доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x)$, применяя нужное число раз метод хорд или метод касательных, можно получить приближенное значение для x_0 с любой заданной точностью.

Обратим внимание, что на рис. 4.5 точки x_1 и x_2 приближают x_0 с разных сторон. Это общая ситуация. Поэтому иногда применяют комбинированный метод, когда одновременно ищут приближенные значения для x_0 как по методу хорд, так и по методу касательных.

Теперь докажем *теорему Коши*, которая является естественным обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема 4.18. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$;
2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a, b);
3) $g'(x) \neq 0$ на (a, b).

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.69}$$

Доказательство. Действительно, введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda\big(g(x) - g(a)\big),$$

где λ — пока произвольный числовой параметр. Очевидно, что $\varphi(a) = 0$. Подберем λ так, чтобы $\varphi(b)$ также равнялось нулю:

$$f(b) - f(a) - \lambda\big(g(b) - g(a)\big) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Заметим, во-первых, что знаменатель данной дроби не может обратиться в нуль, поскольку, если бы $g(b)$ равнялось $g(a)$, то в силу теоремы Ролля нашлась бы точка на (a, b), в которой $g'(x)$ обращалась бы в нуль, а это противоречит третьему условию теоремы. Во-вторых, $\varphi(x)$ очевидно удовлетворяет при так выбранном λ всем условиям теоремы Ролля. Но тогда в силу этой теоремы $\exists\, c \in (a, b)\colon \varphi'(c) = 0$. Учитывая, что $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, приходим к соотношению

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda,$$

что равносильно (4.69). ■

С помощью теоремы 4.18 можно доказать другую теорему, которая носит название *правила Лопиталя — Бернулли*. Стоит отметить, что чаще всего эту теорему называют просто правилом Лопиталя, что несправедливо, так как «заслуга» Лопиталя лишь в том, что он опубликовал доказанную Бернулли теорему под своим именем.

Теорема 4.19. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ точки x_0, причем $g(x)$ и $g'(x)$ в этой окрестности не обращаются в нуль. Пусть далее

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{и существует} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Доказательство. В самом деле, доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 по непрерывности, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Возьмем фиксированное $x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)$. Заметим, что на отрезке $[x_0, x]$ $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда в силу этой теоремы $\exists\, c \in (x_0, x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

т. е.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.70}$$

Устремим x к x_0. Тогда c тоже будет стремиться к x_0, а значит, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ будет стремиться к a. Отсюда в силу (4.70) получим утверждение теоремы. ■

Данная теорема обобщается, во-первых, на случай, когда $x \to \infty$, а во-вторых — на случай, когда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Доказательство этих вариантов данного правила более сложное и здесь его не проводим.

Проиллюстрируем теорему 4.19 на двух примерах:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Дифференциальное исчисление

В основном мы будем иметь дело с функциями двух переменных. Если функция $y = f(x)$ сопоставляла каждому числу x из области определения другое число y, то функция двух переменных $z = f(x,y)$ сопоставляет *паре чисел* (x,y) третье число z. Функцию одной переменной часто удобно было рассматривать как функцию точки на числовой прямой. Точно так же, функцию двух переменных естественно считать функцией точки на плоскости $z = f(M)$, где M имеет координаты (x,y). Геометрическим изображением функции одной переменной являлся график. Точно так же, для функции двух переменных можно говорить о «графике», понимая под ним поверхность с уравнением $z = f(x,y)$ (рис. 5.1).

Замечание. Если в случае функций одной переменной график служил важным инструментом исследования поведения функции, то для функции двух переменных график имеет лишь теоретическое значение, поскольку даже для очень простых функций изобразить соответствующую поверхность нелегко.

Функция n переменных $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет набору из n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ число u. Здесь также можно говорить, что такая функция является функцией точки, но уже в n-мерном пространстве, понимая под точкой M набор из n чисел $M = (x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 5.1. *Окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ называется множество

$$\mathrm{U}(M_0) = \{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \text{ где } \delta > 0\}. \quad (5.1)$$

Таким образом, $\mathrm{U}(M_0)$ — это открытый круг (т. е. круг без граничной окружности) радиуса δ с центром в точке M_0.

Определение 5.2. *Проколотой окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ называется окрестность $\mathrm{U}(M_0)$ с исключенным центром.

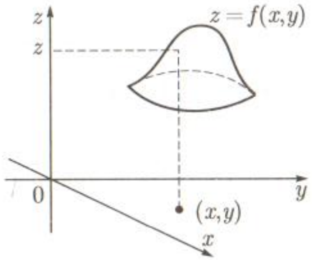

Рис. 5.1

Иначе, это множество

$$\dot{\mathrm{U}}(M_0) = \{(x,y) : 0 < \\ < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \quad \text{где } \delta > 0\}. \qquad (5.2)$$

Для функции n переменных соотношения (5.1) и (5.2) принимают, соответственно, вид

$$U(M_0) = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta; \\ \delta > 0\}$$

и

$$\dot{\mathrm{U}}(M_0) = \{(x_1, \ldots, x_n) : 0 < \\ < \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta; \ \delta > 0\}.$$

Определение 5.3. Число a называется *пределом* $f(M)$ *при* $M \to M_0$ (пишут $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\mathrm{U}}(M_0) : \ \forall M \in \dot{\mathrm{U}}(M_0) \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon. \qquad (5.3)$$

Это общее определение для функций любого числа переменных. Применяются также обозначения

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, \ldots, x_n) = a\,,$$

которые имеют тот же смысл, что и (5.3).

Замечание. Определение 5.3 практически дословно повторяет определение предела для функции одной переменной. Поэтому все теоремы о пределах (такие, как, например, теоремы о действиях с пределами, теорема о сохранении знака и т. д.) остаются справедливыми и в этом случае.

Определение 5.4. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)\,,$$

т. е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathrm{U}(M_0) : \ \forall M \in \mathrm{U}(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon. \qquad (5.4)$$

Замечание. Здесь вновь имеется полная аналогия с одномерным случаем. Поэтому оказываются справедливыми, например, теоремы об арифметических действиях с непрерывными функциями.

Для функций двух и более переменных непрерывность можно понимать и в несколько ином смысле — как непрерывность по каждой переменной при фиксированных остальных. Но такое понятие непрерывности *не равносильно* определению 5.4. Определение 5.4 налагает на функцию более сильные ограничения.

Докажем два локальных свойства непрерывных функций.

Теорема 5.1. Если функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то она локально ограничена в этой точке.

Доказательство. Действительно, фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (5.4)

$$\exists \mathrm{U}(M_0) : \forall M \in \mathrm{U}(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$$

Но по свойству модуля

$$|f(M)| - |f(M_0)| \leqslant |f(M) - f(M_0)|.$$

Следовательно,

$$\forall M \in \mathrm{U}(M_0) \quad |f(M)| < |f(M_0)| + \varepsilon = C.$$

Это и означает локальную ограниченность $f(M)$ в точке M_0. ∎

Теорема 5.2. Если функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0) > 0$ (< 0), то

$$\exists \mathrm{U}(M_0) : \quad \forall M \in \mathrm{U}(M_0) \Rightarrow f(M) > 0 \ (< 0).$$

Доказательство. Пусть для определенности $f(M_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{f(M_0)}{2}$. Тогда в силу (5.4)

$$\exists \mathrm{U}(M_0) : \forall M \in \mathrm{U}(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \frac{f(M_0)}{2},$$

откуда

$$f(M_0) - \frac{f(M_0)}{2} < f(M) < f(M_0) + \frac{f(M_0)}{2}.$$

Таким образом, в любой точке M окрестности $\mathrm{U}(M_0)$ выполняется неравенство

$$0 < \frac{f(M_0)}{2} < f(M). \qquad ∎$$

Перейдем теперь к дифференциальному исчислению функций нескольких переменных.

Рассмотрим вначале функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Введем следующие величины:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$
$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Величина Δz является *приращением* функции $f(x, y)$, а величины $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ — это *частные приращения* $f(x, y)$ соответственно по x и по y.

Определение 5.5. *Частными производными* функции $z = f(x, y)$ по x и y в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются следующие пределы:

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \text{и} \quad z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \tag{5.5}$$

Таким образом, частная производная — это производная по соответствующей переменной при фиксированных значениях остальных переменных.

Отметим, что для записи частных производных используются также обозначения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, которые в отличие от случая одной переменной нельзя понимать как дроби.

Определение 5.6. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется соотношение

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{5.6}$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$; A и B — постоянные.

Теорема 5.3. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Отметим сначала, что, как и в случае одной переменной, условие непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно записать через приращения в виде

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \tag{5.7}$$

Но тогда очевидно, что из (5.6) следует (5.7). ■

Отметим, что дифференцируемость в точке — более сильное условие, чем непрерывность: если функция непрерывна в точке, то отсюда не следует ее дифференцируемость в этой точке, что видно на примере функции

$$z = |x| + |y|.$$

Данная функция, как легко показать, непрерывна в точке $(0, 0)$, но не является дифференцируемой в ней.

Теорема 5.4. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то у нее в этой точке существуют обе частные производные $z'_x(x_0, y_0) = A$ и $z'_y(x_0, y_0) = B$, где A и B — постоянные из (5.6).

Доказательство. Докажем, например, что $z'_x(x_0, y_0) = A$. Из (5.6) следует, что

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A + \alpha(\Delta x, 0)\big) = A.$$

Аналогично доказывается, что $z'_y(x_0, y_0) = B$. ■

Замечание. Эта теорема аналогична соответствующей теореме для функций одной переменной, однако в случае нескольких переменных обратное утверждение не имеет места: из наличия частных производных в точке *не следует* дифференцируемость функции в данной точке.

Это можно увидеть на примере следующей функции двух переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0 \quad \text{или} \quad y = 0; \\ \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{при} \quad x \neq 0 \quad \text{и} \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Данная функция равна нулю на осях координат, а вне их вычисляется по формуле $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Для нее, очевидно, выполняется равенство

$$z'_x(0, 0) = z'_y(0, 0) = 0,$$

но в то же время не существует предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$. Значит, эта функция разрывна в начале координат и, следовательно, не может быть дифференцируемой в $(0,0)$.

Тем не менее с помощью частных производных можно установить дифференцируемость функции, если наложить более сильные ограничения. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.5 (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $f(x,y)$ имеет обе частные производные в окрестности точки (x_0,y_0), которые как функции двух переменных непрерывны в точке (x_0,y_0), то $f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

Данную теорему приводим здесь без доказательства. Заметим, что во всех практически встречающихся задачах условия данной теоремы выполняются.

Рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Как и в случае двух переменных, определяются частные приращения $\Delta_{x_i} u$, а также частные производные

$$u'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а соотношение (5.6) принимает вид

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_n \Delta x_n + \alpha_1(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\Delta x_1 + \cdots \\ \cdots + \alpha_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\Delta x_n, \tag{5.8}$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0\\ \cdots\cdots\\ \Delta x_n \to 0}} \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теоремы 5.3 и 5.4 остаются справедливыми и в этом случае так же, как и достаточное условие дифференцируемости.

Определение 5.7. *Дифференциалом* dz функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) называется величина

$$dz = A\Delta x + B\Delta y,$$

где A и B — коэффициенты из (5.6).

Очевидно, что для линейных функций дифференциал dz совпадает с приращением Δz. В частности, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Учитывая это, а также теорему 5.4, получим следующее выражение для дифференциала

$$dz = z'_x(x_0,y_0)dx + z'_y(x_0,y_0)dy. \tag{5.9}$$

Заметим, что часто dz называют *полным дифференциалом.*

Выясним теперь геометрический смысл дифференцируемости и дифференциала для функции двух переменных. Как увидим далее, здесь имеется полная аналогия со случаем одной переменной.

Обратимся к «графику» функции двух переменных, т. е. к поверхности в пространстве с уравнением $z = f(x,y)$. Выберем теперь некоторые фиксированные значения x_0, y_0 и соответствующее им значение $z_0 = f(x_0,y_0)$. Через точку поверхности с координатами (x_0,y_0,z_0) проходит бесконечно много наклонных плоскостей. Все они задаются уравнениями вида

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), \tag{5.10}$$

где A и B — постоянные.

Назовем *касательной плоскостью* к поверхности $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0) ту из плоскостей (5.10), которая обладает следующим свойством:

$$z - z_k = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{5.11}$$

где z — координата точки на поверхности; z_k — аналогичная координата точки на плоскости; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

(Это означает, что среди всех плоскостей (5.10) касательная плоскость «теснее всего» прилегает к поверхности в окрестности точки касания.)

Теорема 5.6. Для того чтобы поверхность $z = f(x,y)$ обладала в точке (x_0,y_0,z_0) касательной плоскостью, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ была дифференцируемой в точке (x_0,y_0). Касательная плоскость единственна, ее уравнение имеет вид

$$z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{5.12}$$

Доказательство. Действительно, пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Тогда справедливо равенство

$$z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \\ + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Рассмотрим плоскость с уравнением (5.12). Очевидно, что для этой плоскости выполнено соотношение (5.11), т. е. она является касательной плоскостью.

Пусть теперь существует плоскость, задаваемая уравнением (5.10), для которой справедливо соотношение (5.11), т. е. касательная плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0). Тогда, как и в одномерном случае, для приращения функции будет выполняться соотношение

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y\,.$$

Но это есть не что иное, как определение дифференцируемости. Значит, $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а коэффициенты A и B совпадают с соответствующими частными производными. Следовательно, касательная плоскость имеет уравнение (5.12). ■

Замечание. Из соотношения (5.12), подобно одномерному случаю, вытекает, что *дифференциал совпадает с приращением координаты z касательной плоскости.*

В случае n переменных формула (5.9) для дифференциала принимает вид

$$du = u'_{x_1}dx_1 + \cdots + u'_{x_n}dx_n. \tag{5.13}$$

Здесь тоже можно было бы дать геометрическую интерпретацию дифференциалу, но при этом пришлось бы говорить о касательной гиперплоскости к n-мерной поверхности в $(n+1)$-мерном пространстве, что выходит за рамки данного курса.

Посмотрим теперь, какую форму принимает правило дифференцирования сложной функции в случае двух переменных.

Теорема 5.7. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причем $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$. Тогда сложная функция $z(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$z'(t_0) = z'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + z'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0). \tag{5.14}$$

Замечание. Равенство (5.14) можно записать в другом, более наглядном и удобном для приложений виде, а именно

$$z'_t = z'_x\, x'_t + z'_y\, y'_t. \tag{5.15}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся дифференцируемостью функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и запишем приращение Δz в виде

$$\begin{aligned}\Delta z = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y +\\ + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,\end{aligned} \tag{5.16}$$

где Δx и Δy — *произвольные* приращения аргументов, а

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Договоримся для удобства считать, что $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$, что не противоречит равенству (5.16). Пусть теперь x и y будут функциями от t, дифференцируемыми в точке t_0. Дадим аргументу t приращение $\Delta t = t - t_0$. Тогда x и y получат соответствующие приращения

$$\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) \quad \text{и} \quad \Delta y = \psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0).$$

Равенство (5.16) при этом сохранится. Поделим обе части (5.16) на Δt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t} = z'_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + z'_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} +\\ + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}\end{aligned} \tag{5.17}$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$.

Заметим, что в силу дифференцируемости функции $x = \varphi(t)$ и $\psi(t)$ будут непрерывными в точке t_0, а тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0,$$

откуда следует, что и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

В свою очередь

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t_0).$$

Таким образом, в пределе равенство (5.17) перейдет в (5.14). ■

Отметим частный случай теоремы 5.7. Пусть в качестве параметра t выступает прежняя переменная x. Тогда сложная функция примет вид $z(x) = f\big(x, y(x)\big)$. Соответственно формула (5.15) запишется как

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

В этом случае говорят, что вычислена *полная производная* z по x, т. е. производная, учитывающая как непосредственную зависимость z от x, так и зависимость z от x через посредство y.

Приведем теперь без доказательства вторую теорему о производных сложной функции.

Теорема 5.8. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0), причем $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Тогда сложная функция $z(u, v) = f\big(\varphi(u, v), \psi(u, v)\big)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0) и

$$z'_u = z'_x\, x'_u + z'_y\, y'_u, \quad z'_v = z'_x\, x'_v + z'_y\, y'_v, \tag{5.18}$$

где производные вычисляются в соответствующих точках.

Ранее была выведена формула (5.9) для дифференциала dz. Пусть теперь x и y будут функциями от u и v и пусть выполнены все условия теоремы 5.8. Покажем, что при этом формула (5.9) сохранится, хотя dx и dy будут уже не приращениями, а дифференциалами функций $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ в точке (u_0, v_0). Действительно, применив формулу для дифференциала относительно независимых переменных u и v и (5.18), получим

$$dz = z'_u du + z'_v dv = (z'_x\, x'_u + z'_y\, y'_u)du + (z'_x\, x'_v + z'_y\, y'_v)dv =$$
$$= z'_x(x'_u du + x'_v dv) + z'_y(y'_u du + y'_v dv) = z'_x dx + z'_y dy.$$

Таким образом, дифференциал обладает свойством *инвариантности*. Это общий факт, справедливый для функций любого числа переменных и для произвольного числа новых переменных.

Если интерпретировать функцию двух переменных как функцию точки на плоскости, то частные производные приобретают очевидный смысл — это скорости изменения функции в направлении координатных осей. Естественно поставить вопрос о скорости изменения функции в произвольном направлении.

Для этого выберем точку $M_0(x_0, y_0)$ и зададим направление с помощью единичного направляющего вектора

$$\mathbf{e} = \{e_x, e_y\}, \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Сместимся теперь из точки M_0 вдоль прямой с направляющим вектором $\mathbf{e}$ в точку M. Обозначим через M_0M расстояние между этими точками, взятое *со знаком*, т. е. M_0M равно расстоянию между точками M_0 и M, если сместиться в направлении вектора $\mathbf{e}$, и *минус* этому расстоянию, если сместиться в противоположную сторону.

Определение 5.8. *Производной функции* $z = f(M)$ *по направлению* $\mathbf{e}$ в точке M_0 называется выражение

$$z'_{\mathbf{e}}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}. \tag{5.19}$$

(Другое обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{e}}(M_0)$.)

Теорема 5.9. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда у нее существует в этой точке производная по любому направлению $\mathbf{e}$, которая вычисляется по формуле

$$z'_{\mathbf{e}}(M_0) = z'_x(M_0)e_x + z'_y(M_0)e_y. \tag{5.20}$$

Доказательство. В самом деле, зададим прямую, проходящую через точку M_0 в направлении вектора $\mathbf{e}$, в параметрической форме: $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{e}$, или

$$\begin{cases} x = x_0 + te_x; \\ y = y_0 + te_y. \end{cases} \tag{5.21}$$

Из формул (5.21) немедленно следует, что параметр t как раз и совпадает с введенным ранее расстоянием со знаком M_0M. Поэтому формулу (5.19) можно переписать в виде

$$z'_{\mathbf{e}}(M_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_x, y_0 + te_y) - f(x_0, y_0)}{t}. \tag{5.22}$$

Но выражение (5.22) есть не что иное, как определение производной в точке 0 сложной функции от t:

$$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ задаются формулами (5.21).

Поскольку по условию функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на всей числовой оси как линейные функции от t, причем

$$x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\,; \quad x'(0) = e_x\,, \quad y'(0) = e_y\,,$$

то в силу теоремы 5.7 получим формулу (5.20). ■

На плоскости формулу (5.20) можно переписать в иной форме, если вспомнить, что

$$e_x = \cos\alpha, \quad e_y = \cos\beta = \sin\alpha,$$

где α и β — углы, которые вектор $\mathbf{e}$ образует с координатными осями Ox и Oy соответственно. А именно,

$$z'_{\mathbf{e}}(M_0) = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\sin\alpha.$$

Для функции n переменных $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ производную по направлению лучше всего сразу определить по формуле, аналогичной (5.22):

$$u'_{\mathbf{e}}(M_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{t}. \qquad (5.23)$$

Разумеется, теорема 5.9 будет справедлива и в этом случае, а формула (5.20) примет вид

$$u'_{\mathbf{e}}(M_0) = u'_{x_1}e_1 + u'_{x_2}e_2 + \cdots + u'_{x_n}e_n\,, \qquad (5.24)$$

где $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $|\mathbf{e}| = 1$.

Введем в случае двух переменных вектор

$$\nabla z(M_0) = \{z'_x(M_0),\, z'_y(M_0)\}, \qquad (5.25)$$

который назовем *градиентом* функции $z = f(x, y)$. Тогда формулу (5.20) можно переписать в виде

$$z'_{\mathbf{e}}(M_0) = \nabla z(M_0)\mathbf{e} = \left|\nabla z(M_0)\right||\mathbf{e}|\cos\varphi. \qquad (5.26)$$

Поскольку $|\mathbf{e}| = 1$, ясно, что максимальное по модулю (и притом неотрицательное) значение производная $z'_{\mathbf{e}}(M_0)$ принимает при $\varphi = 0$ и совпадает в этом случае с $\left|\nabla z(M_0)\right|$.

Таким образом, *градиент направлен в сторону наибыстрейшего роста функции в данной точке, а его модуль совпадает с максимальной скоростью роста.*

Это означает, что градиент обладает свойством *инвариантности.* Если, например, повернуть систему координат на плоскости, то изменятся как координаты x и y, так и координаты градиента, но изменятся они таким образом, что сам градиент как вектор останется неизменным.

Все это относится и к случаю функции n переменных.

Упомянем еще об одном свойстве градиента. Назовем *линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ линию с уравнением

$$f(x, y) = c,$$

где c — некоторая постоянная. Оказывается, что, если $f(x, y)$ дифференцируема и мы вычислим градиент ∇z в любой точке линии уровня, то он будет перпендикулярен этой линии (т. е. перпендикулярен касательной к этой линии в соответствующей точке).

Аналогично, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ ее *поверхность уровня* будет задаваться уравнением

$$f(x, y, z) = c,$$

а градиент ∇u в любой точке этой поверхности будет перпендикулярен касательной плоскости. Это свойство градиента позволяет использовать его в геометрических задачах.

Вернемся к случаю двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет обе частные производные, z'_x и z'_y, в некоторой области. Тогда можно рассмотреть в свою очередь частные производные от этих частных производных. Таким образом, придем к следующим четырем производным *второго порядка* от исходной функции:

$$(z'_x)'_x = z''_{x^2}; \quad (z'_x)'_y = z''_{xy}\,; \quad (z'_y)'_x = z''_{yx}; \quad (z'_y)'_y = z''_{y^2}\,.$$

(Для них также употребляются обозначения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.)

Производные z''_{xy} и z''_{yx} носят название *смешанных производных.* Можно доказать, что *в случае непрерывности смешанных производных они совпадают друг с другом*, так что различных производных второго порядка не четыре, а три.

Аналогично можно определить частные производные любого порядка для функции любого числа переменных и при этом, *в случае непрерывности смешанных производных*, они будут зависеть лишь от того, сколько раз проводилось дифференцирование по каждой из переменных, но не от порядка, в котором такое дифференцирование проводилось. Например,

$$z'''_{x^2y} = z'''_{xyx} = z'''_{yx^2}.$$

Ранее была получена формула для дифференциала dz функции двух переменных. Мы видим, что dz зависит как от точки (через посредство своих коэффициентов, совпадающих с частными производными), так и от дифференциалов переменных dx, dy.

Стоит отметить и еще одно обстоятельство. Если записать дифференциал функции двух переменных в виде

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

то в случае, когда $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные, справедливо соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y},$$

поскольку и та, и другая величина совпадают со смешанной производной $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Определение 5.9. Вторым дифференциалом d^2u функции нескольких переменных называется дифференциал от ее первого дифференциала du при условии, что *дифференциалы независимых переменных считаются постоянными.*

Для функции двух независимых переменных x, y с учетом равенства смешанных производных выражение для второго дифференциала примет вид

$$d^2z = z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}(dy)^2. \tag{5.27}$$

Выражение (5.27) представляет собой так называемую квадратичную форму относительно «вектора дифференциалов» $\{dx, dy\}$.

Сразу же отметим, что в отличие от первого дифференциала второй дифференциал не обладает свойством инвариантности: если x, y перестанут быть независимыми переменными, а сделаются дифференцируемыми функциями от других переменных, то формула (5.27) *не будет справедлива.* Поэтому второй дифференциал можно считать лишь удобным сокращением для записи определенной комбинации производных и дифференциалов аргументов.

Договоримся еще о следующей терминологии. Если для любого вектора $\{dx, dy\} \neq \{0, 0\}$ второй дифференциал d^2z будет

строго больше нуля (меньше нуля), то будем говорить, что он *положительно определен (отрицательно определен).* Разумеется, такое условие будет выполнено не всегда, а лишь при определенном соотношении между коэффициентами d^2z.

Перейдем теперь к вопросу о локальных экстремумах функции двух переменных $z = f(x,y)$.

Определение 5.10. Функция $z = f(x,y)$ имеет в точке M_0 *локальный максимум (минимум)*, если

$$\exists\, \dot{\mathrm{U}}(M_0): \ \forall M \in \dot{\mathrm{U}}(M_0) \ \Rightarrow \ f(M) < f(M_0) \quad \big(f(M) > f(M_0)\big).$$

В данном определении речь идет о строгом максимуме (минимуме). Если здесь заменить знак неравенства на нестрогий, то получим нестрогий максимум (минимум). Локальный максимум и локальный минимум носят собирательное название *локального экстремума.*

Теорема 5.10 (необходимое условие локального экстремума). Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум (быть может, нестрогий), и пусть она дифференцируема в этой точке. Тогда

$$z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Замечание. Эта теорема совершенно аналогична теореме Ферма для функции одной переменной.

Доказательство. Пусть для определенности функция имеет в точке M_0 локальный максимум. Тогда

$$\exists\, \dot{\mathrm{U}}(M_0): \quad \forall M \in \dot{\mathrm{U}}(M_0) \Rightarrow f(M) \leqslant f(M_0).$$

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Обозначим через $\dot{\mathrm{U}}(x_0)$ проекцию окрестности $\dot{\mathrm{U}}(M_0)$ на ось Ox. Тогда $\forall x \in \dot{\mathrm{U}}(x_0)$ выполняется неравенство $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$. Следовательно, у $\varphi(x)$ в точке x_0 имеется локальный максимум. Кроме того, в силу дифференцируемости $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) существует $z'_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$, а значит, $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда по теореме Ферма $\varphi'(x_0) = 0$, т. е. $z'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично, вводя функцию $\psi(y) = f(x_0, y)$, получим, что $z'_y(x_0, y_0) = 0$.

■

Отметим, что, как и в случае одной переменной, данное необходимое условие не является достаточным: обращение в нуль первых производных в некоторой точке еще не гарантирует наличия в этой точке локального экстремума.

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные первые и вторые частные производные, то будем говорить, что она *принадлежит классу «це-два» в области* D $\big(f(x,y) \in C^2(D)\big)$.

Сформулируем теперь достаточное условие локального экстремума для функции двух переменных.

Теорема 5.11. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в окрестности $\mathrm{U}(M_0)$ и принадлежит классу $C^2\big(\mathrm{U}(M_0)\big)$. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:

1) все первые частные производные равны нулю в точке M_0;

2) второй дифференциал данной функции знакоопределен в точке M_0.

Тогда функция $f(x,y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, причем, если $d^2z > 0$, то это локальный минимум, а если $d^2z < 0$, то это локальный максимум.

Если же d^2z знаконеопределен, то в точке M_0 экстремума нет.

Доказательство этой теоремы весьма непросто и требует предварительного доказательства ряда вспомогательных теорем, поэтому здесь мы его не приводим.

Теорема 5.11 с очевидными изменениями в формулировке справедлива и для функций n переменных.

Отметим еще, что, если $d^2z \geqslant 0$ ($d^2z \leqslant 0$), то этот признак не дает ответа на вопрос о локальном экстремуме.

В случае двух переменных с учетом так называемого критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм, который доказывается в развернутых курсах высшей алгебры (но не в данной книге), теорему 5.11 можно переформулировать в более наглядном виде.

Пусть $f \in C^2\big(U(M_0)\big)$ *и выполняются условия:*

1) $z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$;

2) $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{x^2}(x_0,y_0) & z''_{xy}(x_0,y_0) \\ z''_{yx}(x_0,y_0) & z''_{y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

Тогда при $\Delta > 0$ *функция имеет в точке* M_0 *локальный экстремум, причем максимум при* $z''_{x^2}(x_0,y_0) < 0$ *и минимум при* $z''_{x^2}(x_0,y_0) > 0$.

Если же $\Delta < 0$, *то у* $f(x,y)$ *в точке* M_0 *локального экстремума нет.*

При $\Delta = 0$ признак ответа не дает.

Пример 5.1. Исследовать на экстремум функцию
$$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$$

Найдем частные производные данной функции.
$z'_x = 6x - 3x^2$, $z'_y = 6y + 4$, $z''_{x^2} = 6 - 6x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$, $z''_{y^2} = 6$.
Приравняв нулю z'_x и z'_y, находим «подозрительные» точки $M_1\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$ и $M_2\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$. Составим определитель Δ в каждой из точек:

1) $M_1\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0; \quad 6 > 0,$$

значит, в точке $M_1\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$ функция имеет локальный минимум;

2) $M_2\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

следовательно, в точке $M_2\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$ у функции нет экстремума.

5.2. Приложение*

В данном приложении прежде всего мы докажем достаточное условие дифференцируемости для функции двух переменных.

Итак, пусть функция $z = f(x,y)$ определена в окрестности $\mathrm{U}(M_0)$ точки M_0, имеет в этой окрестности обе частные производные z'_x и z'_y, которые как функции двух переменных непрерывны в точке M_0. Докажем, что в этом случае функция дифференцируема в данной точке.

Для этого запишем приращение Δz в специальном виде, а именно,

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = \\ &= \Big(z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0 + \Delta y)\Big) + \\ &\quad + \Big(z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)\Big). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Выражение в первой скобке в правой части выражения можно рассматривать как приращение функции одной переменной x, которая задается формулой $z(x, y_0 + \Delta y)$. Аналогично, выражение во второй скобке рассматриваем как приращение функции от y, равной $z(x_0, y)$. Для этих функций выполняются все условия теоремы Лагранжа соответственно на отрезках $[x_0, x_0 + \Delta x]$ и $[y_0, y_0 + \Delta y]$. Поэтому найдутся два числа $c_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ и $c_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, такие, что выражения в скобках будут равны соответственно $z'_x(c_1, y_0 + \Delta y)$ и $z'_y(x_0, c_2)$. Если устремить приращения аргументов Δx и Δy к нулю, то, очевидно, c_1 будет стремиться к x_0, а c_2 — к y_0. В силу непрерывности частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$ будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} z'_x(c_1, y_0 + \Delta y) &= z'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y); \\ z'_y(x_0, c_2) &= z'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y), \end{aligned} \tag{5.29}$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Но тогда в силу (5.28) и (5.29) приращение Δz примет вид

$$\Delta z = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

А это и есть определение дифференцируемости.

Теперь коснемся вопроса о так называемой *неявной функции*.

Вначале рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{5.30}$$

Как известно, это уравнение задает на плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Алгебраически оно равносильно совокупности двух уравнений

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}. \tag{5.31}$$

Под неявной функцией, задаваемой уравнением (5.30), будем понимать любую функцию $y = f(x)$, при подстановке которой в данное уравнение получается тождество.

Ответим теперь на следующий вопрос: «Сколько на отрезке $[-1, 1]$ существует неявных функций, задаваемых уравнением (5.30)?» Таких функций бесконечно много, поскольку в каждой точке можно задать такую функцию по любой из формул (5.31).

Изменим формулировку вопроса: «Сколько на от
существует *непрерывных* неявных функций, задава
нением (5.30)?» Ясно, что таких функций только д
те, которые задаются уравнениями (5.31). Чтобы в
ну из них, нужно взять какую-либо точку $x_0 \in [-1, 1]$ и
какое значение неявная функция принимает в этой точке. Так, если потребовать, чтобы при $x_0 = \dfrac{1}{2}$ функция принимала значение $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то найдется ровно одна такая функция, а именно, $y = \sqrt{1 - x^2}$. Если же потребовать, чтобы при $x_0 = \dfrac{1}{2}$ значение y_0 равнялось $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то найдется также одна неявная функция $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Замечание. Здесь имеются исключения. Действительно, если в качестве x_0 взять одну из концевых точек отрезка $[-1, 1]$, например $x_0 = 1$, то соответствующее значение $y_0 = 0$ принимают *обе* из вышеупомянутых неявных функций, так что данное условие не позволяет выделить однозначно одну из них. Следует обратить внимание, что именно в этой точке $(1, 0)$ частная производная по y левой части уравнения (5.30), равная $2y$, обращается в нуль.

Уравнение (5.30) явилось лишь простейшей моделью общей ситуации. Пусть задано уравнение

$$F(x, y) = 0\,, \tag{5.32}$$

где $F(x, y)$ — некоторая функция двух переменных. При каких условиях оно задает неявную функцию? Как из множества всех неявных функций выделить одну конкретную? Здесь уже нельзя надеяться на то, что удастся выразить явно y через x и ответить на эти вопросы. Значит, нужно найти ответы на поставленные вопросы косвенным путем.

Сформулируем без доказательства одну из теорем, дающую ответ на эти вопросы.

Теорема 5.12 (о неявной функции). Пусть задано уравнение (5.32), где функция $F(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$D = \left\{ (x, y) : \quad \begin{matrix} x_0 - \delta_1 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta_1 \\ y_0 - \delta_2 \leqslant y \leqslant y_0 + \delta_2 \end{matrix} \right\};$$

2) в D существуют непрерывные частные производные F'_x, F'_y;

3) $F(x_0, y_0) = 0$;

4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует $\delta > 0$, такое, что на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ уравнение (5.32) определяет однозначную неявную функцию $y = f(x)$, которая в точке x_0 принимает значение y_0, имеет непрерывную производную на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и эта производная задается формулой

$$f'(x) = -\frac{F'_x\big(x, f(x)\big)}{F'_y\big(x, f(x)\big)}.$$

Замечание. В этой теореме по свойствам заданной функции двух переменных $F(x, y)$ нам удается сделать вывод о свойствах неявной функции, которую нельзя выразить в виде явной формулы.

Глава 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Неопределенный интеграл

Определение 6.1. *Первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция $F(x)$, такая, что на всем $\langle a, b\rangle$ выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x).$$

Сразу возникает вопрос о существовании и единственности такой первообразной.

Что касается существования, то, как будет показано далее, оно гарантировано во всяком случае для непрерывных функций. Единственности же очевидно нет, поскольку, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ при любой постоянной C — тоже первообразная, ибо

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Пусть теперь $F_1(x)$ — еще одна первообразная для $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$. Тогда существует такая постоянная C, что на $\langle a, b\rangle$ выполняется равенство

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{6.1}$$

Действительно, рассмотрим функцию

$$g(x) = F_1(x) - F(x).$$

Очевидно,

$$g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Тогда по следствию из теоремы Лагранжа $g(x) = C$ на $\langle a, b\rangle$, откуда и следует (6.1).

Таким образом, *на промежутке $\langle a, b\rangle$ все первообразные для $f(x)$ отличаются друг от друга постоянным слагаемым.*

Подчеркнем, что этот результат справедлив именно на *промежутке*, а не на каком-либо ином множестве.

Определение 6.2. Произвольная первообразная для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Заметим, что, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $dF(x) = f(x)dx$. Поэтому под знаком интеграла стоит не что иное, как дифференциал любой первообразной для $f(x)$.

Легко доказываются следующие две формулы:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx; \tag{6.2}$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{6.3}$$

Здесь A — произвольная постоянная, а $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции (т. е. функции, имеющие первообразные).

Действительно, пусть, например, $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$. Тогда

$$\big(F(x) \pm G(x)\big)' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x),$$

что равносильно формуле (6.3). Аналогично устанавливается и (6.2).

Заметим еще, что, поскольку неопределенным интегралом названа *произвольная* первообразная, то равенства (6.2) и (6.3) следует понимать так, что они имеют место для любых первообразных с точностью до постоянного слагаемого.

Основой для практического вычисления интегралов служит некоторый стандартный набор так называемых табличных интегралов. На основе таблицы производных можно, обращая ее, выписать ряд таких интегралов.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1);$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1);$

4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8′. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

9′. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Эти формулы справедливы на любом *промежутке*, на котором существуют левая и правая части соответствующих равенств. Последние две формулы отмечены номерами со штрихом, так как далее будут заменены на более общие формулы.

Пример 6.1.

$$\int\left(x\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2\ln|x| + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\ln|x| + C.$$

Однако формул (6.2) и (6.3) недостаточно для вычисления сколько-нибудь сложного интеграла. Поэтому установим еще некоторые важные свойства интеграла.

Теорема 6.1. Пусть $f(u)$ непрерывна на промежутке $\langle a,b\rangle$, $\varphi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на $\langle\alpha,\beta\rangle$, причем $\forall\, x \in \langle\alpha,\beta\rangle \Rightarrow \varphi(x) \in \langle a,b\rangle$.

Тогда, если

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

то

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = F\big(\varphi(x)\big) + C. \tag{6.4}$$

Доказательство. Действительно, оба интеграла в (6.4) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Далее по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dx}F\big(\varphi(x)\big) = F'_u\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

что и доказывает теорему. ■

Замечание. Теорема 6.1 носит название *метода подстановки*, или *метода замены переменной* в неопределенном интеграле.

Последнюю формулу в (6.4) можно записать в более наглядной форме:

$$\int f\big(u(x)\big)\,du(x) = F\big(u(x)\big) + C.$$

С помощью метода подстановки, имея один табличный интеграл, можно вычислить много других интегралов.

Пример 6.2.

$$\int e^{x^3}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,dx^3 = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Отметим, что под знаком интеграла стоит дифференциал первообразной, к которому можно применить правила действия с дифференциалом.

Вычислим теперь несколько новых табличных интегралов. Рассмотрим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left|\begin{array}{c} x = au \\ dx = a\,du \end{array}\right| = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом, дополняем таблицу интегралов формулой

$$8.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$9.\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Далее,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\,dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(a+x)}{a+x} - \int\frac{d(a-x)}{a-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\big(\ln|a+x| - \ln|a-x|\big) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Итак, получен еще один табличный интеграл

$$10.\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a > 0).$$

Этот интеграл математики называют «высоким логарифмом».

Вычислим теперь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}, \quad \text{где} \quad A \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \left|\begin{array}{c} x + \sqrt{x^2+A} = u \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \dfrac{du}{u} \end{array}\right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

Занесем этот интеграл в таблицу.

$$11.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A \neq 0).$$

Данный интеграл математики называют «длинным логарифмом».

Добавим в таблицу последние два интеграла, которые предварительно вычислим

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Существует еще один специальный метод интегрирования, который называется *интегрированием по частям.*

Теорема 6.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$ (т. е. сами непрерывны и имеют непрерывную провoдную на $\langle a,b\rangle$). Тогда

$$\int v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx. \tag{6.5}$$

Доказательство. Действительно,

$$\Big(u(x)v(x)\Big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{6.6}$$

Все функции, участвующие в (6.6), непрерывны, следовательно, имеют первообразную. Отсюда

$$\int \Big(u(x)v(x)\Big)' dx = \int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)dx. \tag{6.7}$$

Заметим, что одной из первообразных для $\Big(u(x)v(x)\Big)'$ очевидно является $u(x)v(x)$. Тогда из (6.7) и вытекает (6.5). ■

Формулу (6.5) можно записать в более наглядной форме:

$$\int v(x)\,du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x). \tag{6.8}$$

Данный метод имеет значительно более узкую область применения, чем метод замены переменной, зато в этой узкой области он незаменим.

Пример 6.3.

$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x\,d(x^2) =$$
$$= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx = x^2\sin x + 2\int x\,d\cos x =$$
$$= x^2\sin x + 2(x\cos x - \int \cos x\,dx) =$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Здесь дважды применена формула (6.8).

6.2. Определенный интеграл

Наряду с неопределенным интегралом (см. подразд. 6.1) существует и другой тип интеграла, называемый *определенным интегралом*, который, на первый взгляд, ничего общего не имеет с неопределенным интегралом и лишь в дальнейшем выясняется их глубокая внутренняя взаимосвязь.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем этот отрезок на более мелкие части *конечным* числом точек x_i так, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\,.$$

Множество точек $\{x_i\}$ назовем *разбиением* отрезка и обозначим кратко буквой T.

Введем далее величины

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{и} \quad \lambda(T) = \max_i \Delta x_i,$$

где Δx_i — длина отрезка $[x_{i-1},x_i]$, а $\lambda(T)$ назовем *диаметром* разбиения T.

На каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i, а разбиение с выбранными точками ξ_i назовем *отмеченным разбиением* и будем обозначать через $\widehat{T}$. Ясно, что диаметр отмеченного разбиения $\lambda(\widehat{T})$ не зависит от выбора точек ξ_i, поскольку полностью определяется множеством $\{x_i\}$.

Сопоставим каждому отмеченному разбиению $\widehat{T}$ сумму

$$\sigma(\widehat{T}) = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\,,$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$.

Определение 6.3. Последовательность отмеченных разбиений $\widehat{T}_n$ называется *нормальной*, если

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(\widehat{T}_n) = 0.$$

Определение 6.4. Если для любой нормальной последовательности отмеченных разбиений $\{\widehat{T}_n\}$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ сходится к одному и тому же пределу J, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = J, \quad \text{где} \quad \sigma_n = \sigma(\widehat{T}_n).$$

Разумеется, интеграл существует не у всякой функции. Функции, для которых существует определенный интеграл на отрезке $[a, b]$, будем называть *интегрируемыми* на этом отрезке.

Для определенного интеграла будем использовать следующее обозначение:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{6.9}$$

аналогичное обозначению неопределенного интеграла, однако в данном случае величина (6.9) — число, а не функция. Поэтому в (6.9) вместо x можно использовать любую другую букву, отчего значение интеграла не изменится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{и т. д.}$$

Почему же для совершенно другого объекта выбрано обозначение, столь похожее на использованное для неопределенного интеграла? Это станет ясно в дальнейшем, когда мы научимся вычислять определенный интеграл с помощью неопределенного.

(Отметим, что определенный интеграл носит еще название *интеграла Римана*, по имени немецкого математика, который предложил данную конструкцию.)

Рассмотрим геометрический смысл определенного интеграла. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна и положительна на $[a, b]$. Рассмотрим фигуру, ограниченную осью Ox, графиком $y = f(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Назовем такую фигуру *криволинейной трапецией* (рис. 6.1).

Если взять какое-то отмеченное разбиение отрезка $[a, b]$, то соответствующая интегральная сумма выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основаниями $[x_{i-1}, x_i]$ и высотами $f(\xi_i)$ (рис. 6.2). При стремлении диаметра разбиения к нулю происходит бесконечное измельчение разбиения и площадь ступенчатой фигуры будет приближаться к площади криволинейной трапеции. Поэтому $\int_a^b f(x)\,dx$ должен совпадать с площадью такой трапеции.

Если $f(x)$ отрицательно, то площади всех прямоугольников будут браться с отрицательным знаком, и интеграл совпадет с площадью трапеции, взятой со знаком «минус».

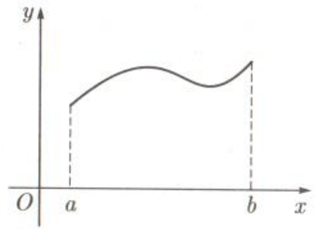

Рис. 6.1

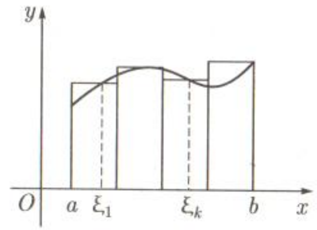

Рис. 6.2

Данное рассуждение весьма приблизительно и позже будет рассмотрено подробнее.

Установим теперь некоторые простейшие свойства определенного интеграла.

Возьмем функцию $f(x)$, постоянную на отрезке $[a, b]$: $f(x) = C$. Тогда любая ее интегральная сумма, очевидно, имеет вид

$$\sigma(\widehat{T}) = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i C\Delta x_i = C\sum_i \Delta x_i = C(b-a).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = C(b-a), \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b C\,dx = C(b-a). \tag{6.10}$$

В частности,

$$\int_a^b 0\,dx = 0.$$

Теорема 6.3. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} \int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \quad \text{при} \quad \forall A; \\ \int_a^b \Big(f(x) \pm g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \end{gathered} \tag{6.11}$$

причем существование интегралов, стоящих слева в (6.11), гарантируется.

Доказательство. Докажем, например, второе из равенств (6.11). Выберем произвольное отмеченное разбиение $\widehat{T}$ и составим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma = \sum_i \Big(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\Big)\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma' + \sigma'',$$

где σ' и σ''— интегральные суммы соответственно для $f(x)$ и $g(x)$. Если взять произвольную нормальную последовательность отмеченных разбиений $\{\widehat{T}_n\}$, то для последовательностей интегральных сумм будет справедливо равенство

$$\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n. \tag{6.12}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sigma'_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma''_n = \int\limits_a^b g(x)\,dx\,,$$

по свойству пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$$

что равносильно второму равенству (6.11). ■

Теорема 6.4. Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля на $[a,b]$ лишь в конечном числе точек. Тогда она интегрируема на $[a,b]$ и интеграл от нее равен нулю.

Доказательство. Действительно, пусть $f(x) \neq 0$ лишь в k точках на $[a,b]$. Тогда она, очевидно, ограничена на $[a,b]$:

$$\exists C > 0: \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \leqslant C.$$

(В качестве C можно взять максимальный модуль значений $f(x)$ в тех точках, где $f(x) \neq 0$.)

Возьмем теперь произвольное отмеченное разбиение $\widehat{T}$ и оценим соответствующую интегральную сумму σ:

$$0 \leqslant |\sigma| = \Big|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\Big| \leqslant 2kC\lambda(\widehat{T}). \tag{6.13}$$

В правой части (6.13) стоит множитель 2, потому что каждая точка ξ_i может участвовать дважды в интегральной сумме, если она является общей концевой точкой двух соседних малых отрезков.

Возьмем теперь произвольную нормальную последовательность отмеченных разбиений $\{\widehat{T}_n\}$. Тогда из (6.13) для соответствующих σ_n получается оценка

$$0 \leqslant |\sigma_n| \leqslant 2k\,C\,\lambda(\widehat{T}_n). \tag{6.14}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\widehat{T}_n) = 0$, из (6.14) по теореме о «зажатой переменной» получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = 0. \qquad ■$$

Как следствие из теоремы 6.4 выведем следующую теорему.

Теорема 6.5. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а $g(x)$ определена на $[a,b]$ и отлична от $f(x)$ лишь ***в конечном числе*** точек. Тогда $g(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{6.15}$$

Доказательство. Действительно, представим $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = f(x) + \Big(g(x) - f(x)\Big). \tag{6.16}$$

Разность, стоящая в скобках в (6.16), отлична от нуля лишь в конечном числе точек, откуда в силу теоремы 6.4 следует, что она интегрируема и интеграл от нее равен нулю. А тогда в силу теоремы 6.3 получим (6.15). ■

Таким образом, определенный интеграл оказывается нечувствительным к изменению функции в конечном числе точек.

Теорема 6.6 (необходимый признак интегрируемости). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем, т. е.

$$\exists C > 0: \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \leqslant C.$$

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, но при этом не ограничена на нем.

Возьмем некоторую нормальную последовательность отмеченных разбиений $\{\widehat{T}_n\}$, тогда для соответствующей последовательности интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx = J. \tag{6.17}$$

Выберем теперь новую нормальную последовательность $\{\widehat{T}'_n\}$ следующим образом. Разбиение $\widehat{T}_n$ порождает конечное число малых отрезков $[x_{i-1},x_i]$. Ясно, что, если $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, то она не ограничена хотя бы на одном из этих отрезков; пусть это будет $[x_{k-1},x_k]$. Оставим те же самые отрезки и фиксируем те же самые ξ_i, кроме ξ_k. Новое разбиение $\widehat{T}'_n$ отличается от $\widehat{T}_n$ только точкой ξ'_k, которую подберем специальным образом. Запишем следующее соотношение:

$$f(\xi'_k)\Delta x_k = f(\xi_k)\Delta x_k + \left[f(\xi'_k) - f(\xi_k)\right]\Delta x_k. \tag{6.18}$$

Поскольку величину $f(\xi'_k)$ можно сделать за счет выбора ξ'_k сколь угодно большой по модулю, то найдется такое ξ'_k, что будет выполняться соотношение

$$\left|\left[f(\xi'_k) - f(\xi_k)\right]\Delta x_k\right| > n. \tag{6.19}$$

Заметим, что второе слагаемое (впрочем, как и первое) в (6.18) при каждом n будет свое; обозначим его через α_n. Но из неравенства (6.19) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \infty$, т. е. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность. С другой стороны, из (6.18) вытекает, что для интегральных сумм σ_n и σ'_n, соответствующих разбиениям $\widehat{T}_n$ и $\widehat{T}'_n$, справедливо соотношение

$$\sigma'_n = \sigma_n + \alpha_n. \tag{6.20}$$

Поскольку $\{\widehat{T}'_n\}$ — тоже нормальная последовательность отмеченных разбиений, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma'_n = J$. Но тогда из (6.20) следует, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение ложно и что, следовательно, справедлива данная теорема. ■

Перейдем теперь к весьма непростому вопросу о *существовании* определенного интеграла. В самом деле, как описать все интегрируемые функции? Ранее было отмечено, что неограниченные функции заведомо не интегрируемы. Однако, как показывает следующий пример, ограниченность функции на отрезке еще не гарантирует ее интегрируемость.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ так называемую функцию Дирихле $D(x)$, которая принимает значение 1 во всех рациональных точках (т. е. в точках вида $x = \dfrac{m}{n}$, где m, n — целые числа) и равна нулю во всех иррациональных точках. Известно, что на любом сколь угодно малом отрезке существует бесконечно много как рациональных, так и иррациональных точек. Возьмем нормальную последовательность отмеченных разбиений, где в качестве ξ_i выбраны рациональные точки. Соответствующие σ_n будут равны

$$\sigma_n = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i 1\cdot\Delta x_i = 1. \tag{6.21}$$

Теперь возьмем другую нормальную последовательность отмеченных разбиений, где в качестве ξ_i выбраны иррациональные точки. В этом случае

$$\sigma_n = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i 0\cdot\Delta x_i = 0. \tag{6.22}$$

Последовательность (6.21) имеет предел, равный единице, а предел последовательности (6.22) равен нулю. Отсюда следует, что нет единого предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

Значит, функция $D(x)$ не интегрируема на $[0,1]$. Как легко заметить, $D(x)$ разрывна во всех точках отрезка $[0,1]$. Ее неинтегрируемость связана со слишком большой разрывностью. Где же проходит нужная грань?

Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции установил французский математик А. Лебег. Однако для того чтобы сформулировать это условие, необходимо познакомиться с некоторыми новыми понятиями.

Прежде всего рассмотрим числовую последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{6.23}$$

Можно ли придать смысл сумме всех ее членов и как это сделать? Образцом служит хорошо известная из школьной программы бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Рассмотрим так называемую *частичную сумму* последовательности (6.23):

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Назовем суммой всех членов данной последовательности предел S_n при $n \to \infty$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В школе этот предел вычисляется для бесконечно убывающей геометрической прогрессии и называется суммой этой прогрессии. Разумеется, такой предел существует далеко не всегда. Например, для последовательности

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots, \tag{6.24}$$

$S_n = n$, и, следовательно, у (6.24) нет суммы всех членов.

Определение 6.5. Множество A называется *счетным*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между его элементами и множеством натуральных чисел.

Это означает, что можно так сопоставить элементам A натуральные числа, что каждому элементу из A будет соответствовать ровно одно натуральное число и каждому натуральному числу будет соответствовать ровно один элемент из A. Иначе, счетными будут те множества, элементы которых можно перенумеровать.

Бесконечные множества, которые не являются счетными, называют *несчетными* множествами.

Очевидно, что само множество натуральных чисел является счетным. (Каждому элементу такого множества надо сопоставить этот же элемент.)

Гораздо менее очевидно, что счетным является и множество рациональных чисел, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$. А вот множество чисел, образующих отрезок $[a, b]$ — несчетное множество. Его элементы невозможно перенумеровать, поскольку оно содержит слишком много элементов, на которые «не хватает» натуральных чисел.

Введем теперь еще одно важное и непростое понятие *множества меры нуль*.

Рассмотрим множество A и произвольную систему интервалов $\{J = (\alpha, \beta)\}$ (конечную или бесконечную).

Определение 6.6. Система интервалов $\{J\}$ образует *покрытие* множества A, если каждый элемент из A принадлежит хотя бы одному интервалу из этой системы.

Определение 6.7. Множество A называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная система интервалов $\{J_n\}$, покрывающая это множество, сумма длин которых меньше ε.

Слова «не более чем» означают, что система $\{J_n\}$ либо конечна, либо счетна.

Отметим также, что само множество меры нуль не обязательно будет счетным. Существуют и несчетные множества меры нуль.

Попытка представить как выглядят все множества меры нуль, заведомо обречена на провал, поскольку математики обнаружили такие «хитроумные» множества этого типа, о существовании которых никто даже и не подозревал.

Наша задача более скромна: нужно установить несколько простых свойств таких множеств, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 6.7. Всякое подмножество множества меры нуль само является множеством меры нуль.

Это, очевидно, следует из определения 6.7 и того факта, что любое покрытие множества A интервалами является одновременно и покрытием любого подмножества из A.

Теорема 6.8. Объединение двух множеств меры нуль является также множеством меры нуль.

Доказательство. Действительно, пусть A и B — множества меры нуль. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и поделим его пополам. В силу определения 6.7 для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует не более чем счетная система интервалов $\{J_n\}$, покрывающая A и такая, что

$$\sum_n |J_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $|J_n|$ — длина интервала J_n.

Аналогично, для B существует система интервалов $\{J'_n\}$, покрывающая B и такая, что

$$\sum_n |J'_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим теперь, что система интервалов

$$J_1, J_1', J_2, J_2', \ldots, J_n, J_n', \ldots \tag{6.25}$$

не более чем счетна, покрывает объединение $A \cup B$, а сумма длин системы (6.25) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |J_n'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для $A \cup B$ выполнены все условия определения 6.7, т. е. это множество есть множество меры нуль. ■

Последовательно применяя теорему 6.8 несколько раз, получим, что объединение *конечного* числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Очевидно, множество, состоящее из одной точки x_1, является множеством меры нуль, поскольку его можно покрыть одним интервалом сколь угодно малой длины. В силу вышеизложенного любое *конечное* множество точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть множество меры нуль.

Заметим без доказательства, что теорема 6.8 обобщается на случай счетного объединения множеств A_i.

Отсюда следует, например, что множество всех рациональных чисел есть множество меры нуль.

Отметим также, что в математике принято соглашение, по которому пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента, считается множеством меры нуль.

Если A — множество меры нуль, то будем записывать это так: $\mu(A) = 0$.

Наконец, можно сформулировать критерий интегрируемости функций.

Теорема 6.9 (критерий Лебега). Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на этом отрезке и множество ее точек разрыва на $[a, b]$ имело меру нуль.

Доказательство этой теоремы чрезвычайно сложно и здесь мы его не приводим, но теорему 6.9 можно успешно использовать для установления нужных нам результатов.

Теорема 6.10. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на нем.

Доказательство. Действительно, из непрерывности функции на отрезке вытекает ее ограниченность на нем, а множество

ее точек разрыва пусто, т. е. имеет меру нуль. Отсюда по критерию Лебега и следует ее интегрируемость. ■

Теорема 6.11. Если функция ограничена на отрезке и имеет на нем ***конечное*** число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство данной теоремы станет очевидным, если вспомнить, что всякое конечное множество имеет меру нуль.

Теорема 6.12. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на нем.

Доказательство. В самом деле, по критерию Лебега из интегрируемости $f(x)$ и $g(x)$ вытекает их ограниченность на $[a, b]$ и то, что множество точек разрыва каждой из них имеет меру нуль:

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leqslant C_1, \quad |g(x)| \leqslant C_2 \quad \forall x \in [a, b]; \\ &\mu(A) = 0, \quad \mu(B) = 0, \end{aligned} \tag{6.26}$$

где под A и B подразумевается множество точек разрыва соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$.

Отсюда следует, что $|f(x)g(x)| \leqslant C_1C_2$, т. е. ограниченность $f(x)g(x)$ на $[a, b]$.

Далее, если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x, то их произведение также непрерывно в этой точке. Поэтому каждая точка разрыва произведения $f(x)g(x)$ принадлежит, по крайней мере, одному из множеств A и B. Значит,

$$C \subset A \cup B, \tag{6.27}$$

где C — множество точек разрыва $f(x)g(x)$.

Из теоремы 6.8 и соотношений (6.26), (6.27) вытекает, что

$$\mu(C) = 0.$$

Таким образом, выполнены все условия критерия Лебега, откуда и следует утверждение теоремы. ■

Из данной теоремы вытекает очевидным образом, что произведение любого *конечного* числа интегрируемых на $[a, b]$ функций само интегрируемо на $[a, b]$.

Теорема 6.13. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то ее модуль $|f(x)|$ также интегрируем на $[a, b]$, причем справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx. \tag{6.28}$$

Доказательство. Действительно, ограниченность модуля $|f(x)|$ на $[a,b]$ очевидна в силу ограниченности $f(x)$, вытекающей из критерия Лебега. Поскольку каждая точка разрыва $|f(x)|$ является одновременно, по свойствам модуля, и точкой разрыва $f(x)$, то, как и в теореме 6.12, отсюда следует, что множество точек разрыва $|f(x)|$ имеет меру нуль. Откуда по критерию Лебега и следует интегрируемость $|f(x)|$ на $[a,b]$.

Для установления неравенства (6.28) запишем очевидное неравенство для произвольной интегральной суммы:

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i. \tag{6.29}$$

Если взять произвольную нормальную последовательность отмеченных разбиений, то для соответствующих последовательностей интегральных сумм σ_n и σ'_n, где σ_n — интегральная сумма для $f(x)$, а σ'_n — интегральная сумма для $|f(x)|$, получим в силу (6.29) неравенство

$$|\sigma_n| \leqslant \sigma'_n.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем (6.28). ∎

Теорема 6.14. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]$, содержащемся в $[a,b]$.

Доказательство. В самом деле, по критерию Лебега из интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,b]$ следует ее ограниченность на этом отрезке и то, что множество ее точек разрыва имеет меру нуль. Отсюда ясно, что теми же свойствами она обладает и на отрезке $[\alpha,\beta]$, что в силу критерия Лебега и доказывает утверждение данной теоремы. ∎

Теорема 6.15 (об интегрировании неравенств). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{6.30}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное отмеченное разбиение $\widehat{T}$ отрезка $[a,b]$ и соответствующие интегральные суммы

для функций $f(x)$ и $g(x)$. Для них выполняется очевидное соотношение

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6.31}$$

Снова рассматривая произвольную нормальную последовательность разбиений и соответствующие последовательности интегральных сумм для $f(x)$ и $g(x)$, получаем (6.30). ∎

Из этой теоремы вытекают два следствия.

Следствие 1. Если функция $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \tag{6.32}$$

Для доказательства (6.32) достаточно положить в (6.30) $f(x) \equiv 0$.

Следствие 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ на $[a,b]$, то

$$A(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant B(b-a). \tag{6.33}$$

Доказательство непосредственно следует из (6.30) с учетом формулы (6.10).

Теорема 6.16 (о среднем). Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$;
3) $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Тогда $\exists\, c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx. \tag{6.34}$$

Доказательство. Из условий теоремы, очевидно, следует интегрируемость $f(x)g(x)$ на $[a,b]$. По свойствам функций, непрерывных на отрезке,

$$\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M, \tag{6.35}$$

$$\text{где} \quad m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\} \quad \text{и} \quad M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

Умножая неравенство (6.35) на $g(x)$ и учитывая неотрицательность $g(x)$, получим

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x). \tag{6.36}$$

Интегрируя неравенство (6.36), приходим к соотношению

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx. \tag{6.37}$$

Из неотрицательности $g(x)$ на $[a,b]$ вытекает неравенство

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

Пусть вначале

$$\int_a^b g(x)dx = 0.$$

Тогда из неравенства (6.37) следует, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

и формула (6.34) будет, очевидно, справедлива при любом $c \in$ $\in [a,b]$.

Пусть далее

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0\,.$$

Поделив все части неравенства (6.37) на этот интеграл, получим:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M\,.$$

По теореме о промежуточных значениях (см. теорему 3.40) для непрерывной на отрезке функции $f(x)$

$$\exists\, c \in [a,b]: \qquad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c)\,,$$

откуда и вытекает формула (6.34). ■

Если в (6.34) положить $g(x) \equiv 1$, то придем к формуле

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.38}$$

Величина, стоящая в правой части (6.38), называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, откуда и происходит название теоремы.

Заметим, что если заменить третье условие теоремы, потребовав, чтобы $g(x) \leqslant 0$, то формула (6.34) останется справедливой, что станет очевидным, если умножить на (-1) верное соотношение

$$\int_a^b f(x)\big(-g(x)\big)dx = f(c)\int_a^b \big(-g(x)\big)dx.$$

Теорема 6.17. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для произвольного числа $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{6.39}$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 6.14 все интегралы в (6.39) существуют. Возьмем произвольное отмеченное разбиение $\widehat{T}_1$ отрезка $[a,c]$ диаметром $\lambda(\widehat{T}_1)$ и аналогичное разбиение $\widehat{T}_2$ отрезка $[c,b]$ диаметром $\lambda(\widehat{T}_2)$. Объединив $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$, получим разбиение $\widehat{T}$ отрезка $[a,b]$ диаметром

$$\lambda(\widehat{T}) = \max\{\lambda(\widehat{T}_1),\ \lambda(\widehat{T}_2)\}\,.$$

Соответствующая интегральная сумма на $[a, b]$ складывается из интегральных сумм для отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\sum_{\Delta x_i \in [a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{\Delta x_i \in [a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{\Delta x_i \in [c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (6.40)$$

Если $\lambda(\widehat{T}) \to 0$, то и $\lambda(\widehat{T_1}) \to 0$, $\lambda(\widehat{T_2}) \to 0$. Выбирая нормальную последовательность отмеченных разбиений и переходя к пределу при $\lambda(\widehat{T_n}) \to 0$ в (6.40), получим (6.39). ■

До сих пор мы рассматривали интеграл по отрезку $[a, b]$, где $a < b$. Однако полезно расширить понятие интеграла на случай произвольного соотношения между a и b, причем так, чтобы нужные свойства интеграла сохранялись. Для этого положим *по определению*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b). \quad (6.41)$$

Теперь можно утверждать, что формула (6.39) сохраняется при любом соотношении между a, b и c. Здесь возникает много возможных случаев. Возьмем один из них, а именно: $a < b < c$, и докажем для него справедливость (6.39).

В силу теоремы 6.17 с естественным переобозначением *пределов интегрирования* (т. е. чисел a, b и c) получим

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx. \quad (6.42)$$

Учитывая , что

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx\,,$$

и перенеся второе слагаемое в правой части (6.42) в левую часть равенства, получим (6.39).

Аналогично можно убедиться в справедливости формулы (6.39) и во всех остальных возможных случаях.

Ранее мы получили ряд соотношений для интегралов, в одних из которых участвует знак равенства, в других — знак неравенства. Какие из этих соотношений останутся справедливыми при новом, расширенном, понимании интеграла? Легко убедиться, что все соотношения, содержащие знак равенства, остаются в силе, тогда как формулы, где фигурирует неравенство, будут справедливы только, если нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Перейдем теперь к важнейшим теоремам, связанным со свойствами интеграла *как функции верхнего предела.*

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольную точку $x \in [a, b]$ и рассмотрим новую функцию $F(x)$, задаваемую формулой

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (6.43)$$

(Здесь во избежание путаницы переменную интегрирования обозначили буквой t, поскольку, как указывалось ранее, определенный интеграл не зависит от ее обозначения, а буква x уже занята для обозначения верхнего предела интегрирования.)

В силу свойств интеграла функция (6.43) определена на всем отрезке $[a, b]$. Задача состоит в том, чтобы выяснить свойства функции $F(x)$ при различных условиях, накладываемых на $f(x)$.

Теорема 6.18. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in [a, b]$ и преобразуем приращение ΔF в этой точке:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \\ = \int_{x_0}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt. \quad (6.44)$$

Возьмем $\Delta x > 0$. Поскольку $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем:

$$\exists C > 0: \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \leqslant C. \quad (6.45)$$

Тогда из (6.44) и (6.45) получим

$$|\Delta F| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} C\,dt = \\ = C(x_0 + \Delta x - x_0) = C\Delta x = C|\Delta x|.$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$|\Delta F| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| = \left| - \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} |f(t)|dt \leqslant \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} C dt = C(-\Delta x) = C|\Delta x|.$$

Таким образом, при любом знаке Δx справедлива формула

$$0 \leqslant |\Delta F| \leqslant C|\Delta x|. \tag{6.46}$$

(Разумеется, Δx выбирается таким, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы отрезка $[a, b]$.)

Из (6.46) по теореме о «зажатой переменной» следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0,$$

а это и означает непрерывность $F(x)$ в точке x_0. Поскольку x_0 — произвольная точка из $[a, b]$, отсюда и вытекает утверждение теоремы. ■

Теорема 6.19. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема на этом отрезке, причем

$$F'(x) = f(x). \tag{6.47}$$

(В концевых точках a и b речь идет, разумеется, об односторонней производной.)

Доказательство. Возьмем, как и ранее, произвольную точку $x_0 \in [a, b]$ и составим приращение ΔF. Имеем

$$\Delta F = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x, \quad \text{где} \quad c \in [x_0, x_0 + \Delta x]. \tag{6.48}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среднем, полагая $g(x) \equiv 1$. Из (6.48) следует, что

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c). \tag{6.49}$$

Устремим теперь Δx к нулю. Поскольку $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, то $c \to x_0$, а тогда в силу непрерывности $f(x)$ получим из (6.49), что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0), \quad \text{т. е.} \quad F'(x_0) = f(x_0).$$

Учитывая произвольность x_0, получаем (6.47). ■

Равенство (6.47) означает, на самом деле, что функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тем самым установлено, что *для всякой непрерывной на отрезке функции существует неопределенный интеграл.*

Перейдем теперь к центральной, в некотором смысле, теореме интегрального исчисления.

Теорема 6.20 (формула Ньютона — Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $\Phi(x)$ — ее произвольная первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{6.50}$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы, учитывая (6.47),

$$F(x) = \Phi(x) + C. \tag{6.51}$$

Полагая в (6.51) $x = a$, находим, что

$$F(a) = 0 = \Phi(a) + C, \quad \text{откуда} \quad C = -\Phi(a).$$

Тогда (6.51) примет вид

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{6.52}$$

Подставив в (6.52) вместо x значение b и учитывая, что $F(b)$ совпадает с интегралом, получим (6.50). ■

Для разности, стоящей в (6.50), используется специальное обозначение:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

(Читается: «подстановка от a до b».)

С его использованием формула (6.50) принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b. \tag{6.53}$$

Эта формула названа по имени двух выдающихся математиков, открывших ее, формулой Ньютона — Лейбница. Она устанавливает теснейшую связь между прежде обособленными понятиями определенного и неопределенного интегралов и позволяет с помощью неопределенного интеграла вычислять определенный интеграл.

Пример 6.4.

$$\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Ранее мы изучали два метода вычисления неопределенного интеграла: замену переменной и интегрирование по частям (см. теоремы 6.1 и 6.2). Теперь их можно приспособить непосредственно для вычисления определенных интегралов.

Теорема 6.21. Пусть $f(x) \in C([a,b])$, а $\varphi(x) \in C^1([\alpha,\beta])$ (т. е. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha,\beta]$). Пусть далее $\varphi(x) \in [a,b]$ для $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(u)\,du = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \tag{6.54}$$

Доказательство. Действительно, все подынтегральные функции, участвующие в (6.54), непрерывны в силу условий теоремы. Пусть $\Phi(u)$ — некая первообразная для $f(u)$ на отрезке $[a,b]$. Как и в теореме 6.1, убеждаемся, что $\Phi\big(\varphi(x)\big)$ — первообразная для $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ на $[\alpha,\beta]$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \Phi\big(\varphi(\beta)\big) - \Phi\big(\varphi(\alpha)\big) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отсюда и следует (6.54). ■

Теорема 6.22. Пусть функции $u(x)$, $v(x) \in C^1([a,b])$. Тогда

$$\int\limits_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx. \tag{6.55}$$

Доказательство. В самом деле, интегрируя равенство (6.6) от a до b, учитывая, что $u(x)v(x)$ — одна из первообразных для $\big(u(x)v(x)\big)'$, и применяя формулу Ньютона — Лейбница, получим (6.55). ■

Пример 6.5.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \left|\begin{matrix}\sin x = u\\ \cos x dx = du\end{matrix}\right| = \int\limits_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 6.6.

$$\int\limits_0^1 e^{-x}xdx = -\int\limits_0^1 xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= -e^{-1} - \int\limits_0^1 e^{-x}\,d(-x) =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x) \in C^\infty\big(U(x_0)\big)$, т. е. функцию, обладающую непрерывными производными всех порядков в некоторой окрестности точки x_0. Здесь не предполагается, что окрестность $\mathrm{U}(x_0)$ мала (не исключен случай, когда эта окрестность совпадает со всей числовой осью). Фиксируем точку $x \in \mathrm{U}(x_0)$. Тогда в силу формулы Ньютона — Лейбница справедливо соотношение

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^x f'(t)\,dt \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^x f'(t)\,dt\,. \tag{6.56}$$

К интегралу, стоящему в правой части (6.56), применим несколько раз формулу интегрирования по частям. Имеем:

$$f(x) = f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t) = f(x_0) - f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!} = \ldots = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tag{6.57}$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

К последнему интегралу в (6.57) применим теорему о среднем, где в роли функции $f(x)$ выступает $f^{(n+1)}(x)$, а в роли $g(x)$ — функция $\dfrac{(x-t)^n}{n!}$. Очевидно, все требования этой теоремы выполнены. Получим:

$$\exists\, c \in [x_0, x]: \qquad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= f^{(n+1)}(c) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{6.58}$$

Комбинируя (6.57) и (6.58), приходим к следующей теореме.

Теорема 6.23. Пусть функция $f(x) \in C^{\infty}(\mathrm{U}(x_0))$. Тогда при любом n и для любого $x \in \mathrm{U}(x_0)$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6.59}$$

где $c \in [x_0, x]$.

Формула (6.59) носит название *формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*. Разумеется, число c в этой формуле зависит как от n, так и от x. Первая группа слагаемых

в (6.59) есть не что иное, как многочлен Тейлора. Разница между формулой (6.59) и той формулой, которую мы изучали ранее, состоит лишь в форме записи *остаточного члена*, т. е. разности между функцией $f(x)$ и ее многочленом Тейлора. Если прежде мы знали, что остаточный член имеет вид $o[(x-x_0)^n]$, то в формуле (6.59) о нем содержится гораздо более подробная информация.

При решении ряда задач (отыскание площади бесконечной области, вычисление работы силы на бесконечном пути и т. п.) введенного ранее интеграла оказывается недостаточно. Обобщим его, во-первых, на случай бесконечного промежутка и, во-вторых, на случай неограниченных функций.

Определение 6.8. Пусть функция $f(x) \in C\big([a, +\infty)\big)$, т. е. непрерывна на полуоси $[a, +\infty)$. Назовем *несобственным интегралом* от этой функции по данной полуоси следующую величину:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{6.60}$$

Если конечный предел в (6.60) существует, то интеграл называется *сходящимся* и его значение считается равным этому пределу, а если конечный предел не существует, то интеграл называется *расходящимся* и ему не соответствует никакое числовое значение.

Поскольку для непрерывной функции на $[a, b]$ действует формула Ньютона — Лейбница, ясно, что такая же формула справедлива и для несобственного интеграла, если под значением первообразной в $+\infty$ понимать соответствующий предел:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{a}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) - \Phi(a), \quad \text{где} \quad \Phi'(x) = f(x).$$

Пример 6.7.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Пример 6.8.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty}.$$

Поскольку $\ln|x|$ не имеет конечного предела на $+\infty$, то последний интеграл расходится.

Рассмотрим теперь один важный для дальнейшего интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{6.61}$$

При $p = 1$ интеграл (6.61) расходится (см. пример 6.8). Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^{+\infty}. \tag{6.62}$$

Ясно, что правая часть (6.62) равна конечному значению при $p > 1$ и обращается в бесконечность при $p < 1$.

Таким образом, интеграл (6.61) *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.

Подобно интегралу (6.60) можно определить и следующие интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx; \tag{6.63}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{6.64}$$

причем интеграл (6.64) считается сходящимся, если сходятся *оба* интеграла в правой части.

Определение 6.9. Рассмотрим функцию $f(x) \in C\big((a,b]\big)$, неограниченную в окрестности точки a. Назовем *несобственным интегралом* от a до b величину

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx. \tag{6.65}$$

Как и в случае (6.60), интеграл (6.65) считается *сходящимся*, если соответствующий конечный предел существует, и *расходящимся* в противном случае.

Здесь тоже действует формула Ньютона — Лейбница, причем под значением первообразной $\Phi(x)$ в точке a понимается $\lim\limits_{x\to a+} \Phi(x)$.

Пример 6.9.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

Пример 6.10.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^1.$$

Поскольку $\ln|x|$ не имеет конечного предела при $x \to 0+$, то последний интеграл расходится.

Упражнение 6.1. Исследуйте на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ при всех p.

Наряду с интегралом (6.65) можно определить интеграл для случаев, когда особая точка (точка, в окрестности которой функция не ограничена) находится не на левом, а на правом конце отрезка $[a, b]$ или внутри него (в точке c). Соответственно, от функции $f(x)$ требуется непрерывность на множестве $[a, b)$ или $[a, c) \cup (c, b]$. При этом соответствующие интегралы определяются как

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx \tag{6.66}$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \tag{6.67}$$

причем в случае (6.67) для сходимости интеграла требуется сходимость *обоих* интегралов в правой части этого равенства.

Как и ранее, можно и здесь обосновать применимость формулы Ньютона — Лейбница.

Сделаем еще несколько замечаний.

Если, например, применить определение (6.66) к функции, для которой существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в обычном смысле, то в силу непрерывности интеграла по верхнему пределу придем к прежнему значению интеграла.

Для несобственных интегралов применимы с очевидными изменениями все методы вычисления интегралов, такие, например, как метод подстановки и метод интегрирования по частям. Нужно лишь постоянно следить за сходимостью интегралов.

Можно было бы ослабить требования к функции $f(x)$ и, например, в случае (6.60) отказаться от непрерывности $f(x)$ на всей полуоси $[a, +\infty)$. В этом случае пришлось бы потребовать, чтобы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существовал при любом $b > a$, и применение формулы Ньютона — Лейбница не было бы здесь гарантировано.

Аналогичное замечание относится и ко всем другим типам несобственных интегралов.

6.3. Приложения определенного интеграла

Пусть $f(x) \in C([a,b])$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Найдем площадь криволинейной трапеции (см. рис. 6.1).

При любом $x \in [a,b]$ рассмотрим площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена на участке $[a,x]$. Обозначим ее через $S(x)$. Очевидно, $S(a) = 0$, $S(b) = S$ (S — площадь всей исходной трапеции).

Фиксируем произвольное $x_0 \in [a,b]$ и дадим x_0 приращение Δx. Тогда $S(x)$ получит приращение

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Ясно, что ΔS — площадь узкой полоски, вырезанной из трапеции и расположенной на участке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (рис. 6.3).

Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, то она имеет на этом отрезке максимум и минимум, т. е.

$$\exists\, x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \Delta x] : \forall\, x \in [x_0, x_0 + \Delta x] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$

Рассмотрим два прямоугольника с высотой соответственно $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Очевидно, что площадь ΔS заключена между площадями этих прямоугольников

$$f(x_1)\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant f(x_2)\Delta x. \qquad (6.68)$$

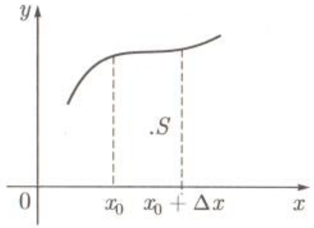

Рис. 6.3

Положим для простоты в (6.68) $\Delta x > 0$ и поделим все части этого неравенства на Δx; получим

$$f(x_1) \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant f(x_2). \qquad (6.69)$$

Устремим теперь Δx к нулю. Поскольку точки x_1 и x_2 принадлежат отрезку $[x_0, x_0 + \Delta x]$, они обе будут стремиться к x_0, а в силу непрерывности $f(x)$ значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут стремиться к $f(x_0)$. Применив к (6.10) теорему о «зажатой переменной», получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0),$$

т. е.

$$S'(x_0) = f(x_0).$$

В силу произвольности x_0 находим, что на всем отрезке $[a,b]$

$$S'(x) = f(x). \qquad (6.70)$$

Проинтегрируем равенство (6.70):

$$\int\limits_a^b S'(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{или} \quad S(b) - S(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Но, как отмечалось ранее, $S(a) = 0$, а значение $S(b)$ совпадает с площадью криволинейной трапеции. Поэтому приходим к формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (6.71)$$

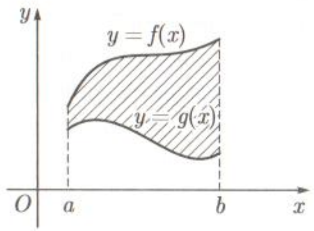

Рис. 6.4

Рассмотрим более общий случай криволинейной трапеции (рис. 6.4).

Здесь $f(x), g(x) \in C([a,b])$ и $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ на $[a,b]$.

Ясно, что площадь такой трапеции равна разности площадей двух трапеций предыдущего типа, одна из которых ограничена сверху графиком $y = f(x)$, а другая — графиком $y =$

$= g(x)$. Таким образом, приходим к следующей формуле для площади S трапеции

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx. \tag{6.72}$$

Отметим, что (6.71) является частным случаем (6.72), где $g(x) = 0$.

Формула (6.72) сохранится и в случае, если отбросить требование неотрицательности $f(x)$ и $g(x)$. Действительно, учитывая ограниченность $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$, можно выбрать столь большое положительное число A, чтобы функции $f(x)+A$ и $g(x)+A$ оказались положительными на $[a,b]$. Соответствующая криволинейная трапеция получится из исходной параллельным сдвигом вдоль оси Oy, который, как известно, не меняет площади фигур. Но если применить (6.72) к новой трапеции, то получим

$$S = \int_a^b \Big[\big(f(x)+A\big) - \big(g(x)+A\big)\Big]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,.$$

Следовательно, формула (6.72) справедлива и в этом случае.

Рассмотрим вновь трапецию, изображенную на рис. 6.1, и будем вращать ее как жесткую пластину вокруг оси Ox. В результате возникнет некое пространственное тело, называемое телом вращения. Наша задача — вычислить объем V_{Ox} такого тела.

Как и в задаче с площадью, введем функцию $V(x)$, равную объему тела, которое получается при вращении части трапеции, расположенной на участке $[a,x]$. Ясно, что $V(a) = 0$ и $V(b) = V_{Ox}$.

Снова фиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и дадим аргументу приращение Δx. При этом объем изменится на величину

$$\Delta V = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0). \tag{6.73}$$

Величина (6.73) представляет собой объем тела, полученного при вращении тонкой полоски, изображенной на рис. 6.3.

Как и ранее, выбираем на отрезке $[x_0, x_0+\Delta x]$ точки x_1, x_2: $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Тогда ΔV окажется заключенным между двумя объемами, порожденными прямоугольниками с основаниями $[x_0, x_0+\Delta x]$ и высотами, равными $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Но при вращении прямоугольников вокруг оси Ox получаются прямые круговые цилиндры. Таким образом ($\Delta x > 0$),

$$\pi f^2(x_1)\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant \pi f^2(x_2)\Delta x. \tag{6.74}$$

Поделив неравенство (6.74) почленно на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, как и ранее, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x_0), \quad \text{т. е.} \quad V'(x_0) = \pi f^2(x_0).$$

Учитывая произвольность x_0, находим, что

$$V'(x) = \pi f^2(x) \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{6.75}$$

Интегрируя (6.75) по отрезку $[a,b]$, придем к формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{6.76}$$

При вращении трапеции вокруг оси Oy получим еще одно тело вращения объемом V_{Oy}. (В этом случае требуем, чтобы отрезок $[a,b]$ располагался на положительной полуоси.) Здесь тело, получающееся при вращении узкого прямоугольника вокруг оси Oy, представляет собой полый цилиндр. Поэтому, поступая так же, как и ранее, вместо (6.74) находим оценку

$$\pi(x_0+\Delta x)^2 f(x_1) - \pi x_0^2 f(x_1) \leqslant \Delta V \leqslant \pi(x_0+\Delta x)^2 f(x_2) - \pi x_0^2 f(x_2),$$

откуда после очевидных преобразований получаем соотношение

$$2\pi x_0 f(x_1) + \pi f(x_1)\Delta x \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant 2\pi x_0 f(x_2) + \pi f(x_2)\Delta x. \tag{6.77}$$

Переходя, как и прежде, в (6.77) к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем формулу

$$V'(x) = 2\pi x f(x). \tag{6.78}$$

Проинтегрировав (6.78), получаем окончательную формулу

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx. \tag{6.79}$$

Заметим, что если отрезок $[a,b]$ расположен на отрицательной полуоси, то (6.79) нужно заменить на более общую формулу:

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b |x| f(x)\,dx. \tag{6.80}$$

Приведем без доказательства еще одну формулу для вычисления объема.

Пусть некое тело расположено вдоль оси Ox на участке $[a, b]$. Пусть, далее при любом $x \in [a, b]$ известна площадь сечения $S(x)$ тела плоскостью, проходящей через точку x и перпендикулярной оси Ox. Тогда объем данного тела равен

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{6.81}$$

Формула (6.81) — это формула вычисления объема тела по *поперечным сечениям.*

Перейдем теперь к вопросу о вычислении длины дуги некоторой кривой. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ и возьмем кусок ее графика, располагающийся над отрезком $[a, b]$. Такой кусок будем называть *дугой* и обозначать $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 6.5).

Выберем на этой дуге конечное множество точек $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_k = B$. Такое множество назовем *разбиением дуги* и обозначим через Q. Соединим соседние точки прямолинейными отрезками. В результате получим ломаную линию с теми же концами A, B, что и исходная дуга; обозначим длину этой ломаной через $\widehat{l}_{AB}$ или, кратко, $\widehat{l}$. (Разумеется, $\widehat{l}_{AB}$ зависит от выбора точек M_i.) Длину максимального звена ломаной обозначим через ρ.

Последовательность разбиений Q_n назовем *нормальной*, если последовательность соответствующих ρ_n стремится к нулю.

Определение 6.10. Величина l_{AB} называется *длиной дуги* $\overset{\smile}{AB}$, если для любой нормальной последовательности разбиений дуги Q_n

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{l}_n = l_{AB}.$$

Если длина дуги существует, то дуга $\overset{\smile}{AB}$ называется *спрямляемой*, в противном случае — *неспрямляемой.*

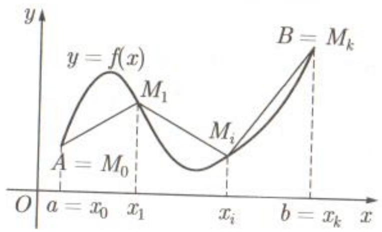

Рис. 6.5

Заметим, что определение длины дуги через предел длин ломаных аналогично определению интеграла через интегральные суммы.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 6.24. Пусть $f(x) \in C^1([a, b])$. Тогда соответствующая дуга спрямляема и ее длина вычисляется по формуле

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{6.82}$$

Доказательство. В самом деле, возьмем произвольное разбиение $Q = \{M_i\}$ дуги $\overset{\smile}{AB}$ и спроецируем точки M_i на ось Ox. В результате на отрезке $[a, b]$ возникнет разбиение T, состоящее из проекций x_i точек M_i. Очевидно, диаметр такого разбиения удовлетворяет оценке $\lambda(T) \leqslant \rho$, поскольку длина любого отрезка на плоскости не меньше длины его проекции на ось Ox. Подсчитаем теперь длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломаной. Имеем:

$$\begin{gathered} M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \\ = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left[f'(\xi_i)\Delta x_i\right]^2} = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i. \end{gathered} \tag{6.83}$$

Здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а к приращению $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ применили формулу Лагранжа, что законно в силу условия теоремы. Сложив все величины (6.83), найдем длину всей ломаной:

$$\widehat{l}_{AB} = \sum_i \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i. \tag{6.84}$$

Заметим, что разбиение T вместе с точками ξ_i образует отмеченное разбиение $\widehat{T}$, а величина (6.84) есть не что иное, как соответствующая интегральная сумма для непрерывной функции $\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}$.

Возьмем теперь произвольную нормальную последовательность разбиений дуги Q_n. Она порождает нормальную последовательность отмеченных разбиений на $[a, b]$. Последовательность длин ломаных $\widehat{l}_n$ совпадает с последовательностью соответствующих интегральных сумм и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{l}_n = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

что равносильно формуле (6.82). ■

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении работы, совершаемой переменной силой на прямолинейном участке пути. Если в каждой точке оси Ox на материальную точку, находящуюся на этой оси, действует направленная вдоль этой же оси сила, то такую силу можно охарактеризовать алгебраической величиной $F(x)$ и, переходя на «физический уровень строгости», считать, что при смещении точки вдоль «бесконечно малого пути» dx величина $F(x)$ не меняется, и поэтому совершенная элементарная работа равна $F(x)\,dx$. Если теперь материальная точка переместится из положения a в положение b, то поле сил совершит при этом работу, равную

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx. \tag{6.85}$$

Рассмотрим теперь следующую физическую задачу.

Пусть в небольшом шарике проделано отверстие и этот шарик насажен на гладкий стержень так, что он может смещаться только вдоль этого стержня. Прикрепим к шарику пружинку и будем считать, что шарик первоначально находится в положении равновесия. Выясним, какую нужно затратить работу, чтобы переместить шарик из положения равновесия на расстояние a.

Направим ось Ox вдоль продольной оси стержня, а точку, где центр шарика располагается в положении равновесия, примем за начало координат.

Как известно из механики (закон Гука), при смещении шарика из положения равновесия на небольшое расстояние на шарик со стороны пружины будет действовать упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в противоположную смещению сторону. При нашем выборе оси Ox эта сила характеризуется алгебраической величиной

$$F(x) = -kx. \tag{6.86}$$

Применив к (6.86) формулу (6.85), получим, что работа, совершенная упругой силой, равна

$$A = -k\int\limits_0^a x\,dx = -k\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = -\frac{ka^2}{2}. \tag{6.87}$$

Значение работы получилось отрицательным, так как перемещение шарика происходило против поля сил. Соответственно, для преодоления сопротивления пружины необходимо совершить такую же работу, но с положительным знаком.

6.4. Приложение*

В этом приложении коснемся вопроса о приближенном вычислении определенного интеграла.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию $f(x)$. Возьмем некое разбиение $T = \{x_i\}$ данного отрезка. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{6.88}$$

Будем считать, что длины всех малых отрезков одинаковы, $\Delta x_i = h$; величину h назовем *шагом разбиения*, а точки x_i — узловыми точками.

Находя различные приближенные выражения для интеграла по малому отрезку, в силу (6.88) будем получать приближенные значения для интеграла по всему отрезку.

Итак, рассмотрим $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$. Заменим $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ константой, равной $y_{i-1} = f(x_{i-1})$. Тогда получим приближенное значение

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx y_{i-1}h. \tag{6.89}$$

Суммируя (6.89) по всем i, получим приближенную формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})h. \tag{6.90}$$

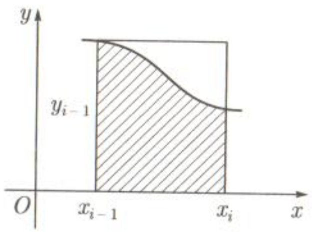

Рис. 6.6

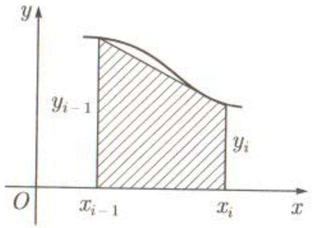

Рис. 6.7

В случае положительной функции $f(x)$ формула (6.89) означает, что на участке $[x_{i-1}, x_i]$ заменяем площадь узкой полоски, вырезанной из криволинейной трапеции, площадью прямоугольника с высотой y_{i-1} (рис. 6.6).

Поэтому формула (6.90) носит название *формулы прямоугольников.*

Конечно, формула (6.89) дает довольно грубое приближение. Более точное приближение можно получить, если заменить на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ график функции не горизонтальным отрезком, а хордой, соединяющей концевые точки графика на этом отрезке. В результате получится трапеция, площадь которой приближенно равна площади узкой полоски (рис. 6.7).

Учитывая, что площадь такой трапеции очевидно равна

$$\frac{y_{i-1} + y_i}{2} h,$$

и суммируя все такие площади, получим для вычисления интеграла приближенную *формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) h. \qquad (6.91)$$

Еще более точное приближение можно получить, если заменить на соответствующем участке график функции куском параболы. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на *четное* число $2m$ малых отрезков и заменим на участке $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ график функции параболой, проходящей через три точки (x_{2k}, y_{2k}), (x_{2k+1}, y_{2k+1}) и (x_{2k+2}, y_{2k+2}) (рис. 6.8).

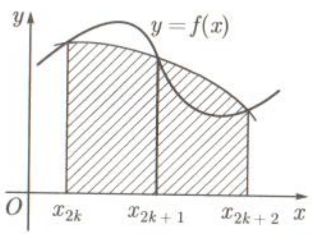

Рис. 6.8

Чтобы легко найти уравнение такой параболы, применим метод, предложенный Лагранжем. Введем три квадратичные функции, каждая из которых равна единице в «своей» узловой точке и нулю в двух других точках. Легко видеть, что такие функции задаются формулами

$$\begin{aligned} e_{2k}(x) &= \frac{(x - x_{2k+1})(x - x_{2k+2})}{(x_{2k} - x_{2k+1})(x_{2k} - x_{2k+2})}; \\ e_{2k+1}(x) &= \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+2})}{(x_{2k+1} - x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k+2})}; \\ e_{2k+2}(x) &= \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{(x_{2k+2} - x_{2k})(x_{2k+2} - x_{2k+1})}. \end{aligned} \qquad (6.92)$$

Если записать линейную комбинацию этих функций:

$$L_k(x) = y_{2k} e_{2k}(x) + y_{2k+1} e_{2k+1}(x) + y_{2k+2} e_{2k+2}(x)\,, \qquad (6.93)$$

то получим квадратичную функцию, график которой проходит через три указанные ранее точки, т. е. это и будет искомая парабола.

Поэтому

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} L_k(x)\,dx. \qquad (6.94)$$

Легко подсчитать, что

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} e_{2k}(x)\,dx = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} e_{2k+2}(x)\,dx = \frac{h}{3}; \quad \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} e_{2k+1}(x)\,dx = \frac{4}{3}h. \qquad (6.95)$$

Учитывая (6.93), (6.94) и (6.95), находим, что

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}). \qquad (6.96)$$

Суммируя (6.96) по всем k, получаем окончательную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\big(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + \\ +4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})\big). \qquad (6.97)$$

Формула (6.97) носит название *формулы Симпсона.* Она является самой точной из трех приближенных формул, полученных нами, и поэтому на практике предпочитают пользоваться именно ею.

Конечно, существуют и другие формулы, а также методы для приближенного вычисления интегралов. С ними можно познакомиться в специальных руководствах по вычислительным методам.

Глава 7

РЯДЫ

7.1. Простейшие свойства числовых рядов

С формальной точки зрения *ряд* — это числовая последовательность, члены которой соединены знаком «+», т. е. это некая формальная сумма. Ряд записывается следующим образом:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .$$

(Здесь a_n называется *общим членом* ряда.)

Если говорить неформально, то ряд — это сумма бесконечного числа слагаемых. Такой сумме нужно прежде всего придать смысл. Мы уже касались этого вопроса в гл. 6 в связи с критерием Лебега. Теперь пришло время разобраться во всем этом основательно.

Назовем *частичной суммой* S_n ряда сумму его первых n слагаемых:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Частичные суммы сами образуют числовую последовательность.

Определение 7.1. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, причем предел частичных сумм называется *суммой ряда*. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Таким образом, сумма ряда S вычисляется по формуле

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{7.1}$$

Изучим теперь простейшие свойства числовых рядов.

Пусть заданы два ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

Под суммой (разностью) этих рядов будем понимать ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n).$$

Теорема 7.1. Пусть даны два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = B$. Тогда их сумма (разность) также сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы рядов

$$A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n \quad \text{и} \quad B_m = \sum_{n=1}^{m} b_n.$$

Возьмем, например, сумму рядов и выразим через A_m и B_m ее частичную сумму S_m:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=1}^{m} b_n = A_m + B_m. \tag{7.2}$$

Учитывая определение суммы ряда (7.1) и применив к (7.2) теорему о пределе суммы двух последовательностей, получим

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty}(A_m + B_m) = A + B. \qquad \blacksquare$$

Аналогично доказывается теорема и для разности рядов.

Следует отметить, что эту теорему нельзя обратить: из сходимости суммы двух рядов *не следует* сходимость каждого ряда. Например, каждый из двух рядов с постоянными слагаемыми

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots ;$$
$$-1 - 1 - \cdots - 1 - \cdots$$

расходится, а их суммой будет ряд

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots ,$$

который сходится к нулю.

Упражнение 7.1. Докажите утверждение: если один ряд сходится, а другой расходится, то их сумма представляет собой расходящийся ряд.

Теорема 7.2. От умножения всех членов ряда на ненулевую постоянную сходимость (расходимость) ряда не меняется.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} Ca_n, \quad \text{где} \quad C \neq 0.$$

Если обозначить их частичные суммы соответственно через A_n и A'_n, то выполняется очевидное соотношение

$$A'_n = CA_n.$$

Отсюда ясно, что если сходится последовательность $\{A_n\}$, то сходится и последовательность $\{A'_n\}$, и наоборот.

Понятно также, что в случае сходимости для сумм рядов справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Ca_n = C\sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \qquad \blacksquare$$

Теорема 7.3 (необходимый признак сходимости). Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Действительно, запишем очевидное соотношение

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \tag{7.3}$$

где S_n — частичная сумма ряда. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{и, очевидно,} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Отметим, что этот признак не является *достаточным*: из того, что предел общего члена равен нулю, *не следует* сходимость ряда. Это можно увидеть на примере следующих двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Как будет установлено далее, первый из этих рядов расходится, а второй сходится, хотя и в том, и другом случае общий член стремится к нулю.

Теорема 7.4. От изменения (добавления, отбрасывания) ***конечного*** числа членов сходимость (расходимость) ряда не меняется.

Доказательство. Действительно, пусть задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Обозначим через $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a'_n$ ряд, полученный из исходного ряда изменением конечного числа членов.

Поскольку у этих двух рядов отличается лишь конечное число членов,

$$\exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow a'_n = a_n.$$

Обозначим через A_n и A'_n соответствующие частичные суммы. Тогда, начиная с номера N, разность между ними будет постоянна

$$A'_n - A_n = C,$$

или

$$A'_n = A_n + C.$$

Отсюда ясно, что последовательности $\{A_n\}$ и $\{A'_n\}$ либо обе имеют предел, либо обе предела не имеют. ■

Теорема 7.5. Если ряд сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена.

Это немедленно следует из определения сходимости ряда и соответствующего свойства числовых последовательностей.

Важно отметить, что ограниченность частичных сумм еще не гарантирует сходимости ряда, как это видно на примере ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Последовательность его частичных сумм имеет вид

$$1, 0, 1, 0, 1, \ \ldots$$

Ясно, что эта последовательность ограничена, но предела не имеет.

Любой ряд можно представить в виде

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots). \tag{7.4}$$

В первой скобке (7.4) стоит не что иное, как частичная сумма S_n. Ряд, стоящий во второй скобке, называется остатком R_n ряда.

Понятно, что исходный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится его остаток. Для сходящегося ряда получаем справедливое при любом n равенство

$$S = S_n + R_n. \tag{7.5}$$

Из (7.5) немедленно вытекает следующее свойство рядов.

Теорема 7.6. Если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Далее изучим еще одно свойство рядов, которое вряд ли можно назвать «простейшим», — критерий Коши сходимости рядов. Вначале дадим следующее определение.

Определение 7.2. Последовательность $\{b_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall\, n, m \geqslant N \ \Rightarrow\ |b_n - b_m| < \varepsilon. \tag{7.6}$$

Теорема 7.7 (критерий Коши сходимости последовательностей). Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Замечание. Ограничимся доказательством необходимости условия (7.6), отложив более сложное доказательство достаточности до приложения к данной главе.

Доказательство. Пусть дана сходящаяся последовательность $\{b_n\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и поделим его на 2. Тогда по определению сходимости

$$\exists\, N: \quad \forall\, k \geqslant N \Rightarrow |b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.7}$$

Пусть n, m — произвольные номера, бо́льшие или равные N. Полагая в (7.7) $k = n$ и m, получим

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.8}$$

Далее,

$$|b_n - b_m| = |(b_n - b) - (b_m - b)| \leqslant |b_n - b| + |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Здесь воспользовались свойством модуля и (7.8). Таким образом, справедливо соотношение (7.6). ■

С учетом определения сходимости ряда можно переформулировать критерий Коши применительно к рядам.

Теорема 7.8 (критерий Коши сходимости рядов). Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм является фундаментальной.

В свою очередь теорему 7.8 можно переформулировать так: *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n, m \geqslant N \ (m > n) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon. \qquad (7.9)$$

Справедливость данного утверждения станет ясной, если заметить, что

$$|S_n - S_m| = |S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|.$$

Из критерия Коши как следствие получается следующее утверждение.

Теорема 7.9. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Доказательство. Действительно, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \ \forall n, m \geqslant N \ (m > n) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon.$$

Значит, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ выполняется (7.9). А тогда по тому же критерию Коши отсюда следует сходимость этого ряда. ■

Отметим, что обратная теорема, вообще говоря, не верна: из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *не следует* сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Определение 7.3. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей его членов. Если сам ряд сходится, а ряд из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

Упражнение 7.2. Докажите, что для абсолютно сходящегося ряда справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|. \qquad (7.10)$$

7.2. Ряды с положительными членами

Очень важный класс рядов составляют ряды с положительными (неотрицательными) членами.

Пусть задан такой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0 \quad \forall n. \qquad (7.11)$$

Рассмотрим последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$. Ясно, что эта последовательность монотонно возрастает (в широком смысле):

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_n \leqslant \ldots$$

Отсюда в силу теоремы Вейерштрасса о монотонных последовательностях вытекает важное следствие: *если последовательность частичных сумм ряда* (7.11) *ограничена, то этот ряд* *сходится.* (Напомним, что для произвольного ряда такое утверждение несправедливо.)

В свою очередь из данного факта можно вывести два признака сравнения.

Теорема 7.10 (первый признак сравнения). Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

такие, что

$$\forall\, n \Rightarrow a_n \leqslant b_n. \tag{7.12}$$

Тогда из сходимости ряда с бо́льшими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

Доказательство. В самом деле, обозначим через A_n и B_n частичные суммы рядов. Из (7.12) следует, что

$$A_n \leqslant B_n. \tag{7.13}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится к некоторому числу B. Тогда выполняется неравенство

$$B_n \leqslant B. \tag{7.14}$$

(Вспомним, что в теореме Вейерштрасса предел монотонно возрастающей последовательности совпадал с точной верхней гранью.)

Из (7.13) и (7.14) находим, что

$$A_n \leqslant B.$$

Это означает, что последовательность $\{A_n\}$ ограничена, а тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится. ■

Заметим, что условие (7.12) можно ослабить, заменив его требованием, чтобы

$$\exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow a_n \leqslant b_n. \tag{7.15}$$

Действительно, если выполняется (7.15), то неравенство для членов рядов может нарушаться лишь для *конечного* числа номеров. Отбросим члены двух рядов с этими номерами. От этого, как известно, сходимость или расходимость рядов не изменится. Но для новых рядов уже будет выполнено (7.12).

Теорема 7.11 (второй признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Пусть далее

$$a_n \sim kb_n \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{где} \quad k \neq 0.$$

Тогда эти два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Действительно, по определению эквивалентности

$$a_n = kb_n q_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 1.$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, тогда

$$\exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |q_n - 1| < \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{1}{2} < q_n < \frac{3}{2}.$$

Откуда получается соотношение

$$\frac{1}{2}\,kb_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}\,kb_n. \tag{7.16}$$

Учитывая простейшие свойства числовых рядов и первый признак сравнения, из (7.16) находим, что если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, а также, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. ■

Оба признака сравнения позволяют при исследовании ряда на сходимость свести задачу к исследованию некоторого другого, как правило, более простого ряда. Но для практического применения этих признаков нужно иметь некий стандартный набор рядов, про которые известно, сходятся они или нет, и с которыми можно сравнивать другие ряды.

Единственный известный нам пока класс таких рядов образуют геометрические прогрессии, т. е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} cq^n, \quad \text{где} \quad c > 0,\ q > 0, \tag{7.17}$$

при $0 < q < 1$ такие ряды сходятся, а при $q \geqslant 1$ расходятся.

В простейших случаях можно сравнить ряд с рядом типа (7.17), непосредственно применив один из признаков сравнения. Возьмем, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n. \tag{7.18}$$

Очевидно, справедлива следующая оценка для членов этого ряда

$$\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n \leqslant \left(\frac{2n}{3n}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Но ряд с членами $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ — это геометрическая прогрессия с $q = \dfrac{2}{3} < 1$. Такой ряд сходится, а тогда по первому признаку сравнения сходится и ряд (7.18).

Однако часто не удается непосредственно сравнить члены ряда с членами геометрической прогрессии. Поэтому приходится искать другие пути для такого сравнения. Так появились следующие два признака.

Теорема 7.12 (признак Коши). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ с положительными членами выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{7.19}$$

Тогда при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ расходится, а при $q = 1$ признак ответа не дает.

Доказательство. Действительно, пусть вначале $q < 1$. Возьмем такое малое число $\varepsilon_1 > 0$, чтобы $q_1 = q + \varepsilon_1$ тоже было меньше единицы. Раскроем условие (7.19):

$$\exists N: \quad \forall n \geqslant N \ \Rightarrow\ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon_1,$$

или

$$q - \varepsilon_1 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon_1 = q_1 < 1.$$

Значит,

$$\sqrt[n]{a_n} < q_1, \qquad a_n < q_1^n. \tag{7.20}$$

По первому признаку сравнения из (7.20) и вытекает сходимость ряда.

Пусть теперь $q > 1$. Возьмем такое малое $\varepsilon_2 > 0$, чтобы $q - \varepsilon_2 = q_2$ было больше единицы. Снова раскрывая (7.19), найдем, что

$$\exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow q_2^n < a_n.$$

Но отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, т. е. a_n не стремится к нулю, а тогда по необходимому признаку ряд расходится. ■

Теорема 7.13 (признак Даламбера). Пусть для ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \tag{7.21}$$

Тогда при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ расходится, а при $q = 1$ признак ответа не дает.

Доказательство. Пусть сначала $q < 1$. Возьмем такое малое $\varepsilon_1 > 0$, чтобы $q_1 = q + \varepsilon_1 < 1$. Раскроем (7.21):

$$\exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon_1,$$

$$\text{или} \quad q - \varepsilon_1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon_1 = q_1. \tag{7.22}$$

Из (7.22) следует неравенство

$$a_{n+1} < a_n q_1. \tag{7.23}$$

Выпишем неравенство (7.23) для нескольких номеров, начиная с N:

$$a_{N+1} < a_N q_1;$$
$$a_{N+2} < a_{N+1} q_1 < a_N q_1^2;$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} q_1 < a_N q_1^3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Видим, что справедливо соотношение

$$\forall k \geqslant 1 \Rightarrow a_{N+k} < a_N q_1^k. \tag{7.24}$$

Переобозначим индексы, полагая $N + k = m$. Тогда неравенство (7.24) примет вид

$$a_m < (a_N q_1^{-N})\, q_1^m,$$

т. е.

$$a_m < Cq_1^m, \quad \text{где} \quad C = a_N q_1^{-N}.$$

Отсюда по первому признаку сравнения получим сходимость ряда.

Пусть теперь $q > 1$. Выберем $\varepsilon_2 > 0$ такое, чтобы $q_2 = q - \varepsilon_2 > 1$. Из (7.22) получим, что

$$\exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow 1 < q_2 < \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Но это означает, что для таких номеров

$$a_n < a_{n+1}.$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ с положительными членами монотонно возрастает, начиная с номера N. Поэтому она не может стремиться к нулю, т. е. нарушен необходимый признак и ряд расходится. ■

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие два примера.

Пример 7.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n+1}{5n-2}\right)^n.$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{5n-2} = \frac{4}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Коши.

Пример 7.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}, \quad a > 0.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!\,a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера.

Из примера 7.2, вспоминая необходимый признак сходимости, можно сделать важный вывод:

$$\forall a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0. \tag{7.25}$$

Иначе, *при целочисленных значениях аргумента показательная функция растет медленнее факториала.*

Отметим еще, что как в признаке Коши, так и в признаке Даламбера не исключен случай $q = +\infty$. Здесь при доказательстве расходимости такого ряда в качестве q_2 можно брать любое число, большее единицы.

Сравнение данного ряда со стандартным набором рядов напоминает просеивание сквозь сито: что-то удается уловить, а что-то «проскакивает» сквозь ячейки. Члены геометрической прогрессии либо очень быстро растут, либо очень быстро убывают. Поэтому для многих рядов сравнение с прогрессиями ничего не дает. Например, для ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ и признак Коши, и признак Даламбера приведут к $q = 1$, т. е. это как раз тот случай, когда признаки не позволяют ответить на вопрос о сходимости. Значит, нужно расширить набор стандартных рядов. Это можно сделать, доказав еще один признак сходимости. Но предварительно докажем теорему, аналогичную теореме Вейерштрасса о монотонных последовательностях.

Теорема 7.14. Пусть функция $g(x)$ определена на полуоси $[a, +\infty)$, монотонно возрастает на этой полуоси (быть может, нестрого) и ограничена сверху, т. е.

$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, x \in [a, +\infty) \quad \Rightarrow \quad g(x) \leqslant M.$$

Тогда существует предел этой функции при $x \to +\infty$.

Доказательство. Действительно, множество значений функции $\{g(x)\}$ ограничено сверху. Обозначим через c точную верхнюю грань этого множества:

$$c = \sup_{x\in[a,+\infty)}\{g(x)\}. \tag{7.26}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По свойству верхней грани

$$\exists\, x_\varepsilon: \quad c - \varepsilon < g(x_\varepsilon).$$

Тогда для любого $x > x_\varepsilon$ будут выполняться соотношения

$$c - \varepsilon < g(x_\varepsilon) \leqslant g(x) \leqslant c < c + \varepsilon. \tag{7.27}$$

Из (7.27) следует, что

$$\forall\, x > x_\varepsilon \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon.$$

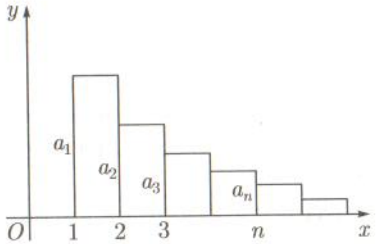

Рис. 7.1

Если теперь взять проколотую окрестность бесконечности

$$\dot{\mathrm{U}}(\infty) = \{x\colon\ |x| > A\},$$

где положительная постоянная A больше x_ε, то

$$\forall\, x \in \dot{\mathrm{U}}(\infty) \quad (x > 0) \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon. \tag{7.28}$$

Но это и означает, что

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = c. \qquad \blacksquare$$

Дадим теперь геометрическую интерпретацию ряда с положительными членами. Построим прямоугольник, основанием которого служит отрезок $[1, 2]$ на оси Ox, а высота совпадает с первым членом ряда a_1. Площадь такого прямоугольника численно равна первому члену ряда. Аналогично, построим прямоугольник с основанием $[2, 3]$ и высотой a_2, затем прямоугольник с основанием $[3, 4]$ и высотой a_3 и т. д. Получится некая бесконечная ступенчатая фигура (рис. 7.1).

Частичная сумма ряда S_n будет равна площади той части ступенчатой фигуры, которая располагается над отрезком $[1, n+1]$, а площадь всей бесконечной ступенчатой фигуры будет совпадать с суммой ряда.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 7.15 (интегральный признак Коши). Пусть задан ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и функция $f(x)$, определенная на полуоси $[1, +\infty)$, причем выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ непрерывна на $[1, +\infty)$;
2) $f(x) > 0$ на $[1, +\infty)$;
3) $f(x)$ монотонно убывает на $[1, +\infty)$;
4) $\forall\, n\ f(n) = a_n$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится в том и только в том случае, когда сходится $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Действительно, пусть вначале сходится ряд. Тогда, если обозначить его частичные суммы через A_n, а всю сумму через A, то, как было показано ранее, будет выполняться неравенство

$$\forall\, n \Rightarrow A_n \leqslant A. \tag{7.29}$$

Построим теперь на оси Ox, как пояснялось ранее, ступенчатую фигуру, изображающую ряд, и проведем график $y = f(x)$ (рис. 7.2).

Рассмотрим функцию

$$F(b) = \int\limits_1^b f(x)\,dx. \tag{7.30}$$

Поскольку $f(x) > 0$, то (7.30) — возрастающая функция. Эта функция численно равна площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком $y = f(x)$ на отрезке $[1, b]$. Фиксируем b и выберем наименьшее натуральное число n, такое, что $n \geqslant b$. Понятно (см. рис. 7.2), что криволинейная трапеция содержится внутри ступенчатой фигуры, построенной над отрезком $[1, n]$. Но площадь такой фигуры как раз и равна частичной сумме A_{n-1} ряда. Площадь криволинейной трапеции не превосходит площади объемлющей ступенчатой фигуры. Следовательно, с учетом (7.29) приходим к неравенству

$$F(b) \leqslant A_{n-1} \leqslant A.$$

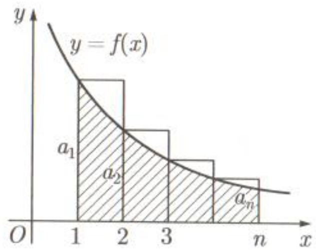

Рис. 7.2

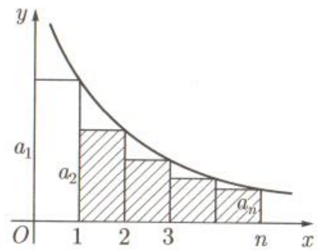

Рис. 7.3

Теперь видим, что $F(b)$ удовлетворяет на полуоси $[1, +\infty)$ всем условиям теоремы 7.14. Поэтому

$$\exists \lim_{b\to+\infty} F(b) = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Но это и означает, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Пусть теперь, наоборот, сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Передвинем ступенчатую фигуру на единицу влево и получим картину, изображенную на рис. 7.3.

Из этого рисунка видно, что ступенчатая фигура на отрезке $[1, n]$, площадь которой равна $A_n - a_1$, целиком содержится в соответствующей криволинейной трапеции. Поэтому справедливо следующее неравенство:

$$A_n - a_1 \leqslant \int\limits_1^{n} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

или

$$A_n \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx + a_1. \tag{7.31}$$

Но (7.31) означает ограниченность частичных сумм ряда, откуда вытекает его сходимость.

Теперь можно исследовать на сходимость очень важное семейство рядов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{7.32}$$

где p — любое действительное число.

Заметим сначала, что при $p \leqslant 0$ ряд (7.32) заведомо расходится, поскольку здесь нарушен необходимый признак сходимости, $a_n \nrightarrow 0$.

Пусть теперь $p > 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Значит, в данном случае сходимость ряда (7.32) равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{7.33}$$

Но интеграл (7.33) уже был исследован на сходимость при изучении несобственных интегралов. Учитывая это, приходим к окончательному результату: *ряд* (7.32) *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.

Отсюда, в частности, следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. ■

Ряды, задаваемые формулой (7.32), образуют еще один стандартный набор, который можно использовать при исследовании рядов на сходимость.

Пример 7.3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{1}{n}$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\Rightarrow$ сходится и данный ряд.

7.3. Ряды произвольного знака

В этом подразделе будут рассмотрены ряды, члены которых имеют разные знаки.

Заметим вначале, что, если все члены ряда отрицательны, то, умножая их на (-1), отчего, как известно, сходимость или расходимость ряда не меняется, получим положительный ряд. Если у ряда имеется только *конечное число* отрицательных членов, то, отбросив их, снова придем к положительному ряду. Аналогично обстоит дело для ряда, у которого имеется только конечное число положительных членов.

Существенно новым будет случай, когда у ряда имеется бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Итак, пусть задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ с членами произвольного знака. Введем два новых ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+, \quad \text{где} \quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \tag{7.34}$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-, \quad \text{где} \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}. \tag{7.35}$$

Очевидно, справедливо равенство

$$a_n = a_n^+ + a_n^-. \tag{7.36}$$

Кроме того ясно, что

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если} \quad a_n \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad a_n < 0. \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_n \geqslant 0; \\ a_n, & \text{если} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ряд (7.34) представляет собой сумму всех положительных членов исходного ряда, а ряд (7.35) — сумму всех его отрицательных членов.

Известно, что сходящиеся ряды делятся на абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся. Выясним, как описать абсолютную сходимость в терминах рядов (7.34) и (7.35).

Теорема 7.16. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда (7.34) и (7.35). Для абсолютно сходящегося ряда справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-. \tag{7.37}$$

Доказательство. Действительно, из определения величин a_n^+ и a_n^- немедленно следуют соотношения

$$|a_n^+| \leqslant |a_n|; \quad |a_n^-| \leqslant |a_n|; \tag{7.38}$$

$$|a_n| = |a_n^+| + |a_n^-|. \tag{7.39}$$

Пусть ряд абсолютно сходится. Тогда в силу (7.38) по первому признаку сравнения сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^+|$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^-|$. Но

$$|a_n^+| = a_n^+; \quad |a_n^-| = -a_n^-. \tag{7.40}$$

Отсюда следует сходимость рядов (7.34) и (7.35).

Пусть, обратно, сходятся ряды (7.34) и (7.35). В силу (7.40) тогда сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^+|$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^-|$, откуда, учитывая (7.39), вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Что касается равенства (7.37), то, вспоминая простейшие свойства числовых рядов, сразу получим его из (7.36). ■

Рассмотрим, какие еще возможны варианты. Если один из рядов (7.34), (7.35) сходится, а другой расходится, то данный ряд расходится. А вот если оба эти ряда расходятся, то данный ряд либо расходится, либо сходится условно. Определить, что́ здесь имеет место на самом деле — наиболее сложная задача. Для этого докажем еще один признак. Предварительно дадим следующее определение.

Определение 7.4. Ряд называется *знакочередующимся*, если с каждым следующим номером знак члена ряда меняется на противоположный.

Таким образом, у знакочередующегося ряда чередование знаков может быть либо таким: $+, -, +, -, +, \ldots$, либо противоположным: $-, +, -, +, -, \ldots$ Если, например, у ряда идут два положительных члена, потом два отрицательных, потом опять два положительных и так далее, то такой ряд не подходит под определение 7.4.

Теорема 7.17 (признак Лейбница). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, причем выполняются следующие условия:

1) ряд — знакочередующийся;
2) последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно убывает;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда этот ряд сходится.

Доказательство. Возьмем для определенности случай, когда ряд начинается с положительного члена, и обозначим через c_n модуль n-го члена: $c_n = |a_n|$. Тогда в развернутом виде ряд запишется следующим образом:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots \tag{7.41}$$

Рассмотрим частичные суммы ряда с четными номерами S_{2k}. Они образуют некоторую подпоследовательность последовательности всех частичных сумм. Представим каждую такую сумму двумя способами:

$$S_{2k} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) \tag{7.42}$$

и

$$S_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k}. \tag{7.43}$$

В силу монотонного убывания c_n выражение в каждой скобке в (7.42) положительно. Значит, с увеличением количества таких скобок величина (7.42) возрастает. Иначе, суммы S_{2k} образуют монотонно возрастающую последовательность

$$S_2 < S_4 < \ldots < S_{2k} < \ldots \tag{7.44}$$

В силу той же монотонности и положительности c_n из (7.43) следует, что при любом k

$$S_{2k} < c. \tag{7.45}$$

Соотношения (7.44) и (7.45) означают, что последовательность $\{S_{2k}\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная. Поэтому по теореме Вейерштрасса она имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S. \tag{7.46}$$

Рассмотрим теперь суммы с нечетными номерами. Ясно, что

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}. \tag{7.47}$$

Поскольку по условию члены ряда стремятся к нулю, из (7.46) и (7.47) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S.$$

Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами стремятся к одному и тому же числу S, а поскольку эти суммы исчерпывают всю последовательность S_n, отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Значит, ряд сходится. ■

В качестве иллюстрации рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots \tag{7.48}$$

Если взять соответствующий ряд из модулей, то получим гармонический ряд, который расходится. Однако, сам ряд (7.48) удовлетворяет всем условиям признака Лейбница и, значит, сходится. Таким образом, ряд (7.48) — это условно сходящийся ряд.

Ряды, удовлетворяющие всем условиям теоремы 7.17, называют *рядами Лейбница.*

Часто можно услышать, что признак Лейбница — это признак условной сходимости. Но это не верно. Ряды Лейбница бывают как абсолютно, так и условно сходящимися. Примером абсолютно сходящегося ряда Лейбница может служить ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Другое дело, что признак Лейбница часто используется для установления условной сходимости, но при этом требуется еще предварительное исследование на сходимость соответствующего ряда из модулей.

Анализируя доказательство признака Лейбница, можно получить оценку для суммы ряда Лейбница.

Теорема 7.18. Сумма ряда Лейбница по модулю не превосходит модуля его первого члена и имеет тот же знак, что и этот член.

Доказательство. В самом деле, если ряд начинается с положительного члена, то, во-первых, его сумма положительна, поскольку является пределом монотонно возрастающей последовательности положительных чисел S_{2k}. Во-вторых, из (7.45) и (7.46) следует, что

$$S \leqslant c_1,$$

или, учитывая положительность S,

$$|S| \leqslant |a_1|. \tag{7.49}$$

Таким образом, утверждение теоремы выполнено. Случай, когда первый член ряда отрицателен, можно свести к предыдущему, вынося «$-$» за знак суммы. Легко убедиться, что и здесь утверждение теоремы справедливо. ■

Отсюда вытекает утверждение, которое сформулируем в виде самостоятельной теоремы.

Теорема 7.19. Сумма остатка ряда Лейбница по модулю не превосходит модуля первого отброшенного члена и имеет тот же знак, что и этот член.

Доказательство. Отметим, что остаток ряда

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

сам является рядом Лейбница, а «первый отброшенный член» — не что иное, как a_{n+1} — первый член остатка. Поэтому утверждение данной теоремы немедленно получится, если применить теорему 7.18 к R_n. ■

Известно, что от перестановки слагаемых сумма не меняется. Сохраняется ли это свойство для бесконечных сумм, т. е. для рядов? Далее увидим, что оно сохраняется для абсолютно сходящихся рядов, которые в этом отношении подобны конечным суммам, и не сохраняется для рядов, сходящихся условно.

Будем говорить, что *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *получился из ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *перестановкой слагаемых*, если он состоит из тех же самых членов, но расположенных в ином порядке. Мы не ограничиваем себя перестановкой только конечного числа слагаемых. Можно, например, поменять местами все члены, стоящие на четных и нечетных местах. При этом получится ряд

$$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots + a_{2k} + a_{2k-1} + \cdots$$

Считаем, что он тоже получился перестановкой слагаемых из ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Вначале рассмотрим ряды с неотрицательными членами.

Теорема 7.20. Пусть задан сходящийся ряд с неотрицательными членами. Тогда любой ряд, полученный из исходного перестановкой слагаемых, также сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Действительно, пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \quad a_n \geqslant 0. \tag{7.50}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a'_n$ получен перестановкой слагаемых из ряда (7.50). Возьмем произвольную частичную сумму A'_n второго ряда. Она состоит из конечного числа слагаемых. Все эти слагаемые входят и в ряд (7.50), но под другими номерами. Обозначим наибольший из этих номеров через m. Ясно, что

$$A'_n \leqslant A_m \leqslant A. \tag{7.51}$$

В самом деле, A_m содержит все слагаемые из A'_n, да еще, возможно, некоторое количество неотрицательных слагаемых, и, кроме того, как и для всех положительных рядов, частичная сумма A_m не превосходит суммы ряда.

Из (7.51) следует ограниченность последовательности $\{A'_n\}$:

$$A'_n \leqslant A. \tag{7.52}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a'_n$ сходится. Переходя к пределу в (7.52), получим неравенство

$$A' \leqslant A, \quad \text{где} \quad A' = \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n. \tag{7.53}$$

Итак, если переставить слагаемые у сходящегося ряда с неотрицательными членами, то сумма нового ряда будет не больше, чем сумма исходного ряда.

Выберем теперь за исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a'_n$. Тогда с помощью обратной перестановки из него получится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. По доказанному имеем:

$$A \leqslant A'. \tag{7.54}$$

Но из (7.53) и (7.54) следует, что $A' = A$. ■

Рассмотрим теперь ряд с неположительными членами ($a_n \leqslant 0$). Умножением всех членов на (-1) его можно превратить в ряд с неотрицательными членами. Ясно, что теорема 7.20 будет справедлива и в этом случае.

Наконец, докажем итоговую теорему.

Теорема 7.21. Если переставить слагаемые абсолютно сходящегося ряда, то полученный ряд будет сходиться и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

Доказательство. В самом деле, пусть задан абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Рассмотрим соответствующие ряды (7.34) и (7.35). Любой перестановке слагаемых исходного ряда соответствует точно такая же перестановка слагаемых рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$. При этом равенство

$$a_n' = (a_n^+)' + (a_n^-)', \tag{7.55}$$

где штрихами обозначены члены переставленных рядов, сохранится.

Но ряды (7.34) и (7.35) — знакопостоянные ряды, для которых, как только что было установлено, перестановка членов не меняет сумму. Значит,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^+)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+; \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^-)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-. \tag{7.56}$$

Из (7.55) и (7.56) следует, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^+)' + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^-)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Для условно сходящихся рядов справедлива теорема, которую приводим здесь без доказательства.

Теорема 7.22 (теорема Римана). Пусть задан условно сходящийся ряд. Тогда для любого действительного числа A (включая символы $+\infty$ и $-\infty$) можно так переставить его слагаемые, что сумма полученного ряда будет равна A.

Эта теорема показывает, что бессмысленно говорить о сумме условно сходящегося ряда безотносительно к порядку его слагаемых, тогда как для абсолютно сходящегося ряда порядок слагаемых — фактор несущественный.

7.4. Функциональные ряды

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \tag{7.57}$$

где $u_n(x)$ — функции, определенные на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$. Как понимать сходимость такого ряда? Самый простой способ — поступать так же, как в случае других операций с функциями. А именно, будем говорить, что ряд (7.57) сходится в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, если сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0).$$

Множество всех точек, в которых ряд сходится, носит название *области сходимости.*

Известно, что конечная сумма непрерывных функций непрерывна, производная суммы равна сумме производных и т. д. Как обстоит дело в случае бесконечных сумм? Оказывается, при поточечном определении сходимости ни одно из этих свойств не сохраняется. Так, если все $u_n(x)$ в (7.57) непрерывны в точке x_0, то сумма ряда(7.57) $S(x)$ может оказаться разрывной в этой точке. Поэтому для того чтобы гарантировать выполнение требуемых свойств, требуется наложить на ряд дополнительные ограничения.

Определение 7.5. Числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется *мажорантой* для функционального ряда (7.57) на промежутке $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall n \quad \forall x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n. \tag{7.58}$$

Разумеется, мажоранта существует не для всякого ряда и определяется неоднозначно.

Теорема 7.23 (о непрерывности суммы функционального ряда). Пусть задан функциональный ряд (7.57), удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\forall n \; u_n(x) \in C(\langle a, b\rangle)$;

2) существует сходящаяся мажоранта $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ на $\langle a, b\rangle$.

Тогда ряд (7.57) абсолютно сходится на $\langle a, b\rangle$ и его сумма $S(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную фиксированную точку $x_0 \in \langle a, b\rangle$. В силу второго условия теоремы и (7.58) получим по первому признаку сравнения абсолютную сходимость функционального ряда. Докажем, что его сумма $S(x)$ непрерывна в точке x_0. Запишем следующие соотношения:

$$S(x) = S_m(x) + R_m(x), \quad \text{где} \quad R_m(x) - \text{остаток ряда;}$$
$$S(x_0) = S_m(x_0) + R_m(x_0).$$

$$|S(x) - S(x_0)| = \left|\left(S_m(x) - S_m(x_0)\right) + R_m(x) - R_m(x_0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |S_m(x) - S_m(x_0)| + |R_m(x)| + |R_m(x_0)|. \tag{7.59}$$

Оценим остаток ряда

$$|R_m(x)| = \left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} |u_n(x)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = \alpha_m. \tag{7.60}$$

Величина α_m представляет собой остаток сходящегося числового ряда (мажоранты), поэтому она стремится к нулю при $m \to \infty$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и поделим его на 3. Тогда по определению бесконечно малой для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$

$$\exists N: \quad \forall m \geqslant N \Rightarrow |\alpha_m| = \alpha_m < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.61}$$

Положим, $m = N$, тогда из (7.60), (7.61) следует, что

$$|R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in \langle a, b\rangle. \tag{7.62}$$

В силу (7.4)

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S_N(x) - S_N(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{7.63}$$

Далее, $S_N(x)$ представляет собой конечную сумму непрерывных функций и, значит, сама непрерывна на $\langle a, b\rangle$, в частности в точке x_0. По определению непрерывности для того же самого $\frac{\varepsilon}{3} > 0$

$$\exists \mathrm{U}(x_0): \quad \forall x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.64}$$

Из (7.63) и (7.64) следует, что

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon. \tag{7.65}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлась окрестность $\mathrm{U}(x_0)$, такая, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство (7.65). А это и означает непрерывность $S(x)$ в точке x_0. В силу произвольности x_0 отсюда следует утверждение теоремы. ■

Отметим, что наличие сходящейся мажоранты явилось существенным условием данной теоремы, без которого не прошло бы доказательство.

Теорема 7.24 (об интегрировании функциональных рядов). Пусть задан ряд (7.57), удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\forall n \quad u_n(x) \in C\left([a, b]\right)$;

2) существует сходящаяся мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ на $[a, b]$.

Тогда ряд (7.57) абсолютно сходится на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\, dx, \tag{7.66}$$

причем сходимость ряда в правой части (7.66) гарантируется.

Замечание. Обратим внимание, что в отличие от теоремы (7.57) ряд задан на *отрезке*, а не на произвольном промежутке, что существенно используется при доказательстве данной теоремы.

Доказательство. В силу теоремы 7.23 ряд абсолютно сходится на $[a, b]$, а его сумма $S(x)$ представляет собой непрерывную на $[a, b]$ функцию. Снова запишем равенство при любом натуральном m:

$$S(x) = S_m(x) + R_m(x), \tag{7.67}$$

где $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} u_n(x)$; $R_m(x) = \sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)$.

Поскольку $S(x)$ и $S_m(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то из (7.67) следует, что и остаток $R_m(x)$ непрерывен на $[a, b]$, а тогда все эти три функции интегрируемы на $[a, b]$. Проинтегрируем равенство (7.67)

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b S_m(x)\,dx + \int\limits_a^b R_m(x)\,dx. \tag{7.68}$$

Заметим, что по свойствам определенного интеграла

$$\int\limits_a^b S_m(x)\,dx = \int\limits_a^b \Bigl(\sum_{n=1}^{m} u_n(x)\Bigr)dx = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx. \tag{7.69}$$

Мы видим, что интеграл от частичной суммы $S_m(x)$ равен частичной сумме ряда, стоящего в правой части (7.66). Оценим теперь второе слагаемое в (7.68):

$$0 \leqslant \Bigl|\int\limits_a^b R_m(x)\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_a^b \Bigl(\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\Bigr)dx\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \Bigl|\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\Bigr|dx \leqslant \int\limits_a^b \Bigl(\sum_{n=m+1}^{+\infty} |u_n(x)|\Bigr)dx \leqslant \tag{7.70}$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \Bigl(\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n\Bigr)dx = (b-a)\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = \gamma_m.$$

Но γ_m в (7.70) равно константе $(b-a)$, умноженной на остаток сходящегося числового ряда (мажоранты) и поэтому является бесконечно малой величиной при $m \to \infty$. Значит, по теореме «о зажатой переменной» и $\int\limits_a^b R_m(x)\,dx \to 0$ при $m \to \infty$. Переходя в (7.68) к пределу при $m \to \infty$ с учетом (7.69) и (7.70), получим (7.66). ■

Теорема 7.25 (о дифференцировании функциональных рядов). Пусть задан ряд (7.57), удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\forall n \quad u_n(x) \in C^1\bigl([a,b]\bigr)$;

2) ряд (7.57) сходится на $[a,b]$;

3) существует сходящаяся мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ на $[a,b]$.

Тогда сумма исходного ряда дифференцируема на $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Bigr)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x). \tag{7.71}$$

(Здесь снова в концевых точках a и b производные понимаются в одностороннем смысле.)

Доказательство. Действительно, фиксируем $x \in [a,b]$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ удовлетворяет всем условиям теорем 7.23 и 7.24 на отрезке $[a,x]$. Значит, он абсолютно сходится, его сумма непрерывна и к нему можно применить формулу, аналогичную (7.66):

$$\int\limits_a^x \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(t)\Bigr)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^x u_n'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \Bigl(u_n(x) - u_n(a)\Bigr) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a),$$

или

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(t)\Bigr)dt. \tag{7.72}$$

Здесь буквой t обозначена переменная интегрирования во избежание путаницы и к интегралам от u_n' применена формула Ньютона — Лейбница.

Под знаком интеграла, стоящего в правой части (7.72), находится непрерывная функция. Поэтому по свойствам интеграла с переменным верхним пределом этот интеграл дифференцируем и его производная равна подынтегральной функции в точке x. Первое слагаемое в правой части (7.72) — константа, производная которой равна нулю. Дифференцируя равенство (7.72), получим (7.71). ■

7.5. Степенные ряды

Важнейший класс функциональных рядов образуют *степенные ряды*, т. е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \tag{7.73}$$

где c_n — числовые коэффициенты. Члены этого ряда определены на всей числовой оси и имеют производные всех порядков.

Известно, что среди всех функций наиболее «хорошими» свойствами обладают многочлены. Весьма условно ряд (7.73) можно было бы назвать многочленом бесконечной степени. Во всяком случае, можно надеяться, что такие ряды в отличие от других функциональных рядов обладают очень «хорошими» свойствами. Эта надежда полностью оправдывается, как будет видно в дальнейшем.

Заметим сначала, что, каковы бы ни были коэффициенты c_n, ряд (7.73) сходится в точке $x = 0$.

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема 7.26 (первая теорема Абеля). Если степенной ряд (7.73) сходится при $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом x, таком, что $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Действительно, фиксируем $x \neq 0$: $|x| < |x_0|$ и оценим модуль общего члена ряда (7.73)

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| = |c_n x_0^n| q^n, \quad \text{где} \quad q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1. \tag{7.74}$$

Поскольку ряд сходится в точке x_0, по необходимому признаку его общий член стремится к нулю, $c_n x_0^n \to 0$. Поэтому последовательность $\{c_n x_0^n\}$, как всякая сходящаяся последовательность, ограничена:

$$\exists\, A > 0 \quad \exists\, N\colon \quad \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |c_n x_0^n| \leqslant A. \tag{7.75}$$

Из (7.74) и (7.75) следует, что

$$|c_n x^n| \leqslant A q^n. \tag{7.76}$$

Но в правой части неравенства (7.76) стоит член сходящейся геометрической прогрессии. Отсюда по первому признаку сравнения и вытекает утверждение теоремы. ■

Все числа x, удовлетворяющие неравенству $|x| < |x_0|$, образуют симметричный интервал с центром в нуле и радиусом $|x_0|$. Таким образом, сходимость степенного ряда в точке x_0 влечет за собой его абсолютную сходимость в целом интервале.

Понятно, что есть три возможности: 1) нет ни одной отличной от нуля точки, в которой ряд сходится. Значит, область сходимости данного ряда — это единственная точка $x = 0$; 2) среди точек сходимости имеются точки, сколь угодно большие по модулю. Тогда соответствующие интервалы можно расширять неограниченно, что приведет к абсолютной сходимости ряда на всей числовой оси; 3) существуют точки, отличные от нуля, в которых ряд сходится, и точки, в которых ряд расходится. В этом случае соответствующий интервал нельзя расширять неограниченно и должен существовать максимальный интервал, в котором ряд абсолютно сходится.

Чтобы придать точный смысл всем этим нестрогим рассуждениям, введем следующее понятие.

Определение 7.6. *Радиусом сходимости* R степенного ряда называется следующее число:

$$R = \sup\{\,|x|\colon \ \text{в точке } x \text{ ряд сходится}\}. \tag{7.77}$$

Радиус сходимости совпадает с точной верхней гранью множества неотрицательных чисел — модулей точек сходимости. Если множество таких модулей не ограничено, то положим $R = +\infty$. При $0 < R \leqslant +\infty$ можно ввести понятие *интервала сходимости*, понимая под ним интервал $(-R, R)$.

Теорема 7.27. Пусть дан степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости. Тогда он абсолютно сходится внутри интервала сходимости, расходится вне его, а в концевых точках $\pm R$ может вести себя произвольным образом.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $R = +\infty$. Тогда интервал сходимости совпадает со всей числовой осью. Возьмем произвольную точку x_0. Поскольку множество модулей точек сходимости не ограничено, найдется такая точка x_1, в которой ряд сходится, причем $|x_0| < |x_1|$. В силу теоремы Абеля ряд абсолютно сходится в точке x_0. Поскольку точка x_0 была выбрана произвольно, можно сделать вывод об абсолютной сходимости ряда на всей числовой оси.

Пусть теперь $0 < R < +\infty$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (-R, R)$ и $\varepsilon = R - |x_0| > 0$. По свойству точной верхней грани найдется точка x_1, такая, что в точке x_1 ряд сходится и при этом $|x_1| > R - \varepsilon = |x_0|$. Но тогда по теореме Абеля ряд абсолютно сходится в точке x_0. Значит, ряд абсолютно сходится в интервале $(-R, R)$. Если взять любую точку x : $|x| > R$, то в ней ряд заведомо расходится, поскольку в противном случае в соответствующем множестве модулей нашелся бы элемент, превосходящий точную верхнюю грань, что невозможно. ■

Как же практически искать радиус сходимости? Можно предложить одну полезную формулу, которая хотя и не универсальна, но помогает во многих случаях.

Теорема 7.28. Пусть задан ряд (7.73), где все коэффициенты c_n отличны от нуля. Тогда его радиус сходимости R вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \tag{7.78}$$

при условии существования данного предела.

Замечание. Здесь не исключаются случаи, когда предел в (7.78) равен 0 или $+\infty$. Обозначим этот предел через c.

Доказательство. Пусть вначале $0 < c < +\infty$. Известно, что в точке 0 ряд заведомо сходится. Возьмем $x \neq 0$ и к ряду из модулей применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|x|}{c}. \tag{7.79}$$

Ряд будет сходиться абсолютно при $|x| < c$.

При $|x| > c$ исходный ряд расходится, поскольку нарушен необходимый признак сходимости.

Итак, число c обладает тем свойством, что при $|x| < c$ ряд абсолютно сходится, а при $|x| > c$ расходится. Но тем же самым свойством обладает и радиус сходимости R. Следовательно, $R = c$.

Если $c = 0$, то при любом $x \neq 0$ предел (7.79) будет равен $+\infty$, что по признаку Даламбера соответствует случаю расходимости ряда. Следовательно, ряд сходится только в точке $x = 0$, а это и означает, что $R = 0$. Если же $c = +\infty$, то предел (7.79) будет при любом x равен нулю. Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. А это значит, что $R = +\infty$. Таким образом, формула (7.78) остается справедливой и в этих особых случаях. ■

Пример 7.4. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Здесь

$$c_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 = 1.$$

Рассмотрим теперь наряду с рядом (7.73) ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}. \tag{7.80}$$

Ряд (7.80) получился из ряда (7.73) *почленным дифференцированием.*

Аналогично, ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \tag{7.81}$$

получается из (7.73) *почленным интегрированием.*

Ряды (7.80) и (7.81) сами являются степенными рядами с радиусами сходимости R_1 и R_2 соответственно. Как связаны между собой R, R_1 и R_2?

Теорема 7.29. При почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется ($R_1 = R$).

Доказательство. Полностью доказывать эту теорему мы здесь не будем, однако проверим ее утверждение для случая, когда радиус сходимости ряда находится по формуле (7.78). Имеем:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|nc_n|}{|(n+1)c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R. \quad ■$$

Взяв теперь за исходный ряд (7.81) и применив к нему теорему 7.29, получим, что $R = R_2$. Иначе, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.30. При почленном интегрировании радиус сходимости степенного ряда не меняется.

Пусть задан степенной ряд (7.73) с ненулевым радиусом сходимости $R > 0$. Выясним, какими свойствами обладает его сумма в интервале сходимости.

Теорема 7.31. Сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости и ее производная вычисляется по формуле

$$\Big(\sum_n c_n x^n\Big)' = \sum_n n c_n x^{n-1}. \tag{7.82}$$

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную точку $x_0 \in (-R, R)$. Выберем в интервале сходимости такую точку x_1, чтобы выполнялось неравенство $|x_0| < |x_1| < R$. В силу сохранения радиуса сходимости при почленном дифференцировании у ряда из производных будет тот же интервал сходимости, а значит, этот ряд будет абсолютно сходиться в точке x_1. Но тогда для исходного ряда выполнены все условия теоремы о дифференцировании функциональных рядов на отрезке $[-x_1, x_1]$. В силу этой теоремы равенство (7.82) будет справедливо на всем отрезке $[-x_1, x_1]$, в том числе и в точке x_0. Поскольку x_0 — произвольная точка из интервала сходимости, то получаем утверждение теоремы. ■

Применив теперь теорему 7.31 к ряду из производных, найдем, что сумма исходного ряда имеет вторую производную в интервале $(-R, R)$, причем

$$\Big(\sum_n c_n x^n\Big)'' = \sum_n n(n-1)c_n x^{n-2} \quad \text{и т. д.}$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно. В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 7.32. Сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости бесконечно дифференцируема в интервале сходимости, причем все ее производные получаются почленным дифференцированием соответствующее число раз исходного ряда.

Заметим теперь, что, если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости R, то, выбрав произвольное x из интервала сходимости, можно проинтегрировать ряд от 0 до x. (Проверьте самостоятельно выполнение всех условий теоремы об интегрировании функционального ряда.) В результате получим, что

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n\Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{7.83}$$

Вместо рядов (7.73) можно было бы рассмотреть ряды несколько более общего вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{7.84}$$

Простой заменой переменной $t = x - x_0$ такой ряд сводится к ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, который отличается от (7.73) лишь обозначени-

ем переменной. Поэтому все факты, относящиеся к ряду (7.73), остаются справедливыми и в случае ряда (7.84). Здесь тоже есть радиус сходимости, только интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ будет уже с центром не в нуле, а в точке x_0. Теорема 7.32 также справедлива для ряда (7.84).

7.6. Ряды Тейлора

Рассмотрим ряд (7.83) с ненулевым радиусом сходимости и обозначим его сумму через $S(x)$.

Подобно действиям с многочленом (см. гл. 4), попытаемся выяснить, как коэффициенты c_n данного ряда связаны с производными его суммы в точке x_0. Для наглядности запишем ряд в развернутом виде

$$S(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots \\ \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots \tag{7.85}$$

Подставив x_0 вместо x в (7.84), найдем, что

$$c_0 = S(x_0).$$

Продифференцируем (7.85)

$$S'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots \\ \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \tag{7.86}$$

Подставив вместо x в (7.86) x_0, получим

$$c_1 = S'(x_0).$$

Продифференцируем (7.86)

$$S''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + \cdots \\ \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \tag{7.87}$$

Подставив $x = x_0$ в (7.87), находим, что

$$c_2 = \frac{S''(x_0)}{2!}.$$

Продолжив процесс нужное число раз, придем к формуле

$$\forall n \quad c_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{7.88}$$

Таким образом, можно записать равенство

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7.89}$$

(Мы здесь придерживаемся соглашения, что $0! = 1$.)

Рассмотрим теперь произвольную бесконечно дифференцируемую (т. е. имеющую производные всех порядков) функцию $f(x)$, заданную в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Составим ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7.90}$$

Ряд (7.90) назовем *рядом Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0. (При $x_0 = 0$ этот ряд называют также рядом Маклорена.) Спрашивается, будет ли для этой функции выполняться равенство, аналогичное (7.89), т. е. будет ли ряд Тейлора сходиться к породившей его функции? Ответ, вообще говоря, отрицательный. В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0. \end{cases} \tag{7.91}$$

Ясно, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $x \neq 0$ и очень быстро убывает при $x \to 0$. Пользуясь определением производной, можно показать, что эта функция имеет производные всех порядков в точке 0 и все они равны нулю. Поэтому, если выписать для нее ряд Тейлора (7.90), где $x_0 = 0$, то увидим, что он состоит из одних нулей, а значит, сходится на всей оси к тождественному нулю. Но функция (7.91) отлична от нуля при $x \neq 0$. Таким образом, для данной бесконечно дифференцируемой функции порожденный ею ряд Тейлора сходится, но не к ней.

Этот пример показывает, что суммы сходящихся степенных рядов образуют более узкий класс среди всех бесконечно дифференцируемых функций. Они носят название *аналитических функций* и имеют ряд дополнительных замечательных свойств, которыми произвольные бесконечно дифференцируемые функции не обладают.

Попытаемся теперь выяснить, при каких условиях бесконечно дифференцируемая функция раскладывается в ряд Тейлора.

Итак, пусть $f(x) \in C^\infty\big(U(x_0)\big)$. При любом n для нее будет справедлива формула Тейлора

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \end{aligned} \tag{7.92}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора. Заметим теперь, что многочлен Тейлора является не чем иным, как частичной суммой ряда Тейлора (7.90). Отсюда получаем следующую теорему, утверждение которой непосредственно вытекает из (7.92).

Теорема 7.33. Пусть функция $f(x) \in C^\infty\big(\mathrm{U}(x_0)\big)$. Для того чтобы эта функция раскладывалась в ряд Тейлора в точке $x \in U(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член удовлетворял условию

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{7.93}$$

Доказательство. Действительно, по теореме о связи пределов с бесконечно малыми, частичные суммы ряда Тейлора будут стремиться к $f(x)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x),$$

тогда и только тогда, когда выполняется (7.93), а это равносильно утверждению данной теоремы. ∎

Теорема 7.33 дает хотя и исчерпывающее, но трудно проверяемое условие разложимости функции в ряд Тейлора. Поэтому приходится искать более обозримые *достаточные* условия такого разложения. Одно из простейших, хотя и весьма грубых, условий такого типа формулируется следующим образом.

Теорема 7.34. Пусть функция $f(x) \in C^\infty\big(\mathrm{U}(x_0)\big)$. Если

$$\exists\, M > 0: \quad \forall n\, \forall x \in \mathrm{U}(x_0) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leqslant M, \tag{7.94}$$

то функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора в $\mathrm{U}(x_0)$.

Доказательство. Действительно, запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где} \quad c \in [x_0, x].$$

Фиксируем $x \in U(x_0)$ и оценим $r_n(x)$, используя (7.94),

$$0 \leqslant |r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (7.95)$$

Но, как было установлено ранее, при любом положительном a имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$, откуда следует, что правая часть неравенства (7.95) стремится к нулю при $n \to \infty$, а следовательно, по теореме «о зажатой переменной» стремится к нулю и $r_n(x)$. Но тогда по теореме 7.33 функция $f(x)$ раскладывается в точке x в ряд Тейлора. В силу произвольности точки x получаем утверждение теоремы. ■

Ранее, изучая формулу Тейлора, мы выписывали эту формулу при $x_0 = 0$ для шести стандартных функций. Приведем теперь для этих же функций разложения в ряд Тейлора:

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \qquad (7.96)$$
- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \qquad (7.97)$$
- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad (7.98)$$
  $x \in (-\infty, +\infty)$;
- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1); \qquad (7.99)$$
- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad (7.100)$$
  $x \in (-1, 1]$;
- $$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots =$$
  $$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1, 1). \qquad (7.101)$$

Для каждого разложения указана область, на которой оно справедливо. Выведем все эти формулы, кроме (7.101), доказательство которой представляет бóльшие трудности, чем в случае остальных разложений. Вид соответствующих рядов Тейлора вытекает из формул для n-х производных функций, которые были разобраны в подразделе, посвященном формуле Тейлора. Так что здесь остается лишь проверить выполнение достаточного условия.

Прежде всего рассмотрим e^x. Выберем произвольную окрестность нуля радиуса $a > 0$

$$U(0) = \{x: \ |x| < a\}.$$

Здесь a — любое положительное число, которое вовсе не предполагается малым. В этой окрестности справедлива следующая оценка:

$$\left|(e^x)^{(n)}\right| = |e^x| = e^x < e^a.$$

Таким образом, здесь выполняются условия теоремы 7.34 и, следовательно, e^x раскладывается в ряд Тейлора в $U(0)$. В силу произвольности a отсюда получается разложение (7.96).

Для $\sin x$ и $\cos x$ получаются оценки сразу на всей числовой оси:

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin(x + \frac{\pi}{2}n)\right| \leqslant 1;$$
$$\left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos(x + \frac{\pi}{2}n)\right| \leqslant 1. \qquad (7.102)$$

Поэтому в силу теоремы 7.34 справедливы разложения (7.97) и (7.98).

Разложение (7.99) — хорошо знакомая из школы формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x$.

Интегрируя (7.99) от нуля до x, где $x \in (-1, 1)$, получим разложение (7.100). Можно заметить, что ряд (7.100) сходится и в точке 1. Оказывается (здесь мы это не доказываем), что его сумма совпадает с $\ln 2$. Так что разложение (7.100) справедливо и для точки 1.

7.7. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \quad \text{где} \quad w_n = u_n + iv_n. \qquad (7.103)$$

Ряд (7.103) считается по определению сходящимся, если сходятся два ряда с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, причем его сумма полагается равной

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{+\infty} v_n. \qquad (7.104)$$

В противном случае ряд (7.103) расходится.

Теорема 7.35. Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |w_n|$, тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Доказательство. В самом деле, $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, откуда вытекают очевидные неравенства

$$|u_n| \leqslant |w_n|; \qquad |v_n| \leqslant |w_n|. \qquad (7.105)$$

Из неравенств (7.105) по первому признаку сравнения рядов с положительными членами следует, что сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |v_n|$, а тогда, как известно, сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, что равносильно сходимости ряда (7.103). Как и в случае с действительными членами, если сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |w_n|$, то ряд (7.103) называется *абсолютно сходящимся*. ■

Можно рассмотреть степенные ряды с комплексными коэффициентами и комплексной переменной z:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n. \qquad (7.106)$$

Теорема 7.36 (теорема Абеля). Если ряд (7.106) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для любых z, таких, что $|z| < |z_0|$.

Доказательство. Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы Абеля для действительных рядов. Возьмем произвольную точку $z : |z| < |z_0|$. Тогда для модуля члена ряда (7.106) в этой точке получим оценку

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant Aq^n. \qquad (7.107)$$

Здесь $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, и последовательность $|c_n z_0^n|$ ограничена (константой A), поскольку по необходимому признаку $c_n z_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу первого признака сравнения рядов с положительными членами из (7.107) вытекает абсолютная сходимость ряда (7.106). ■

Заметим, что если изобразить комплексные числа как точки на комплексной плоскости, то неравенству $|z| < |z_0|$ удовлетворяют все точки, расположенные внутри круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат. Соответственно, вместо интервала сходимости в действительном случае здесь возникает *круг сходимости* радиуса R, где *радиус сходимости* R определяется соотношением

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ сходится в точке } z\right\}.$$

Внутри круга сходимости ряд (7.106) сходится абсолютно, вне круга он расходится, а на границе поведение ряда может быть каким угодно.

Если $R = 0$, то ряд сходится только при $z = 0$, а если $R = +\infty$, то ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости.

Ранее было доказано, что функция e^x раскладывается на всей числовой оси в степенной ряд

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Естественно определить e^z как сумму такого же ряда, где вместо действительной переменной x стоит комплексная переменная z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad (7.108)$$

Исследуем ряд (7.108) на сходимость при $z \neq 0$ по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}n!}{(n+1)!|z|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким образом, данный ряд абсолютно сходится при любом z $(R = +\infty)$, а функция e^z определена тем самым на всей комплексной плоскости.

Возьмем теперь $z = i\varphi$, где φ — действительное число. Тогда, отделяя действительную часть от мнимой, получим

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\varphi)^n}{n!} = \left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\cdots\right). \quad (7.109)$$

Но в скобках в (7.109) стоят ряды, сходящиеся соответственно к $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Поэтому справедливо равенство

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (7.110)$$

Подставив в (7.110) $(-\varphi)$ вместо φ, получим

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \quad (7.111)$$

Формулы (7.110) и (7.111) носят название *формул Эйлера*. Из них можно выразить $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через экспоненты в комплексных степенях:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};$$
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Можно показать, что функция e^z, определенная по формуле (7.108), обладает многими свойствами обычной экспоненты. Например

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}; \quad (e^z)^n = e^{nz}. \quad (7.112)$$

Если $z = u + iv$, то, учитывая формулы Эйлера и (7.112), получим

$$e^z = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v). \quad (7.113)$$

7.8. Приложение*

Прежде всего вернемся к критерию Коши сходимости последовательности и докажем его достаточность.

Итак, пусть задана фундаментальная последовательность $\{b_n\}$. Докажем, что она имеет предел. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и поделим его на три. Тогда по определению фундаментальной последовательности

$$\exists N: \quad \forall n, k \geqslant N \Rightarrow |b_n - b_k| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.114)$$

Положим $k = N$, тогда из (7.114) следует, что

$$\forall n \geqslant N \Rightarrow b_N - \frac{\varepsilon}{3} < b_n < b_N + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.115)$$

(А также неравенство $|b_n| \leqslant |b_N| + \frac{\varepsilon}{3}$.) Таким образом, последовательность $\{b_n\}$ ограничена.

Положим

$$p_m = \inf_{n\geqslant m}\{b_n\}; \quad q_m = \sup_{n\geqslant m}\{b_n\}.$$

Ясно, что справедливо неравенство

$$p_m \leqslant p_{m+1} \leqslant q_{m+1} \leqslant q_m,$$

ибо при переходе от множества к его подмножеству точная нижняя грань не уменьшается, а точная верхняя грань не увеличивается. Значит, отрезки $[p_m, q_m]$ образуют систему вложенных отрезков. В приложении к гл. 3 была рассмотрена теорема о вложенных отрезках (см. теорему 3.44) и доказано существование единственной точки c, принадлежащей всем отрезкам. В нашем случае пока не известно, стремятся ли к нулю длины отрезков $[p_m, q_m]$. Поэтому можно утверждать лишь, что такая точка c существует, но пока не делаем вывод о ее единственности.

Итак,

$$\exists c: \quad \forall m \Rightarrow p_m \leqslant c \leqslant q_m. \quad (7.116)$$

Но $\forall n \geqslant m$

$$p_m = \inf_{n\geqslant m}\{b_n\} \leqslant b_n \leqslant \sup_{n\geqslant m}\{b_n\} = q_m. \quad (7.117)$$

Из (7.116) и (7.117) следует, что и c, и b_m принадлежат отрезку $[p_m, q_m]$, а тогда справедливо неравенство

$$|b_n - c| \leqslant q_m - p_m. \quad (7.118)$$

Но из (7.115) следует, что

$$\forall m \geqslant N \quad b_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \inf_{n \geqslant m} \{b_n\} = p_m \leqslant q_m = \\ = \sup_{n \geqslant m} \{b_n\} \leqslant b_N + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.119}$$

Из (7.119) вытекает, что

$$\forall m \geqslant N \Rightarrow q_m - p_m \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \tag{7.120}$$

Сравнив (7.118) и (7.120), находим, что

$$\forall n \geqslant N \quad |b_n - c| < \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad |b_n - c| < \varepsilon. \tag{7.121}$$

Но (7.121) есть не что иное, как определение предела. Значит,

$$\lim_{n \to \infty} b_n = c.$$

(Отсюда, в частности, следует единственность точки c.)

Важно подчеркнуть, что, если при доказательстве необходимости критерия Коши мы опирались лишь на определение предела, то в случае достаточности пришлось использовать теорему о вложенных отрезках, которая сама существенно опирается на строение действительной числовой оси.

Представим себе человека, которому известны только рациональные числа, и который ничего не слышал о числах иррациональных. Возьмем последовательность рациональных чисел, сходящуюся, например, к иррациональному числу $\sqrt{2}$. Какой вывод сделает этот человек? Он скажет, очевидно, что перед ним — фундаментальная последовательность, у которой нет предела.

Так что по тому, выполняется ли достаточность критерия Коши, можно делать определенные выводы о строении множества чисел, с которыми мы имеем дело. И вообще, наличие точной верхней грани у ограниченного множества, достаточность критерия Коши, существование предела у монотонной ограниченной последовательности — все это разные аспекты одного и того же фундаментального факта: действительная числовая ось сплошь заполнена действительными числами, в ней «отсутствуют дыры». На «высоконаучном языке» это называется «полнотой пространства действительных чисел».

А теперь вернемся к функциональным рядам. При доказательстве важнейших теорем об этих рядах выдвигалось требование наличия сходящейся мажоранты. Но такое требование можно ослабить. Для этого дадим следующее важное определение.

Определение 7.7. Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$ задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$. Будем говорить, что она *равномерно сходится* на $\langle a, b\rangle$ к $f(x)$ (обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \ \forall n \geqslant N \text{ и } \forall x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{7.122}$$

Заметим, что из простой поточечной сходимости последовательности следует наличие такого N в каждой точке. Но для каждого $x \in \langle a, b\rangle$ такое N будет, вообще говоря, свое и ни откуда не следует, что при заданном $\varepsilon > 0$ найдется единое N сразу для всех x, при которых выполняется (7.122). Требование равномерной сходимости гарантирует наличие такого единого N.

Определение 7.8. Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$ задан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Этот ряд называется *равномерно сходящимся* на $\langle a, b\rangle$, если на $\langle a, b\rangle$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм ($S_n(x) \rightrightarrows S(x)$).

Теорема 7.37 (признак Вейерштрасса). Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$ задан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Если у этого ряда существует на промежутке $\langle a, b\rangle$ сходящаяся мажоранта, то он равномерно сходится на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство. Действительно, по условию существует такой сходящийся ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, что

$$\forall n \quad \text{и} \quad \forall x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n. \tag{7.123}$$

Как и ранее, из (7.123) следует абсолютная сходимость ряда на $\langle a, b\rangle$. Далее, для любого n можно выписать соотношение между суммой, частичной суммой и остатком ряда:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

откуда

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)|. \tag{7.124}$$

Оценим модуль остатка

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \alpha_n. \qquad (7.125)$$

Но величина α_n в (7.125) — это остаток сходящегося числового ряда, который стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon. \qquad (7.126)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующее N. Тогда из (7.126), (7.125) и (7.127) следует, что

$$\forall n \geqslant N \quad \text{и} \quad \forall x \in \langle a, b\rangle \quad \Rightarrow \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что последовательность частичных сумм ряда равномерно сходится на $\langle a, b\rangle$, т. е. ряд равномерно сходится на $\langle a, b\rangle$. ■

Читателю предлагается самостоятельно ответить на вопрос: «Какие изменения нужно внести в доказательства теорем о функциональных рядах, если заменить требование существования сходящейся мажоранты на равномерную сходимость?».

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Основные определения

При изучении многих явлений природы не удается непосредственно найти закон, связывающий рассматриваемые величины, но легко установить зависимость между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными. При этом получим уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком производных или дифференциалов. Такие уравнения называются *дифференциальными*. Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Например:

$$x'(t) - tx(t) = t^2;$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = y\cos x;$$
$$x\,dx + y\,dy = dx.$$

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*. Например:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

В этой главе будут рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение 8.1. *Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид
$$\mathcal{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{8.1}$$
где $\mathcal{F}$ — некоторая функция.

Определение 8.2. Если левая часть уравнения (8.1) является многочленом относительно производной максимального порядка, то степень этого многочлена называется *степенью дифференциального уравнения.*

Например:
$$(y'')^5 + (y')^7 - y^5 + x^7 = 0$$
— уравнение второго порядка пятой степени.

Определение 8.3. *Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на некотором интервале. Эта функция должна иметь, по крайней мере, столько производных, каков порядок дифференциального уравнения.

Легко проверить, что для уравнения
$$\frac{dx}{dt} = x$$
$x = e^t$ будет решением, а для уравнения
$$y'' + y = 0$$
решениями будут $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Определение 8.4. Семейство решений, содержащее все без исключения решения этого дифференциального уравнения, называется *общим решением.* В случае дифференциального уравнения n-го порядка имеем семейство $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, зависящее от n произвольных постоянных. Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называется *частным решением*; график частного решения — *интегральной кривой* уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.* Дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, если его решения найдены в явном виде
$$y = y(x) \tag{8.2}$$
или определяются неявным уравнением
$$\Phi(x, y(x)) = 0. \tag{8.3}$$

Уравнения (8.2) и (8.3) называют *интегралами дифференциального уравнения.*

8.2. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Дифференциальные уравнения первого порядка первой степени можно разрешить относительно производной
$$y' = f(x, y). \tag{8.4}$$

Простейший вид такого уравнения $y' = f(x)$ рассматривался в интегральном исчислении. Тогда было установлено, что $y = \int f(x)\,dx + C$. Если известно $y(x_0) = x_0$, то $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Рассмотрим уравнение (8.4). Производная функции y' задает угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке с абсциссой x. Следовательно, уравнение (8.4) каждой точке (x, y) сопоставляет направление касательной к интегральной кривой в той же точке. Если это направление изобразить отрезком, то получится поле направлений. Задача интегрирования дифференциального уравнения заключается на геометрическом языке в том, чтобы найти кривые, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример 8.1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$. В каждой точке кроме $(0,0)$ угловой коэффициент касательной к интегральной кривой совпадает с $\dfrac{y}{x}$. Очевидно, что любая прямая с уравнением $y = cx$ обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной к ней в любой ее точке (x, y) равен $y' = c = \dfrac{y}{x}$. Следовательно, интегральными кривыми дифференциального уравнения будут прямые $y = cx$ (рис. 8.1).

В дальнейшем мы научимся решать некоторые простейшие типы дифференциальных уравнений. Однако рассчитывать на

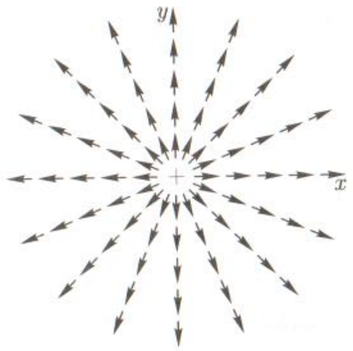

Рис. 8.1

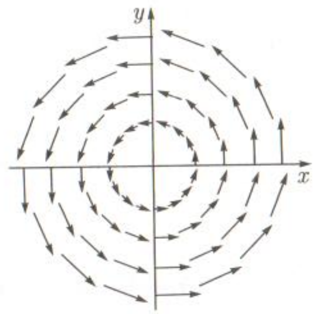

Рис. 8.2

то, что в общем случае нам удастся найти решения таких уравнений, не приходится. Поэтому при исследовании дифференциальных уравнений наметились два направления: *качественная теория*, когда мы, не имея аналитического выражения для решений, делаем выводы об их поведении, и *численные методы*, где мы приближенно вычисляем значения конкретного решения в конкретных точках с заданной точностью (эти направления будут рассмотрены на примере *метода изоклин* и *метода ломаных Эйлера*).

Определение 8.5. *Изоклинами* называются геометрические места точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

Поэтому уравнения изоклин имеют вид: $f(x, y) = k$. Любая интегральная кривая, пересекающая изоклину, имеет в точке пересечения угловой коэффициент касательной, равный k. Взяв достаточно большой набор изоклин и отметив на каждой их них кусочки касательных, можно представить поведение интегральных кривых подобно тому, как металлические опилки в магнитном поле выстраиваются в известном опыте вдоль силовых линий.

Пример 8.2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Здесь изоклинами являются линии $-\dfrac{x}{y} = k$, т. е. прямые $y = -\dfrac{1}{k}x$. Поскольку $k\left(-\dfrac{1}{k}\right) = -1$, поле направлений (которое имеет угловой коэффициент k) ортогонально изоклинам. Кажется правдоподобным, что интегральными кривыми будут окружности $x^2 + y^2 = c^2$ (рис. 8.2). Это подтверждается и аналитическими выкладками.

8.3. Метод ломаных Эйлера

Класс дифференциальных уравнений, для которых можно найти точное решение, весьма узок. Поэтому уже со времен Л. Эйлера используются приближенные методы при решении дифференциальных уравнений. Многие современные методы численного интегрирования представляют собой то или иное уточнение (улучшающее скорость приближения) метода ломаных Эйлера.

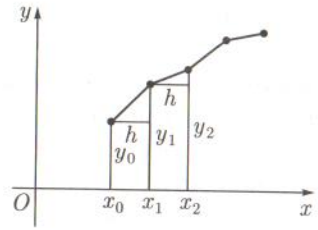

Рис. 8.3

Этот метод состоит в следующем. Для приближенного вычисления значения искомого решения $y(x)$ на отрезке $[x_0, b]$ отрезок делится на n равных отрезков длины h (шаг вычисления), $x_i = x_0 + hi$. Приближенные значения искомого решения в точке x_i обозначаются y_i. Для вычисления y_1 заменяем на $[x_0, x_1]$ искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0). Следовательно, $y_1 = y_0 + hy'_0$, где $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Аналогично, $y_2 = y_1 + hy'_1$, где $y'_1 = f(x_1, y_1)$, …, $y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}$, где $y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$ (рис. 8.3). При $h \to 0$ ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой. Можно показать, что в случае «достаточно хорошей» функции $f(x, y)$ для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что при шаге $h < \delta$ ломаная будет отличаться от графика истинного решения меньше, чем на ε на всем отрезке $[x_0, b]$. В результате получится ломаная, которая носит название ломаной Эйлера.

8.4. Теорема существования и единственности

Рассмотрим *задачу Коши*. Требуется найти решение $y(x)$ уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{8.5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y_0 = y(x_0). \tag{8.6}$$

Оказывается, что при некоторых предположениях относительно правой части уравнения (8.4) эта задача всегда разрешима и решение единственно.

Важность задачи Коши с физической точки зрения состоит в том, что условия, присоединенные к уравнению, описывающему какой-либо процесс, делают задачу «физически определенной».

Назовем множество A на плоскости *открытым*, если каждая точка $M_0(x_0, y_0)$ этого множества входит в него вместе с целой окрестностью $\mathrm{U}(M_0)$.

Примером открытого множества служит круг без граничной окружности.

Множество A называется *связным*, если любые две его точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Примером связного множества служит уже упомянутый круг без границы, а вот два изолированных друг от друга круга образуют *несвязное* множество.

Открытое связное множество D называется *областью.*

Теорема 8.1. Пусть в плоскости (x, y) существует область D, для которой выполняются следующие условия:

1) $f(x, y)$ непрерывна в области D;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна в области D;

3) $(x_0, y_0) \in D$.

Тогда существует $\delta > 0$, такое, что задача Коши имеет решение $y(x)$, определенное на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, при этом единственное.

Иначе, теорема утверждает, что через точку (x_0, y_0) обязательно проходит интегральная кривая, и только одна. Существование и единственность решения можно утверждать лишь на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Однако можно снова применить теорему, взяв за начальную точку $\big(x_0 + \delta, y(x_0 + \delta)\big)$. При этом нужно, чтобы решение не выходило за границу области D, т. е. точка $\big(x_0+\delta, y(x_0+\delta)\big)$ принадлежала бы области D. Аналогично можно продолжать решение и влево, через точку $\big(x_0 - \delta; y(x_0 - \delta)\big)$.

В качестве примера рассмотрим уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Такие уравнения мы научимся решать далее, а сейчас сообщим лишь, что все решения данного уравнения имеют вид $y = (x + C)^3$, где C — произвольная постоянная, и, кроме того, есть еще решение, тождественно равное нулю.

Если мы зададим начальное условие $y(0) = 1$, то найдется единственное решение, $y = (x + 1)^3$, удовлетворяющее этому

условию. Однако, если мы зададим начальное условие $y(1) = 0$, то обнаружим, что имеются два решения: $y = (x - 1)^3$ и $y \equiv 0$, которые удовлетворяют этому условию, т. е. налицо нарушение единственности. Причина в том, что у точки $(0, 1)$ имеется окрестность, в которой выполнены все условия теоремы 8.1. А у точки $(1, 0)$, как и у любой другой точки вида $x_0, 0$, в каждой окрестности найдутся точки (а именно, все точки, лежащие на оси Ox), в которых не существует частная производная по y от правой части исходного уравнения.

Отметим также, что решение, тождественно равное нулю, обладает тем свойством, что в каждой его точке нарушается единственность. Такие решения называются *особыми* (см. подразд. 8.19).

8.5. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 8.6. Уравнение вида
$$y' = f(x)g(y) \tag{8.7}$$
называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$
Тогда общим интегралом будет
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Если уравнение $g(y) = 0$ имеет действительные корни вида $y = b$, то функции $y \equiv b$ также будут решениями уравнения (8.7).

Пример 8.3.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$
Разделив переменные, интегрируем
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1,$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0.$$

Потенцируя, получим равенство $|y| = C_2|x|$ (где $C_2 > 0$), которое эквивалентно равенству $y = \pm C_2 x$ или $y = Cx$, где C может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Кроме того, при делении на y было потеряно решение $y = 0$. Поэтому общее решение данного уравнения $y = Cx$, причем C принимает любые значения.

Пример 8.4.

$$x(1+y^2)\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0.$$

Разделив переменные, интегрируем

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{x\,dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C_1;$$
$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C;$$
$$(1+y^2) = C(1+x^2).$$

Пример 8.5.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая $z = 2x + y$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2; \qquad \frac{dz}{dx} = z + 2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z+2} = dx; \quad \ln|z+2| = x + \ln C_1; \quad |z+2| = C_1 e^x;$$
$$z + 2 = Ce^x; \quad 2x + y = -2 + Ce^x;$$
$$y = Ce^x - 2x - 2,$$

где C может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Кроме того, при делении на $z+2$, было упущено решение $z + 2 = 0$. Поэтому общее решение данного уравнения $2x + y + 2 = Ce^x$, причем C принимает любые значения.

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называются *однородными* и приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда $y = xz$,

$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$. Подставив последнее равенство в уравнение, получим

$$f(z) = x\frac{dz}{dx} + z; \qquad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Заметим, что в случае $f(z) \equiv z$ однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. пример 8.3).

Пример 8.6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Вводим новую функцию $z = \dfrac{y}{x}$, тогда

$$y = xz; \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}; \quad z + x\frac{dz}{dx} = z + \operatorname{tg} z; \quad x\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z;$$
$$\operatorname{ctg} z\,dz = \frac{dx}{x}; \quad \ln|\sin z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad \sin z = Cx;$$
$$\sin\frac{y}{x} = Cx.$$

8.6. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, т. е. имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{8.8}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ будем считать непрерывными функциями переменной x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (8.8). Если $Q(x) = 0$, то уравнение (8.8) называется *линейным однородным*. В линейном однородном уравнении

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{8.9}$$

переменные разделяются:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C_1 \quad (C_1 > 0),$$

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \quad C \neq 0. \tag{8.10}$$

При делении на y было упущено решение $y = 0$, однако оно может быть включено в найденное семейство решений, если считать, что постоянная C может принимать и нулевое значение.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения (8.8) может быть использован метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее однородное уравнение (8.9), общее решение которого имеет вид (8.10). При постоянном C функция $Ce^{-\int P(x)\,dx}$ является решением однородного уравнения. Попробуем теперь найти решение неоднородного уравнения, считая C функцией от x, т. е. будем искать решение уравнения (8.8) в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}, \tag{8.11}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция. Далее, продифференцировав равенство (8.11), из (8.8) и (8.11) получим

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} +$$

$$+ C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

откуда

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}. \tag{8.12}$$

Из (8.12) следует, что

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C_1,$$

и тогда

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)\,dx} = C_1e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx. \tag{8.13}$$

Мы видим, что общее решение линейного неоднородного уравнения (8.8) равно сумме общего решения однородного уравнения (8.10) и частного решения неоднородного уравнения (8.8), получающегося из (8.13) при $C_1 = 0$.

Пример 8.7.

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x.$$

Решим сначала соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = 0; \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx;$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C;$$

$$y = C\sin x.$$

Варьируем постоянную:

$$y = C(x)\sin x; \quad y' = C'(x)\sin x + C(x)\cos x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x} = 2x\sin x;$$

$$C'(x)\sin x = 2x\sin x; \quad C'(x) = 2x;$$

$$C(x) = x^2 + C_1.$$

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C(x)\sin x = (x^2 + C_1)\sin x.$$

Некоторые дифференциальные уравнения путем замены переменной могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 1, \tag{8.14}$$

сводится к линейному заменой $z = y^{1-n}$. При этом

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{8.15}$$

Разделим уравнение (8.14) на y^n и получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{8.16}$$

Подставив (8.15) в (8.16), имеем

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

— линейное уравнение для функции z.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (8.8) можно решать другим способом. Сделаем подстановку $y=uv$, где $u(x)$ — частное решение однородного уравнения

$$y'+P(x)y=0.$$

Тогда

$$v(u'+P(x)u)+v'u=Q(x);$$
$$u'+P(x)u=0\to\frac{du}{u}=-P(x)\,dx;$$
$$\ln u=-\int P(x)\,dx+C_1;\quad u=e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Так как решение частное, константу C_1 можно положить равной нулю. Далее

$$v'=Q(x)e^{\int P(x)\,dx};\quad v=\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}+C;$$
$$y=uv=Ce^{-\int P(x)\,dx}+e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Таким образом, получено то же самое решение линейного уравнения другим путем.

Заметим, что решать уравнения Бернулли можно тем же самым способом, что и линейные, не приводя их предварительно к линейным подстановкой $z=y^{1-n}$.

Пример 8.8. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y'-\frac{y}{2x}=\frac{x^2}{y^2}.$$

Первый способ — вариация постоянной:

$$y'=\frac{y}{2x};\quad\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x};\quad\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln C_1;$$
$$y=C_1\sqrt{x};\quad y=C_1(x)\sqrt{x};$$

$$C_1'(x)\sqrt{x}+\frac{C_1(x)}{2\sqrt{x}}-\frac{C_1\sqrt{x}}{2x}=\frac{x^2}{C_1^2(x)x};$$
$$C_1^2C_1'(x)=\sqrt{x};\quad C_1^2\,dC_1=\sqrt{x}\,dx;\quad\frac{C_1^3}{3}=\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{C}{3};$$
$$C_1^3=2x^{3/2}+C;\quad y=C_1(x)\sqrt{x},$$

откуда

$$y^3=C_1^3(x)x^{3/2}=(2x^{3/2}+C)x^{3/2}=2x^3+Cx^{3/2}.$$

Второй способ — подстановка $y=uv$:

$$u'v+v'u-\frac{uv}{2x}=\frac{x^2}{u^2v^2};$$
$$v\Big(u'-\frac{u}{2x}\Big)+v'u=\frac{x^2}{u^2v^2};$$
$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{2x};\quad u=\sqrt{x};$$
$$v'\sqrt{x}=\frac{x^2}{xv^2};\quad v^2v'=\sqrt{x};\quad\frac{v^3}{3}=\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{C}{3};$$
$$v^3=2x^{3/2}+C;\quad y^3=u^3v^3;$$
$$y^3=x^{3/2}(2x^{3/2}+C).$$

Пример 8.9.

$$xy'+y'\sin y\sin\frac{y}{2}=\sin y.$$

Так как $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$, то можно видеть, что данное уравнение будет линейным относительно x как функции от y:

$$x+\sin y\sin\frac{y}{2}=x'\sin y,$$

или

$$x'\sin y-x=\sin y\sin\frac{y}{2}.$$

Решаем методом вариации произвольной постоянной:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sin y};\quad\ln|x|=\ln C\operatorname{tg}\frac{y}{2};$$
$$x=C(y)\operatorname{tg}\frac{y}{2}.\tag{8.17}$$

Подставим x из (8.17) в уравнение

$$C'(y)\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\sin y + C(y)\,\frac{\sin y}{2\cos^2\frac{y}{2}} - C(y)\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2} = \sin y\,\sin\frac{y}{2};$$

$$C'(y) = \cos\frac{y}{2}.$$

Тогда $C(y) = 2\sin\frac{y}{2} + C$, откуда получаем ответ

$$x = \left(2\sin\frac{y}{2} + C\right)\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}.$$

Пример 8.10. Уравнение

$$y'(x^3y - xy) = 1$$

является уравнением Бернулли

$$x' + xy = x^3y.$$

Делаем замену $x = uv$:

$$u'v + v'u + uvy = u^3v^3y;$$
$$v(u' + uy) + v'u = u^3v^3y.$$

Так как u — частное решение уравнения

$$u' + uy = 0,$$

то $\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$, откуда $u = \frac{1}{y}$.

Подставив полученное значение u в уравнение, получим

$$v'\,\frac{1}{y} = \frac{1}{y^3}\,v^3y;$$
$$\frac{dv}{v^3} = \frac{1}{y}\,dy.$$

Откуда

$$-\frac{1}{2v^2} = \ln Cy;$$
$$\frac{1}{v^2} = -2\ln Cy;$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2v^2} = -2y^2\ln Cy.$$

8.7. Уравнения в полных дифференциалах

Возможен случай, когда левая часть дифференциального уравнения

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{8.18}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Следовательно, уравнение (8.18) принимает вид

$$du = 0.$$

Если $y(x)$ является решением уравнения (8.18), то

$$du(x, y(x)) = 0,$$

следовательно

$$u(x, y(x)) = C, \tag{8.19}$$

где C — постоянная, и наоборот, если $y(x)$ обращает в тождество уравнение (8.19), то, продифференцировав это равенство, придем к уравнению (8.18). Таким образом, $u(x,y) = C$ является общим интегралом уравнения (8.18).

Для того чтобы левая часть уравнения (8.18) была полным дифференциалом du, необходимо в случае непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнение равенства (см. подразд. 5.1)

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{8.20}$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, откуда

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y).$$

Поскольку интегрирование здесь ведется по переменной x, то произвольная постоянная C не зависит от x, но является, вообще говоря, функцией от y. Продифференцировав найденную функцию по y, учтем, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, и получим уравнение для нахождения $C(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + C'(y) = Q(x,y).$$

Заметим, что $C(y)$ должно зависеть только от y, если уравнение (8.18) действительно в полных дифференциалах.

Пример 8.11.

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^3+3)\,dy=0.$$

Проверяем выполнение условий (8.20)

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)=1;\quad \frac{\partial}{\partial x}(x-y^2+3)=1.$$

Тогда

$$u(x,y)=\int(x+y+1)\,dx+C(y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y)=x-y^2+3.$$

Откуда

$$C'(y)=-y^2+3;\quad C(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+C_1$$

и

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1,$$

т. е. интегралом данного уравнения будет

$$3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C_2.$$

8.8. Уравнения порядка выше первого. Простейшие случаи понижения порядка

В некоторых простейших случаях удается решить уравнения высокого порядка, сводя их к уравнениям первого порядка.

1. Уравнение имеет вид

$$y^{(n)}=f(x).$$

Решение этого уравнения находится путем n-кратного интегрирования.

Пример 8.12.

$$y^{(5)}=\sin x;$$

$$y^{(4)}=-\cos x+C_1;$$

$$y'''=-\sin x+C_1x+C_2;$$

$$y''=\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3;$$

$$y'=\sin x+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4;$$

$$y=-\cos x+C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5.$$

В общее решение уравнения пятого порядка входят пять произвольных постоянных.

2. Уравнение второго порядка не содержит искомой функции, т. е. имеет вид

$$F(x,y',y'')=0.$$

Порядок этого уравнения может быть понижен с помощью введения новой функции $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$. Тогда уравнение $F(x,p,p')=0$ является уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $p(x)$. Если при этом его удается решить, то для нахождения решения y исходного уравнения необходимо решить опять же уравнение первого порядка $y'=p(x)$.

Пример 8.13.

$$xy''=y'\ln\frac{y'}{x}.$$

Положим $y'=p$, $y''=p'$, тогда

$$xp'=p\ln\frac{p}{x};\quad p'=\frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}$$

— однородное уравнение.

Делаем замену $\dfrac{p}{x}=t$, $p=xt$ и

$$\frac{dp}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t;\quad x\frac{dt}{dx}+t=t\ln t;$$

$$\frac{dt}{t(\ln t-1)}=\frac{dx}{x};\quad \frac{d(\ln t-1)}{\ln t-1}=\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln t-1|=\ln|x|+\ln C_1;\quad \ln t-1=C_1x;$$

$$\ln\frac{p}{x}=1+C_1x;\quad \frac{p}{x}=e^{1+C_1x};\quad p=xe^{1+C_1x};$$

$$y'=p;\quad y=\int xe^{1+C_1x}\,dx+C_2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$y=e\Big(\frac{x}{C_1}e^{C_1x}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x}\Big)+C_2.$$

3. Уравнение второго порядка явно не содержит независимой переменной x, т. е. имеет вид

$$F(y, y', y'') = 0.$$

В этом случае порядок уравнения можно понизить, сделав замену $p(y) = y'$,

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}p = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

Уравнение относительно p имеет вид $F_1(y, p, p') = 0$, т. е. является уравнением первого порядка.

Пример 8.14.

$$yy'' = y^2y' + (y')^2.$$

Полагая $p = y'$; $y'' = p'p$, получим

$$ypp' = y^2p + p^2;$$

$$p(yp' - y^2 - p) = 0. \quad (8.21)$$

Из (8.21)

$$\left[\begin{array}{l} p = 0; \\ yp' - p = y^2. \end{array}\right. \quad (8.22)$$

Из $p = 0$ следует $y = C$.

А второе уравнение

$$yp' - p = y^2$$

является линейным относительно p и p'. Решаем его методом вариации произвольной постоянной. Сначала решаем однородное уравнение

$$yp' - p = 0;$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$p = C(y)y \quad (8.23)$$

(см. пример 8.3).

Подставив (8.23) в (8.22) получим

$$yC'(y)y + yC(y) - C(y)y = y^2;$$

$$C'(y) = 1;$$

$$C(y) = y + C_1. \quad (8.24)$$

Из (8.24) и (8.23) получим

$$p(y) = y(y + C_1) = y^2 + C_1y.$$

Так как $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$, разделив переменные, получим

$$\frac{dy}{y^2 + C_1y} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{\left(y + \frac{C_1}{2}\right)^2 - \frac{C_1^2}{4}} = x + C_2;$$

$\dfrac{1}{C_1}\ln\left|\dfrac{y}{y + C_1}\right| = x + C_2$ — решение данного уравнения.

8.9. Линейные уравнения n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных и, следовательно, имеющее вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (8.25)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*. Если $a_0(x) \neq 0$, то, разделив на него, получим

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (8.26)$$

Самую важную теорему этого подраздела сформулируем без доказательства.

Теорема 8.2 (существования и единственности). Если коэффициенты $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то для каждого x_0 из интервала (a, b) и любого набора чисел $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ существует и только одно, решение $y(x)$ уравнения (8.26), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Теорема 8.3. Если $y(x)$ является решением уравнения (8.26), то и $Cy(x)$, где C — произвольная постоянная, является решением этого уравнения.

Доказательство.

$$(Cy)^{(n)}+p_1(x)(Cy)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)(Cy)'+p_n(x)(Cy)=$$
$$=C\big(y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y\big)=0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 8.4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (8.26), то $y_1(x)+y_2(x)$ — тоже решение этого уравнения.

Доказательство.

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+$$
$$+p_{n-1}(x)(y_1+y_2)'+p_n(x)(y_1+y_2)=$$
$$=\big(y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1\big)+$$
$$+\big(y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2\big)=0. \qquad \blacksquare$$

Следствием из теорем 8.3 и 8.4 является то, что линейная комбинация решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного уравнения (8.26) с произвольными постоянными коэффициентами $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ также является решением этого уравнения.

Если задана комплекснозначная функция действительного переменного $y(x)=u(x)+iv(x)$, то ее производной *по определению* считается выражение $y'(x)=u'(x)+iv'(x)$. Аналогично определяются и производные высших порядков.

Теорема 8.5. Если линейное однородное дифференциальное уравнение (8.26) с действительными коэффициентами $p_i(x)$ имеет комплексное решение $y(x)=u(x)+iv(x)$, то действительная $u(x)$ и мнимая $v(x)$ части этого решения в отдельности являются решениями уравнения (8.26).

Доказательство.

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=$$
$$=u^{(n)}+p_1(x)u^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)u'+p_n(x)u+$$
$$+i\big(v^{(n)}+p_1(x)v^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)v'+p_n(x)v\big)=0,$$

откуда $u^{(n)}+p_1u^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}u'+p_nu=0$ и $v^{(n)}+p_1v^{(n-1)}+\ldots+$ $+p_{n-1}v'+p_nv=0$, так как комплексная функция действительного переменного обращается тождественно в нуль тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части тождественно равны нулю. $\blacksquare$

Определение 8.7. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на $[a,b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что на $[a,b]$

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\ldots+\alpha_ny_n(x)\equiv 0, \qquad (8.27)$$

причем хотя бы одно из чисел $\alpha_i\neq 0$. Если же тождество (8.27) возможно только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* на $[a,b]$.

Пример 8.15. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на любом отрезке $[a,b]$, так как тождество $\alpha_1+\alpha_2x+\ldots+$ $+\alpha_{n+1}x^n=0$ возможно лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n+1}=0$, поскольку алгебраическое уравнение n-го порядка имеет не более n корней.

Пример 8.16. Функции $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$, где $k_i\neq k_j$ при $i\neq j$, линейно независимы на любом отрезке $[a,b]$. Допустим, что они линейно зависимы, тогда существуют $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1e^{k_1x}+\alpha_2e^{k_2x}+\ldots+\alpha_ne^{k_nx}=0, \qquad (8.28)$$

причем, например, $\alpha_n\neq 0$. Разделив (8.28) на e^{k_1x} и продифференцировав, получим

$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}=0. \qquad (8.29)$$

Разделив (8.29) на $e^{(k_2-k_1)x}$ и продифференцировав, получим

$$\alpha_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)e^{(k_n-k_2)x}=0.$$

Продолжив этот процесс, имеем

$$\alpha_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\cdots(k_n-k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x}=0. \qquad (8.30)$$

Но $\alpha_n\neq 0$, $k_i\neq k_j$ при $i\neq j$, следовательно, (8.30) невозможно.

Замечание. Доказательство остается в силе и при комплексных коэффициентах k_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Теорема 8.6. Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a,b]$, то на том же отрезке определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix},$$

называемый определителем Вронского, равен нулю: $W(x)=0$.

Доказательство. Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a, b]$, то найдутся $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \tag{8.31}$$

на $[a, b]$, причем не все $\alpha_i = 0$. Дифференцируя равенство (8.31) $(n-1)$ раз, получим:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0; \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0. \end{cases}$$

Эта система, линейная и однородная по α_i, имеет нетривиальное решение (не все $\alpha_i = 0$) при $x \in [a, b]$. Следовательно, определитель системы, которым является $W(x)$, тождественно равен нулю в каждой точке x, принадлежащей $[a, b]$. ■

Теорема 8.7. Если линейно независимые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 \tag{8.32}$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$, то $W(x)$ не может обращаться в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Допустим, что в некоторой точке x_0, принадлежащей $[a, b]$, $W(x_0) = 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0; \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Решения системы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равны нулю, так как определитель системы равен нулю. Тогда $y(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$ является решением однородного уравнения $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$, удовлетворяющим в силу системы нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Таким же начальным условиям удовлетворяет нулевое решение $y \equiv 0$, но по теореме о существовании и единственности решения y и нулевое решение совпадают, т. е. $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0$, следовательно, функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, вопреки предположению о линейной независимости системы y_i. ■

Замечание. В теореме 8.7 обязательным является условие о том, что функции y_i — решения уравнения (8.26); если это условие не выполняется, то и теорема может быть неверна. Действительно, рассмотрим две функции:

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & 1 < x \le 2; \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1; \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Очевидно

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0$$

на $[0, 2]$. Однако y_1 и y_2 линейно независимы, так как из $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 8.8. Общим решением при $a \le x \le b$ линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ является линейная комбинация $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ любых n линейно независимых на том же отрезке частных решений $y_i(x)$ с произвольными постоянными коэффициентами C_i.

Замечание. Иначе, нужно доказать, что любая линейная комбинация $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ линейно независимых решений также является решением этого уравнения, и любое решение можно представить в таком виде.

Доказательство. Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решением уравнения (8.26), то, как было установлено ранее, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ также есть решение данного уравнения.

Теперь докажем, что $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ является общим решением уравнения (8.26), т. е. содержит все частные решения этого уравнения. Зададим произвольные начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, где $x_0 \in [a,b]$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0; \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}. \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$, отличный от нуля по теореме 8.7. Таким образом, задав начальные условия, можно единственным образом найти коэффициенты C_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Тогда $y=\sum\limits_{i=1}^{n} C_iy_i$ будет решением уравнения (8.26), удовлетворяющим данным начальным условиям. ■

Следствие. Максимальное число линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения равно его порядку.

Определение 8.8. Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называются *фундаментальной системой решений* (ФСР).

Дадим способ построения ФСР. Задается n^2 чисел $\alpha_i^{(k)}$, где $i=1,2,\ldots,n$, $k=0,1,\ldots,n-1$, удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(0)} & \alpha_2^{(0)} & \ldots & \alpha_n^{(0)} \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} & \ldots & \alpha_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решения $y_i(x)$ определим начальными значениями $y_i^{(k)}(x_0)=\alpha_i^{(k)}$ для некоторого $x_0 \in [a,b]$. По теореме 8.2 они существуют и образуют фундаментальную систему, так как их определитель Вронского $W(x) \neq 0$ в точке x_0, следовательно, по теореме 8.7 функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы. Так как существует бесконечно много определителей, отличных от нуля, для каждого уравнения существует бесконечно много ФСР.

8.10. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Теперь рассмотрим уравнения второго порядка. Уравнение вида

$$y''+py'+qy=0 \tag{8.33}$$

является линейным однородным уравнением второго порядка, p, q — постоянные. Теоремы 8.2 — 8.8 верны и для этого уравнения.

Будем искать решение в виде e^{kx}. Это единственная функция, производная которой пропорциональна ей: $y=e^{kx}$; $y'=ke^{kx}$; $y''=k^2e^{kx}$. Подставим ее в уравнение (8.33): $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$, $e^{kx}\neq 0$. Получим $k^2+pk+q=0$. Это уравнение назовем *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (8.33).

При нахождении его корней возможны три случая.

1. Дискриминант $D=p^2-4q>0$ — уравнение имеет два действительных различных корня $k_1 \neq k_2$. По теореме 8.8 общее решение уравнения (8.33) имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где y_1 и y_2 составляют фундаментальную систему. Из примера 8.16 известно, что e^{k_1x} и e^{k_2x} линейно независимы при $k_1 \neq k_2$. Следовательно, общее решение уравнения (8.33) будет иметь вид

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

2. Дискриминант $D=0$ — уравнение имеет два равных корня $k=k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$. В качестве первой функции фундаментальной системы решений выберем $y_1=e^{kx}$. Покажем, что в качестве y_2 можно взять xe^{kx}. Действительно,

$$y=xe^{kx};$$
$$y'=e^{kx}+kxe^{kx};$$
$$y''=2ke^{kx}+k^2xe^{kx}.$$

Подставим в уравнение (8.33)

$$2ke^{kx}+k^2xe^{kx}+pe^{kx}+pkxe^{kx}+xqe^{kx}=$$
$$=(k^2+pk+q)xe^{kx}+e^{kx}(2k+p)=0.$$

Выражение в первой скобке равно нулю, так как k — решение характеристического уравнения, выражение во второй скобке также равно нулю, так как $k=-\dfrac{p}{2}$.

Кроме того, y_1 и y_2 линейно независимы. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} = e^{2kx}(1+kx) - kxe^{2kx} = e^{2kx} > 0$$

для любого x. Значит, в этом случае общее решение

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} x.$$

3. Дискриминант $D < 0$ — уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. В качестве ФСР выберем $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Тогда общее решение имеет вид $y = Ay_1 + By_2$.

Упростим вид общего решения. По формулам Эйлера (см. подразд. 7.7) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$; $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} y = Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}) = \\ = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + iA\sin\beta x + B\cos\beta x - iB\sin\beta x) = \\ = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \end{aligned}$$

Пример 8.17.

$$y'' + 2y' - 24y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения $k^2 + 2k - 24 = 0$ являются $k_1 = -6$ и $k_2 = 4$. Значит, общим решением будет $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{4x}$.

Пример 8.18.

$$y'' + 8y' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 8k + 16 = 0$ имеет один корень $k = -4$ кратности два. Значит, общим решением будет $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$.

Пример 8.19.

$$y'' + y' + y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения $k^2+k+1 = 0$ являются $k_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $k_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Значит, общим решением будет

$$y = e^{-x/2}\left(C_1\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + C_2\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right).$$

Каждому корню характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ соответствует определенное решение дифференциального уравнения (8.33). Доказано, что таким же образом можно

решать и линейные уравнения с постоянными коэффициентами более высокого порядка.

Пример 8.20.

$$y''' + y'' + y + 1 = 0.$$

У характеристического уравнения $k^3 + k^2 + k + 1 = 0$ есть один вещественный корень $k_1 = -1$ кратности 1 и пара комплексно-сопряженных корней $k_2 = i$, $k_3 = -i$. Значит, общим решением будет

$$y = C_1e^{-x} + C_2\sin x + C_3\cos x.$$

Пример 8.21.

$$y^{IV} - 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет четыре корня: $k_{1,2} = \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Следовательно, решением данного уравнения будет функция

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x.$$

Пример 8.22.

$$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Ранее было доказано, что если характеристическое уравнение для дифференциального уравнения второго порядка имеет кратный корень k, то решением дифференциального уравнения будут функции e^{kx} и xe^{kx}. Можно доказать, что если характеристическое уравнение для дифференциального уравнения n-го порядка имеет корень k кратности r, то решениями этого дифференциального уравнения (причем, линейно независимыми) будут функции $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$.

Характеристическое уравнение

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = 0$$

имеет корни $k_1 = 0$, $k_{2,3,4} = 1$, поэтому общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x.$$

8.11. Решение линейных неоднородных уравнений

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (8.34)$$

Теорема 8.9. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения неоднородного уравнения (8.34), то $y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Доказательство.

$$(y_1 - y_2)'' + p(y_1 - y_2)' + q(y_1 - y_2) =$$
$$= y_1'' + py_1' + qy_1 - (y_2'' + py_2' + qy_2) = f - f = 0.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y = y_0 + \bar{y}$, где y_0 — общее решение однородного уравнения; $\bar{y}$ — частное решение неоднородного уравнения. Будем искать решение $\bar{y}$ только для функций $f(x)$ специального вида.

1. Правая часть — многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0:$$

а) если $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, то $\bar{y}$ будем искать в виде: $\bar{y} = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_n \neq 0$. Здесь $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — неизвестные коэффициенты. Их можно найти, подставив $\bar{y}$ в уравнение;

б) если $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, то $\bar{y}$ будем искать в виде: $\bar{y} = x(b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)$. В данном случае в уравнении (8.34) $q = 0$, и степень многочлена, стоящего в правой части, равна степени y', поэтому $\bar{y}$ должен иметь степень, на единицу бо́льшую, чем степень $f(x)$;

в) если $k_1 = k_2 = 0$, то уравнение имеет вид $y'' = f(x)$ и его можно решить двойным интегрированием. ■

Пример 8.23.

$$y'' - y' = x^2 - 3.$$

Сначала найдем общее решение y_0 однородного уравнения

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, следовательно, $y_0 = C_1 + C_2 e^x$. Частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\bar{y} = x(ax^2 + bx + c)$. Тогда

$$\bar{y}' = 3ax^2 + 2bx + c; \quad \bar{y}'' = 6ax + 2b.$$

Подставив полученные решения в уравнение, получаем

$$6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c = x^2 - 3.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -3a = 1; \\ 6a - 2b = 0; \\ 2b - c = -3. \end{cases}$$

Решением этой системы являются числа $a = -\dfrac{1}{3}$; $b = -1$ и $c = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 + x.$$

2. Правая часть — экспонента

$$f(x) = Ae^{\alpha x}:$$

а) если $k_1 \neq \alpha$, $k_2 \neq \alpha$, то $\bar{y}$ будем искать в виде: $\bar{y} = ae^{\alpha x}$, где a — неизвестный коэффициент;

б) если $k_1 = \alpha$, $k_2 \neq \alpha$, то $\bar{y}$ будем искать в виде: $\bar{y} = xae^{\alpha x}$;

в) если $k_1 = k_2 = \alpha$, то будем искать $\bar{y}$ в виде: $\bar{y} = ax^2 e^{\alpha x}$.

Пример 8.24.

$$y'' + y = 2e^{-2x}.$$

Сначала решим однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Характеристический многочлен $k^2 + 1 = 0$ имеет пару комплексно-сопряженных корней $k_1 = i$ и $k_2 = -i$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\bar{y} = ae^{-2x}$. Тогда

$$\bar{y}' = -2ae^{-2x}; \quad \bar{y}'' = 4ae^{-2x}.$$

Подставив данное решение в уравнение, получаем

$$4ae^{-2x} + ae^{-2x} = 2e^{-2x}.$$

Сократив на экспоненту, имеем уравнение $5a = 2$, откуда $a = \dfrac{2}{5}$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{5} e^{-2x}.$$

3. Правая часть — «комплексная экспонента»

$$f(x) = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x):$$

а) Если $k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$, то будем искать $\bar{y}$ в виде $\bar{y} = e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$, где a и b — неизвестные коэффициенты;

б) если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то будем искать $\bar{y}$ в виде $\bar{y} = xe^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$.

Замечание. Если $f(x)$ является суммой функций указанного вида, то частное решение ищется в виде суммы частных решений для каждого слагаемого.

Пример 8.25.

$$y'' - 3y' = x^2 - 2e^{3x} + 2\sin 2x.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Тогда частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = ax^3 + bx^2 + cx + dxe^{3x} + e\sin 2x + f\cos 2x;$$

$$\bar{y}' = 3ax^2 + 2bx + c + de^{3x} + 3dxe^{3x} + 2e\cos 2x - 2f\sin 2x;$$

$$\bar{y}'' = 6ax + 2b + 6de^{3x} + 9dxe^{3x} - 4e\sin 2x - 4f\cos 2x.$$

Подставим решение в исходное уравнение и получим

$$6ax + 2b + 6de^{3x} + 9dxe^{3x} - 4e\sin 2x - 4f\cos 2x -$$
$$-9ax^2 - 6bx - 3c - 3de^{3x} - 9dxe^{3x} - 6e\cos 2x + 6f\sin 2x =$$
$$= x^2 - 2e^{3x} + 2\sin 2x.$$

В итоге имеем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} -9a = 1; \\ 6a - 6b = 0; \\ 2b - 3c = 0; \\ 3d = -2; \\ -4e + 6f = 2; \\ -4f - 6e = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{9}, \quad b = -\dfrac{1}{9}; \\ c = -\dfrac{2}{27}, \quad d = -\dfrac{2}{3}; \\ e = -\dfrac{2}{13}, \quad f = \dfrac{3}{13}. \end{cases}$$

Таким образом, получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{27} - \frac{2x}{3}e^{3x} - \frac{2}{13}\sin 2x + \frac{3}{13}\cos 2x.$$

Замечания. 1. Если правая часть линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$e^{px}(a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \ldots + a_0),$$

то, если p не является корнем характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$\bar{y} = e^{px}(b_s x^s + \ldots + b_0).$$

Если же p является корнем характеристического уравнения кратности α, то частное решение уравнения следует искать в виде

$$\bar{y} = x^{\alpha}e^{px}(b_s x^s + \ldots + b_0).$$

2. Пусть правая часть линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$e^{px}(P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx),$$

где один из многочленов (P_s или Q_s) степени s, а другой — степени не выше s, тогда, если $p \pm iq$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$\bar{y} = e^{px}(A_s(x)\cos qx + B_s(x)\sin qx),$$

а если $p \pm iq$ являются корнями характеристического уравнения кратности α, то частное решение уравнения следует искать в виде

$$\bar{y} = x^{\alpha}e^{px}(A_s(x)\cos qx + B_s(x)\sin qx),$$

где $A_s(x)$ и $B_s(x)$ — многочлены степени s.

Пример 8.26.

$$y'' - y = e^x(x^2 - 1).$$

Корни характеристического уравнения $k = \pm 1$, тогда

$$\bar{y} = xe^x(b_2x^2 + b_1x + b_0).$$

Пример 8.27.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5).$$

Трехкратным корнем характеристического уравнения будет -1, тогда частное решение нужно искать в виде

$$\bar{y} = x^3e^{-x}(b_1x + b_0).$$

Пример 8.28.

$$y^{IV} + 2y'' + y = \sin x.$$

Так как числа $\pm i$ являются корнями характеристического уравнения кратности 2, то

$$\bar{y} = x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Пример 8.29.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x).$$

Так как числа $-1 \pm i$ являются однократными корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = xe^{-x}\big((a_1x + a_0)\cos x + (b_1x + b_0)\sin x\big).$$

8.12. Огибающая семейства кривых*

Уравнение кривой кроме переменных x и y, вообще говоря, содержит некоторые постоянные, от которых зависят размеры, вид и положение этой кривой.

Например, геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2, \tag{8.35}$$

есть окружность с центром в точке $(a, 0)$ радиуса R. Если a принимает различные значения, а R — постоянное, то получим семейство окружностей с центрами на оси Ox и одинакового радиуса. В подобных случаях говорят, что задано семейство кривых, зависящих от параметра. Чтобы показать, что a входит в уравнение в качестве переменного параметра, условились подобные уравнения записывать следующим образом:

$$\mathcal{F}(x, y, a) = 0. \tag{8.36}$$

Все кривые семейства (8.36) могут касаться одной или нескольких линий. В таком случае эту кривую (или эти несколько кривых) называют *огибающей данного семейства*. Предположим, что кривая, заданная уравнениями в параметрическом виде

$$x = \varphi(a); \quad y = \psi(a), \tag{8.37}$$

касается каждой из кривых семейства (8.36), причем параметр a один и тот же как в уравнениях (8.37), так и в уравнении (8.36).

Из уравнений (8.37) тангенс угла наклона касательной к кривой в любой ее точке равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)},$$

а тангенс угла наклона касательной к кривой из уравнения (8.36) определяется из соотношения

$$\mathcal{F}'_x(x, y, a)\,dx + \mathcal{F}'_y(x, y, a)\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathcal{F}'_x(x, y, a)}{\mathcal{F}'_y(x, y, a)}.$$

В таком случае

$$\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} = -\frac{\mathcal{F}'_x(x, y, a)}{\mathcal{F}'_y(x, y, a)}$$

или

$$\mathcal{F}'_x(x, y, a)\varphi'(a) + \mathcal{F}'_y(x, y, a)\psi'(a) = 0. \tag{8.38}$$

По предположению, при всяком значении a кривая (8.37) касается соответствующей этому значению a кривой семейства (8.36), поэтому для всякого значения a координаты x и y, определяющиеся уравнениями (8.37), будут удовлетворять уравнению соответствующей кривой (8.36). Следовательно, для всякого значения a справедливо равенство

$$\mathcal{F}(\varphi(a), \psi(a), a) = 0, \tag{8.39}$$

получаемое подстановкой x и y из уравнений (8.37) в уравнение (8.36). Поэтому полная производная левой части (8.39) по a должна быть равна нулю для всякого значения a, т. е.

$$\mathcal{F}'_x(x, y, a)\,\varphi'(a) + \mathcal{F}'_y(x, y, a)\,\psi'(a) + \mathcal{F}'_a(x, y, a) = 0,$$

где $x = \varphi(a)$; $y = \psi(a)$. Принимая во внимание равенство (8.38), получим

$$\mathcal{F}'_a(x, y, a) = 0. \tag{8.40}$$

Отсюда заключаем, что координаты точек огибающей удовлетворяют уравнениям (8.36) и (8.40):

$$\mathcal{F}(x, y, a) = 0; \quad \mathcal{F}'_a(x, y, a) = 0, \tag{8.41}$$

т. е. параметрические уравнения огибающей могут быть найдены решением уравнений (8.41) относительно x и y, откуда x и y определяются как функции параметра a.

Рассмотрим приведенный ранее пример с семейством окружностей (8.35). Продифференцировав (8.35) по a, считая x и y постоянными, получим систему уравнений для нахождения огибающей семейства (8.35):

$$\begin{cases} -2(x - a) = 0; \\ (x - a)^2 + y^2 = R^2, \end{cases}$$

откуда $y^2 = R^2$, или $y = \pm R$ — уравнения двух прямых, параллельных оси Ox, которые касаются всех окружностей, заданных уравнением (8.35), т. е. являются огибающими данного семейства.

Замечание. Уравнения (8.41) иногда могут определять и другие кривые. Однако, если хотя бы одна из производных $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}$ отлична от нуля и обе локально ограничены в точках, удовлетворяющих уравнениям (8.41), то эти уравнения определяют только огибающую.

8.13. Уравнения Клеро*

Рассмотрим уравнение

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{8.42}$$

Положив $y' = p$, продифференцируем это равенство по x:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$\frac{dp}{dx}(x + \varphi'(p)) = 0,$$

откуда или $\dfrac{dp}{dx} = 0$, или $x + \varphi'(p) = 0$. В первом случае получаем $p = C = \mathrm{const}$, во втором — $x = -\varphi'(p)$. Из первого равенства и уравнения (8.42) получаем

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{8.43}$$

— общее решение уравнения Клеро, а из системы

$$\begin{cases} y = Cx + \varphi(C); \\ x = -\varphi'(C) \end{cases} \tag{8.44}$$

находим еще одно решение.

Заметим, что система (8.44) совпадает с параметрическими уравнениями огибающей (8.41), где в роли параметра a выступает C, а $\mathcal{F}(x, y, C) = y - Cx - \varphi(C)$. В подразделе 8.12 было дано также достаточное условие того, чтобы система (8.41) определяла только огибающую: хотя бы одна из производных $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}$

отлична от нуля и обе ограничены. В данном случае $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} = 1 \neq 0$, $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = -C$, значит, уравнение (8.44) задает огибающую, которая иногда может выродиться в точку, если семейство $y = Cx + \varphi(C)$ является пучком прямых, т. е. прямых, проходящих через одну точку.

Пример 8.30.

$$y = xy' - (y')^2. \tag{8.45}$$

Положим $y' = p$. Уравнение принимает вид $y = px - p^2$. Продифференцируем его по x:

$$p = p + xp' - 2pp';$$

$$p'(x - 2p) = 0;$$

$$p' = 0; \quad x = 2p.$$

Из первого равенства и уравнения (8.45) получаем $y = Cx - C^2$. Второе равенство приводит к системе

$$\begin{cases} x = 2p; \\ y = px - p^2, \end{cases}$$

откуда $p = \dfrac{x}{2}$ или $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{4}$. Решение уравнения (8.45) $y = \dfrac{x^2}{4}$ является огибающей семейства прямых $y = Cx - C^2$.

Пример 8.31.

$$y = xy' + y'.$$

Дифференцируя уравнение, получим

$$y' = y' + xy'' + y''.$$

Обозначив $y' = p$, $y'' = p'$, имеем

$$p'(x + 1) = 0,$$

откуда $p = C$ и $x = -1$.

Таким образом, $y = Cx + C$ — общее решение уравнения Клеро — представляет собой пучок прямых, проходящих через точку $x = -1$. В этом случае огибающей семейства прямых нет.

8.14. Системы линейных дифференциальных уравнений

Решением системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y); \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases} \tag{8.46}$$

называется пара дифференцируемых на интервале (t_1, t_2) функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$, которые при подстановке в систему (8.46) обращают оба уравнения в тождества. Общее решение системы (8.46) содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Если заданы начальные условия

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0; \\ y(t_0) = y_0, \quad t \in (t_1, t_2), \end{cases} \tag{8.47}$$

то можно определить C_1 и C_2, т. е. найти частное решение.

Если на плоскости задать декартову систему координат, то решения системы (8.46)

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases} \tag{8.48}$$

можно рассматривать как систему параметрически заданных кривых, зависящих от двух параметров C_1 и C_2, называемых *интегральными кривыми.*

При некоторых условиях на функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ кривые (8.48) не пересекаются. Таким образом, если задать начальные условия (8.47), то получим кривую семейства (8.48), проходящую через точку (x_0, y_0).

Существует и другая интерпретация решений системы (8.46), очень удобная в различных прикладных задачах, где параметр t — время, а $(x(t), y(t))$ — координаты точки на плоскости (x, y). Тогда решение (8.48) определяет закон движения точки по некоторой траектории в зависимости от изменения t, а $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$ — координаты скорости той же точки.

При такой интерпретации система (8.46) называется *динамической системой*, плоскость (x, y) — *фазовой плоскостью*, а каждая кривая семейства (8.48) — *фазовой кривой.*

Линейные системы с постоянными коэффициентами можно решать сведением их к линейным уравнениям 2-го порядка.

Пример 8.32.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Дифференцируем второе уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt};$$

$$x = \frac{1}{2}\Big(\frac{dy}{dt} + y\Big);$$

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\,\frac{dy}{dt} - y - \frac{dy}{dt};$$

$$y'' - 2y' + y = 0;$$

$$y = e^t(C_1 + C_2 t);$$

$$x = \frac{1}{2}e^t(C_1 + C_2 t + C_2) + \frac{e^t}{2}(C_1 + C_2 t) =$$
$$= \frac{e^t}{2}(2C_1 + 2C_2 t + C_2) = e^t\Big(C_1 + \frac{C_2}{2} + C_2 t\Big).$$

Таким образом, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^t\Big(C_1 + \dfrac{C_2}{2} + C_2 t\Big); \\ y = e^t(C_1 + C_2 t). \end{cases}$$

Точно так же можно решать и линейные системы с постоянными коэффициентами более высокого порядка.

Пример 8.33.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x.$$

Дважды дифференцируя первое уравнение, получим

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2} = x;$$

$$x^{(4)} - x = 0;$$

$$k^4 - 1 = 0; \quad k_{1,2} = \pm 1; \quad k_{3,4} = \pm i;$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t; \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t, \end{cases}$$

так как $y = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

8.15. Уравнение радиоактивного распада

Основной закон радиоактивного распада состоит в том, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству нераспавшегося вещества в данный момент времени. Если обозначить $x(t)$ количество вещества в момент времени t, то этот закон можно выразить в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -px,$$

где p зависит от вида радиоактивного вещества и выбора системы единиц. Знак «$-$» означает, что количество вещества убывает, т. е. скорость отрицательна (x — положительно, $p > 0$). Пусть при $t = 0$ $x(0) = x_0$. Решим это уравнение:

$$\frac{dx}{x} = -p\,dt;$$

$$\ln|x| = -pt + C_1;$$

$$x = Ce^{-pt}.$$

Учитывая начальное условие $x_0 = C$, имеем

$$x = x_0 e^{-pt} \tag{8.49}$$

— закон радиоактивного распада.

Найдем период полураспада. Периодом полураспада называют время T, за которое количество вещества уменьшается вдвое по сравнению с первоначальным значением:

$$x(T) = \frac{1}{2}x_0; \quad \frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-pT};$$

$$T = \frac{\ln 2}{p}.$$

Для различных радиоактивных веществ время T колеблется от долей секунды до миллиардов лет. Уравнение (8.49) описывает процесс радиоактивного распада приближенно. Когда вещества становится мало, начинают действовать другие законы, поэтому с этим уравнением связывают только время полураспада, но не время полного распада.

8.16. Закон роста биомассы

Если живую клетку поместить в питательную среду, то она начнет размножаться. В качестве количественной характеристики ее роста принимают так называемую концентрацию биомассы, измеряемую сухой массой клеток, находящихся в 1 см^3 раствора. Следовательно, единицей измерения служит 1 мг/см^3. Будем считать, что прирост биомассы за малый промежуток времени пропорционален количеству биомассы в данный момент времени и длине этого малого промежутка. Это согласуется с опытными данными для большинства одноклеточных организмов. Пусть x_0 — количество биомассы при $t = 0$. Будем измерять последовательно ее количество через очень малые промежутки времени фиксированной длины $t = h$. Тогда получим последовательность значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где x_n — количество биомассы в момент времени t_n. Закон роста биомассы задается с помощью уравнения

$$x_{n+1} - x_n = khx_n, \tag{8.50}$$

где k — коэффициент пропорциональности, не зависящий ни от n, ни от t.

Уравнение (8.50) называется *рекуррентным уравнением*, т. е. уравнением, связывающим значение члена некоторой числовой последовательности со значениями одного или нескольких предыдущих членов этой же последовательности. Отсюда и название: *рекуррентные*, т. е. «бегущие назад». Решением рекуррентного уравнения называется числовая последовательность, все члены которой удовлетворяют этому уравнению. Решить рекуррентное уравнение — значит найти все его решения. Преобразуем (8.50) иначе:

$$x_{n+1} = (kh + 1)x_n, \tag{8.51}$$

или, обозначая $kh + 1 = q$:

$$x_{n+1} = qx_n, \tag{8.52}$$

где q не зависит от номера n. Зная x_0, из (8.52) найдем x_1, x_2 и т. д. Физически имеют смысл только решения с условием $x_0 > 0$. Таким образом, для любого x_0 найдем последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

В общем случае решить рекуррентное уравнение трудно. В данном случае:

$$x_n = q^n x_0$$

— геометрическая прогрессия.

Как любая математическая модель, построенная модель описывает процесс приближенно. На самом деле моделей каждого процесса может быть много, а выбор той или иной конкретной модели зависит от целей моделирования данного явления и требуемой точности.

Построим теперь другую модель роста биомассы. В предыдущем случае нас интересовали значения x_n концентрации биомассы в дискретные моменты времени t_n. Теперь нас будут интересовать значения этой концентрации $x(t)$ в произвольный момент времени t. В соответствии с вышеизложенным получим уже не рекуррентное, а дифференциальное уравнение. Для того чтобы его получить, будем считать, что закон роста (8.51) является приближенным законом, который выполняется тем точнее, чем за меньший промежуток времени его рассматривать.

Перепишем (8.52) следующим образом:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = kx_n, \tag{8.53}$$

и заметим, что в (8.53) слева стоит выражение

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

В предположении, что все протекающие процессы достаточно гладкие, заметим, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Поэтому, заменив в (8.53) $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ на $\dfrac{dx}{dt}$, а x_n — на $x(t)$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{при} \quad x(0) = x_0. \tag{8.54}$$

Откуда

$$\frac{dx}{x} = k\,dt; \quad \ln|x| = kt + C_1;$$

$$\ln x_0 = C; \quad x = x_0 e^{kt}.$$

Может возникнуть вопрос: «Зачем от рекуррентного уравнения (8.50) переходить к дифференциальному уравнению (8.54)?» Подумаем, какое уравнение труднее решить:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = x_n^2 + 1 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = x^2 + 1\,?$$

Что проще вычислить: $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3}$ или $\displaystyle\int_1^{100} \frac{dx}{x^3}$? Ответ уже известен. Поэтому предпочтительнее сводить все к дифференциальному уравнению.

Коэффициент k называется *удельной скоростью роста*. Время между двумя последовательными делениями клетки называется *временем репродукции*. Клетки, вообще говоря, размножаются не одновременно, но в среднем время репродукции должно совпадать со временем удвоения биомассы T. Тогда $x(T) = 2x_0$, $2x_0 = x_0 e^{kT}$, $T = \dfrac{\ln 2}{k}$, т. е. T не зависит от x_0. На самом деле биомасса, конечно, меняется дискретно, но мы ведем измерение в единицах, значительно превосходящих массу одной клетки. Заменяем ступенчатую линию на гладкую кривую, что естественно, если ступеньки малы. В уравнении (8.54) можно считать известным $x(t)$ не при $t = 0$, а при $t = t_0$, тогда решение имеет вид $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$.

Предыдущее уравнение было получено в предположении, что ресурсы питания неограничены и колония не подавляется никаким другим видом. Более точное описание развития колонии клеток дает уравнение Ферхгюльста — Перла, полученное в 1845 г. Оно учитывает «эффект самоотравления» популяции или внутривидовую борьбу в популяции. Этот эффект, снижающий скорость роста популяции, объясняется следующими причинами: конкурентной борьбой за пищу, распространением инфекций из-за тесноты и т. д. При этом

$$\Delta x = kx\Delta t - \delta x^2 \Delta t,$$

x^2 обосновывается следующим образом: величина $\delta x^2 \Delta t$ отражает снижение скорости роста популяции из-за внутривидовой конкуренции. Но конкуренция тем выше, чем больше встреч между особями, а количество встреч пропорционально x^2, δ называют коэффициентом *самоотравления*.

Таким образом,

$$\frac{dx}{dt} = kx\Big(\frac{k/\delta - x}{k/\delta}\Big).$$

Обозначив $k/\delta = h$, получим

$$\frac{dx}{dt} = kx\Big(\frac{h - x}{h}\Big).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{h\,dx}{x(h-x)} = k\,dt, \quad \text{или} \quad \ln\Big|\frac{x}{h-x}\Big| = kt + C_1,$$

или

$$\frac{x}{h-x} = Ce^{kt}. \tag{8.55}$$

Отсюда $x = -xCe^{kt} + hCe^{kt}$. При $t = 0$ $x = x_0$, т. е. $\dfrac{x_0}{h-x_0} = C$. Значит,

$$x = \frac{hCe^{kt}}{1+Ce^{kt}} = \frac{hx_0e^{kt}}{(h-x_0)(1+\frac{x_0}{h-x_0}\,e^{kt})} = \frac{hx_0e^{kt}}{h-x_0+x_0e^{kt}}.$$

И при $t \to +\infty$ величина $x(t) \to h$ — положение насыщения (h — максимальная численность популяции, теоретически возможная для данного вида в данных условиях).

На основании модели Ферхгюльста — Перла можно рассмотреть и более общие задачи, например,

$$\frac{dx}{dt} = kx - \delta x^2 + N - M,$$

где N — приток извне; M — численность особей, покидающих популяцию.

8.17. Почему рост деревьев ограничен

Рассмотрим причины ограничения роста деревьев даже в самых благоприятных условиях. Почему все деревья независимо от породы растут сначала быстро, а потом рост замедляется, и,

наконец, совсем прекращается? Интуитивно ясно, что с ростом кроны, с одной стороны, увеличивается приток энергии благодаря фотосинтезу, а с другой — увеличиваются трудности, связанные, например, с доставкой питательных веществ, и, следовательно, увеличивается расход энергии на подобные нужды. В конце концов, притока энергии уже не хватает для покрытия расходов, и дерево перестает расти.

Перейдем от интуитивных рассуждений к модели, предложенной И. А. Полетаевым, которая основывается на следующих гипотезах:

1) у зрелого растения с ростом не меняются отношения геометрических размеров;

2) свободную энергию растение получает только путем фотосинтеза;

3) свободная энергия расходуется на фотосинтез, построение живой клетки и подъем питательного раствора из почвы;

4) в среднем за большие отрезки времени растение получает постоянное количество света на единицу поверхности и может поглощать необходимые вещества из неограниченного запаса.

Составим уравнение баланса энергии. Пусть x — линейный размер растения. Это значит, что высоту растения будем измерять величиной x, площадь поверхности всей листвы пропорциональна x^2, объем ствола пропорционален x^3. Понятно, что x изменяется со временем: $x(t)$. Свободная энергия E образуется благодаря фотосинтезу в листьях кроны. Таким образом, можно считать, что $E = \alpha x^2$, где α — коэффициент пропорциональности (зависит от размеров и формы листьев и интенсивности фотосинтеза).

Других источников энергии в силу гипотез нет. Теперь проследим за расходом энергии. Энергия тратится на нужды фотосинтеза. Этот расход пропорционален x^2, и его можно записать как βx^2 ($\beta < \alpha$).

Далее, энергия расходуется на доставку питательных веществ во все части растения. Расход будет тем больше, чем больше объем растения. Кроме того этот расход связан с преодолением силы тяжести и будет тем больше, чем на бóльшую высоту приходится поднимать питательные вещества, т. е. расход пропорционален x^3 и высоте x. Таким образом, он равен $\gamma x^3 x = \gamma x^4$.

Наконец, энергия расходуется на увеличение массы растения — на рост. Этот расход пропорционален скорости роста, т. е. производной от массы $m = \rho x^3$ (ρ — средняя плотность). Таким образом, этот расход равен $\delta\dfrac{d}{dt}(\rho x^3)$.

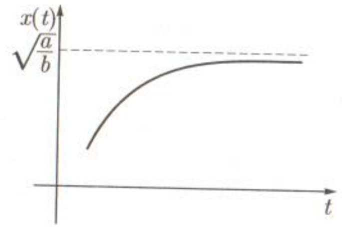

Рис. 8.4

В силу закона сохранения энергии и гипотез 1 — 4:

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3),$$

т. е.

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2 \frac{dx}{dt}, \tag{8.56}$$

$x \neq 0$, поэтому, разделив (8.56) на $3\delta\rho x^2$ и обозначив $\dfrac{\alpha-\beta}{3\delta\rho} = a$, $\dfrac{\gamma}{3\delta\rho} = b$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha-\beta}{3\delta\rho} - \frac{\gamma}{3\delta\rho}x^2,$$

или

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2. \tag{8.57}$$

Так как дерево растет, то $\dfrac{dx}{dt} > 0$, т. е. $a - bx^2 > 0$. Тогда

$$\frac{dx}{a-bx^2} = dt; \quad \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right| = t + \ln C_1;$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right| = 2\sqrt{ab}\,t + \ln C;$$

$$\frac{\sqrt{a}/\sqrt{b}+x}{\sqrt{a}/\sqrt{b}-x} = Ce^{2\sqrt{ab}\,t};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + x = \sqrt{\frac{a}{b}}Ce^{2\sqrt{ab}\,t} - xCe^{2\sqrt{ab}\,t}.$$

Таким образом,

$$x(t) = \frac{\sqrt{a/b}\,(Ce^{2\sqrt{ab}\,t}-1)}{1+Ce^{2\sqrt{ab}\,t}}. \tag{8.58}$$

Из (8.58) видно, что при $t \to \infty$ $x(t) \to \sqrt{a/b}$. Из (8.57) следует, что $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2bx\dfrac{dx}{dt}$. Так как $b > 0$, $x > 0$ и $\dfrac{dx}{dt} > 0$, то $\dfrac{d^2x}{dt^2} < 0$ и $x(t)$ — выпуклая кривая (рис. 8.4).

8.18. Модель «хищник — жертва» (модель Вольтерра)

Экспериментальные данные о колебании численности рысей и зайцев были собраны в Канаде в период 1845 — 1935 гг. Пусть в некотором изолированном районе живут хищники (рыси) и жертвы (зайцы). Зайцы питаются растительной пищей, ее количество неограниченно, а рыси питаются только зайцами. Эти предположения упрощают реальную ситуацию, но такие предположения неизбежны при построении математических моделей. Обозначим $x(t)$ — количество зайцев; $y(t)$ — количество рысей. Пусть $x(t), y(t)$ — непрерывные дифференцируемые функции. Возникает вопрос: «Как количество животных может быть непрерывной функцией?» Но если взять очень крупную единицу измерения, например 10 000 особей, то 0,7 означает 7 000 особей и т. д. Так как экологическая ниша для зайцев неограниченна, то если бы рысей не было, скорость прироста зайцев была бы пропорциональна их количеству:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a > 0).$$

С другой стороны, если бы зайцев не было, то рыси бы вымирали, и скорость их вымирания была бы пропорциональна их количеству:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad (c > 0).$$

Пусть теперь рыси и зайцы живут на одной территории. Тогда число рысей будет тем больше, чем больше зайцев они «встретят». Соответственно скорость роста численности зайцев из-за таких «встреч» тоже замедлится. Частота встреч характеризуется произведением xy. Действительно, если есть n зайцев и m рысей, то каждая рысь может встретить любого зайца. Общее число таких возможных комбинаций равно mn. Учитывая изложенное, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by); \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx + pxy = y(px - c), \quad (a, b, c, p > 0). \end{cases} \tag{8.59}$$

Первый вопрос: «Существуют ли у системы (8.59) положения равновесия — такие точки на фазовой плоскости (см. подразд. 8.14), попав в которые, движущаяся точка останется там навсегда (скорость в этом положении равна 0), т. е. из (8.59)

$$
\begin{cases} x(a-by)=0; \\ y(px-c)=0. \end{cases} \tag{8.60}
$$

Так как $a, b, c, p > 0$, система (8.60) имеет два решения $(0,0)$ и $\left(\frac{c}{p}, \frac{c}{a}\right)$. Первое означает отсутствие рысей и зайцев и не представляет интереса. Остается решение

$$
\bar{x}=\frac{c}{p}; \quad \bar{y}=\frac{a}{b}. \tag{8.61}
$$

Ему соответствует решение системы (8.59) $x(t)=\frac{c}{p}$; $y(t)=\frac{a}{b}$. Соответствующая фазовая кривая вырождается в точку. Что будет, если чуть-чуть отойти от положения равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$, т. е. количество зайцев и рысей будет немного отличаться от $\frac{c}{p}$ и $\frac{a}{b}$?

Дадим x и y малые приращения u и v соответственно:

$$
\begin{cases} x(t)=\bar{x}+u(t); \\ y(t)=\bar{y}+v(t). \end{cases} \tag{8.62}
$$

Подставим теперь (8.62) в (8.59) и получим систему дифференциальных уравнений относительно новых функций $u(t)$ и $v(t)$:

$$
\begin{cases} \frac{du}{dt}=(\bar{x}+u)(a-b\bar{y}-bv); \\ \frac{dv}{dt}=(\bar{y}+v)(p\bar{x}+pu-c). \end{cases} \tag{8.63}
$$

Подставим в (8.63) выражение (8.61) и, отбросив слагаемые uv ввиду их малости, получим:

$$
\begin{cases} \frac{du}{dt}=\frac{c}{p}a+au-\frac{ac}{p}-au-\frac{cb}{p}v=-\frac{cb}{p}v; \\ \frac{dv}{dt}=\frac{a}{b}p\frac{c}{p}+cv+\frac{ap}{b}u-\frac{ca}{b}-cv=\frac{ap}{b}u. \end{cases} \tag{8.64}
$$

Продифференцировав первое из уравнений (8.64), имеем

$$
\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{bc}{p}\frac{dv}{dt}. \tag{8.65}
$$

Из (8.64) и (8.65) получим

$$
\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{bc}{p}\frac{ap}{b}u,
$$

т. е.

$$
\frac{d^2u}{dt^2}=-acu
$$

или

$$
\frac{d^2u}{dt^2}+acu=0.
$$

Поскольку $ac>0$, обозначив $\omega=\sqrt{ac}$, имеем

$$
\begin{cases} u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t; \\ v(t)=-\frac{p}{bc}\frac{du}{dt}=-\frac{p\omega}{bc}(-A\sin\omega t+B\cos\omega t). \end{cases} \tag{8.66}
$$

Несложные преобразования дают

$$
\begin{cases} u(t)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right)= \\ \quad =\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\varphi); \\ v(t)=-\frac{p\omega}{bc}\sqrt{A^2+B^2}\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t\right)= \\ \quad =-\frac{p\omega}{bc}\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\varphi). \end{cases}
$$

Составим уравнение, связывающее $u(t)$ и $v(t)$:

$$
\frac{u^2}{d_1^1}+\frac{v^2}{d_2^2}=1, \tag{8.67}
$$

где $d_1=\sqrt{A^2+B^2}$; $d_2=\frac{p\omega}{bc}\sqrt{A^2+B^2}$. Уравнение (8.67) представляет собой уравнение эллипса с центром в точке $(0,0)$.

Используя (8.62), получим

$$
\frac{(x-\bar{x})^2}{d_1^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{d_2^2}=1
$$

— уравнение эллипса с центром в точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

Таким образом, фазовые кривые для системы (8.59) имеют вид эллипсов с центром в точке, являющейся положением равновесия. Максимумы количества рысей и зайцев различаются по фазе. На основании (8.66) заключаем, что движение по этим замкнутым кривым будет периодическим с периодом, близким к $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Оказывается, что периодическое движение имеет место не только для фазовых кривых, близких к положению равновесия, но и для «далеких» кривых, но форма этих кривых отличается от эллиптической. В итоге получается примерная картина поведения решений на фазовой плоскости. Видим, что система устойчива, т. е., если зайцы и рыси будут предоставлены сами себе, то не погибнут ни те, ни другие, а их численности будут совершать колебания с отставанием по фазе друг от друга (максимум $x(t)$ и $y(t)$ принимаются при разных t).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by); \\ \dfrac{dy}{dt} = y(px - c). \end{cases} \tag{8.68}$$

1. При $x < \dfrac{c}{p}$; $y > \dfrac{a}{b}$ имеем $\dfrac{dx}{dt} < 0$; $\dfrac{dy}{dt} < 0$, следовательно, x и y убывают.

2. При $x < \dfrac{c}{p}$; $y < \dfrac{a}{b}$ имеем $\dfrac{dx}{dt} > 0$; $\dfrac{dy}{dt} < 0$, следовательно, x возрастает, y убывает.

3. При $x > \dfrac{c}{p}$; $y < \dfrac{a}{b}$ имеем $\dfrac{dx}{dt} > 0$; $\dfrac{dy}{dt} > 0$, следовательно, x и y возрастают.

4. При $x > \dfrac{c}{p}$; $y > \dfrac{a}{b}$ имеем $\dfrac{dx}{dt} < 0$; $\dfrac{dy}{dt} > 0$, следовательно, x убывает, y возрастает.

Таким образом, получаем, что движение точек по фазовым кривым происходит против часовой стрелки (рис. 8.5).

Поэтому, если требуется увеличить количество зайцев, производя отстрел рысей, то нужно правильно выбрать момент отстрела. Если отстрел произвести в тот момент, когда система находится в точке α_1 кривой *3*, то перейдем в точку α_2 кривой *1*. При этом количество зайцев будет уменьшаться. Если отстрел произвести, когда система будет находиться в точке β_1 кривой *2*, то перейдем в точку β_2 кривой *1*. При этом количество зайцев будет расти.

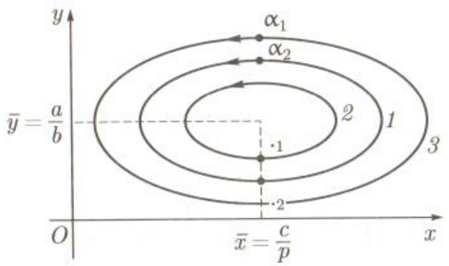

Рис. 8.5

Возможен случай, когда точка β_2 окажется на эллипсе, который пересекается с осью Oy. В этом случае в определенный момент времени количество зайцев станет равным нулю, т. е. популяция зайцев вообще исчезнет.

Это лишний раз доказывает, как осторожно следует вмешиваться в естественные природные процессы. Часто подобное вмешательство приводит к результатам прямо противоположным тем, на которые рассчитывали невежественные «экспериментаторы».

8.19. Особые точки и особые решения

В подразделе 8.4 были даны условия существования и единственности решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8.69}$$

в области D. Для более подробного изучения точек, в которых условия теоремы не выполняются, несколько обобщим предыдущую постановку задачи. Сделаем переменные x и y равноправными, т. е. будем искать решение $x(y)$ и $y(x)$. Иначе, допускаем, чтобы поле направлений в некоторых точках было параллельно оси Oy. Пусть $f(x, y)$ неограниченна в окрестности точки (x_0, y_0), а $\dfrac{1}{f(x,y)}$ при соответствующем доопределении в точке (x_0, y_0) непрерывна. Тогда в окрестности точки (x_0, y_0) будем искать интегральные кривые уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{8.70}$$

Определение 8.9. Точка (x_0, y_0) называется *неособой*, если существует ее окрестность U, такая, что через каждую точку этой окрестности проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения (8.69) и (8.70). В противном случае точка (x_0, y_0) называется *особой*. Решение, все точки которого являются особыми, называется *особым решением*.

Наиболее часто встречаются два типа особых точек.

1. Точка лежит на границе области G, где $f(x, y)$ или $\dfrac{1}{f(x, y)}$ непрерывны. В приложениях эти точки чаще всего встречаются при исследовании уравнений вида $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, где $M(x, y)$, $N(x, y)$ — непрерывные функции. Точка (x_0, y_0):

$$\begin{cases} M(x_0, y_0) = 0; \\ N(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

будет особой, если не существует $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$. Проиллюстрируем на примерах как по-разному могут вести себя интегральные кривые в окрестности особой точки первого типа.

Пример 8.34.

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Решаем уравнение всюду кроме точки $(0, 0)$, поскольку $\dfrac{2y}{x}$ и $\dfrac{x}{2y}$ неограниченны в окрестности этой точки

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x};$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C_1; \quad |y| = e^{2\ln|x| + C_1} = x^2 e^{C_1};$$

$$y = \pm e^{C_1} x^2 = Bx^2,$$

где B — произвольная константа, так как $y \equiv 0$ «потеряли» при делении. На рис. 8.6 видно, что все интегральные кривые приближаются к $(0, 0)$ как угодно близко, и при этом имеют общую касательную $y \equiv 0$ (т. е. приближаются по определенному направлению). Такие особые точки называют *узлами*.

Пример 8.35.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Точка $(0, 0)$ — особая. Решаем уравнение всюду, кроме $(0, 0)$. В этом случае к точке $(0, 0)$ подходят сколь угодно близко только четыре интегральные кривые: две полуоси Ox и две полуоси Oy. Всякая же другая интегральная кривая, приблизившись

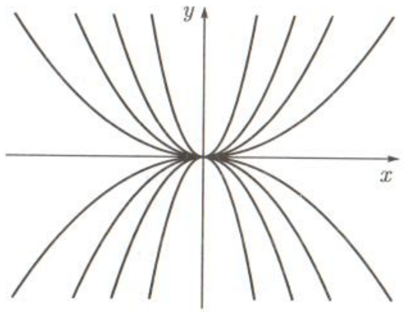

Рис. 8.6

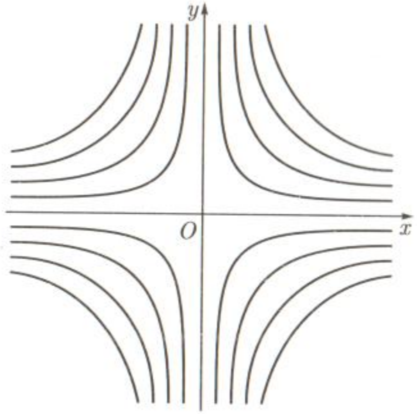

Рис. 8.7

достаточно близко к точке $(0, 0)$, начинает от нее удаляться. Такие точки называются *седлами*. Именно такой вид имеют на карте линии уровня высоты на перевале между двумя горами (рис. 8.7).

Пример 8.36.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Точка $(0, 0)$ — особая, называемая *центром*. Вообще, если некоторая окрестность точки O целиком заполнена замкнутыми интегральными линиями, содержащими внутри себя O, то такую точку называют центром (рис. 8.8).

Пример 8.37.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Решаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x/y}{1 - y/x};$$

$$\frac{y}{x} = t; \quad t + xt' = \frac{1 + t}{1 - t};$$

$$xt' = \frac{1 + t}{1 - t} - t = \frac{1 + t - t + t^2}{1 - t} = \frac{1 + t^2}{1 - t};$$

$$\frac{(1 - t)\,dt}{1 + t^2} = \frac{dx}{x}; \quad \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2) = \ln C_1 x;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C_1 x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \ln C_1\sqrt{x^2+y^2};$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg} y/x}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$r = ce^{\varphi}.$$

В точке $(0,0)$ — *фокус*. Интегральная кривая приближается к $(0,0)$, *бесконечно навиваясь на эту точку* (рис. 8.9).

2. Данная классификация особых точек принадлежит Пуанкаре. Ранее были рассмотрены случаи, когда нарушалось первое условие теоремы существования и единственности, т. е., фактически, условие существования решения. Второе условие теоремы чаще всего нарушается в точках, при приближении к которым $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неограниченно возрастает, т. е. в таких точках, в которых $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \to 0$. Соотношение $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \to 0$, вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой может быть нарушена единственность. Все такие точки — особые точки второго типа. Если, кроме того, эта кривая окажется интегральной, то получим *особое решение.*

Замечание. Кривая, определяемая соотношением $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \to 0$, может содержать несколько ветвей, тогда одна ветвь может являться интегральной кривой, а другая — нет.

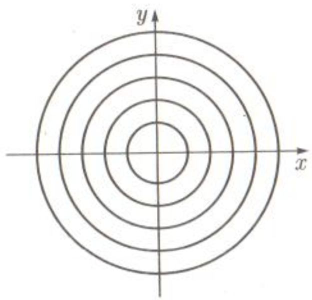

Рис. 8.8

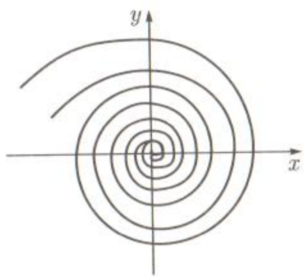

Рис. 8.9

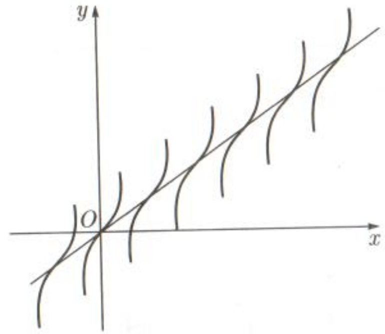

Рис. 8.10

Пример 8.38. Имеет ли уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$$

особое решение?

Правая часть непрерывна, но частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3}(y-x)^{-1/3}$ неограниченно возрастает при приближении к прямой $y = x$, следовательно, на прямой $y = x$ может нарушиться единственность. Но функция $y = x$ не удовлетворяет рассматриваемому уравнению, следовательно, особого решения нет.

Пример 8.39. Имеет ли уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$$

особое решение?

Как и в примере 8.38, условие $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \to 0$ определяет прямую $y = x$, но на этот раз функция $y = x$ удовлетворяет данному уравнению. Остается выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой. Заменой переменных $z = y - x$ приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, после чего без труда находим решение $y - x = \dfrac{(x-c)^3}{27}$. Кривые этого семейства проходят через точки графика решения $y = x$. Следовательно, в каждой точке прямой $y = x$ единственность нарушена и функция $y = x$ является особым решением (рис. 8.10).

РЯДЫ ФУРЬЕ*

9.1. Основные определения и леммы

Определение 9.1. Функция $f(x)$, определенная на всей действительной оси, называется *периодической*, если для всех x выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x),$$

а число T — ее *периодом.*

Если T — период функции $f(x)$, то для любого целого n nT тоже будет периодом $f(x)$. Если $f(x)$ имеет период T, то $g(x) = f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$. Действительно,

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax) = g(x).$$

Обычно, говоря о периоде функции, под словом «период» понимают наименьший положительный период, если он существует (в дальнейшем будем это предполагать).

Лемма 9.1. Если функция $f(x)$ имеет период T, то интегралы от этой функции по любому отрезку длины T равны, т. е.

$$\int\limits_c^{c+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

Доказательство.

$$\int\limits_c^{c+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{c+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^c f(x)\,dx. \tag{9.1}$$

Во втором интеграле равенства (9.1) сделаем замену переменной

$$x = y+T, \quad dx = dy,$$

тогда

$$\int\limits_c^{c+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^c f(y+T)\,dy = \int\limits_0^c f(y)\,dy. \tag{9.2}$$

Подставив (9.2) в (9.1), получим то, что требовалось доказать. ■

Определение 9.2. Две действительные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a,b]$, если

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{9.3}$$

Определение 9.3. Система функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ называется *ортогональной* на $[a,b]$, если функции этой системы попарно ортогональны, т. е.

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \tag{9.4}$$

Определение 9.4. *Нормой* функции $\varphi(x)$ на $[a,b]$ (обозначается $\|\varphi(x)\|$) называется корень квадратный из интеграла от квадрата этой функции, т. е.

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int\limits_a^b (\varphi(x))^2\,dx}. \tag{9.5}$$

Определение 9.5. Система функций называется *нормированной* на $[a,b]$, если норма каждой функции равна единице на $[a,b]$.

Определение 9.6. Ортогональная и нормированная на $[a,b]$ система функций называется *ортонормированной.* Для нее выполняются условия

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{9.6}$$

Если ввести символ Кронекера

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n, \end{cases} \tag{9.7}$$

то равенство (9.6) можно переписать так:

$$\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{mn}. \tag{9.8}$$

Определение 9.7. Комплексные функции действительного переменного

$$f(x) = \alpha(x) + i\beta(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \alpha_1(x) + i\beta_1(x)$$

называются *ортогональными*на $[a, b]$, если

$$\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0,$$

где $\overline{g(x)} = \alpha_1(x) - i\beta(x)$ — сопряженная функция.

Норма функции определяется формулой

$$\|f(x)\| = \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

где $|f(x)| = \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^2(x)}$ — модуль функции $f(x)$.

Лемма 9.2. Всякую ортогональную систему, не содержащую функций с нулевой нормой, можно нормировать.

Доказательство. Пусть на $[a, b]$ задана ортогональная система функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Если ввести новые функции

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|},$$

то полученная таким образом система $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ будет ортонормированной:

$$\int\limits_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \frac{1}{\|\varphi_m(x)\|\|\varphi_n(x)\|}\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{mn}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(-x) = f(x); \\ 0, & f(-x) = -f(x). \end{cases} \tag{9.9}$$

Покажем справедливость равенства (9.9)

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{9.10}$$

В первом интеграле правой части равенства (9.10) сделаем замену переменной $x = -t$, $dx = -dt$, тогда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt.$$

Если функция четная, то $f(-t) = f(t)$, а если нечетная, то $f(-t) = -f(t)$, откуда следует равенство (9.9). ■

Лемма 9.3. Система функций

$$\Big\{\sin\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\Big\} \quad \begin{matrix}(m = 1, 2, 3, \ldots) \\ (n = 0, 1, 2, \ldots)\end{matrix} \tag{9.11}$$

с общим периодом $2l$ ортогональна на любом отрезке длины $2l$.

Доказательство. Так как была доказана лемма 9.1, то эту лемму достаточно доказать для отрезка $[-l, l]$

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0;$$

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0,$$

так как подынтегральные функции нечетны.

$$\int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0;$$

$$\int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int\limits_{0}^{l}\left(\cos\frac{\pi x(m+n)}{l} + \cos\frac{\pi x(m-n)}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{l}{\pi(m+n)}\sin\frac{\pi x(m+n)}{l}\Big|_0^l + \frac{l}{\pi(m-n)}\sin\frac{\pi x(m-n)}{l}\Big|_0^l = 0$$

при $m \neq n$;

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{l}\left(\cos\frac{\pi x(m-n)}{l} - \cos\frac{\pi x(m+n)}{l}\right)dx = 0$$

при $m \neq n$.

Ортогональность доказана. ■

Найдем еще квадрат нормы этих функций на $[-l, l]$:

$$\int\limits_{-l}^{l} 1^2\,dx = 2l;$$

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = \int\limits_{0}^{l}\left(1 - \cos\frac{2m\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= x\Big|_0^l - \frac{l}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{l}\Big|_0^l = l; \qquad (9.12)$$

$$\int\limits_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int\limits_{0}^{l}\left(1 + \cos\frac{2m\pi x}{l}\right)dx = l.$$

9.2. Ряды Фурье

Пусть функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, допускает разложение в равномерно сходящийся ряд по ортогональной на $[a, b]$ системе функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \qquad (9.13)$$

Найдем коэффициенты c_n. Умножив обе части равенства (9.13) на $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и проинтегрировав по $[a, b]$, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Напомним (см. подразд. 7.8), что если ряд (9.13) равномерно сходится и функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то этот ряд можно почленно интегрировать.

В силу ортогональности функций $\varphi_n(x)$ на $[a, b]$

$$\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = c_m\|\varphi_m(x)\|^2. \qquad (9.14)$$

Определение 9.8. Коэффициенты c_m, определяемые формулой (9.14), называют *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно данной ортогональной системы функций $\varphi_n(x)$. Функциональный ряд (9.13) с коэффициентами Фурье c_m называется *рядом Фурье* независимо от его сходимости.

Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$ и допускающая разложение в ряд Фурье по тригонометрической системе функций (9.11), то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (9.15)$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам (9.14) с учетом равенств (9.12), т. е.

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (9.16)$$

Мы предполагали, что $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд (9.15) с коэффициентами Фурье (9.16). Теперь определим, при каких условиях на функцию $f(x)$ этот ряд будет сходиться.

Определение 9.9. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на интервале, если она ограничена на этом интервале и имеет на нем конечное число точек разрыва только первого рода.

Пусть дана функция $f(x)$ с периодом $T = 2l$. Интервал $(-l, l)$ называется основной областью.

Построим для этой функции тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{9.17}$$

Теорема 9.1. Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную в основной области $(-l, l)$, тогда:

а) ее соответствующий ряд Фурье (9.17) сходится для всех x;

б) сумма $S(x)$ этого ряда Фурье равна $f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$ и равна среднему арифметическому пределов слева и справа в точках разрыва, т. е.

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ — точка непрерывности;} \\ \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & \text{если } x \text{ — точка разрыва.} \end{cases} \tag{9.18}$$

Замечание. Так как в точках непрерывности $f(x)$

$$f(x-0) = f(x+0) = f(x),$$

то равенство (9.18) можно записать так:

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

для всех x.

Доказательство этой теоремы не приводим ввиду его сложности.

Теорема 9.2. Тригонометрический ряд Фурье четной периодической функции содержит только косинусы, а нечетной — только синусы.

Доказательство. Пусть $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье (9.17) с коэффициентами (9.16). Тогда, если $f(-x) = f(x)$, т. е. функция $f(x)$ четная, то

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0. \tag{9.19}$$

Если $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция $f(x)$ нечетная, то

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0. \tag{9.20}$$

Равенства (9.19) и (9.20) получены с учетом свойства определенного интеграла (9.9). Кроме того, известно, что произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией, а произведение четной и нечетной функций — нечетной.

Таким образом, если $f(-x) = f(x)$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{9.21}$$

т. е. ряд $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по косинусам.

Если же $f(-x) = -f(x)$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{9.22}$$

т. е. $f(x)$ раскладывается по синусам. ■

Пример 9.1. Функция $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$ задана на $(-\pi, \pi)$. Разложить ее в ряд Фурье и, пользуясь разложением, найти сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Решение. Функцию $f(x)$, заданную на $(-\pi, \pi)$, продолжим на всю числовую ось периодически с периодом $T = 2\pi$ (рис. 9.1).

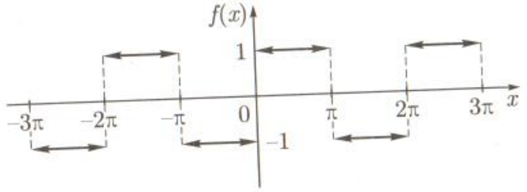

Рис. 9.1

Так как $f(x)$ — нечетная функция, $l = \pi$, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \dfrac{4}{\pi n}, & n = 2k-1, \end{cases}$$

т. е. $b_{2k} = 0$, $b_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi(2k-1)}$.

Таким образом, в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

При $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sin(2k-1)x = (-1)^{k-1}$,

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

9.3. Четное и нечетное продолжение функций

Пусть функция $f(x)$ задана только на интервале $(0, l)$. Чтобы разложить $f(x)$ в ряд Фурье, ее нужно продолжить на интервал $(-l, 0)$. Это можно сделать бесчисленным множеством способов. Все получающиеся ряды Фурье будут на $(0, l)$ иметь суммой $f(x)$ в точках непрерывности и среднее арифметическое пределов слева и справа в точках разрыва. Вне интервала $(0, l)$ эти ряды будут представлять совершенно различные функции.

В частности, $f(x)$ можно продолжить четным образом и разложить по косинусам, а если продолжить нечетным образом, то получим разложение по синусам (см. теорему 9.2).

Пример 9.2. Разложить $f(x) = x$, заданную на $(0, 2)$:

а) по синусам;

б) по косинусам.

Решение. а) Положим $f(-x) = -f(x)$ на $(-2, 0)$ и продолжим эту функцию на всю числовую ось с периодом 4 (рис. 9.2). Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2},$$

где

$$b_n = \int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{2x}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} u = x, & \sin\dfrac{n\pi x}{2}\,dx = dv, \\ du = dx, & v = -\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{n\pi x}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\cos n\pi + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi n}(-1)^{n+1};$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin\dfrac{n\pi x}{2}}{n}. \tag{9.23}$$

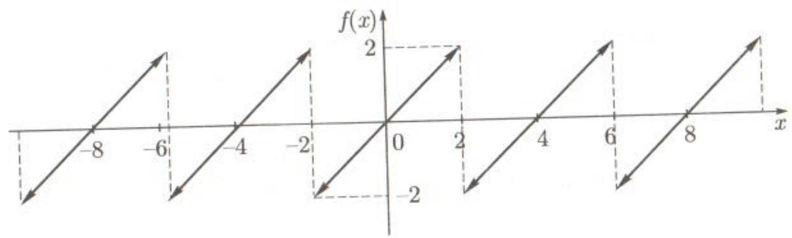

Рис. 9.2

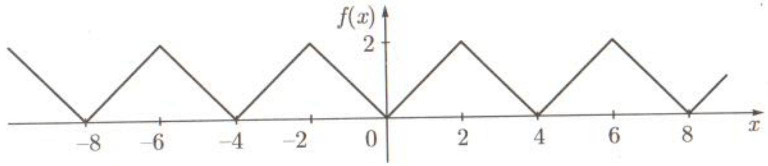

Рис. 9.3

б) Положим $f(-x) = f(x)$ на $(-2, 0)$ и продолжим эту функцию на всю числовую ось с периодом 4 (рис. 9.3). Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2},$$

где

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2,$$

$$a_n = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2x}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi^2 n^2}, & n = 2k+1; \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

В таком случае

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}}{(2k+1)^2}. \qquad (9.24)$$

Ряды (9.23) и (9.24) различны, хотя на $(0, 2)$ оба ряда имеют своей суммой функцию $f(x) = x$.

9.4. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Ряд Фурье по тригонометрической системе функций с коэффициентами (9.16) может быть представлен в комплексной форме. Для этого воспользуемся формулами Эйлера

$$e^{\frac{in\pi x}{l}} = \cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}; \quad e^{-\frac{in\pi x}{l}} = \cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l},$$

откуда

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right); \quad \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right). \quad (9.25)$$

Подставив (9.25) в (9.15), получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right) - ib_n\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right).$$

Введем обозначения

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}\,dx;$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{in\pi x}{l}}\,dx.$$

Отсюда получаем комплексную форму ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\,dx \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Такая форма записи рядов Фурье встраивается в физике, в частности в квантовой механике, где волновые процессы принято описывать с помощью комплексных экспонент.

На этом мы заканчиваем элементарное знакомство с рядами Фурье, хотя эти ряды обладают еще многими замечательными свойствами. Теории рядов Фурье активно разрабатывались математиками, в том числе и в МГУ им. М. В. Ломоносова в первой половине XX в. и послужили толчком для дальнейшего развития математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. — М. : Наука, 1968.
2. *Архипов Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М. : Дрофа, 2004.
3. *Банах С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М. : Наука, 1958.
4. *Гильдерман Ю. И.* Лекции по высшей математике для биологов. — Новосибирск : Наука, 1974.
5. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М. : Наука, 1985.
6. *Гроссман С.* Математика для биологов / С. Гроссман, Дж. Тернер. — М. : Высшая школа, 1983.
7. *Делоне Б. Н.* Аналитическая геометрия / Б. Н. Делоне, Д. А. Райков. — М. — Л. : Гостехиздат, 1948.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М. : Наука, 1983.
9. *Ивашев-Мусатов О. С.* Начала математического анализа. — М. : Наука, 1988.
10. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1975.
11. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. — М. : Наука, 1978.
12. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : Гостехиздат, 1952.
13. *Першикова Т. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Т. В. Першикова, Е. В. Александрова, А. Н. Бобров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2003.
14. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М. : Наука, 1984.
15. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М. : Физматгиз, 1959.
16. *Сударев Ю. Н.* Курс лекций по высшей математике для биологов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2001.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М. : Физматлит, 2005.
18. *Эльсгольц Л. Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : Гостехиздат, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ