

Д.В.Белов

МЕХАНИКА



ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ им.М.В.Ломоносова
1998

УДК 530.1

Белов Д.В.

Механика:

Учеб. пособие. — М.: Физический ф-т МГУ, НЭВЦ ФИПТ., 1998. — 144 с.: ил.

Пособие написано на основе лекций, читавшихся автором студентам естественных факультетов МГУ, и содержит изложение основ ньютоновской механики.

Для студентов естественных факультетов университетов.

Учебное издание

Белов Дмитрий Владимирович

МЕХАНИКА

Оригинал-макет подготовлен автором.

Сдано в набор 13.11.97. Подп. в печать 30.03.98. Формат 60×88 ¹/₁₆. Бум. офс. № 1
Гарнитура Times. Печать офсетная. Объем 9,0 печ. л. Тираж 2000 экз. Зак. 4467
Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ.
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403.
Тел. 554-21-86

**Издательство НЭВЦ ФИПТ, Физический факультет МГУ,
ЛР 040131 от 05.02.97. 119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ,
физический факультет, тел. 939-5494.**

© Физический факультет МГУ, 1998

© Белов Д.В., 1998

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие.....	6
СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ.....	7
ВВЕДЕНИЕ.....	14
О НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ.....	16
Глава I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.....	18
§ 1. Система отсчета. Траектория. Путь. Перемещение.....	18
§ 2. Скорость.....	19
§ 3. Ускорение.....	20
§ 4. Разложение ускорения на нормальное и тангенциальное.....	21
§ 5. Кинематика движения точки по окружности.....	23
Глава II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	26
§ 6. Первый закон Ньютона. Преобразования Галилея.....	26
§ 7. Второй закон Ньютона как дифференциальное уравнение движения.....	27
§ 8. Принцип относительности Галилея.....	30
§ 9. Третий закон Ньютона.....	31
§ 10. Силы в ньютоновской механике. (Гравитационные силы. Движение в центральном поле сил тяготения. Упругие силы. Силы трения.).....	31
Глава III. МЕХАНИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.....	38
§ 11. Введение.....	38
§ 12. Закон (теорема) движения центра масс.....	38
§ 13. Закон изменения и сохранения импульса. Реактивное движение.....	40
§ 14. Закон изменения и сохранения момента импульса.....	43
§ 15. Закон изменения и сохранения механической энергии. (Работа. Теорема о кинетической энергии. Потенциальные силы и потенциальная энергия. Закон изменения и сохранения механической энергии. Потенциальные кривые.).....	47
§ 16. О законах сохранения в физике.....	58

Глава IV. ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	59
§ 17. Абсолютно твердое тело и классификация его движений.....	59
§ 18. Поступательное движение твердого тела.....	61
§ 19. Вращательное движение тела относительно оси. (Кинематика. Момент импульса вращающегося тела. Уравнение движения для вращения тела относительно оси (уравнение моментов). Вычисления моментов инерции. Кинетическая энергия вращающегося тела. Центр тяжести. Прецессия гироскопа.).....	62
§ 20. Плоское движение. Качение.....	74
Глава V. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ.....	77
§ 21. Описание деформаций.....	77
§ 22. Механические напряжения.....	79
§ 23. Связь между напряжением и деформацией.....	80
§ 24. Закон Гука.....	81
§ 25. Работа и энергия при деформациях.....	83
Глава VI. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ.....	85
§ 26. Классификация движений жидкости.....	85
§ 27. Уравнение неразрывности.....	87
§ 28. Уравнение Бернулли.....	87
§ 29. Движение вязкой жидкости. (Силы внутреннего трения. Распределение скорости по сечению трубы. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса.).....	91
Глава VII. ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.....	94
§ 30. О сложении ускорений.....	94
§ 31. Ускорение Кориолиса.....	95
§ 32. Уравнение движения материальной точки в равноускоренной системе отсчета. Силы инерции.....	99
§ 33. Уравнение движения материальной точки в равномерно вращающейся системе отсчета.....	103
Глава VIII. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	106
§ 34. Общее представление о колебаниях.....	106
§ 35. Сложение колебаний. (Сложение скалярных гармонических колебаний одинаковой частоты. Биения. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.).....	108
§ 36. Свободные гармонические колебания. (Пружинный маятник. Физический и математический маятники. Крутильные колебания. Нелинейные колебания. Колебания связанных систем.).....	113
§ 37. Затухающие колебания.....	122
§ 38. Вынужденные колебания. Резонанс.....	125

Глава IX. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕХАНИКЕ.....	129
§ 39. Общее представление о волновых процессах.....	129
§ 40. Формула и дифференциальное уравнение волны. (Формула бегущей волны. Дифференциальное волновое уравнение. Монохроматические волны. Сферическая и плоская волны.).....	130
§ 41. Стоячая волна.....	134
§ 42. Динамика упругих волн. (Упругие волны в тонком стержне. Поперечные волны в натянутой струне. Стоячие волны как собственные колебания струны.).....	135
§ 43. Некоторые дополнительные сведения об упругих волнах.....	139
§ 44. Эффект Доплера.....	141
§ 45. Энергия упругих волн.....	142

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано на основе лекций, читавшихся автором студентам естественных факультетов МГУ, и содержит изложение основ ньютоновской механики (элементы квантовой и релятивистской механики даются в других разделах курса). Оно предназначено для студентов естественных факультетов: почвоведения, биологического, геологического и географического. С материалом, напечатанным мелким шрифтом, достаточно ознакомиться в той мере, в какой он входит в учебную программу. Раздел "Молекулярная физика", обычно входящий в программу того же семестра, что и "Механика", можно изучить по пособию Д.Д.Гуло и Г.Е.Пустовалова "Молекулярная физика", часть 2 "Краткого курса общей физики", изд. МГУ, 1983 г. или по другой учебной литературе, рекомендованной лектором.

В пособии содержится в основном теоретический материал и практически не освещены вопросы прикладного значения, отсутствуют также, за редким исключением, ссылки на лекционные демонстрации, разбор задач. Поэтому достаточно полное представление о разделе "Механика" оно может дать лишь в сочетании с прослушанными лекциями и работой на семинарах.

Современная физика опирается на сложный математический аппарат, не изучаемый студентами нефизических специальностей. Как следствие, в общем курсе актуальные проблемы физики занимают сравнительно малый объем и трактуются довольно поверхностно. Это обстоятельство не снижает роли общего курса физики, поскольку главная цель высшего естественно-научного образования состоит не в простом ознакомлении студента с картиной мира, а в том, чтобы выработать у него научное мышление, без которого немислима творческая научная деятельность. Сравнительно простые и установленные теории, рассматриваемые в общем курсе физики, являются благодатной почвой для реализации этой цели.

Автор выражает глубокую благодарность Г.Е.Пустовалову, оказавшему заметное влияние на формирование педагогического кредо автора, а также С.Н.Горшкову за ряд ценных замечаний, учтенных в окончательной редакции рукописи.

СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

Здесь приводятся основные математические определения и формулы, необходимые для понимания излагаемых в книге физических теорий. Опуская все обоснования и доказательства, мы ограничиваемся лишь краткими комментариями и пояснениями.

1. Производная скалярной функции

Производной скалярной функции $y = f(x)$ по скалярному аргументу x называется предел отношения приращения Δy функции к приращению Δx аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (M.1)$$

Она характеризует быстроту (резкость) изменения функции с изменением аргумента и численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в рассматриваемой точке, как видно из рис. 1: в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ направление хорды стремится к направлению касательной и $\Delta y / \Delta x \rightarrow \operatorname{tg} \varphi$. В точках, соответствующих локальным максимумам и минимумам функции, касательная горизонтальна и, следовательно, производная равна нулю: $dy/dx = 0$.

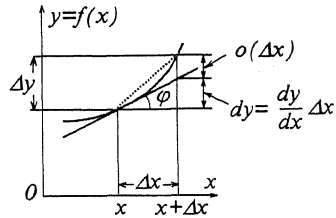


Рис. 1

Основные правила дифференцирования:

1. Сводку формул производных элементарных функций можно найти в любом справочнике или учебнике по высшей математике.

2. Производная функции, являющейся произведением двух других функций: $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, определяется формулой:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} f_2 + f_1 \frac{df_2}{dx} \quad (M.2)$$

Если $f_1 = a = \text{const}$, т.е. $f(x) = a f_2(x)$, то $df_1/dx = 0$ и

$$\frac{df}{dx} = \frac{d[af_2(x)]}{dx} = a \frac{df_2}{dx} \quad (M.3)$$

т.е. постоянная выносится за знак производной.

3. Производная функции, являющейся частным от деления двух функций: $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$, определяется формулой:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{df_1}{dx} f_2 - f_1 \frac{df_2}{dx}}{f_2^2} \quad (M.4)$$

4. Производная сложной функции $f(x) = f(u(x))$ определяется формулой:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} . \quad (M.5)$$

Дифференциал. Как видно из рис. 1, малое приращение Δy функции можно представить как сумму двух слагаемых:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x + o(\Delta x) \quad (M.6)$$

Первое определяет главную часть приращения функции, линейную по Δx ; она называется дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается символом " dy ":

$$dy = \frac{dy}{dx} \Delta x . \quad (M.7)$$

Относительный вклад второго слагаемого $o(\Delta x)$ в приращение функции неограниченно уменьшается при $\Delta x \rightarrow 0$, так что при достаточно малом Δx истинное приращение функции можно с хорошей степенью точности заменить ее дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy = \frac{dy}{dx} \Delta x \quad (M.8)$$

или, что то же самое, можно не проводить различия между производной функции и отношением малых приращений значений функции и аргумента:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} , \quad (M.9)$$

что мы зачастую и делаем в книге.

Производные высшего порядка. Производная dy/dx сама является функцией аргумента x , поэтому ее можно в свою очередь продифференцировать, если характер функции $y = f(x)$ это допускает, получая производную второго порядка $d(dy/dx)/dx \equiv d^2y/dx^2 \equiv y''$, а при повторных дифференцированиях - производные следующих порядков.

Частная производная. Если функция зависит от нескольких переменных $y = f(u, v, w, \dots)$, то ее производная, обусловленная изменением одного из аргументов при постоянных значениях других, называется частной производной функции по этому аргументу. Так, частная производная $\partial y/\partial u$ по аргументу u определится пределом:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} . \quad (M.10)$$

Для частных производных, естественно, справедливы все отмеченные выше свойства обычной производной. Дифференциал функции нескольких переменных складывается из частных дифференциалов функции по всем переменным:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \dots . \quad (M.11)$$

2. Интеграл

Неопределенный интеграл. Интегрирование (взятие неопределенного интеграла $\int f(x) dx$ от функции $y = f(x)$), - операция, обратная дифференцированию (взятию производной). Следовательно,

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + const \quad (\text{M.12})$$

означает, что $d\Phi/dx = f(x)$. Функция $\Phi(x)$ называется первообразной функции $y = f(x)$; она определена с точностью до произвольной постоянной, так как $d(\Phi + const)/dx = d\Phi/dx = f(x)$. Для нашего курса достаточно знать формулы неопределенных интегралов от элементарных функций, которые можно найти в справочниках, и два правила интегрирования: постоянный множитель выносится за знак интеграла и интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой отдельной функции:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Определенный интеграл. Определенным интегралом $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ от функции $y = f(x)$ на интервале значений аргумента от $x = x_1$ до $x = x_2$ называется предел суммы

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i. \quad (\text{M.13})$$

Здесь Δx_i - один из малых интервалов изменения аргумента x , на которые разбивается интервал $[x_1, x_2]$; $f(x_i)$ - значение функции $y = f(x)$ в какой-либо точке интервала Δx_i (рис. II). Сумма в формуле (M.13) представляет собой площадь фигуры, ограниченной на рис. II жирными линиями, которая в пределе при $\Delta x_i \rightarrow 0$ переходит в площадь криволинейной трапеции, образованной кривой $y = f(x)$, отрезком $x_1 x_2$ и ординатами $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ - таков геометрический смысл определенного интеграла. Доказывается, что определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем $x = x_2$ и нижнем $x = x_1$ пределах интегрирования:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (\text{M.14})$$

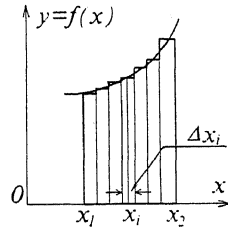


Рис. II

В физических теориях встречаются интегралы, взятые вдоль кривой L : $\int_L f(l) dl$; по

поверхности S : $\int_S f(u, v) dS$; по объему V : $\int_V f(x, y, z) dV$. Для нашего курса достаточно понимать их смысл как предела соответствующей интегральной суммы, а вычисляются они во всех встречающихся в курсе задачах сведением к определенному интегралу вида (M.14) от функции одной переменной.

3. О векторных физических величинах

Кроме скалярных физических величин, которые характеризуются одним числом или одной функцией каких-либо параметров, в физических теориях фигурируют векторные величины. Векторная физическая величина характеризуется абсолютной величиной, или модулем, и направлением. Символически вектор обозначается жирной буквой (r, F, v и т.д.) или буквой со стрелкой над ней, а его модуль обозначается той же нежирной буквой без

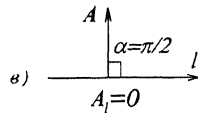
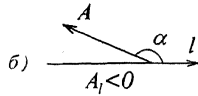
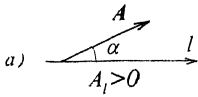


Рис. III

стрелки: $|F| \equiv F$. На рисунках векторная физическая величина изображается стрелкой, начало которой находится в точке, где она определена (например, в случае силы F - в точке приложения силы), а длина которой в выбранном масштабе равна модулю вектора (если условиться силу в 1Н изображать стрелкой длиной 1см., то сила величиной в 3Н изобразится стрелкой длиной 3см.). При любых операциях вектор можно переносить параллельно самому себе, т.к. при этом не изменяются ни его модуль, ни ориентация.

Проекцией A_l вектора A на некоторое направление " l " (обозначается нежирной буквой той же, что и вектор, с индексом, символизирующим направление) называется произведение модуля A вектора на косинус угла α между направлением вектора A и этим направлением:

$$A_l = A \cos \alpha \quad (\text{M.15})$$

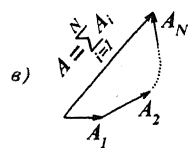
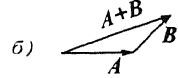
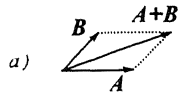


Рис. IV

Проекция вектора - скалярная величина, которая может быть положительной ($\alpha < \pi/2$, $\cos \alpha > 0$, рис. III а), отрицательной ($\alpha > \pi/2$, $\cos \alpha < 0$, рис. III б) и равной нулю ($\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$, рис. III в).

Для векторов определены следующие операции сложения и умножения на число:

1). Сложение двух векторов определяется правилом параллелограмма (или треугольника), как показано на рис. IV а и рис. IV б. При сложении нескольких векторов A_1, \dots, A_N удобно расположить их цепочкой (начало последующего к концу предыдущего); пользуясь правилом треугольника при прибавлении каждого последующего вектора, заключаем, что суммарный вектор соединяет начало первого вектора с концом последнего (рис. IV в).

2). Умножение вектора A на число a дает вектор $B = aA$, модуль которого $B = |a|A$, а направление совпадает с направлением вектора A в случае $a > 0$ и противоположно ему в случае $a < 0$ (рис. V).

Эти правила позволяют представить каждый вектор A в виде:

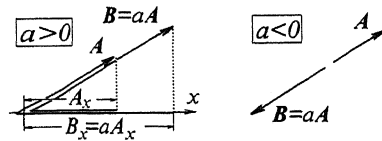


Рис. V

$$A = \frac{A_x i}{A_x} + \frac{A_y j}{A_y} + \frac{A_z k}{A_z} . \quad (\text{M.16})$$

Здесь i, j, k - орты, т.е. три взаимно ортогональных единичных ($|i|=|j|=|k|=1$) вектора, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy, Oz (рис. VI). Векторы A_x, A_y, A_z в формуле (M.16) являются ортогональными составляющими вектора A вдоль координатных осей. Каждый из них представляет собой произведение орта на проекцию вектора на соответствующую ось:

$$A_x = A_x i, \quad A_y = A_y j, \quad A_z = A_z k, \quad (\text{M.17})$$

где $A_x = A \cos \alpha_x$, $A_y = A \cos \alpha_y$, $A_z = A \cos \alpha_z$. Косинусы углов $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, образуемых вектором с направлением координатных осей, называют направляющими косинусами.

При умножении вектора на число его проекции умножаются на это число, как показано на рис. V для проекции на координатную ось Ox :

$$aA = (aA_x)i + (aA_y)j + (aA_z)k \quad (\text{M.18})$$

При сложении векторов их проекции складываются (рис. VII):

$$A + B = (A_x + B_x)i + (A_y + B_y)j + (A_z + B_z)k \quad (\text{M.19})$$

Проекции A_x, A_y, A_z полностью характеризуют вектор A , определяя, как видно из рис. VI, его модуль:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{M.20})$$

и ориентацию:

$$\cos \alpha_x = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos \alpha_y = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos \alpha_z = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}. \quad (\text{M.21})$$

У векторных физических величин принято наименование (размерность) присписывать проекциям вектора, а орты считаются безразмерными величинами. Еще раз обращаем внимание на обозначения, которых мы строго придерживаемся в тексте:

A - символическое обозначение векторной физической величины;

A_x - составляющая вектора A вдоль оси Ox ;

A_x - проекция вектора A на ось Ox ;

$A \equiv |A|$ - модуль вектора A .

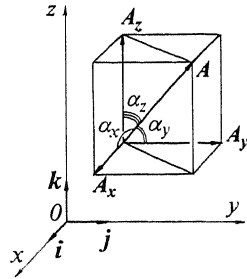


Рис. VI

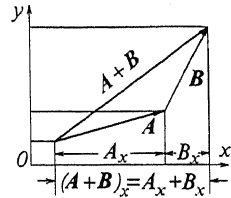


Рис. VII

Векторы можно умножать друг на друга, причем в отличие от произведения скалярных величин здесь вводят два вида произведений:

а) скалярным произведением векторов A и B (обозначается (A, B) или $A \cdot B$) по определению является произведение модулей A и B векторов и косинуса угла α между ними:

$$(A, B) = AB \cos \alpha. \quad (M.22)$$

Это скалярная величина, причем $(A, B) > 0$, если $\alpha < \pi/2$ ($\cos \alpha > 0$), $(A, B) < 0$, если $\alpha > \pi/2$ ($\cos \alpha < 0$), и $(A, B) = 0$, если векторы взаимно перпендикулярны ($\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$). Так как $A \cos \alpha = A_x$ и $B \cos \alpha = B_x$, то скалярное произведение можно записать в виде:

$$(A, B) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (M.23)$$

Легко доказать также справедливость следующей формулы:

$$(A, B) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (M.24)$$

б) векторным произведением векторов A и B (обозначается $[A, B]$ или $A \times B$) называется вектор C , модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов и синуса угла α между ними:

$$C = AB \sin \alpha, \quad (M.25)$$

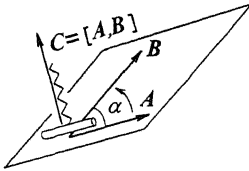


Рис. VIII

а направление определяется правилом буравчика: если расположить острие буравчика перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы A и B , совместить его рукоятку с первым вектором и поворачивать ее ко второму вектору по кратчайшему углу, то поступательное движение буравчика определит направление векторного произведения $C = [A, B]$ (рис. VIII). Отметим два свойства векторного произведения:

1). В отличие от произведения чисел векторное произведение некоммукативно: при изменении порядка сомножителей оно меняет знак:

$$[A, B] = -[B, A] \quad (M.26)$$

2). Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах:

$$|[A, B]| = S_{\text{паралл.}}. \quad (M.27)$$

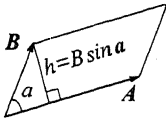


Рис. IX

Действительно, высота параллелограмма $h = B \sin \alpha$ (рис. IX), так что $[A, B] = AB \sin \alpha = Ah = S_{\text{паралл.}}$.

Скалярное и векторное произведения обладают основными свойствами обычного произведения, в частности:

$$[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C] \quad (\text{дистрибутивность}),$$

$$[aA, B] = a[A, B],$$

(M.28)

$$\frac{d}{dx} [A(x), B(x)] = \left[\frac{dA}{dx}, B \right] + \left[A, \frac{dB}{dx} \right] \quad (\text{о производной вектора см. ниже}).$$

Производная векторной функции $A(t)$ скалярного аргумента t (например, времени t) определяется аналогично производной скалярной функции:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}, \quad (\text{M.29})$$

где ΔA - приращение вектора A , обусловленное приращением Δt аргумента: $\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$ (рис. X а). Согласно этому определению производная вектора сама является векторной величиной. Ее проекции на направления координатных осей Ox, Oy, Oz получим, дифференцируя выражение вектора, записанное в форме (M.16), с учетом постоянства ортов:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} j + \frac{dA_z}{dt} k \quad (\text{M.30})$$

Таким образом, проекциями производной вектора являются производные его проекций:

$$(dA/dt)_x = dA_x/dt \text{ и т.п..}$$

Малое приращение вектора A можно представить как сумму приращений ΔA_{\parallel} и ΔA_{\perp} , направленных, соответственно, вдоль вектора A и перпендикулярно ему (рис. X б):

$\Delta A = \Delta A_{\parallel} + \Delta A_{\perp}$. Первое вызывает изменение модуля, второе - изменение направления вектора. Если малые приращения ΔA , а, следовательно, и производная dA/dt , все время перпендикулярны вектору $A(t)$ ($\Delta A_{\parallel} = 0, \Delta A = \Delta A_{\perp}$), то модуль вектора остается постоянным, а изменяется только его ориентация. Если при этом все малые приращения ΔA и сам вектор $A(t)$ лежат в одной плоскости, то вектор поворачивается в этой плоскости (в плоскости чертежа на рис. XI).

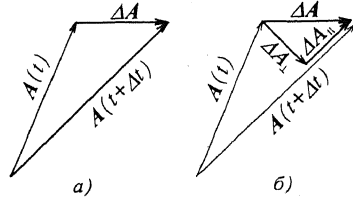


Рис. X

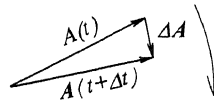


Рис. XI

ВВЕДЕНИЕ

Физика, как и в значительной мере другие естественные науки, относится к числу точных наук. Это, конечно, не означает, что ее методы позволяют измерить или вычислить какую-либо величину абсолютно точно - это принципиально невозможно. От точной науки требуется, чтобы она давала количественный, а не только качественный ответ на поставленный вопрос, с указанием погрешности, с которой верен представляемый результат. Поэтому физика немыслима без математического аппарата.

Прежде чем приступить к решению той или иной задачи выбирается физическая модель, т.е. четко оговаривается, из каких представлений об изучаемом объекте исходят в данном исследовании. В соответствии с принятой моделью записываются математические соотношения, являющиеся выражением физических законов или определением физических величин, необходимые и достаточные для решения задачи. Затем проводятся математические выкладки, строгие или приближенные, и физический анализ полученных результатов. Упомянем некоторые модельные представления, используемые в общем курсе физики: модели материальной точки и абсолютно твердого тела в механике, модель идеального газа в молекулярной физике, модели квазиупругих диполей и молекулярных токов в электромагнетизме, планетарная и квантовая модели атома в атомной физике и т.д. Одна и та же физическая проблема может быть исследована в рамках различных моделей. Более грубая модель часто не в состоянии объяснить все стороны рассматриваемого явления, зато более проста в обращении. Так, например, классическая модель идеального газа, в которой молекулы рассматриваются как частицы, подчиняющиеся ньютоновской механике, позволяет без труда получить уравнение состояния, но приводит к неверной зависимости теплоемкости от температуры. Для решения этой проблемы приходится использовать квантовую модель атома и квантовую статистику.

Измерить физическую величину (непосредственно прибором или косвенно, т.е. вычисляя по формуле, выражающей ее через другие физические величины) - значит установить, сколько единиц, принятых для ее измерения, она составляет. Поэтому физическая величина выражается именованным числом, у которого наименование обозначает единицу измерения. В физике оказывается достаточным произвольно выбрать единицы измерения для шести физических величин (основные). В Международной системе единиц (СИ), которой в соответствии с рекомендацией мы будем пользоваться, за основные выбраны единицы: длины - метр (1м), массы - килограмм (1кг), времени - секунда (1с), температуры - кельвин (1К), силы тока - ампер (1А), силы света - кандела (1кд). Единицы измерения остальных физических величин являются производными от основных и вытекают как следствие из формул, связывающих эти величины с основными. Например, единица измерения скорости следует из определения величины скорости $v = \Delta S / \Delta t$: $v = 1$ ед.ск., если за время $\Delta t = 1$ с тело проходит путь $\Delta S = 1$ м. Соотношение, выражающее единицу физической величины через основные единицы, называется формулой размерности. Для скорости 1 ед.ск. = 1м/1с и формула размерности скорости имеет вид: $[V] = [L]/[T]$, где [L] и [T] - символическое обозначение размерностей длины и времени. Подчеркнем, что определение физической величины должно указывать, как эту величину можно прямо или косвенно измерить (см. определение силы в §7, хотя в большинстве случаев возможный способ измерения физической величины виден из формулы, являющейся ее определением).

Вряд ли имеет смысл пытаться четко очертить круг вопросов, которыми занимается физика: с развитием техники эксперимента он неуклонно расширяется. Из новой проблематики, возникшей во второй половине нашего века, можно отметить: попытки систематизации элементарных частиц; создание нелинейной оптики, обязанной своим возникновением изобретению лазера; рождение по сути дела новой науки - синергетики, открывающей перспективу теоретически осмыслить эволюцию мира.

Развиваясь, физика все более внедряется в смежные науки - биологию, химию, причем речь идет не только о растущей роли физических методов исследования в этих

науках. Специфичность объектов исследования разных естественных наук может создать впечатление о существовании такой иерархии в природе, при которой законы, действующие в различных областях явлений, не взаимосвязаны, принципиально не сводимы друг к другу. Примером может служить утверждение о невозможности объяснить поведение живого организма на основе законов механики (несводимость высшей формы движения материи к низшей). Однако последнее время ученые все более склоняются к мысли, что, повидимому, все изученные закономерности должны вписываться в одну схему и являться частными проявлениями неких единых законов, управляющих развитием мироздания. Такое стремление понять многообразие явлений с единой позиции прослеживается и в рамках самой физики. Упомянем создание Максвеллом уже в конце прошлого века теории электромагнитного поля, объединившей электрическое и магнитное поля, до тех пор рассматривавшиеся как самостоятельные (сравнительно недавно с электромагнитными удалось объединить и так называемые слабые взаимодействия, проявляющиеся в области микромира). Эйнштейн последние годы жизни посвятил попытке, правда безуспешной, объединить электромагнитное поле с гравитационным. В настоящее время физики-теоретики работают над созданием единой теории поля, которая позволила бы трактовать все известные элементарные частицы и поля как частные проявления некоего единого поля. Если эта тенденция будет развиваться и приведет в конечном итоге к пониманию единства мироздания, то физике в этом процессе отведена ведущая роль.

О НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ

Механика - раздел физики, в котором изучаются перемещения материальных объектов в пространстве. С тех пор, как в 1687 г. И.Ньютон сформулировал три свои знаменитые закона механики, в течение более двух веков представлялось надежно установленным, что им подчиняется движение любых объектов - от микрочастиц до космических тел, т.е. законы ньютоновской механики универсальны.

Однако с развитием физики в начале XX века стало ясно, что область применимости законов Ньютона ограничена, причем в двух отношениях. Во-первых, выяснилось, что ньютоновская механика не применима для описания микрочастиц - элементарных частиц, атомов, простых молекул, т.е. частиц, размеры которых порядка или меньше ангстрема ($1\text{Å} = 0,1\text{ нм}$ - характерный атомный размер). В первой четверти XX века была в основных чертах создана квантовая механика (Планк, Эйнштейн, де-Бройль, Бор, Шредингер, Гейзенберг, Дирак и др.), описывающая явления в микромире. Она кардинально отличается от ньютоновской механики не только математической формой законов, но и самим подходом к описанию движения частицы. В общем курсе физики не представляется возможным систематически изложить основы квантовой механики и ограничиваются весьма упрощенной ее трактовкой при объяснении ряда явлений, в основном в атомной физике.

Во-вторых, оказалось, что ньютоновская механика не применима для описания движений тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме. В начале XX века была создана релятивистская механика (Лоренц, Эйнштейн, Пуанкаре), описывающая движения тел с любыми скоростями вплоть до скорости света. Формулами релятивистской механики приходится пользоваться в атомной физике, поскольку движение микрочастиц часто происходит с околосветовыми и световыми (фотон, нейтрино) скоростями. Однако для описания движения макроскопических тел, т.е. тел, состоящих из огромного количества атомов, обычно нет необходимости обращаться к релятивистской механике, так как их скорости существенно меньше скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$. Действительно, типичная формула релятивистской теории отличается от соответствующей формулы ньютоновской теории радикалом $\sqrt{1-(v/c)^2}$

(например, импульс $p = mv / \sqrt{1-(v/c)^2}$). Даже для движений тел с космическими скоростями порядка $v \approx 10\text{ км/с}$ имеем $(v/c)^2 \approx 10^{-9}$ и, пренебрегая $(v/c)^2$ по сравнению с 1, т.е. пользуясь ньютоновской формулой $p = mv$ вместо релятивистской, мы допускаем мизерную погрешность, существенно меньшую той, с которой обычно измеряется импульс.

В предлагаемом пособии излагаются основы ньютоновской, или классической, механики, которая, как пояснялось, вполне удовлетворительно описывает движение макроскопических тел. Строгая теория, описывающая движения любых тел с любыми скоростями - релятивистская квантовая механика - существенно выходит за рамки общего курса физики.

Мы начнем с изучения механики материальной точки, т.е. идеального объекта, имеющего конечную массу, но пренебрежимо малые размеры. Реальное тело можно с хорошей степенью точности считать материальной точкой в тех случаях, когда его размеры существенно меньше характерных размеров, фигурирующих в рассматриваемой задаче (или иначе: когда размеры тела не превышают погрешности, с которой в данной задаче измеряются расстояния). Но основная причина, обуславливающая исключительную роль механики материальной точки, состоит в том, что любое макроскопическое тело и любая среда могут рассматриваться как совокупность своих малых взаимодействующих элементов, т.е. как частный случай системы материальных точек.

Этим продиктовано такое построение курса механики: от механики материальной точки (главы I и II) к механике системы материальных точек (глава III) и далее к механике твердого тела (глава IV) и сред (главы V и VI). Специальные главы посвящены законам механики в неинерциальных системах отсчета (глава VII) и изучению механических колебаний (глава VIII) и упругих волн (глава IX).

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Система отсчета. Траектория. Путь. Перемещение

Прежде чем рассматривать законы, которым подчиняется движение материальной точки (динамика), необходимо научиться описывать ее движение, введя соответствующие понятия и физические величины (кинematика). При описании конкретного движения точки необходимо четко условиться, относительно какой системы отсчета (СО) оно рассматривается. Под системой отсчета в ньютоновской механике понимается тело отсчета - твердое тело, мысленно распространенное на все пространство, точки которого пронумерованы, т.е. на котором введена та или иная система координат. Простейшей системой координат является декартова прямоугольная система координат: на теле отсчета выбирается точка O - начало координат и в трех взаимно перпендикулярных направлениях проводятся координатные оси Ox, Oy, Oz (рис 1).

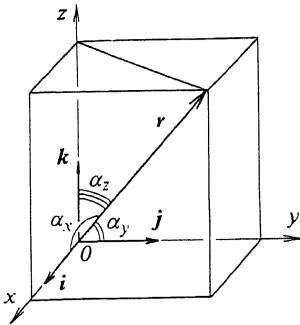


Рис. 1

Линия, по которой движется материальная точка, т.е. которую описывает конец ее радиуса-вектора, называется траекторией. Как и всякую кривую, траекторию можно математически описать, задав два соотношения между координатами x, y, z . Плоская траектория, которая при надлежащем выборе системы координат лежит в плоскости xOy , определяется одной формулой, например зависимостью $y = f(x)$. Такое задание траектории определяет лишь ее форму, но ничего не говорит о том, как движется точка по данной траектории. Можно задать траекторию иначе, при помощи формул, выражающих зависимость координат точки от времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.2)$$

Эти формулы называют кинематическим законом движения, а математической точки зрения они представляют собой уравнение траектории в параметрической форме, где роль параметра играет время. Кинематический закон движения не только определяет форму траектории (уравнения траектории в виде связей между координатами получаются из (1.2) исключением времени: достаточно выразить вре-

Положение материальной точки описывается радиусом-вектором r , проведенным в нее из начала координат. Как и всякий вектор, радиус-вектор точки можно записать в виде

$$r = xi + yj + zk \quad (1.1)$$

(см. формулу (М.16)). Здесь i, j, k - орты, т.е. тройка единичных ($|i| = |j| = |k| = 1$) взаимно перпендикулярных векторов, направленных вдоль координатных осей Ox, Oy, Oz , а проекции радиуса-вектора:

$$x \equiv r_x = r \cos \alpha_x, \quad y \equiv r_y = r \cos \alpha_y, \quad z \equiv r_z = r \cos \alpha_z,$$

($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ - углы, которые он составляет с направлением координатных осей), являются декартовыми координатами точки.

мя из одного уравнения, например из $x = x(t) \rightarrow t = t(x)$, и подставить в два других), но и показывает, в какой точке траектории находится в тот или иной момент времени движущаяся материальная точка. Как будет показано ниже, дифференцированием формул (1.2) можно найти проекции скорости и ускорения точки (см. формулы (2.4) и (3.4)). Таким образом, кинематический закон движения точки дает исчерпывающую информацию о ее движении.

Длина S_{12} участка траектории между точками 1 и 2, в которых движущаяся точка находится соответственно в моменты времени t_1 и t_2 , называется пройденным путем, а вектор r_{12} , поведенный из начальной в конечную точку, называется перемещением (рис. 2). Таким образом $r_{12} = r(t_2) - r(t_1)$, т.е. перемещение равно приращению радиус-вектора точки. При криволинейном движении путь больше модуля перемещения: $S_{12} > r_{12}$. Однако длина достаточно малого участка кривой приближенно равна длине стягивающей этот участок хорды, поэтому для малого участка траектории $\Delta S \approx \Delta r$.

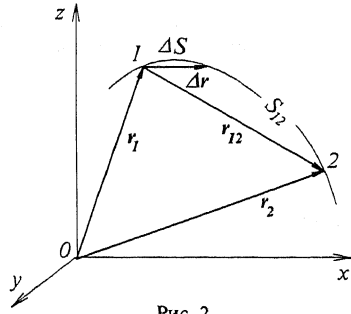


Рис. 2

§ 2. Скорость

Зададимся целью ввести физическую величину, которая характеризовала бы быстроту движения точки. Если путь S_{12} движущаяся точка проходит за время $t_{12} = t_2 - t_1$, то, разделив путь на время, найдем величину средней скорости $v_{\text{ср.}}$ на участке 1-2 траектории: $v_{\text{ср.}} = S_{12}/t_{12}$. Она характеризует лишь темп движения в среднем на пути S_{12} , не давая представления о быстроте движения точки на промежуточных участках этого пути. Полную информацию о быстроте движения точки по траектории получим, разбивая путь на малые участки ΔS_i , проходимые за отрезки времени Δt_i , затем вычисляя величину средней скорости $\Delta S_i/\Delta t_i$ на каждом из них и переходя к пределу при $\Delta t_i \rightarrow 0$.

Пусть к моменту времени t точка прошла путь $S(t)$, отсчитываемый от некоторой точки траектории, а за последующий малый промежуток времени Δt - малый путь $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ (рис. 3), так что $\Delta S/\Delta t$ - величина средней скорости точки на этом малом пути. Уменьшая величину Δt , получим последовательность средних скоростей точки на все более малых участках траектории в окрестности рассматриваемой точки. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем величину мгновенной скорости точки (или скорости в данной точке траектории, или скорости в данный момент времени), которая тем самым является производной пути по времени:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (2.1)$$

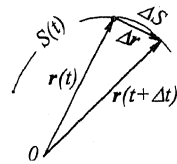


Рис. 3

Определение скорости будет более информативным, если в формуле (2.1) вместо малых путей ΔS взять малые приращения радиуса-вектора $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ (рис. 3):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) определяет скорость как вектор, являющийся производной радиуса-вектора точки по времени (см. М.30). Модуль вектора скорости определяется формулой (2.1): $|v| = |dr/dt| = |dr|/dt = dS/dt$ и, следовательно, характеризует быстроту движения точки. Направление вектора скорости указывает, куда в данный момент движется точка. Действительно, согласно (2.2) вектор v направлен туда же, куда направлен вектор Δr в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. по касательной к траектории.

Дифференцируя формулу (1.1) и учитывая постоянство ортов i, j, k (см. (М.31)), находим:

$$v = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \quad (2.3)$$

Множители перед ортами в выражении для вектора представляют собой его декартовы проекции, так что

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.4)$$

Декартовы проекции вектора однозначно определяют его модуль и ориентацию (см. (М.20) и (М.21)):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \cos \alpha_x = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \alpha_y = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \alpha_z = \frac{v_z}{v}, \quad (2.5)$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ - углы между направлением вектора v и направлениями координатных осей. Таким образом, зная кинематический закон движения (1.2), можно по формулам (2.3) - (2.5) рассчитать скорость точки. Единицей скорости в СИ, как следует из (2.1), является м/с.

§ 3. Ускорение

Введем физическую величину, которая характеризует быстроту изменения скорости v . Пусть $r(t)$ и $v(t)$ - значения радиуса-вектора и скорости точки в момент времени t , а $r(t + \Delta t)$ и $v(t + \Delta t)$ - их значения по прошествии Δt секунд (рис. 4). Отношение приращения скорости $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ к Δt характеризует среднюю быстроту изменения скорости и определяет среднее ускорение

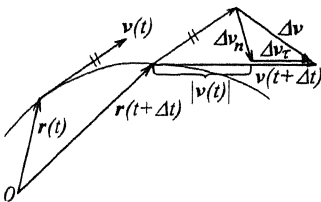


Рис. 4

$a_{\text{ср}} = \Delta v / \Delta t$ на рассматриваемом промежутке времени Δt . Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим по определению мгновенное ускорение (или ускорение в данной точке траектории, или ускорение в данный момент времени):

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad (3.1)$$

которое называют просто ускорением точки. Таким образом, ускорение точки есть производная скорости по времени или с учетом (2.2) - вторая производная радиуса-вектора точки по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} . \quad (3.2)$$

Выражая скорость через орты $v = v_x i + v_y j + v_z k$ и дифференцируя по времени, находим с учетом (2.4):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k = \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k, \quad (3.3)$$

откуда

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Модуль и направляющие косинусы ускорения выражаются через декартовы проекции ускорения стандартными формулами (М.20) и (М.21):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos \alpha_x = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \alpha_y = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \alpha_z = \frac{a_z}{a}. \quad (3.5)$$

Формулы (3.2) - (3.5) позволяют рассчитать ускорение по заданному кинематическому закону движения (1.2). Единицей ускорения в СИ, как видно, например, из (3.4), является 1м/с^2 .

§ 4. Разложение ускорения на нормальное и тангенциальное

При движении точки ее скорость в общем случае изменяется как по модулю, так и по направлению, и оба эти фактора дают вклад в ускорение. Покажем, что ускорение точки можно представить как сумму двух ускорений - тангенциального, т.е. касательного к траектории, a_τ и нормального, т.е. перпендикулярного траектории, a_n :

$$a = a_\tau + a_n, \quad (4.1)$$

причем тангенциальное ускорение обусловлено только изменением модуля скорости, а нормальное - только изменением направления скорости.

Пусть $v(t)$ и $v(t + \Delta t)$ - скорости точки в моменты времени t и $t + \Delta t$, причем для конкретности рассмотрим случай ускоренного движения, когда $v(t + \Delta t) > v(t)$ (рис. 4). Отложим на векторе $v(t + \Delta t)$ отрезок, равный $|v(t)|$, и представим приращение скорости $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ в виде суммы двух векторов Δv_τ и Δv_n , как это изображено на рис. 4: $\Delta v = \Delta v_\tau + \Delta v_n$. Разделив обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое в правой части равенства есть, по определению, тангенциальное ускорение: $a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$. Его модуль $|a_\tau| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v_\tau|}{\Delta t}$, но $|\Delta v_\tau|$ по построению

равен приращению модуля v скорости: $|\Delta v_\tau| = \Delta v$, поэтому $|a_\tau| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$. Направлен вектор a_τ туда же, куда вектор Δv_τ в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. по скорости $v(t)$ (рис. 5 а) (это видно из рис. 4, если вторую точку неограниченно приближать к первой).

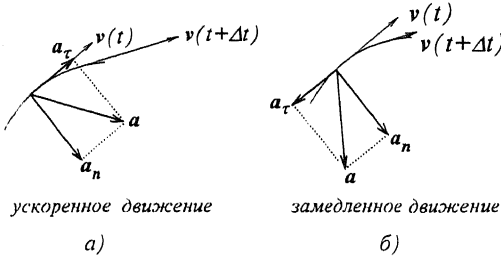


Рис.5

Последняя формула справедлива и при замедленном движении точки, однако в этом случае вектор a_τ направлен против скорости (рис. 5 б), в чем легко убедиться построением, аналогичным рис. 4, при $v(t + \Delta t) < v(t)$. В обоих случаях тангенциальное ускорение в проекции на направление скорости выражается формулой:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (4.3)$$

Второе слагаемое в (4.2) есть, по определению, нормальное ускорение точки:

$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t}$. При выводе формулы для нормального ускорения мы вправе заменить малый участок траектории малой дугой так называемого **к р у г а к р и в и з н ы**, т.е. такой окружности, которая наилучшим образом аппроксимирует (приближенно заменяет) траекторию в окрестности рассматриваемой точки (рис. 6). Радиус круга кривизны R_{kp} называется **р а д и у с о м к р и в и з н ы** траектории, а обратная величина $k = 1/R_{kp}$ - **к р и в и з н о й** траектории. На рис. 6 представлены круги кривизны для двух точек некоторой траектории: чем больше угол, на который поворачивается касательный к кривой вектор τ при малом смещении Δs вдоль кривой в окрестности рассматриваемой точки, тем больше кривизна и, соответственно, меньше радиус кривизны кривой в этой точке.

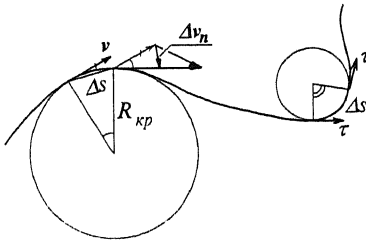


Рис.6

Из подобия равнобедренных треугольников на рис. 6 (углы при вершине равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами) имеем: $\Delta v_n/v = \Delta s/R_{kp}$, откуда находим $\Delta v_n = \Delta s v/R_{kp}$. Разделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем формулу для модуля нормального ускорения

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{R_{kp}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R_{kp}} :$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_{kp}} . \quad (4.4)$$

Она совпадает с формулой центростремительного ускорения точки, движущейся по окружности ($a_{uc} = v^2/R$), в которой вместо радиуса окружности стоит радиус кривизны кривой в рассматриваемой точке.

Направлено a_n , как следует из определения, туда же, куда и вектор Δv_n в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. перпендикулярно скорости $v(t)$ (нормально траектории), причем в сторону вогнутости (рис. 5 а и б) (в этом легко убедиться, мысленно устремляя на рис. 6 вторую точку к первой).

Модуль полного ускорения определится из рис. 5 по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R_{кр}}\right)^2} . \quad (4.5)$$

Тангенциальное ускорение согласно формуле (4.3) обусловлено изменением модуля скорости: при неравномерном движении ($dv/dt \neq 0$) оно отлично от нуля. При равномерном движении ($v = const$, $dv/dt = 0$) тангенциальное ускорение равно нулю и точка может иметь только нормальное ускорение: $a = a_n$.

Нормальное ускорение согласно (4.4) обусловлено изменением направления скорости: оно возникает при любом криволинейном движении ($k = 1/R_{кр} \neq 0$). Только при движении по прямолинейной траектории ($R_{кр} \rightarrow \infty$) оно равно нулю и точка может иметь лишь тангенциальное ускорение: $a = a_t$. Полное ускорение равно нулю лишь при равномерном ($a_t = 0$) и прямолинейном ($a_n = 0$) движении.

§ 5. Кинематика движения точки по окружности

Частным случаем криволинейного движения точки является движение по окружности. Радиус кривизны окружности равен ее радиусу R , а нормаль направлена к центру окружности, поэтому в этом случае нормальное ускорение называют **центростремительным**:

$$a_{uc} = v^2/R. \quad (5.1)$$

При описании движения точки по окружности наряду с линейными скоростью v и ускорением a удобно использовать угловые скорость ω и ускорение β . Угловую скорость точки называют вектор ω , модуль которого

$$|\omega| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad (5.2)$$

где $\Delta \varphi$ - малый угол, описываемый радиусом-вектором R точки за малый промежуток времени Δt (рис. 7 а). Следовательно, величина угловой скорости характеризует быстроту изменения угла φ со временем. Упрощенно говоря, она численно равна углу, описываемому радиусом-вектором точки за единицу времени, подобно тому, как абсолютная величина линейной скорости численно равна пути, пройденному точкой за секунду. Единицей угловой скорости в СИ является радиан/с.

Направление угловой скорости определяется правилом буравчика: если расположить острие буравчика вдоль оси вращения, а его рукоятку вращать вместе с радиусом-вектором R точки, то поступательное движение буравчика определит направление

вектора ω (рис. 7 б). Если окружность с центром в начале координат O лежит в координатной плоскости xOy правой декартовой СО и угол φ , характеризующий положение радиуса-вектора точки, отсчитывается от оси Ox в направлении, согласованном с направлением оси Oz правилом буравчика (рис. 7 в и 7 г), то угловая скорость, как легко убедиться, направлена вдоль оси Oz и ее проекция ω_z на эту ось равна производной угла φ по времени:

$$\omega = \omega_z k, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.3)$$

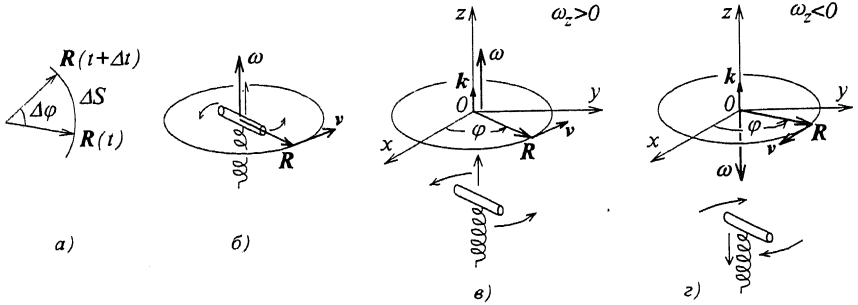


Рис. 7

Действительно, при движении точки в направлении отсчета угла φ последний растет и $\omega_z = d\varphi/dt > 0$, т.е. вектор ω направлен по оси Oz в согласии с рис. 7 в, а при движении в противоположном направлении угол φ уменьшается и $\omega_z = d\varphi/dt < 0$, т.е. угловая скорость направлена против оси Oz в согласии с рис. 7 г.

Угловым ускорением β называется производная угловой скорости по времени:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.4)$$

Согласно (5.3) угловое ускорение также направлено вдоль оси вращения Oz : $\beta = \frac{d\omega}{dt} =$

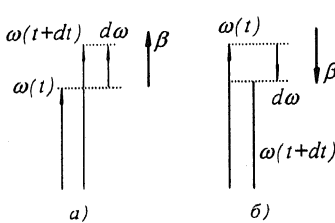


Рис. 8

$\frac{d\omega_z}{dt} k = \frac{d^2\varphi}{dt^2} k$ и его проекция β_z на эту ось

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (5.5)$$

При движении точки с возрастающей скоростью величина угловой скорости также растет, так что направления угловой скорости ω и ее приращения $d\omega$ совпадают (рис. 8 а) и, как следствие (5.4), векторы ω и β сонаправлены. При замедленном вращении (рис. 8 б) векторы

ω и β имеют противоположные направления. Единицей углового ускорения в СИ является $\text{рад}/\text{с}^2$.

В заключение выпишем формулы, связывающие модули линейных и угловых скоростей и ускорений. Они вытекают из соотношения $\Delta S = R\Delta\varphi$ между длиной дуги ΔS , углом $\Delta\varphi$ и радиусом R окружности (модулем радиуса-вектора \mathbf{R} точки) (рис. 7 а). Разделив обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим соотношение между модулями линейной и угловой скоростей: $v = R\omega$, а продифференцировав еще раз по времени, найдем связь между ускорениями: $a_t = R\beta$ (подчеркнем, что слева стоит не полное, а тангенциальное ускорение $a_t = dv/dt$). Выразим также центростремительное ускорение через угловую скорость: $a_{ц.с.} = v^2/R = \omega^2 R$; в векторной форме $\mathbf{a}_{ц.с.} = -\omega^2 \mathbf{R}$, поскольку оно направлено против радиуса-вектора \mathbf{R} точки. Итак

$$v = R\omega, \quad a_t = R\beta, \quad \mathbf{a}_{ц.с.} = -\omega^2 \mathbf{R}. \quad (5.6)$$

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Переходим к изучению законов, управляющих движением материальной точки. В основе ньютоновской механики лежат три фундаментальных закона, носящих имя ее создателя. В общем курсе физики дается более глубокая их трактовка, чем в школьном учебниках.

§ 6. Первый закон Ньютона. Преобразования Галилея

Первый закон Ньютона утверждает, что существуют СО (они называются и н е р - ц и а л ь н ы м и), относительно которых любая с в о б о д н а я материальная точка движется равномерно и прямолинейно (по инерции). Свободной материальную точку называют в тех случаях, когда на нее не действуют другие тела (пример: комета, летящая вдали от прочих космических тел).

Чтобы ответить на вопрос, как найти все инерциальные СО, выясним, как радиус-вектор r , скорость v и ускорение a материальной точки в СО K выражаются соответственно через ее радиус-вектор r' , скорость v' и ускорение a' в СО K' , движущейся относительно K поступательно, равномерно и прямолинейно (рис. 9; оси Oz и Oz' перпендикулярны плоскости чертежа). Для простоты, но без ущерба для сути дела, можно считать, что в начальный момент времени $t=0$ обе СО совпадали друг с другом и скорость V_0 СО K' относительно K направлена по оси Ox .

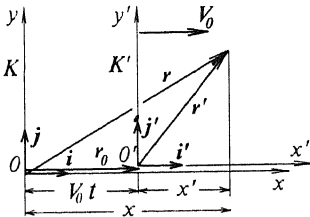


Рис. 9

Как видно из рис. 9, радиус-вектор точки в СО K $r = xi + yj + zk$ равен сумме ее радиуса-вектора в СО K' $r' = xi' + y'j' + z'k'$ ($i' = i, j' = j, k' = k$) и радиуса-вектора r_0 начала координат O' СО K' в СО K , который в нашем конкретном случае определяется формулой $r_0 = V_0 t i$:

$$r = r' + r_0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}, \quad (6.1)$$

так как при сложении векторов суммируются их декартовы проекции на соответственные оси (см. (М.19)). Эти формулы, связывающие координаты точки в двух СО, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, называются преобразованиями Галилея.

Дифференцируя (6.1) по времени и учитывая, что $V_0 = const$, находим соотношение между скоростями v и v' :

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + V_0, \\ v &= v' + V_0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_x = v'_x + V_0 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}, \quad (6.2) \end{aligned}$$

Дифференцируя (6.2) по времени, имеем:

$$\begin{aligned}
 a_x &= a'_x, \\
 a &= a', \quad \text{или} \quad a_y = a'_y, \\
 a_z &= a'_z.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Формулы (6.2) и (6.3) показывают, как преобразуются скорость и ускорение точки, если при описании ее движения перейти от одной СО к другой, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Движение точки относительно СО K можно трактовать как результат "сложения" двух ее движений: движения вместе с СО K' , т.е. движения с постоянной скоростью V_0 (переносное движение), и движения относительно СО K' . При этом скорости согласно (6.2) действительно складываются, а ускорение точки согласно (6.3) одинаково в обеих СО - оно инвариантно относительно преобразований Галилея. Инвариантно также и время, которое в ньютоновской механике считается абсолютным: показания двух одинаковых часов, синхронизованных в одной точке пространства, всегда будут совпадать друг с другом независимо от характера движения часов (формально это можно отразить, добавив к формулам (6.1) соотношение $t = t'$).

Пусть СО K - инерциальная, так что в ней ускорение свободной материальной точки равно нулю: $a_{св} = 0$. Если другая СО K' движется относительно K равномерно и прямолинейно, то согласно (6.3) в ней также $a'_{св} = 0$, т.е. она тоже инерциальная. Если же K' движется относительно K с ускорением, то равенство (6.3) не выполняется и следовательно ускорение свободной материальной точки в K' отлично от нуля - такая СО называется *неинерциальной*. Таким образом, для нахождения всего класса инерциальных СО достаточно найти одну из них: инерциальными будут те и только те СО, которые движутся относительно нее равномерно и прямолинейно, а все прочие будут неинерциальными. Эксперименты, и прежде всего астрономические наблюдения, показывают, что с высокой степенью точности инерциальной является гелиоцентрическая СО, у которой начало координат находится в центре Солнца, а оси направлены на "неподвижные" звезды. Любая СО, связанная с Землей (геоцентрическая СО с началом координат в центре Земли, лабораторная СО с началом координат вблизи поверхности Земли и др.), не являются строго инерциальными главным образом вследствие вращения Земли относительно собственной оси (некоторые эффекты, обусловленные неинерциальностью этих СО, обсуждаются в главе VII, § 33).

Заметим в заключение, что ньютоновская механика не применима для решения космологических проблем, когда речь идет об областях пространства, размеры которых сравнимы с размером исследованной части Вселенной. Согласно общей теории относительности Эйнштейна пространство в космологических масштабах неевклидово (точнее - пространство-время не псевдоевклидово) и ввести прямоугольную декартову СО можно лишь приближенно в малой по космологическим масштабам области (подобно тому, как на искривленной поверхности декартовы координаты можно ввести лишь в достаточно малой области, которую можно приближенно считать плоской).

§ 7. Второй закон Ньютона как дифференциальное уравнение движения

Согласно первому закону Ньютона материальная точка движется в инерциальной СО с постоянной скоростью, если она свободна, т.е. на нее не действуют другие тела. Воздействие со стороны окружающих тел приводит к изменению скорости материальной точки, т.е. вызывает ускорение.

В ньютоновской механике воздействия тел друг на друга удается охарактеризовать введением векторной физической величины, которая называется *силой*. Измерять силу можно, например, при помощи пружинного динамометра. С этой целью тело, на которое действует измеряемая сила F , прикрепляют к пружине динамометра, добиваясь, чтобы тело покоилось в инерциальной СО. Тогда сила F_n натяжения пружины,

действующая на тело, равна по модулю и противоположна по направлению измеряемой силе: $F = -F_n$ (рис. 10 а). Следовательно, сила F направлена вдоль пружины динамометра, а ее модуль определяется показаниями шкалы динамометра.

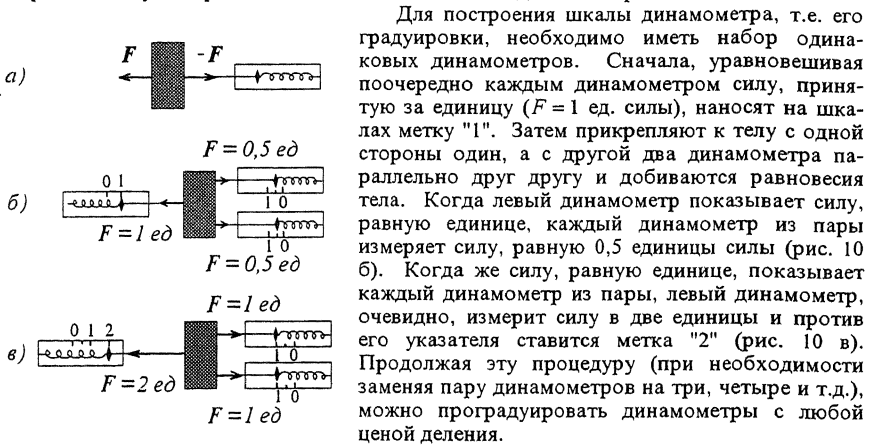


Рис. 10

Для построения шкалы динамометра, т.е. его градуировки, необходимо иметь набор одинаковых динамометров. Сначала, уравновесивая поочередно каждым динамометром силу, принятую за единицу ($F = 1$ ед. силы), наносят на шкалу метку "1". Затем прикрепляют к телу с одной стороны один, а с другой два динамометра параллельно друг другу и добиваются равновесия тела. Когда левый динамометр показывает силу, равную единице, каждый динамометр из пары измеряет силу, равную 0,5 единицы силы (рис. 10 б). Когда же силу, равную единице, показывает каждый динамометр из пары, левый динамометр, очевидно, измерит силу в две единицы и против его указателя ставится метка "2" (рис. 10 в). Продолжая эту процедуру (при необходимости заменяя пару динамометров на три, четыре и т.д.), можно проградуировать динамометры с любой ценой деления.

Анализируя результаты опытов и астрономических наблюдений, а также опираясь на законы

Кеплера и открытый Галилеем закон инерции, Ньютон пришел к заключению, что ускорение, приобретаемое материальной точкой относительно инерциальной СО, пропорционально действующей на нее результирующей силе:

$$F = ma. \quad (7.1)$$

Результирующая сила есть сумма всех сил F_i , действующих на материальную точку со

стороны окружающих тел: $F = \sum_i F_i$. Скалярная положительная физическая величина

m , являющаяся коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, называется *массой* материальной точки, а формула (7.1) является выражением второго закона Ньютона. Как следует из (7.1), материальная точка с большей массой приобретает под действием данной силы меньшее ускорение, т.е. меньше меняет свою скорость, следовательно, масса характеризует инертные свойства, являясь тем самым мерой инерции материальной точки. Единица измерения массы в СИ - 1 кг. Масса наряду с длиной и временем является основной величиной в механике, и, соответственно, основными единицами в СИ служат 1 метр, 1 секунда, 1 килограмм. Единица измерения силы в СИ называется ньютон; согласно (7.1) $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} / 1 \text{ с}^2$.

Второй закон Ньютона носит векторный характер, однако при решении задач предпочитают иметь дело со скалярными величинами - проекциями векторов, и второй закон Ньютона записывают в проекции на те или иные направления, выбор которых диктуется характером задачи. Во многих задачах удобно использовать его в проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x, \\ ma_y &= F_y, \\ ma_z &= F_z, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где a_x, a_y, a_z и F_x, F_y, F_z - соответственно, проекции ускорения и результирующей силы на оси Ox, Oy, Oz (см. (М.18)).

Уравнения, даваемые вторым законом Ньютона, позволяют решить целый ряд задач. Важнейшей является основная, или прямая задача динамики материальной точки, состоящая в том, чтобы в каждом конкретном случае уметь находить ее кинематический закон движения (1.2). Для решения этой задачи помимо массы m точки должны быть известны формулы для всех действующих на нее сил (о силах, изучаемых в механике, и закономерностях, которым они подчиняются, см. § 10). Однако и при наличии такой информации уравнения (7.2), записанные как алгебраические соотношения между силой и ускорением, дают возможность решить прямую задачу динамики по существу лишь для равнопеременного ($a = const$) движения, которое происходит под действием постоянной силы ($F = const$). В этом случае кинематический закон движения дается известными из школьного курса физики формулами: $x(t) = x_0 + v_{x0}t + a_x t^2/2$ (и аналогичными для $y(t)$ и $z(t)$), в которых проекции ускорения определяются из уравнений (7.2), а начальные координаты $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$ и проекции скорости $v_{x0} = v_x(0)$, $v_{y0} = v_y(0)$, $v_{z0} = v_z(0)$ точки предполагаются заданными.

Для решения прямой задачи в общем случае второй закон Ньютона, пользуясь определением ускорения (3.2), записывают в дифференциальной форме:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (7.3)$$

или в проекции на оси координат с учетом (3.4):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Эти уравнения называются уравнениями движения материальной точки; они представляют собой систему трех дифференциальных уравнений для трех неизвестных функций времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. В математике уравнение называется дифференциальным, если в него наряду с неизвестной функцией входят также ее производные. Высший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения, и поскольку в формулы для сил не входят производные координат выше первого порядка (см. далее формулы (10.3), (10.10), (10.13), (10.14), (10.16)), то каждое из трех уравнений в (7.4) - второго порядка.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что формула, представляющая общее решение дифференциального уравнения второго порядка, т.е. заключающая в себе все решения этого уравнения, содержит две произвольные постоянные. Соответственно, общее решение системы (7.4) содержит шесть произвольных постоянных C_1, \dots, C_6 : $x(t, C_1, \dots, C_6)$, $y(t, C_1, \dots, C_6)$, $z(t, C_1, \dots, C_6)$. Это означает, что материальная точка данной массы под действием данных сил может двигаться по одной из бесчисленного множества траекторий, каждой из которых соответствуют свои значения констант C_1, \dots, C_6 . Чтобы определить траекторию однозначно, необходимо задать шесть дополнительных условий, которым должна удовлетворять траектория. В

качестве таких условий обычно задаются начальные условия, или начальные данные, т.е. значения координат и проекций скорости в начальный момент времени $t = 0$: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$; $v_x(0) = v_{x0}$, $v_y(0) = v_{y0}$, $v_z(0) = v_{z0}$. Потребовав, чтобы искомая траектория удовлетворяла начальным условиям, имеем шесть уравнений: $x(0, C_1, \dots, C_6) = x_0$, ..., $v_z(0, C_1, \dots, C_6) = v_{z0}$, из которых находятся конкретные значения постоянных C_1, \dots, C_6 , выраженные через начальные данные. Таким образом задание начальных условий выделяет из множества траекторий, удовлетворяющих данным уравнениям движения, единственную, которая удовлетворяет этим условиям. (Для закрепления материала рекомендуем сразу же обратиться к § 36, где описанная процедура применяется для нахождения кинематического закона движения в случае свободных гармонических колебаний.)

К сожалению найти точное решение уравнений движения удастся лишь в редких случаях, когда формула для силы имеет достаточно простой вид. Поэтому прямая задача динамики обычно решается приближенными методами. Опишем простейшую процедуру приближенного расчета траектории материальной точки, предложенную самим Ньютоном. Движение разбивается по времени на этапы (шаги) малой длительности Δt каждый, и траектория восстанавливается поэтапно. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ радиус-вектор точки и ее скорость равны, соответственно: $r(0) = r_0$ и $v(0) = v_0$. Малое перемещение Δr точки на первом этапе согласно (2.2) приближенно равно $\Delta r = v_0 \Delta t$, так что в конце первого этапа ее радиус-вектор $r_1 = r_0 + v_0 \Delta t$ (см. рис. 11). Скорость точки на первом этапе получит приращение, которое согласно (3.2) приближенно равно $\Delta v = a_0 \Delta t$, и станет равной в конце первого этапа $v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$. Ускорение a_0 на первом этапе можно считать постоянным и опреде-

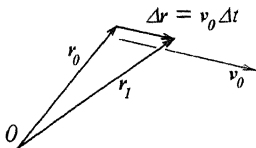


Рис. 11

лить его из второго закона Ньютона: $a_0 = F(r_0, v_0)/m$, используя значение силы в начале этапа $F(r_0, v_0)$ (в улучшенных методах ускорение на этапе вычисляется при помощи более уточненной процедуры). Таким образом удастся определить значения радиуса-вектора r_1 и скорости v_1 в конце первого, т.е. в начале второго, этапа и процедура может быть продолжена. Подчеркнем, что ускорение на каждом i -м этапе определяется значением силы на этом этапе: $a_i = F(r_i, v_i)/m$, поэтому для решения задачи результирующая сила должна быть известна как функция координат и скорости точки во всей области пространства, где ищется траектория.

§ 8. Принцип относительности Галилея

В механике выполняется принцип относительности, впервые высказанный Галилеем и носящий его имя: механические явления протекают одинаково во всех инерциальных СО. Согласно принципу относительности Галилея кинематический закон движения материальной точки будет одним и тем же во всех инерциальных СО, если опыт проводится при одинаковых условиях, т.е. при том же расположении и движении тел, воздействующих на рассматриваемую точку, и при тех же начальных условиях. Но кинематический закон движения является решением уравнений движения (7.4), представляющих собой запись второго закона Ньютона (7.1) в дифференциальной форме. Поэтому для выполнения принципа относительности Галилея необходимо, чтобы сами уравнения (7.1) имели одинаковый вид во всех инерциальных СО, т.е. не меняли своей формы при преобразованиях Галилея (6.1). Ускорение согласно (6.3) инвариантно относительно преобразований Галилея; масса и силы, изучаемые в механике, также инвариантны (см. замечание в конце § 10), чем и обеспечивается одинаковость формы уравнений движения материальной точки во всех инерциальных СО. В современной физике

принцип относительности формулируется более широко: все без исключения процессы (а не только механические) протекают одинаково во всех инерциальных СО.

При этом выяснилось, что координаты точки (точнее - события) в двух инерциальных СО связаны друг с другом более сложными формулами, чем преобразования Галилея (6.1) - они называются преобразованиями Лоренца. Уравнения движения, даваемые вторым законом Ньютона, не сохраняют своей формы при преобразованиях Лоренца, что указывает на приближенный характер ньютоновской механики. Уравнения движения в релятивистской механике, построенной в начале нашего века и описывающей движение материальной точки с любыми скоростями вплоть до скорости света в вакууме, сохраняют форму при преобразованиях Лоренца. Однако, как было пояснено во введении, движение макроскопических тел вполне удовлетворительно описывается ньютоновской механикой и не возникает практической необходимости пользоваться релятивистскими формулами.

§ 9. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона подчеркивает, что в природе нет односторонних воздействий, а есть лишь взаимодействия тел, и уточняет основные свойства этих взаимодействий: силы взаимодействия двух материальных точек действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки, равны по модулю и противоположны по направлению. На рис. 12 представлены случаи, когда силы взаимодействия материальных точек 1 и 2 являются силами притяжения (а) и силами отталкивания (б). Индексы у силы символизируют точки, на которую (первый индекс) и со стороны которой (второй индекс) действует данная сила. Для некоторых видов взаимодействий справедливость третьего закона Ньютона непосредственно вытекает из конкретных законов, описывающих эти взаимодействия, например, для гравитационных сил - из закона всемирного тяготения Ньютона, для электростатических сил - из закона Кулона. В других случаях его справедливость менее очевидна и есть пример, когда он нарушается (взаимодействие движущихся зарядов при неучете импульса их электромагнитного поля). Однако все свидетельствует о том, что в нерелятивистской механике макроскопических тел третий закон Ньютона универсален. Косвенным подтверждением этому служит выполнение законов сохранения импульса и момента импульса, при выводе которых, как мы увидим, существенно используется предположение, что любые силы взаимодействия между материальными точками механической системы подчиняются третьему закону Ньютона.

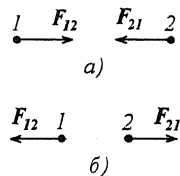


Рис.12

§ 10. Силы в ньютоновской механике

Чтобы находить результирующую силу, действующую на материальную точку, необходимо знать, как она взаимодействует с другими телами. По современным представлениям в природе существуют четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные. Два первых играют существенную роль в микромире: сильные взаимодействия между нейтронами и протонами обеспечивают стабильность атомных ядер, а слабые проявляют себя при взаимных превращениях элементарных частиц. Во взаимодействиях макроскопических тел, которые рассматриваются в ньютоновской механике, участвуют гравитационные и электромагнитные силы. При этом последние проявляют себя во взаимодействии не только заряженных, но и нейтральных тел: межмолекулярные взаимодействия электромагнитной природы приводят к возникновению упругих сил и сил трения, которые, наряду с гравитационными, изучаются в ньютоновской механике.

Гравитационные силы. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона все тела притягиваются друг к другу. Силы взаимного гравитационного притяжения двух материальных точек, т.е. тел, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними, удовлетворяют третьему закону Ньютона. Они направлены по прямой, соединяющей точки, навстречу друг другу и имеют одинаковый модуль

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (10.1)$$

где m_1, m_2 - массы материальных точек, r - расстояние между ними, G - универсальная гравитационная постоянная, которая в СИ имеет величину $G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ нм}^2 \text{ кг}^{-2}$. В векторной форме обе силы взаимодействия можно выразить одной формулой:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} r, \quad (10.2)$$

если под r понимать вектор, проведенный в точку, на которую действует сила F , из точки, со стороны которой она действует (рис. 13).

Чтобы найти силу гравитационного взаимодействия двух тел конечных размеров, необходимо мысленно разбить оба тела на малые элементарные участки, которые можно считать материальными точками, и просуммировать силы, действующие со стороны элементов одного тела на элементы другого тела.

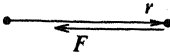


Рис. 13

Замечательно то обстоятельство, что характеристикой тела, ответственной за его гравитационное взаимодействие с другими телами, т.е. играющей роль "гравитационного заряда", является масса тела (сравните закон всемирного тяготения (10.2) с законом Кулона взаимодействия точечных зарядов). По этой причине иногда различают инертную массу, которая фигурирует во втором законе Ньютона и характеризует инертные свойства тела, и гравитационную массу, задействованную в законе всемирного тяготения и отвечающую за гравитационное взаимодействие. Эти массы у данного тела оказываются равными (точнее - пропорциональными) друг другу. Эйнштейн усмотрел глубокий смысл в факте равенства инертной и гравитационной масс тела, положив его в основу своей знаменитой релятивистской теории тяготения, или общей теории относительности.

Для описания гравитационного взаимодействия вводится понятие поля тяготения, или гравитационного поля, посредством которого это взаимодействие реализуется. Тела порождают в пространстве гравитационное поле, которое в свою очередь воздействует на всякое оказавшееся в нем тело. В общем курсе физики не принято излагать всемирное тяготение в рамках теории поля отчасти по той причине, что оно обладает теми же свойствами, что и электростатическое поле, подробно изучаемое в разделе "Электростатика". Единственное существенное различие этих полей состоит в том, что между заряженными телами в зависимости от знака их зарядов реализуются как силы притяжения, так и силы отталкивания, в то время как гравитационные силы всегда являются силами притяжения.

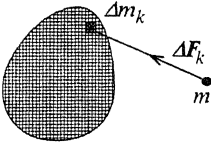


Рис. 14

Сила F , действующая на материальную точку, находящуюся в поле тяготения, пропорциональна ее массе m . В самом деле, силы ΔF_k , действующие на рассматриваемую точку со стороны малых элементов Δm_k тел, порождающих поле (рис. 14), согласно (10.2) пропорциональны массе m :

$$\Delta F_k = -G \frac{m \Delta m_k}{r_k^3} r_k \quad (r_k - \text{вектор, проведенный из элемента } \Delta m_k$$

в рассматриваемую точку), и при нахождении результирующей силы она выносится за знак суммы:

$$\mathbf{F} = \sum_k \Delta \mathbf{F}_k = -m \left(G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k \right). \quad (10.3)$$

Уравнение движения материальной точки, находящейся под действием только сил тяготения (свободно падающей в гравитационном поле), имеет вид:

$$m \mathbf{a} = -m \left(G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k \right). \quad (10.4)$$

Сокращая массу m (по смыслу слева стоит инертная, а справа - гравитационная массы), получаем следующую формулу для ускорения свободно падающей в поле тяготения материальной точки, которое называют ускорением свободного падения и обозначают буквой g :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \sum_k \frac{\Delta m_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k. \quad (10.5)$$

Оно не зависит от массы материальной точки, и следовательно, все материальные точки при одинаковых начальных условиях движутся в данном поле тяготения одинаково.

Движение в центральном поле сил тяготения. Небесные тела (звезды, планеты и их спутники) в хорошем приближении можно считать шарами, в которых масса распределена сферически симметрично, т.е. плотность ρ зависит только от расстояния r до центра шара: $\rho = \rho(r)$. Простейшей задачей астрономии является нахождение траекторий тела (материальной точки), движущегося в поле тяготения шарообразного небесного тела. Такая проблема возникает при изучении движения планеты в поле тяжести Солнца, спутника планеты в поле тяжести этой планеты и т.п., если пренебречь всеми прочими силами, в частности влиянием других планет. Можно показать, что шар действует на материальную точку с такой же силой, с какой на нее действовала бы материальная точка, обладающая массой шара и расположенная в его центре. Следовательно, в инерциальной СО с началом координат в центре шара массы M сила тяготения, действующая на материальную точку массы m , согласно (10.2) запишется в виде:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (10.6)$$

где \mathbf{r} - радиус-вектор материальной точки (рис. 15). Эта сила всегда направлена к началу координат (центру шара), поэтому такое поле называют **центральным**. Ускорение свободного падения в центральном поле сил тяготения согласно (10.5) и (10.6) определяется формулой:

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}. \quad (10.7)$$

Это ускорение, как и действующая на материальную точку гравитационная сила, направлено к центру шара и убывает по величине обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара (рис. 16 а).

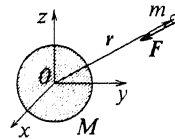


Рис.15

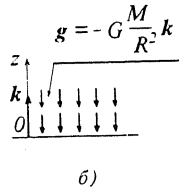
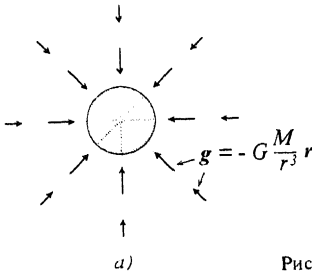
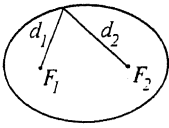
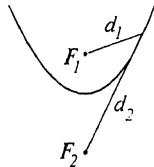


Рис. 16



$$d_1 + d_2 = \text{const}$$



$$d_1 - d_2 = \text{const}$$

Рис. 17

ной точки в центральном поле сил тяготения называют коническими сечениями.

Задание скорости в данной точке данного центрального гравитационного поля однозначно определяет траекторию. Если телу сообщить начальную скорость v_0 в направлении, перпендикулярном его радиусу-вектору r (рис. 18), то в зависимости от величины этой скорости могут быть реализованы все перечисленные виды траекторий:

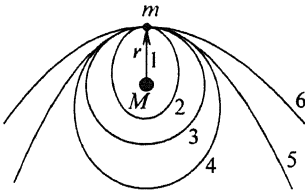


Рис. 18

- $v_0 = 0$ - прямая 1;
- $0 < v_0 < v_1$ - эллипс 2;
- $v_0 = v_1$ - окружность 3 радиуса r
(v_1 называется круговой скоростью);
- $v_1 < v_0 < v_2$ - эллипс 4;
- $v_0 = v_2$ - парабола 5
(v_2 называется параболической скоростью);
- $v_0 > v_2$ - гипербола 6.

Применительно к проблеме запуска ракет или искусственных спутников Земли круговая и параболическая скорости v_1 и v_2 имеют простой смысл. Скорость v_1 необходимо сообщить телу, чтобы оно двигалось вокруг Земли по круговой орбите - она называется первой космической скоростью. При этом ускорение свободного падения (10.7) является центростремительным ускорением (5.1): $GM/r^2 = v_1^2/r$. Отсюда, с учетом (10.7),

Как показывает анализ, типичными траекториями материальной точки в центральном поле тяжести являются эллипс и гипербола, один из фокусов которых находится в центре шара. (Напомним, что эллипсом (и соответственно, гиперболой) называется плоская фигура, сумма (и соответственно, разность) расстояний от точек кото-

рой до двух фиксированных точек - фокусов - есть величина постоянная; эллипс и гипербола изображены на рис. 17, где фокусы обозначены буквами F_1 и F_2). Частным случаем эллипса является окружность, а переходным случаем от эллипса к гиперболе - парабола; при начальной скорости, направленной радиально, траектория прямолинейная. Все эти кривые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью, поэтому траектории материальной

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}} = \sqrt{gr} . \quad (10.8)$$

Для околоземной орбиты $r \approx R_1$, где радиус Земли $R_1 \approx 6400 \text{ км}$, а $g = g(R_1) \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, что приводит к значению $v_1 \approx 7,9 \text{ км/с}$.

При сообщении телу скорости v_2 оно будет двигаться по параболе и покинет пределы земного тяготения. Утверждение остается в силе при любом направлении скорости v_2 ; от него зависит лишь форма параболы, которая при радиальном направлении скорости вырождается в прямую (если скорость направлена в сторону Земли так, что траектория пересекает земную поверхность, тело, естественно, упадет на Землю). Поскольку при $v < v_2$ траектория эллиптическая, это означает, что v_2 является минимальной скоростью, которую нужно сообщить телу, чтобы оно вышло за пределы земного притяжения. Она называется второй космической скоростью и определяется формулой:

$$v_2 = \sqrt{2gr} . \quad (10.9)$$

Вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ больше первой и в случае запуска с поверхности Земли имеет значение $v_2 \approx 11,2 \text{ км/с}$. Вывод формулы (10.9) дается в гл III, § 15, с. 58.

Третьей космической скоростью v_3 называется наименьшая скорость, которую надо сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев силы притяжения Земли и Солнца, покинуло Солнечную систему. Эта скорость должна совпадать по направлению со скоростью орбитального движения Земли, и, как показывает расчет, имеет величину $v_3 \approx 16,7 \text{ км/с}$.

В небольшой по сравнению с радиусом Земли области вблизи земной поверхности вектор g приблизительно постоянен по величине и направлению: $g = -G \frac{M}{R^2} k$, где k - единичный вектор в направлении оси Oz , направленной вертикально вверх (рис. 16 б). В этой области поле вектора g , как и поле сил тяготения $F = mg$, действующих на материальную точку массы m , можно считать однородным. В однородном поле сил тяготения, как хорошо известно из школьного курса физики, материальная точка движется по параболе.

Упругие силы. Упругие деформации тел и связанные с ними упругие напряжения подробно изучаются в главе V, а здесь будет дана минимальная информация об упругих силах, необходимая для решения задач на движение тел. Деформированное тело, стремясь восстановить исходную форму, может оказывать силовое воздействие на другие тела, находящиеся в контакте с ним. Такого рода силой действует растянутая или сжатая пружина на закрепленные на ее концах тела; подставка, деформированная стоящим на ней телом, давит на это тело и т.п.

Деформации и обусловленные ими силы называются упругими, если тело после снятия внешних воздействий, вызвавших эти деформации, восстанавливает первоначальную форму. При сравнительно небольших деформациях величина упругой силы пропорциональна величине, характеризующей деформацию. Так, при растяжении или сжатии упругой невесомой пружины длиной l_0 до длины l на закрепленные на ее концах тела действуют силы, модуль F которых пропорционален удлинению (или сжатию) $\Delta l = |l - l_0|$ пружины:

$$F = k \Delta l , \quad (10.10)$$

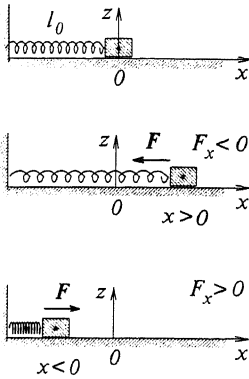


Рис. 19

где k - коэффициент жесткости пружины, зависящий от ее свойств - формы пружины и материала, из которого она изготовлена. Часто в задачах один из концов пружины закреплен неподвижно, а тело, прикрепленное к другому ее концу, совершает прямолинейное движение. Тогда естественно провести координатную ось Ox вдоль пружины с началом координат в точке, в которой находится тело при недеформированной пружине (рис. 19, тело считаем материальной точкой). Упругая сила, действующая на тело со стороны пружины, направлена вдоль оси Ox и ее проекция F_x определяется формулой:

$$F_x = -kx, \quad (10.11)$$

где x - координата тела. Действительно, эта формула дает правильное значение модуля силы: $F = |F_x| = k|x| = k\Delta l$ и правильно учитывает ее направление: при растянутой пружине ($x > 0$) имеем $F_x < 0$, а при сжатой ($x < 0$) $F_x > 0$ в согласии с истинным направлением силы в этих ситуациях (рис. 19).

В достаточно жестких телах упругие силы значительной величины возникают даже при незначительных деформациях, которые во многих задачах не учитывают, рассматривая тело как абсолютно твердое. При этом упругие силы фигурируют как неизвестные в уравнениях, в которые они входят. Примерами такой идеализации являются сила реакции опоры, действующая на тело со стороны деформированной (но пренебрежимо мало) жесткой подставки, и сила натяжения нерастяжимой (растянутой, но пренебрежимо мало) нити, действующая на подвешенное на ней тело.

Силы трения. Силы трения возникают при контакте макроскопических тел и направлены по касательной к их поверхности. На твердое тело может действовать сила сухого трения со стороны другого твердого тела, с которым оно контактирует, и сила жидкого трения со стороны жидкой или газообразной среды, в которой оно движется. В свою очередь силы сухого трения подразделяются на силы трения покоя и силы трения скольжения. Если к телу, покоящемуся на горизонтальной поверхности, приложить постепенно возрастающую горизонтальную силу F , то пока величина этой силы не достигнет величины силы трения скольжения $F_{\text{тр.ск}}$, тело остается в покое. Согласно второму закону Ньютона это означает,

что до начала движения на тело со стороны подставки действует сила $F_{\text{тр.пок.}}$, равная по модулю и противоположная по направлению приложенной силе: $F_{\text{тр.пок.}} = -F$; она называется силой трения покоя (рис. 20 а). Когда величина приложенной силы достигнет значения силы трения скольжения, тело придет в движение и на него будет действовать сила трения скольжения (рис. 20 б). Опыт показывает, что модуль силы трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления N подставки на тело и практически не зависит от скорости тела:

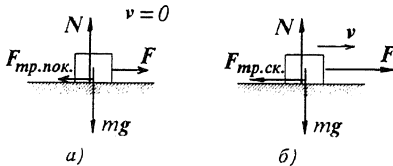


Рис. 20

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N, \quad (10.12)$$

а направление противоположно скорости v тела относительно подставки. Следовательно, в векторной форме сила трения скольжения описывается формулой:

$$F_{\text{тр. ск.}} = -\frac{\mu N}{v} v \quad (10.13)$$

Коэффициент пропорциональности μ между величинами сил трения скольжения и нормального давления называется коэффициентом трения скольжения. Он зависит от материалов, из которых изготовлены контактирующие тела.

На тело, движущееся в жидкости или газе, со стороны среды действует сила, имеющая в общем случае две составляющие: силу лобового сопротивления и $F_{\text{л.с.}}$, направленную против скорости v тела, и подъемную силу F_n , перпендикулярную скорости тела (см. рис. 21 а). При движении тела вдоль его оси симметрии подъемная сила не возникает (рис. 21 б). Если к тому же скорость тела достаточно мала, то сила лобового сопротивления пропорциональна скорости тела относительно среды:

$$F = -bv, \quad (10.14)$$

где b - коэффициент жидкого трения, зависящий от формы и размеров тела и от свойств среды. Знак минус отражает тот факт, что сила жидкого трения направлена против скорости тела. При больших скоростях тела линейная зависимость от скорости переходит в квадратичную с другим коэффициентом пропорциональности:

$$F = b_1 v^2, \quad (10.15)$$

или в векторной форме:

$$F = -b_1 v v. \quad (10.16)$$

Подробнее о природе сил жидкого трения см. гл. VI, § 29.

Заметим в заключение, что все переменные, от которых зависят рассмотренные силы (радиусы-векторы точек r_k в (10.3), удлинение пружины Δl в (10.10), скорости тела относительно подставки или среды в (10.13), (10.14) и (10.16)) инвариантны относительно преобразований Галилея (6.1), а следовательно, инвариантны и сами силы. Вместе с инвариантностью массы и ускорения это приводит к инвариантности второго закона Ньютона, чем обеспечивается выполнение принципа относительности Галилея.

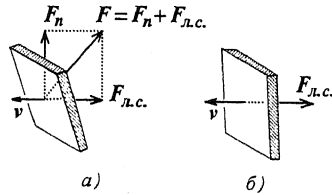


Рис. 21

МЕХАНИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 11. Введение

Рассмотрев механику отдельной материальной точки, изучим теперь, как ведет себя их совокупность, т. е. система материальных точек.

Состояние системы, состоящей из N материальных точек с известными массами m_1, m_2, \dots, m_N , определяется заданием координат и скоростей всех точек системы. На каждую материальную точку системы действуют силы как со стороны других точек системы (внутренние силы), так, вообще говоря, и со стороны внешних тел, не входящих в состав рассматриваемой системы (внешние силы). Внутреннюю силу, действующую на i -ю точку системы со стороны k -й, будем обозначать символом f_{ik} , а результирующую внешнюю силу, действующую на i -ю точку, - символом F_i . Уравнение движения i -й точки системы с массой m_i запишется в виде:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{iN} + F_i \quad (11.1)$$

Решение вопроса о том, какие материальные точки включать в состав системы, а какие, соответственно, окажутся внешними, обычно диктуется характером конкретной задачи. В зависимости от этого выбора роль той или иной силы может измениться. Например, в системе "Земля+Луна" силы, действующие на Землю и Луну со стороны Солнца, - внешние. Если же Солнце включить в состав системы, то в системе "Солнце+Земля+Луна" эти силы станут внутренними.

Прямая задача динамики для системы материальных точек сводится к решению системы $3N$ дифференциальных уравнений, так как уравнение движения вида (11.1) для каждой из N точек системы дает в проекции на координатные оси три дифференциальных уравнения для координат точки $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$. Строгое аналитическое решение удается найти лишь в исключительных случаях, поэтому обычно используют приближенные методы. Однако существует несколько строгих общих законов, которые хотя сами по себе и не позволяют в общем случае найти траектории отдельных точек системы, вместе с тем дают важную информацию о движении системы в целом. Это закон (или теорема) о движении центра масс и три закона изменения и сохранения: импульса, момента импульса и механической энергии системы материальных точек. Их выводу и обсуждению посвящена настоящая глава.

§ 12. Закон (теорема) о движении центра масс

Для всякой системы материальных точек существует точка пространства, называемая ее центром масс, или центром инерции. По определению, центр масс C расположен относительно точек системы так, что сумма произведений масс m_i точек на их радиусы-векторы l_i относительно центра масс (рис. 22) равна нулю:

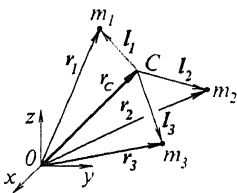


Рис. 22

$$\sum_i m_i l_i = 0. \quad (12.1)$$

Получим формулу, выражающую радиус-вектор r_C центра масс в любой СО через массы точек системы и их радиусы-векторы r_i в этой СО. Как видно из рис. 22, $l_i = r_i - r_C$ и формула (12.1) принимает следующий вид:

$\sum_i m_i (r_i - r_c) = 0$, откуда $\sum_i m_i r_i - r_c \sum_i m_i = 0$ и для радиуса-вектора центра масс получается следующая формула:

$$r_c = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}. \quad (12.2)$$

Легко убедиться, что формулы (12.1) и (12.2) согласуются с известными из школы сведениями о центре масс. Так, из (12.1) следует, что для системы, состоящей из двух материальных точек, $m_1 l_1 + m_2 l_2 = 0$, откуда $m_1 l_1 = -m_2 l_2$ и $l_1/l_2 = m_2/m_1$, т.е. центр масс лежит на прямой, соединяющей точки, на расстояниях от них, обратно пропорциональных массам (рис. 23). Из формулы (12.2) следует также, что положение центра масс не изменится, если две материальные точки системы с массами m_1 и m_2 заменить одной, обладающей суммарной массой $m_1 + m_2$ и расположенной в центре масс C_{12} этих двух точек. Действительно:

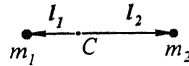


Рис.23

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i}{\sum_i m_i} = \left[(m_1 r_1 + m_2 r_2) + \sum_{i=3}^N m_i r_i \right] / \sum_i m_i = \left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2) + \sum_{i=3}^N m_i r_i \right] / \sum_i m_i =$$

$$\left[(m_1 + m_2) r_{C_{12}} + \sum_{i=3}^N m_i r_i \right] / \sum_i m_i.$$

Центр масс обладает замечательным свойством: его уравнение движения имеет вид второго закона Ньютона. Для доказательства этого утверждения получим сначала формулы для скорости v_c и ускорения a_c центра масс, дифференцируя по времени выражение (12.2) для r_c :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i}, \quad (12.3)$$

$$a_c = \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \frac{dv_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i}. \quad (12.4)$$

Из (12.4) находим: $m \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum_i m_i a_i$, где $m = \sum_i m_i$ - полная масса системы.

Сумму $\sum_i m_i a_i$, стоящую в правой части равенства, выразим через силы, записав уравнение второго закона Ньютона в форме (11.1) для каждой точки системы и суммируя их:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 a_1 = f_{12} + f_{13} + \dots + F_1 \\ m_2 a_2 = f_{21} + f_{23} + \dots + F_2 \\ \dots \dots \dots \\ m_N a_N = f_{N1} + f_{N2} + \dots + F_N \end{array} \right. +$$

$$\sum_i m_i a_i = \sum_{i, k \neq i} f_{ik} + \sum_i F_i$$

Сумма внутренних сил равна нулю: $\sum_{i, k \neq i} f_{ik} = 0$, так как по третьему закону Ньютона

$f_{ik} = -f_{ki}$ и при суммировании внутренние силы попарно взаимно уничтожаются, и таким образом

$$m \frac{d^2 r_C}{dt^2} = \sum_i F_i^{\text{внеш}} \quad (12.5)$$

Это уравнение движения центра масс, действительно имеющее вид второго закона Ньютона, называют законом (теоремой) о движении центра масс: центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, в которой

сосредоточена вся масса системы $m = \sum_i m_i$ и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Для описания движения центра масс, поскольку оно подчиняется уравнению движения, аналогичному второму закону Ньютона, в полной мере применимо все изложенное ранее о динамике материальной точки; в частности, так же ставятся и решаются

прямая и обратная задачи динамики и т.п. Если система замкнута $\left(\sum_i F_i^{\text{внеш}} = 0 \right)$, то

$a_C = 0$, т.е. центр масс движется равномерно и прямолинейно или, если его начальная скорость равнялась нулю, покоится.

§ 13. Закон изменения и сохранения импульса

Импульсом материальной точки называется векторная физическая величина, равная произведению массы m точки на ее скорость v :

$$p = mv \quad (13.1)$$

Импульсом системы материальных точек называют сумму импульсов всех точек системы:

$$P = \sum_i m_i v_i \quad (13.2)$$

Таким образом, импульс по определению величина аддитивная. (Аддитивной называют физическую величину, значение которой для всей системы складывается из ее значений для отдельных частей системы).

Разделим и умножим правую часть в формуле (13.2) на массу системы $m = \sum_i m_i$:

$$P = \sum_i m_i \left(\frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} \right)$$
. Выражение в скобках определяет согласно (12.3) скорость центра масс, так что

$$P = m v_c \quad (13.3)$$

- импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Продифференцируем равенство (13.3) по времени: $dP/dt = m dv_c/dt = m d^2 r_c/dt^2$. Согласно закону о движении центра масс (12.5) последнее выражение равно сумме внешних сил и таким образом

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i F_i^{\text{внеш}} \quad (13.4)$$

- производная по времени импульса системы материальных точек равна сумме внешних сил, действующих на точки системы. Этот закон можно назвать закон о м и з м е н е н и я и м п у л ь с а. Применительно к отдельной материальной точке формула (13.4) принимает вид:

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i \quad (13.5)$$

и является одной из форм записи второго закона Ньютона.

Если сумма внешних сил равна нулю $\sum_i F_i^{\text{внеш}} = 0$ (система з а м к н у т а я), то $dP/dt = 0$ и, следовательно, $P = const$:

$$\sum_i F_i^{\text{внеш}} = 0 \quad \rightarrow \quad P = const \quad (13.6)$$

-импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным во времени. Таково содержание з а к о н а с о х р а н е н и я и м п у л ь с а.

В некоторых случаях система не является замкнутой, однако существует направление, например вдоль координатной оси Ox , на которое сумма проекций внешних сил равна нулю: $\sum_i F_{(i)x}^{\text{внеш}} = 0$. Записав закон изменения импульса (13.4) в проекции на это направление

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i F_{(i)x}^{\text{внеш}}, \quad (13.7)$$

закключаем, что

$$\sum_i F_{(i)x}^{\text{внеш}} = 0 \quad \rightarrow \quad P_x = const, \quad (13.8)$$

т.е. сохраняется проекция импульса на то направление, на которое сумма проекций внешних сил равна нулю.

При решении некоторых задач приравнивают значения импульса незамкнутой системы материальных точек в близкие моменты времени t и $t + \Delta t$: $P(t) \approx P(t + \Delta t)$, поскольку изменением импульса за достаточно короткий промежуток времени Δt оказывается возможным пренебречь. Действительно, приближенно заменяя в законе изменения импульса (13.4) производную импульса на отношение малых приращений импульса и времени: $dP/dt \approx \Delta P/\Delta t$, получим после умножения на Δt :

$$\Delta P = \langle F \rangle \Delta t, \quad (13.9)$$

где $\langle F \rangle$ - среднее значение суммарной внешней силы на интервале времени Δt (произведение $F \Delta t$ называется и м п у л ь с о м с и л ы). Если внешние силы не слишком велики, а промежуток времени Δt достаточно мал, то импульс силы $\langle F \rangle \Delta t$, а следовательно и изменение импульса ΔP , могут оказаться пренебрежимо малыми.

Использование этого приема требует тщательной оценки величины импульса внешней силы. Например, он правилен в задаче о разрыве летящего снаряда, когда приравниваются импульс снаряда непосредственно перед разрывом и суммарный импульс осколков сразу же после взрыва: импульс внешних сил (тяжести, сопротивления воздуха) мал ввиду малости времени взрыва Δt . А в задаче об упругом соударении шара с массивной стенкой, если стенку считать внешним телом, пренебречь импульсом упругой силы, действующей со стороны стенки на шар, нельзя: несмотря на малое время соударения, этот импульс велик, поскольку очень велика упругая сила. Это приводит к тому, что изменение импульса шара в результате соударения Δp по модулю вдвое превышает импульс шара до

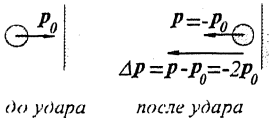


Рис. 24

удара p_0 : $\Delta p = -2p_0$ (рис. 24).

Реактивное движение. Если тело за счет того или иного устройства "выбрасывает" часть своей массы, то импульс тела изменяется со временем, так как часть импульса уносится отбрасываемой массой вещества. Движение тела, обусловленное выбросом массы, называется **р е а к т и в н ы м**.

Пусть тело массы $m(t)$ движется со скоростью $v(t)$, выбрасывая каждую секунду массу $\mu(t)$ (р а с х о д м а с с ы) со скоростью $u(t)$ относительно тела. Закон изменения импульса (13.4) для тела запишем в виде:

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad (13.10)$$

где P - импульс тела вместе с массой, которая находится в нем и выбрасывается в процессе движения; F - результирующая внешних сил, действующих на тело. Импульс P в момент времени t равен: $P = mv$. В момент времени $t + dt$ импульс системы складывается из импульса тела $(m - \mu dt)(v + dv)$ и импульса $(\mu dt)(u + v)$ выброшенной за промежуток времени dt массы μdt . (Здесь учтено, что за время dt масса тела уменьшилась на количество μdt выброшенной массы, скорость тела получила приращение dv , а также то, что скорость выброшенной массы относительно СО, в которой решается задача, складывается из скорости u этой массы относительно тела и скорости v тела). Таким образом, изменение dP импульса системы за время dt равно: $dP = [(m - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(u + v)] - mv$. Раскрывая скобки и пренебрегая малым слагаемым $\mu dt dv$, находим: $dP = m dv + \mu u dt$ и уравнение (13.10) принимает вид:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F - \mu u. \quad (13.11)$$

Это уравнение имеет вид второго закона Ньютона, в котором за счет выброса массы к внешним силам добавляется "реактивная сила" $F_p = -\mu u$, направленная в сторону, противоположную скорости u отбрасываемой массы. Ему, в частности, подчиняется движение ракет, у которых из сопла каждую секунду вылетают продукты сгорания топлива массой μ со скоростью u .

Проведя аналогичные выкладки, легко обобщить уравнение (13.11) на случай, когда помимо выброса массы имеет место и обратный процесс захвата массы, поступающей к телу извне:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F - \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \quad (13.12)$$

где индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к испускаемой и принимаемой телом массе. Процесс захвата массы принимается во внимание в некоторых астрономических задачах, исследующих влияние на движение небесных тел оседающей на них космической пыли. Оба процесса одновременно происходят в воздушно-реактивных и турбо-реактивных двигателях самолетов: в них поступает атмосферный воздух ($\mu_2; u_2 = -v$), а выбрасывается тот же воздух вместе с продуктами сгорания топлива ($\mu_1; u_1$).

Формула (13.12) представляет собой в общем виде уравнение движения тела с переменной массой, которое называют уравнением Мещерского.

§ 14. Закон изменения и сохранения момента импульса

Для решения многих проблем существенно не только значение той или иной физической величины самой по себе, но и то, как эта величина распределена в пространстве относительно некоторой точки или оси. Тогда в физических теориях появляются моменты этих величин. В механике фигурируют моменты двух векторов - силы и импульса, а также момент скалярной величины - массы (момент инерции, о котором речь пойдет позже).

Пусть на некоторую материальную точку (или малый элемент твердого тела) действует сила F . Моментом M силы F относительно точки (полюса) O называется вектор, являющийся векторным произведением радиуса-вектора r , проведенного из точки O в точку приложения силы, и силы F (рис. 25 а):

$$M = [r, F]. \quad (14.1)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что точка O , относительно которой определяется момент силы, является началом декартовой системы координат. Согласно определению векторного произведения (см. с. 12), направление момента силы перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы r и F , и определяется правилом буравчика, а его модуль равен

$$M = r F \sin \alpha, \quad (14.2)$$

где α - угол между векторами r и F (рис. 25 а).

Получим еще два равноправных выражения для модуля момента силы, расположив векторы r и F в плоскости чертежа, так что момент силы M направлен перпендикулярно плоскости чертежа на читателя и изобразится точкой (рис. 25 б). Замечая, что плечо d силы F , т.е. кратчайшее расстояние между точкой O и линией

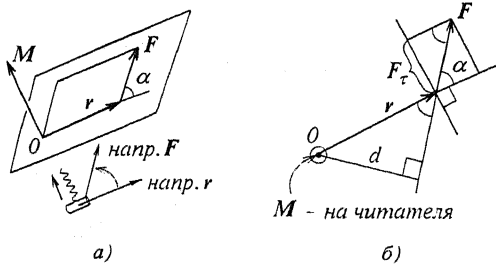


Рис. 25

действия силы, равно $d = r \sin \alpha$, имеем $M = F d$, т.е. модуль момента силы равен произведению модуля силы на ее плечо. С другой стороны, $F \sin \alpha = F_\tau$ есть модуль составляющей F_τ силы F , перпендикулярной r и M (активной составляющей), так что $M = F_\tau r$, т.е. модуль момента силы равен произведению модуля ее активной составляющей F_τ на расстояние от точки O до точки приложения силы. Итак,

$$M = \begin{cases} F r \sin \alpha, \\ F d, \\ F_\tau r. \end{cases} \quad (14.3)$$

Единица момента силы в СИ носит название "джоуль": $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н м}$.

Аналогично определяется момент импульса l материальной точки относительно точки (полюса) O :

$$l = [r, p], \quad (14.4)$$

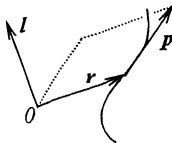


Рис. 26

где p - импульс материальной точки, r - ее радиус-вектор относительно точки O (рис. 26). Моментом импульса L системы материальных точек относительно точки и называется сумма моментов импульса всех точек системы:

$$L = \sum_i l_i, \quad (14.5)$$

так что момент импульса по определению величина аддитивная.

Найдем закон, которому подчиняется момент импульса, сначала - для одной материальной точки. Дифференцируя формулу (14.4) по времени и учитывая, что для векторного произведения справедливо то же правило дифференцирования, как и для обычного произведения (см. (М.28)), имеем: $dl/dt = [dr/dt, p] + [r, dp/dt]$. Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как равен нулю угол α между перемножаемыми векторами $dr/dt = v$ и $p = mv$. Во втором слагаемом, воспользовавшись вторым законом Ньютона в форме (13.5), заменим производную импульса на результирующую силу, действующую на материальную точку: $dp/dt = F$, тогда $dl/dt = [r, F]$. Стоящее справа выражение представляет собой момент M результирующей силы F и закон изменения момента импульса материальной точки принимает вид:

$$dl/dt = M. \quad (14.6)$$

Записав закон (14.6) для всех N материальных точек системы и просуммировав правые и левые части уравнений, получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dl_1}{dt} = M_1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dl_N}{dt} = M_N \end{array} \right. \\ & + \\ & \underline{\underline{\sum_i dl_i/dt = \sum_i M_i.}} \quad (14.7) \end{aligned}$$

Сумма производных равна производной суммы, так что в левой части формулы (14.7)

стоит производная момента импульса системы: $\sum_i dL_i/dt = d\left(\sum_i L_i\right)/dt = dL/dt$. В сумме моментов всех сил в правой части (14.7) выделим сумму моментов внутренних сил

$\sum_{i,k \neq i} M_{ik}$, где M_{ik} - момент силы f_{ik} , действующей на i -ю точку со стороны k -й, и сумму

моментов внешних сил $\sum_i M_i^{внеш}$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i,k \neq i} M_{ik} + \sum_i M_i^{внеш} \quad (14.8)$$

Докажем, что вследствие третьего закона Ньютона сумма моментов внутренних сил равна нулю. Действительно, моменты M_{ik} и M_{ki} сил взаимодействия f_{ik} и f_{ki} равны по модулю, так как эти силы равны по модулю $f_{ik} = f_{ki}$ и имеют общее плечо d (рис. 27): $M_{ik} = f_{ik} d = f_{ki} d = M_{ki}$, и имеют противоположные направления, в чем легко убедиться, используя правило буравчика (на рис. 27 радиусы-векторы r_i и r_k точек и силы f_{ik} и f_{ki} лежат в плоскости чертежа; моменты M_{ik} и M_{ki} сил направлены, соответственно, за чертеж и на читателя и изображены крестом и точкой). Таким образом, $M_{ik} = -M_{ki}$ для каждой пары сил взаимодействия и моменты внутренних сил при сложении попарно взаимно уничтожаются. Итак,

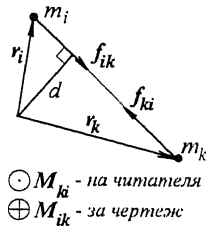


Рис. 27

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i M_i^{внеш} \quad (14.9)$$

-производная по времени момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил (относительно той же точки), действующих на систему. Этот закон называют законом изменения момента импульса.

Из формулы (14.9) следует, что если $\sum_i M_i^{внеш} = 0$, то $dL/dt = 0$ и, следовательно, $L = const$:

$$\sum_i M_i^{внеш} = 0 \rightarrow L = const \quad (14.10)$$

- момент импульса системы материальных точек остается постоянным, если сумма моментов внешних сил (относительно той же точки) равна нулю. Таково содержание закона сохранения момента импульса.

Момент импульса и момент силы можно представить в виде суммы их составляющих вдоль координатных осей:

$$L = L_x + L_y + L_z, \quad M = M_x + M_y + M_z \quad (14.11)$$

(см. рис.28 для момента силы). Ортогональные составляющие M_x, M_y, M_z называются моментами силы, а L_x, L_y, L_z - моментами импульса относительно

соответствующих осей Ox , Oy , Oz . Чтобы получить формулу для момента M_z силы относительно оси Oz , разложим векторы r и F на две составляющие - парал-

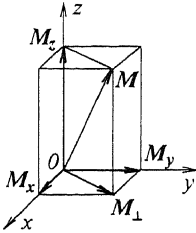


Рис. 28

лельную и перпендикулярную оси Oz : $r = r_{\parallel} + r_{\perp}$, $F = F_{\parallel} + F_{\perp}$, как показано на рис. 29 (составляющая r_{\perp} параллельно перенесена так, что оказывается проведенной от оси Oz , перпендикулярно ей, в точку приложения силы; этот вектор r_{\perp} , выделенный жирной линией, естественно назвать радиусом-вектором относительно оси Oz). Тогда

$$M = [r, F] = [(r_{\parallel} + r_{\perp}), (F_{\parallel} + F_{\perp})] = [r_{\parallel}, F_{\perp}] + [r_{\perp}, F_{\parallel}] + [r_{\perp}, F_{\perp}] + [r_{\parallel}, F_{\parallel}].$$

В этой сумме лишь последний вектор $[r_{\perp}, F_{\perp}]$ направлен вдоль оси Oz (второй и третий лежат в плоскости xOy , а первый равен нулю). Следовательно, он и является перпендикулярной составляющей M_z момента силы M в разложении (14.11):

$$M_z = [r_{\perp}, F_{\perp}]. \quad (14.12)$$

Таким образом момент силы M_z относительно оси Oz определяется формулой того же вида, что и момент относительно начала координат (14.1), в которой однако вместо радиуса-вектора r и силы F стоят их ортогональные составляющие r_{\perp} и F_{\perp} , лежащие в плоскости, перпендикулярной оси Oz . Для модуля момента M_z очевидно справедливы формулы (14.3), в которых теперь α - угол между векторами r_{\perp} и F_{\perp} , а r и F следует заменить на r_{\perp} и F_{\perp} . Ана-

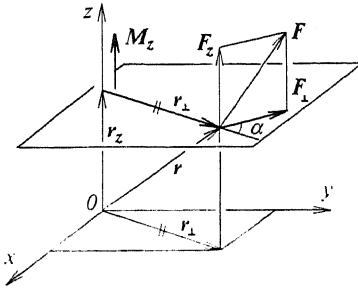


Рис. 29

логичной формулой выражается момент импульса материальной точки относительно оси Oz :

$$l_z = [r_{\perp}, p_{\perp}] \quad (14.13)$$

(см. рис.29, подразумевая под вектором F вектор p), а полный момент импульса системы материальных точек относительно оси Oz определяется суммой

$$L_z = \sum_i l_{(i)z}. \quad (14.14)$$

Подставляя разложения (14.11) в закон изменения момента импульса (14.9), получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{(i)z}^{внеш} \quad (14.15)$$

и два аналогичных уравнения для моментов импульса L_x и L_y относительно осей Ox и Oy . Уравнение (14.15) представляет собой закон изменения момента импульса относительно оси Oz .

Если сумма моментов внешних сил относительно оси Oz равна нулю, то согласно (14.15) $dL_z/dt = 0$ и, следовательно, $L_z = const$:

$$\sum_i M_{(i)z}^{неш} = 0 \rightarrow L_z = const \quad (14.16)$$

- момент импульса системы материальных точек относительно оси остается постоянным, если равна нулю сумма моментов внешних сил относительно этой оси. Таково содержание закона сохранения момента импульса относительно оси.

Типичный пример сохранения момента импульса дает система материальных точек, находящаяся в центральном поле сил, когда все внешние силы направлены радиально к одной точке O (центру) или от нее (рис. 30). При этом момент каждой внешней силы F_i относительно центра равен нулю (поскольку угол α_i между радиусом-вектором r_i и силой F_i равен нулю или 180° , так что в формуле (14.2) $\sin \alpha = 0$) и, следовательно, момент импульса системы относительно центра сохраняется.

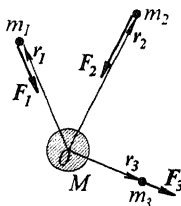


Рис. 30

Покажем, что прямым следствием закона сохранения момента импульса является известный закон площадей Кеплера, согласно которому радиус-вектор планеты, проведенный из центра Солнца, покрывает за равные промежутки времени равные площади (см. рис.31, на котором две такие площади заштрихованы). За малый промежуток времени Δt планета совершает малое перемещение $\Delta r = v \Delta t$ и площадь ΔS , описанная радиусом-вектором r равна площади заштрихованного треугольника, т.е. половине площади параллелограмма, построенного на векторах r и Δr (изображен на рис.31 пунктирной линией). Как показано в математическом введении (см. М.27), площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю их векторного произведения. Таким образом, имеем:

$$\Delta S = [r, \Delta r]/2 = [r, v \Delta t]/2. \text{ Чтобы под знаком модуля стоял момент импульса планеты относи-}$$

тельно центра Солнца $l = [r, mv]$, умножим и разделим вектор $v \Delta t$

на массу планеты m и вынесем множитель $\Delta t/m$ за знак векторного

произведения (см. М.28): $\Delta S = [r, mv] \Delta t / 2m = |l| \Delta t / 2m$. Момент

импульса планеты относительно центра Солнца сохраняется ($l = const$), так как сила тяготения, действующая на планету со стороны Солнца, центральная (воздействие других планет пренебрежимо мало). Следовательно, площадь, покрываемая радиусом-вектором планеты в единицу времени $\Delta S / \Delta t$, является постоянной величиной:

$$\Delta S / \Delta t = |l| / 2m = const.$$

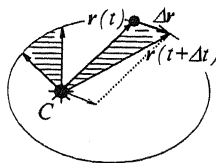


Рис. 31

§ 15. Закон изменения и сохранения механической энергии

Работа. Пусть на материальную точку (она может в частности представлять собой малый элемент тела) действует сила F . Разобьем траекторию точки на участки столь малой длины, чтобы их можно было приближенно считать прямолинейными, а силу в пределах участка - постоянной (рис. 32). Работой ΔA силы F на малом перемещении Δl называется скалярное произведение силы на перемещение:

$$\Delta A = (F, \Delta l). \quad (15.1)$$

По определению (см. М.22) скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними, так что $\Delta A = F \Delta l \cos \alpha$, где α - угол между направлениями силы и перемещения. С учетом (М.23) выражение для малой работы можно записать в виде $\Delta A = F_l \Delta l$ или $\Delta A = F \Delta l_F$, где $F_l = F \cos \alpha$ есть

проекция силы на направление перемещения, а $\Delta l_F = l \cos \alpha$ - проекция перемещения на направление силы. Принимая во внимание также (М.24), можно написать четыре равноправных выражения для малой работы:

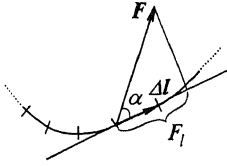


Рис. 32

$$\Delta A = \begin{cases} F \Delta l \cos \alpha, \\ F_l \Delta l, \\ F \Delta l_F, \\ F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \end{cases} \quad (15.2)$$

Наиболее часто будет использоваться второе выражение, которое подчеркивает, что для работы важна составляющая силы в направлении перемещения. Если угол α между направлениями силы и перемещения острый, как на рис. 32, то $\cos \alpha > 0$ и $\Delta A > 0$ - сила совершает положительную работу; в случае тупого угла $\cos \alpha < 0$ и работа отрицательная: $\Delta A < 0$; работа равна нулю, если сила перпендикулярна перемещению.

Работа A_{II} на конечном участке пути от точки I до точки II складывается из малых работ на отдельных малых участках пути. Суммируя эти работы $\Delta A_i = F_l^{(i)} \Delta l^{(i)}$ и переходя к пределу при $\Delta l^{(i)} \rightarrow 0$, находим:

$$A_{II} = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_i F_l^{(i)} \Delta l^{(i)} = \int_I^{II} F_l dl. \quad (15.3)$$

В конкретных задачах при вычислении работы стоящая под знаком интеграла проекция силы F_l записывается как функция некоторой переменной, по которой ведется интегрирование, и в качестве пределов интегрирования I и II подставляются значения этой переменной, соответствующие начальной и конечной точкам пути. Если, например, F_l задана как функция пути I, отсчитываемого от некоторой точки на траектории, то

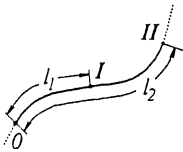


Рис. 33

$$A_{II} = \int_{l_1}^{l_2} F_l(l) dl \quad (\text{см. рис. 33}). \quad \text{Из (15.2) следует, что единицей ра-}$$

боты в СИ является джоуль: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Отметим два свойства работы, вытекающих из ее определения (15.3). Работа меняет знак: 1) если направление силы в каждой точке траектории меняется на обратное: $A_{II}^{\text{силы } F} = -A_{II}^{\text{силы } -F}$ и 2) если начальная и конечная точки пути меняются местами:

$A_{II} = -A_{II}$. Действительно, в первом случае меняет знак подынтегральная функция, а во втором - меняются местами пределы интегрирования.

Подчеркнем, что в зависимости от поставленной задачи можно интересоваться работой той или иной отдельной силы, а не обязательно работой результирующей силы, действующей на материальную точку. При этом иногда вместо явного указания силы говорят, какое тело совершает работу над рассматриваемым телом (например, под словами "газ совершает работу" подразумевается работа силы давления, действующей на перемещающийся поршень).

Э н е р г и я системы в широком смысле слова называется способность системы совершить работу. Эта общая формулировка понятия энергии, естественно, нуждается в конкретизации, когда речь идет об определении энергии того или иного вида как

физической величины. В механике рассматриваются два вида энергии - кинетическая и потенциальная, являющиеся функциями состояния системы, причем кинетическая энергия зависит только от скоростей, а потенциальная - только от координат материальных точек системы. Не давая заранее определений этих двух видов энергии, покажем, как они естественным образом появляются в теории, если рассматривать движение системы в энергетическом аспекте.

Теорема о кинетической энергии. Пусть материальная точка массой m движется под действием результирующей силы F . Выясним, на что идет работа, совершаемая силой F .

Запишем второй закон Ньютона в некоторой точке траектории в проекции на тангенциальное направление

$$ma_{\tau} = F_{\tau}; \quad (15.4)$$

здесь a_{τ} и F_{τ} - тангенциальное ускорение и тангенциальная проекция силы (рис. 34).

Чтобы в правой части формулы (15.4) стояла малая работа $\delta A = F_{\tau} dl$, умножим обе части равенства на величину малого перемещения dl материальной точки: $ma_{\tau} dl = F_{\tau} dl$ (индексы τ и l символизируют одно и то же касательное к траектории направление). Подставляя в левую часть последнего равенства согласно

(4.3) и (2.1) $a_{\tau} = dv/dt$ и $dl = v dt$, имеем: $m (dv/dt) v dt = \delta A$,

или $mv dv = \delta A$. Легко проверить, что $mv dv = d(mv^2/2)$, следовательно $d(mv^2/2) = \delta A$. Скалярная физическая величина

$$w_k = \frac{mv^2}{2} \quad (15.5)$$

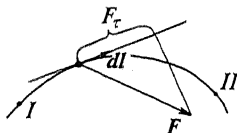


Рис. 34

называется кинетической энергией материальной точки, так что

$$dw_k = \delta A. \quad (15.6)$$

Просуммировав малые работы на всех малых перемещениях конечного участка траектории от точки I до точки II , т.е. взяв определенный интеграл от обеих частей равенства (15.6), получим:

$$w_k(II) - w_k(I) = A_{II}, \quad (15.7)$$

где $w_k(II)$ и $w_k(I)$ - значения кинетической энергии материальной точки в конечном и начальном состоянии. Таким образом, работа результирующей силы, действующей на материальную точку, равна приращению кинетической энергии последней.

Аналогичное утверждение справедливо для системы материальных точек. Действительно, записав уравнения (15.7) для каждой точки системы (верхний индекс в скобках нумерует точку системы), и суммируя эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \begin{array}{l} w_k^{(1)}(II) - w_k^{(1)}(I) = A_{II}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ w_k^{(N)}(II) - w_k^{(N)}(I) = A_{II}^{(N)} \end{array} \right. \\
 & \sum_{i=1}^N w_k^{(i)}(II) - \sum_{i=1}^N w_k^{(i)}(I) = \sum_{i=1}^N A_{II}^{(i)} \quad (15.8)
 \end{aligned}$$

Определим кинетическую энергию системы материальных точек как сумму кинетических энергий ее точек:

$$\dot{W}_k = \sum_i w_k^{(i)} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (15.9)$$

(тем самым кинетическая энергия, как и импульс и момент импульса - величина аддитивная). Тогда

$$W_k(II) - W_k(I) = \sum_{i=1}^N A_{iII}^{(i)} \quad (15.10)$$

- работа всех сил, действующих на материальные точки системы, идет на приращение кинетической энергии системы. Это утверждение носит название теоремы о кинетической энергии.

Потенциальные силы и потенциальная энергия. Все силы можно подразделить на потенциальные (консервативные) и непотенциальные (неконсервативные). Потенциальными называют силы, работа которых зависит от положения системы (т.е. координат ее точек) в начальном и конечном состоянии и не зависит от способа перехода системы из начального состояния в конечное.

Из независимости работы потенциальных сил от способа перехода из одного состояния системы в другое вытекает равенство нулю их работы при "циклическом" перемещении системы, т.е. с ее возвратом в исходное положение. Действительно, работу A при циклическом перемещении можно представить как сумму работ, совершаемых при переходе из исходного состояния I в некоторое промежуточное состояние II

($A_{I II}^{(1)}$) и из состояния II обратно в исходное состояние I

($A_{II I}^{(2)}$) (цифры в скобках символически означают пути

точек туда (1) и обратно (2)): $A = A_{I II}^{(1)} + A_{II I}^{(2)}$ (рис. 35).

В силу свойства работы менять знак при перестановке начальной и конечной точек пути $A_{II I}^{(2)} = -A_{I II}^{(2)}$, так что

$A = A_{I II}^{(1)} - A_{I II}^{(2)}$. Но $A_{I II}^{(1)} = A_{I II}^{(2)}$ вследствие независимости работы потенциальных сил от способа перехода

из состояния I в состояние II, так что $A = 0$, что и требовалось доказать.

Для внутренних потенциальных сил существует простой критерий потенциальности: если силы взаимодействия в системе удовлетворяют третьему закону Ньютона и не зависят ни от каких переменных, кроме расстояний между точками системы (в частности, не зависят от скоростей), то они потенциальны. При этом работа внутренних сил вполне определяется начальной и конечной конфигурациями системы (конфигурация системы материальных точек определяется заданием расстояний r_{ik} между ними) и не зависит от перемещения системы как целого при неизменной ее конфигурации.

Для доказательства этого утверждения представим работу всех внутренних сил, действующих между точками системы, как сумму работ A_{ik} , совершаемых парами сил f_{ik} и f_{ki} взаимодействия i -й и k -й

точек: $A = \sum_{i, k=1}^N A_{ik}$ и рассмотрим одну из этих работ A_{ik} . За малый промежуток времени Δt i -я и k -я

точки совершат перемещения Δl_i и Δl_k (рис. 36) и силы f_{ik} и f_{ki} совершат работу $\Delta A_{ik} = (f_{ik}, \Delta l_i) + (f_{ki}, \Delta l_k)$. Малое перемещение i -й точки Δl_i представим как сумму трех перемещений: $\Delta l_i = \Delta l_k + \Delta r_{ik(\perp)} + \Delta r_{ik(\parallel)}$, где первое слагаемое равно перемещению Δl_k k -й точки, $\Delta r_{ik(\perp)}$ перпендикулярно силе f_{ik} , а $\Delta r_{ik(\parallel)}$ направлен вдоль прямой, соединяющей точки. Подставляя это разложение в формулу для ΔA_{ik} и воспользовавшись свойством дистрибутивности скалярного произведения (см. (М.28)), имеем $\Delta A_{ik} = (f_{ik}, \Delta l_k) + (f_{ik}, \Delta r_{ik(\perp)}) + (f_{ik}, \Delta r_{ik(\parallel)}) + (f_{ki}, \Delta l_k)$. Первое и последнее слагаемые взаимно уничтожаются, так как $f_{ik} = -f_{ki}$, и следовательно, $(f_{ik}, \Delta l_k) = -(f_{ki}, \Delta l_k)$; второе слагаемое равно нулю, так как по построению $\Delta r_{ik(\perp)} \perp f_{ik}$. Таким образом, имеем: $\Delta A_{ik} = (f_{ik}, \Delta r_{ik(\parallel)}) = \pm f_{ik} \Delta r_{ik}$ (знак "+" соответствует силам отталкивания, знак "-" - силам притяжения). Работа A_{ik}^{II} , совершаемая при переходе системы из состояния I в состояние II,

$$A_{ik}^{II} = \int_{r_{ik}^I}^{r_{ik}^{II}} f_{ik}(r_{ik}) dr_{ik} = \Phi(r_{ik}^{II}) - \Phi(r_{ik}^I),$$

где $\Phi(r_{ik})$ - первообразная функции $f_{ik}(r_{ik})$, определяющей зависимость модуля силы взаимодействия f_{ik} от расстояния r_{ik} между точками, а r_{ik}^I и r_{ik}^{II} - значения r_{ik} в начальном и конечном состояниях. Полная работа внутренних сил

$$A_{I,II} = \sum_{i,k \neq i} A_{ik} = [\Phi(r_{12}^{II}) - \Phi(r_{12}^I)] + [\Phi(r_{13}^{II}) - \Phi(r_{13}^I)] + \dots,$$

как видно из этой формулы, зависит лишь от относительных расстояний r_{12}, r_{13}, \dots между точками системы в начальном и конечном состояниях, т.е. определяется начальной и конечной конфигурациями системы и не зависит от способа перехода из начального в конечное состояние, что и требовалось доказать.

Вопрос о потенциальности **внешних** сил будем выяснять отдельно для каждого конкретного случая. Следует заметить, что внешние силы можно сделать внутренними, если включить тела, со стороны которых они действуют, в состав системы. Из сил, рассматриваемых в механике макроскопических тел, потенциальными являются силы тяготения и упругие силы, рассматриваемые как внутренние силы, поскольку и те, и другие удовлетворяют критерию потенциальности: зависят только от расположения материальных точек системы и не зависят от скоростей. Для гравитационных сил это непосредственно следует из закона всемирного тяготения (10.2); упругие силы однозначно определяются деформациями, т.е. относительным расположением малых элементов тела, которые можно считать материальными точками.

Силы трения движения непотенциальны. Действительно, направление силы трения противоположно направлению движения тела, на которое она действует: $F_i^{тр} < 0$, поэтому ее работа на любом пути, в том числе и замкнутом, отрицательна:

$$A = \int F_i^{тр} dl < 0, \text{ а для потенциальных сил такая работа должна быть равной нулю.}$$

Потенциальные силы обладают замечательным свойством: их работа, совершаемая над точками системы при ее переходе из состояния I в состояние II, может быть представлена как разность значений некоторой функции состояния системы - ее потенциальной энергии W_n - в начальном (I) и конечном (II) состояниях:

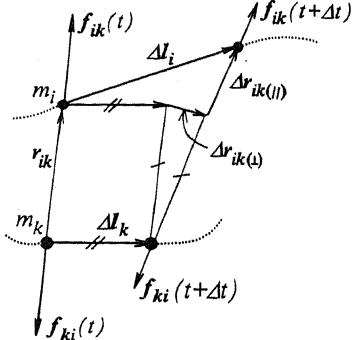


Рис. 36

$$A_{I\Pi}^{\text{пот.сил}} = W_{\Pi}(I) - W_{\Pi}(II) \quad (15.11)$$

Приращение потенциальной энергии при переходе системы из состояния I в состояние II есть $\Delta W_{\Pi} = W_{\Pi}(II) - W_{\Pi}(I)$ и, следовательно, работа потенциальных сил равна приращению со знаком минус, т.е. убыли, потенциальной энергии:

$$\Delta A^{\text{пот.сил}} = -\Delta W_{\Pi}. \quad (15.12)$$

Потенциальной энергией системы материальных точек называется скалярная физическая величина, измеряемая работой, которая совершается потенциальными силами над точками системы при переходе ее из рассматриваемого положения в некоторое положение, в котором потенциальная энергия системы принимается равной нулю (нулевое положение).

Иногда потенциальную энергию определяют как работу, которую необходимо совершить постоянными внешними силами, чтобы перевести систему из положения с нулевой потенциальной энергией в рассматриваемое. При этом явно предполагается, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению силам, действующим в системе. Работы тех и других сил отличаются знаком и чтобы скомпенсировать это изменение знака во второй формулировке переставлены начальное и конечное положения системы.

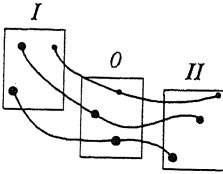


Рис. 37

Чтобы получить формулу (15.12), воспользуемся независимостью работы потенциальных сил от способа перехода системы из начального в конечное положение и при вычислении работы $A_{I\Pi}^{\text{пот.сил}}$ переведем систему из положения I в положение II через нулевое положение 0 : $I \rightarrow 0 \rightarrow II$ (рис. 37). Тогда $A_{I\Pi}^{\text{пот.сил}} = A_{I0}^{\text{пот.сил}} + A_{0\Pi}^{\text{пот.сил}} = A_{I0}^{\text{пот.сил}} - A_{\Pi 0}^{\text{пот.сил}}$ ($A_{0\Pi}^{\text{пот.сил}} = -A_{\Pi 0}^{\text{пот.сил}}$ вследствие свойства работы менять знак при перестановке начальной и конечной точек пути). Работы, стоящие справа, представляют собой по определению значения потенциальной энергии в начальном и конечном положении: $A_{I0}^{\text{пот.сил}} = W_{\Pi}(I)$, $A_{\Pi 0}^{\text{пот.сил}} = W_{\Pi}(II)$, и мы приходим к формуле (15.11).

Обсудим ряд свойств потенциальной энергии. Во-первых, потенциальная энергия согласно определению зависит от положения системы, т.е. от координат всех ее N материальных точек: $W_{\Pi}(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N)$. В общем случае она не может быть представлена как сумма потенциальных энергий отдельных точек системы, т.е. в отличие от кинетической энергии потенциальная энергия не аддитивна. Во-вторых, потенциальная энергия зависит от выбора нулевого положения: если заменить нулевое положение 0 на другое $0'$, то к значениям потенциальной энергии системы добавится одна и та же постоянная величина:

$$W'_{\Pi}(x_i, y_i, z_i) = W_{\Pi}(x_i, y_i, z_i) + const. \quad (15.13)$$

Действительно, если при вычислении потенциальной энергии W'_{Π} при новом нулевом положении $0'$ выбрать путь, проходящий через прежнее нулевое положение 0 : $I \rightarrow 0 \rightarrow 0'$, то $W'_{\Pi} = A_{I0'} = A_{I0} + A_{00'} = W_{\Pi} + const$, так как $A_{I0} = W_{\Pi}$, а $A_{00'}$ есть постоянная величина, зависящая только от нулевых положений 0 и $0'$. Поскольку выбор нулевого положения вообще говоря произволен, то (15.13) означает, что потенциальная энергия системы определена с точностью до произвольной постоянной.

Если в системе действуют потенциальные силы нескольких видов, например, силы тяготения и упругие силы, то, поскольку работа суммарной силы равна сумме работ каждой силы в отдельности, полная потенциальная энергия складывается из потенциальных энергий, обусловленных силами каждого вида: $W_n = W_n^{\text{тяг}} + W_n^{\text{упр}}$. Согласно определению потенциальная энергия измеряется в тех же единицах, что и работа, т.е. в СИ - в джоулях.

Выведем формулы для потенциальной энергии простейших механических систем.

Потенциальная энергия пружины. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел, соединенных невесомой пружиной, длина которой в недеформированном состоянии l_0 (рис. 38 а). Если пружина упруго деформирована (сжата или растянута), то она действует на тела с силами, равными по модулю и направленными вдоль пружины: при растянутой пружине это силы притяжения, при сжатой - отталкивания (рис. 38 б и 38 в). Эти силы зависят от расстояния между телами и не зависят от скоростей. Следовательно, они удовлетворяют критерию потенциальности и рассматриваемая система обладает потенциальной энергией. Работа внутренних потенциальных сил, как было показано, определяется только конечной и начальной конфигурациями системы и, следовательно, она не зависит от того, в какой системе отсчета вычисляется. Удобно связать систему отсчета с одним из тел, выбрав начало координат в положении равновесия второго тела и направив ось Ox вдоль пружины (рис. 39 а). Тогда работа будет совершаться только над вторым телом (первое в выбранной СО покоится) упругой силой F , проекция которой на ось Ox выражается формулой (10.11): $F_x = -kx$, где k - жесткость пружины, x - координата второго тела. Малая работа ΔA при изменении координаты второго тела от значения x до значения $x + \Delta x$ (рис. 39 б) согласно четвертому выражению в (15.2) равна $\Delta A = F_x \Delta x = -kx \Delta x$, а работа на конечном перемещении из состояния с координатой x_I в состояние с координатой x_{II} определится

интегралом $A_{I,II} = \int_{x_I}^{x_{II}} (-kx) dx = (-kx^2/2)|_{x_I}^{x_{II}} = kx_{II}^2/2 - kx_I^2/2$:

$$A_{I,II} = \frac{kx_{II}^2}{2} - \frac{kx_I^2}{2}. \quad (15.14)$$

Согласно определению потенциальная энергия измеряется работой, совершаемой потенциальными силами при переходе системы из рассматриваемого положения (с координатой x) в нулевое положение, в качестве которого естественно выбрать равновесное состояние системы, когда пружина не деформирована ($x = 0$). Подставляя в формулу (15.14) $x_I = x$ и $x_{II} = 0$, получаем формулу для потенциальной энергии системы двух тел, соединенных невесомой пружиной:

$$W_n(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (15.15)$$

где x - удлинение (сжатие) пружины.

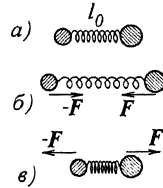


Рис. 38

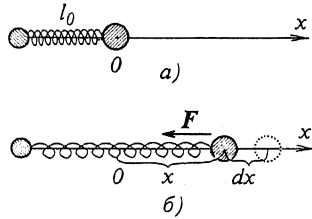


Рис. 39

Потенциальная энергия гравитационно взаимодействующих шара и материальной точки. Рассмотрим систему, состоящую из гравитационно взаимодействующих шара массой M , в котором масса распределена сферически симметрично, и материальной точки массой m (рис. 40).

Гравитационные силы потенциальны, поэтому рассматриваемая система обладает потенциальной энергией. При вычислении работы сил тяготения при переходе системы из состояния с конфигурацией I ($r = r_I$) в состоянии с конфигурацией II ($r = r_{II}$) выберем СО, в которой шар неподвижен и, следовательно, работа совершается только над материальной точкой силой тяготения (10.6). Вычисляя эту работу, воспользуемся произволом в способе перемещения и выберем путь $I \rightarrow I' \rightarrow II$, состоящий из дуги II' и радиального отрезка $I'II$, как показано на рис. 40. Работа на участке пути II' равна нулю, так как в каждой его точке сила тяготения перпендикулярна малому перемещению. На радиальном отрезке $I'II$ сила направлена против перемещения, поэтому работа на малом участке пути $\Delta A = F_r \Delta r = (-GmM/r^2)\Delta r$, а вся работа определится

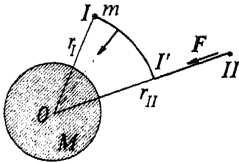


Рис. 40

интегралом $A_{II} = \int_{r_I}^{r_{II}} (-GmM/r^2) dr = (-GmM) \int_{r_I}^{r_{II}} r^{-2} dr = GmM \left(\frac{1}{r} \right)_{r_I}^{r_{II}} = GmM/r_{II} - GmM/r_I$.

Запишем ее в виде

$$A_{II} = \left(-G \frac{mM}{r_I} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_{II}} \right). \quad (15.16)$$

За состояние с нулевой потенциальной энергией обычно принимают состояние, в котором взаимодействие отсутствует, чему в нашей задаче соответствует бесконечное удаление материальной точки от шара ($r \rightarrow \infty$). Подставляя, в соответствии с определением потенциальной энергии, в формулу (15.16) $r_I = r$ и $r_{II} \rightarrow \infty$, получаем для потенциальной энергии системы следующее выражение:

$$W_{II}(r) = -G \frac{mM}{r}. \quad (15.17)$$

Потенциальная энергия материальной точки, находящейся в однородном поле сил. Пусть на материальную точку действует постоянная сила F , величина и направление которой одинаковы во всех точках рассматриваемой области пространства ($F = const$). В таком случае говорят, что материальная точка находится во внешнем постоянном однородном силовом поле. Покажем, что сила F потенциальна, и получим формулу для потенциальной энергии материальной точки.

Проведем ось Oz декартовой системы координат в направлении, противоположном силе F . Тогда, как мы увидим, потенциальная энергия будет возрастающей функцией одной координаты z точки. Сначала вычислим работу силы F при перемещении точки из положения I (координата z_I) в положение II (координата z_{II}), предполагая форму пути произвольной (рис. 41). Для работы ΔA на малом перемещении Δl воспользуемся четвертым выражением в (15.2), замечая, что $F_x = F_y = 0$, $F_z = -F$: $\Delta A = F_z \Delta z = -F \Delta z$.

Работа силы F при переходе из состояния I в состояние II выразится интегралом

$$A_{I,II} = \int_{z_I}^{z_{II}} (-F) dz = F z_I - F z_{II} :$$

$$A_{I,II} = F z_I - F z_{II} . \quad (15.18)$$

Она оказалась зависящей только от начального и конечного положения точки, в то время как при выводе путь предполагался произвольным. Следовательно, материальная точка, находящаяся в однородном постоянном внешнем поле сил, обладает потенциальной энергией. Если за нулевое положение принять положение материальной точки с координатой $z = 0$, то формулу для потенциальной энергии точки получим из (15.18), полагая $z_I = z$ и $z_{II} = 0$:

$$W_n(z) = F z . \quad (15.19)$$

Частным случаем этой формулы является известная школьная формула для потенциальной энергии тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли:

$$W_n = mgh . \quad (15.20)$$

Действительно, в небольшой по сравнению с радиусом Земли R области вблизи земной поверхности сила тяжести практически постоянна по величине и направлению и равна $F = mg = const$, а $z = h$. Когда материальная точка находится на расстоянии от поверхности Земли, сравнимом с радиусом Земли, формула (15.20) перестает быть справедливой и необходимо пользоваться строгой формулой (15.17), учитывающей зависимость силы тяготения от положения точки.

Рекомендуем, глядя на пары формул (15.15)-(15.14), (15.17)-(15.16), (15.19)-(15.18), лишний раз убедиться в справедливости формулы (15.11).

Закон изменения и сохранения механической энергии. Введение потенциальной энергии позволяет завершить вывод закона изменения и сохранения механической энергии, осуществляя который мы остановились на теореме о кинетической энергии (15.10). В стоящей в правой части этого равенства работе всех сил, действующих на точки системы, выделим работу потенциальных сил:

$$W_k(II) - W_k(I) = A_{I,II}^{\text{пот. сил}} + A'_{I,II} , \quad (15.21)$$

выразим ее согласно (15.11) через изменение потенциальной энергии $A_{I,II}^{\text{пот. сил}} = W_n(I) - W_n(II)$:

$$W_k(II) - W_k(I) = W_n(I) - W_n(II) + A'_{I,II} \quad (15.22)$$

и перенесем в левую часть равенства:

$$[W_k(II) + W_n(II)] - [W_k(I) + W_n(I)] = A'_{I,II} . \quad (15.23)$$

Здесь $A'_{I,II}$ - работа непотенциальных и прочих сил (возможно и потенциальных), работа которых по тем или иным причинам не учтена в потенциальной энергии системы. Назовем сумму кинетической и потенциальной энергий м е х а н и ч е с к о й э н е р г и е й системы материальных точек:

$$W = W_k + W_n . \quad (15.24)$$

Тогда формула (15.23) запишется в виде:

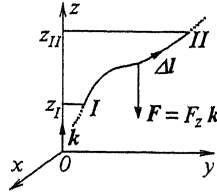


Рис. 41

$$W(II) - W(I) = A'_{II} \quad (15.25)$$

- приращение механической энергии системы материальных точек равно работе непотенциальных и прочих сил, не учтенных в потенциальной энергии системы. Таково содержание закона изменения механической энергии.

Работа каждой непотенциальной силы в правой части (15.25) отражает превращение энергии из механической в другие виды энергии. Так, за работой сил трения скрывается переход механической энергии в тепловую. Если силы, не учтенные в потенциальной энергии, совершают положительную работу ($A' > 0$), она идет на увеличение механической энергии системы: $\Delta W \equiv W(II) - W(I) > 0$. В случае $A' < 0$ $\Delta W \equiv W(II) - W(I) < 0$: механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии.

Если силы, не включенные в потенциальную энергию, таковы, что в процессе движения системы их работа равна нулю: $A' = 0$, то $W(I) = W(II)$ для любых состояний I и II системы, т.е. ее механическая энергия остается неизменной:

$$A' = 0 \rightarrow W = W_n + W_p = const \quad (15.26)$$

- таково содержание закона сохранения механической энергии. При этом кинетическая энергия может переходить в потенциальную и обратно, но в другие виды механическая энергия не переходит. Обычно предполагается, что работа всех сил, кроме непотенциальных, учтена в потенциальной энергии системы; тогда A' в (15.25) представляет собой работу непотенциальных сил и достаточным условием сохранения механической энергии становится отсутствие непотенциальных сил. Непотенциальными являются всякого рода силы трения и сопротивления, как было показано ранее, а также силы, возникающие при неупругих деформациях (о них см. в §§ 23, 25).

Закон изменения энергии (15.25) можно записать в дифференциальной форме, как были записаны законы изменения импульса (13.4) и момента импульса (14.9). Для двух близких состояний системы, разделенных малым промежутком времени Δt , имеем: $\Delta W = \Delta A'$. Разделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{dW}{dt} = N' , \quad (15.27)$$

где $N' = dA'/dt$ - работа за единицу времени, т.е. мощность, развиваемая силами, не включенными в потенциальную энергию.

Потенциальные кривые. Рассмотрим систему, в которой действуют только потенциальные силы, и, следовательно, ее механическая энергия сохраняется. Для простоты ограничимся случаями, когда потенциальная энергия зависит только от одной координаты, которую обозначим r , как в формуле (15.17) (в формулах (15.15), (15.19), (15.20) такой координатой являются соответственно x, z, h). Графики зависимости $W_n(r)$ потенциальной энергии от координаты называют потенциальными кривыми, или потенциальным рельефом; они оказываются весьма информативными, позволяя сделать ряд качественных заключений о поведении системы.

Пусть для определенности речь идет о системе двух взаимодействующих тел, одно из которых находится в начале координат ($r = 0$), и будем интересоваться силой F , действующей на второе тело с координатой r . Работа сил при малом изменении dr состояния между телами согласно определению равна $\delta A = F_r dr$; с другой стороны согласно (15.12) $\delta A = -dW_n$, так что $F_r dr = -dW_n$ и, следовательно,

$$F_r = -\frac{dW_n}{dr} \quad (15.28)$$

- проекция силы равна взятой со знаком минус производной потенциальной энергии по соответствующей координате. Это означает, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии, а по величине тем больше, чем круче потенциальный рельеф. На рис. 42 для потенциальной кривой общего вида силы изображены стрелками. Минимуму и максимуму потенциальной энергии соответствуют положения равновесия: $F_r(r_3) = F_r(r_5) = 0$, из которых первое ($r = r_3$) устойчиво (при малом смещении системы возникают силы, возвращающие ее в положение равновесия), а второе ($r = r_5$) - неустойчиво. Потенциальный рельеф в окрестности минимума называют **потенциальной ямой**, а в окрестности максимума - **потенциальным барьером**.

Поскольку кинетическая энергия не может быть отрицательной ($W_k \geq 0$), то система может находиться лишь в тех состояниях, в которых ее полная механическая энергия больше или равна потенциальной: $W = W_k + W_n \geq W_n$. Если, например, система находится в области потенциальной ямы и ее постоянная энергия W_1 меньше высоты потенциального барьера, то она в процессе движения не может выйти за пределы области, ограниченной значениями r_2 и r_4 координаты r (рис. 42). Движение системы в ограниченной области пространства называется **финитным**. Обладая той же энергией W_1 , но находясь справа от барьера, система может двигаться в бесконечной области $r_6 < r < \infty$ - такое движение называется **инфинитным**. В обоих случаях, подходя к барьеру, система не может его преодолеть, так как в областях $r < r_2$ и $r_4 < r < r_6$ было бы $W_1 < W_n$ (r_2, r_4, r_6 - точки **возврата**). Чтобы система смогла преодолеть потенциальный барьер, она должна иметь энергию, которая больше "высоты" барьера; так, при энергии W_2 движение инфинитно, и может происходить в области $r_1 < r < \infty$.

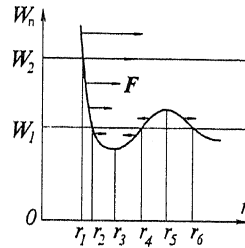
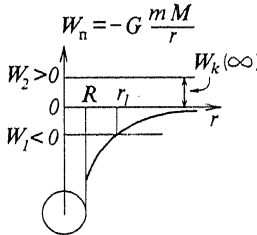
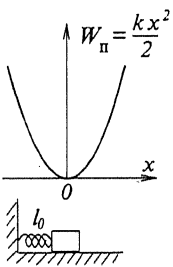
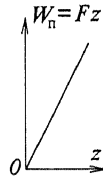


Рис. 42

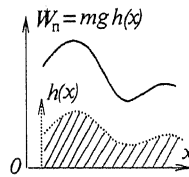
На рис. 43 представлены потенциальные кривые рассмотренных ранее систем: тела на пружине (рис. 43 а); гравитационно взаимодействующих шара и материальной точки (рис. 43 б); материальной точки в однородном поле сил (рис. 43 в). На рис. 43 г приведена потенциальная кривая материальной точки массы m , находящейся на горке профиля $h(x)$. Поскольку формула потенциальной энергии $W_n = mg h(x)$ отличается от функции $h(x)$ лишь постоянным множителем mg , потенциальный рельеф оказывается подобным реальному рельефу горки.



б)



в)



г)

Используем потенциальную кривую системы гравитационно взаимодействующих Земли и тела (рис. 43 б) для вывода формулы второй космической скорости (определение второй космической скорости было дано на с. 35). Если сохраняющаяся механическая энергия системы отрицательна ($W_1 < 0$ на рис. 43 б), тело, запущенное в радиальном направлении с поверхности Земли ($r = R$), удалится на конечное расстояние r_1 (точка возврата) и упадет обратно на Землю. В случае положительной энергии $W_2 > 0$ начальная скорость, сообщенная телу, избыточна, так как, преодолев земное притяжение ($r \rightarrow \infty, W_n(\infty) = 0$), тело будет обладать конечной кинетической энергией $W_k(\infty)$. Следовательно, минимальная скорость v_2 , которую нужно сообщить телу, чтобы оно покинуло сферу действия земного тяготения, определится из условия равенства нулю механической энергии системы: $W = W_k + W_n = mv^2/2 - GmM/r = 0$. В момент "запуска" $r = R$ и $v = v_2$, и энергия $W = mv_2^2/2 - GmM/R = 0$, откуда $v_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR}$, так как $GM/R^2 = g$ (см. (10.7)). Подставляя значения радиуса Земли $R \approx 6400 \cdot 10^3$ м и ускорения свободного падения у поверхности Земли $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, находим: $v_2 \approx 11,2 \text{ км/с}$.

§ 16. О законах сохранения в физике

Все три рассмотренные закона сохранения - импульса, момента импульса и механической энергии, как было показано, являются прямым следствием законов Ньютона. Однако ньютоновская механика справедлива лишь для не слишком быстрых движений тел и кроме того в ней не учитываются (или во всяком случае учитываются не полностью) поля как материальные объекты, обладающие энергией, импульсом, моментом импульса. Естественно возникает вопрос, как обстоит дело с законами сохранения в строгой релятивистской теории с учетом всей материи, как в виде вещества, так и в виде полей. Оказывается, что перечисленные законы сохранения являются простым следствием свойств пространства и времени, а именно: закон сохранения импульса вытекает из однородности пространства; момента импульса - из изотропии пространства; механической энергии - из однородности времени. Указанные свойства означают, что в поведении любой физической системы ничего не изменится, если эту систему как целое поступательно сместить (однородность пространства), повернуть (изотропия пространства), или если провести тот же эксперимент в той же системе в другое время (однородность времени, т.е. равноправие всех моментов времени). При этом под физической системой подразумевается вся совокупность тел, так или иначе участвующих в эксперименте.

В релятивистских законах сохранения фигурируют импульс, момент импульса и энергия как вещества, так и полей. Помимо трех рассмотренных, в физике существуют и другие законы сохранения. Так, в электромагнетизме фундаментальную роль играет закон сохранения электрического заряда; ряд специфических законов сохранения проявляются в физике элементарных частиц, о чем идет речь в соответствующих разделах курса.

ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 17. Абсолютно твердое тело и классификация его движений

Всякое тело может рассматриваться как совокупность его малых взаимодействующих друг с другом элементов, т.е. оно представляет собой частный случай системы материальных точек. Поэтому все законы, установленные в предыдущей главе для системы материальных точек, справедливы и для тела как целого.

Пусть Δm - масса вещества, заключенного в малом объеме ΔV в окрестности рассматриваемой точки с координатами x, y, z . Отношение

$$\rho(x, y, z) = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (17.1)$$

называется плотностью массы, или просто плотностью вещества, которая тем самым численно равна массе, приходящейся на единицу объема вещества. Если в формуле (17.1) перейти к пределу при $\Delta V \rightarrow 0$, то мы получим истинную, или микроскопическую плотность, которая сложным образом изменяется от точки к точке, выявляя распределение массы внутри молекул, атомов, атомных ядер. В механике макроскопических тел достаточно оперировать с макроскопической плотностью вещества, т.е. плотностью, усредненной по области тела хотя и малой по макроскопическим масштабам, но все же содержащей огромное количество атомов - ее линейные размеры должны существенно превосходить размер атома. Именно такой макроскопически бесконечно малый объем ΔV имеется в виду в формуле (17.1) и других аналогичных формулах, определяющих макроскопические характеристики вещества.

Если известна плотность как функция координат, то масса малого элемента тела объемом ΔV согласно (17.1) равна

$$\Delta m = \rho(x, y, z) \Delta V, \quad (17.2)$$

а масса m всего тела объема V , будучи суммой масс его малых элементов, определится интегралом

$$m = \int_V \rho(x, y, z) dV. \quad (17.3)$$

Под действием внешних сил атомы смещаются друг относительно друга и тело деформируется (деформации твердых тел изучаются в главе V). Однако во многих задачах эти деформации столь малы, что ими можно пренебречь и считать все расстояния между элементами тела неизменными: $r_{ik} = const$, где r_{ik} - расстояние между i -м и k -м элементами тела, - такое тело называется абсолютным твердым. Поскольку в этой главе речь идет только об абсолютно твердом теле, будем для краткости именовать его твердым телом или просто телом.

Чтобы охарактеризовать положение механической системы, необходимо задать соответствующее число координат. Число независимых координат (параметров), значения которых, изменяясь при движении системы, однозначно определяют ее положение в пространстве, называют числом степеней свободы.

Материальная точка, движение которой ничем не ограничено, имеет три степени свободы, так как ее положение вполне определяется тремя независимыми параметрами, например, декартовыми координатами $x(t), y(t), z(t)$. Система, состоящая из N материальных точек, в общем случае обладает $3N$ степенями свободы, поскольку для описания ее положения необходимо задать по три координаты x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) каждой из N точек. Если, однако, по условиям задачи на движение точек наложены ограничения,

число степеней свободы уменьшается. Так, число степеней свободы материальной точки, которая может двигаться только в определенной плоскости, например, в координатной плоскости xOy , равно двум, так как ее движение описывается двумя независимыми координатами $x(t), y(t)$. У точки, которая может двигаться только вдоль прямой, одна степень свободы. Система, состоящая из двух материальных точек с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , расстояние l между которыми в процессе движения не меняется: $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = const$ ("жесткая гантель"), имеет не 6, как у двух независимых точек, а 5 степеней свободы, так как из шести координат точек независимыми являются только пять, а шестая выражается через эти пять из написанного выше условия жесткости. В трех последних случаях говорят, что на систему наложены жесткие связи.

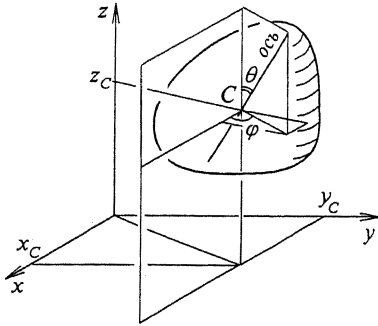


Рис. 44

Абсолютно твердое тело, если на его движение не наложены ограничения, обладает шестью степенями свободы. Действительно, положение тела вполне определяется заданием трех координат какой-либо его точки, например, декартовых координат центра масс x_c, y_c, z_c , и трех угловых координат, характеризующих ориентацию тела. Две угловые координаты, например, полярный и азимутальный углы θ и φ , определяют направление какой-либо оси тела, проходящей через центр масс (рис. 44), а третий угол фиксирует последнюю степень свободы, связанную с возможным вращением тела относительно этой оси.

Важными частными случаями движения твердого тела являются поступательное и вращательное движения. **П о с т у п а т е л ь н ы м** называется движение, при котором всякая прямая линия тела перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении угловые координаты, характеризующие ориентацию тела в пространстве, остаются постоянными, а изменяются координаты x_c, y_c, z_c , которые тем самым реализуют поступательные степени свободы.

В р а щ е н и е м в общем случае называют движение тела, при котором по крайней мере одна его точка (точнее - точка пространства, связанного с телом, так как эта точка может не принадлежать телу) остается неподвижной в рассматриваемой СО. При вращательном движении изменяются угловые координаты, которые тем самым реализуют вращательные степени свободы. Теория вращения тела с одной неподвижной точкой выходит за рамки курса и в дальнейшем будет рассмотрен лишь один пример такого движения - прецессия гироскопа (см. с.72). Мы ограничимся изучением частного случая вращательного движения - **в р а щ е н и я о т н о с и т е л ь н о о с и**, когда неподвижной остается не одна точка, а линия тела (ось вращения). При этом точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости орбит перпендикулярны ей.

Покажем, что произвольное движение твердого тела можно рассматривать как одновременно происходящие поступательное и вращательное движения. На рис. 45 изображены два положения I и II движущегося тела в близкие моменты времени t и $t + \Delta t$. Видно, что из положения I в положение II можно перейти, совершив поступательное перемещение $I \rightarrow I'$ вместе с некоторой точкой O тела и соответствующее вращение $I' \rightarrow II$ относительно точки O. Этим и доказано сделанное утверждение для каждого малого участка пути, а следовательно и для движения в целом.

Заметим, что такое разложение движения на поступательное и вращательное может быть сделано бесчисленным числом различных способов в зависимости от выбора точки O , определяющего поступательное движение тела. В частности, каждое малое перемещение тела можно рассматривать как чистое вращение относительно некоторой оси (мгновенной оси вращения) и тем самым произвольное движение тела представимо как последовательность бесконечно малых поворотов относительно мгновенной оси вращения, непрерывно меняющей свое положение в пространстве.

Поскольку теория вращения относительно точки нами изучаться не будет, вне поля зрения останется и произвольное движение твердого тела. Мы ограничимся рассмотрением плоского движения, при котором все точки тела движутся в параллельных друг другу плоскостях; его можно представить как совокупность поступательного движения и вращения относительно неподвижной оси, перпендикулярной этим плоскостям (простейший пример - качение цилиндра по плоскости).

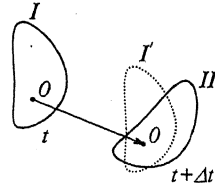


Рис. 45

§ 18. Поступательное движение твердого тела

Покажем, что при поступательном движении все точки (малые элементы) тела имеют одинаковые скорости и ускорения, т.е. движутся одинаково: их траектории лишь смещены друг относительно друга. Действительно, радиусы-векторы r_i и r_k i -й и k -й точек тела связаны соотношением:

$$r_k(t) - r_i(t) = R_{ik}, \quad (18.1)$$

где R_{ik} - вектор, проведенный из i -й в k -ю точку (рис 46). При поступательном движении тела вектор R_{ik} остается постоянным, так как не изменяются ни его модуль (в силу абсолютной твердости тела), ни его направление (по определению поступательного движения). Дифференцируя соотношение (18.1) по времени, приходим к равенству скоростей: $v_i(t) - v_k(t) = 0$, или

$$v_i(t) = v_k(t), \quad (18.2)$$

а дифференцируя (18.2) - к равенству ускорений точек тела:

$$a_i(t) = a_k(t). \quad (18.3)$$

Поскольку все точки тела движутся одинаково, поступательное движение вполне описывается кинематическим законом движения одной произвольной точки тела, и, следовательно, тело, могущее совершать только поступательное движение, обладает тремя степенями свободы. Но уравнение движения одной замечательной точки тела - его центра масс - известно: оно дается теоремой о движении центра масс (12.5). (Еще раз подчеркнем, что законы, доказанные для произвольной системы материальных точек, справедливы и для твердого тела как частного случая такой системы):

$$ma_c = \sum_i F_i. \quad (18.4)$$

Здесь m - масса тела, a_c - ускорение центра масс тела, $\sum_i F_i$ - сумма сил, действующих на рассматриваемое тело со стороны других тел. Таким образом поступательное движение тела подчиняется второму закону Ньютона со всеми вытекающими последствиями.

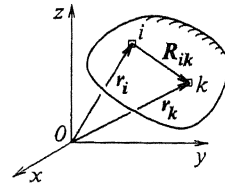


Рис. 46

Будучи одинаковыми при поступательном движении, скорости элементов массы Δm_i тела определяют скорость v тела как целого: $v_i = v$. В результате формулы для зависящих от скорости физических величин (импульса, кинетической энергии и т.д.), характеризующих поступательное движение тела, оказываются такими же, как для материальной точки:

$$P = \sum_i \Delta m_i v_i = v \sum_i \Delta m_i = mv, \quad W_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_i \Delta m_i = \frac{1}{2} m v^2, \text{ и т.д.} \quad (18.5)$$

§ 19. Вращательное движение тела относительно оси.

Кинематика. При описании вращения тела относительно оси условимся направлять ось Oz декартовой CO вдоль оси вращения. Положение тела можно охарактеризовать углом φ , который составляет радиус-вектор некоторой точки тела, лежащей в плоскости xOy , с осью Ox (рис. 47). Следовательно, тело, которое может совершать только вращательное движение относительно неподвижной оси, обладает одной степенью свободы.

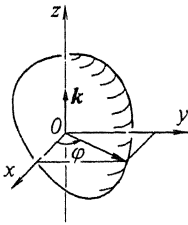


Рис.47

При вращении тела радиусы-векторы (относительно оси) всех его точек за малый промежуток времени Δt поворачиваются на один и тот же угол $\Delta \varphi$, поэтому угловые скорость и ускорение имеют одинаковые значения для всех точек тела и могут служить характеристиками вращения тела как целого (см. формулы (5.2) - (5.5)):

$$\omega = \omega_z k, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt}; \quad (19.1)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \beta_z k, \quad \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (19.2)$$

Момент импульса вращающегося тела. Выведем формулу, связывающую момент импульса тела L_z относительно оси вращения и угловую скорость ω тела. Момент импульса dL_z отдельного малого элемента тела массой dm , рассматриваемого как материальная точка, определяется формулой (14.4): $dL_z = [r, dp] = [r, dm v]$, где r - радиус-вектор элемента относительно оси вращения, $dp = dm v$ - импульс элемента, причем его скорость v связана с угловой скоростью ω тела соотношением (5.6): $v = \omega r$ (рис. 48).

Последнее векторное произведение имеет модуль $dm r^2 \omega$ и направлено по угловой скорости ω , так что

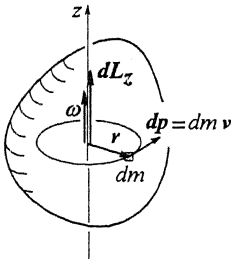


Рис. 48

$$dL_z = (dm r^2) \omega, \quad (19.3)$$

а момент импульса L_z всего тела, как величина аддитивная, равен сумме моментов импульса его малых элементов:

$$L_z = \int_V dL_z = \left(\int_V r^2 dm \right) \omega; \quad (19.4)$$

символ V у интеграла означает, что интеграл берется по объему V тела.

Скалярная физическая величина, равная произведению массы m материальной точки на квадрат ее расстояния r от оси вращения, называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения:

$$I = mr^2. \quad (19.5)$$

Момент инерции по определению величина аддитивная, т.е. момент инерции I тела равен сумме моментов инерции

$$dI = dm r^2 \quad (19.6)$$

его малых элементов:

$$I = \int_V dI = \int_V r^2 dm. \quad (19.7)$$

С учетом (19.6) и (19.7) формулы (19.3) и (19.4) принимают вид:

$$dL_z = dI \omega \quad (19.8)$$

и

$$L_z = I \omega \quad (19.9)$$

- момент импульса как малого элемента тела, так и всего тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость тела.

Покажем, что для симметричного тела, вращающегося относительно оси симметрии Oz , формула (19.9) справедлива и для момента импульса L относительно любой точки этой оси: $L = L_z = I\omega$.

Вследствие симметрии тела всякому малому его элементу массы dm соответствует симметрично расположенный относительно оси вращения элемент той же массы, но с противоположно направленной скоростью $v' = -v$ (рис. 49). Запишем суммарный момент импульса такой пары элементов относительно некоторой точки O оси вращения, представляя их радиусы-векторы r и r' как сумму составляющих, направленных перпендикулярно и параллельно оси вращения Oz : $r = r_{\perp} + r_z$ и $r' = r'_{\perp} + r_z$ (параллельные составляющие равны: $r'_z = r_z$): $dL^{напр} = dL + dL' =$

$$[r_{\perp}, dm v] + [r'_z, dm v] = [(r_{\perp} + r_z), dm v] + [(r'_{\perp} + r_z), dm v'] =$$

$$[r_{\perp}, dm v] + [r_z, dm v] + [r'_{\perp}, dm v'] + [r_z, dm v'] = dL_z +$$

$$[r_z, dm v] + dL'_z - [r_z, dm v] = dL_z + dL'_z = dL_z^{напр}. \text{ Поскольку все тело можно представить как совокупность пар соответственных элементов, то и для полного момента импульса тела } L = L_z, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Как следует из определения (19.7), момент инерции тела относительно оси зависит от того, как распределена масса тела относительно этой оси. Момент инерции тем больше, чем более удалены элементы тела от оси, так как тем больше их вклад (за счет r^2 в формуле (19.6)). Так, например, момент инерции однородного бруска максимален относительно оси симметрии I_1 , параллельной короткому ребру, и минимален относительно оси симметрии I_2 , параллельной длинному ребру: $I_1 > I_2$ (рис. 50).

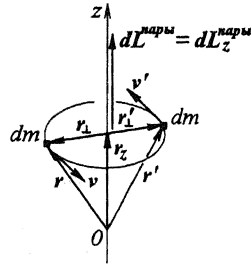


Рис. 49

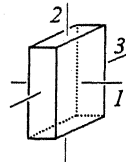


Рис. 50

Формула (19.9) позволяет судить об изменении момента импульса вращающегося тела по изменению его момента инерции и угловой скорости, что делает наглядным проявления закона сохранения момента импульса в системах с вращающимися телами. Весьма эффектные лекционные демонстрации со "скамьей Жуковского", которая может вращаться относительно вертикальной оси. Если пренебречь силами трения, то момент импульса скамьи вместе со всем, что на ней находится, относительно оси вращения должен сохраняться, так как моменты относительно этой оси прочих внешних сил - силы тяжести и реакции опоры - равны нулю. В одном из опытов демонстратор сидит на скамье с массивными гантелями в раздвинутых руках и скамья приводится во вращение. Когда демонстратор приближает гантели к туловищу, момент инерции системы уменьшается, и в соответствии с законом сохранения момента импульса $I\omega = const$ угловая скорость вращения увеличивается (рис. 51 а). В другом варианте демонстратор держит в руках велосипедное колесо, укрепленное на вертикальной оси (рис. 51 б), причем вначале скамья и колесо неподвижны ($\omega_{ск} = \omega_{кол} = 0$). Когда демонстратор начинает раскручивать колесо

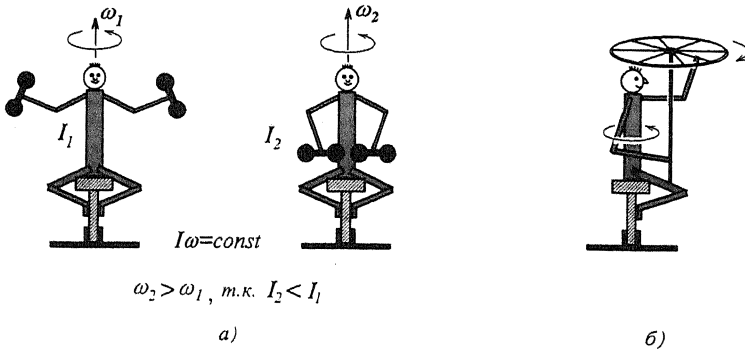


Рис. 51

Уравнение движения для вращения твердого тела относительно оси (уравнение моментов). Второй закон Ньютона для материальной точки (7.1) - (7.4), являясь в то же время законом поступательного движения тела, для вращательного движения тела как целого теряет смысл, поскольку в этом законе фигурирует ускорение одной точки, а при вращении тела его точки имеют различные ускорения.

Чтобы получить уравнение движения для вращения тела относительно оси Oz , рассмотрим тело как совокупность малых элементов, т.е. как частный случай системы материальных точек, и воспользуемся законом изменения момента импульса относительно оси Oz (14.15). Подставляя в него выражение (19.9) для момента импульса тела и учитывая при дифференцировании, что момент инерции тела не зависит от времени,

получим: $I \frac{d\omega}{dt} = \sum_i M_{(i)z}^{внеш.}$. Заменяя согласно (19.2) производную угловой скорости по времени на угловое ускорение и опуская символ "внеш." у моментов сил, имеем:

$$I\beta = \sum_i M_{(i)z} \quad (19.10)$$

- произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно сумме моментов (относительно той же оси) сил, действующих на рассматриваемое тело со стороны других тел. Уравнение (19.10) является уравнением движения для

вращения твердого тела относительно оси; его называют уравнением моментов в $0z$, так как в нем фигурируют момент инерции и моменты сил.

При решении задач уравнение моментов (19.10) записывают в проекции на ось вращения $0z$; с учетом (19.2) имеем:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_i M_{(i)z} . \quad (19.11)$$

Напомним формулы для модуля момента силы $M_z = [r_{\perp}, F_{\perp}]$ относительно оси $0z$:

$$|M_z| = \begin{cases} r_{\perp} F_{\perp} \sin \alpha \\ d \cdot F_{\perp} \\ r_{\perp} F_r \end{cases} . \quad (14.3 a)$$

Здесь r_{\perp} - радиус-вектор (относительно оси) точки приложения силы F ; $F = F_z + F_r + F_r$, $F_{\perp} = F_r + F_r$ - составляющая силы, перпендикулярная оси вращения; α - угол между векторами r_{\perp} и F_{\perp} , $F_r = F_{\perp} \sin \alpha$ - модуль активной составляющей F_r силы F ; $d = F_{\perp} \sin \alpha$ - плечо силы F_{\perp} (рис. 52). Знак входящей в уравнение (19.11) проекции $M_z = \pm |M_z|$ необходимо проверять в каждом конкретном случае (см. далее формулы (36.10) и (36.20) и комментарий к ним).

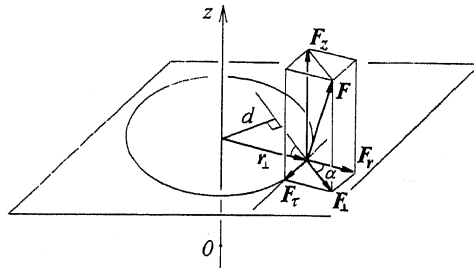


Рис. 52

Заметим, что уравнения движения для поступательного (второй закон Ньютона) и вращательного (уравнение моментов) движений имеют одинаковую структуру с той лишь разницей, что в уравнении моментов вместо линейного стоит угловое ускорение, вместо суммарной силы - суммарный момент сил, а вместо массы тела - его момент инерции относительно оси вращения. (Такое формальное и смысловое соответствие величин и формул, описывающих поступательное и вращательное движение тела, можно проследить и далее - см. таблицу на с. 70.) Поэтому для тела, вращающегося относительно оси, можно ставить и решать такие же задачи, что и для движения материальной точки или поступательного движения тела. Например, прямая задача в случае вращательного движения, т.е. нахождение кинематического закона вращения $\varphi(t)$, состоит в решении дифференциального уравнения (19.11) при заданных начальных условиях: $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\omega_z(0) = \omega_0$. (Рекомендуем забежать вперед и сопоставить решения задач о свободных колебаниях пружинного и физического маятников в § 36).

Из уравнения моментов, согласно которому угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции: $\beta = \sum_i M_{(i)z} / I$, вытекает физический смысл момента инерции тела: чем больше момент инерции, тем меньшее по величине угловое ускорение приобретает тело под действием данного момента приложенных сил. Следовательно, момент

инерции относительно некоторой оси является мерой инерции тела, вращающегося относительно этой оси, подобно тому как масса есть мера инерции тела при его поступательном движении.

Вычисление моментов инерции. Являясь фундаментальной характеристикой тела, момент инерции появляется практически во всех формулах динамики вращательного движения твердого тела, поэтому возникает пролема его вычисления.

В простейшем случае, когда тело состоит из отдельных материальных точек, соединенных невесомым каркасом, его момент инерции просто равен сумме моментов инерции всех точек:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2 . \quad (19.12)$$

Для тел конечных размеров с непрерывным распределением массы момент инерции вычисляется интегрированием согласно определяющей его формуле (19.7). В тривиальном случае, когда все элементы тела находятся на одинаковых расстояниях от оси вращения (примеры: тонкий стержень, вращающийся относительно параллельной ему оси; тонкостенный цилиндр, вращающийся относительно оси симметрии (рис. 53)), в

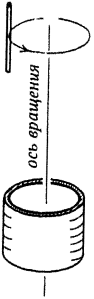


Рис. 53

формуле (19.7) $r = R = \text{const}$ и $I = \int_V r^2 dm = \int_V R^2 dm = R^2 \int_V dm = mR^2$, т.е.

формула для момента инерции имеет такой же вид, как и для материальной точки.

Сравнительно легко вычисляются моменты инерции однородных симметричных тел простой формы относительно их осей симметрии. В качестве примера выведем формулу для момента инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно перпендикулярной ему оси Oz , проходящей через середину стержня (рис. 54). Направим ось Ox вдоль стержня, выбрав начало отсчета на оси вращения. Момент инерции dI отдельного малого элемента стержня длиной dx , находящегося на расстоянии x от оси вращения, по формуле (19.6) равен $dI = dm x^2$. Масса dm элемента равна произведению массы, приходящейся

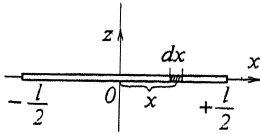
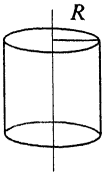


Рис. 54

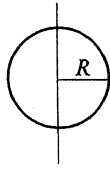
на единицу длины стержня m/l , на длину элемента dx : $dm = (m/l) dx$, так что $dI = (m/l) x^2 dx$. Суммируя моменты инерции всех малых элементов стержня, т.е. беря интеграл (19.7) в пределах от $x_1 = -l/2$ до $x_2 = l/2$, находим:

$$I = \int dI = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2 .$$

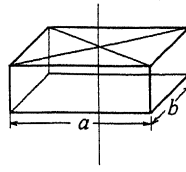
Ниже приводятся формулы для моментов инерции некоторых однородных тел простой формы относительно указанных осей симметрии: цилиндра, шара и прямоугольного параллелепипеда (m - масса тела, обозначения размеров показаны на рисунке; оси проведены штрих-пунктирной линией).



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I = \frac{2}{5} mR^2$$



$$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Моменты инерции оказываются пропорциональными массе тела и квадрату его характерного размера в направлении, перпендикулярном оси вращения. При этом коэффициент пропорциональности как правило меньше единицы, так как для большинства элементов тела их расстояние до оси меньше входящего в формулу размера тела.

Поскольку в зависимости от условий задачи тело может участвовать во вращении относительно той или иной оси, возникает необходимость находить момент инерции тела относительно любой оси. Существуют две теоремы, позволяющие выразить момент инерции тела относительно произвольной оси всего через три значения момента инерции, сводя тем самым задачу к нахождению этих трех так называемых главных значений момента инерции. В теоретической механике доказывается, что у всякого твердого тела существуют три взаимно перпендикулярные через центр масс, которые замечательны тем, что тело, будучи вовлеченным в свободное вращение относительно этих осей, стремится сохранить состояние равномерного вращения и ориентацию оси в пространстве, т.е. такие вращательные движения обладают инерцией. Эти оси называются главными осями инерции, а моменты инерции тела относительно них и являются главными значениями момента инерции тела. Заметим, правда, что вращение относительно главной оси, которой соответствует промежуточное по величине значение главного момента инерции, является неустойчивым.

У тел с симметричным распределением массы всякая ось симметрии является главной осью инерции. Например, у однородного цилиндра таковыми являются ось симметрии, параллельная образующей цилиндра (указанная на рисунке вверху страницы) и бесчисленное множество перпендикулярных ей осей симметрии, проходящих через центр масс цилиндра. У однородного шара любая ось, проходящая через его центр, является главной осью инерции. Убедиться в инерционности вращения тела относительно главных осей инерции можно, если подбрасывать пустой спичечный коробок, щелчком вовлекая его во вращение. Инерцию проявят только вращения относительно главных осей 1 и 2 (рис. 50), а вращение относительно оси 3 с промежуточным по величине главным значением момента инерции I_3 ($I_1 > I_3 > I_2$), как и относительно любой другой оси, осуществить не удастся.

Теорема. Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и составляющей с главными осями инерции 1, 2, 3 углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (рис. 55), выражается через главные значения момента инерции I_1, I_2, I_3 формулой

$$I = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3 \quad (19.13)$$

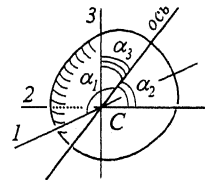


Рис. 55

Доказательство этой теоремы выходит за рамки курса общей физики.

Теорема Гюйгенса о параллельных осях. Момент инерции I' тела относительно некоторой оси, не проходящей через центр масс C тела, равен моменту инерции I относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния D между осями (рис. 56):

$$I' = I + mD^2. \quad (19.14)$$

Для доказательства теоремы проведем ось Ox с началом отсчета O в центре масс так, чтобы она проходила через обе оси перпендикулярно к ним. Запишем формулу (19.6) для момента инерции dI' малого элемента массой dm тела относительно оси, не проходящей через центр масс, выразив квадрат расстояния до оси r'^2 по теореме косинусов из треугольника на рис. 56: $dm r'^2 = dm(r^2 + D^2 + 2Dr \cos \varphi) = dm r^2 + dm D^2 + 2D dm x$. Здесь r - расстояние от элемента тела до оси, проходящей через центр масс, и учтено, что $r \cos \varphi = x$ - координата элемента тела в СО с началом в центре масс. Суммируя обе части этого равенства по всем элементам тела,

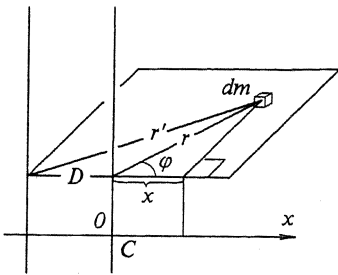


Рис. 56

имеем: $\int_V r'^2 dm = \int_V r^2 dm + D^2 \int_V dm + 2D \int_V x dm$. Два первых интеграла являются моментами инерции тела I' и I относительно осей, соответственно, не проходящей и проходящей через центр масс; $\int_V dm = m$ - масса тела, так что

$$I' = I + mD^2 + 2D \int_V x dm. \quad (19.15)$$

Радиус-вектор центра масс тела определяется формулой

$$r_c = \frac{\int_V r dm}{m}, \quad (19.16)$$

которая получается из формулы (12.2) для радиуса-вектора центра масс системы материальных точек заменой масс точек m_i на массы dm малых элементов тела и переходом от суммирования к интегрированию по объему тела V . Следовательно, координата x_c

центра масс тела по оси Ox определяется формулой $x_c = \frac{1}{m} \int_V x dm$, откуда $\int_V x dm = x_c m$.

Но в выбранной СО центр масс находится в начале координат, следовательно $x_c = 0$,

откуда $\int_V x dm = 0$ и формула (19.15) переходит в соотношение (19.14), которое и требовалось доказать.

Теорема о параллельных осях позволяет выразить момент инерции относительно любой оси через момент инерции того же тела относительно оси, проходящей через центр масс, который в свою очередь согласно формуле (19.13) выражается через главные значения момента инерции. Таким образом для нахождения момента инерции тела относительно любой оси достаточно знать три главных значения его момента инерции.

Для тел сложной формы или неоднородных по составу, когда плотность зависит от координат, непосредственный теоретический расчет главных значений момента инерции может оказаться затруднительным и даже вообще неосуществимым. Тогда на помощь приходят экспериментальные методы измерения моментов инерции. Один из таких методов основан на крутильных колебаниях, в которые тем или иным способом вовлекается исследуемое тело. Частота крутильных колебаний зависит от момента инерции тела (см. формулу (36.23) на с. 119) и последний может быть рассчитан, если измерить частоту колебаний и параметры установки, входящие в расчетную формулу.

Кинетическая энергия вращающегося тела. Выведем формулу для кинетической энергии твердого тела массы m , вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω . Кинетическая энергия dW_k малого элемента тела массы dm , движущегося по окружности радиуса r с линейной скоростью v , согласно (15.5), (5.6) и (19.6) равна

$$dW_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} dI \omega^2, \text{ где } dI - \text{ момент инерции рассматриваемого элемента.}$$

Кинетическая энергия тела, как аддитивная величина, складывается из кинетических энергий всех малых элементов тела, т.е. определяется взятым по всему объему тела ин-

тегралом $W_k = \int_V dW_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V dI$. Последний интеграл согласно (19.7) представляет собой момент инерции I тела относительно оси вращения, так что

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (19.17)$$

Снова прослеживается аналогия с поступательным движением, при котором $W_k = \frac{1}{2} m v^2$: с учетом соответствия $m \leftrightarrow I, v \leftrightarrow \omega$ обе формулы совпадают.

Работу силы F , приложенной к телу, вращающемуся относительно оси, также можно представить в виде, аналогичном случаю прямолинейного движения тела вдоль оси Ox . С учетом формул (15.3) и (14.3) (нижнее выражение) и замечая, что величина малого перемещения dl точки приложения силы по дуге окружности радиуса r связана с углом поворота $d\varphi$ соотношением $dl = r d\varphi$ (см. рис. 57, на котором ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа и изображается

точкой O), имеем: $A_{12} = \int_1^2 F_l dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_r r d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_r d\varphi$ (сравните с

формулой $A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$ с учетом соответствия $x \leftrightarrow \varphi$,

$F_x \leftrightarrow M_r$).

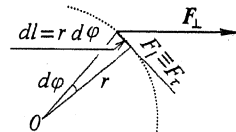


Рис. 57

Сведем в одну таблицу физические величины и формулы, в которых проявляется соответствие поступательного (вдоль координатной оси Ox) и вращательного (относительно оси Oz) движений в инерциальной $CO Oxuz$:

Таблица

Поступательное движение	↔	Вращательное движение
линейная координата x	↔	угловая координата φ
линейная скорость $v = \frac{dr}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$	↔	угловая скорость ω , $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$
линейное ускорение $a = \frac{dv}{dt}$, $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	↔	угловое уск. $\beta = \frac{d\omega}{dt}$, $\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
масса $m = \int_V dm$	↔	момент инерции $I = \int_V r^2 dm$
импульс $P_x = mv_x$	↔	момент импульса $L_z = I\omega$
сила F_x	↔	момент силы $M_z = [r_{\perp}, F_{\perp}]$
2-й закон Ньютона $\left\{ \begin{array}{l} ma = \sum_i F_i \\ m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_{(i)x} \end{array} \right.$	↔	ур - ние моментов $\left\{ \begin{array}{l} I\beta = \sum_i M_{(i)z} \\ I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_i M_{(i)z} \end{array} \right.$
кинетическая энергия:		
$W_k = \frac{mv^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad W_k = \frac{I\omega^2}{2}$		
работа:		
$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad \leftrightarrow \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$		

Центр тяжести тела. В ряде случаев, когда на абсолютно твердое тело действуют несколько сил, их удается заменить одной - **равнодействующей**, т.е. оказывающей одинаковое с ними действие на тело. Точнее говоря, замена нескольких сил на их равнодействующую не должна изменить движение тела как абсолютно твердого. Поскольку в уравнении движения центра масс стоит сумма действующих на тело сил, а в уравнении моментов - сумма моментов этих сил, то равнодействующая F нескольких

сил должна быть равной их сумме: $F = \sum_i F_i$, а момент M равнодействующей относи-

тельно любой точки и оси - сумме моментов этих сил: $M = \sum_i M_i$. Так как момент силы зависит от точки приложения силы, то всегда необходимо указывать точку приложения равнодействующей.

Силы тяжести, действующие на элементы тела массы m в однородном поле тяготения с ускорением свободного падения g , имеют равнодействующую $F = mg$ и ее точкой приложения является центр масс тела. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что сумма моментов $dM = [r, dm g]$ сил тяготения, действующих на малые элементы массой dm тела, равна моменту суммарной силы тяжести $F = mg$, приложенной к центру масс тела, т.е.

$$\int_V [r, dm g] = [r_c, mg], \quad (19.18)$$

Здесь r_c - радиус-вектор центра масс тела, определяемый формулой (19.16).

Чтобы избежать громоздких выражений, докажем это утверждение для тела, состоящего из двух материальных точек массами m_1 и m_2 , соединенных жестким невесомым стержнем (рис. 58). В этом случае требуется показать, что

$$\underbrace{[r_1, m_1 g]}_{M_1} + \underbrace{[r_2, m_2 g]}_{M_2} = \underbrace{\left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, (m_1 + m_2) g \right]}_M \quad (19.19)$$

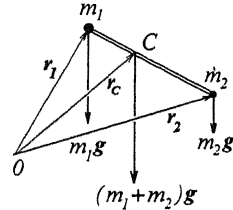


Рис. 58

Преобразуем выражение, стоящее в правой части формулы, вынося скалярные множители $1/(m_1 + m_2)$ и $m_1 + m_2$ за знак векторного произведения (эта операция законна, так как не изменяет ни модуля, ни направления векторного произведения) и сокращая их, а также используя дистрибутивность векторного произведения (см. (M.28)):

$$\left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, (m_1 + m_2) g \right] = [(m_1 r_1 + m_2 r_2), g] = [m_1 r_1, g] + [m_2 r_2, g] = [r_1, m_1 g] + [r_2, m_2 g],$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что аналогичные выкладки можно провести для произвольной совокупности малых элементов любого твердого тела; при этом сумма в левой части равенства (19.19) перейдет в интеграл, стоящий в левой части равенства (19.18).

Таким образом центр масс тела замечателен не только тем, что его движение подчиняется второму закону Ньютона, но и тем, что он является точкой приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на элементы тела. Отсюда и второе название этой точки - центр тяжести.

Покажем на нашем примере, что работа $\delta A = (m_1 g, dr_1) + (m_2 g, dr_2)$ сил тяжести $F_1 = m_1 g$ и $F_2 = m_2 g$, действующих на элементы тела, равна работе $\delta A = (mg, dr_c)$ их равнодействующей $F = mg$, приложенной к центру тяжести тела (dr_1, dr_2, dr_c - перемещения рассматриваемых элементов и центра тяжести). Действительно, используя свойства скалярного произведения (см. M.28), имеем:

$$(mg, dr_c) = \left((m_1 + m_2)g, d \left(\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \right) \right) = \left((m_1 + m_2)g, \frac{m_1 dr_1 + m_2 dr_2}{m_1 + m_2} \right) = (g, (m_1 dr_1 + m_2 dr_2)) =$$

$(m_1 g, dr_1) + (m_2 g, dr_2)$. Как следствие, потенциальная энергия тела определяется высотой центра тяжести тела h_c : $W_{II} = mgh_c$.

Прецессия гироскопа. Гироскопом (от слов "giro"- вращение, "skopeo"- смотреть) называют симметричный волчок, обладающий большим моментом инерции I относительно оси симметрии, которая, как отмечалось ранее, является одной из его главных осей инерции. Именно вращаясь относительно своей оси симметрии с большой угловой скоростью ω_0 , т.е. обладая большим собственным моментом импульса $L_0 = I\omega_0$ относительно этой оси, гироскоп проявляет свои специфические свойства, об одном из которых пойдет речь.

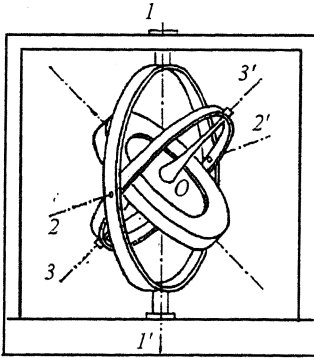


Рис. 59

Рассмотрим вращающийся вокруг оси симметрии гироскоп, укрепленный на кардановом подвесе. Карданов подвес (рис. 59) устроен так, что допускает любое вращение гироскопа вокруг одной неподвижной точки O - центра подвеса, относительно которой момент сил, действующих на гироскоп со стороны подвеса, равен нулю. Он состоит из двух колец, которые могут свободно вращаться относительно осей, соответственно, $11'$ и $22'$. Сам гироскоп укреплен во внутреннем кольце и его собственное вращение происходит вокруг оси $33'$. Мы рассматриваем случай, когда центр тяжести гироскопа совпадает с центром подвеса, так что момент сил тяжести относительно точки O также равен нулю. При этих условиях покоящийся гироскоп нахо-

дился бы в положении безразличного равновесия, а вращающийся стремится сохранить состояние собственного вращения. Выясним, как будет вести себя гироскоп, если к его оси на расстоянии r от точки O приложена постоянная сила F (рис. 60 а). Невращающийся гироскоп ($\omega_0 = 0$) под действием момента $M = [r, F]$ этой силы вел бы себя по существу как физический маятник, однако вращающийся гироскоп реагирует совершенно иначе.

Для решения задачи используем закон изменения момента импульса (14.9) относительно неподвижной точки гироскопа O . (Применять уравнение моментов (19.10) для вращения относительно оси здесь нельзя, так как ось гироскопа, как мы увидим, не будет оставаться неподвижной). Моменты силы тяжести и сил, действующих на ось гироскопа со стороны подвеса, по условию задачи равны нулю, а силами трения пренебрегаем, поэтому суммарный момент сил, действующих на гироскоп, сводится к моменту

$M = [r, F]$ силы F и уравнение моментов имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = [r, F]. \quad (19.20)$$

Следовательно, момент импульса гироскопа будет изменяться со временем, однако скорость дополнительного движения гироскопа обычно мала по сравнению с огромной скоростью собственного вращения. Поэтому в любой момент времени момент импульса

L гироскопа практически равен собственному моменту импульса $L = L_0 = I \omega_0$ и направлен по оси гироскопа (строгое обоснование дано мелким шрифтом на с. 63).

Согласно (19.20) $dL_0 = [r, F] dt$. Разложим момент импульса L_0 на две составляющие: L_F , направленную вдоль силы F , и L_{\perp} , лежащую в плоскости, перпендикулярной силе F : $L_0 = L_F + L_{\perp}$ (рис. 60 б). Составляющая L_F сохраняется ($L_F = const$), так как момент силы F относительно параллельной ей оси равен нулю, поэтому $dL_0 = d(L_F + L_{\perp}) = dL_{\perp}$, так что

$$dL_{\perp} = [r, F] dt . \quad (19.21)$$

Следовательно, малые приращения dL_{\perp} всегда направлены по моменту силы $M = [r, F]$, т.е., как легко убедиться, они перпендикулярны самому вектору L_{\perp} и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору F - это приводит к вращению вектора L_{\perp} (см. последний абзац на с. 13). Таким образом одна составляющая (L_F) момента импульса L_0 остается постоянной, а другая (L_{\perp}) вращается в перпендикулярной плоскости. В результате вектор $L_0 = I \omega_0$, а вместе с ним и ось гироскопа, описывают конус вокруг направления силы F , как показано окружностью со стрелкой на рис. 60. Это дополнительное вращение оси гироскопа под действием постоянной силы называется прецессией.

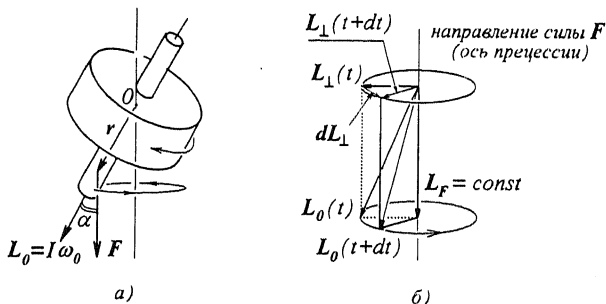


Рис. 60

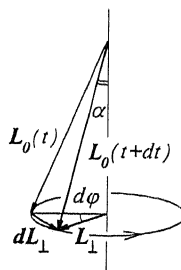


Рис. 61

Вычислим величину Ω угловой скорости прецессии. Малый угол $d\varphi$, на который поворачивается за время dt плоскость, проходящая через ось гироскопа и ось прецессии, находим из рис. 61: $d\varphi = dL_{\perp} / L_{\perp}$. В этой формуле согласно (19.21) $dL_{\perp} = r F \sin \alpha dt$ (угол α между векторами r и F есть угол между осью гироскопа и осью прецессии, как

видно из рис. 60 и рис. 61), а $L_{\perp} = L \sin \alpha = I \omega_0 \sin \alpha$, так что $d\varphi = \frac{r F \sin \alpha dt}{I \omega_0 \sin \alpha} = \frac{r F dt}{I \omega_0}$ и после деления на dt находим угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r F}{I \omega_0} . \quad (19.22)$$

В лекционных демонстрациях прецессию гироскопа вызывают, подвесив к его оси грузы массой m , тогда в формуле (19.22) $F = mg$. Меняя массу грузов и их точку подвеса можно проиллюстрировать прямо пропорциональную зависимость угловой скорости прецессии от величины силы F и расстояния r от центра вращения до точки приложения силы. Со временем за счет сил трения угловая скорость ω_0 собственного вращения гироскопа уменьшается и в соответствии с формулой (19.22) наблюдается увеличение угловой скорости прецессии - этот эффект наблюдается у юлы и знаком всем с детства.

Многие вращательные движения в природе сопровождаются более или менее ярко выраженной прецессией: прецессирует ось вращения Земли; прецессируют в магнитном поле оси орбит атомных электронов, обуславливая намагничивание вещества.

§ 20. Плоское движение

Плоское движение, при котором точки тела, по определению, движутся в параллельных плоскостях, можно представить как поступательное движение тела вместе с осью, перпендикулярной этим плоскостям, и вращение относительно этой оси. Как будет показано далее, целесообразно выбрать ось вращения проходящей через центр масс C . Для описания движения тела используем две системы отсчета: "неподвижную" инерциальную $CO K$, в координатной плоскости xOy которой движется центр масс тела, и вторую, связанную с телом $CO K'$, у которой начало координат совпадает с центром масс C тела, а координатные оси Cx' , Cy' , Cz' параллельны координатным осям Ox , Oy , Oz неподвижной CO (см.рис. 62, на котором оси Oz и Cz' направлены на читателя). Тогда положение тела в любой момент времени определяется заданием положения оси вращения Cz' , которое описывается двумя координатами центра масс $x_c(t)$ и $y_c(t)$, и углом $\varphi(t)$, характеризующим поворот тела относительно оси Cz' . Следовательно, тело, которое может совершать плоское движение, обладает тремя степенями свободы.

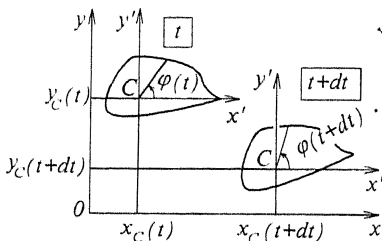


Рис. 62

Координаты центра масс тела $x_c(t)$ и $y_c(t)$ подчиняются уравнению движения центра масс (12.5):

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_i F_{xi}, \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_i F_{yi}, \quad (20.1)$$

а угол $\varphi(t)$ - уравнению моментов (19.11), так как в $CO K'$ тело вращается относительно неподвижной оси Cz' :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_i M_{xi}. \quad (20.2)$$

Заметим, что $CO K'$ вообще говоря неинерциальная, и справедливость в ней уравнения моментов требует обоснования (см. далее предпоследний абзац на с. 105).

Прямая задача динамики тела, совершающего плоское движение, состоит в нахождении зависимости от времени координат $x_c(t)$, $y_c(t)$, $\varphi(t)$ и сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений (20.1), (20.2) при заданных начальных условиях $x_c(0) = x_0$, $y_c(0) = y_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $v_{cx}(0) = v_{cx0}$, $v_{cy}(0) = v_{cy0}$, $\omega(0) = \omega_0$.

Качение. Частным случаем плоского движения является качение тел, которое обсудим на примере качения однородного цилиндра по горизонтальной плоскости (рис. 63). Качение может происходить со скольжением (с "пробуксовкой"), но мы ограничимся рассмотрением качения без скольжения, когда обеспечено такое сцепление между цилиндром и плоскостью, что точки цилиндра, находящиеся на линии его соприкосновения с плоскостью (точка A на рис.63 а) покоятся относительно плоскости. Скорость этих точек v_A складывается из скорости $v_{ц.м.}$ поступательного движения цилиндра вместе с цент-

ром масс и скорости v_{ep} вращения относительно оси цилиндра (рис. 63 а): $v_A = v_{ц.м.} + v_{ep} = 0$. Скорость v_{ep} направлена против скорости $v_{ц.м.}$ и имеет модуль $v_{ep} = \omega R$, где R и ω - радиус и угловая скорость вращения цилиндра, так что для качения без скольжения необходимо, чтобы в каждый момент времени выполнялось условие: $v_{ц.м.} = \omega R$, или (дифференцируем обе части равенства по времени)

$$a_{ц.м.} = \beta R, \tag{20.3}$$

где $a_{ц.м.}$ - ускорение центра масс цилиндра, β - угловое ускорение вращения цилиндра.

Поскольку проскальзывание отсутствует, на цилиндр со стороны плоскости помимо силы N нормального давления действует сила трения покоя $F_{тр.п.}$, которая входит в уравнения движения как неизвестная и определяется в процессе решения задачи. (Качение будет происходить без проскальзывания только в том случае, если для найденного значения величины $F_{тр.п.}$ выполняется условие: $F_{тр.п.} < \mu N$.) Однако легко видеть, что описание трения силой, действующей только на линии касания цилиндра и плоскости, является довольно грубым приближением. Действительно, свободно катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости цилиндр со временем останавливается, т.е. реально действующие силы тормозят как поступательное, так и вращательное движения цилиндра. В то время как в нашей модели сила трения покоя может либо тормозить поступательное движение, но при этом ускорять вращательное (рис. 63 б), либо, напротив, тормозить вращение, но ускорять поступательное движение (рис. 63 в) (сила нормального давления, очевидно, роли не играет).

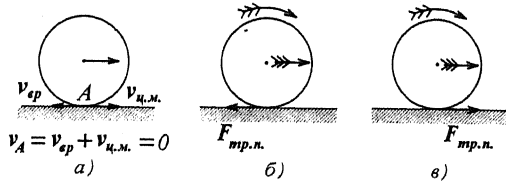


Рис. 63

Из изложенного ясно, что силы, действующие на катящийся цилиндр со стороны плоскости, должны, во-первых, иметь горизонтальную составляющую, направленную против скорости $v_{ц.м.}$ поступательного движения цилиндра, и, во-вторых, их суммарный момент относительно оси цилиндра должен быть направлен против угловой скорости ω вращения цилиндра. Такими силами являются силы трения качения, природа которых принципиально связана с деформацией плоскости и цилиндра, неизбежно возникающей при качении цилиндра. При этом существуют два обстоятельства. Во-первых, деформированные цилиндр и плоскость имеют поверхность соприкосновения в виде полоски конечной ширины AB (рис. 64 а), у которой радиус круга кривизны, помеченного пунктиром, больше радиуса цилиндра. В результате линии действия сил нормального давления ΔN_i , действующих на элементы поверхности цилиндра со стороны плоскости, проходят выше центра цилиндра (силы трения покоя, направленные по касательной к дуге AB , в нашем рассуждении можно не принимать во внимание). Во-вторых, принципиальную роль играет учет неупругого характера деформаций, в результате которого в точках области наката CB , где деформации находятся в стадии роста, силы ΔN_i больше по величине, чем в симметричных с ними точках в области отката AC , где деформации, хотя и имеют ту же величину, но находятся в стадии убывания (сравните значения напряжения при значении деформации ϵ , на кривых нагрузки (0П) и

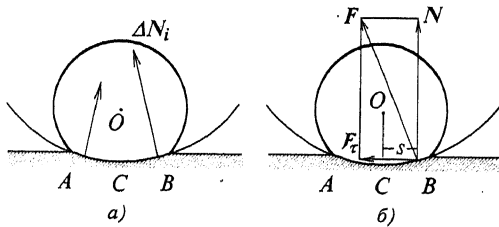


Рис. 64

убывания (сравните значения напряжения при значении деформации ϵ , на кривых нагрузки (0П) и разгрузки (П ϵ_0) на рис. 70). В итоге, как видно из рис. 64 а, равнодействующая $F = \sum_i \Delta N_i$ сил, дей-

ствующих на цилиндр со стороны плоскости, может иметь составляющую F_{τ} , направленную против движения цилиндра и тормозящую его поступательное движение, и одновременно создавать момент сил, тормозящий также и вращение цилиндра (тормозящие моменты сил на участке CB превышают по величине ускоряющие моменты сил на участке AC). В таком случае равнодействующая сила F имеет наклон против движения, ее точка приложения вынесена вперед по ходу движения, а ее линия действия проходит над центром цилиндра (рис. 64 б). Момент силы N (нормальной составляющей силы F), тормозящий вращение тела, называют моментом силы трения качения. Его модуль, как показывает опыт, в некотором приближении пропорционален величине силы нормального давления N и не зависит ни от радиуса цилиндра, ни от его скорости:

$$M_{\text{тр.к.}} = sN, \quad (20.4)$$

где коэффициент пропорциональности s , имеющий размерность длины, зависит от материала катящегося тела и опоры. Согласно формуле (14.3а) на с.65, s является плечом силы N , как показано на рис. 64 б. При строгом решении прямой задачи на качение тела без скольжения силы F_{τ} и N рассматриваются как неизвестные, а момент силы N записывается в виде (20.4).

Силы трения качения значительно меньше сил трения скольжения (шарик прокатится по горизонтальной плоскости до остановки значительно дальше, чем проскользит брусок той же массы из того же вещества при равных начальных кинетических энергиях). В колесах на шарикоподшипниках силы трения скольжения заменяются силами трения качения, за счет чего существенно уменьшаются потери механической энергии.

УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 21. Описание деформаций

Абсолютно твердое тело - идеализированное понятие: тела при внешних воздействиях в той или иной мере изменяют свою форму - в них возникают деформации. В настоящей главе изучаются статические, т.е. не зависящие от времени деформации, которые устанавливаются в телах под действием постоянных сил.

Простейшими и в то же время фундаментальными являются деформации растяжения-сжатия и сдвига. Возьмем однородный образец правильной, например, цилиндрической формы, и на два его торца действуем равными по модулю и противоположными по направлению силами F и $-F$, равномерно распределенными по поверхности торцов. Если силы действуют нормально к поверхности торцов (F_n), то возникает деформация растяжения или сжатия, а при действии сил в касательном (тангенциальном) направлении (F_τ) - деформация сдвига (рис. 65). (В опытах часто силу F прикладывают только к одному основанию, а другое закрепляют на опоре и сила $-F$ действует на него со стороны опоры). Величина Δl , показывающая на сколько смещаются друг относительно друга торцы образца, называется абсолютной деформацией, а отношение $\Delta l/l$ абсолютной деформации Δl к длине образца l - относительной деформацией. При деформации растяжения-сжатия относительная деформация означает относительное удлинение или сжатие образца и обозначается буквой ε : $\varepsilon = \Delta l/l$, а в случае деформации сдвига относительная деформация определяется тангенсом угла γ , на который поворачиваются плоскости, перпендикулярные приложенным силам: $\operatorname{tg} \gamma = \Delta l/l$.

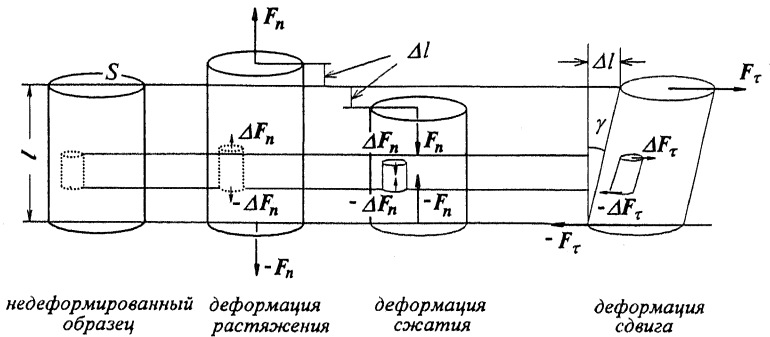


Рис. 65

Деформация растяжения сопровождается поперечным сжатием (и соответственно деформация сжатия - поперечным растяжением), причем относительные изменения продольных и поперечных размеров пропорциональны друг другу: $\Delta D/D = \mu \Delta l/l$, где D - диаметр цилиндрического образца, ΔD - его изменение при деформации. Коэффициент пропорциональности μ , называемый коэффициентом Пуассона, зависит от свойств вещества. Его максимально возможное значение $\mu = 0,5$ при малых деформациях соответствует случаю, когда при деформации не изменяется объем тела.

При деформациях изменяет форму не только тело в целом, но и каждый его малый элемент. В приведенных примерах, если можно пренебречь весом тела по сравнению с приложенными силами, деформации с хорошей степенью точности о д н о р о д н ы е: все одинаковые малые элементы продольной цилиндрической формы, один из которых изображен на рис. 65 пунктирными линиями, независимо от их местоположения испытывают одинаковые абсолютные деформации, а относительные деформации одинаковы и у цилиндрических элементов различных размеров. (Строго говоря, для осуществления в чистом виде однородного растяжения-сжатия и сдвига необходимо дополнительно приложить силы, которые в первом случае предотвратили бы поперечное сжатие-растяжение, а во втором компенсировали момент сил F и $-F$). Если тело не столь простой формы, или неоднородно по составу, или приложенные силы имеют более сложный характер, то деформации могут иметь сложный вид. Однако, как доказывается в теоретической механике, при любой деформации малые элементы тела испытывают соответствующие растяжения-сжатия и сдвиги, вообще говоря, разные в различных местах тела, т.е. любая деформация сводится к неоднородным растяжению-сжатию и сдвигу.

Опишем еще две деформации сравнительно простого вида - изгиб и кручение. Деформация и з г и б а возникает в однородном стержне прямоугольного сечения, если плоскости его торцов повернуть друг относительно друга на некоторый угол. На практике ее можно осуществить с хорошей степенью точности, закрепив один из концов стержня на вертикальной стенке, а на другой подействовав вертикально направленной силой F (рис. 66). Мерой деформации является стрела прогиба λ - максимальное смещение свободного конца стержня в перпендикулярном к нему направлении. При изгибе некоторый нейтральный слой, изображенный пунктирной линией, не изменяет своей длины, в то время как другие слои претерпевают деформацию растяжения (верхние на рис. 66) и сжатия (нижние), растущую по мере удаления от нейтрального слоя. Следовательно, деформация изгиба сводится к неоднородному растяжению-сжатию.

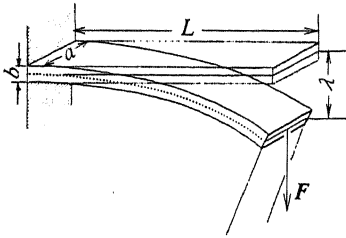


Рис. 66

Деформация к р у ч е н и я возникает в однородном цилиндрическом образце, если его основания повернуть друг относительно друга вокруг оси цилиндра. На практике деформацию кручения можно осуществить, если закрепить одно из оснований цилиндра, а другое прикрепить к жесткой пластине и к ней приложить пару сил - две равные по модулю и противоположные по направлению силы F и $-F$, как показано на рис. 67 слева. Мерой деформации кручения служит угол φ , на который по-

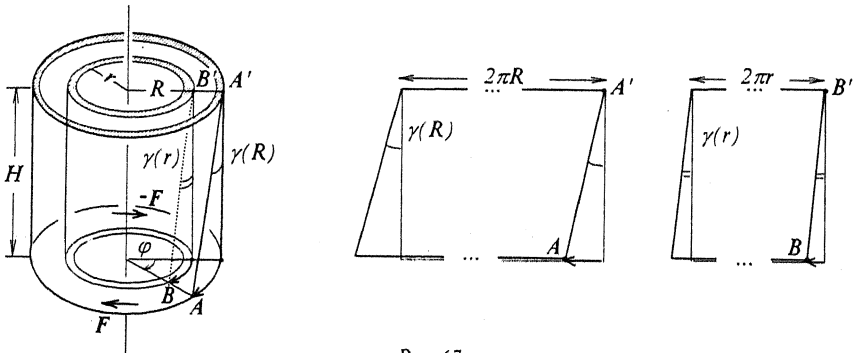


Рис. 67

ворачиваются основания цилиндра друг относительно друга. Расслоив мысленно весь цилиндр радиуса R на тонкие соосные цилиндрические слои, легко убедиться, что каждый слой испытывает деформацию сдвига. Это проиллюстрировано в правой части рис. 67, где два цилиндрических слоя радиусов R и r "распластаны" на плоскость чертежа. Видно, что угол сдвига γ зависит от радиуса слоя: $\gamma(r) = \gamma(R)r/R$, так что деформация кручения сводится к неоднородному сдвигу.

§ 22. Механические напряжения

В отсутствии внешних воздействий тело не деформировано, его атомы (ионы) находятся в положениях устойчивого равновесия (в кристаллических твердых телах - в узлах кристаллической решетки). Этому состоянию соответствует минимум потенциальной энергии взаимодействия, так что силы взаимодействия равны нулю. При деформации относительное расположение атомов изменяется и между ними возникают силы, стремящиеся вернуть их в прежнее положение.

Для описания этих взаимодействий вводится физическая величина, называемая механическим напряжением. В окрестности рассматриваемой точки тела мысленно выбирается малая площадчка ΔS и исследуется величина силы ΔF , с которой частицы вещества, расположенные по одну сторону площадки, взаимодействуют с частицами, расположенными по другую сторону площадки. В простейших случаях, когда силы взаимодействия нормальны или касательны к площадке (рис. 68 а и 68 б), напряжение σ определяется формулой

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (22.1)$$

т.е. численно равно величине силы взаимодействия молекул, приходящейся на единичную площадку. При растяжении-сжатии на торцах малых цилиндрических элементов образца возникает нормальное напряжение σ_n , так как силы действуют перпендикулярно рассматриваемым элементам поверхности, а при сдвиге - тангенциальное напряжение σ_τ (на рис. 65 указаны только силы ΔF , действующие на молекулы выделенных пунктиром элементов со стороны внешних молекул).

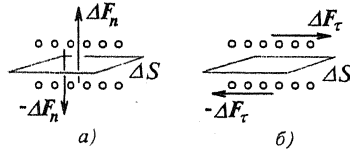


Рис. 68

Подчеркнем, что в отличие от давления в жидкости и газе, которое тоже определяется формулой (22.1), напряжение в деформированном твердом теле зависит от ориентации площадки; например, при деформации растяжения-сжатия оно максимально для площадок, перпендикулярных направлению приложенных сил (торцов малых элементов), и минимально на площадках, расположенных вдоль этого направления (на боковых поверхностях малых элементов). Такая ситуация описывается более сложными, чем скаляры и векторы, физическими величинами - тензорами (матрицами); в общей теории деформации фигурируют тензоры деформации и напряжения.

В общем случае силы, действующие на малый кубический элемент деформированного тела через его грани со стороны окружающих частиц вещества, имеют и нормальную, и тангенциальные составляющие. Так, сила ΔF_x на грани ΔS_x , перпендикулярной оси Ox , имеет нормальную составляющую ΔF_{xx} и две тангенциальные составляющие ΔF_{xy} и ΔF_{xz} (и аналогично на гранях ΔS_y и ΔS_z). Поделить величины этих составляющих на площадь грани, получим 9 величин $\sigma_{ij} = \Delta F_{ij} / \Delta S_j$, характеризующих напряжение, которые записываются в виде матрицы:

пряжением и деформацией: одному и тому же значению напряжения могут соответствовать различные значения деформации в зависимости от предыстории, т.е. от того, каким способом тело было приведено в рассматриваемое состояние. В частности, при полном снятии внешнего воздействия тело не восстанавливает свою исходную форму, причем остаточная деформация ε_0 зависит от максимального напряжения, которое было достигнуто в процессе нагрузки. В области пластической деформации кривая $\sigma(\varepsilon)$ идет все более полого и переходит в почти горизонтальный участок, называемый областью течения, когда тело продолжает деформироваться практически без увеличения нагрузки ("течет"), пока не наступит разрыв.

Сходный характер имеет и зависимость $\sigma_t(\gamma)$ тангенциального напряжения от угла сдвига при деформации сдвига, а следовательно, кривой на рис. 70 можно руководствоваться и в случае произвольной деформации, поскольку она сводится к неоднородным растяжению-сжатию и сдвигу.

В зависимости от количественных характеристик кривой $\sigma(\varepsilon)$ можно условно классифицировать вещества. Среды с большим значением предела упругости σ_e естественно назвать упругими, причем те из них, у которых кривая $\sigma(\varepsilon)$ в области пропорциональности идет круто, являются жесткими (сталь, слоновая кость). У образцов, изготовленных из жестких материалов, большие нагрузки вызывают малые деформации, которыми во многих задачах можно пренебречь, считая тело абсолютно твердым. Вещества с малой областью упругих деформаций пластичны (полимеры, из металлов - свинец); для изготовленных из них образцов характерны остаточные деформации, возникающие даже при незначительных воздействиях. Вещества с малой протяженностью области пластической деформации являются хрупкими, они разрушаются практически сразу после достижения предела упругости (стекло, фарфор).

§ 24. Закон Гука

Упругие деформации в линейной области зависимости $\sigma(\varepsilon)$ подчиняются закону Гука, который для однородной деформации растяжения-сжатия имеет вид:

$$\frac{F_n}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (24.1)$$

или

$$\sigma_n = E \varepsilon. \quad (24.2)$$

Закон Гука в форме (24.1) обычно записывают для образца в целом, понимая под $l, S, \Delta l$ длину, площадь поперечного сечения и абсолютное удлинение (сжатие) образца, а под F_n - величину приложенной внешней силы. В форме (24.2) закон Гука справедлив и для любого продольного элемента тела, если под σ понимать нормальное напряжение на его торцах, а под ε - относительное удлинение этого элемента. Коэффициент пропорциональности E , зависящий от свойств вещества и характеризующий его жесткость, называется модулем одностороннего растяжения, или модулем Юнга.

Для деформации сдвига закон Гука имеет вид, аналогичный (24.2):

$$\sigma_t = G \gamma, \quad (24.3)$$

где $\sigma_t = F_t/S$ - тангенциальное напряжение, γ - угол сдвига (рис. 65), который ввиду малости деформации характеризует относительную деформацию: $\Delta l/l = tg \gamma = \gamma$. Коэффициент пропорциональности G , характеризующий жесткость вещества по отношению к сдвиговой деформации, называется модулем сдвига.

Для деформации изгиба стержня при условии выполнения закона Гука (24.2) для всех его слоев расчет дает следующую зависимость между стрелой прогиба λ и величиной приложенной силы F :

$$F = \frac{Eab^3}{4L^3} \lambda, \quad (24.4)$$

где E - модуль Юнга вещества, a - ширина, b - толщина стержня, L - расстояние между точкой закрепления стержня и точкой приложения силы (рис. 66).

Для деформации кручения цилиндрического образца при условии выполнения закона Гука (24.3) для всех его цилиндрических слоев расчет приводит к следующей зависимости между модулем момента $M = 2RF$ пары сил (рис. 67) и углом кручения φ :

$$M = D\varphi, \quad (24.5)$$

где модуль кручения D определяется выражением

$$D = \frac{\pi G R^4}{2H}; \quad (24.6)$$

здесь G - модуль сдвига вещества, R - радиус, H - высота образца.

Формулы (24.4) и (24.5) - (24.6) выражают закон Гука для деформаций изгиба и кручения. Таким образом, закон Гука для всех рассмотренных видов упругих деформаций констатирует пропорциональность некоторой силовой характеристики, являющейся мерой силового воздействия (напряжение, сила, момент сил), и геометрической величины, характеризующей деформацию (относительные удлинение и сдвиг, стрела прогиба, угол кручения). При этом в законе Гука для фундаментальных деформаций растяжения-сжатия (24.2) и сдвига (24.3) коэффициенты пропорциональности - модуль Юнга и модуль сдвига - зависят только от свойств вещества. В случаях деформаций изгиба и кручения, которые сводятся, соответственно, к неоднородным растяжению-сжатию и сдвигу, эти коэффициенты в формулах (24.4) и (24.5) зависят от модулей соответствующих деформаций, а также от размеров тела.

В теоретической механике деформации описывают, задавая в каждой точке вектор $\xi(x, y, z)$, показывающий, куда сместилась при деформации точка среды, находившаяся в точке x, y, z пространства. Если поле смещений однородно, т.е. $\xi(x, y, z) = const$, то это означает поступательное перемещение тела как целого; при различных значениях вектора ξ в разных точках тело деформировано.

При деформации растяжения-сжатия вдоль оси Ox векторы смещения направлены вдоль этой оси и зависят от координаты x : $\xi(x) = \xi_x(x)i$ (i - единичный вектор в направлении оси Ox). Рассмотрим малый цилиндрический элемент длиной Δx , основания которого имеют координаты x и $x + \Delta x$ (рис. 71). Если векторы смещения в точках x и $x + \Delta x$ равны соответственно $\xi(x)$ и $\xi(x + \Delta x)$, то рассматриваемый элемент получит

абсолютное удлинение $\xi_x(x + \Delta x) - \xi_x(x)$ и относительное удлинение $\varepsilon = [\xi_x(x + \Delta x) - \xi_x(x)] / \Delta x$, так что закон Гука для него запишется в виде:

$\sigma_n = E [\xi_x(x + \Delta x) - \xi_x(x)] / \Delta x$. Если неограниченно уменьшать длину элемента, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, то слева будет стоять значение напряжения $\sigma(x)$ в точке x , а справа - производная $d\xi_x/dx$ смещения по координате x , взятая в той же точке (в общем случае, когда смещение зависит и от других координат, это будет частная

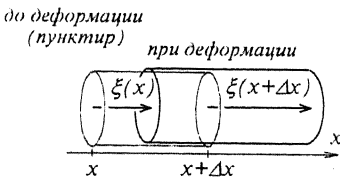


Рис. 71

производная $\partial \xi_x^E / \partial x$, о которой см. на с. 8);

$$\sigma_x(x) = E \frac{\partial \xi_x^E}{\partial x}. \quad (24.7)$$

Формула (24.7) представляет собой закон Гука для деформации растяжения-сжатия в дифференциальной форме, который устанавливает локальное соотношение между напряжением и деформацией, связывая значения напряжения и производной смещения по координате в одной и той же точке среды.

При деформации сдвига поле смещений направлено вдоль оси Oy и зависит от координаты x :

$\xi(x) = \xi_y(x) j$ (j - единичный вектор в направлении оси Oy). В результате, как видно из рис. 72, малый элемент тела длины Δx испытывает деформацию сдвига с углом сдвига $\gamma \approx tg \gamma = [\xi_y(x + \Delta x) - \xi_y(x)] / \Delta x$, и закон Гука для

него запишется в виде: $\sigma_x = G [\xi_y(x + \Delta x) - \xi_y(x)] / \Delta x$. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим закон Гука для деформации сдвига в дифференциальной форме:

$$\sigma_x(x) = G \frac{\partial \xi_y^E}{\partial x}. \quad (24.8)$$

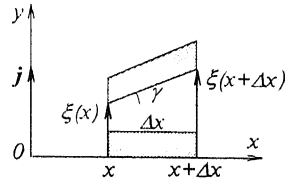


Рис. 72

§ 25. Работа и энергия при деформациях

Подсчитаем работу, совершаемую приложенной к торцу образца силой F (другой торец закреплен) при медленном растяжении образца от его естественного состояния ($\varepsilon = 0$) до состояния с относительным удлинением ε . Каждая из малых работ dA , совершаемых в процессе деформации при очередном удлинении образца на dl , выражается формулой $dA = F dl = \sigma S dl = \sigma S l_0 (dl/l_0)$; здесь $S l_0 = V$ - объем недеформированного образца, а $dl/l_0 = d[(l - l_0)/l_0] = d\varepsilon$, так что $dA = V \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$. Полная работа, будучи суммой малых работ, определяется интегралом:

$$A = V \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (25.1)$$

и, следовательно, равна произведению площади, ограниченной кривой зависимости $\sigma(\varepsilon)$, двумя ординатами и осью абсцисс, на объем тела. На что расходуются эта работа, существенно зависит от того, является деформация упругой или пластической.

Упругие силы, действующие между элементами тела, зависят только от относительного расположения последних, т.е. от формы деформированного тела, и, следовательно, потенциальны. Поэтому упруго деформированное тело обладает потенциальной энергией и работа внешних сил идет на ее приращение (при достаточно медленном процессе деформации кинетическая энергия элементов тела остается равной нулю). Если принять потенциальную энергию недеформированного тела равной нулю, то потенциальная энергия W упруго растянутого (или сжатого) тела в соответствии с ее общим определением дается формулой (25.1). Считая справедливым закон Гука (24.2), имеем:

Энергия, приходящаяся на единицу объема тела, называется плотностью энергии и:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}, \quad (25.3)$$

где ΔW - энергия вещества в объеме ΔV в окрестности рассматриваемой точки. При однородной деформации энергия распределена по телу равномерно, плотность энергии одинакова во всех точках тела и, следовательно, равна отношению полной энергии тела (25.2) к его объему:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (25.4)$$

Аналогичные выкладки приводят к формуле такого же вида для плотности энергии при однородной деформации сдвига:

$$w = \frac{G\gamma^2}{2}, \quad (25.5)$$

где G - модуль сдвига, γ - угол сдвига. Таким образом плотность энергии линейно зависит от соответствующего упругого модуля и квадратично от величины, характеризующей деформацию.

Если превышен предел упругости, силы взаимодействия между элементами тела перестают быть потенциальными и лишь часть работы внешней силы идет на создание потенциальной энергии тела; другая ее часть расходуется на выделение теплоты. Пусть в процессе нагрузки (участок 0-П кривой нагрузки на рис. 70) достигнуто напряжение $\sigma_n > \sigma_y$, после чего нагрузка медленно уменьшена до нуля (кривая разгрузки П $\rightarrow \varepsilon_0$). На первом этапе внешняя сила совершает положительную работу, определяемую площадью фигуры 0П ε_n , а на втором этапе - отрицательную работу, определяемую площадью фигуры ε_0 П ε_n . Суммарная работа внешней силы, равная разности этих площадей (заштрихованная площадь 0П ε_0), расходуется на выделение теплоты.

ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Гидродинамика охватывает весь круг вопросов, связанных с течением жидкости. Систематическое изложение основ гидродинамики выходит за пределы общего курса физики и мы ограничимся изучением отдельных важных закономерностей. Некоторые из них, как это будет оговорено, справедливы и в аэродинамике, т.е. применимы и для движения газа.

Перечислим некоторые свойства жидкости, которые будут использоваться в дальнейшем. Жидкость не обладает упругостью формы: в ней под действием статических внешних сил происходит лишь деформация всестороннего сжатия, связанная с уменьшением среднего расстояния между молекулами. При этом напряжение (см. с. 79 и формулу (22.1)) всегда нормальное и изотропное, т.е. оно перпендикулярно любому малому элементу поверхности внутри жидкости и не зависит от его ориентации. Это напряжение в жидкостях называют *давлением*:

$$p = \Delta F / \Delta S, \quad (26.1)$$

где ΔF - величина силы, с которой взаимодействуют друг с другом частицы жидкости, лежащие по одну и по другую сторону элемента поверхности площадью ΔS . (Формула (26.1) справедлива и для газов, но в них сила ΔF в большей степени обусловлена переносом импульса молекулами, чем непосредственным силовым взаимодействием). Важным свойством жидкости, отличающим ее от газов, является весьма малая сжимаемость. Поэтому во многих задачах жидкость рассматривают как несжимаемую, считая ее плотность постоянной: $\rho = const$.

§ 26. Классификация движений жидкости

При достаточно больших скоростях движения жидкости в ней возникают хаотически меняющиеся со временем завихрения - такое нерегулярное течение жидкости называется *турбулентным* и нами изучаться не будет. При меньших скоростях жидкость движется слоями, не перемешивающимися друг с другом; такое слоистое течение жидкости называется *ламинарным* (количественный критерий, определяющий тип движения жидкости, обсуждается далее, см. мелкий шрифт на с. 93).

Описывать движение жидкости можно, задавая векторное поле скоростей $v(x, y, z, t)$, характеризующее значения скорости движения жидкости в каждой точке x, y, z пространства. Подчеркнем, что при таком способе описания скорость $v(x, y, z, t)$ не "привязана" к тому или иному малому элементу (частице) жидкости, а определяет скорость все новых и новых частиц жидкости, проходящих через рассматриваемую точку x, y, z пространства. Если поле скоростей не изменяется со временем, то течение называется *стационарным*; при стационарном течении скорость частиц жидкости в данной точке пространства постоянна: $v = v(x, y, z)$, $\partial v / \partial t = 0$. В дальнейшем речь пойдет в основном о свойствах стационарного течения жидкости.

Для описания движения жидкости вводится понятие линии тока и трубки тока. *Линией тока* называется линия, к которой векторы скорости касательны во всех ее точках (рис. 73). При стационарном течении жидкости линии тока, очевидно, являются траекториями частиц жидкости (не путать с траекторией движения отдельных молекул, которые вместе с направленным движением совершают также хаотическое тепловое движение). *Тружкой тока* называется часть текущей жидкости, сбоку ограниченная поверхностью, обра-

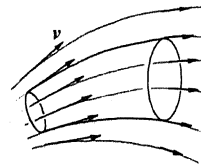


Рис. 73

зованной линиями тока (на рис.73 жирными линиями выделен элемент трубки тока).

Подсчитаем объем жидкости, протекающий за единицу времени через некоторую мысленно выбранную поверхность S . Через малый элемент этой поверхности площади ΔS за малое время Δt пройдет объем жидкости

$$\Delta V = v_n \Delta S \Delta t, \quad (26.2)$$

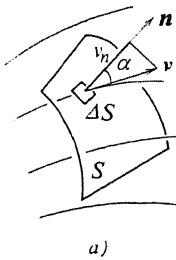
где v_n - проекция скорости v жидкости в окрестности рассматриваемого элемента поверхности на нормаль n к нему (рис. 74 а). Действительно, за время Δt частицы жидкости, находящиеся в окрестности элемента поверхности ΔS , пройдут путь $v \Delta t$ в направлении вектора v . Как видно из рис. 74 б, элемент поверхности ΔS пересекут те и только те из них, которые находятся в объеме ΔV параллелепипеда с площадью основания ΔS и ребром длиной $v \Delta t$ (прочие частицы либо не дойдут, либо пройдут мимо элемента ΔS). Высота параллелепипеда $h = v \Delta t \cos \alpha$, где α - угол между направлениями скорости v и нормали n , так что $\Delta V = v \cos \alpha \Delta S \Delta t$, откуда с учетом $v \cos \alpha = v_n$ следует формула (26.2). Поделив выражение (26.2) на Δt , найдем объем жидкости, протекающей за единицу времени через элемент поверхности ΔS :

$$\Delta \Phi = v_n \Delta S. \quad (26.3)$$

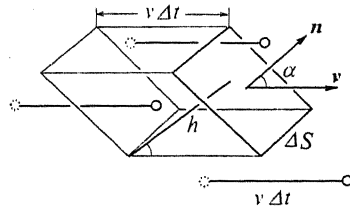
Суммируя выражения вида (26.3) по всем элементам поверхности, получим формулу для искомого объема жидкости Φ , протекающего за единицу времени через поверхность S :

$$\Phi = \int_S v_n dS. \quad (26.4)$$

Интеграл в правой части (26.4) называется потоком вектора v через поверхность S , а формула (26.3) определяет поток через малый элемент ΔS поверхности.



а)



б)

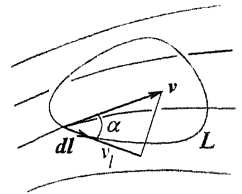


Рис. 75

Рис. 74

Другой важной характеристикой векторного поля является циркуляция вектора по контуру, которая применительно к полю вектора v запишется в виде:

$$\oint_L v_i dl \quad (26.5)$$

(кружок на символе интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру L). Циркуляция расшифровывается следующим образом: в некоторой точке контура берется скалярное произведение скорости v и малого перемещения dl вдоль контура, как показано на рис. 75: $(v, dl) = dl v \cos \alpha = v_i dl$, где α - угол между векторами v и dl , а $v_i = v \cos \alpha$ - проекция вектора v на направление dl , и затем такие выражения суммируются по всем элементам dl контура L . В частном случае вихревого движения жидкости,

когда ее частицы описывают замкнутые траектории, циркуляция скорости по этим траекториям заведомо отлична от нуля, так как подынтегральная функция v_i в (26.5) знакопостоянна.

Понятия потока и циркуляции используются при описании векторных полей любой физической природы, в частности - электрического и магнитного полей в теории электромагнетизма.

§ 27. Уравнение неразрывности

Выделим мысленно в стационарном потоке жидкости узкую трубку тока и рассмотрим объем пространства между ее двумя фиксированными перпендикулярными сечениями площадью ΔS_1 и ΔS_2 (рис. 76). Условие стационарности требует, чтобы масса жидкости в рассматриваемом объеме не менялась со временем, т.е. массы жидкости, втекающей и вытекающей из него за некоторый промежуток времени Δt , должны быть одинаковыми. Согласно (26.3) за Δt секунд через сечение ΔS_1 втекает объем $\Delta V_1 = v_1 \Delta S_1 \Delta t$ жидкости, масса которой $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 v_1 \Delta S_1 \Delta t$, а через сечение ΔS_2 вытекает масса жидкости $\Delta m_2 = \rho_2 v_2 \Delta S_2 \Delta t$, где v_1 , ρ_1 и v_2 , ρ_2 - значения скорости и плотности жидкости, соответственно, в окрестности сечений ΔS_1 и ΔS_2 . Приравнявая выражения для Δm_1 и Δm_2 и сокращая на Δt , имеем:

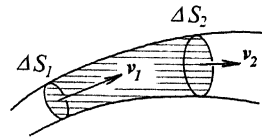


Рис. 76

$$\rho_1 v_1 \Delta S_1 = \rho_2 v_2 \Delta S_2 \quad (27.1)$$

и так как сечения ΔS_1 и ΔS_2 выбраны произвольно, то вдоль узкой трубки тока

$$\rho v \Delta S = const. \quad (27.2)$$

Уравнение (27.2) выражает закон неразрывности струи, который в этой форме верен и для стационарного течения газа. Для несжимаемой жидкости ($\rho = const$) уравнение неразрывности имеет вид:

$$v \Delta S = const. \quad (27.3)$$

При течении жидкости по трубе площадь поперечного сечения каждой узкой трубки тока пропорциональна площади сечения трубы и, как следствие уравнения неразрывности (27.3), в местах сужения трубы скорость течения возрастает.

§ 28. Уравнение Бернулли

Как мы увидим далее, между слоями движущейся жидкости существуют силы внутреннего трения, однако сейчас речь пойдет об идеальной жидкости, в которой силами внутреннего трения пренебрегается. Будем также считать жидкость несжимаемой, полагая $\rho = const$. Используя закон сохранения механической энергии, удастся найти комбинацию физических величин: плотности ρ , скорости v жидкости и давления p , значение которой остается постоянным вдоль линии тока в стационарном потоке жидкости.

Рассмотрим в узкой трубке тока элемент жидкости, торцы которого в момент времени t занимают положения 1 и 2, как показано на рис. 77. Здесь ΔS_1 и ΔS_2 - площади торцов, h_1 и h_2 - их высоты относительно некоторого уровня, v_1 и v_2 - скорости жидкости на этих сечениях. За малый промежуток времени Δt этот элемент переместится и займет новое положение 1'-2'. При этом его торцы переместятся на расстояния

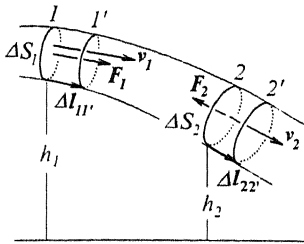


Рис. 77

$\Delta l_{11'} = v_1 \Delta t$ и $\Delta l_{22'} = v_2 \Delta t$ и, следовательно, объемы $\Delta V_{11'}$ и $\Delta V_{22'}$, прочерченные торцами за время Δt , определяются выражениями $\Delta V_{11'} = \Delta S_1 \Delta l_{11'} = \Delta S_1 v_1 \Delta t$ и $\Delta V_{22'} = \Delta S_2 \Delta l_{22'} = \Delta S_2 v_2 \Delta t$. Согласно закону неразрывности струи (27.3) $v_1 \Delta S_1 = v_2 \Delta S_2$, следовательно, указанные объемы равны:

$$\Delta V_{11'} = \Delta V_{22'} \equiv \Delta V. \quad (28.1)$$

Запишем закон изменения механической энергии (15.25) для рассматриваемого элемента жидкости:

$$\Delta W = \delta A. \quad (28.2)$$

Здесь $\Delta W = \Delta(W_k + W_n)$ - приращение полной механической энергии $W = W_k + W_n$ элемента (W_k - кинетическая, W_n - потенциальная энергии), а δA - работа, совершаемая за тот же промежуток времени Δt силами, которые действуют на рассматриваемый элемент и не учтены в потенциальной энергии. Такими силами являются только силы давления, действующие со стороны частиц жидкости, окружающих рассматриваемый элемент. При этом отличную от нуля работу совершают только силы давления жидкости на торцы элемента: $F_1 = p_1 \Delta S_1$ и $F_2 = p_2 \Delta S_2$, где p_1 и p_2 - значения давления на торцах элемента. Эта работа равна: $\delta A = F_1 \Delta l_{11'} - F_2 \Delta l_{22'} = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t = p_1 \Delta V_{11'} - p_2 \Delta V_{22'} = (p_1 - p_2) \Delta V$ (разные знаки работ сил F_1 и F_2 , связаны с тем, что в первом случае направления силы F_1 и перемещения $\Delta l_{11'}$ совпадают, а во втором направления F_2 и $\Delta l_{22'}$ противоположны). Итак,

$$\delta A = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (28.3)$$

Изменение механической энергии рассматриваемого элемента жидкости за время Δt есть разность значений его энергии в моменты $t + \Delta t$ и t : $\Delta W = W_{12'}(t + \Delta t) - W_{12}(t)$. Энергия $W_{12'}(t + \Delta t)$ складывается из энергий $W_{12}(t + \Delta t)$ и $W_{22'}(t + \Delta t)$ частиц в объемах между сечениями 1'-2 и 2-2' в момент $t + \Delta t$: $W_{12'}(t + \Delta t) = W_{12}(t + \Delta t) + W_{22'}(t + \Delta t)$. Аналогично $W_{12}(t) = W_{12}(t) + W_{11'}(t)$. Но энергия жидкости, заклученной в фиксированной области пространства, при стационарном течении не изменяется со временем, так как не меняются положение и скорости частиц, оказывающихся в этой области. Поэтому $W_{12}(t) = W_{12}(t + \Delta t)$ и, следовательно, $\Delta W = W_{22'}(t + \Delta t) - W_{11'}(t)$, т.е. изменение механической энергии рассматриваемого элемента жидкости сводится к изменению энергии жидкости, заключенной в малых объемах $\Delta V_{11'}$ и $\Delta V_{22'}$. Массы жидкости $\Delta m_{11'}$ и $\Delta m_{22'}$ в этих объемах равны, соответственно, $\Delta m_{11'} = \rho \Delta V_{11'} = \rho \Delta V$ и $\Delta m_{22'} = \rho \Delta V_{22'} = \rho \Delta V$, так что для кинетической, потенциальной и полной механической энергии жидкости в указанных объемах получаем следующие выражения:

$$W_{11'}^{(к)} = \frac{\Delta m_{11'} v_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2}{2} \Delta V, \quad W_{11'}^{(п)} = \Delta m_{11'} g h_1 = \rho g h_1 \Delta V,$$

$$W_{11'} = W_{11'}^{(к)} + W_{11'}^{(п)} = \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) \Delta V \quad (28.4)$$

и

$$W_{22'}^{(к)} = \frac{\Delta m_{22'} v_2^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \Delta V, \quad W_{22'}^{(п)} = \Delta m_{22'} g h_2 = \rho g h_2 \Delta V,$$

$$W_{22'} = W_{22'}^{(к)} + W_{22'}^{(п)} = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) \Delta V. \quad (28.5)$$

Таким образом, изменение механической энергии рассматриваемого элемента жидкости

$$\Delta W = W_{22'} - W_{11'} = \left[\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) \right] \Delta V. \quad (28.6)$$

Подставляя выражения из (28.6) и (28.3) в (28.2) и разделив обе части полученного ра-

венства на ΔV , получим: $\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 - \frac{\rho v_1^2}{2} - \rho g h_1 = p_1 - p_2$, или

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1. \quad (28.7)$$

Поскольку сечения трубки тока 1 и 2, ограничивающие элемент жидкости, могут быть выбраны произвольно, то выражение, стоящее в обеих частях равенства (28.7), имеет одинаковые значения в любом сечении рассматриваемой узкой трубки тока, т.е. остается постоянным вдоль линии тока:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const. \quad (28.8)$$

Уравнение (28.8) и эквивалентное ему (28.7) называют уравнением Бернулли.

Следствия из уравнения Бернулли становятся наглядными, когда одна из трех переменных v , h или p остается практически постоянной. Так, при течении жидкости по горизонтальной трубе $h \approx const$, и уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const. \quad (28.9)$$

Согласно уравнению неразрывности (27.3) скорость течения v в свою очередь обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубки тока, а, следовательно, и площади сечения трубы. Поэтому по мере сужения трубы давление в жидкости уменьшается.

Уравнение (28.9) позволяет, правда весьма упрощенно, объяснить возникновение подъемной силы крыла самолета. При соответствующей форме профиля крыла и ориентации плоскости крыла по отношению к направлению скорости самолета, величина скорости воздушного потока относительно самолета оказывается большей над крылом, чем под ним ($v_1 > v_2$ на рис. 78). Так как значения скорости v в невозмущенном потоке

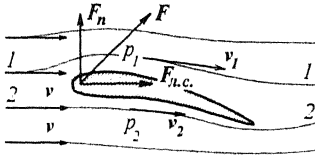


Рис. 78

(до крыла) одинаковы на линиях тока 1 и 2, то давление над крылом оказывается меньше, чем под крылом: $p_1 < p_2$, что и приводит к возникновению у действующей на крыло силы F составляющей F_n , перпендикулярной скорости (подъемной силы): $F = F_{л.с.} + F_{д.с.}$, где $F_{л.с.}$ - сила лобового сопротивления.

Формула (28.9) объясняет, с учетом сил вязкости (о них см. § 29), искривление траектории центра масс тела, движущегося в жидкой или газообразной среде, если это тело вращается относительно собственной оси (э ф е к т М а г н у с а). В системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью v_c вместе с центром масс вращающегося тела, среда обтекает тело со скоростью $-v_c$ вдали от него (рис.79 а). Участки поверхности тела, вращающиеся навстречу потоку (в окрестности точки 1 на рис. 79 а), увлекая за собой среду, уменьшают скорость потока вблизи поверхности тела ($v_1 < v_c$), а вращающиеся в сторону потока (в окрестности точки 2) - увеличивают ее ($v_2 > v_c$). Согласно (28.9) значения давления по обе стороны тела оказываются различными: $p_1 > p_2$, и возникающая в результате этого перепада давлений сила F искривляет траекторию тела, как показано на рис. 79 б. Этот эффект хорошо знаком любителям футбола и настольного тенниса ("резаный" удар).

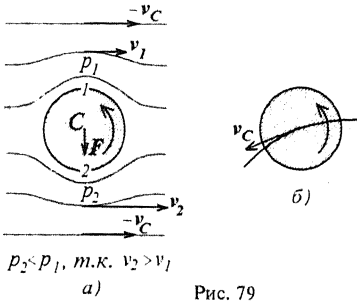


Рис. 79

В качестве другого следствия из уравнения Бернулли выведем формулу для скорости истечения жидкости из широкого сосуда. Рассмотрим открытый сверху широкий сосуд, из которого через малое отверстие внизу вытекает идеальная жидкость (рис.80; пунктирными линиями изображены линии тока). Запишем уравнение Бернулли для двух точек линии тока, одна из которых находится на поверхности жидкости (соответствующие ей значения величин пометим штрихом), а другая - в плоскости отверстия:

$$\frac{\rho v'^2}{2} + \rho gh' + p' = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p \tag{28.10}$$

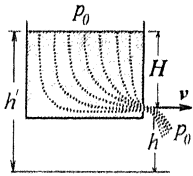


Рис. 80

Оба давления p и p' равны атмосферному давлению p_0 и взаимно уничтожаются. Так как площадь сечения сосуда существенно больше площади отверстия, то в силу уравнения неразрывности (27.3) $v' \ll v$ и, следовательно, слагаемым $\rho v'^2/2$ можно пренебречь по сравнению с $\rho v^2/2$. Разность высот рассматриваемых точек равна высоте уровня жидкости относительно отверстия: $h' - h = H$, так что уравнение (28.10) принимает вид: $\rho gH = \rho v^2/2$, откуда

$$v = \sqrt{2gH} . \tag{28.11}$$

Эта формула совпадает с формулой для скорости тела, падающего с высоты H без начальной скорости.

§ 29. Движение вязкой жидкости

Силы внутреннего трения. Если первоначально покоящуюся жидкость привести в движение, а затем снова предоставить самой себе, то движение со временем затухнет. Это указывает на то, что между слоями движущейся жидкости существуют силы трения. Их называют силами внутреннего трения, или силами вязкости.

Пусть жидкость течет в направлении оси Ox , причем скорость течения v зависит только от координаты z (рис. 81). Рассмотрим мысленно площадку площадью ΔS , параллельную координатной плоскости xOy . Ньютон установил, что между слоями жидкости, расположенными по обе стороны площадки, возникают силы взаимодействия, величина которых пропорциональна площади ΔS и градиенту скорости dv/dz в месте расположения площадки:

$$\Delta F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (29.1)$$

Под градиентом скорости понимается производная величины скорости по координате z :

$$\frac{dv}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(z + \Delta z) - v(z)}{\Delta z}, \quad (29.2)$$

таким образом, он характеризует быстроту (резкость) изменения скорости от точки к точке вдоль оси Oz . Направлены силы вязкости так, что стремятся выравнять скорости слоев жидкости: на более быстрый слой (со скоростью $v(z + \Delta z)$ на рис. 81) со стороны более медленного (со скоростью $v(z)$) действует сила ΔF , направленная против скорости быстрого слоя и тормозит его, и наоборот, быстрый слой ускоряет медленный, действуя на него с обратной силой $-\Delta F$. Коэффициент пропорциональности η в законе (29.1) называют динамической вязкостью, или коэффициентом внутреннего трения. Он зависит от свойств жидкости и ее температуры.

Силы внутреннего трения возникают как в потоках жидкости, так и газа. В газах они обусловлены обменом импульсами направленного движения молекул. Переходя за счет хаотического теплового движения из одного слоя в другой, каждая молекула массы m уносит из более быстрого слоя больший импульс направленного движения $m v(z + \Delta z)$, чем импульс $m v(z)$, который приносит в этот слой молекула, приходящая ей на смену из более медленного слоя. Это приводит к уменьшению импульса быстрого слоя и увеличению импульса медленного слоя, что и описывается, в соответствии со вторым законом Ньютона в форме (13.5), введением сил внутреннего трения. С ростом температуры обмен импульсами увеличивается, что приводит, в согласии с опытом, к росту динамической вязкости. В жидкостях с ростом температуры динамическая вязкость убывает, так что здесь она, повидимому, обусловлена непосредственным силовым взаимодействием молекул.

При движении тела в вязкой жидкости молекулы жидкости, находящиеся на поверхности тела, "прилипают" к ней и движутся со скоростью тела v . За счет сил вязкости при этом в движение вовлекаются и другие слои жидкости и в результате возникает течение жидкости с соответствующим распределением скоростей от значения v у поверхности тела до значения $v = 0$ вдали от движущегося тела или у стенок, ограничивающих поток жидкости (рис. 82). Значение градиента скорости в различных точках поверхности тела определяет по формуле (29.1) силы, действующие на малые элементы ΔS поверхности в окрестности этих точек. Суммируя эти силы по всей поверхности тела, найдем полную силу жидкого трения, действующую на тело, которая при

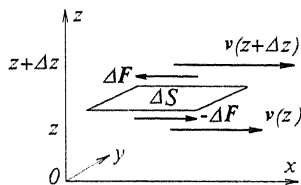


Рис. 81

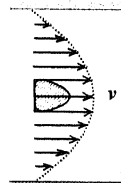


Рис. 82

стационарном движении жидкости и выполнении ряда других условий (см. с. 93) отвечает формуле (10.14). Для шара, как показал Стокс, формула для силы жидкого трения имеет вид:

$$F = -6 \pi \eta r v, \quad (29.3)$$

где r и v - радиус и скорость шара. Если условия стационарности не выполнены, например, при достаточно больших размерах и скорости тела, позади тела возникают турбулентные завихрения, здесь создается область пониженного давления. Возникающая разность давлений спереди и позади движущегося тела дает дополнительный вклад в силу лобового сопротивления, и формула (10.14) перестает быть справедливой.

Рассмотрим еще две задачи, связанные со стационарным течением жидкости по трубе, в которых силы внутреннего трения играют существенную роль.

Распределение скоростей по сечению трубы. Найдем поле скоростей частиц вязкой жидкости, текущей по длинной горизонтальной трубе радиуса R . Из соображений симметрии ясно, что скорость v частицы жидкости параллельно оси трубы и ее величина может зависеть только от расстояния r между линией тока и осью трубы (рис. 83). Для нахождения зависимости $v(r)$ выделим мысленно цилиндрический элемент трубки тока радиуса r и длины ΔL . Рассмотрим силы, которые действуют на этот элемент и имеют отличные от нуля составляющие вдоль горизонтальной оси. Такими являются сила внутреннего трения со стороны слоя жидкости, примыкающего извне к боковой поверхности элемента, и две силы давления, действующие на торцы элемента. Величина силы трения определяется формулой (29.1), где $\Delta S = 2\pi r \Delta L$ - площадь боковой

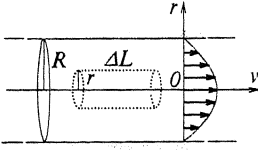


Рис. 83

поверхности рассматриваемого элемента: $F = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r \Delta L$, а модули сил давления равны, соответственно, $F_1 = p_1 \pi r^2$ и $F_2 = p_2 \pi r^2$, где p_1 и p_2 - значения давления на торцах элемента площадью πr^2 . Так как все частицы жидкости по условию задачи движутся горизонтально с постоянными скоростями, то тем же свойством обладает и движение центра масс рассматриваемого элемента и, следовательно, сумма проекций указанных сил на горизонтальное направление равна нулю:

$$\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r \Delta L + p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = 0. \quad (29.4)$$

Обозначая $p_1 - p_2 = \Delta p$, имеем $dv/dr = -(\Delta p/2\eta\Delta L)r$, откуда $v(r) = \int (-\Delta p/2\eta\Delta L)r dr = -(\Delta p/4\eta\Delta L)r^2 + C$, где C - постоянная интегрирования. Эта формула должна удовлетворять граничному условию $v(R) = 0$, так как у стенок трубы ($r = R$) элементы жидкости неподвижны. Это дает соотношение $-(\Delta p/4\eta\Delta L)R^2 + C = 0$, из которого находим $C = (\Delta p/4\eta\Delta L)R^2$. Таким образом, искомая зависимость скорости течения от расстояния r до оси трубы имеет вид:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\Delta L}(R^2 - r^2). \quad (29.5)$$

Это парабола, изображенная на рис. 83 пунктирной линией. Из формулы (29.5) следует, что в отличие от идеальной жидкости стационарный поток вязкой жидкости в горизонтальной трубе возникает только при наличии градиента давления вдоль трубы ($\Delta p/\Delta L \neq 0$), ибо в противном случае формула (29.5) дает: $v(r) = 0$.

Формула Пуазейля. Вычислим массу жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы за единицу времени (р а с х о д ж и д к о с т и). Разобьем мысленно сечение трубы на колечки столь тонкие, чтобы в пределах колечка значения скорости можно было считать одинаковыми (рис. 84). Через одно такое колечко радиуса r , ширины dr и площади $dS = 2\pi r dr$ за малое время dt протечет жидкость, находящаяся в объеме полого цилиндра, основанием которого является рассматриваемое колечко, а высота равна $v dt$ (см. пояснение к формуле (26.2)). Масса dm этой жидкости равна произведению ее плотности ρ на объем цилиндра $dV = 2\pi r dr v dt$. С учетом формулы (29.5) $dm = \rho 2\pi r dr v dt = 2\pi\rho(\Delta p/4\eta\Delta L)(R^2 - r^2)r dr dt$, так что расход жидкости через рассматриваемое колечко $d\Theta = dm/dt = \pi\rho(\Delta p/4\eta\Delta L)(R^2 - r^2)2r dr$. Суммируя такие выражения по всем колечкам, т.е. беря интеграл по сечению трубы S , получим искомую формулу для расхода жидкости:

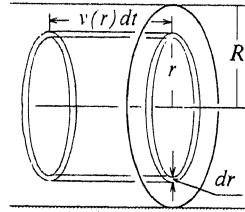


Рис. 84

$$\Theta = \int_S d\Theta = \frac{\pi\rho\Delta p}{4\eta\Delta L} \int_0^R (R^2 - r^2) 2r dr = -\frac{\pi\rho\Delta p}{4\eta\Delta L} \int_0^R (R^2 - r^2) d(R^2 - r^2) = \frac{\pi\rho\Delta p}{4\eta\Delta L} \frac{(R^2 - r^2)^2}{2} \Big|_0^R =$$

$\frac{\pi\rho}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta L} R^4$. Ее называют формулой Пуазейля:

$$\Theta = \frac{\pi\rho}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta L} R^4. \quad (29.6)$$

Обращаем внимание на сильную зависимость расхода жидкости от радиуса трубы.

Число Рейнольдса. Из физических величин, задействованных в той или иной теории, иногда удается построить безразмерную величину, причем оказывается, что характер поведения физической системы вполне определяется значением одной этой величины, безотносительно к тому, за счет каких значений отдельных физических величин это значение достигается. Такие безразмерные величины называются критериями подобия. Легко убедиться, что в гидродинамике (и аэродинамике) одним из критериев подобия является следующая комбинация физических величин:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (29.7)$$

названная в честь английского физика числом Рейнольдса. Здесь ρ - плотность жидкости или газа, v - характерная скорость, L - характерный линейный размер, η - коэффициент динамической вязкости. О том, что следует понимать под v и L , необходимо четко оговаривать в каждом конкретном типе задач. Так, например, при течении жидкости по длинной трубе за характерный линейный размер принимают диаметр трубы, а за характерную скорость - среднее значение скорости по сечению трубы.

Значение числа Рейнольдса определяет характер течения жидкости или газа. Для каждого типа задач существует критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$ такое, что при $Re < Re_{кр}$ течение ламинарное, а при $Re > Re_{кр}$ - турбулентное. Для течения жидкости по трубе $Re_{кр} \cong 2300$.

К числу Рейнольдса приходится обращаться при моделировании. Так, например, при испытании модели летательного аппарата, меньшей оригинала, для сохранения характера обтекания необходимо соответствующим образом изменить характеристики обтекающего ее потока, чтобы значение числа Рейнольдса было таким же, как в условиях эксплуатации.

ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Законы динамики, о которых шла речь в предыдущих главах, справедливы в инерциальных СО. Простейшие примеры показывают, что в неинерциальных СО, движущихся с ускорением относительно инерциальных, второй закон Ньютона не выполняется.

Так, при равенстве нулю результирующей действующих на тело сил ($\sum_i F_i = 0$) тело в согласии со вторым законом Ньютона покоится или движется с постоянной скоростью относительно любой инерциальной СО, в то время как относительно неинерциальной СО, движущейся относительно инерциальной с ускорением a_0 , это тело имеет отличное от нуля ускорение $-a_0$, что противоречит второму закону Ньютона.

Основная цель настоящей главы - получить уравнение движения материальной точки в простейших неинерциальных СО - равноускоренной и равномерно вращающейся. Законы динамики системы материальных точек и твердого тела выводятся из этих уравнений движения точно так же, как в случае инерциальных СО.

§ 30. О сложении ускорений

Если материальная точка движется относительно СО K' , которая в свою очередь движется относительно СО K , то говорят, что движение точки относительно СО K складывается из ее движения относительно СО K' (относительное движение) и движения СО K' относительно СО K (переносное движение). Ранее (см. § 6) был рассмотрен простейший случай сложения движений, когда обе СО двигались друг относительно друга поступательно и с постоянной скоростью. При этом, как было показано (см. формулы (6.2) и (6.3)), скорость v точки относительно СО K складывается из ее скорости v' относительно СО K' (относительной скорости) и скорости v_0 СО K' относительно СО K (переносной скорости): $v = v' + v_0$.

Поскольку переносное ускорение $a_0 = dv_0/dt$ в рассматриваемом случае равно нулю (т.к. $v_0 = const$), то полученный результат $a = a'$ по существу означал, что относительное и переносное ускорения также складываются: $a = a' + a_0$.

Будут ли складываться скорости и ускорения также и в общем случае произвольного движения СО K' и K друг относительно друга? На рис. 85 изображены два положения движущейся точки, а также "движущейся" СО K' в два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Видно, что малое перемещение Δr точки относительно СО K можно представить как сумму переносного перемещения Δr_0 , т.е. перемещения вместе с СО K' (как если бы движущаяся точка застыла в момент t в точке A СО K'), и относительного перемещения $\Delta r'$ (перемещения относительно СО K'):

$$\Delta r = \Delta r_0 + \Delta r' . \quad (30.1)$$

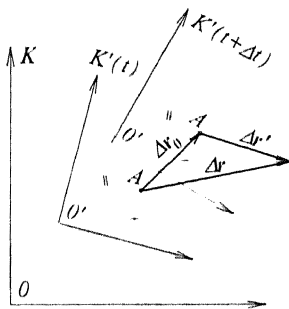


Рис. 85

Разделив обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем $dr/dt = dx_0/dt + dr'/dt$. Слева стоит скорость v точки относительно СО K , а справа - сумма переносной v_0 и относительной v' скоростей точки, т. е. скорости складываются:

$$v = v_0 + v'. \quad (30.2)$$

Дифференцируя равенство (30.2) по времени, имеем: $dv/dt = dv_0/dt + dv'/dt$. Слева стоит ускорение a точки относительно СО K , так что

$$a = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dv'}{dt}. \quad (30.3)$$

На первый взгляд слагаемые dv_0/dt и dv'/dt в правой части представляют собой переносное a_0 и относительное a' ускорения. Однако это оказывается верным только при поступательном движении СО K' относительно K . В противном случае ускорения не складываются и справа появляется добавочное слагаемое:

$$\text{при поступательном движении СО } K' \text{ отн. } K: \quad a = a_0 + a', \quad (30.4)$$

$$\text{при непоступательном движении СО } K' \text{ отн. } K: \quad a = a_0 + a' + a_{\text{доб}}. \quad (30.5)$$

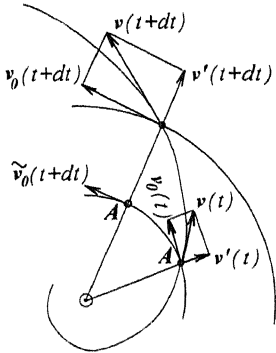
Подчеркнем, что о переносных скорости v_0 и ускорении a_0 можно говорить как о скорости и ускорении СО K' только при ее поступательном движении, так как только в этом случае их значения одинаковы у всех точек СО K' . При непоступательном движении СО K' относительно K значения переносной скорости, как и переносного ускорения, различны в разных точках СО K' и в формулах (30.2) и (30.5) v_0 и a_0 означают скорость и ускорение той точки СО K' , в которой в данный момент находится рассматриваемая материальная точка. Сейчас будет дан вывод соотношения (30.5) для конкретного случая, когда СО K' равномерно вращается относительно СО K , из которого станет ясным, почему при непоступательном движении СО K' ускорения не складываются.

§ 31. Ускорение Кориолиса

Рассмотрим СО K' , равномерно вращающуюся относительно "неподвижной" СО K с угловой скоростью ω . Пусть обе СО имеют общее начало координат O и совпадающие координатные оси Ox и Ox' , по которым и направлена угловая скорость $\omega = \text{const}$ (рис. 86 а). Рассмотрим движущуюся материальную точку и выразим ее ускорение a относительно СО K через переносное a_0 и относительное a' ускорения. Чтобы упростить выкладки, будем считать, что относительно СО K' точка движется прямолинейно, удаляясь от оси вращения в радиальном направлении; тогда ее траектория относительно "неподвижной" СО K имеет вид развертывающейся спирали. (Для наглядности можно представить себе, что СО K' связана с равномерно вращающимся в плоскости чертежа диском, по направляющей радиальной рейке которого со скоростью $v'(t)$ скользит шайба).

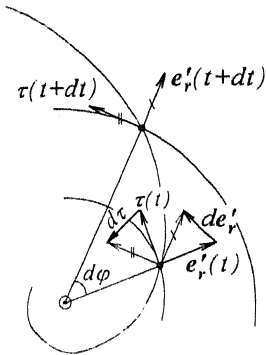
Скорость v точки в каждый момент времени складывается из ее переносной и относительной скоростей v_0 и v' :

$$v = v_0 + v'. \quad (31.1)$$



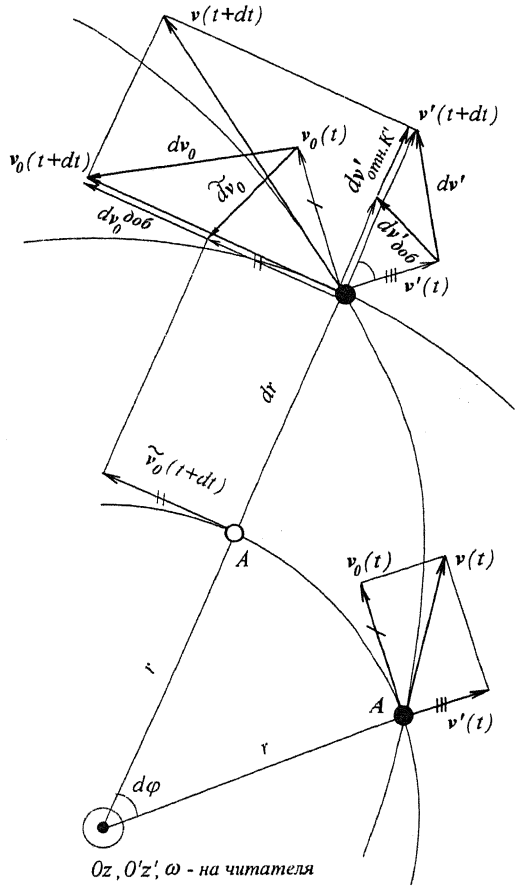
$Oz, O'z', \omega -$ на читателя

Рис. 86 а



$Oz, O'z', \omega -$ на читателя

Рис. 86 в



$Oz, O'z', \omega -$ на читателя

Рис. 86 б

Это разложение представлено на рис. 86 а для двух положений движущейся точки в близкие моменты времени t и $t+dt$; там же изображены траектория и скорость $\tilde{v}_0(t+dt)$ той точки A со K' , в которой в момент времени t находилась рассматриваемая материальная точка. Дифференцируя (31.1) по времени, имеем:

$$a = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dv'}{dt}. \tag{31.2}$$

В первом слагаемом dv_0/dt приращение переносной скорости $dv_0 = v_0(t+dt) - v_0(t)$ можно представить как сумму двух приращений скорости: $dv_0 = [v_0(t+dt) - \bar{v}_0(t+dt)] + [\bar{v}_0(t+dt) - v_0(t)] = dv_0^{\text{доб}} + d\bar{v}_0$ (рис. 86 б), так что

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{dv_0^{\text{доб}}}{dt} + \frac{d\bar{v}_0}{dt}. \quad (31.3)$$

Здесь $d\bar{v}_0 = \bar{v}_0(t+dt) - v_0(t)$ представляет собой приращение скорости фиксированной точки A СО K' , поэтому второе слагаемое в (31.3) дает переносное ускорение a_0 . Оно в нашем случае является центростремительным ускорением (5.6), так как точки СО K' движутся равномерно по окружностям:

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt} \equiv a_0 = -\omega^2 r. \quad (31.4)$$

Приращение $dv_0^{\text{доб}} = [v_0(t+dt) - \bar{v}_0(t+dt)]$ в (31.3) обусловлено различием скоростей разных точек СО K' и вызывает добавочное ускорение $a_0^{\text{доб}} = dv_0^{\text{доб}}/dt$. (При поступательном движении СО K' скорости всех ее точек одинаковы: $\bar{v}_0(t+dt) = v_0(t+dt)$, так что $dv_0^{\text{доб}} = 0$ и такое дополнительное ускорение не возникает). Как видно из рис. 86 б, $|dv_0^{\text{доб}}| = v_0(t+dt) - \bar{v}_0(t+dt) = \omega(r+dr) - \omega r = \omega dr = \omega v' dt$. Нетрудно убедиться, что в векторной форме $dv_0^{\text{доб}} = [\omega, v'] dt$, так что

$$\frac{dv_0^{\text{доб}}}{dt} \equiv a_0^{\text{доб}} = [\omega, v']. \quad (31.5)$$

С учетом (31.3), (31.4) и (31.5) первое слагаемое в (31.2) принимает вид:

$$\frac{dv_0}{dt} = \underbrace{-\omega^2 r}_{a_0} + \underbrace{[\omega, v']}_{a_0^{\text{доб}}}. \quad (31.6)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое dv'/dt в (31.2). Приращение dv' относительной скорости точки также можно представить в виде суммы двух приращений: $dv' = dv'_{\text{отн. } K'} + dv'_{\text{доб}}$ (рис. 86 б), так что

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv'_{\text{отн. } K'}}{dt} + \frac{dv'_{\text{доб}}}{dt}. \quad (31.7)$$

Приращение $dv'_{\text{отн. } K'}$ представляет собой изменение вектора v' относительно СО K' и дает относительное ускорение a' :

$$\frac{dv'_{\text{отн. } K'}}{dt} \equiv a', \quad (31.8)$$

а приращение $dv'_{\text{доб}}$ обусловлено поворотом вектора v' относительно "неподвижной" СО K и приводит к добавочному ускорению $a'_{\text{доб}} = dv'_{\text{доб}}/dt$. (При поступательном движении СО K' относительно K с одинаковой ориентацией их координатных осей изменение относительной скорости v' в обеих СО одинаково: $dv' = dv'_{\text{отн. } K'}$ и добавочное ускоре-

ние не возникает.) Как видно из рис. 86 б, $|dv'_{\text{доб}}| = v' d\varphi = v' \omega dt$. Легко проверить, что в векторной форме $dv'_{\text{доб}} = [\omega, v'] dt$, так что

$$dv'_{\text{доб}}/dt \equiv a'_{\text{доб}} = [\omega, v']. \quad (31.9)$$

С учетом (31.7), (31.8) и (31.9) второе слагаемое в (31.2) принимает вид:

$$\frac{dv'}{dt} = a' + \underbrace{[\omega, v']}_{a'_{\text{доб}}}. \quad (31.10)$$

Подставляя в (31.2) выражения для dv_0/dt и dv'/dt из (31.6) и (31.10), имеем окончательно:

$$a = \underbrace{-\omega^2 r}_{a_0 \equiv a_{\text{и.с.}}} + a' + \underbrace{2[\omega, v']}_{a'_{\text{доб}}}. \quad (31.11)$$

Добавочное слагаемое в формуле сложения ускорений в случае равномерного вращения СО K' относительно K называется ускорением Кориолиса:

$$a_{\text{Кор}} = 2[\omega, v']. \quad (31.12)$$

Полученный результат справедлив при любом относительном движении точки.

Формулу (31.12) можно получить более формальным путем, дифференцируя вектор скорости v : $v = v_0 \tau + v' e'_r$ (τ и e'_r - единичные векторы в направлении векторов v_0 и v').

$$a = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{dv_0}{dt}}_{a_0} \tau + v_0 \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{a_0} + \underbrace{\frac{dv'}{dt}}_{a'} e'_r + v' \underbrace{\frac{de'_r}{dt}}_{a'_{\text{доб}}}. \quad (*)$$

В этой формуле:

$$a_0 = v_0 \frac{d\tau}{dt} = \omega r (-\omega e'_r) = -\omega^2 r \quad (\text{Формула для } d\tau/dt \text{ вытекает из рис. 86 в: } d\tau = |\tau| d\varphi = \omega dt, \text{ откуда}$$

$|d\tau/dt| = \omega$; направлен вектор $d\tau/dt$ туда же, куда $d\tau$ в пределе при $dt \rightarrow 0$, т.е. к оси вращения, так что $d\tau/dt = -\omega e'_r$).

$$a_0^{\text{доб}} = (dv_0/dt) \tau = (d(\omega r)/dt) \tau = (\omega dr/dt) \tau = \omega v' \tau = [\omega, v'] \quad (\text{последнее равенство легко проверить}).$$

$$a'_{\text{доб}} = v' de'_r/dt = v' \omega \tau = [\omega, v'] \quad (\text{последнее равенство легко проверить; формула } de'_r/dt = \omega \tau \text{ выводится аналогично формуле для } d\tau/dt \text{ (см. рис. 86 в)}).$$

Подставляя выражения для a_0 , $a_0^{\text{доб}}$, $a'_{\text{доб}}$ в формулу (*), имеем:

$$a = -\omega^2 r + a' + 2[\omega, v']$$

Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы перейти к изучению законов динамики в неинерциальных СО.

§ 32. Уравнение движения материальной точки в равноускоренной системе отсчета

Простейшей неинерциальной СО является равноускоренная СО K' , которая по определению движется поступательно с постоянным ускорением $a_0 = const$ относительно инерциальной СО K . Примером является СО, связанная с равномерно ускоряющимся или замедляющимся на прямолинейном участке пути вагоном поезда, если СО, связанную с поверхностью Земли, считать инерциальной.

Чтобы установить уравнение движения материальной точки в равноускоренной СО K' , т.е. закон, играющий роль второго закона Ньютона в этой СО, запишем ее уравне-

ние движения в инерциальной СО K - второй закон Ньютона $ma = \sum_i F_i$ - и выразим стоящее в нем ускорение точки a через ее ускорение a' относительно СО K' по формуле

(30.4): $m(a_0 + a') = \sum_i F_i$. С целью придать искомому уравнению движения в СО K' вид второго закона Ньютона, оставим слева произведение массы точки на ее ускорение относительно СО K' , а член ma_0 перенесем в правую часть равенства:

$$ma' = \sum_i F_i - ma_0. \quad (32.1)$$

Таково уравнение движения материальной точки в равноускоренной неинерциальной СО K' . В левой его части, как и во втором законе Ньютона, стоит произведение массы точки на ее ускорение, но в правой части к сумме сил $\sum_i F_i$, действующих на точку, добавляется дополнительное слагаемое $-ma_0$. Подобные слагаемые в уравнении движения материальной точки в неинерциальных СО называют с и л а м и н е р ц и и. Следовательно, в равноускоренной неинерциальной СО возникает сила инерции вида

$$F_{ин} = -ma_0. \quad (32.2)$$

Эти силы действуют в любой точке неинерциальной СО, образуя поле сил инерции, которое в равноускоренной СО однородно, так как ускорение a_0 во всех ее точках одинаково.

Строго говоря, сила инерции не подпадает под определение силы, данное ранее. Согласно этому определению (см. § 7) силы характеризуют взаимодействие тел, в то время как силы инерции не обусловлены действием на рассматриваемое тело каких-либо других тел, а возникают только как следствие ускоренного движения СО K' . Кроме того, силы инерции зависят от ускорения системы отсчета a_0 , в то время как ранее предполагалась инвариантность сил по крайней мере по отношению к преобразованиям Галилея. С другой стороны, силы инерции проявляют себя, вызывая ускорение материальной точки, точно так же, как и всякие другие силы, стоящие в правой части уравнения движения. Поэтому, если обобщить определение сил, положив в основу то, как они фигурируют во втором законе Ньютона и не требуя их инвариантности при переходе от одной СО к другой и выполнения третьего закона Ньютона, то силы инерции подпадут под это определение. Так что относить ли силу инерции к категории сил или нет - вопрос чисто терминологический.

В качестве примера рассмотрим математический маятник, покоящийся в положении равновесия в равноускоренной СО, движущейся с постоянным горизонтальным ускорением a_0 относительно инерциальной СО. Найдем силу натяжения T нити и угол φ , который она составляет с вертикалью в этом положении, решив задачу как в инерциальной, так и в неинерциальной СО.

Наблюдатель K , находящийся в инерциальной СО K (рис. 87 а), рассуждает так: я нахожусь в инерциальной СО, поэтому шарик маятника массой m подчиняется второму

закону Ньютона: $ma = \sum_i F_i$. На шарик действуют две силы: сила натяжения нити T и

сила тяжести mg , а его ускорение по условию задачи $a = a_0$, поэтому второй закон Ньютона запишется в виде $ma_0 = T + mg$. Из построения, представленного на рис. 87 а,

находим: $tg \varphi = ma_0/mg = a_0/g$ и $T = \sqrt{(mg)^2 + (ma_0)^2} = m\sqrt{g^2 + a_0^2}$.

Наблюдатель K' , находящийся в равноускоренной СО K' (рис. 87 б), рассуждает иначе: я нахожусь в неинерциальной равноускоренной СО, поэтому во втором законе Ньютона должен кроме сил натяжения нити T и тяжести mg , действующих на шарик со стороны нити и Земли, учесть силу инерции $F_{ин} = -ma_0$: $ma' = T + mg + (-ma_0)$. В моей СО K' шарик покоится, т.е. $a' = 0$ и, следовательно, $T + mg + (-ma_0) = 0$. Изобразив эти три силы и потребовав, чтобы их сумма равнялась нулю, прихожу, как и должно быть, к тому же результату, что и наблюдатель K в инерциальной СО.

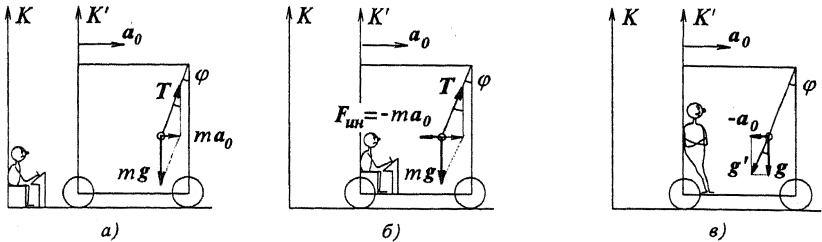


Рис. 87

Силы инерции в равноускоренной СО и силы тяжести в однородном гравитационном поле описываются одинаковой формулой, представляющей собой произведение массы тела на постоянный вектор:

$F_{ин} = m(-a_0)$ и $F_{тяж} = mg$, а потому и проявляют себя совершенно одинаково. Эту принципиальную неразличимость сил инерции в равноускоренной СО и сил тяготения в однородном гравитационном поле Эйнштейн назвал принципом эквивалентности. Иллюстрацией принципа эквивалентности может служить ситуация в космическом корабле, в котором возникли силы, характерные для поля тяготения, в частности, в пружине динамометра, к которому прикреплено тело массы m , возникает постоянная сила натяжения T . Это может свидетельствовать о совершенно различных ситуациях: либо корабль сел на планету и динамометр регистрирует силу тяжести на этой планете $F_{тяж} = mg$ (рис. 88 а), либо включены двигатели и корабль движется с ускорением a_0 относительно инерциальной СО в открытом космосе вдали от тяготеющих масс - тогда динамометр регистрирует силу инерции $F_{ин} = m(-a_0)$ (рис. 88 б); конечно, возможен и промежуточный случай, когда действуют обе силы, тогда $F = mg + (-ma_0)$ (рис. 88 в). Заметим, однако, что в отличие от поля сил инерции поле тяготения планеты не строго однородно: силы тяготения направлены радиально к центру планеты и убывают с высотой, как это показано пунктирными линиями на рис. 88 а. Поэтому в принципе при помощи очень тонкого эксперимента, позволяющего выявить эту неоднородность поля в пределах кабины корабля, можно выяснить, какая из описанных ситуаций имеет место.

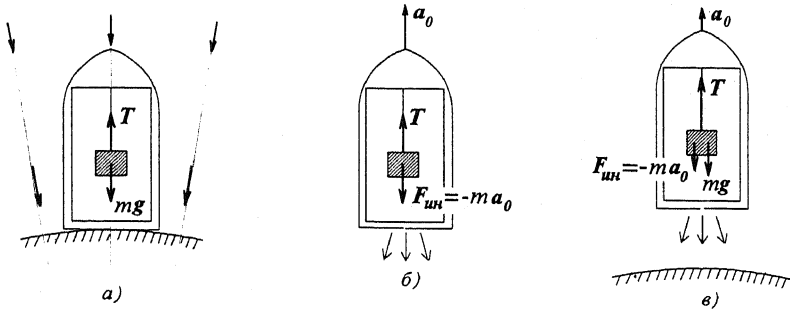


Рис. 88

Если на материальную точку среди прочих сил действует сила $mg = const$ со стороны однородного поля тяготения, целесообразно в правой части уравнения движения (32.1) выделить ее из суммы и объединить с силой инерции:

$$ma' = \sum_{\text{кроме сил тяг.}} F_i + mg - ma_0 = \sum_{\text{кроме сил тяг.}} F_i + mg', \quad (32.3)$$

где $g' = g - a_0 = const$. Таким образом, действие сил инерции сводится просто к изменению гравитационного поля, в котором ускорение свободного падения становится равным $g' = g - a_0$ вместо g и, соответственно, сила тяжести меняет свое значение с mg на mg' со всеми вытекающими последствиями. Такой подход позволяет избежать повторного решения задач в равноускоренной СО, если аналогичная задача была решена в инерциальной СО. Так, ответ к рассмотренной ранее задаче с математическим маятником наблюдатель K' может дать сразу, фактически без вычислений: в положении равновесия нить натянется в направлении вектора $g' = g - a_0$ (рис. 87 в) и величина силы натяжения

$$T = mg' = m\sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

На всякое тело массы m , как и на любой его малый элемент массы Δm , у поверхности Земли действуют силы тяжести: mg и, соответственно, Δmg . Если тело удерживается в состоянии покоя относительно Земли, например, лежит на горизонтальной подставке или подвешено на пружине (рис. 89), то подставка, пружина и само тело деформируются и в них возникают силы, уравновешивающие силы тяжести. Это сила N реакции опоры и сила T натяжения пружины, с которыми опора и пружина действуют на тело; сила ΔN , действующая на элемент Δm со стороны окружающих элементов тела:

$$N = -mg, \quad T = -mg, \quad \Delta N = -\Delta mg.$$

(В живых организмах такие обусловленные силами тяжести внутренние деформации и напряжения вызывают физиологическое ощущение "весомости"). По третьему закону Ньютона само тело давит на подставку и натягивает пружину с силами, равными по модулю и обратными по знаку

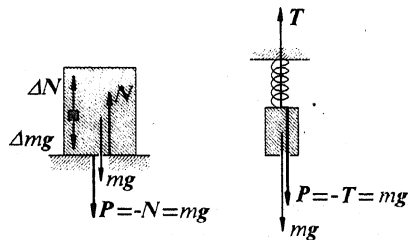


Рис. 89

силам N и T . Эти силы определяют вес тела P : $P \equiv -N = -T = mg$. Таким образом в инерциальной СО (в приведенном рассуждении СО, связанная с Землей, считалась инерциальной) вес тела равен действующей на него силе тяжести.

В аналогичных опытах, осуществляемых в неинерциальной равноускоренной СО, на тело кроме силы тяжести действует сила инерции (32.2), так что силы N и T уравновешивают результирующую этих двух сил: $N = T = -(F_{\text{тяж}} + F_{\text{ин}})$. Следовательно, вес тела $P = -N = -T$ измеряется суммой силы тяжести и силы инерции:

$$P = F_{\text{тяж}} + F_{\text{ин}} = mg + (-ma_0) \quad (32.4)$$

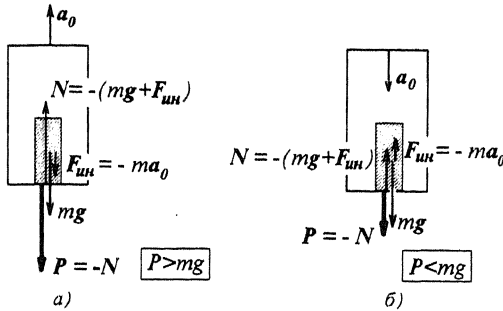


Рис. 90

и оказывается зависящим от ускорения a_0 СО, в которой происходит взвешивание. В частности, если ускорение a_0 направлено против ускорения свободного падения g (рис. 90 а), то вес больше силы тяжести и в телах возникают повышенные напряжения (в живых организмах - перегрузки). Если направления a_0 и g совпадают и $a_0 < g$ (рис. 90 б), то вес окажется меньше силы тяжести mg .

Интересная ситуация возникает в СО, связанной с телом, свободно падающим без вращения в гравитационном поле (искусственный спутник или

космический корабль с выключенными двигателями; в работах Эйнштейна - обрвавшийся лифт). В этом случае $a_0 = g$, сила инерции равна по модулю и противоположна по знаку силе тяжести: $F_{\text{ин}} = -ma_0 = -mg$ и, следовательно, эти силы взаимно уничтожаются! В такой свободно падающей СО исчезает вес тела: $P = mg - ma_0 = 0$, как и все добавочные деформации и напряжения, которые в обычных земных условиях обусловлены силами тяготения - тела находятся в состоянии невесомости. Уравнение движения материальной точки в СО, свободно падающей в однородном гравитационном поле, имеет вид:

$$ma' = \sum_{\text{кроме сил тяж.}} F_i + \underbrace{mg - ma_0}_{=0} = \sum_{\text{кроме сил тяж.}} F_i, \quad (32.5)$$

т.е. материальная точка ведет себя в ней как в инерциальной СО без поля тяготения, так как силы инерции и силы тяготения взаимно скомпенсированы.

Заметим в заключение, что изложенная в этом параграфе теория применима также и к неинерциальным СО, движущимся относительно инерциальных с непостоянным ускорением $a_0(t)$, но при обязательном условии, что это движение поступательное, так как при выводе уравнения движения (32.1) использовалась формула сложения ускорений (30.4). При этом поле сил инерции $F_{\text{ин}} = -ma_0(t)$ попрежнему однородное, но не статическое.

§ 33. Уравнение движения материальной точки в равномерно вращающейся системе отсчета

Рассмотрим теперь неинерциальную СО K' , которая равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = const$ относительно инерциальной СО K . Для получения уравнения движения материальной точки в этой неинерциальной СО запишем, как и в предыдущем

случае, второй закон Ньютона в инерциальной СО K : $ma = \sum_i F_i$ и выразим ускорение a точки через ее ускорение a' в СО K' по формуле (31.11), которая в рассматриваемой задаче определяет связь между ускорениями a и a' : $m(-\omega^2 r + a' + 2[\omega, v']) = \sum_i F_i$.

Оставляя в левой части слагаемое ma' , как во втором законе Ньютона, и перенося два других в правую часть равенства, получим:

$$ma' = \sum_i F_i + \underbrace{m\omega^2 r}_{F_{\text{ин. ц.б}}} + \underbrace{2m[\omega, v']}_{F_{\text{ин. Кор}}} \quad (33.1)$$

(у последнего слагаемого изменен знак за счет взаимной перестановки множителей в векторном произведении).

Таково уравнение движения материальной точки в равномерно вращающейся неинерциальной СО. Оно также имеет вид второго закона Ньютона, но к результирующей силе теперь добавляются две силы инерции. Первая называется центробежной силой инерции, так как она направлена от оси вращения:

$$F_{\text{ин. ц.б.}} = m\omega^2 r \quad (33.2)$$

(напомним, что r - радиус-вектор материальной точки относительно оси вращения). Вторая называется силой инерции Кориолиса, так как она обусловлена наличием кориолисова ускорения:

$$F_{\text{ин. Кор.}} = 2m[v', \omega]. \quad (33.3)$$

Рассмотрим на простых примерах, как проявляют себя эти силы инерции.

Земля свободно падает в поле тяготения Солнца, и если бы при этом ее движение относительно гелиоцентрической СО было поступательным, то геоцентрическая СО была бы инерциальной (см. конец § 32), если не учитывать эффекты, связанные с неоднородностью поля тяготения Солнца. Однако вследствие суточного вращения Земли геоцентрическая СО является неинерциальной, равномерно вращающейся относительно инерциальной с угловой скоростью $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Это приводит к целому ряду эффектов, один из которых - зависимость веса тела от широты местности, где производится взвешивание. Согласно формуле (32.4), в которой теперь вместо силы инерции (32.2) следует учесть центробежную силу инерции (33.2), вес тела на Земле складывается из силы тяжести и центробежной силы инерции: $P = mg + m\omega^2 r$ (рис. 91) (кориолисова сила инерции (33.3) равна нулю, так как по условиям взвешивания тело покоится относительно Земли и, следовательно, $v' = 0$). По теореме косинусов имеем из построения, приведенного на рис. 91: $P^2 = (mg)^2 + (m\omega^2 R \cos \varphi)^2 - 2(mg)(m\omega^2 R \cos \varphi)$; здесь φ - широта местности, где производится взвешивание, R - радиус Земли и учтено, что $r = R \cos \varphi$. Из этой формулы и рис. 91 видно, что вес тела уменьшается в направлении от полюса, где $P = mg$, к экватору, где $P = mg - m\omega^2 R$. Относительная убыль

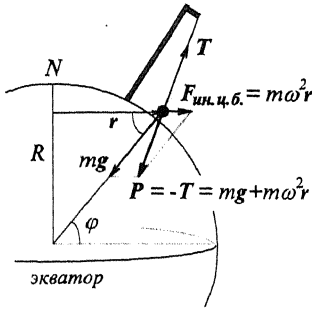


Рис. 91

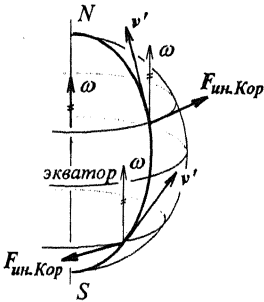


Рис. 92

веса на экваторе по отношению к его значению на полюсе $\Delta P/P = \omega^2 R/g \approx 0,3\%$. Подчеркнем, что речь идет только об эффекте, обусловленном вращением Земли. Другая причина уменьшения веса от полюсов к экватору (приблизительно на половину процента) состоит в сплюснутости земного шара у полюсов, так что в итоге $\Delta P/P \approx 0,8\%$.

Кориолисова сила инерции (33.3) пропорциональна скорости v' тела во вращающейся СО и, следовательно, действует только на движущиеся в этой СО тела. Рассмотрим некоторые эффекты, связанные с проявлением силы инерции Кориолиса в геоцентрической СО.

На элементы воды реки, текущей в меридианальном направлении со скоростью v' относительно Земли (рис. 92), действует сила инерции Кориолиса (33.3), направленная вправо по течению в северном полушарии и влево по течению - в южном. По этой причине в среднем сильнее подмыты и более крутыми оказываются правые берега рек в северном и левые - в южном полушариях (з а к о н Б э р а). Аналогичным образом сила инерции Кориолиса действует на вагоны поезда, движущегося по железной дороге меридианального направления, прижимая реборды колес к боковым сторонам рельсов, из-за чего в принципе должны сильнее стачиваться правые по ходу поезда рельсы в северном и левые - в южном полушариях. Силы инерции Кориолиса, действуя на воздушные массы, приводят к искривлению траекторий ветров, дующих в направлении к экватору (пассатов), вызывая их отклонение к западу.

Одним из проявлений неинерциальности геоцентрической СО является суточное вращение плоскости колебаний маятника; массивный шар, подвешенный на длинной нити, на котором демонстрируется это явление, называется маятником Фуко. Наиболее просто объяснить поведение маятника Фуко, если он совершает колебания на полюсе и рассмотрение ведется в гелиоцентрической СО.

В этой инерциальной СО плоскость колебаний маятника остается неподвижной, а Земля совершает суточное вращение, вследствие чего плоскость колебаний относительно Земли поворачивается. При решении задачи в неинерциальной равномерно вращающейся СО, связанной с Землей, необходимо учитывать действие силы инерции Кориолиса; именно она, будучи направлена перпендикулярно плоскости колебаний, приводит к вращению последней. Для северного полюса это показано на рис. 93, где дан вид сверху: сила инерции Кориолиса $F_{ин.Кор} = 2m[v', \omega]$ на каждом полупериодном этапе 0-1, 1-2, 2-3, отклоняет траекторию вправо по ходу движения маятника.

Рассмотренные и ряд других проявлений сил инерции в геоцентрической СО неопровержимо свидетельствуют о ее неинерциальности. Однако в большинстве задач силы инерции в геоцентрической

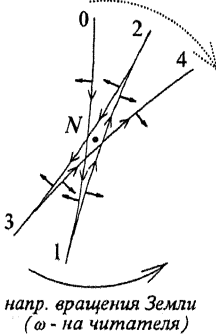


Рис. 93

СО настолько малы, главным образом вследствие малости угловой скорости вращения Земли, что ими можно пренебречь по сравнению с другими действующими силами и считать СО, связанную с Землей, инерциальной. Значительные величины силы инерции могут достигать в СО, связанных с механическими системами, вращающимися с большой угловой скоростью (гироскопы, центрифуги, специальные тренажеры для космонавтов и т.п.).

Мы ограничились рассмотрением двух простейших неинерциальных СО - равноускоренной и равномерно вращающейся. В других неинерциальных СО, совершающих более сложное движение относительно инерциальной СО, например, вращение с непостоянной угловой скоростью, в уравнении движения материальной точки появляются дополнительные силы инерции более сложного вида.

В инерциальных СО, как было показано в предыдущих главах, законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и механической энергии, теорема о движении центра масс, а также уравнение вращательного движения твердого тела вытекают как следствие из второго и третьего законов Ньютона. Поскольку второй закон Ньютона выполняется и в неинерциальных СО с учетом возникновения дополнительных сил инерции, то упомянутые выше законы должны выполняться и в неинерциальных СО, если в этих законах наряду с силами взаимодействия учесть силы инерции. При этом, естественно, все силы инерции должны рассматриваться как внешние, так как они не удовлетворяют третьему закону Ньютона.

В законе изменения и сохранения механической энергии учет сил инерции приводит к изменению потенциальной энергии системы. В равноускоренной СО силы инерции изменяют эффективное гравитационное поле (см. с. 101, формулу (32.3) и следующий за ней текст) и соответствующим образом

изменяется потенциальная энергия материальной точки: $W_n = mg'z = m\sqrt{g^2 + a_0^2}z$, где ось Oz выбрана в направлении, противоположном направлению вектора g' . В равномерно вращающейся СО за счет центробежной силы инерции у материальной точки также появляется дополнительная потенциальная энергия $W_n = -m\omega^2 r^2/2$ (предлагаем читателю самому убедиться в этом, используя формулу (15.28)). Силы инерции Кориолиса не войдут в закон изменения и сохранения энергии, так как, будучи перпендикулярными скорости v' точки, не совершают работы.

Заметим также, что в неинерциальных СО, движущихся относительно инерциальных СО поступательно, равен нулю момент сил инерции относительно центра масс тела, а, следовательно, и относительно любой оси, проходящей через центр масс. Это следует из того, что силы инерции (32.2) даже в случае переменного ускорения $a_0(t)$ проявляют себя эквивалентно однородному гравитационному полю, так что их равнодействующая, как и равнодействующая сил тяжести, приложена к центру масс (центру тяжести).

В заключение несколько слов о природе сил инерции. В ньютоновской механике появление сил инерции не только не находит объяснения, но и выглядит парадоксальным, на что было указано Э. Махом. В самом деле, из общих соображений во всех СО явления должны протекать одинаково, так как не видно причин, по которым одни СО (инерциальные) преимущественны - в них выполняется второй закон Ньютона, в то время как в других (неинерциальных) второй закон Ньютона усложняется появлением сил инерции и, соответственно, механические явления протекают иначе. Причина неравноправия инерциальных и неинерциальных СО была вскрыта Эйнштейном, который понял, что одинаковость проявления сил инерции и тяготения не случайна, а свидетельствует об их единой природе. В созданной им теории тяготения - общей теории относительности - гравитационное поле и силы инерции обусловлены искривленностью (незаклидовым характером) пространственно-временного континуума.

ГЛАВА VIII

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 34. Общее представление о колебаниях

Колебаниями называют процессы, в которых одна или несколько основных физических величин являются периодическими или почти периодическими функциями времени. По определению периодической функции $f(t+T) = f(t)$ для любого значения t , т. е. через характерный промежуток времени - период колебаний T - значения функции $f(t)$ повторяются (рис. 94). В качестве примеров колебательных процессов можно привести суточные и годовые колебания температуры на Земле, электромагнитные колебания в колебательном контуре и т. п. В настоящей главе изучаются

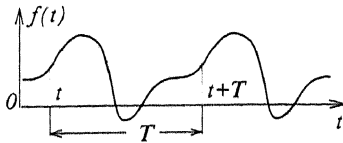


Рис. 94

механические колебания, когда речь идет о колебательных движениях тел и периодическими функциями времени являются прежде всего координаты тела. Однако несмотря на различие физической природы все колебания имеют общие черты и описываются по существу при помощи одного и того же математического аппарата. Поэтому многие из полученных здесь формул будут применяться в дальнейшем при изучении немеханических, в частности электромагнитных колебаний.

Гармонические колебания. Фундаментальную роль играют гармонические колебания, происходящие по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}. \quad (34.1)$$

Здесь $x(t)$ - физическая величина, совершающая гармоническое колебание, а A, ω, φ - постоянные величины, характеризующие колебание. График гармонического колебания представлен на рис. 95.

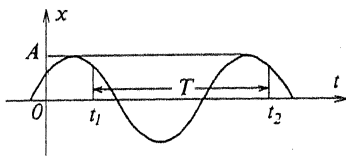


Рис. 95

Величина $A > 0$ называется амплитудой колебания. В те моменты времени, когда $\sin(\omega t + \varphi) = +1$, переменная $x(t)$ достигает своего максимального значения $x_{\max} = A$. Следовательно, амплитуда гармонического колебания равна максимальному значению колеблющейся величины (часто ее обозначают той же буквой, что и саму переменную величину, помечая индексом: x_{\max} или x_0).

Три выражающиеся друг через друга физические величины характеризуют темп гармонического колебания: период T , частота ν (или f) и круговая, или циклическая частота ω . Периоду T уже было дано определение - это время одного полного колебания (рис. 95). Частота, по определению, обратна периоду:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (34.2)$$

Она численно равна числу колебаний, совершаемых в единицу времени. Наиболее компактный вид (34.1) формула гармонического колебания имеет, если в ней фигурирует круговая частота ω , которая связана с периодом T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (34.3)$$

Действительно, для двух моментов времени t_1 и t_2 , отстоящих на период ($t_2 - t_1 = T$) (см. рис. 95), значения аргумента синуса отличаются на 2π : $(\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) = 2\pi$, откуда $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$, т.е. $\omega = 2\pi/T$.

Величина

$$\Phi(t) = \omega t + \varphi, \quad (34.4)$$

являющаяся аргументом синуса или косинуса в формуле гармонического колебания (34.1), называется фазой колебания. Она измеряется в радианах и характеризует стадию колебания. Например, при записи формулы колебания в синусоидальной форме (34.1) значениям фазы $\Phi = \pi/2 + 2\pi n$ (n - целое число) соответствуют моменты t достижения колеблющейся величиной максимального значения: $x_{\max}(t) = A \sin(\pi/2 + 2\pi n) = A$. Величина φ определяет значение фазы в момент времени $t = 0$: $\varphi = \Phi(0)$, т.е. является начальной фазой. График, приведенный на рис. 95, соответствует значению начальной фазы $0 < \varphi < \pi/2$.

Особую роль гармонических колебаний обуславливают две причины. Во-первых, в природе и технике часто встречаются колебания, близкие к гармоническим. Во-вторых, согласно теореме Фурье всякую периодическую функцию времени с периодом T можно представить как сумму гармонических колебаний с частотами, кратными частоте $\omega = 2\pi/T$, и с соответствующими значениями амплитуд и начальных фаз:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (34.5)$$

(a_0 - постоянная, которая в большинстве задач не играет существенной роли). Формулу (34.5) называют разложением функции в ряд Фурье, а отдельные гармонические слагаемые ряда Фурье называются гармониками, или Фурье-компонентами функции $x(t)$. Теорема Фурье позволяет в ряде случаев сводить задачу, в которой фигурируют негармонические колебания, к аналогичной задаче с гармоническими колебаниями (см. мелкий шрифт на с. 128).

Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении. Пусть материальная точка совершает гармоническое колебание вдоль оси Ox и ее координата изменяется по закону (34.1), причем для простоты положим $\varphi = 0$: $x(t) = A \sin \omega t$. Получим формулы для скорости и ускорения точки, которые, очевидно, направлены вдоль оси Ox . Для проекции скорости точки v_x согласно (2.4) и (34.1) имеем: $v_x = dx/dt = d(A \sin \omega t)/dt = A \omega \cos \omega t$. Дифференцируя v_x по времени, получим согласно (3.4) проекцию ускорения: $a_x = dv_x/dt = d(A \omega \cos \omega t)/dt = -A \omega^2 \sin \omega t$. Чтобы сравнивать фазы колебаний координаты, скорости и ускорения, их формулы должны быть записаны в одинаковой форме, например, в виде $a \sin(\omega t + \varphi)$, где $a > 0$. Выражая в формуле для v_x косинус через синус, а в формуле для a_x синус со знаком минус через синус со знаком плюс, получаем следующие формулы для скорости и ускорения точки:

$$v_x = \underbrace{A \omega}_{v_{x0}} \sin(\omega t + \pi/2), \quad (34.6)$$

$$a_x = \underbrace{A \omega^2}_{a_{x0}} \sin(\omega t + \pi). \quad (34.7)$$

Таким образом, скорость и ускорение при гармоническом колебании также изменяются со временем по закону гармонического колебания с той же частотой, что и координата,

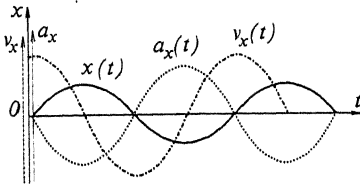
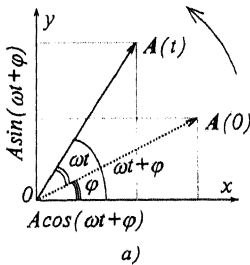


Рис. 96

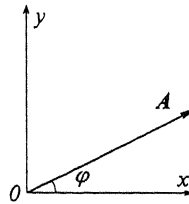
и с амплитудами, соответственно, $v_{x0} = A \omega$ и $a_{x0} = A \omega^2$. Начальные фазы у скорости и ускорения равны, соответственно, $\pi/2$ и π , т.е. скорость опережает координату по фазе на $\pi/2$ (по времени - на четверть периода), а ускорение находится в противофазе с координатой. Графики зависимости от времени координаты, скорости и ускорения точки, совершающей гармоническое колебание вдоль оси Ox , представлены на рис. 96.

Векторная диаграмма гармонического колебания. Рассмотрим вектор A , равномерно вращающийся в плоскости чертежа с постоянной угловой скоростью ω (рис. 97 а). За время t он повернется на угол ωt и будет составлять с направлением оси Ox угол $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, где φ - угол, характеризующий положение вектора в начальный момент

$t = 0$. Как видно из рис. 97 а, при вращении вектора A его проекции на оси Ox и Oy изменяются по закону гармонического колебания



а)



б)

Рис. 97

его изображение в начальный момент времени - векторной диаграммой колебания (рис. 97 б). При помощи векторной диаграммы, как будет показано далее, удобно складывать гармонические колебания одинаковой частоты.

§ 35. Сложение колебаний

При решении ряда задач появляется необходимость сложить два или несколько колебаний. В механике такая проблема возникает при сложении движений: если тело колеблется относительно $CO K'$, которая в свою очередь совершает колебание относительно $CO K$, то движение тела относительно $CO K$ определится в результате сложения этих двух колебаний.

Сложение скалярных гармонических колебаний одинаковой частоты. Пусть тело совершает гармоническое колебание $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ в СО K_1 , которая в свою очередь гармонически колеблется с той же частотой относительно СО K так, что расстояние 00_1 между началами координат 0 и 0_1 изменяется по закону $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Тогда координата x тела в СО K определится как сумма гармонических колебаний одинаковой частоты (рис. 98):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Для сложения колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удобно использовать метод векторных диаграмм. Докажем, что в результате сложения гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем вектор-амплитуда результирующего колебания равен сумме векторов-амплитуд складываемых колебаний. На рис. 99 представлена векторная диаграмма, на которой изображены векторы-амплитуды A_1 и A_2 складываемых колебаний и их суммарный вектор $A = A_1 + A_2$ в момент $t = 0$. Вектор A , очевидно, имеет постоянный модуль и вращается с той же угловой скоростью, что и векторы A_1 и A_2 (параллелограмм векторов-амплитуд вращается как жесткий). Следовательно, он представляет собой вектор-амплитуду гармонического колебания $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, являющегося его проекцией на ось Ox . Но эта проекция, будучи суммой проекций векторов-амплитуд A_1 и A_2 , равна сумме складываемых колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (на рис. 99 это показано для начального момента времени: $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$), что и доказывает сделанное утверждение.

Из векторной диаграммы по теореме косинусов находим амплитуду A результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (35.1)$$

и его начальную фазу:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (35.2)$$

Как следует из формулы (35.1), амплитуда результирующего колебания при заданных амплитудах A_1 и A_2 существенно зависит от разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний. Она максимальна и равна $A_{\max} = A_1 + A_2$, если $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = +1$, т. е. если $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (колебания синфазны) (рис. 100 а). Она минимальна и равна $A_{\min} = |A_1 - A_2|$, если $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, т. е. $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (колебания в противофазе) (рис. 100 б). Таким образом,

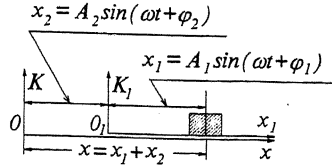


Рис. 98

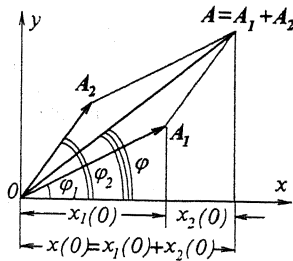


Рис. 99

$$\text{условие максимума } (A_{\max} = A_1 + A_2): \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n, \quad (35.3)$$

$$\text{условие минимума } (A_{\min} = |A_1 - A_2|): \quad \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi. \quad (35.4)$$

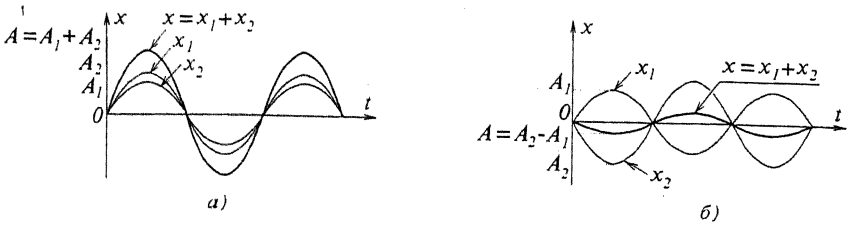


Рис. 100

При равных амплитудах складываемых колебаний максимальная амплитуда вдвое больше амплитуды каждого из них, а $A_{\min} = 0$, т.е. противофазные колебания при $A_1 = A_2$ взаимно уничтожаются. На векторной диаграмме условию максимума соответствуют сонаправленные векторы-амплитуды A_1 и A_2 , а условию минимума - векторы A_1 и A_2 противоположных направлений.

Полученный результат может быть использован при сложении любых скалярных величин, совершающих гармонические колебания одинаковой частоты. Он применим и к сложению гармонически колеблющихся векторных величин, если векторы направлены вдоль одной прямой, поскольку в этом случае задача сводится к сложению проекций векторов на их общее направление, т.е. к сложению колебаний скалярных величин.

Биения. При сложении скалярных гармонических колебаний с разными частотами гармоническое колебание в результате не получится. Интересен случай, когда складываются колебания с близкими частотами ω и $\omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega$. Считая для простоты $A_1 = A_2 = A$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, имеем: $x(t) = A \sin \omega t + A \sin(\omega + \Delta\omega)t = A[\sin \omega t + \sin(\omega + \Delta\omega)t] =$

$$A \cdot 2 \sin \frac{\omega t + (\omega + \Delta\omega)t}{2} \cos \frac{\omega t - (\omega + \Delta\omega)t}{2} = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \omega t, \text{ где мы пренебрегли } \Delta\omega \text{ по сравнению с } \omega \text{ под знаком синуса:}$$

$$x(t) = \underbrace{2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t}_{A(t)} \sin \omega t. \quad (35.5)$$

Эта формула отличается от формулы гармонического колебания тем, что множитель $A(t) = 2A \cos(\Delta\omega/2)t$, играющий роль амплитуды, сам медленно ($\Delta\omega \ll \omega$) меняется со временем по гармоническому закону. График формулы (35.5) представлен на рис. 101: точки, для которых $\sin \omega t = \pm 1$, лежат на кривых, соответственно, $\pm A(t)$, изображенных штрих-пунктирной и пунктирной линиями. Таким образом, в результате сложения скалярных колебаний с близкими частотами получается почти гармоническое колебание с частотой, близкой частоте складываемых колебаний, но с медленно осциллирующей амплитудой. Это явление называют бие н и я м и .

Промежуток времени между соседними максимумами модуля амплитудной функции $A(t)$ определяет период биений T_6 . Как видно из рис. 101, он вдвое меньше периода $\tilde{T} = 2\pi/(\Delta\omega/2)$ амплитудной функции $A(t)$: $T_6 = \tilde{T}/2 = 2\pi/\Delta\omega$ и больше периода $T = 2\pi/\omega$ колебаний в $\omega/\Delta\omega$ раз. Иллюстрацией биений могут служить знакомые многим колебания громкости звука, порожденного двумя слегка расстроенными струнами музыкального инструмента (пианино, гитара). Эти периодические изменения громкости отражают колебания амплитуды при биениях.

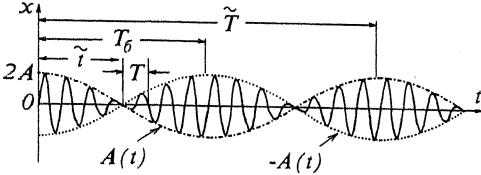


Рис. 101

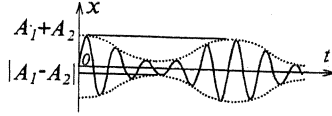


Рис. 102

Возникновение биений легко понять на качественном уровне, не прибегая к выкладкам. Второе колебание можно записать в виде: $x_2(t) = A \sin(\omega + \Delta\omega)t = A \sin(\omega t + \Delta\omega t)$ и рассматривать второе слагаемое $\Delta\omega t$ в его фазе как медленно меняющийся со временем сдвиг фаз с первым колебанием $x_1(t) = A \sin \omega t$. В некоторый момент времени колебания синфазны и результирующее колебание имеет максимальную амплитуду $2A$ (см. момент $t = 0$ на рис. 101). Со временем разность фаз растет, амплитуда суммарного колебания уменьшается и через промежуток времени $\tilde{t} = \pi/\Delta\omega$, за который набегит разность фаз π , обращается в нуль. С дальнейшим ростом разности фаз амплитуда начинает увеличиваться, пока не достигнет максимума, когда колебания опять станут синфазными, и т.д. Период биений, как видно из рис. 101, $T_6 = 2\tilde{t} = 2\pi/\Delta\omega$. Приведенное рассуждение позволяет понять характер биений при неодинаковых амплитудах A_1 и A_2 складываемых колебаний. В этом случае максимальная амплитуда при биениях $A = A_1 + A_2$, а минимальная - $A = |A_2 - A_1|$, как изображено на рис. 102. Рекомендуем читателю подумать над объяснением биений на языке векторной диаграммы.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Рассмотрим теперь, что получится в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты. В механике такая задача возникает, если материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях с круговой частотой ω , происходящих, например, вдоль координатных осей Ox и Oy :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin \omega t, \\ y(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (35.6)$$

и требуется найти траекторию движения точки. Иными словами, формулами (35.6) задан кинематический закон движения, а нужно получить уравнение траектории в форме связи между координатами x и y .

С этой целью исключим время из уравнений (35.6), преобразовав второе уравнение:

$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi) = A_2(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = A_2(\sin \omega t \cos \varphi + \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \sin \varphi)$ и подставляя сюда значение $\sin \omega t = x/A_1$ из первого уравнения:

$y = A_2 [(x/A_1) \cos \varphi + \sqrt{1 - x^2/A_1^2} \sin \varphi]$. Чтобы избавиться от радикала, делим обе части равенства на A_2 , уединяем слагаемое с радикалом и возводим обе части равенства в квадрат: $(y/A_2 - x/A_1 \cos \varphi)^2 = (1 - x^2/A_1^2) \sin^2 \varphi$. Раскрывая квадрат скобок и перенося слагаемое с x^2 в левую часть равенства, получим:

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos \varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi. \quad (35.7)$$

Это уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами $2A_1$ и $2A_2$ (рис. 103 а). (То, что траектория не выходит за рамки указанного прямоугольника, очевидно заранее, так как согласно (35.6) $-A_1 < x < A_1$ и $-A_2 < y < A_2$).

Рассмотрим частные случаи. Если колебания координат x и y синфазны: $\varphi = 2\pi n$, то $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ и уравнение (35.7) принимает вид: $(x/A_1 - y/A_2)^2 = 0$, откуда

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (35.8)$$

В этом случае эллипс вырождается в прямую с положительным угловым коэффициентом A_2/A_1 (прямая 1 на рис. 103 б). При разности фаз $\varphi = \pm \pi/2$, т.е. при сдвиге по времени на четверть периода, $\sin^2 \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$ и уравнение (35.7) принимает вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (35.9)$$

Это - уравнение эллипса, расположенного симметрично относительно координатных осей (эллипс на рис. 103 б). При равных амплитудах $A_1 = A_2 = A$ уравнение (35.9) превращается в уравнение окружности радиуса A : $x^2 + y^2 = A^2$.

Если колебания координат x и y противофазны, т.е. $\varphi = (2n+1)\pi$, то $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = -1$ и уравнение (35.7) дает: $(x/A_1 + y/A_2)^2 = 0$, откуда

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (35.10)$$

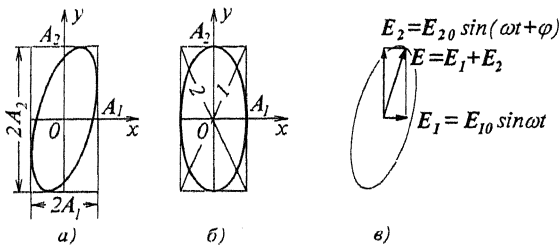


Рис. 103

В этом случае эллипс снова вырождается в прямую, но с отрицательным угловым коэффициентом $-A_2/A_1$ (прямая 2 на рис. 103 б). Заметим, что характер движения точки в рассмотренных частных случаях легко угадывается без выкладок, если мысленно представить себе колебания ее координат (35.6) при указанных разностях фаз.

В лекционной демонстрации результат сложения взаимно перпендикулярных колебаний можно наблюдать на экране осциллографа, если на обе пары отклоняющих пластин конденсаторов подать переменные синусоидальные напряжения одинаковой частоты. При не строго одинаковых частотах этих напряжений возникает медленно изменяющаяся со временем разность фаз колебаний, как это по-являлось при рассмотрении биений, и эллипс на экране видоизменяется, принимая всевозможные при данных A_1 и A_2 формы.

Полученные результаты можно использовать при сложении взаимно перпендикулярных векторов, изменяющихся по закону гармонического колебания с одинаковой частотой: $E_1 = E_{10} \sin \omega t$ и $E_2 = E_{20} \sin(\omega t + \varphi)$, где E_{10} и E_{20} - постоянные амплитудные векторы. В этом случае уравнения (35.7-10) с E_{10} и E_{20} вместо A_1 и A_2 определяют линию, которую описывает конец суммарного вектора $E = E_1 + E_2$ (рис. 103 в).

При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с различными частотами траектория точки может иметь сложный вид, однако если частоты ω_x и ω_y колебаний координат x и y относятся как небольшие целые числа n_1 и n_2 : $\omega_x/\omega_y =$

n_1/n_2 , то форма траектории сравнительно проста. Такие траектории называются фигурами Лиссажу; некоторые из них приведены на рис. 104. Легко понять, что отношение частот ω_x и ω_y равно отношению числа точек касания траекторией двух соседних сторон прямоугольника $2A_2$ и $2A_1$.

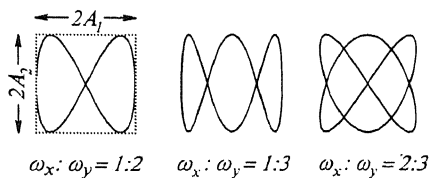


Рис. 104

§ 36. Свободные гармонические колебания

Теперь мы переходим к изучению динамики колебательных движений. Проблема состоит в том, чтобы выяснить, под действием каких сил происходят те или иные механические колебания. В процессе решения этой задачи устанавливается, как зависят характеристики колебаний от параметров, характеризующих условия, при которых происходят колебания.

Колебания можно классифицировать в зависимости от условий, обеспечивающих их протекание (вид сил, действующих в колебательной системе, способ ее подпитки энергией и т.п.). В этой связи можно упомянуть автоколебания, когда колеблющемуся телу в нужные моменты времени за счет специального устройства сообщается энергия от внешнего источника, не дающая колебаниям затухнуть. Школьный пример автоколебаний - часы-ходики, где колеблющимся телом является маятник, источником энергии - поднятая гиря, регулятором поступления энергии от гири к маятнику - анкер. Большое сходство с автоколебаниями имеют релаксационные колебания, когда система периодически выводится из положения равновесия, в которое возвращается (релаксирует) самостоятельно. Мы, однако, ограничимся рассмотрением двух видов колебаний: свободных, или собственных колебаний, - как незатухающих, так и затухающих, - и вынужденных.

Настоящий параграф посвящен изучению свободных гармонических колебаний. Будут рассмотрены три примера, из которых станет ясно, что понимается в физике под свободными гармоническими колебаниями и как зависят их характеристики от параметров колебательной системы.

Пружинный маятник. Рассмотрим тело массой m , прикрепленное к концу упругой невесомой пружины жесткостью k , другой конец которой закреплен неподвижно (пружинный маятник). Чтобы в уравнение движения тела не вошла сила тяжести, не играющая принципиальной роли для возникновения колебаний, расположим тело на гладкой горизонтальной поверхности, прикрепив свободный конец пружины к неподвижной стенке (рис. 105). Координатную ось Ox направим горизонтально от стенки, выбрав начало отсчета O в центре масс тела, когда оно находится в положении равновесия и пружина не деформирована. Если вывести тело из положения равновесия, сместив его или сообщив ему начальную скорость вдоль оси Ox (или сделав и то, и другое), а затем предоставить самому себе, то оно будет двигаться вдоль этой оси.

Для нахождения кинематического закона движения тела $x(t)$ необходимо записать уравнение движения, т.е. второй закон Ньютона в дифференциальной форме в проекции на ось Ox , и найти его решение. Из трех сил,

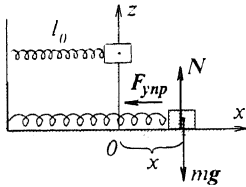


Рис. 105

действующих на тело, когда оно находится в некоторой точке траектории с координатой x : силы тяжести mg , силы реакции опоры N и упругой силы $F_{упр}$, - только упругая сила имеет проекцию на ось Ox : $F_x = -kx$ (см. формулу (10.11)), и уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx . \quad (36.1)$$

В математике принято записывать дифференциальное уравнение, располагая функцию и ее производные в левой части уравнения, начиная с производной наивысшего порядка с коэффициентом 1 при ней. В соответствии с этим уравнение (36.1) перепишем в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 . \quad (36.2)$$

Вид уравнений (36.1) и (36.2) подсказывает искать решение в виде гармонического колебания:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) , \quad (36.3)$$

так как вторая производная синуса равна самой функции с обратным знаком. О конкретных значениях постоянных величин - амплитуды A , круговой частоты ω_0 и начальной фазы φ в формуле (36.3) пока не делается никаких предположений. Действительно ли функция (36.3) удовлетворяет уравнению (36.2) и если да, то при каких значениях постоянных A, ω_0, φ , покажет проверка. Беря вторую производную функции $x(t)$ из (36.3) по времени: $d^2 x / dt^2 = -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и подставляя ее и саму функцию $x(t)$ в уравнение движения (36.2), имеем: $-A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) + (k/m) A \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$. Сокращая множитель $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, приходим к соотношению $-\omega_0^2 + k/m = 0$. Откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (36.4)$$

Таким образом решением уравнения движения (36.2) является гармоническое колебание с произвольными значениями амплитуды и начальной фазы (множитель $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, в который они входят, в процессе подстановки сократился), но с вполне определенной круговой частотой, определяемой формулой (36.4). Наличие в решении (36.3) двух произвольных постоянных A и φ гарантирует, что это решение - общее и других решений

уравнения движения (36.2) нет (см. с. 29). Чтобы знать, с какими амплитудой и начальной фазой будет происходить колебание, необходима дополнительная информация, например, задание начальных условий - значений координаты и скорости в момент времени $t = 0$: $x(0) = x_0$ и $v_x(0) = v_0$. Потребовав выполнения начальных условий, т.е. приравнявая значения координаты $x(t)$ из (36.3) и скорости $v_x(t)$ из (34.6), взятые в момент $t = 0$, их заданным начальным значениям x_0 и v_0 , имеем:

$$\begin{aligned} A \sin \varphi &= x_0, \\ A \omega_0 \cos \varphi &= v_0. \end{aligned} \quad (36.5)$$

Из этой системы уравнений находим:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}. \quad (36.6)$$

Рассмотренная задача - типичный пример свободных гармонических колебаний с одной степенью свободы, т.е. описываемых одной изменяющейся со временем координатой, в нашем примере - координатой тела $x(t)$. Их отличительная черта состоит в том, что они всегда происходят с определенной частотой, зависящей только от параметров системы, в нашем случае - от массы тела и жесткости пружины. Что касается амплитуды и фазы, то они определяются начальными условиями, т.е. зависят от способа возбуждения колебаний.

Проведенный анализ показал, что тело совершает гармоническое колебание, если уравнение движения тела имеет вид (36.1) или, что то же самое, (36.2). Но вид этого уравнения движения предопределен видом выражения для результирующей силы

$$F_x = -kx, \quad (36.7)$$

причем вовсе не обязательно, чтобы эта сила была упругой, как в случае пружинного маятника; необходимо лишь, чтобы она была направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению относительно него. Сила, определяемая формулой (36.7), независимо от ее физической природы называется **к в а з и у п р у г о й**. Таким образом, свободные гармонические колебания происходят под действием квазиупругой силы.

Если пружинный маятник подвешен вертикально (рис. 106), за счет действия силы тяжести mg положение равновесия сместится вниз на расстояние $\Delta l_0 = mg/k$, так как в положении равновесия сила тяжести уравновешена силой натяжения пружины: $k \Delta l_0 = mg$. В системе координат с началом отсчета в новом положении равновесия O уравнение движения тела имеет вид:

$m(d^2x/dt^2) = -k(x + \Delta l_0) + mg$, так как в этой СО удлинение пружины $\Delta l = x + \Delta l_0$. Слагаемые $-k \Delta l_0$ и mg в правой части взаимно уничтожаются и уравнение движения принимает обычный вид (36.1). Следовательно, постоянная сила, действующая наряду с квазиупругой, приводит лишь к смещению положения равновесия, ничего не меняя в характере колебаний.

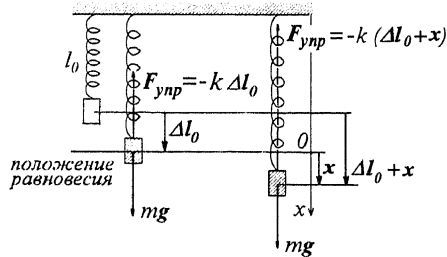


Рис. 106

Говоря о свободных колебаниях, естественнее иметь в виду не колебания одного тела, а колебания в системе, состоящей по крайней мере из двух тел. Примером может служить система, состоящая из двух тел, соединенных невесомой пружиной (рис. 107). Можно показать, что в этой системе, если ее вывести из положения равновесия, расстояние между телами будет изменяться по закону $l(t) =$

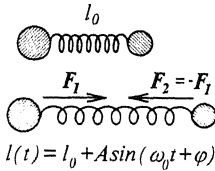


Рис. 107

в уравнении движения (36.2) коэффициент при x , согласно (36.4), равен квадрату круговой частоты собственных колебаний: $k/m = \omega_0^2$, так что это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (36.8)$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение гармонического осциллятора. Если переменная физическая величина $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (36.8), можно утверждать, что она изменяется по закону гармонического колебания (36.3) с круговой частотой ω_0 , равной квадратному корню из коэффициента при $x(t)$ в этом уравнении, и с амплитудой и начальной фазой, которые определяются через начальные данные формулами вида (36.6).

Физический и математический маятники. В качестве второго примера свободных гармонических колебаний рассмотрим малые колебания маятников, у которых момент силы, возвращающий тело в положение равновесия, обусловлен силой тяжести. Физическим маятником называется твердое тело, которое может свободно вращаться относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести тела (рис. 108). На этом рисунке r - радиус-вектор центра масс C маятника относительно перпендикулярной плоскости чертежа оси вращения O , вдоль которой - на читателя - направлена координатная ось Oz ; угол φ , характеризующий положение радиуса-вектора r , отсчитывается от вертикальной оси Ox в направлении, согласованном с направлением оси Oz правилом буравчика.

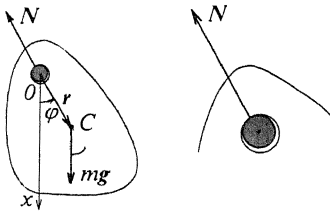


Рис. 108

Чтобы выяснить, как будет двигаться физический маятник, если его вывести из положения равновесия и затем предоставить самому себе, следует записать его уравнение движения - уравнение моментов в проекции на ось вращения Oz (19.11):

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_i M_{(i)z}, \quad (36.9)$$

и найти его решение $\varphi(t)$. Здесь I - момент инерции маятника относительно оси вращения,

$\sum_i M_{(i)z}$ - сумма проекций моментов сил относительно оси Oz на эту ось.

На маятник массы m действуют две силы: сила тяжести mg , приложенная к центру тяжести C , и сила N реакции оси, на которую насажен маятник; всеми силами трения пренебрегаем. Момент силы N относительно оси вращения равен нулю, так как эта сила направлена радиально от оси вращения, как показано на рис. 108. Поэтому суммарный момент сил сведется к моменту силы тяжести: $M_z = [r, mg]$. Его проекция на ось вращения Oz определяется формулой

$$M_z = -mgr \sin \varphi. \quad (36.10)$$

В необходимости знака минус в этой формуле легко убедиться: например, в положении маятника, изображенном на рис. 108, $\varphi > 0$, а момент M_z направлен за чертеж, т.е. $M_z < 0$ в согласии с формулой (36.10).

Итак, уравнение движения физического маятника имеет вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgr \sin \varphi. \quad (36.11)$$

Решение этого дифференциального уравнения довольно сложное и мы ограничимся рассмотрением движений, при которых угол φ отклонения от положения равновесия настолько мал, что можно считать $\sin \varphi \approx \varphi$. Выражение для момента силы тяжести (36.10) при этом упрощается: $M_z = -(mgr) \varphi$ (по аналогии с квазиупругой силой (36.7) его естественно назвать квазиупругим моментом сил) и уравнение (36.11) принимает вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgr \varphi. \quad (36.12)$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{I} \varphi = 0. \quad (36.13)$$

Уравнение (36.13) для функции $\varphi(t)$ является уравнением гармонического осциллятора

(36.8), в котором $\omega_0^2 = \frac{mgr}{I}$. Поэтому можно сразу написать его общее решение:

$$\varphi(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (36.14)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}. \quad (36.15)$$

(Начальная фаза колебания в формуле (36.14) обозначена буквой α .) Таким образом малые колебания физического маятника в хорошем приближении являются гармоническими, а их круговая частота зависит от массы m маятника, его момента инерции I относительно оси вращения и от расстояния r между осью вращения и центром тяжести маятника. Амплитуда A и начальная фаза α определяются через начальные данные, т.е. значения угла и угловой скорости в начальный момент времени $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\Omega_z(0) = \Omega_0$ по формулам, аналогичным (36.6) (угловая скорость здесь обозначена буквой Ω , чтобы не спутать с круговой частотой колебаний ω).

Тело, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити, называется **м а т е м а т и - ч е с к и м м а я т н и к о м**, если размеры тела пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити (рис. 109). Если ограничиться рассмотрением малых колебаний в вертикальной плоскости, то математический маятник можно рассматривать как частный случай физического, у которого - как у материальной точки - момент инерции равен $I = ml^2$, где m - масса маятника, l - длина нити. (Момент силы натяжения нити T равен нулю по той же причине, что и момент силы реакции оси N в случае физического маятника.) Подставляя в формулу (36.15) это выражение для момента инерции и заменяя в ней r на l , получаем известную из школьного курса физики формулу для круговой частоты колебаний математического маятника:

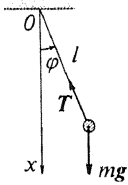


Рис. 109

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (36.16)$$

Всякому физическому маятнику можно сопоставить математический маятник, имеющий одинаковую с ним круговую частоту собственных колебаний ω_0 . Длина нити $l_{\text{пр}}$ такого математического маятника называется **п р и в е д е н н о й д л и н о й** физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{g}{\omega_0^2}. \quad (36.17)$$

Выясним, как располагаются все параллельные друг другу оси, относительно которых физический маятник совершал бы собственные колебания с одной и той же круговой частотой ω_0 . Выразим в формуле (36.15) момент инерции I по теореме о параллельных осях (19.14) через момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс: $I = I_0 + mr^2$. Тогда $\omega_0 = \sqrt{mgr / (I_0 + mr^2)}$, откуда после простых преобразований получаем квадратное уравнение для расстояния r от искомых осей до центра масс маятника:

$$r^2 - \frac{g}{\omega_0^2} r + \frac{I_0}{m} = 0, \quad (36.18)$$

в котором коэффициент при первой степени r с обратным знаком является приведенной длиной физического маятника (36.17). По теореме Виета он равен сумме корней r_1 и r_2 квадратного уравнения:

$$r_1 + r_2 = l_{\text{пр}} = g / \omega_0^2. \quad (36.19)$$

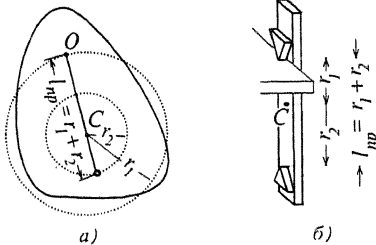


Рис. 110

Следовательно, существуют два значения расстояния r от центра тяжести до оси вращения, при которых круговая частота собственных колебаний маятника равна ω_0 , если, конечно, при данных значениях I_0 , m и ω_0 корни r_1 и r_2 окажутся вещественными. Соответственно, искомые оси являются образующими двух соосных цилиндрических поверхностей радиусов r_1 и r_2 , ось которых проходит через центр масс маятника (для направления осей, перпендикулярного плоскости чертежа, сечения этих цилиндров изображаются концентрическими окружностями, представленными на рис. 110 а пунктирными линиями).

Формула (36.19) лежит в основе устройства **о б о р о т н о г о м а я т н и к а**, служащего для прецизионных измерений ускорения свободного падения g . Он представляет собой массивный стержень с двумя призмами, которые можно перемещать вдоль стержня (рис. 110 б). Варьируя положение одной из призм, добиваются того, чтобы частоты собственных колебаний маятника, когда он опирается на ту и

другую призму, были одинаковы. Измеряя круговую частоту ω_0 и расстояние между опорными ребрами призмы, равное $l_{\text{пр}}$, по формуле (36.19) вычисляют g . Высокая точность измерения g этим методом обусловлена возможностью с достаточно высокой точностью измерить приведенную длину маятника.

Крутильные колебания. В качестве третьего примера свободных колебаний рассмотрим **крутильные колебания**. На рис. 111 а изображен горизонтальный диск, прикрепленный к нижнему торцу тонкого вертикального стержня, верхний конец которого закреплен неподвижно. Когда диск повернут относительно вертикальной оси Oz на небольшой угол φ , в стержне возникает деформация кручения и со стороны его торца на диск действует момент упругих сил:

$$M_z = -D\varphi, \quad (36.20)$$

где D - модуль кручения стержня (см. формулу (24.5)). Знак минус обеспечивает правильное согласование знаков угла φ и проекции момента сил M_z : при $\varphi > 0$, как представлено на рис. 111 а, направление момента упругих сил кручения M_z противоположно направлению оси Oz , т.е. $M_z < 0$.

Уравнение движения диска, т.е. уравнение моментов относительно оси Oz (19.11), имеет вид:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi, \quad (36.21)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I}\varphi = 0, \quad (36.22)$$

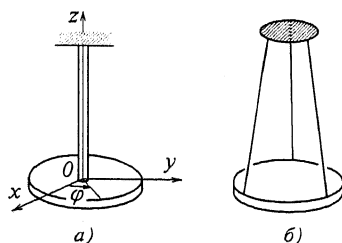


Рис. 111

где I - момент инерции диска относительно оси Oz . Это - уравнение гармонического осциллятора (36.8), следовательно, диск, выведенный из положения равновесия, будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (36.23)$$

Другим примером крутильных колебаний относительно вертикальной оси являются колебания круглой платформы, подвешенной на трех нитях (трифилярный подвес) (рис. 111 б). Частота этих колебаний, как и в предыдущем случае, зависит от момента инерции системы. Размещая на платформе исследуемое тело и измеряя частоту свободных крутильных колебаний, можно вычислить его момент инерции.

Нелинейные колебания. Как мы видели, свободные упругие колебания являются гармоническими, если они происходят под действием квазиупругой силы, которая зависит от координаты линейно (отсюда другое их название - **линейные колебания**). Однако обычно линейная зависимость от координаты описывает реальные силы лишь приближенно - при сравнительно малых смещениях тел от положения равновесия. Так, формула (36.7), которая использовалась для упругой силы в задаче о колебаниях пружинного маятника, справедлива лишь при малых деформациях, для которых выполняется закон Гука, а замена значения синуса значением угла в уравнении движения физического маятника (36.11) также возможна лишь при малых углах отклонения от положения равновесия. Поэтому гармоническими обычно являются лишь малые колебания.

В общем случае зависимость $F_x(x)$ потенциальной возвращающей силы (или момента силы) от координаты можно представить в виде степенного ряда, являющегося разложением функции $F_x(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 0$: $F_x(x) = -kx + k_1x^2 + k_2x^3 + \dots$, в котором квазиупругая сила является лишь первым членом разложения. Чем больше амплитуда колебания, тем больше членов этого ряда с возрастающими степенями необходимо учитывать, чтобы описать силу в достаточно хорошем приближении.

Анализ уравнения движения вида (36.1), в правой части которого наряду с линейным членом присутствуют члены с более высокими степенями координаты:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + k_1 x^2 + k_2 x^3 + \dots \quad (36.24)$$

показывает, что его общим решением является колебание, но не гармоническое, а представляющее собой суперпозицию гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте ω_0 :

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \dots \quad (36.25)$$

Соотношение амплитуд A_n отдельных гармоник зависит от значений коэффициентов k_i в разложении силы и от того, сколько членов разложения учтено в правой части уравнения (36.24). Осциллятор, в котором возвращающая сила не является квазиупругой, называется *ангармоническим*, или *нелинейным*; этими же терминами характеризуют колебания (36.25), которые он совершает. Существенным отличием ангармонического осциллятора от гармонического, помимо появления в его свободных колебаниях дополнительных гармоник с кратными частотами, является зависимость периода колебаний, а следовательно и частоты ω_0 в формуле (36.25), от амплитуды.

Колебания связанных систем. До сих пор речь шла об отдельном осцилляторе, состоящем из двух тел (в пружинном и физическом маятниках вторым телом является Земля) и имеющем, соответственно, одну колебательную степень свободы, характеризующую линейной x или угловой φ координатой. В случае квазиупругих сил взаимодействия такой осциллятор может совершать гармоническое колебание с некоторой вполне определенной частотой, зависящей от параметров осциллятора.

Систему, состоящую из более чем двух квазиупруго взаимодействующих тел и имеющую, соответственно, несколько колебательных степеней свободы, называют *связанной системой*. Особенности свободных колебаний в связанной системе проанализируем на простейшем примере. На рис. 112 а изображена система, состоящая из двух одинаковых пружинных маятников, соединенных несвесомой пружиной длины l и жесткости k . Маятники представляют собой тела (материальные точки) массы m на пружинах жесткости K , прикрепленных к стенкам, причем в положении равновесия системы все пружины недеформированы. Введем для описания положения тел координатные оси $O_1 x_1$ и $O_2 x_2$ с началом отсчета в положениях равновесия и запишем уравнения движения тел (второй закон Ньютона в проекции на оси $O_1 x_1$ и $O_2 x_2$), пренебрегая силами тяжести:



Рис. 112

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx_1 - k(x_1 - x_2), \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Kx_2 - k(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (36.26)$$

(Вторые слагаемые в правых частях этих уравнений описывают силы, действующие на тела со стороны соединительной пружины: изменение длины пружины

равно $|x_1 - x_2| = \Delta l$, а в правильности знака в выражениях для проекций этих сил легко убедиться). Видим, что движения тел взаимозависимы: сила, действующая на первое тело, зависит от координаты второго и наоборот. Это приводит к тому, что колебания тел, вообще говоря, не являются гар-

моническими. Складывая уравнения (36.26), а в другом случае вычитая второе из первого, получим два следующих уравнения:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -K(x_1 + x_2), \\ m \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -K(x_1 - x_2) - 2k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (36.27)$$

Если вместо естественных координат x_1, x_2 тел ввести новые переменные X_1, X_2 по формулам

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2, \\ X_2 = x_1 - x_2, \end{cases} \quad (36.28)$$

то уравнения движения для них становятся независимыми друг от друга:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 X_1}{dt^2} = -K X_1, \\ m \frac{d^2 X_2}{dt^2} = -(K + 2k) X_2. \end{cases} \quad (36.29)$$

Каждое из этих уравнений представляет собой дифференциальное уравнение гармонического осциллятора и имеет общее решение в форме гармонического колебания:

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\ X_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{cases} \quad (36.30)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2k}{m}}. \quad (36.31)$$

Переменные (параметры) X_1, X_2 называются нормальными координатами системы. Они представляют собой частный случай обобщенных координат, т.е. параметров, которые хотя и не являются непосредственно координатами тел, но, будучи взаимно однозначно с ними связанными, вполне определяют положение системы. Колебания системы, соответствующие гармоническим колебаниям (36.30) нормальных координат, называются нормальными колебаниями, а частоты (36.31) этих колебаний - собственными частотами системы. Выражая координаты тел через нормальные координаты из формул (36.28), с учетом формул (36.30) имеем:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{1}{2} [A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)], \\ x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2} = \frac{1}{2} [A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \end{cases} \quad (36.32)$$

Следовательно, колебания, совершаемые телами системы, представляют собой суперпозицию нормальных колебаний, причем амплитуды A_1, A_2 и фазы φ_1, φ_2 зависят от способа возбуждения и определяют ее начальными условиями.

Каждое из нормальных колебаний реально осуществимо. Чтобы вызвать только первое нормальное колебание, не возбуждая второго, необходимо выполнение условия $X_2 = 0$. Но $|X_2| = |x_1 - x_2|$ есть удлинение Δl соединительной пружины, следовательно, первое нормальное колебание должно происходить при неизменной длине l соединительной пружины. Это условие будет обеспечено, если начальные условия для обоих тел одинаковы: $x_1(0) = x_2(0)$, т.е. если в начальный момент тела отклонены в одну сторону на одинаковые расстояния (начальные скорости считаем равными нулю). Тогда тела будут совершать тождественные гармонические колебания с нормальной частотой ω_1 из (36.31). Для возбуждения второго нормального колебания необходимо отклонить тела на равные расстояния в противоположные стороны: $x_1(0) = -x_2(0)$. Тогда очевидно $X_1 = x_1 + x_2 = 0$ в любой момент времени и изменяться будет только вторая координата X_2 с собственной частотой ω_2 : тела будут совершать колебания с одинаковыми амплитудами, но в противофазе. На рис.112 представлены положения тел в моменты максимального отклонения от положений равновесия при первом (б) и втором (в) нормальном колебании.

Интересен случай, когда жесткость соединительной пружины существенно меньше жесткости пружин маятников ($k \ll K$). Тогда систему можно рассматривать как два слабо связанных друг с другом (посредством соединительной пружины) осциллятора. При этом собственные частоты согласно (36.31) оказываются близкими и колебания тел согласно (36.32) представляют собой биения (см. качественное объяснение биений на с. 111). Характер этих биений таков, что в те моменты, когда нормальные колебания синфазны и биения первого тела имеют максимальную амплитуду, амплитуда биений второго тела минимальна, так как в формуле для X_2 складываемые колебания в этот момент противофазны (знак минус у второго нормального колебания эквивалентен изменению фазы этого колебания на π). И наоборот, когда нормальные колебания становятся противофазными, амплитуда биений первого тела минимальна, а второго - максимальна. Таким образом колебательное движение как бы медленно передается от одного тела к другому (за половину периода биений) и обратно.

Установленные на рассмотренном примере закономерности оказываются справедливыми для связанной системы, состоящей из любого числа квазиупруго взаимодействующих тел и имеющей N колебательных степеней свободы. Ее свободные колебания могут быть представлены как суперпозиция N нормальных колебаний, происходящих с собственными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, зависящими от параметров системы, и с амплитудами и начальными фазами, определяемыми начальными условиями. Совокупность частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ называют спектром колебаний связанной системы. Связанная система, подобная рассмотренной, но состоящая из большого числа тел, может служить одомерной моделью кристаллической решетки: тела играют роль атомов (ионов), взаимодействие между которыми имитируют упругие силы в пружинах.

§ 37. Затухающие колебания

В рассмотренных примерах мы идеализировали колебательные системы, пренебрегая силами трения. В реальных системах, однако, всегда присутствуют те или иные силы трения или сопротивления (диссипативные силы, приводящие к переходу части механической энергии системы в тепловую), которые обуславливают постепенное затухание колебаний и могут даже изменить характер движения, сделав его существенно аperiодическим. Наиболее просто при теоретическом рассмотрении колебаний учесть силу жидкого трения, которая действует на тело, движущееся в жидкой или газообразной среде. Как отмечалось, при выполнении некоторых условий, в частности - при сравнительно медленных движениях, эта сила направлена против скорости v тела и пропорциональна ей (см. с. 37 и формулу (10.14)). В проекции на ось Ox , вдоль которой происходит движение, формула (10.14) с учетом (2.4) запишется в виде:

$$F_x = -b \frac{dx}{dt}, \quad (37.1)$$

где b - коэффициент жидкого трения.

Влияние силы жидкого трения на характер свободных колебаний проанализируем на рассмотренном ранее примере пружинного маятника. Учет силы вида (37.1) понадобится, если маятник погружен в жидкость, или если между телом и подставкой имеется жидкая смазка, а также если просто необходимо учесть силу сопротивления воздуха.

Уравнение движения маятника (36.1) с учетом силы жидкого трения (37.1) примет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (37.2)$$

Вводя новое обозначение

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad (37.3)$$

и принимая во внимание (36.4), запишем уравнение (37.2) в стандартном виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (37.4)$$

Общим решением дифференциального уравнения (37.4) является функция

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}}_{A(t)} \sin(\omega t + \varphi), \quad (37.5)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (37.6)$$

A и φ - произвольные постоянные. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой функции $x(t)$ и ее производных в уравнение (37.4). (Ввиду громоздкости эти выкладки не приводим. Студенту, знакомому с теорией линейных дифференциальных уравнений и комплексными числами, рекомендуем получить решение (37.5) стандартным методом характеристического многочлена.)

При малых значениях коэффициента β

($\beta \ll \omega_0$) множитель $A(t) = Ae^{-\beta t}$ перед гармонической функцией в (37.5) можно рассматривать как медленно убывающую со временем амплитуду. В этом случае формула (37.5) описывает затухающие колебания. Ее график дан на рис. 113: когда гармонический множитель $\sin(\omega t + \varphi)$ достигает своих максимальных и минимальных значений $+1$ и -1 , точки графика лежат на кривых $A(t)$ и $-A(t)$, изображенных пунктирными линиями.

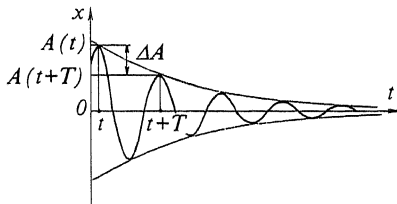


Рис. 113

Быстрота затухания колебаний характеризуется тремя физическими величинами. Величина β , входящая в формулу (37.5) затухающих колебаний, называется коэффициентом затухания. За время τ амплитуда колебаний уменьшится в $A(t)/A(t+\tau) = Ae^{-\beta t} / Ae^{-\beta(t+\tau)} = e^{\beta\tau}$ раз. Следовательно, за время $\tau = 1/\beta$, обратное коэффициенту затухания, амплитуда уменьшится в $e \approx 2,7$ раз. Согласно (37.3), коэффициент затухания прямо пропорционален коэффициенту b жидкого трения, что не нуждается в комментариях, и обратно пропорционален массе m тела, что является проявлением инертных свойств тела.

Другой характеристикой быстроты затухания служит декремент затухания Δ , который показывает, во сколько раз убывает амплитуда колебаний за время $\tau = T$, равное периоду колебаний (рис. 113):

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (37.7)$$

Более употребителен логарифмический декремент затухания, который по определению равен натуральному логарифму декремента затухания:

$$\delta = \ln \Delta = \beta T. \quad (37.8)$$

Для медленно затухающих колебаний логарифмический декремент затухания имеет простой физический смысл. Разлагая $e^{\delta t}$ в правой части формулы (37.7) в ряд Тейлора по степеням δ и пренебрегая степенями выше первой, имеем: $A(t)/A(t+T) = 1 + \delta$, откуда $(A + \Delta A)/A = 1 + \delta$ и

$$\delta = \Delta A / A, \quad (37.9)$$

где ΔA - убыль амплитуды за период колебаний. Таким образом логарифмический декремент затухания равен относительной убыли амплитуды за период колебаний.

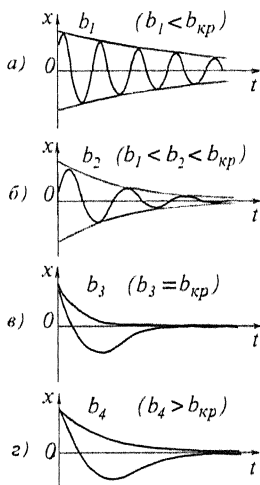


Рис. 114

На рис. 114 показано, как меняется характер затухающих колебаний в зависимости от коэффициента трения b при фиксированных значениях параметров m и k . С ростом коэффициента трения, во-первых, колебания затухают быстрее, так как согласно (37.3) увеличивается коэффициент затухания β , и, во-вторых, согласно (37.6) уменьшается их круговая частота (рис. 114 а, б). Начиная с некоторого критического значения $b = b_{кр}$, при котором $\beta = \omega_0$, значения ω становятся мнимыми и решение в форме затухающих колебаний (37.5) теряет смысл. Как следует из теории дифференциальных уравнений, в этом случае решение имеет существенно аперiodический характер, причем с ростом β кривые идут положе: рис. 114 в соответствует критическому значению $b = b_{кр}$, а рис. 114 г - значению $b > b_{кр}$ и, соответственно, $\beta > \omega_0$; две кривые на одном рисунке соответствуют различным начальным условиям. Это означает, что тело, выведенное из положения равновесия, асимптотически приближается к нему либо вообще не достигая положения равновесия (верхние кривые на рис. 114 в и г), либо проходя его один раз (нижние кривые).

Рассмотрим энергетический аспект свободных колебаний. Квазиупругие силы потенциальны, поскольку они являются силами взаимодействия и не зависят от скоростей, в то время как силы трения непотенциальны. Поэтому закон изменения энергии (15.25) для свободных колебаний имеет вид:

$$\Delta(W_k + W_n) = \delta A_{тр}, \quad (37.10)$$

где кинетическая W_k и потенциальная W_n энергии системы, например, в случае пружинного маятника, определяются формулами (18.5) и (15.15). Работа сил трения $\delta A_{тр} < 0$, так как силы трения направлены против скорости, а следовательно, и против каждого малого перемещения тела, поэтому изменение полной механической энергии также отрицательно: $\Delta(W_k + W_n) < 0$. Механическая энергия системы, сообщенная ей в начальный момент времени, постепенно убывает, переходя в тепловую энергию. В идеальном случае гармонических свободных колебаний, когда пренебрегается силами трения, $\Delta(W_k + W_n) = 0$, т.е.

$$W_k + W_n = const \quad (37.11)$$

- полная механическая энергия системы остается постоянной, лишь перераспределяясь в процессе колебаний между кинетической и потенциальной энергиями. В момент макси-

мального отклонения от положения равновесия $x = A$, а скорость равна нулю, так что, согласно (15.15) и (18.5), $W_{\text{н}} = kA^2/2$ и $W_{\text{к}} = 0$. Таким образом

$$W = kA^2/2 \quad (37.12)$$

- энергия гармонического осциллятора при его свободных колебаниях пропорциональна квадрату амплитуды.

§ 38. Вынужденные колебания

Свободные колебания в колебательных системах происходят при отсутствии внешних воздействий (квазиупругую силу и силу трения рассматриваем как внутренние силы). А теперь поставим вопрос: как поведет себя осциллятор, если на него будет действовать периодическая во времени внешняя сила? Как мы увидим, в этом случае в системе также будут происходить колебания, но существенно отличающиеся по своим свойствам от свободных колебаний. Такие колебания называются вынужденными, а вызывающая их внешняя сила - вынуждающей силой.

Исследование проведем снова на примере пружинного маятника, причем вынуждающую силу для простоты будем считать зависящей от времени по гармоническому закону с круговой частотой Ω :

$$F_x = F_0 \sin \Omega t. \quad (38.1)$$

(Такую силу можно создать, если второй конец пружины не закреплять, а продольно двигать по закону гармонического колебания. Тогда у пружины появится гармонически изменяющееся со временем дополнительное удлинение, которое, будучи умноженным на k , дает дополнительную силу вида (38.1)).

Уравнение движения маятника с учетом всех трех сил - квазиупругой, жидкого трения и вынуждающей - принимает вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t, \quad (38.2)$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t, \quad (38.3)$$

где использованы соотношения (36.4) и (37.3).

Вид уравнения (38.3) подсказывает искать его решение в форме гармонического колебания с частотой вынуждающей силы Ω :

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi), \quad (38.4)$$

где A и φ - некоторые постоянные. (Действительно, тогда каждый член в уравнении (38.3) будет иметь вид гармонического колебания с круговой частотой Ω и есть шанс удовлетворить уравнению, поскольку сумма гармонических колебаний одинаковой частоты является гармоническим колебанием той же частоты.) Подставляя в уравнение (38.3) функцию $x(t)$ из (38.4), ее первую и вторую производные по времени $dx/dt = A\Omega \cos(\Omega t + \varphi)$ и $d^2x/dt^2 = -A\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi)$, имеем после деления на A :

$$-\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) + 2\beta\Omega \cos(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 \sin(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{Am} \sin \Omega t, \quad (38.5)$$

или

$$\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi + \pi) + 2\beta\Omega \sin(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 \sin(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{Am} \sin \Omega t. \quad (38.6)$$

Уравнение (38.6) означает, что сумма трех гармонических колебаний круговой частоты Ω , стоящих в левой части, должна быть равной гармоническому колебанию той же частоты, стоящему в правой части равенства. Векторная диаграмма этих колебаний представлена на рис. 115 а для случая $\varphi > 0$ и на рис. 115 б для случая $\varphi < 0$, где для обозначения векторов-амплитуд использованы конкретные выражения амплитуд колебаний. (Считаем $-\pi < \varphi < \pi$, т.к. добавлением 2π можно любое значение φ свести к значению из этого интервала.) Из рис. 115 а видно, что при $\varphi > 0$ сумма трех векторов-амплитуд ω_0^2 , Ω^2 и $2\beta\Omega$ не может быть сделана равной вектору-амплитуде F_0/Am суммарного колебания, т.е. значение $\varphi > 0$ уравнению (38.6) не удовлетворяет. При $\varphi < 0$ можно удовлетворить уравнению (38.6) соответствующим выбором значений φ и A , как это видно из рис. 115 б; здесь сначала сложены противоположно направленные векторы ω_0^2 и Ω^2 , а затем к полученному вектору $(\omega_0^2 - \Omega^2)$ прибавлен третий вектор $2\beta\Omega$. Из треугольника на рис. 115 б находим: $(F_0/Am)^2 = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2$, откуда

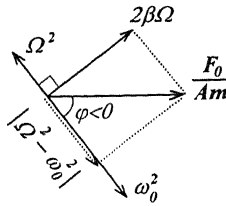
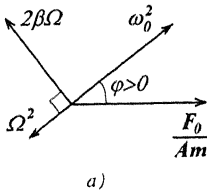


Рис. 115

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (38.7)$$

и $|\operatorname{tg} \varphi| = 2\beta\Omega / |\omega_0^2 - \Omega^2|$, откуда с учетом $\varphi < 0$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (38.8)$$

К тому же результату можно прийти, проведя непосредственные выкладки. Раскрывая в формуле (38.5) синусы и косинус суммы углов и группируя члены с множителями $\sin \Omega t$ и $\cos \Omega t$, получим:

$$\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta\Omega \sin \varphi - \frac{F_0}{Am} \right] \sin \Omega t + [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta\Omega \cos \varphi] \cos \Omega t = 0. \quad (38.9)$$

Выражение $a \sin \Omega t + b \cos \Omega t$ с постоянными коэффициентами a и b равно нулю в любой момент времени только при условии $a = b = 0$, поэтому уравнение (38.9) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta\Omega \sin \varphi &= -\frac{F_0}{Am}, \\ (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta\Omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (38.10)$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая полученные уравнения, имеем:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 = \frac{F_0^2}{A^2 m^2}, \quad (38.11)$$

откуда вытекает формула (38.7), а формула (38.8) следует из второго уравнения в (38.10).

Таким образом, доказано, что решением уравнения движения (38.3) действительно является гармоническое колебание, описываемое формулой (38.4), в которой амплитуда A и начальная фаза φ определяются формулами (38.7) и (38.8) - это колебание называют вынужденным колебанием. В формуле (38.4) отсутствуют произвольные постоянные, и, следовательно, вынужденное колебание представляет собой не общее, а частное решение дифференциального уравнения (38.3). Можно показать, что

общее решение уравнения (38.3) складывается из решения (37.5) для свободных колебаний и решения (38.4) для вынужденных колебаний. Со временем собственные колебания затухают и остаются только вынужденные колебания, которые, следовательно, описывают установившийся режим в системе. (Изучавшим теорию линейных дифференциальных уравнений, рекомендуем осмыслить проблему с позиций этой теории).

Проанализируем зависимость характеристик вынужденного колебания от параметров задачи. Частоту вынужденных колебаний, подчеркнем еще раз, задает вынуждающая сила, а их амплитуда и фаза зависят согласно (38.7) и (38.8) как от характеристик вынуждающей силы (F_0, Ω) , так и от параметров колебательной системы (m, k, b) .

Наиболее важной и интересной является зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы $A(\Omega)$, определяемая формулой (38.7). При $\Omega = 0$ с учетом (36.4) $A(0) = F_0/k$; при $\Omega \rightarrow \infty$ $A(\Omega) \rightarrow 0$; экстремумы функции $A(\Omega)$ определяются из условия $dA/d\Omega = 0$, но достаточно приравнять нулю производную подкоренного выражения в (38.7), так как его экстремумы совпадают с экстремумами

функции $A(\Omega)$ (максимумы с минимумами и наоборот): $d/d\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 4\beta^2 2\Omega = 4\Omega(-\omega_0^2 + \Omega^2 + 2\beta^2) = 0$.

Следовательно, экстремумы функции $A(\Omega)$ достигаются при значениях $\Omega = 0$ и

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (38.12)$$

Последнее значение, очевидно, соответствует максимуму функции $A(\Omega)$, вид которой приведен на рис. 116 а (кривая с $b = b_1$). Когда частота вынуждающей силы Ω приближается к значению $\Omega_{\text{рез}}$, амплитуда вынужденных колебаний возрастает и при $\Omega = \Omega_{\text{рез}}$ достигает своего максимального значения. Это явление называется **резонансом** и, соответственно, кривые зависимости $A(\Omega)$ называются амплитудными резонансными кривыми, а значение $\Omega_{\text{рез}}$ - резонансной частотой. Согласно (38.12) резонансная частота всегда меньше частоты ω_0 собственных незатухающих колебаний, однако обычно коэффициент затухания β достаточно мал ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) и резонанс практически наступает при достижении частотой вынуждающей силы значения частоты собственных колебаний ω_0 :

$$\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0. \quad (38.13)$$

С ростом коэффициента трения b , а вместе с ним и коэффициента затухания β , знаменатель в формуле (38.7) увеличивается, амплитуда вынужденных колебаний уменьшается и резонанс становится менее резко (кривая с $b = b_2$ на рис. 116 а). При очень большом трении ($b > \sqrt{2km}$) $2\beta^2 > \omega_0^2$ и значение $\Omega_{\text{рез}}$ в (38.12) становится мнимым, т.е. резонансная кривая не имеет максимума и, следовательно, резонанс отсутствует (кривая с $b = b_3$ на рис. 116 а).

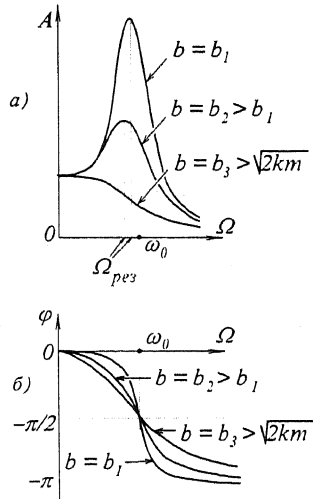


Рис. 116

Зависимость сдвига фаз φ между вынужденным колебанием (38.4) и вынуждающей силой (38.1) от частоты Ω вынуждающей силы определяется формулой (38.8). Как было выяснено ранее, $\varphi < 0$, т.е. вынужденное колебание отстает по фазе от вынуждающей силы. На рис. 116 б приведены три фазовые резонансные кривые $\varphi(\Omega)$ при различных значениях коэффициента трения b . При малых значениях частоты Ω вынужденное колебание и вынуждающая сила почти синфазны. С ростом Ω отставание по фазе растет, при $\Omega = \omega_0$ оно равно $-\pi/2$, а при $\Omega \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow -\pi$, т.е. при больших частотах вынужденное колебание находится в противофазе с вынуждающей силой.

Не останавливаясь на примерах проявления явления резонанса в быту и в технике, хорошо известных из школьных учебников, отметим огромную роль, которую играют резонансные методы исследования в современной науке. Их суть состоит в том, что, подвергая вещество периодическому внешнему воздействию с различными частотами, по оптимальному "отклику" системы, наступающему при резонансе, выявляют характерные собственные частоты молекул, атомов, ядер и т.п.

Каков будет характер вынужденных колебаний, если периодическая вынуждающая сила $F_x(t)$ не синусоидально зависит от времени? Представляя ее в виде разложения в ряд Фурье $F(t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\Omega t + \varphi_n)$$

(здесь $\Omega = 2\pi/T$, где T - период силы; несущественное постоянное слагаемое в разложении опускаем), получим в правой части дифференциального уравнения вынужденных колебаний (38.2) сумму синусоидальных вынуждающих сил вместо одной. Как следует из теории дифференциальных уравнений, решение такого уравнения складывается из решений, обусловленных каждым слагаемым правой части в отдельности. Следовательно, вынужденное колебание есть суперпозиция вынужденных колебаний, происходящих под действием синусоидальных составляющих (Фурье-компонент) вынуждающей силы. Это утверждение справедливо и для непериодической вынуждающей силы с той разницей, что в этом случае в разложении Фурье сумма заменяется интегралом, т.е. в Фурье-разложении силы присутствуют гармоники с любыми частотами, а не только кратными основной частоте.

Анализ вынужденных колебаний ангармонического осциллятора и связанных систем довольно сложен. Ограничимся утверждением, что в случае синусоидальной вынуждающей силы резонанс наступает при совпадении частоты вынуждающей силы с характерными частотами системы: у ангармонического осциллятора - с частотами гармоник, входящих в формулу (36.25) его свободных колебаний, а у связанной системы - с ее собственными частотами.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕХАНИКЕ

§ 39. Общее представление о волновых процессах

В физике часто возникает ситуация, когда изменение некоторой физической величины в какой-либо области пространства (возмущение) не остается локализованным, а начинает распространяться с характерной для данных условий скоростью. Такой процесс распространения возмущений называется бегущей волной. Пока речь идет об общих свойствах волн, безотносительно к их физической природе, будем обозначать возмущение буквой ξ . Поскольку волна распространяется в пространстве и представляет собой динамический процесс, возмущение в общем случае является функцией пространственных координат x, y, z и времени t : $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Эта функция, описывающая поле возмущений, дает полную информацию о волне, определяя значение возмущения в любой точке пространства в любой момент времени.

Приведем конкретные примеры волновых процессов. Если в жидкой или газообразной среде с равновесным значением давления $p_0 = const$ создать в каком-либо месте небольшое переменное избыточное давление $\Delta p(t) = p(t) - p_0$, то оно будет распространяться по всем направлениям, образуя упругую волну. При этом роль возмущения играет скалярная физическая величина $\Delta p(t)$: $\xi(x, y, z, t) \equiv \Delta p(x, y, z, t)$. В твердом теле также можно вызвать упругую волну, смещая в некоторый момент времени малые элементы тела относительно их положений равновесия; в данном случае описывающее волну возмущение является векторной величиной - смещением частиц $\xi(x, y, z, t)$. Здесь различают продольные и поперечные волны. В продольной волне возмущения направлены вдоль направления распространения волнового процесса, в поперечной - перпендикулярно направлению распространения. Если, например, ударить упругий стержень по торцу, возникающая в направлении удара локальная деформация растяжения-сжатия будет распространяться вдоль стержня, образуя продольную волну. При ударе по концу стержня сбоку возникает локальная деформация сдвига, распространение которой представляет собой поперечную волну. Обе ситуации представлены на рис. 117 а и 117 б, где возмущения - смещения ξ частиц стержня - изображены простыми стрелками, а направление их распространения - стрелками с оперением.

Поперечную волну называют линейно, или плоскополяризованной, если возмущения, распространяясь, располагаются в плоскости, проходящей через направление распространения. Например, плоскополяризованная упругая волна побегит вдоль резинового шнура, если его концу сообщить колебательное движение вдоль прямой, перпендикулярной шнуру (вдоль оси Oz на рис. 118, где дан мгновенный профиль волны в некоторый момент времени; колебания в различных точках шнура, изображенные стрелками, лежат в координатной плоскости xOz). Если же траектория конца шнура выходит из плоскости xOz , возмущения не будут лежать в одной плоскости и характер поляризации волны будет более сложным.

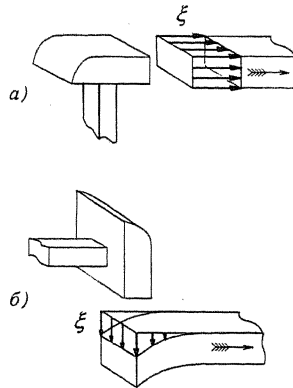


Рис. 117

Подчеркнем, что при описании волн в материальной среде величины x, y, z являются координатами фиксированных точек пространства; они не изменяются при движении

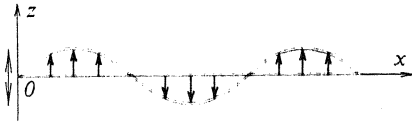


Рис. 118

элементов среды, а определяют их равновесные положения при отсутствии возмущений. Смещения же находящегося в точке x, y, z элемента среды, возникающее при распространении волны, описывается функцией $\xi = \xi(x, y, z, t)$, характеризующей возмущение. Выходя за рамки механики, отметим, что не во всех волновых процессах возмущение связано со смещением частиц какой-либо среды: например, в электромагнитной волне, которая может

распространяться и в вакууме, роль возмущения играют переменные напряженности электрического и магнитного полей $E(x, y, z, t)$ и $H(x, y, z, t)$.

§ 40. Формула и дифференциальное уравнение волны

Формула бегущей волны Начнем с простейшего случая, когда волна распространяется вдоль прямой линии - примером может служить поперечная упругая волна в тонком резиновом шнуре, возбуждаемая смещением его конца. В связанной со шнуром СО K с началом координат в конце шнура и осью Ox , проведенной вдоль шнура, возмущение ξ , т.е. смещение частиц шнура в перпендикулярном к нему направлении, будет функцией одной пространственной координаты x и времени t : $\xi = \xi(x, t)$. Если пренебречь потерями энергии волны, часть которой неизбежно переходит в тепловую энергию, тратится на возбуждение волн в окружающем воздухе и т.д., то возмущение перемещается со скоростью v относительно шнура в направлении оси Ox без изменения своей формы. Рассмотрим наряду с "неподвижной" СО K , связанной со шнуром, другую СО K' , которая движется "вместе с волной" со скоростью v и в начальный момент $t=0$ совпадала с СО K . В СО K' возмущение статично, т.е. не зависит от времени: $\xi' = f(x')$. Как видно из рис. 119, координата x' любой точки шнура в СО K' связана с координатой x той же точки в неподвижной СО K соотношением: $x' = x - vt$.

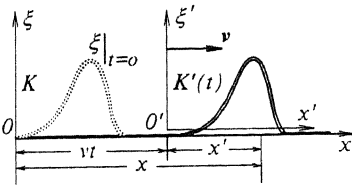


Рис. 119

Подставляя это значение x' в формулу $\xi' = f(x')$, имеем:

$$\xi = f(x - vt). \quad (40.1)$$

Следовательно, признаком бегущей волны является вид аргумента в формуле для возмущения: координата x и время t должны входить в виде комбинации $x - vt$. Вид самой функции ξ может быть произвольным, он зависит от способа возбуждения волны.

К формуле волны (40.1) можно прийти и иным рассуждением. В точке с координатой x в момент времени t возмущение $\xi = \xi(x, t)$ будет таким, каким оно было в начале координат $x=0$ на x/v секунд раньше (x/v - время, за которое возмущение пройдет путь x). Следовательно, $\xi(x, t) = \xi(0, t - x/v)$, или, вынося за скобки множитель $-1/v$, $\xi = f(x - vt)$.

Формула волны, распространяющейся в направлении, противоположном направлению оси Ox , получается из формулы (40.1) изменением знака времени $t \rightarrow -t$:

$$\xi = f(x + vt), \quad (40.2)$$

так как такая волна проходит те же мгновенные состояния, но в обратном порядке во времени.

Дифференциальное волновое уравнение. Установим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция (40.1), описывающая волну, распространяющуюся в направлении оси Ox . Рассматривая эту функцию как сложную функцию двух переменных x и t : $\xi = f(x - vt) = f[u(x, t)]$, где $u(x, t) = x - vt$, найдем ее первые и вторые частные производные по x и t , учитывая, что $\partial u / \partial x = 1$ и $\partial u / \partial t = -v$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{du} \right) = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2};$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = (-v) \frac{df}{du}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{df}{du} \right) = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{du} \right) = -v \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}.$$

Таким образом $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$ и $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}$, откуда $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, или

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (40.3)$$

Этому дифференциальному волновому уравнению удовлетворяет и волна (40.2), распространяющаяся против оси Ox : ее формула отличается от формулы (40.1) знаком скорости, а уравнение (40.3) инвариантно относительно замены $v \rightarrow -v$. В общем случае, когда волны распространяются в пространстве, а не вдоль фиксированной линии, дифференциальное волновое уравнение для возмущения $\xi = f(x, y, z, t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (40.4)$$

Если в ходе решения какой-либо динамической задачи окажется, что переменная физическая величина $\xi(x, y, z, t)$ удовлетворяет дифференциальному волновому уравнению (40.4) (а в случае $\xi = \xi(x, t)$ - уравнению (40.3)), это будет означать, что в данной задаче мы имеем дело с волновым процессом.

Монохроматические волны.

Среди всевозможных волн особую роль играют монохроматические волны ("моно"- одно, "хромос"- цвет), представляющие собой распространение гармонических колебаний. (Термин заимствован из оптики, где монохроматической волне соответствует чистый спектральный цвет.) Их особая значимость связана с теоремой Фурье, согласно которой практически любая бегущая волна может быть представлена как совокупность монохроматических волн (сравните с аналогичной выделенностью гармонических колебаний среди всевозможных периодических процессов).

Формулу монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси Ox , получим, повторяя проведенное ранее рассуждение: если возмущение в точке $x = 0$ про-

исходит по закону гармонического колебания $\xi(0, t) = A \sin \omega t$, то точку с координатой x в момент времени t будет проходить возмущение со значением фазы, которое было в начале координат раньше на время $\tau = x/v$, необходимое для прохождения возмущением расстояния x : $\xi(x, t) = A \sin \omega(t - x/v)$. Помимо характеристик, общих с гармоническим колебанием: амплитуды A , круговой частоты ω , частоты ν и периода T , а также скорости распространения v , у монохроматической волны есть еще две характеристики - длина волны и волновое число.

Длиной волны λ называется путь, который проходит возмущение (состояние с определенной фазой) за время, равное периоду колебаний T :

$$\lambda = vT. \quad (40.5)$$

Волновое число k обратно длине волны и определяется формулой:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (40.6)$$

С учетом этих формул и соотношения $\omega = 2\pi/T$ имеем три эквивалентные формулы для монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси Ox :

$$\xi(x, t) = \begin{cases} A \sin \omega(t - x/v), \\ A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \\ A \sin(\omega t - kx), \end{cases} \quad (40.7)$$

из которых последняя предпочтительнее для использования ввиду ее компактности. Проанализируем зависимость возмущения в монохроматической волне (40.7) от каждой из переменных x и t в отдельности.

В фиксированный момент времени $t = t_1$ возмущение является функцией одной переменной x :

$$\xi(x, t_1) = A \sin(\omega t_1 - kx). \quad (40.8)$$

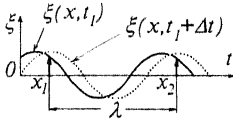


Рис. 120

График этой функции, который естественно назвать "мгновенным профилем волны", представлен на рис. 120 сплошной линией. Со временем величина ωt растет и синусоидальный профиль волны перемещается со скоростью v в направлении оси Ox - на рис. 120 он представлен в момент $t_1 + \Delta t$ пунктирной линией.

В фиксированной точке $x = x_1$ возмущение является функцией одной переменной t и представляет собой гармоническое колебание:

$$\xi(x_1, t) = A \sin(\omega t - kx_1). \quad (40.9)$$

Начальная фаза этого колебания, в отличие от амплитуды и частоты, зависит от положения точки: $\varphi = -kx$, т.е. с ростом x увеличивается отставание по фазе. Колебания в любых двух точках x_1 и x_2 , отстоящих друг от друга на длину волны ($x_2 - x_1 = \lambda$), имеют разность фаз 2π , т.е. синфазны: $\varphi_1 - \varphi_2 = -kx_1 - (-kx_2) = k\lambda = 2\pi$ (синхронность этих колебаний показана на рис. 120: $\xi(x_1, t_1) = \xi(x_2, t_1)$, $\xi(x_1, t_1 + \Delta t) = \xi(x_2, t_1 + \Delta t)$). Тем самым выясняется второй физический смысл длины волны: она равна кратчайшему расстоянию между точками, в которых возмущения синфазны.

Сферическая и плоская волны. До сих пор мы изучали бегущие волны $\xi(x,t)$, описывающие распространение колебаний вдоль одной прямой, например, вдоль тонкого стержня или резинового шнура. Рассмотрим теперь общий случай, когда колебания распространяются в пространстве и, соответственно, возмущение зависит от всех трех пространственных координат: $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Обычно исходное возмущение порождается тем или иным источником волн. Источником звуковой волны, распространяющейся в воздухе, могут, например, служить колеблющиеся ножки камертона, а источником радиоволн - излучающая антенна.

Рассмотрим распространение монохроматической волны от точечного источника, размеры которого существенно меньше длины волны порождаемых им волн. Некоторое возмущение, имеющее определенное значение фазы, распространяется от источника по всем направлениям, занимая в пространстве некоторую поверхность. Эта перемещающаяся со скоростью волны поверхность, во всех точках которой возмущение имеет одно и то же постоянное значение фазы, называется **фронт**ом волны. Положение фронта волны в фиксированный момент времени называется **волновой поверхностью**. Волновая поверхность неподвижна, во всех ее точках возмущения совершают синфазные колебания, воспроизводящие с соответствующим запаздыванием колебания исходного возмущения.

Если изобразить положения фронта волны в последовательные моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , получим семейство волновых поверхностей. Линии, всюду перпендикулярные волновым поверхностям, называются **луч**ами. На рис. 121 волновые поверхности изображены в сечении плоскостью чертежа сплошными, а лучи пунктирными линиями.

В однородной и изотропной среде скорость волны во всех точках и для всех направлений одинакова, следовательно, за некоторый промежуток времени возмущение от источника распространяется по всем направлениям на одинаковые расстояния, образуя сферический фронт. Волна со сферическим фронтом называется **сферической**. Ее волновые поверхности - концентрические сферы, лучи - радиальные прямые (рис. 122), а формула сферической монохроматической волны имеет вид:

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr), \quad (40.10)$$

где $A = const$, r - расстояние от источника. Таким образом в отличие от волны, распространяющейся вдоль линии (как в случае тонкого шнура), амплитуда сферической волны A/r по мере удаления от источника убывает обратно пропорционально расстоянию.

Если исследование ведется в небольшой по сравнению с расстоянием до источника области пространства (на рис. 122 условно изображена окружностью), то сферические волновые поверхности можно приближенно считать параллельными плоскостями, расходящиеся от источника лучи - параллельными прямыми, а также пренебречь малым изменением амплитуды, считая ее постоянной в этой области. Волна, у которой фронт является плоскостью, называется **плоской**. В плоской волне возмущения распространяются одинаково вдоль всех параллельных друг другу лучей, т.е. при выборе оси Ox в направлении лучей зависят только от координаты x и времени (рис. 123). Поэтому она описывается той же формулой, что и волна, распространяющаяся вдоль оси Ox :

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx). \quad (40.11)$$

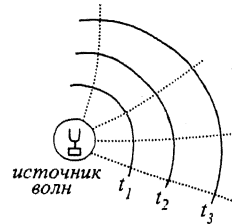


Рис. 121

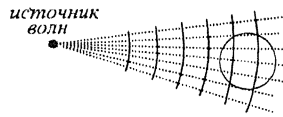


Рис. 122

§ 41. Стоячая волна

При наложении нескольких монохроматических волн одинаковой частоты возникает их интерференция, проявляющаяся в возникновении устойчивой картины распределения амплитуды результирующего колебания, обычно с характерным чередованием максимумов и минимумов. Подробно явление интерференции будет изучено в соответствующей главе раздела "Волновая оптика", а сейчас рассмотрим простейший случай, когда интерferируют две монохроматические волны с одинаковыми частотами и амплитудами, распространяющиеся вдоль оси Ox в противоположных направлениях. Реализовать этот случай можно, заставив, например, волну $\xi_1 = A \sin(\omega t + kx)$, бегущую по шнуру в направлении, противоположном оси Ox , отразиться от жесткой стенки, расположенной в начале координат. При таком отражении фаза волны скачком изменяется на π и формула отраженной волны имеет вид: $\xi_2 = A \sin(\omega t - kx + \pi) = -A \sin(\omega t - kx)$. Можно показать, что при наложении волн возмущения складываются, т.е. результирующее возмущение $\xi(x, t)$ равно сумме возмущений, которые создавала бы каждая волна в отдельности. Для нашей задачи, используя известную формулу

Рис. 123

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, имеем с учетом (40.6):

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = \underbrace{2A \sin(2\pi/\lambda)x}_{A(x)} \cos \omega t. \quad (41.1)$$

Эта формула описывает стоячую волну. Согласно (41.1) во всех точках стоячей волны происходят гармонические колебания с круговой частотой ω и амплитудой, которая, будучи по определению положительным коэффициентом перед осциллирующим множителем $\cos \omega t$, является модулем функции

$$A(x) = 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (41.2)$$

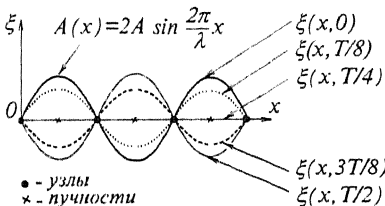


Рис. 124

т.е. периодически зависит от координаты x . График зависимости $A(x)$ дан на рис. 124. В точках с координатами $x = 0, \pm \lambda/2, \pm \lambda, \dots, \pm n\lambda/2, \dots$ $A(x) = 0$ — здесь располагаются узлы стоячей волны. Чередясь с узлами, в точках $x = \pm \lambda/4, \pm 3\lambda/4, \dots, \pm (2n+1)\lambda/4, \dots$ располагаются пучности, в которых амплитуда максимальна: $A(x) = 2A$. Узлы, как и пучности, находятся на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга.

Чтобы наглядно представить процесс колебаний в стоячей волне, заметим, что ее мгновенный профиль получается умножением амплитудной функции $A(x)$ синусоидальной формы на меняющийся со временем множитель $\cos \omega t$. На рис. 124 представлены профили стоячей волны за первую половину периода колебания T в последовательные моменты времени $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2$. В течение второй половины периода, удовлетворяет дифференциальному волновому уравнению (40.3). (Студенту, знакомому с теорией дифференциальных уравнений, этот результат очевиден: стоячая волна является суммой двух бегущих волн, а сумма двух решений линейного однородного дифференциального уравнения, каковым является уравнение (40.3), также есть решение этого уравнения.) Из проведенного анализа следует, что фаза колебаний при переходе через узел меняется на противоположную, в то время как согласно (41.1) начальные фазы колебаний во всех точках казалось бы одинаковы и равны нулю. Предлагаем читателю решить этот кажущийся парадокс.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что стоячая волна (41.1), как и бегущая, удовлетворяет дифференциальному волновому уравнению (40.3). (Студенту, знакомому с теорией дифференциальных уравнений, этот результат очевиден: стоячая волна является суммой двух бегущих волн, а сумма двух решений линейного однородного дифференциального уравнения, каковым является уравнение (40.3), также есть решение этого уравнения.) Из проведенного анализа следует, что фаза колебаний при переходе через узел меняется на противоположную, в то время как согласно (41.1) начальные фазы колебаний во всех точках казалось бы одинаковы и равны нулю. Предлагаем читателю решить этот кажущийся парадокс.

§ 42. Динамика упругих волн

Ознакомившись с описанием и общими свойствами волновых процессов, перейдем к изучению динамики упругих волн. Проблема состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях возникают волновые процессы и как зависят скорость и конкретная форма волны от параметров, характеризующих эти условия. Решение этой задачи в общем виде выходит за рамки общего курса физики, поэтому мы ограничимся рассмотрением нескольких частных задач, связанных с распространением упругих волн.

Упругие волны в тонком стержне. Пусть в тонком упругом стержне, вдоль которого направим ось Ox , в начальный момент времени $t = 0$ имеется неоднородная продольная деформация растяжения-сжатия, при которой смещения точек стержня относительно их равновесных положений описываются возмущением $\xi_x(x, 0)$. Установим уравнение, которому подчиняется распределение возмущений $\xi_x(x, t)$ вдоль стержня в произвольный момент времени. Для этого рассмотрим малый элемент стержня длиной Δx и массой Δm , заключенный между поперечными сечениями стержня с координатами x и $x + \Delta x$; на рис. 125 сверху он изображен в невозмущенном состоянии, а внизу - при наличии возмущения $\xi(x, t)$. Уравнение движения этого элемента, т.е. второй закон Ньютона в проекции на ось Ox , запишется в виде

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = F_x(x + \Delta x, t) - F_x(x, t), \quad (42.1)$$

В этой формуле $\xi_{ц.м.}$ - смещение центра масс элемента и, соответственно, $\partial^2 \xi_{ц.м.} / \partial t^2$ - его

ускорение; $F_x(x + \Delta x, t)$ и $F_x(x, t)$ - проекции на ось Ox сил, действующих на рассматриваемый элемент со стороны частиц, расположенных справа и слева от него. Если ограничиться рассмотрением достаточно малых деформаций ($\partial \xi_x / \partial x \ll 1$), то можно считать силы упругими. Выражая согласно (22.1) силы через напряжение σ_n и площадь S поперечного сечения стержня и используя закон Гука в дифференциальной форме (24.7), имеем:

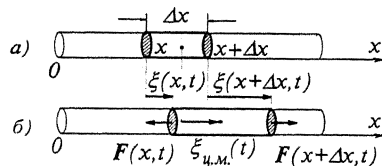


Рис. 125

$F_x(x + \Delta x, t) - F_x(x, t) = S \sigma_n(x + \Delta x, t) - S \sigma_n(x, t) = S E \left[\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}(x, t) \right]$. Массу Δm

элемента выразим через его объем $S \Delta x$ и плотность ρ стержня: $\Delta m = \rho S \Delta x$, так что уравнение движения (42.1) после деления на S примет вид:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = E \left[\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}(x, t) \right]. \quad (42.2)$$

Разделив обе части этого равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ (при этом $\frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} / \partial t^2 \rightarrow \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2}$), получаем: $\rho \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}$, т.е.

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = 0. \quad (42.3)$$

Таким образом, продольные возмущения в тонком упругом стержне подчиняются волновому уравнению (40.3) и, следовательно, могут распространяться в виде волны той или иной формы.

Частным решением уравнения (42.3) является, естественно, и статическая деформация однородного растяжения-сжатия, так как для нее $\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = 0$ вследствие статичности, а $\frac{\partial \xi_x}{\partial x} = const$, т.е. $\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = 0$ - вследствие однородности деформации. Любая же неоднородная деформация нестатична: как следует из (42.3), при $\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \neq 0$ также и $\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} \neq 0$.

Согласно (40.3) коэффициент при второй производной по времени в волновом уравнении есть величина, обратная квадрату скорости. В нашей задаче $\rho/E = 1/v^2$, откуда получаем следующую формулу для скорости распространения продольных упругих волн в тонком стержне:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (42.4)$$

Теперь решим аналогичную задачу для поперечных возмущений. Рассмотрим неоднородное поперечное возмущение $\xi_y(x, t)$ вдоль стержня, которое приводит к сдвиговой деформации малых элементов стержня, один из которых длины Δx и массы Δm представлен на рис. 126: пунктиром изображено невозмущенное положение стержня, стрелками - возмущение $\xi_y(x, t)$. Уравнение движения этого элемента в проекции на ось Oy запишется в виде:

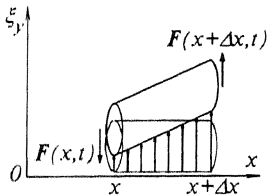


Рис. 126

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = F_y(x + \Delta x, t) - F_y(x, t), \quad (42.5)$$

где $\xi_{ц.м.}$ - смещение центра масс элемента вдоль оси Oy , $F_y(x + \Delta x, t)$ и $F_y(x, t)$ - силы, действующие на рассматриваемый элемент со стороны прилежащих к нему элементов стержня. Считая, как и ранее, деформации малыми ($\frac{\partial \xi_y}{\partial x} \ll 1$),

используем закон Гука для деформации сдвига в дифференциальной форме (24.8):

$$F_y(x+\Delta x, t) - F_y(x, t) = S \sigma_y(x+\Delta x, t) - S \sigma_y(x, t) = S G \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x, t) \right].$$

это выражение для сил и выражение для массы элемента $\rho S \Delta x$ в уравнение движения (42.5), имеем:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = G \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x, t) \right]. \quad (42.6)$$

Поделив обе части этого равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному волновому уравнению (40.3) для поперечного возмущения в стержне:

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = 0. \quad (42.7)$$

Таким образом, динамические поперечные возмущения в упругом стержне также могут распространяться в виде волн, причем скорость распространения поперечной волны вдоль стержня определяется формулой:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (42.8)$$

В общем случае в упругом твердом теле возникают две волны - продольная и поперечная, распространяющиеся с соответствующими скоростями (42.4) и (42.8).

Поперечные волны в натянутой струне. Пусть натянутая струна (или шнур), вдоль которой проведем ось Ox , выведена из положения равновесия и в момент t ее профиль описывается функцией $\xi_y(x, t)$, характеризующей поперечные смещения точек струны вдоль оси Oy (рис. 127). Чтобы получить дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция $\xi_y(x, t)$, запишем уравнение движения центра масс малого элемента струны длиной Δx и массой Δm в проекции на ось Oy :

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = F(x+\Delta x, t) \sin \alpha(x+\Delta x, t) - F(x, t) \sin \alpha(x, t), \quad (42.9)$$

где $\xi_{ц.м.}$ - смещение центра масс элемента вдоль оси Oy , а в правой части стоит сумма проекций $F_y = F \sin \alpha$ силы натяжения F струны на концах рассматриваемого элемента x и $x+\Delta x$; α - угол, который сила натяжения, направленная по касательной к струне, составляет с осью Ox .

Будем считать возмущение $\xi_y(x, t)$ настолько малым, что, во-первых, угол α также достаточно мал и $\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha$ и, во-вторых, можно считать силу натяжения постоянной: $F(x+\Delta x) = F(x) = F = \text{const}$, пренебрегая ее изменением, связанным с

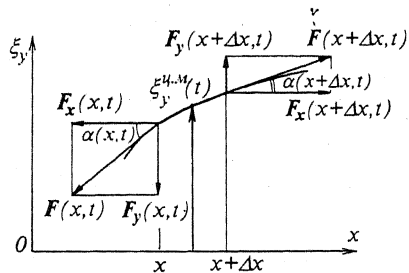


Рис. 127

дополнительным удлинением струны за счет деформации $\xi_y(x, t)$. Учитывая эти приближения и выражая массу Δm элемента через линейную плотность струны $\bar{\rho} = m/l$ (m - масса, l - длина струны): $\Delta m = \bar{\rho} \Delta x$, получим:

$$\bar{\rho} \Delta x \frac{\partial^2 \xi_{\text{и.ч.}}}{\partial t^2} = F [lg \alpha(x + \Delta x, t) - lg \alpha(x, t)]. \quad (42.10)$$

По определению частной производной функции $\xi_y(x, t)$ по аргументу x $lg \alpha = \partial \xi_y / \partial x$, и уравнение движения (42.10) принимает вид:

$$\bar{\rho} \Delta x \frac{\partial^2 \xi_{\text{и.ч.}}}{\partial t^2} = F \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial \xi_y}{\partial x}(x, t) \right]. \quad (42.11)$$

Разделив обе части этого уравнения на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим: $\bar{\rho} \partial^2 \xi_y / \partial t^2 = F \partial^2 \xi_y / \partial x^2$, т.е.

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} - \frac{\bar{\rho}}{F} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = 0. \quad (42.12)$$

Таким образом, малые поперечные возмущения в натянутой струне подчиняются волновому уравнению (40.3) и, следовательно, могут распространяться в виде волн той или иной формы. Для скорости волны из условия $\bar{\rho}/F = 1/v^2$ получаем формулу:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\bar{\rho}}}. \quad (42.13)$$

Отметим, что во всех рассмотренных случаях (см. формулы (42.4), (42.8) и (42.13)) плотность вещества стоит в знаменателе подкоренного выражения: с увеличением плотности скорость волны уменьшается, так как сильнее проявляются инертные свойства вещества.

Стоячие волны как собственные колебания струны. При рассмотрении задач с упругими волнами мы удостоверились, что возмущение удовлетворяет дифференциальному волновому уравнению, попутно получая формулу для скорости волны. Однако это не является полным решением проблемы, так как остается открытым вопрос о форме возмущения $\xi(x, t)$. Дифференциальное волновое уравнение (40.3) имеет бесчисленное множество решений и необходимо уметь выделять из них то, которое реализуется при данных условиях задачи. Аналогичная ситуация возникала при постановке прямой задачи динамики материальной точки, где дифференциальное уравнение движения также имеет множество решений. Напомним, что там для выделения истинной траектории требовалось дополнительно задавать начальные условия. Волновое уравнение сложнее упомянутых уравнений движения, поскольку оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, однако суть остается той же: для нахождения конкретной формы волны необходимо кроме дифференциального волнового уравнения задавать некоторые дополнительные условия.

Проиллюстрируем эту мысль на рассмотренном примере с поперечными волнами в натянутой струне. Пусть струна имеет длину l и жестко закреплена с обоих концов в точках $x = 0$ и $x = l$. Это означает, что на концах струны возмущение равно нулю:

$$\xi(0, t) = 0, \quad \xi(l, t) = 0. \quad (42.14)$$

Дополнительные условия такого рода называются **г р а н и ч н ы м и у с л о в и я м и**. Ясно, что бегущая волна этим условиям не удовлетворяет, но им удовлетворяют стоячие волны, у которых на концы струны приходятся узлы. Расстояние между соседними узлами стоячей волны равно половине длины волны (см. с. 134), следовательно, на всей длине струны должно уложиться целое число n полуwave:

$$l = n \frac{\lambda}{2}. \quad (42.15)$$

Стоячие волны, соответствующие значениям $n = 1, 2, 3$, представлены на рис. 128 графиками амплитудной функции $A_n(x)$ (пунктиром даны функции $-A_n(x)$). Их длины волн согласно (42.15)

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (42.16)$$

а частоты, с учетом (40.5) и (42.16), $\omega_n = 2\pi/T_n = 2\pi v/\lambda_n = \pi v n/l$:

$$\omega_n = \frac{\pi v}{l} n, \quad (42.17)$$

где скорость v определяется формулой (42.13). Таким образом, с ростом n длина волны уменьшается, а частота колебаний растет. Общую формулу этих стоячих волн получим, подставляя значения λ_n и ω_n из (42.16) и (42.17) в формулу (41.1) (множитель 2 опускаем):

$$\xi_n(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi}{l} n x\right) \cos\left(\frac{\pi v}{l} n t\right). \quad (42.18)$$

Описанные стоячие волны называются собственными колебаниями струны. Произвольное возмущение струны, удовлетворяющее граничным условиям (42.14), может быть представлено как суперпозиция стоячих волн вида (42.18):

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{l} n x\right) \cos\left(\frac{\pi v}{l} n t\right) \quad (42.19)$$

с соответствующими амплитудами A_n , зависящими от условий возбуждения.

Такого рода собственные колебания (гармоники, моды) присущи любому упругому телу, хотя их форма и спектр частот могут быть весьма сложными. По смыслу они аналогичны нормальным колебаниям в связанных системах (см. с. 120-122): в обоих случаях произвольное колебание системы является их суперпозицией. В связанной системе масса системы сосредоточена в телах (пружины невесомы), а упругость - в пружинах (тела абсолютно твердые); поэтому ее называют системой с сосредоточенными параметрами. Такая система состоит из конечного числа тел, она имеет конечное число колебательных степеней свободы и, соответственно, конечное число нормальных колебаний. В сплошном массивном упругом теле (стержень, струна) упругие и инертные свойства, характеризующие, соответственно, модулями упругости и плотностью вещества, распределены по телу непрерывно. Его можно рассматривать как совокупность бесконечного числа бесконечно малых элементов; соответственно, оно имеет бесконечное число колебательных степеней свободы и как следствие - бесконечное число собственных колебаний, как показано на примере закрепленной струны.

§ 43. Некоторые дополнительные сведения об упругих волнах

Поскольку свойства жидкостей и газов рассматриваются в последующих разделах курса, мы не будем здесь подробно анализировать волновые процессы в этих средах, а приведем лишь основные сведения о них. Подчеркнем еще раз, что в жидком и газообразном веществе не могут возникнуть поперечные волны, так как в этих средах осуществима лишь деформация всестороннего разрежения-сжатия, а для возникновения поперечных волн необходимо наличие деформации сдвига.

Приведем без вывода формулы для скорости упругих волн в газообразной и жидкой среде. В газах

$$v_{\text{газ}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \quad (43.1)$$

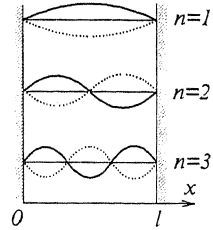


Рис. 128

Здесь $\gamma = c_p/c_v \approx 1,3+1,6$, где c_p и c_v - молярные теплоемкости газа соответственно, при постоянном давлении и постоянном объеме, ρ - плотность газа, p - давление, T - температура, μ - молекулярный вес газа. В жидкостях

$$v_{\text{жидк}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}}, \quad (43.2)$$

где $\beta = (\partial V/\partial p)_T/V$ - изотермический коэффициент сжимаемости (он численно равен относительному уменьшению $\Delta V/V$ объема при увеличении давления на 1 Па при постоянной температуре). Для полноты картины напомним формулы для скорости распространения упругих продольных (42.4) и поперечных (42.8) волн в твердой среде:

$$v_{\text{тв}}^{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\text{тв}}^{\text{поп}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (43.3)$$

где E и G - соответственно, модуль Юнга и модуль сдвига. Оценки, сделанные по формулам (43.1) - (43.3), дают, в согласии с экспериментом, следующие приближенные диапазоны скоростей упругих волн в различных средах при нормальных условиях. В газах $100 \text{ м/с} < v_{\text{газ}} < 1300 \text{ м/с}$ (наибольшая скорость - в водороде, у которого $\mu = 2$). В жидкостях $900 \text{ м/с} < v_{\text{жидк}} < 1600 \text{ м/с}$. В твердых телах $1000 \text{ м/с} < v_{\text{тв}} < 6000 \text{ м/с}$ (у свинца для поперечной волны $v=700 \text{ м/с}$, у бериллия для продольной волны $v=12000 \text{ м/с}$). Заметим, что в твердых телах скорость продольных волн в $1,5 \div 2$ раза больше, чем поперечных. Таким образом, как правило $v_{\text{газ}} < v_{\text{жидк}} < v_{\text{тв}}$.

Упругие волны, частоты которых находятся приблизительно в диапазоне частот $20 \text{ Гц} < \nu < 20000 \text{ Гц}$, воспринимаются человеческим ухом и называются звуковыми. Монохроматическая волна соответствует чистому тону, а ее частота определяет высоту звука: чем больше частота, тем "выше" звук. При звучании свободной струны, когда в окружающей среде распространяются волны с частотами, представленными в колебании струны (см. (42.17) и (42.19)), собственное колебание с $n=1$ дает основной тон, а колебания с $n=2,3,4,\dots$ называются обертонами. Соотношение амплитуд A_n , с которыми представлены основной тон и обертоны в звучащей волне, определяет "окраску" звука - его тембр. Интенсивность волны, с которой непосредственно связана громкость звука, в случае монохроматической волны пропорциональна квадрату амплитуды и частоты (см. далее формулу (45.5)).

Упругие волны со значениями частоты, примыкающими к звуковому диапазону, называются соответственно инфразвуком (при $\nu < 20 \text{ Гц}$) и ультразвуком (при $\nu > 20000 \text{ Гц}$). Инфразвуковые частоты характерны для различного рода возмущений, распространяющихся в земной коре. Эти волны слабо рассеиваются на малых неоднородностях и потому способны распространяться на большие расстояния. Напротив, ультразвуковые волны с малой длиной волны ($\lambda < 2 \text{ см}$) не огибают даже сравнительно небольшие предметы, частично отражаясь от их поверхностей. Их применяют с целью обнаружения дефектов в толще различных материалов (дефектоскопия), в гидролокации, а также в медицине для зондирования внутренних органов (УЗИ - ультразвуковое исследование). Для получения ультразвуковых волн используют специальные пьезоэлектрические излучатели (о пьезоэффекте см. в разделе "Электричество"), позволяющие сформировать достаточно узконаправленный пучок ультразвуковых лучей.

Существует целый ряд явлений, которые характерны для любых волновых процессов, независимо от их физической природы. Среди них: дифракция, т.е.

говоря упрощенно - огибание волнами предметов; интерференция, возникающая при наложении нескольких волн; преломление и отражение волн на границе раздела сред с различными значениями соответствующих физических характеристик, и т.д. Эти явления подробно рассматриваются применительно к световым волнам в разделе "Волновая оптика", и здесь, во избежание повторения, мы их не касаемся.

Подчеркнем, что все сказанное о волнах справедливо для распространения сравнительно малых возмущений (условие малости деформаций использовалось при выводе дифференциального волнового уравнения в рассмотренных задачах об упругих волнах в стержне и струне). Сильные возмущения подчиняются более сложным уравнениям, чем дифференциальное волновое уравнение (40.4), и их поведение весьма специфично. Упомянем ударные волны, солитоны в жидкостях и газах и т.п. Некоторые явления, связанные с распространением сильных возмущений, например смерчи, до сих пор не объяснены.

§ 44. Эффект Доплера

Если источник и приемник звука движутся друг относительно друга, то частота ν колебаний, регистрируемых приемником, отличается от частоты ν_0 источника звука. Этот эффект называют эффектом Доплера.

Пусть источник звука совершает колебания с периодом T_0 , которые распространяются в упругой среде со скоростью звука ν . Проследим за двумя возмущениями, посылаемыми источником в моменты времени t_1 и $t_1 + T_0$, т.е. через период - назовем их сигналами. Если источник и приемник неподвижны относительно среды, то оба сигнала, находясь в пути одинаковое время, поступают в приемник с тем же временным интервалом T_0 и, следовательно, период регистрируемых приемником колебаний равен периоду колебаний источника. Если источник движется относительно среды с дозвуковой скоростью $\nu_{\text{ист}}$, ситуация меняется. До приемника A , в сторону которого движется источник (рис. 129), второй сигнал пройдет путь S_2 меньший, чем первый S_1 , на то расстояние $S = \nu_{\text{ист}} T_0$, которое проходит источник за период T_0 . Соответственно, интервал T между сигналами, воспринятыми приемником, окажется меньше периода T_0 на величину $\Delta T = S/\nu = \nu_{\text{ист}} T_0/\nu$. Следовательно, период принимаемых колебаний $T = T_0 - \Delta T = T_0(1 - \nu_{\text{ист}}/\nu)$. До приемника B , от которого источник удаляется, второй сигнал проходит путь больший, чем первый, на ту же величину S и, соответственно, период воспринимаемых им колебаний больше периода колебаний источника:

$T = T_0 + \Delta T = T_0(1 + \nu_{\text{ист}}/\nu)$. Эту формулу можно объединить с предыдущей, если условиться считать скорость источника, удаляющегося от приемника, отрицательной. Переходя от периодов к частотам $\nu = 1/T$ и $\nu_0 = 1/T_0$, имеем:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\nu_{\text{ист}}}{\nu}}, \quad (44.1)$$

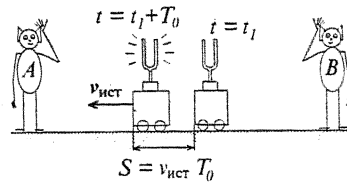


Рис. 129

где ν_0 - частота колебаний источника, ν - частота колебаний, воспринимаемая приемником. Согласно формуле (44.1) наблюдаемая частота колебаний ν больше частоты источника ν_0 , если источник приближается к приемнику ($\nu_{\text{ист}} > 0$), и меньше ν_0 , когда источник удаляется от приемника ($\nu_{\text{ист}} < 0$). Для человека, мимо которого пронесется автомобиль с включенной сиреной, высота воспринимаемого звука сирены практически скачком понижается, когда автомобиль поравняется с ним: в этот момент разность в знаменателе формулы (44.1) сменится на сумму.

Пусть теперь приемник A также движется относительно среды с дозвуковой скоростью $v_{пр}$ навстречу источнику (рис. 130). Относительно СО K' , связанной с приемником, скорость источника $v'_{ист}$ и скорость звука v' определяются законом сложения скоростей: $v'_{ист} = v_{ист} + v_{пр}$, $v' = v + v_{пр}$. Подставляя эти значения скоростей вместо $v_{ист}$ и v в формулу (44.1), получим:

$$v' = v_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}}. \quad (44.2)$$

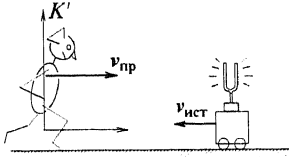


Рис. 130

Уточним, что в этой формуле $v_{ист} > 0$, если источник движется по направлению к приемнику (в противном случае $v_{ист} < 0$) и точно так же $v_{пр} > 0$, если приемник движется в сторону источника (в противном случае $v_{пр} < 0$). Легко видеть, что когда источник и приемник сближаются, числитель дроби в (44.2) больше знаменателя, т.е. наблюдаемая частота ν больше частоты источника ν_0 , а при взаимном удалении источника и приемника наблюдаемая частота меньше ν_0 .

Формула (44.2) получена для частного случая, когда источник и приемник движутся по одной прямой в СО, связанной с упругой средой. В общем случае в формуле (44.2) под $v_{ист}$ и $v_{пр}$ следует понимать проекции скоростей источника и приемника на линию, соединяющую их. Все сказанное, разумеется, справедливо для упругих волн во всем диапазоне частот, в частности - для ультразвука. В современной медицине по доплеровскому изменению частоты ультразвуковой волны, отраженной от потока крови в кровеносных сосудах, определяют скорость кровотока.

Эффект Доплера имеет место и для электромагнитных, в частности световых, волн, однако там он описывается релятивистской формулой, отличной от (44.2). С ним связано уширение спектральных линий в спектрах газов: тепловое движение излучающих свет атомов, наряду с другими факторами, приводит к тому, что вместо бесконечно тонкой линии, соответствующей частоте излучения ν_0 , в спектре наблюдаются полосы конечной ширины. По наблюдению оптического эффекта Доплера было обнаружено разбегание галактик, что послужило экспериментальным подтверждением модели расширяющейся Вселенной. Частоты световых волн, испускаемых удаляющимися от нас галактиками, воспринимаются земным телескопом уменьшенными и соответствующие им спектральные линии оказываются смещенными в "красную" область спектра (красное смещение).

§ 45. Энергия упругих волн

Упругая среда, в которой происходит волновой процесс, обладает как потенциальной энергией (как и всякая среда при наличии в ней упругих деформаций), так и кинетической энергией, поскольку частицы среды находятся в движении. Для краткости будем говорить об этой энергии среды, порожденной волновым процессом, как об энергии волны. Получим формулу для плотности энергии продольной упругой плоской волны, распространяющейся в направлении оси Ox . Потенциальная энергия элемента

среды объемом ΔV согласно (25.3) и (25.4) равна: $\Delta W_{п} = (E\varepsilon^2/2) \Delta V$, а его кинетическая энергия

$\Delta W_{к} = (\rho \Delta V)v^2/2$. Здесь ρ - плотность среды; относительное удлинение $\varepsilon = \partial \xi_x / \partial x$ (см. вывод

формулы (24.7) закона Гука в дифференциальной форме), а скорость частиц среды $v = \partial \xi_x / \partial t$. Таким образом, плотность энергии рассматриваемой волны

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta W_{п} + \Delta W_{к}}{\Delta V} = \frac{1}{2} \left[E \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (45.1)$$

(аналогичная формула для поперечной волны получится заменой в (45.1) ξ_x на ξ_y и модуля Юнга на модуль сдвига, так как в этом случае формулы (25.4) и (24.7) заменяются формулами (25.5) и (24.8)).

Если волна монохроматическая, то $\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$, $\partial \xi / \partial x = -kA \cos(\omega t - kx)$, $\partial \xi / \partial t = A \omega \cos(\omega t - kx)$ и, соответственно, $w = A^2 / 2 (Ek^2 + \rho \omega^2) \cos^2(\omega t - kx)$. С учетом (40.5), (40.6) и (42.4) имеем $Ek^2 = \rho \omega^2$, так что

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (45.2)$$

Плотность энергии в фиксированной точке волны изменяется со временем от нуля до максимального значения $\rho A^2 \omega^2$ по закону квадрата косинуса, т.е. с удвоенной (по сравнению с возмущением) частотой. Она пропорциональна квадрату амплитуды волны, что свойственно волнам любой физической природы, и квадрату частоты. Последнее отличает упругие волны от электромагнитных, плотность энергии которых от частоты не зависит.

Для звуковых и тем более ультразвуковых волн практический интерес обычно представляет среднее по времени значение \bar{w} плотности энергии. Среднее значение квадрата косинуса за период равно $1/2$ и, следовательно,

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (45.3)$$

Распространяясь в пространстве, бегущая волна переносит с собой энергию. За малое время Δt каждое мгновенное возмущение распространится на расстояние $v \Delta t$ и, следовательно, через малую площадку ΔS , перпендикулярную направлению распространения волны, пройдут те и только те мгновенные значения возмущений (и их производных), которые находятся в объеме $\Delta V = v \Delta t \Delta S$, перенеся с собой заключенную в этом объеме энергию $\Delta W = w \Delta V = wv \Delta t \Delta S$. Разделив это выражение на $\Delta t \Delta S$, найдем энергию, переносимую волной за единицу времени через единичную перпендикулярную площадку:

$$P = wv, \quad (45.4)$$

которая называется плотностью потока энергии. Как и плотность энергии, эта величина осциллирует со временем. Среднее по времени значение плотности потока энергии называется интенсивностью волны. С учетом (45.3) она определяется формулой:

$$I = \bar{P} = \bar{w}v = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2. \quad (45.5)$$

Во всех предыдущих формулах, связанных с монохроматической волной, значение амплитуды A постоянно только в идеальном случае, когда энергия волны не переходит в другие виды энергии, например во внутреннюю энергию вещества. Учет этих потерь приводит как правило к экспоненциальному убыванию амплитуды волны с пройденным путем x : $A = A_0 e^{-\frac{1}{2} kx}$, где k - коэффициент поглощения.