① Неопределённый интеграл. Основные методы интегрирования.

Первообразной для ф-ции $f(x)$ на промежутке $\langle a;b\rangle$ называется ф-ция $F(x)$ такая, что на всём $\langle a;b\rangle$ выполняется соотношение:

$$F'(x) = f(x)$$

Существование $F(x)$ гарантировано для непрерывных ф-ций $f(x)$.
Единственности нет, т.к.: $(F(x)+C)' = f(x)$, т.е. $F(x)$; $[F(x)+C]$ – это всё первообр-ые.

Если $F_1(x)$ – другая первообр-я для $f(x)$, то на $\langle a;b\rangle$ $\exists$ такая пост. C, что на $\langle a;b\rangle$ справедливо: $F_1(x) = F(x) + C$

Рассм: $g(x) = F_1(x) - F(x)$: $g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

По следствию из Т. Лагранжа $g(x) = C \Rightarrow$

Неопределённый интеграл – произвольная первообразная для $f(x)$: $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Простейшие св-ва интегралов:

- $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot\int f(x)dx$;
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. – св-во линейности

если $F(x)$, $G(x)$ – первообразные ф-ций $f(x)$ и $g(x)$, то
$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$.

Св-ва интегралов (методы интегрирования).

Т.:
1. $f(u)$ непр. на $\langle a;b\rangle$ ← метод подстановки (замены переменной) ①
2. $\varphi(x) \in C^1(\langle a;b\rangle)$
3. $\forall x \in \langle a;b\rangle$ $\varphi(x) \in \langle a;b\rangle$

$\Downarrow$

если $\int f(u)du = F(u) + C$, то $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C$

$\int f(u(x))du(x) = F[u(x)] + C$

Д.: Оба интеграла существуют, т.к. подинтегральн. ф-ции непр.
По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{dx}F[\varphi(x)] = F_u'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

(✻): $\int e^{x^3}\cdot x^2 dx$

Т.: Пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x) \in C^1(\langle a;b\rangle)$, тогда: ← ② метод интегрирования по частям

$$\int v(x)\cdot u'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Д.: Все ф-ции → непрерывны, сл-но имеют первообразную, отсюда:

$$\int (u(x)\cdot v(x))' = \int v(x)\cdot u'(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Одной из первообразных для $(u(x)\cdot v(x))'$ явл. $u(x)\cdot v(x)$, тогда отсюда всё и следует...

Более наглядная запись:

$$\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x)$$

(✻): $\int e^x x\,dx$
$\int x^2\cos x\,dx$
и т.д.

② Таблица интегралов.

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

10. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a>0)$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A\neq 0)$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

---

(8): $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = a\cdot u \\ dx = a\,du\end{matrix}\right\} = \int\frac{a\,du}{\sqrt{a^2-a^2u^2}} = \int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(9): $$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \left\{\begin{matrix} x = au \\ dx = a\,du\end{matrix}\right\} = \int\frac{a\,du}{a^2+a^2u^2} = \int\frac{du}{a(1+u^2)} = \frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\, u + C = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$$

(10): $$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \int\frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\,dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(a+x)}{a+x} - \int\frac{d(a-x)}{a-x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|a+x| - \ln|a-x|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

(11): $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \left\{\begin{matrix} x+\sqrt{x^2+A} = u \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{du}{u}\end{matrix}\right\} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

(12): $$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

(13): $$\int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

③ Определённый интеграл. Простейшие св-ва. Необходимые условия интегрируемости.

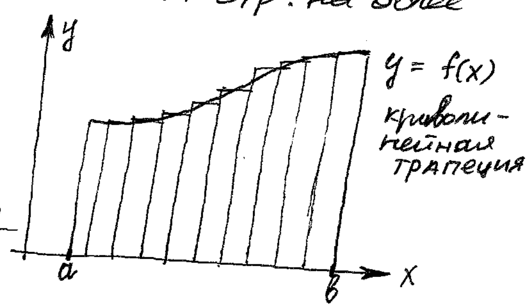
Пусть на отр $[a;b]$ задана ф-ция $f(x)$. Разобьём этот отр. на более мелкие конечным числом точек x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Множество точек x_i – разбиение отрезка (T)

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\lambda(T) = \max\limits_i \Delta x_i$

Δx_i – длина отр. $[x_{i-1}; x_i]$; $\lambda(T)$ – диаметр разбиения $\to 0$



На каждом отр. выбираем произвольную (·) ξ_i:

$\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i$ – сумма по всем отрезкам.

Интегральная сумма для ф-ции $f(x)$

Определение: Число J называется пределом интегральных сумм, когда диаметр разбиения $\to 0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T : \lambda(T) < \delta \text{ при любых } \{\xi_i\}$$

выполняется нер-во $\left|\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$ или $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i = J$

Определённый интеграл от ф-ции $f(x)$ по отр $[a;b]$ – этот предел →, кратко:

$$\int_a^b f(x)dx.$$ ← это число, а не функция!!!

Если интеграл существует, то ф-ция называется интегрируемой на отр. $[a;b]$

Свойства:

T.: Если $f(x)$, $g(x)$ – инт-мы на $[a;b]$, то:

1. $\int_a^b C f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g x dx$

D.: T – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$, ξ_i – произвольн. промежут. точки:

$$\sum_i [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \text{ ; при } \lambda(T)\to 0:$$

интегральн. сумма

$\to \int_a^b f(x)dx$, $\to \int_a^b g(x)dx$;

по T. о пределе суммы: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_i [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

T.: Пусть ф-ция $f(x)$ отлична от нуля на $[a;b]$ лишь в конечном числе точек. Тогда она интегрируема на $[a;b]$ и интеграл $= 0$.

D.: $f(x)\neq 0$ лишь в числе точек $= k$ (k – число (·), отличных от 0).
Тогда она ограничена на $[a;b]$:
при $k>0$: $\forall x\in[a;b]\ |f(x)|\le C$

Оценка по модулю сверху интегральной суммы: $0 \le \left|\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le C\cdot 2k\,\lambda(T)$

($2k$, т.к. каждая (·) ξ_i может дважды участвовать в инт. сумме)

Пусть $\lambda(T)\to 0$, тогда по T. „о зажатой переменной":

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

Т. (следствие): Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, а $g(x)$ определена на $[a;b]$ и отлична от $f(x)$ лишь в конечном числе точек. Тогда $g(x)$ тоже интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Д.:

$$g(x) = f(x) + [g(x) - f(x)]$$

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = 0$ по Т. (предыдущ.) (т.к. эта ф-ция $\neq 0$ лишь в кон. числе $(\cdot)$...).

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Т. (необходимый признак интегрируемости):

Д. Если ф-ция интегрируема на отрезке, то она огр. на этом отр.: $\exists C>0: \forall x\in[a;b]\ |f(x)|\leq C$

$\varepsilon=1$ $\quad \exists \delta: \forall T: \lambda(T)<\delta\ \forall f(\xi_i)$

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < 1$$

Предположим, что $f(x)$ — инт., но не огр.

$$J-1 < \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i < J+1 \quad (1)$$

T — разбиение, фиксируем его. Т.к. $f(x)$ не огр. на $[a;b]$, то она не огр. хотя бы на маленьком отр. $[x_{k-1};x_k]$, входящем в T. Фиксируем все $(\cdot)$ ξ_i на отрезках $[x_{i-1};x_i]$. Теперь все слагаемые суммы (1) фиксированны, кроме $f(\xi_k)\Delta x_k$. Но на $[x_{k-1};x_k]$ ф-ция не огр., значит $f(\xi_k)\Delta x_k$ может быть оч. большой за счёт ξ_k. Вместе с этим слагаемым будет большой и вся сумма, что противоречит (1) $\Rightarrow$ теорема справедлива.

Если ф-ция неогр., то она неинт-ма; <u>но:</u> если она огранич., не обязат., что она инт-ма. (Пример: ф-ция Дирихле).

Т. (об инт-ти неравенств):

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$
2. $f(x)\leq g(x)$ на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(\xi_i)\leq g(\xi_i)$$

$$f(\xi_i)\Delta x_i \leq g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i$$

Д.:

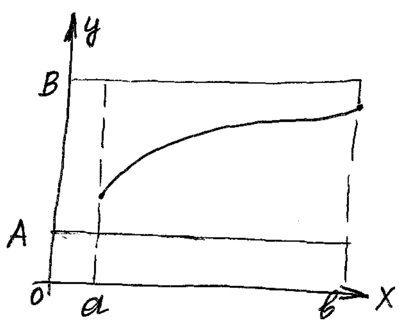
$$0\leq g(x)$$

$$0\leq \int_a^b g(x)dx$$

$$A\leq f(x)\leq B$$

$$\int_a^b A\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b B\,dx$$

$$A(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a)$$



Пусть $f(x)\equiv C$ на $[a;b]$, тогда

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i C\Delta x_i = C\sum_i \Delta x_i = C(b-a)$$

④ Формулировка критерия Лебега, следствия из него. (опр-е: мн-во меры 0, св-ва...)

Произвольн. числовая посл-ть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Её частичная сумма: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (Сумма беск. убыв. геом. прогрессии S)

Сумма всех членов этой посл-ти — предел S_n при $n \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Этот lim сущ-ет не всегда ($1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \to S_n = n \Rightarrow$ нет суммы всех членов)

Определение: Мн-во A называется счётным, если можно установить взаимно однозначное соответствие м/у его эл-ами и мн-вом натур. чисел.

Т.е. счётные мн-ва — те, которые можно перенумеровать.

Бесконечные мн-ва — несчётные.

Мн-во натур. чисел — счётное (кажд. эл-ту надо сопоставить этот же эл-нт)

Мн-во рац. чисел ($\frac{m}{n}$, $n \neq 0$) — счётное.

Мн-во чисел, образующих $[a; b]$ — несчётное (в нём слишком много эл-тов)

Рассм-им нек. мн-во A и произвольн. с-му интервалов $\{J = (\alpha; \beta)\}$ (конечн. и бесконечн.)

Определение: С-ма интервалов $\{J\}$ образует покрытие мн-ва A, если кажд. эл-нт из A $\in$ хотя бы одному интервалу из этой с-мы.

Определение(1): Мн-во A называется мн-вом меры нуль, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более, чем счётная с-ма интервалов $\{J_n\}$, покрывающая это мн-во, сумма длин которых меньше ε. $\mu(A) = 0$.

„не более, чем" $\to$ с-ма $\{J_n\}$ либо конечна, либо счётна.)

Мн-ва меры нуль бывают счётные и несчётные. $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{J_n\} \ \sum_n |J_n| < \varepsilon}$

Св-ва множеств меры нуль:

1) Т. Всякое подмножество мн-ва меры 0 само явл. мн-ом меры 0.

$\mu(A) = 0$

$A_1 \subset A$ $\mu(A_1) = 0$ "$\subset$"- покрывает

2) Т. Объединение 2х мн-тв меры 0 явл. также мн-ом меры 0.

$C = A \cup B$

$\mu(A) = \mu(B) = 0$

$\Downarrow$

$\mu(C) = 0$

Д: A; B — мн-ва меры 0

$\forall \varepsilon > 0$; $\frac{\varepsilon}{2}$; В силу опр.(1) для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ сущ-ет не более, чем счётная с-ма инт-ов $\{J_n\}$, покрывающая A и такая, что:

$$\sum_n |J_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |J_n| \text{ — длина интервала } J_n$$

для B: $\sum_n |J_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$

С-ма интервалов $J_1, J_1', J_2, J_2', \ldots, J_n, J_n', \ldots$ не более, чем счётна, покрывает объединение $A \cup B$, а сумма длин с-мы меньше ε:

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |J_n'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Т.е. для $A \cup B$ выполнены все условия опр.(1) $\Rightarrow$ мн-во есть мн-во меры 0.

•) Объединение конечного числа мн-тв меры 0 есть мн-во меры 0.

•) Пустое мн-во имеет меру 0.

Т.2) обобщается на случай объединения счётного числа мн-тв A_i.

T.(критерий Лебега интегрируемости ф-ций):

Для того, чтобы ф-ция $f(x)$ была интегрируемой на отр. $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была огр. на этом отр. и мн-во её точек разрыва имело меру 0.

Следствия:

1) T.: Если ф-ция непр. на отр., то она инт-ма на нём.

Из непр-ти $\Rightarrow$ огр-ть на отр.; мн-во её точек разрыва имеет меру 0 $\Rightarrow$ инт-ть (по крит. Лебега).

2) T.: Если ф-ция огр. на отр. и имеет на нём конечное число точек разрыва, то она инт-ма на этом отр.

3) T.: Если $f(x)$ и $g(x)$ - инт-мы на отр. $[a;b]$, то их пр-ие $f(x)\cdot g(x)$ инт-мо на нём.

D.: из инт-ти $f(x)$ и $g(x)$ (по кр. Лебега) $\Rightarrow$ их огр-ть на $[a;b]$ и то, что мн-во точек разрыва каждой из них имеет меру нуль:

$|f(x)| \leq C_1$, $|g(x)| \leq C_2$ $\forall x \in [a;b]$;

$\mu(A)=0$, $\mu(B)=0$, A и B - мн-во точек разрыва $f(x)$ и $g(x)$.

$\Downarrow$ $|f(x)\cdot g(x)| \leq \underbrace{C_1 \cdot C_2}_{\text{непр-но}}$, т.е. $f(x)\cdot g(x)$ - огр. на $[a;b]$.

если $f(x)$ и $g(x)$ - непр. в $(\cdot)\ x$, то их пр-ие тоже непр. в эт. $(\cdot)$

Поэтому кажд. $(\cdot)$ разрыва пр-ие $f(x)\cdot g(x) \in$ одному из мн-тв A и B, $\Rightarrow$

$M \in A \cup B$, M - мн-во $(\cdot)$-ек разрыва

$\mu(A\cup B)=0 \Rightarrow \mu(M)=0$.

4) T.: Если ф-ция $f(x)$ инт-ма на отр., то её модуль инт-ем на нём.

$|f(x)| \leq C$, т.е. огр. (т.к. $f(x)$ огр. на $[a;b]$, по крит. Лебега) $\mu(A)=0$

Все точки разрыва модуля содержатся среди всей ф-ции.

$B \subseteq A$ $\mu(B)=0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

5) T.: Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то она инт-ма на любом отр. $[\alpha;\beta]$, содержащемся в $[a;b]$.

Из инт-ти на $[a;b]$ (по крит. Лебега) $\Rightarrow$ огр-ть её, мн-во $(\cdot)$ её разрыва имеет меру 0. Отсюда (по крит. Лебега) она обл-ет теми же св-ми на $[\alpha;\beta]$. утверждение теоремы.

⑤ Интегрирование неравенств. Разбиение отрезка интегрирования; пределы интегрирования.

Т. (инт-ие неравенств):

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$
2. $f(x) \le g(x)$ на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

Д.: Рассм-им произвольное разбиение T отрезка $[a;b]$ и выберем произв. промежут. точки $\{\xi_i\}$. Тогда: $f(\xi_i) \le g(\xi_i)$; $f(\xi_i)\Delta x_i \le g(\xi_i)\Delta x_i$

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$$

$\lambda(T) \to 0$ (диаметр разбиения), по Т о перех. к пределу в нер-ве получаем из $(2) \to (1)$.

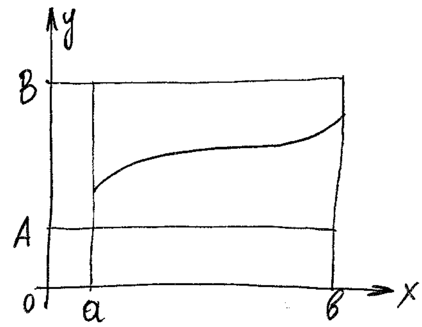
$0 \le g(x)$

$0 \le \int_a^b g(x)dx$

$A \le f(x) \le B$

$\int_a^b Adx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Bdx$

$A(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le B(b-a)$



Следствие 1: Если $g(x)$ инт-ма на $[a;b]$ и $g(x) \ge 0$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b g(x)dx \ge 0$$

Д.: $f(x) \equiv 0$ и т. п.

Следствие 2: Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$ и $A \le f(x) \le B$ на $[a;b]$, то

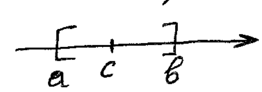
$$A(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le B(b-a)$$

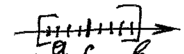
Т. (разбиение отрезка инт-ия, пределы инт-я):

Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$; c — произвольное число, $a<c<b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$





Д.: T_1 — произвольное разбиение отрезка $[a;c]$ с диаметром $\lambda(T_1)$, $\{\xi_i'\}$ — произвольный набор точек.; на $[c;b]$: T_2, $\lambda(T_2)$, $\{\xi_i''\}$.

Объединяем T_1 и T_2 $\to$ T — разбиение отр. $[a;b]$, $\{\xi_i'\}$ и $\{\xi_i''\}$ $\to$ набор промежут. точек $\{\xi_i\}$ на $[a;b]$;

$$\lambda(T) = \max\{\lambda(T_1), \lambda(T_2)\} \quad (3)$$

Соответствующая интегральная сумма на $[a;b]$ равна

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i')\Delta x_i + \sum_i f(\xi_i'')\Delta x_i \quad (4)$$

$\updownarrow$ $\updownarrow$

суммы на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$.

$\lambda(T) \to 0$, из $(3) \Rightarrow \lambda(T_1) \to 0$ и $\lambda(T_2) \to 0$, тогда все слагаемые в (4) стремятся к соответствующим интегралам

$$\Downarrow$$

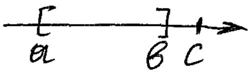
Т-ма док-на.

Для произвольного соотношения м/у a и b:

По определению: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx \quad (a>b)$$

$\Rightarrow$ Предыдущ. <u>Т.</u> справедлива при произвольном соотношении м/у a, b, c:

<u>**Д.**</u>: 

$a<b<c$

По этой <u>Т.</u> (переобозначая <u>пределы интегрирования</u>, т.е. числа a, b и c) получается:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \quad \Rightarrow \text{ <u>Т.</u> справедлива.}$$

Все соотношения, содержащие знак "=", остаются в силе, а формулы, где фигурируют нер-ва, будут справедливы, только если <u>нижний предел</u> инт-ия **<** <u>верхнего</u>.

⑥ Теорема о среднем для определённых интегралов.

<u>Т. (о среднем):</u>

1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $g(x)$ инт-ма на $[a;b]$
3. $g(x) \geq 0$ на $[a;b]$

$\Downarrow$

$\exists (\cdot) C \in [a;b]:$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx.$ (1)

<u>Д.</u>: Ф-ция непр. и инт-ма на отр. По св-вам ф-ций, непр-ых на отр („всякая ф-ция, непр-я на отр., достигает на нём точ. верхней и точ. нижней граней"):

$M = \sup\limits_{[a;b]} \{f(x)\}$

$m = \inf\limits_{[a;b]} \{f(x)\}$

$\forall x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M$

т.к. $g(x) \geq 0 \Rightarrow \quad m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$

по <u>Т. об инт-ии нер-тв</u>:

$m\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$ (2)

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx \geq 0$ (по следствию из этой <u>Т.</u>)

1) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$

$\Downarrow$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = 0$

2) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$

Поделим (2) на $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Обл. знач. ф-ции совп. с отр. $[m; M]$.

По <u>Т.</u> о промежут. значениях для непр. на отр ф-ции $f(x)$:

$\exists c \in [a;b]:$ $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c) \quad \Rightarrow (1)$

Если в (1) $g(x) \equiv 1$, то:

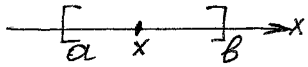
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b dx;$ $\quad f(c) = \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

<u>среднее значение</u> ф-ции $f(x)$ на отр $[a;b]$.

(1) остаётся верным и в случае $g(x) \leq 0$; важно, чтобы ф-ция была знакопостоянной на отр., а не строго положит. или строго отрицательной.

⑦ Свойства интеграла как ф-ции верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. (при непр. подинтегр. ф-ции на [a; b])

$f(x)$ - инт-ма на $[a; b]$



$x \in [a; b]$

Рассм-им новую ф-цию $F(x)$: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ $\left(\begin{array}{l} F(a) = 0 \\ F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \end{array} \right)$

Св-ва ф-ции $F(x)$ при различных условиях, накладываемых на $f(x)$:

Т.: Если $f(x)$ инт-ма на $[a; b]$, то $F(x)$ непр. на этом отрезке.

Д.: x_0 - произвольная (·); $x_0 \in [a; b]$. Приращение ΔF в этой (·):

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} = \int\limits_{x_0}^{a} f(t)dt + \int\limits_a^{x_0+\Delta x} = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

1) $\Delta x > 0$. Т.к. f инт-ма на $[a; b]$, то она огр. на нём:

$\exists C > 0: \forall x \in [a; b] \ |f(x)| \leq C$ $(\forall t \in [x_0; x_0+\Delta x] \ |f(t)| \leq C)$

$$|\Delta F| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta t} |f(t)|dt \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} C dt = C(x_0 + \Delta x - x_0) = C\Delta x = C \cdot |\Delta x|$$

2) $\Delta x < 0$:

$$|\Delta F| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| = \left| - \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| \leq \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} |f(t)|dt \leq \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} C dt =$$

$$= C(-\Delta x) = C|\Delta x|$$

Из 1) и 2) => при любом знаке Δx:

$0 \leq |\Delta F| \leq C|\Delta x|$ (Δx - такое, чтобы не выйти за пределы $[a; b]$)

Отсюда по Т. о „зажат. перем." находим, что:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0 \Rightarrow F(x)$ непр. в (·) x_0

Поскольку x_0 - произвольная (·) на $[a; b]$ => теорема верна.

Т.: Если $f(x)$ непр. на отр. $[a; b]$, то $F(x)$ диф-ма на этом отр., причём:

$F'(x) = f(x)$

Д.: x_0 - произвольная (·); $x_0 \in [a; b]$. Приращение ΔF:

$\Delta F = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$, где $c \in [x_0; x_0 + \Delta x]$. (пользуемся Т-мой о среднем, полагая $g(x) \equiv 1$)

$\Downarrow$

$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c)$

$\Delta x \to 0$. Т.к. $c \in [x_0; x_0 + \Delta x]$, то $c \to x_0$, тогда в силу непр-ти $f(x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$, т.е $F'(x_0) = f(x_0)$

Т.к. x_0 - произвольна, то $F(x) = f(x)$ - ч.т.д.

Интеграл как ф-ция верхнего предела явл. одной из первообразных. ($F(x)$ явл. одной из первообразных для $f(x)$ на $[a; b]$).

Для всякой непрерывной на отр. функции сущ-ет неопред. интеграл.

Т. (ф-ла Ньютона – Лейбница):

1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $\Phi(x)$ – её произвольн. первообразная. на $[a;b]$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

Д.: $F(x)$ – также первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$. По св-ам первообр-ых:

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

$x = a$:

$$F(a) = 0 = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$$

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

$x = b$:

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$ – „подстановка от a до b"

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b$$ $\longleftrightarrow$ связь м/у опред. и неопред. интегралом, позволяет с пом. неопред. интеграла вычислять интеграл определённый.

(*): $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

⑧ Методы подстановки и интегрирования по частям для определ. интегралов.

T.: 1. $f(u)$ - непр. на $[a;b]$ $\quad u=\varphi(x)$

2. $\varphi(x)\in C^1$ на $[\alpha;\beta]$

3. $\forall x\in[\alpha;\beta] \Rightarrow \varphi(x)\in[a;b]$

4. $\varphi(\alpha)=a;\quad \varphi(\beta)=b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(u)du=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

D.: Все подинтегральные ф-ции сущ-ют в силу условий т-мы.

Пусть $\Phi(u)$ - первообразная для $f(u)$ на $[a;b]$

$$\int_a^b f(u)du=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(\varphi(x))=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\Phi(\varphi(\beta))-\Phi(\varphi(\alpha))=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(u)du=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

(*): $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3}x^2dx=-\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3)=-\frac{1}{3}e^{-x^3}\Big|_0^1=-\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^0=\frac{1-e^{-1}}{3}$

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3}x^2dx=\left\{\begin{matrix}-x^3=u\\-3x^2dx=du\\x^2dx=-\frac{1}{3}du\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{3}\int_0^{-1}e^u du=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 e^u du=\frac{1}{3}e^u\Big|_{-1}^0=\frac{1-e^{-1}}{3}$

T.: Пусть $u(x),v(x)\in C^1([a;b])$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx\text{ , или }\int_a^b v(x)du(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)dv(x)$$

D.: $(uv)'=u'v+uv'$

$$\int_a^b (uv)'dx=\int_a^b vu'dx+\int_a^b uv'dx$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b v(x)u'(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

(*): $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos x\,dx=\int_0^\pi x^2d\sin x=x^2\sin x\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi x\sin x\,dx=x^2\sin x\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi x\,d\cos x=$

$\displaystyle=x^2\sin x\Big|_0^\pi+2x\cos x\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi\cos x\,dx=2\pi-2\sin x\Big|_0^\pi=2\pi$

⑨ Формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа)

Расс-им ф-цию $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$; Окр-ть $U(x_0)$ может быть и не мала, или совпадать со всей числ. осью.
Фиксируем произвольную (•) $x \in U(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \text{ (в силу формулы Ньютона-Лейбница)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

← применим неск. раз ф-лу интегрирования по частям:

{x- постоянное число}

$$f(x) = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = f(x_0) - f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2!} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt = \ldots =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt}_{r_n(x)}.$$

применим Т. о среднем

$$\left(f = f^{(n+1)},\ g = \frac{(x-t)^n}{n!}\right)$$

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$$

$$= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)d(x-t) =$$

$$= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

<u>Т.</u>: Пусть $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$. Тогда при любом n и для $\forall x \in U(x_0)$ справедлива формула:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{остаточный член.}},$$

где $c \in [x_0; x]$

(✱): $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^c \qquad e^c < e < 3$

$x_0 = 0$

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}01$$

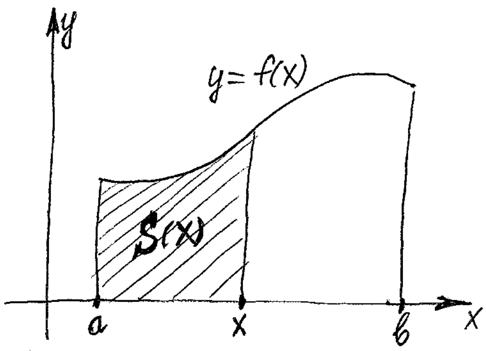
$\underline{n=3}$: $\frac{3}{4!} = \frac{1}{2\cdot4} = \frac{1}{8}$

$\underline{n=4}$: $\frac{3}{5!} = \frac{1}{2\cdot4\cdot5} = \frac{1}{40}$

$\boxed{n=5}$: $\frac{3}{6!} = \frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{240} < 0{,}01$

(10) S области, l дуги.

Пусть 1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$
S – ?



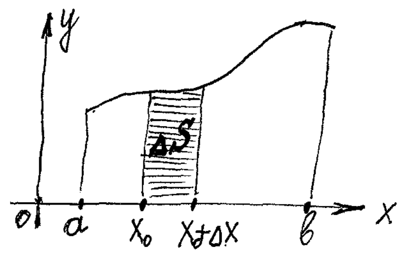
при $\forall\ x \in [a;b]$ вводим ф-цию $S(x)$ – площадь от a до x.

$S(a)=0$

$S(b) = S_{полн.}$

Фиксируем произвольное $x_0 \in [a;b]$, Δx – приращение (произвольное)
Тогда приращение $S(x)$: $\Delta S = S(x_0+\Delta x) - S(x_0)$

ΔS – площадь узкой полоски на участки $[x_0;\ x_0+\Delta x]$



Т. к. $f(x)$ непр. на отр. $[x_0;\ x_0+\Delta x]$, то она имеет на этом отр. min и max:

$\exists\ x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\Delta x]: \forall x \in [x_0, x_0+\Delta x] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Рассмотрим 2 прямоугольника с высотой $f(x_1)$ и $f(x_2)$:

$f(x_1)\Delta x \leq \Delta S \leq f(x_2)\Delta x$

Пусть $\Delta x > 0$:

$$f(x_1) \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f(x_2)$$

$\Delta x \to 0$, тогда $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, т. е. ← по Т. о „зажатой переменной"

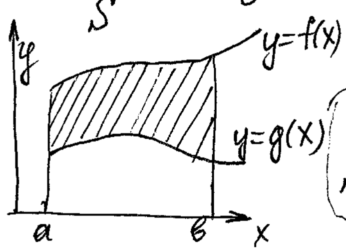
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0) \qquad \underset{\downarrow\, f(x_0)}{f(x_1)} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \underset{\downarrow\, f(x_0)}{f(x_2)}$$

$S'(x) = f(x)$

площадь – первообразная для ф-ции к рассматриваемому графику.

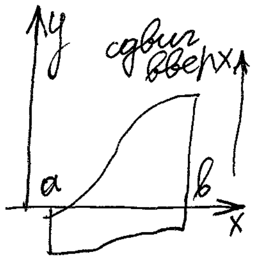
$$\int_a^b S'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underset{S}{\underset{\parallel}{S(b)}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{S(a)}} = \int_a^b f(x)\,dx \text{ , сл-но } \boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



$S = S_f - S_g$

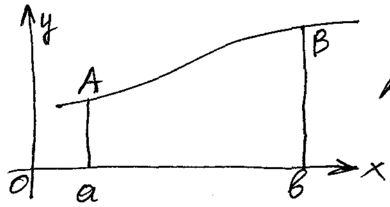
$$\boxed{S = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \quad f(x) \geq g(x)}$$



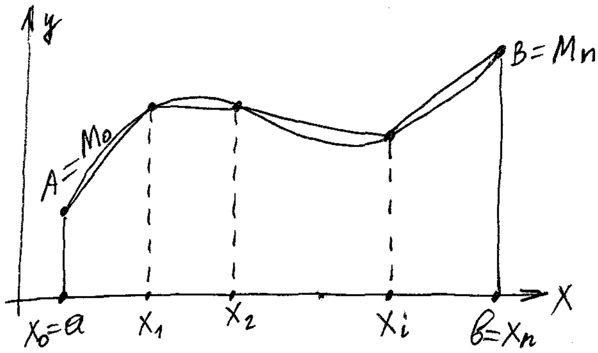
$$S = \int_a^b [(f(x)+C)-(g(x)+C)]\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

Длина дуги.

$f(x)$ — непр. на $[a;b]$.



$\breve{AB}$



Выберем конеч. число точек $M_0 = A, M_1, M_2, \dots, M_n = B$, соединим их отрезками.

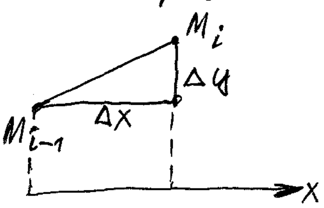
$\hat{l}_{AB}$ — длина ~~дуги~~ ломаной; ρ — длина максимального звена ломаной.

$$\boxed{l_{AB} = \lim_{\rho \to 0} \hat{l}_{AB}} \ : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \underbrace{\{M_i\}}_{\text{разбиение}} : \rho < \delta : \ |\hat{l}_{AB} - l_{AB}| < \varepsilon$$

Если для произвольной $f(x)$ величина l_{AB} существует, то дуга называется спрямляемой, иначе — неспрямляемой.

Т.: $f'(x)$ — непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ $\breve{AB}$ — спрямляема и $\boxed{l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$.
$(f(x) \in C^1([a;b]))$

Д.: $\{M_i\}$ — произвольный набор точек, спроектируем их на OX $\to$
$\to$ разбиение T из проекций x_i точек M_i. Диаметр разбиения $\lambda(T) \le \rho$.



$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, на $[x_{i-1}, x_i]$ с избытком выполнены условия Т. Лагранжа.

$\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$

$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

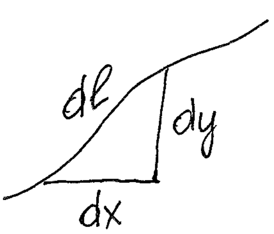
$\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$

$$l_{AB} = \sum_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i \qquad \lambda(T) \to 0 :$$

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Ф-ция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1([a;b]), \ \varphi' \ne 0 \qquad \dot{x}(t) \text{ — производная по } t.$$



по Т. Пифагора:

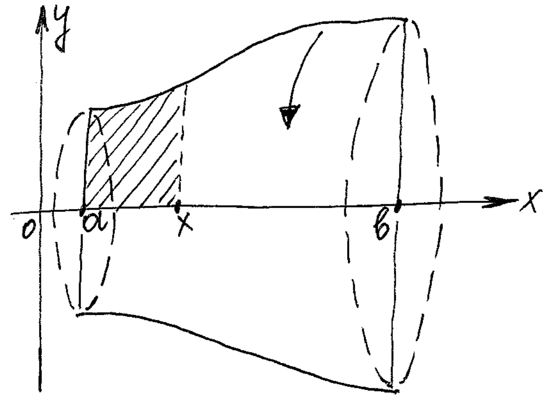
$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2}$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

$$\boxed{l_{AB} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}$$

(11) Объёмы тел вращения.

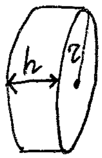
$\boxed{V_{ox}}$ $V(x)$ – вводим ф-цию, равную объёму тела, которое получается при вращении части трапеции, расположенной на участке $[a;x]$.

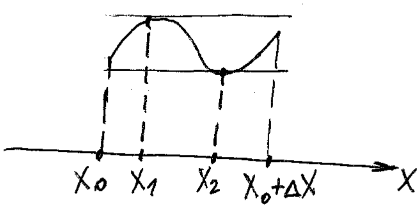


$V(a)=0$
$V(b)=V$

Фиксируем произвольную (·) $x_0 \in [a;b]$ и дадим аргументу приращение Δx:

$\Delta V = V(x_0+\Delta x) - V(x_0)$, ΔV – объём тела, полученного при вращении тонкой полоски.





выбираем на $[x_0; x_0+\Delta x]$ точки x_1 и x_2; эта полоска заключена м/у 2мя прямоугольниками с высотами $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Тогда:

ф-ция непр. на $[x_0, x_0+\Delta x]$

$\downarrow$

достигает своих точной верх. и точ. ниж. граней

$\downarrow$

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

$\Delta x > 0$

$\pi f^2(x_1)\Delta x \leq \Delta V \leq \pi f^2(x_2)\Delta x$

$\pi f^2(x_1) \leq \dfrac{\Delta V}{\Delta x} \leq \pi f^2(x_2)$

$\Delta x \to 0$:

$x_1, x_2 \to x_0$

В силу непрерывности $f(x) \to f(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x_0)$

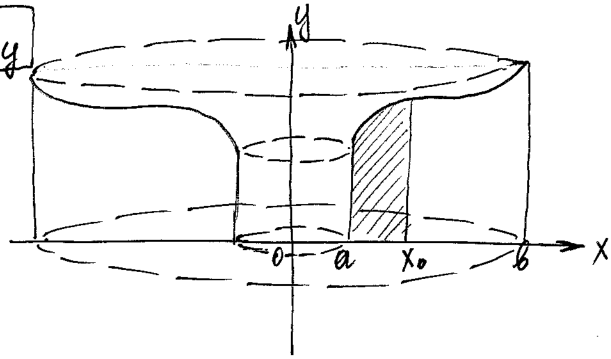
$V'(x_0) = \pi f^2(x_0)$, т.к. x_0 – произвольн. (·), то $V'(x) = \pi f^2(x)$

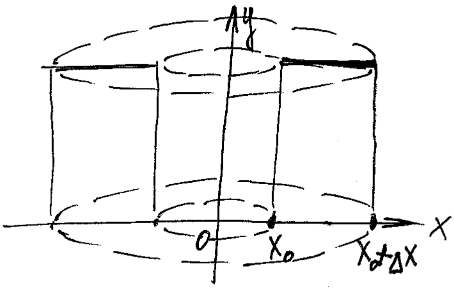
Ф-ла Ньютона-Лейбница:

$V(b) - V(a) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$
$\quad\; \underset{V}{\parallel} \qquad\;\; \underset{0}{\parallel}$

$$\boxed{V_{ox} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$$

$\boxed{V_{oy}}$





$$\pi f(x_1)(x_0+\Delta x)^2 - \pi f(x_1)\,x_0^2 \leq \Delta V \leq \pi f(x_2)(x_0+\Delta x)^2 - \pi f(x_2)\,x_0^2$$

$$2\pi f(x_1)x_0\cdot\Delta x + \pi f(x_1)(\Delta x)^2 \leq \Delta V \leq 2\pi f(x_2)x_0\Delta x + \pi f(x_2)(\Delta x)^2$$

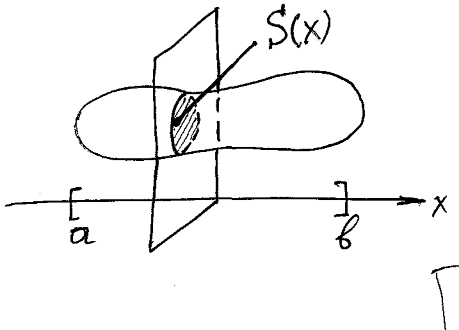
$$2\pi f(x_1)x_0 + \pi f(x_1)\cdot\Delta x \leq \frac{\Delta V}{\Delta V} \leq 2\pi f(x_2)x_0 + \pi f(x_2)\Delta x$$

$\Delta x \to 0$; $x_1, x_2 \to x_0$; по Т. о „зажатой переменной":

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi\cdot x\cdot f(x)$$

$$\int_a^b V'(x)\,dx = 2\pi\int_a^b |x|\cdot f(x)\,dx$$

$$\boxed{V_{oy} = 2\pi\int_a^b |x|\cdot f(x)\,dx}$$



Пусть: тело располагается вдоль Ox; для любого x известен $S(x)$;

Н-ти V.

$$dV = S(x)\,dx$$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

(12) Несобственный интеграл.

Интеграл (II рода):

1) по бесконечному промежутку;
2) ф-ция не ограниченна.

<u>Определение</u>: Пусть $f(x) \in C([a;+\infty))$, т.е. непр. на полуоси $[a;+\infty)$.
<u>Несобственным интегралом</u> от этой ф-ции по данной полуоси называется величина:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \,, \qquad \int_a^b f(x)dx \quad b > a$$

он существует, т.к. ф-ция опр-на на $[a;b]$.

Если lim существует, то интеграл <u>сходящийся</u>, а его значение = lim. Если конечный lim не существует, то интеграл <u>расходящийся</u> и ему не соответствует никакого числового значения.

Справедлива ф-ла Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \Phi(f)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) - \Phi(a) \,, \quad \text{где } \Phi'(x) = f(x).$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$: вопрос о существовании $\int$ сводится к тому, сущ-ет ли предел у Φ.

(*): $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 0-(-1) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty}$$ – расходится

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$ интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}; \quad \text{при } p \neq 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty}$$

$$\left.\begin{matrix} -p+1>0 \\ p<1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{расход.} \qquad \left.\begin{matrix} -p+1<0 \\ p>1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{сход.}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} : \begin{cases} p>1 & \text{– сход.} \\ p \le 1 & \text{– расход.} \end{cases}}$$

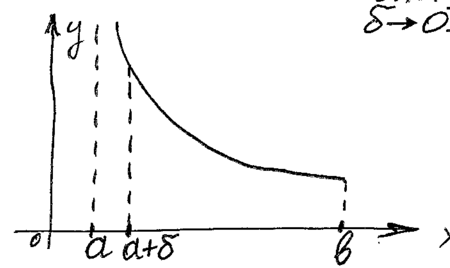
Определение: $f(x) \in C([a;b])$, неограниченна в окрестности $(\cdot)\ a$.

Несобственным интегралом от a до b называется величина

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

Если lim сущ-ет $\Rightarrow$ сходится, иначе — расходится.

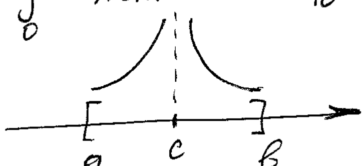
Также справедлива ф-ла Ньютона-Лейбница, причём под значением первообразной $\Phi(x)$ в $(\cdot)\ a$ понимается $\lim\limits_{\delta \to 0+} \Phi(a+\delta)$



(*): $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2-0 = 2$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x}\,dx = 0 - \int_0^1 dx = -1$$



$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$: требуется сходимость обоих интегралов

(13) Дифференциальные уравнения I порядка. Формулировка теоремы о существовании и единственности. Методы изоклин и ломаных Эйлера.

Ур-ия первого порядка.

$y' = f(x, y)$

Решение — любая функция, при подстановке которой вместо y, получается тождество на данном промежутке.

Решение — целое семейство функций.

Задача Коши: $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$ Производная — угл. коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$

Ур-ие каждой точке плоскости $(x; y)$ сопоставляет направление касательной к интегральной кривой в той же точке.

Если это направление изобразить отрезком, получится поле направлений.

Задача: найти кривые, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Область — множество конкретного вида.

Мн-во называется областью, если оно удовлетворяет условиям:

1. $\forall M_0 \in D$
   $\exists U(M_0) \subset D$ — D — область
2. для $\forall M_1, M_2 \in D$ можно соединить непрерывной кривой, которая содержится в данной области.

Область — открытое, связанное множество.

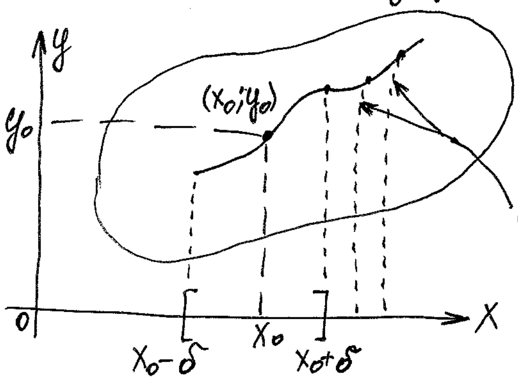
T. (о существовании и единственности):

Пусть в плоскости (x, y) $\exists$ область D, для которой:

1. $f(x, y) \in C^1(D)$
2. $(\cdot)$ $(x_0, y_0) \in D$

$\Downarrow$

$\exists \delta > 0$ такое, что задача Коши имеет решение $y = y(x)$ на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, причём единственное.



ч/з $(\cdot)$ $(x_0; y_0)$ обязательно проходит интегральная кривая, и только одна.

<процесс продолжения> можно за начальную $(\cdot)$ взять $(x_0 + \delta; y(x_0 + \delta))$ и применить теорему снова.

δ зависит от максимальной производной по y

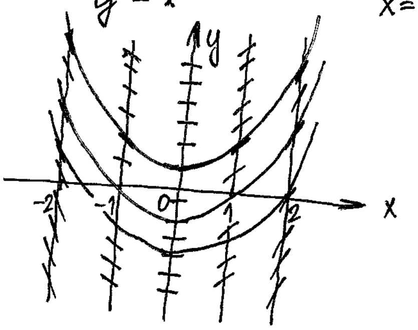
Если не требовать условия $f(x, y) \in C^1(D)$, то решение будет, но не факт, что единственное (может быть много прямых, проходящих ч/з $(\cdot)$)

Изоклины — геометрические места точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

$f(x,y)=k$ — ур-ие на плоскости (изоклина — линия)

Во всех (·) кривой касательные будут иметь один наклон

$y'=x$



$x=k$ — ур-ие изоклины

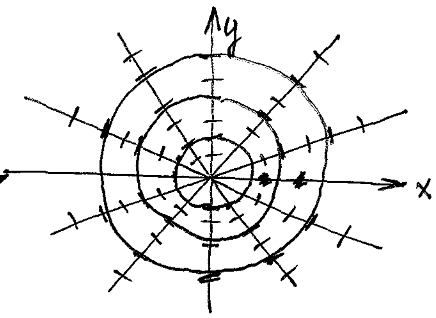
$k=0;\ \pm1;\ \pm2 \dots$

$y=\int x\,dx \qquad y=\frac{x^2}{2}+C$

$y'=-\frac{x}{y}$

$-\frac{x}{y}=k \qquad k=0:\ x=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$



оси выкидываются

$k\neq0,\ y=-\frac{1}{k}x$

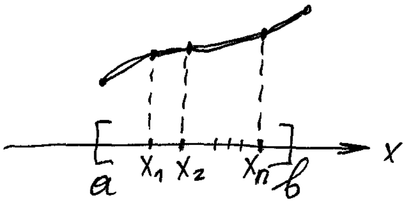
$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow$ прямые $\perp$

$\Downarrow$

$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1$

Метод ломаных Эйлера.

Приближённое вычисление значения искомого решения $y(x)$ при $x=b$: $[x_0;\,b]$ делится на n равных отрезков длины h (шаг вычисления).



$y'=f(x;y)$

$y(a)=y_0$

$h=\frac{b-a}{n}$

Вместо графика возникает ломаная, накапливается погрешность.

$x_i=x_0+h_i$

y_i — приближённые значения искомого решения в (·) x_i

для вычисления y_1 заменяем на $[x_0;x_1]$ искомую интегральную кривую отрезком её касательной в (·) $(x_0;y_0)$:

$y_1=y_0+hy_0',\quad y_0'=f(x_0;y_0)$

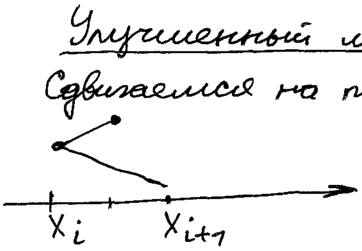
$$\boxed{y_{i+1}=y_i+hf(x_i;y_i)}$$

При $h\to0$ ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой.

$y_i\to y_b$

Улучшенный метод Эйлера.

Сдвигаемся на пол-шага.



$y_{i+1}=y_1+hf(x_{i+\frac12};y_{i+\frac12})$

мы уловим малейшее изменение решения.

(14) Уравнение радиоактивного распада; роста биомассы.

Модель радиоактивного распада.

Скорость распада радиактивного в-ва пропорциональна количество нераспавшегося в-ва в данный момент времени.

$x(t)$ - кол-во в-ва, измеренное в момент времени t

$x(0) = x_0$

$dx = -kx\,dt$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = -kx}$ - ур-ие радиоакт. распада., $k>0$, $\upsilon\downarrow$, $x>0$.

$$\int \frac{dx}{x} = -\int k\,dt$$

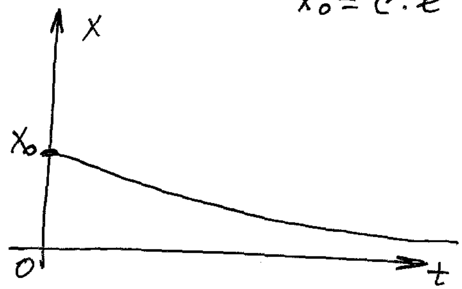
$$\ln|x| = -kt + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln e^{-kt} + \ln|c|$$

$$x = c \cdot e^{-kt}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}}$$

$x_0 = c \cdot e^0$ c - начальное количество в-ва



$\bar{t}$ - период полураспада:

$\bar{t} = \frac{1}{2} x_0$

$$\frac{x_0}{2} = x_0 \cdot e^{-k\bar{t}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -k\bar{t}$$

$$k\bar{t} = \ln 2$$

$$\boxed{\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}}$$

Модель теряет сходство с реальностью при больших значениях t

Время полного распада $\to \infty$

Закон роста биомассы.

① $\underbrace{x_{n+1} - x_n = kh\, x_n}$ — рекурентное уравнение

$h=t$, шаг
x_0 - кол-во биомассы при $t=0$
k - не зависит от n и h.

$x_{n+1} = (kh+1)x_n$

$(kh+1)=q$: $x_{n+1}=qx_n$, q - не зависит от n.

$x_n = q^n x_0$ - геометрич. прогрессия.

② $\frac{x_{n+1}-x_n}{h} = kx_n$ $\qquad \frac{x_{n+1}-x_n}{h} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt}=kx$ при $x(0)=x_0$ $\qquad \frac{dx}{x}=k\,dt$

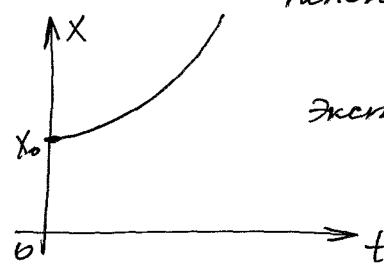
$dx = kx\,dt$

$x(t)=x_0\cdot e^{kt}$

k - положит. Физич. смысл имеют положит. решения.

k - удельная скорость роста

$2k_0 = x_0 e^{k\bar t}$ $\qquad \bar t = \frac{\ln 2}{k}$, не зависит от x_0



Экспоненциальн. рост.

В реальных условиях бесконечный рост невозможен; с ростом биомассы не хватает питания, поэтому скорость роста должна замедлиться (т.е. реально для небольшой системы)

Модель не учитывает замедления:

$\frac{dx}{dt}=kx$

Модель Ферхгюльста-Перла:

$\frac{dx}{dt}=(a-bx)x$ - ур-ие с разделяющимися переменными:

$\downarrow$

$\int\frac{dx}{(a-bx)x} = \int dt$

$\frac{1}{a}\int\frac{(a-bx)+bx}{(a-bx)x}dx = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x}+\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\int\frac{d(a-bx)}{a-bx} = \frac{1}{a}\ln|x|-\frac{1}{a}\ln|a-bx| = t+c$

$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-bx}\right| = t+c$

$t\to+\infty$

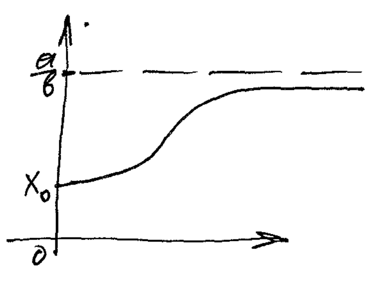
$\ln\to+\infty$

$\left|\frac{x}{a-bx}\right|\to\infty$; $a-bx\to 0$

$\underbrace{a-bx=\alpha(t)\ \ldots\ t\to 0}_{\text{б.м.}}$

$x=\frac{a}{b}-\frac{\alpha(t)}{b}\to 0$

$x=\frac{a}{b}$



(15) Модель роста деревьев

x – линейный размер растения

kx^2dt – энергия, получаемая деревом, идущая на фотосинтез, увеличение V, подъём вещ-тв.

$\Downarrow$

ℓx^2dt – затраты на фотосинтез

$V \sim x^3$: $md(x^3)$ – затраты на рост.

т.к. процесс ~ скорости роста (=> производная от массы)

закачка пит. вещ-тв:

$V \sim x^3$; высота $\sim x$

$\sim x^4$: $n \cdot x^4 dt$

$$kx^2dt = \ell x^2dt + m\,dx^3 + nx^4dt$$

$$kx^2dt = \ell x^2dt + 3x^2m\,dx + nx^4dt$$

$\Downarrow$

$$\ell < k$$

$$kx^2 = \ell x^2 + 3x^2m\frac{dx}{dt} + nx^4$$

$$3x^2m\frac{dx}{dt} = kx^2 - \ell x^2 - nx^4 \quad \Big| : 3x^2m$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2(k-\ell)}{3x^2m} - \frac{nx^2}{3m} \quad ; \quad \frac{k-\ell}{3m} = a; \quad \frac{n}{3m} = b :$$

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2 \xrightarrow{\text{переходим}} \frac{dx}{dt} = a^2 - b^2x^2$$

$$\frac{dx}{a^2-b^2x^2} = dt$$

$$\frac{1}{2ab}\cdot \ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| = t + \ln C$$

$$a-bx \to 0$$

$$\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| = 2abt + \ln C$$

$$\frac{a/b + x}{a/b - x} = Ce^{2abt}$$

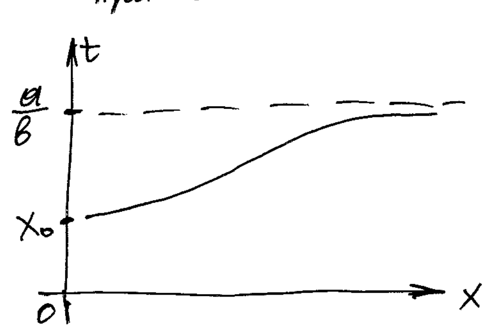
$$\frac{a}{b} + x = \frac{a}{b}Ce^{2abt} - xCe^{2abt}, \quad \text{т.е. } x(t) = \frac{\frac{a}{b}(Ce^{2abt}-1)}{1+Ce^{2abt}}$$

при $t \to \infty$ $x(t) \to \frac{a}{b}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx$$

$\Downarrow$

$x(t)$ – выпуклая кривая



есть предельная высота:

$$dx = kx\,dt$$

(16) Модель „хищник – жертва".

Имеется 2 вида, один поедает другой (рыси и зайцы)

$x(t)$ – количество „жертв"
$y(t)$ – количество „хищников" — непрерывно дифференцируемые функции

2 ограничения для жертв: еда и хищники

Если корма много:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(b-y)$$

Критич. число: если „хищн." < чем это число, то число „жертв" ↑, а если >, то число „жертв" ↓

$b<y \quad k_1<0 \rightarrow$ убыль
$b>y \quad k_1>0 \rightarrow$ рост

$$\frac{dy}{dt} = k_2(x-a)$$

$x>a, \ k_2>0 \rightarrow$ рост числа „хищников"
$x<a, \ k_2<0 \rightarrow$ убыль числа „хищников"

Замена: $x(t)-a = u(t)$
$y(t)-b = v(t)$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -k_1 v \\ \frac{dv}{dt} = k_2 u \end{cases}$$

Пусть u, v – удовлетв. ур-ям → тождество продифференцируем по dt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -k_1\frac{dv}{dt} = -k_1k_2u$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k_1k_2u = 0$$

$$\sqrt{k_1k_2} = w$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + w^2u$$

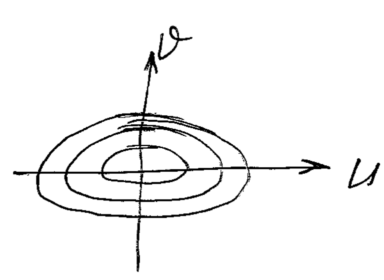
$u(t) = c_1\sin wt + c_2\cos wt \rightarrow$ свернуть в синусоиду, т. е. можно привести к виду:

$u(t) = A\cdot\sin(wt+\varphi)$ – ур-ие гармонич. колебаний.

$$v(t) = -\frac{1}{k_1}\cdot\frac{du}{dt} = -\frac{1}{k_1}Aw\cos(wt+\varphi)$$

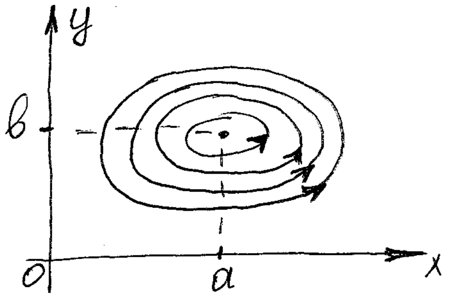
$$v^2 - B\cos(wt+\varphi)$$

$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1$ (уравнение эллипса)



Фазовые кривые представляют собой эллипсы, движ. по этим кривым ⇒ движ. по эллипсам ⇒ замкнут. циклы; периодич. повторяемость численности.

Эллипсы с центрами в т. (·) A и B



отстрел хищников

↓

переход на большие эллипсы

↓

min количество ↓

max количество ↑ (и т. д)

(17) Линейные дифференциальные уравнения II порядка.
(ур-ия с перемен. коэф-ми, Т. о сущ. и един-ти, однородн. ур-ия, определитель Вронского)

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$$

$p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции на $[a; b]$; $\in C(\langle a; b\rangle)$

$\Downarrow$

Т. о существовании и единственности.

$y'' = 0$ $\qquad y' = const = c_1$

$(y')' = 0$

$y = \int c_1 dx$

$y = c_1 x + c_2$

1) в (·) x_0 решение равно заданному значению y_0

2) $y'(x_0) = \underbrace{y_0'}$ – обозначение, показывающее, чему равна $y'(x_0)$, это не производная y_0!

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow y = c_1 x + c_2$

$0 = c_2$

$y' = c_1$

$c_1 = 1$

$y = x$

Задача Коши:

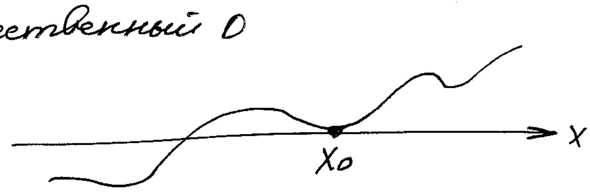
Пусть задано уравнение вместе с начальными условиями

$\forall x_0, y_0, y_0'$, $x_0 \in \langle a; b\rangle$ $\exists$ решение задачи, удовлетворяющее условию, опред. на $\langle a; b\rangle$ и это решение единственно.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

1. решение – тождественный 0

$$\begin{cases} y(x_0) \equiv 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$



такого быть не может!

решение удовлетворяет нач. условиям
тождественный 0 удовл. нач. условиям $\Big\}$ => по Т. о единств-ти

$\Downarrow$

тождест. 0 – есть решение

Линейные однородные уравнения.

1) если решения данного ур-ия умножить на const, то полученное значение также будет решением данного уравнения.

$$(Ay)'' + p(Ay)' + qAy = 0$$

$$Ay'' + pAy' + Aqy = 0$$

$$A\underbrace{(y'' + py' + qy)}_{=0} = 0$$

2) если y_1 и y_2 – решения, то их сумма (разность) – тоже решения.

$$(y_1 \pm y_2)'' + p(y_1 \pm y_2)' + q(y_1 \pm y_2) = 0$$

$$(\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{=0}) \pm (\underbrace{y_2'' + py_2' + qy_2}_{=0}) = 0$$

$\Downarrow$

следствие:

Если y_1, y_2 – решения уравнения, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

$$y - c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y_1, y_2 – о существенно разными решениями (линейно независимыми на дан. промежутке)

2 решения ур-ия называются линейно независ. на пром-ке $\langle a; b\rangle$, если из $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ на $\langle a; b\rangle$ следует, что $c_1 = c_2 = 0$

Линейная зависимость: найдётся такая пара c_1 и c_2, что $c_1 \neq c_2 \neq 0$,

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot y_2$$ решения пропорциональны.

Фундаментальная с-ма решений – 2 линейно независ. решения.

$\tilde{y}(x_0) = y_0$ если всё это удовлетв. начальным условием того

$\tilde{y}(x_0) = y_0^T$ уравнения, то $\tilde{y}$ есть y.

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0^T$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$ – определитель Вронского.

найдётся c_1 и $c_2 \Rightarrow \tilde{y}$ совпадает с линейной комбинацией y_1 и y_2

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ определитель Вронского

1) Если y_1, y_2 – линейно зависимые решения, то опред-ль Вронского $=0$,

т.е. $\exists c_1$ и $c_2 \neq 0$, что

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = 0$$

$$\begin{cases} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \\ c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

т.к. $\exists c_1$ и $c_2 \Rightarrow$ определитель $=0$: $\underline{W(x) = 0}$

(17) ⟨продолжение⟩

2) Пусть $W(x_0)=0$, тогда y_1 и y_2 – линейно завис. и $\Rightarrow W(x_0)\equiv 0$ (по **Т.** о сущ. и единств-ти).

Д.: $\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$

C_1 и $C_2 \neq 0$

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = y$

$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$ – удовлетв. начальным условиям.

По **Т.** о сущ. и единств-ти линейная комбинация $\equiv 0$.

$\exists\, y_1$ и y_2: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$

$\Downarrow$

y_1 и y_2 линейно зависимы

$\Downarrow$

$W(x_0)=0$

Любое решение диф. уравнения – линейная комбинация линейно независ. решений.

Линейные неоднородные уравнения.

$y'' + py' + qy = f$

p, q, f – непр. на $\langle a; b\rangle$

Обозначим ч/з $\overset{\circ}{y}$ – любое решение однородн. уравнения, а ч/з $\bar{y}$ – некоторые решения неоднородного уравнения (f)

Сложим:

$\overset{\circ}{y} + \bar{y}$ – сумма решений неоднор. ур-ия.

$$(\overset{\circ}{y}+\bar{y})'' + p(\overset{\circ}{y}+\bar{y})' + q(\overset{\circ}{y}+\bar{y}) = \underbrace{(\overset{\circ}{y}{}'' + p\overset{\circ}{y}{}' + q\overset{\circ}{y})}_{=0} + \underbrace{(\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y})}_{=f} = f$$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \bar{y}$

Возьмём произвольное решение $\tilde{y}$ неоднор. ур-ия.

$\tilde{y} - \bar{y}$, подставляем:

$$(\tilde{y}-\bar{y})'' + p(\tilde{y}-\bar{y})' + q(\tilde{y}-\bar{y}) = f - f = 0$$

Разность 2х решений однородного ур-ия удовлетв. решению неоднородн. ур-ия:

$\tilde{y} - \bar{y} = \overset{\circ}{y}$

$\tilde{y} = \overset{\circ}{y} + \bar{y}$

$\Downarrow$

решение неоднород. ур-ия: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \bar{y}$

Принцип суперпозиции решений:

Правая часть – $\sum$ ях ф-ций

$$y'' + py' + qy = f_1 + f_2$$

$\bar{y}_1$ – реш. ур-ия с f_1 в правой части

$\bar{y}_2$ – реш. ур-ия с f_2 в правой части

$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$ – реш. ур-ия с суммой в прав. части.

(18) Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

① Однородные:

$y''+py'+qy=0$

$p, q = const$

$y=e^{\lambda x}$

$y'=\lambda e^{\lambda x} \quad \forall \lambda$

$y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0 \quad | : e^{\lambda x}\neq 0$

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ – характеристич. ур-ие для дифф. ур-ия.

1) $\underline{D>0}$: $p^2-4q>0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} = \underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}}_{\neq 0}\cdot\underbrace{(\lambda_1-\lambda_1)}_{\neq 0}$$

$W(x)\neq 0$ – решения линейно независимы, имеют вид:

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$

$y''-2y'-3y=0$

$\lambda^2-2\lambda-3=0$

$\lambda_1=-3, \lambda_2=1$ Ответ: $y=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{x}$

2) $\underline{D=0}$

$p^2=4y$

$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$

$e^{\lambda_1 x}\cdot x e^{\lambda_1 x}=y$ – реш. ур-ия

$y'=e^{\lambda_1 x}+\lambda_1 x e^{\lambda_1 x}$

$y''=2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$

$$\lambda_1^2 x\cdot e^{\lambda_1 x}+2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+pe^{\lambda_1 x}+p\lambda_1 x e^{\lambda_1 x}+qxe^{\lambda_1 x}=\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{=0}e^{\lambda_1 x}+\underbrace{(2\lambda+p)}_{=0}e^{\lambda_1 x}=0$$

левая часть характеристич. ур-ия.

Составим определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x\cdot e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1+\lambda_1 x)e^{\lambda_1 x}\end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1+\lambda_1 x\end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}(1+\cancel{\lambda_1 x}-\cancel{\lambda_1 x}) = e^{\lambda_1 x}\neq 0$$ – решение системы

линейно независимы $\Rightarrow$ ответ: $y=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 x e^{\lambda_1 x}$

(*): $y''-2y'+y=0$

$(\lambda-1)^2=0 \quad \lambda_{1,2}=0 \quad y=c_1\cdot e^x+c_2 x e^x$

3) $\underline{D<0}$

$p^2-4q<0 \Rightarrow$ есть комплексные решения

$\lambda_{1,2}=a\pm i w$

$\lambda_{1,2}=-\frac{p\pm i\sqrt{|D|}}{2}$

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$

λ_1, λ_2 – комплексные числа

Действит. и мнимая части ф-ции явл. решениями ур-ия:

$$e^{(a+iw)} = e^{ax}\cdot e^{iwx} = e^{ax}(\cos wx + i\sin wx) = \underbrace{e^{ax}\cdot\cos w(x)}_{y_1} + \underbrace{i e^{ax}\cdot \sin wx}_{y_2}$$

$y_1 = e^{ax}\cdot\cos wx$

$y_2 = e^{ax}\cdot\sin wx$

Проверим, что y_1 и y_2 образуют фундаментальную с-му решений:

$y_1' = a\cdot e^{ax}\cdot\cos wx - w\cdot e^{ax}\cdot\sin wx$

$y_2' = a\cdot e^{ax}\cdot\sin wx + w e^{ax}\cdot\cos wx$

$$e^{ax}(a\cdot\cos wx - w\sin wx - a\sin wx + w\cos wx)\cdot e^{ax} = e^{ax}\begin{vmatrix}\cos wx & \sin wx \\ a\cos wx - w\sin wx & a\sin wx + w\cos wx\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow W(x)\neq 0$$

$\Downarrow$

$y = e^{ax}(C_1\cdot\cos wx + C_2\sin wx)$

Функция описывает колебательный процесс.

$y'' - 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ $\quad a=1;\ w=2$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ $\quad y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x)$

Метод неопределённых коэффициентов.

$y'' - 2y' - 3y = x$

1) $y'' - 2y - 3y = 0$ $\quad \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = -1$ $\quad$ Ответ: $y = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x}$

$\lambda^2 - 2x - 3 = 0$

2) $y = Ax + B$

Надо проверить, не является ли 0 корнем:

Если да, то надо умножить на $x\ (x^2)$

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = Ax+B \\ -2 & y' = A \\ 1 & y'' = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & -3A = 1 \\ x^0 & -3B - 2A = 0 \end{array} \qquad A = -\frac{1}{3};\ B = -\frac{2}{3};\ A = \frac{2}{9}$$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

3) Сложим общ. и част. решения:

$y = c_1\cdot e^{-3x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$

1) -//-

2) $y = A\cdot e^{-x}$

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = A\cdot e^{-x} \\ -2 & y' = -A\cdot e^{-x} \\ 1 & y'' = A\cdot e^{-x}\end{array} \qquad -3A - 2A + A = 1 \qquad -4A = 1;\ A = -\frac{1}{4};\ \Rightarrow y = -\frac{1}{4}e^{-x}$$

3) $y = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x}$

$y'' - 2y' - 3y = e^{x}$

1) -//-

2) $y = A e^{-x}\ \ |\cdot x$

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = Ax\cdot e^{x} \\ -2 & y' = A\cdot e^{x} - Axe^{x} \\ 1 & y'' = -2Ae^{x} + Axe^{x}\end{array} \qquad \begin{array}{r|l} xe^{x} & -3A + 2A + A = 0 \quad \underline{0\equiv 0}\,! \\ e^{x} & 2A - 2A = 1 \\ & -4A = 1 \\ & A = -\frac{1}{4}\end{array}$$

$y = c_1\cdot e^{3x} + c_1\cdot e^{-x} - \frac{1}{4}x\cdot e^{-x}$

Если $p_n(x)\cdot e^{kx}$, то надо искать „y", но проверить, не является ли k корнем в №1)

$x\cdot\cos 2x$

$y = Ax + B\cos 2x + C(x+D)\cdot\sin 2x$

(19) Простейшие св-ва числовых рядов. Критерий Коши (+ следствие). Ряды с положит. членами; признаки сравнения.

Ряд — последовательность (бесконеч.) чисел, объединённых знаком "+"

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n — действительные числа

$a_n=f(n)$ — общий член числового ряда,

$f(n)$ — ф-ция натурального аргумента

Рассм-им сумму первых n слагаемых (частичная сумма ряда):

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

n ← конечное число

Определение: Если существует конечный предел последовательности $S_1, S_2 \ldots, S_n, \ldots$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то ряд — сходящийся, а S — его сумма:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Посл-ть $1, 1, 1, 1, \ldots$ не имеет суммы.

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бесконечен или не существует, то ряд расходящийся.

Сумма (разность) 2х сход. рядов есть сходящ. ряд, сумма которого равна сумме (разности) сумм исходных рядов:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$$

$A_n=a_1+a_2+\ldots a_n$

$B_n=b_1+b_2+\ldots b_n$

$$S_n=(a_1+b_1)+\ldots+(a_n+b_n)=A_n+B_n$$

Возьмём $n\to\infty$, $A_n\to A$, $B_n\to B$, по Т. о сходящ. посл-ти lim суммы = = сумме lim.

1) если 1 ряд сход., другой — нет, $\Rightarrow$ сумма расходится.

2) от умножения всех членов ряда на число отличное от 0, его сходимость (расходимость) не меняется.

$C\neq 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c\cdot a_n$ (сумма меняется, но сходимость/расходимость — нет).

Если исходный ряд расх., то a_n не имеет lim $\Rightarrow$ S_n — не имеет lim.

Необходимый признак сходимости.

Т.: У всякого сходящегося ряда общий член стремится к 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сход.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n=0$$

Д.: $S_n=a_1+\ldots a_n$

возьмём сумму на 1 номер меньше: $S_{n-1}=a_1+\ldots+a_{n-1}$

Если S_n имеет lim, то $S_n\to S$

$\Downarrow$

S_{n-1} имеет lim, $S_{n-1}\to S$

$\Downarrow$

a_n имеет lim, $=S-S=0$ $\qquad a_n\to 0$.

- если ряд сходится, то послед-ть его частичных сумм ограничена (обратное — неверно!)
- если ряд сходится, то остаток ряда стремится к 0

$$R_n = S - S_n$$

$$S_n \to S \Rightarrow R_n \to 0$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots)}_{R_n \text{ — остаток ряда}}$$

- от изменения (добавления или отбрасывания <u>конечного</u> числа членов сходимость или расходимость ряда не меняется.

Пусть ряд сходился:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

изменяем конечное число членов:

$$a_1' + a_2' + \dots + a_n' + \dots$$

Разность м/у рядами: $A_n' - A_n$.

Т.к. изменилось лишь конеч. число членов $\Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \ a_n = a_n'$

$\Downarrow$

если $\uparrow n$, то разность перестаёт меняться

$$A_n' - A_n = const$$

Тогда: начиная с N: $A_n' = A_n + C$, значит новый ряд тоже будет сходиться

$\Downarrow$

изменение конеч. числа слагаемых приводит к тому, что ряды будут различаться на нек. <u>const.</u>

19 ⟨продолжение⟩

Критерий Коши:

(необх. и дастаточ. условие для сход-ти ряда)

Пусть задан ряд: $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ - сход.} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N: \forall n, m \geq N \Downarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

1) Пусть ряд сходится.

Возьмём $\varepsilon>0$, поделим на 2.

В силу определения lim:

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 \Rightarrow |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассм-им разность $S_n - S$:

$$S_n - S_m = |\underbrace{(S_n - S) - (S_m - S)}_{\text{тождество}}| \leq \underbrace{|S_n - S|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_m - S|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

если $m < n$:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \Rightarrow S_n - S_{n-1}, \ m = n-1$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N: \forall n \geq N \ |a_n| < \varepsilon$$

2) Рассм-им ряд...

Пусть сход. ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ - сход.}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N: n, m \geq N \ \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_n|\right| < \varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| < \varepsilon$$

⇓

выполняется критерий Коши

↓

достат. условие

↓

ряд сходится

⇓

- Если сходится ряд из модулей, то сходится и сам ряд (но не наоборот!)

Абсолютно сход. ряд — ряд, для которого сход. ряд из модулей.

Условно сход. ряд — ряд сходящ., ряд из модулей — несходящ.

Ряды с положит. членами.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 0$ (члены неотрицательны) $n = 1, 2, \dots$

$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$

Частичные суммы рядов с положит. членами образуют монотонно ↗ послед-ть.

Если для таких рядов послед-ть частичных сумм ограниченна, то ряды – <u>сходящиеся.</u>

<u>1-й признак сравнения:</u>

Пусть даны 2 ряда с положит. членами:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, $a_n \leq b_n$ для всех n. (начиная с к.-л. члена)

Тогда, если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ – сход., то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – сход.

$\underset{\text{сумма } a_n \text{ от 1 до } n}{A_n} \leq \underset{\text{сумма } B_n \text{ от 1 до } n}{B_n} \leq B \Longrightarrow$ послед. A_n – монотонна, огранич.

$\downarrow$

по <u>Т. Вейерштраса</u>: имеет предел

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = a$

Ряд из A_n – сход-ся $\Rightarrow A \leq B$

<u>2-ой признак сравнения:</u>

Если $a_n \sim b_n$, то оба ряда сход-ся или расход. одновременно.

$a_n \sim b_n$, если $a_n = b_n \cdot q_n$, где $\lim_{n \to \infty} q_n = 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\ N: \forall n \geq N \Rightarrow |q_n - 1| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < q_n < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} b_n < b_n \cdot q_n < \frac{3}{2} b_n$

$\frac{b_n}{2} < a_n < \frac{3}{2} b_n$

1) если b_n – сход., то от умножения на const:

$\frac{3 b_n}{2}$, $\frac{b_n}{2}$ – сход. $\Rightarrow a_n$ – сход.

2) если a_n – не сход. $\Rightarrow \frac{3}{2} b_n$, $\frac{b_n}{2}$ – не сход.

$\Downarrow$

b_n – несход.

⑳ Признаки Коши и Даламбера.

① Признак Коши.

Т: Пусть задан ряд с положит. (неотриц.) членами и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

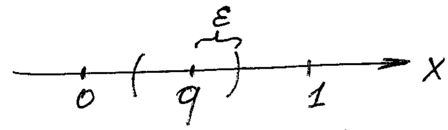
Тогда:

$$\begin{cases} q<1 \to \text{ряд сходится} \\ q>1 \to \text{ряд расходится} \\ q=1 \to \text{неизвестно} \end{cases}$$

т. е. члены ряда ведут себя почти как члены геометрич. прогрессии.

Если $q=0 \Rightarrow$ члены ряда убывают быстрее членов любой геометрич. прогрессии

Д.: 1. $q<1$



Определение предела: $\varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geq N\ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$

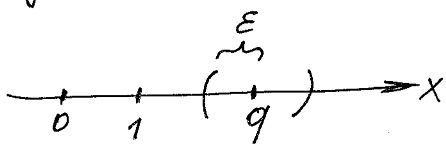
$$q-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{q+\varepsilon} = q_1 < 1$$

$$a_n < q_1^n$$

Рассм-им наряду с этим рядом геом. прогрессию

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_1^n$ – сходится (по аналогии с геом. пр.)

2. $q>1$



$\exists N: \forall n \geq N\ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$

$$1 < q_2 = \underbrace{q-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon$$

$$q_2^n < a_n$$
$$\searrow \infty$$

$a_n \not\to 0$, т.е. нарушен необход. признак, члены такого ряда $\not\to 0$, а стремится к ∞

(*): $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{3n-2} \to \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – расх., но признак Коши ответа не даёт, т.к. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ – сход., но признак Коши для данных рядов груб, и их нельзя сравнить с геом. прог.

(II) Признак Даламбера.

Т.: Пусть дан ряд со строго положит. членами и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

$\Downarrow$

$q<1 \Rightarrow$ сход.

$q>1 \Rightarrow$ расход.

$q=1 \Rightarrow$ признак ответа не даёт.

Д.: 1. $q<1$

$\varepsilon>0 \quad \exists N: \forall n\le N \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon$

$\langle a_1+a_1q+a_1q^2\ldots\rangle$

$$\underbrace{q-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=q_1}_{q_1<1}$$

$$a_{n+1}<a_nq_1$$

$$a_{N+1}<a_Nq_1$$

$$a_{N+2}<a_{N+1}q_1<a_Nq_1^2$$

$$a_{N+3}<a_Nq_1^3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{N+k}<a_Nq_1^k$$

$N+k=m$; $k=m-n$

$a_m<a_N\cdot q_1^{m-n}$

$a_m<\underbrace{(a_Nq_1^{-N})}_{\text{с-постоянная}}q_1^m \qquad a_m<c\cdot q_1^m$ Начиная с нек. номера члены нашего ряда оказываются меньше членов геометрич. прогр., которая сход., сл-но по 1-му признаку $\Rightarrow$ ряд. сход.

2. $q>1$

$1<q_2=q-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad a_n<a_{n+1}$

Начиная с нек. номера посл-ть членов $\uparrow$, т. е. $a_n\not\to0$ (значит ряд расходится)

т.е. расходимость получается, если нарушается признак...

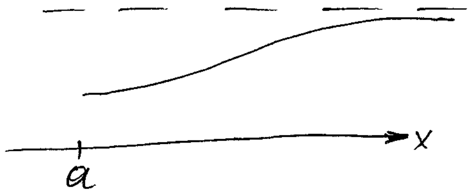
(*): какая величина растёт быстрее показат. ф-ции.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b^{n+1}n!}{(n+1)!\,b^n}=\frac{b}{n+1}\to0<1\Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}=0$ $\boxed{\text{Факториал растёт быстрее всех.}}$

(21) Интегральный признак Коши. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.



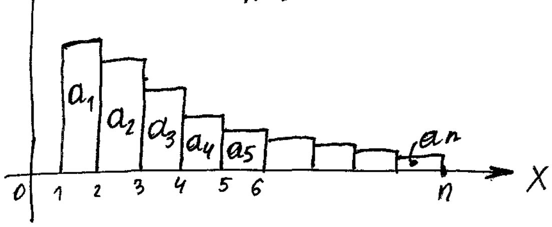
аналог Т. Вейерштрасса для функции:

1. $f(x)\nearrow$ на $[a;+\infty)$ (быть может, в широком смысле)
2. $\exists C>0$ $f(x)\le C$ на $[a;+\infty)$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$



$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

Площадь ступенчатой фигуры, уходящей $\to\infty$

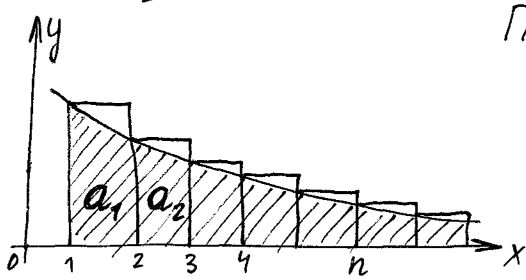
Т.: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ $\quad a_n>0$:

1. $f(x)$ – непр. на $[1;+\infty)$
2. $f(x)>0$ — // — // —
3. $f(x)\searrow$ — // — // —
4. $\forall n$: $f(n)=a_n$ (связь м/у рядом и функцией)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ – сход.} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ – сход.}$$

Д.: 1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – сход.



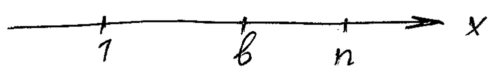
Площадь под графиком не превосходит площади ступенчатой фигуры.

$$\int_1^n f(x)\,dx \le a_1+\dots+a_n\ldots \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$$

(не зависит от n)

$F(b)=\int_1^b f(x)\,dx$

$F(b)\nearrow$ (т.к. $f(x)$ – положит.)



$b<b_2$

$F(b_2)-F(b_1)=\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \ge 0$

$$\Downarrow$$

$F(b_1)\le F(b_2)$

$$F(b)=\int_1^b f(x)\,dx \le F(n) = \int_1^n f(x)\,dx \le A$$

$$\Downarrow$$

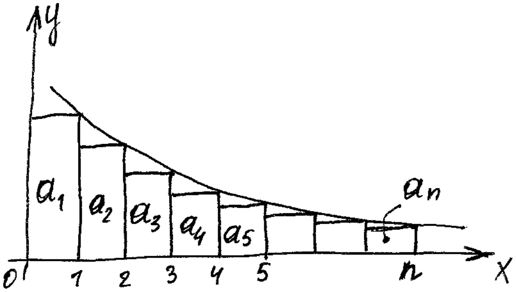
$$\exists \lim_{b\to+\infty} F(b)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ – сход.}$$

<сходится ряд $\Rightarrow$ сход. интеграл.>

2. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ – сход.



сдвигаем всё на 1 влево.

Площадь под графиком больше площади ступенчатой фигуры.

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ - сход.

$$a_2+a_3+\dots+a_n \le \int\limits_1^n f(x)dx \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$$

от добавления члена сходимость не меняется

⟨из ограниченности частичных сумм ⇒ сходимость⟩

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ $\quad p \le 1$ - расх., т.к. $\frac{1}{n^p} \not\to 0$ (расходимость вытекает из необх. признака).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ -(ф-ция непр. на $(1;+\infty)$, убывает на всей оси; положительна).

ряд-сход. $\Leftrightarrow$ $\int$-сход.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $\quad p > 1$ - сход.
$p \le 1$ - расход

(*): $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\, \mathrm{arctg}\, \frac{1}{n}$

⟨$(1+t)^p - 1 \sim pt$, $p>0$⟩

$$a_n \sim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ - сход. (т.к. $3/2 > 1$)

22 Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Если ряд сходится, а ряд из модулей для него расходится, то данный ряд называется <u>условно сходящимся.</u>

Ряд, для которого сходится ряд из модулей, — <u>абсолютно сходящийся</u> ряд.

Т.: Если ряд с неотриц. членами сходится, то при произвольной перестановке его членов, сумма его не меняется.

<перестановка: члены те же, но под другими номерами>

$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — сходится.

$a_1' + a_2' + \ldots + a_n' + \ldots$

Доказать, что ряд сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

Д.: 1. $A_n' \leq A_m$ — сумма первого ряда

$A_n' \leq A_m \leq A$ при любом A частичная сумма ограничена сверху.

Переходим к пределу:

$A' \leq A$

2. Пусть наоборот: исходный теперь — A', переставленный — A.

Мы можем всё переставить:

$A \leq A'$ и $A' \leq A$ (из п.п. 1.)

$A = A'$

<u>Положит. и отрицат. ряды.</u>

$a_n^+ = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}$ $\qquad a_n^+ + a_n^- = a_n$

$a_n^- = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}$ $\qquad a_n^+ - a_n^- = |a_n|$

Если член ряда положит. ⇒ все положит. члены остаются, а $a_n^- = 0$.

Если член ряда отриц. ⇒ все отрицат. члены остаются, а все $a_n^+ = 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = 0 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \ldots$$

<u>Очевидные оценки:</u>

- $|a_n^+| \leq |a_n|$
- $|a_n^-| \leq |a_n|$
- Ряд абсолютно сходится $\Leftrightarrow$ когда сходятся оба ряда a_n^+ и a_n^-.

Т.: Для абсолютно сходящихся рядов от перестановки слагаемых рядов сумма не меняется.
$\Downarrow$
справедливо свойство конечных сумм.

Т. Римана: Если ряд условно сходится, то для $\forall$ действительного числа, включая символы $+\infty$ и $-\infty$, можно так переставить члены этого ряда, что сумма переставленного ряда будет равна сумме исходного ряда (т.е. ряд будет сходиться к этому же числу).

Знакочередующиеся ряды.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot a_n + \ldots$, где $a_n \geq 0$, называется знакочередующимся.

Т. (признак Лейбница):
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$
1. Знакочередующийся ряд (!)
2. $|a_n|\downarrow$: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (т.е. члены ряда $\to$ к 0)

$\Downarrow$
ряд сходится, а его сумма удовлетворяет нер-ву: $0 \leq S \leq a_n$.

Д.: Рассм-им послед-ть частичных сумм. с чётными членами.
$|a_n| = c_n$

$$S_{2k} = \underbrace{(c_1 - c_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(c_3 - c_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(c_{2k-1} - c_{2k})}_{\geq 0}$$

S_{2k} образует монотонно возрастающую последовательность:
$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S_{2k} < \ldots$

$$S_{2k} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(c_{2k-2} - c_{2k-1})}_{\geq 0} - \underbrace{c_{2k}}_{\geq 0}$$

$S_{2k} < c_1$

По Т. Вейерштраса послед-ть имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2k} = S$

$S_{2k+1} = S_{2k} + \overset{\to 0}{a_{2k}} \Rightarrow S_{2k+1} \to S$
(послед-ть частичных сумм с чётными членами $\to S$ и имеет сумму? $\to S$)
вся $S_n \to S \Rightarrow$ расходится.

(*): $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ – сходится.

㉓ Непрерывность суммы функционального ряда.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ <u>Область сходимости</u> – множество всех X, для которых ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ на X:

$\forall x \in \langle a; b\rangle \ \forall |U_n(x)| \leq a_n$

<u>Т. (о непрерывности суммы ряда):</u>

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$

Пусть:

1. $\forall n \ U_n(x)$ непр. на $\langle a; b\rangle$

! 2. $\exists$ сходящаяся мажоранта на $\langle a; b\rangle$

$\Downarrow$

ряд сходится и сумма непрерывна:

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ непр. $\langle a; b\rangle$

<u>**Д.**</u>:

1) 1-й признак сравнения

$\downarrow$

ряд сходится на $\langle a; b\rangle$

2) сумма ряда – непр. ф-ция ⚠

$\Rightarrow \exists S(x)$

$$-\ \frac{S(x) = S_n(x) + \underset{\text{остаток}}{R_n(x)}}{S(x_0) = S_n(x_0) + R_n(x_0)}$$

$$|S(x)-S(x_0)| = |(S_n(x)-S_n(x_0)) + R_n(x) - R_n(x_0)| \leq |S_n(x)-S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)|$$

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\quad \frac{\varepsilon}{3} > 0$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |U_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

остаток числового ряда из a_n

$\Downarrow$

для $\frac{\varepsilon}{3}$ найдётся такой номер N...:

$\exists N: \forall n \geq N \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{3}$

$\to 0$ (предел $=0$)

$|R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для <u>всех</u>! x <u>сразу</u>! из $\langle a; b\rangle$

$$|S(x)-S(x_0)| < |S_N(x)-S_N(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$$

$S_n(x)$ – конечная сумма непр. функций.

Выбираем окрестность

$$\exists U(x_0) \ \forall x \in U(x_0) \quad |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

(24) Дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ <u>Область сходимости</u> – мн-во всех X, для которых ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(X)$, мажорирующий ряд.

$\forall x \in \langle a; b\rangle \ \forall |U_n(x)| \leq a_n$

<u>Т. (о почленном интегрировании):</u>

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(X)$

1. $\forall n$ $U_n(X)$ непр. на $[a;b]$ отрезок!
2. $\exists$ сходящаяся мажоранта на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\Big)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_a^b U_n(x)\,dx$$

<u>Д.</u>: $\underset{\text{частич. сум.}}{S_m(X)}$: $S(x)=S_m(X)+R_m(X)$, где $S_m(X)$ – частич. сум., $R_m(X)$ – остаток. По <u>Т. о непр-ти суммы ряда</u>:

$$\begin{cases} S_m - \text{непр.}\\ R_m - \text{непр.}\\ S - \text{непр.}\end{cases}$$

$\Leftarrow$ непрерывн. ф-ция интегрируема

$$\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b S_m(x)dx+\int\limits_a^b R_m(x)dx$$

$$\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x)\Big)dx=\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=1}^{m}U_n(x)\Big)dx+\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=m+1}^{+\infty}U_n(x)\Big)dx$$

$$\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x)\Big)dx=\sum_{n=1}^{m}\int\limits_a^b U_n(x)dx+\underbrace{\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=m+1}^{+\infty}U_n(X)\Big)dx}_{\alpha_m\to 0,\ \text{при } m\to\infty}$$

от X не зависит, а зависит только от m

$$|\alpha_m|=\Big|\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=m+1}^{+\infty}U_n(x)\Big)dx\Big|\leq\int\limits_a^b\Big|\sum_{n=m+1}^{+\infty}U_n(X)\Big|dx\leq\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=m+1}^{+\infty}|U_n(x)|\Big)dx\leq$$

$$\leq\int\limits_a^b\underbrace{\Big(\sum_{n=m+1}^{+\infty}a_n\Big)}_{R_m^a}dx=(b-a)R_m^a$$

при $m\to\infty$ $R_m^a\to 0$

$$0\leq|\alpha_m|\leq(b-a)\underset{\to 0}{R_m^a}$$

по Т. о зажат. перем.:

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_m=0$$

T. (о почленном дифференцировании):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x), \quad x \in [a;b].$$

1. $\forall n \quad U_n(x) \in C^1([a;b])$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ сход. на $[a;b]$
3. $\exists$ сходящ. мажоранта на $[a;b]$ для ряда из производных $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$

$$\Downarrow$$

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$$

Д.: Возьмём ряд из производных и применим к нему теоремы об интегрировании (т.е. всё наоборот).

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x U_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} [U_n(x) - U_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(a).$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(a) + \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U'(t)\right)dt$$

константа

непр. функция, т.е. она дифференцируема

также диффер-ма

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$$

(25) Теорема Абеля для степенных рядов; радиус и интервал сходимости.
⟨Сохр. R при диф-ии и инт-ии ряда⟩

<u>Степенной ряд</u> – как бы многочлен бесконечной степени.

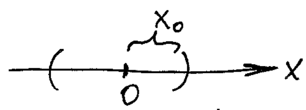
$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

Его <u>область сходимости</u> – симметричный интервал $(-R; R)$
Внутри этого интервала ряд бесконечно дифференцируем.
Такой ряд всегда сходится при $x = 0$.

<u>Т. Абеля:</u>

Если степенной ряд сходится в (·) $x_0 \neq 0$, то этот ряд абсолютно сходится для $\forall x$ таких, что $|x| < |x_0|$
⟨одна точка сходимости тянет за собой весь интервал⟩.

<u>Д.:</u> $|0| < x < |x_0|$



сходится ряд из модулей:

$$|C_n x^n| = \left|C_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |C_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1 \quad (\text{т.к. } |x| < |x_0|)$$

$$\Downarrow$$

$$|C_n x_0^n| \cdot q^n$$

Рассмотрим послед-ть $C_n x_0^n$ $\Rightarrow$ ряд сход. в (·) x_0

$\Downarrow$

по необход. признаку $C_n x_0^n \to 0$ $\Rightarrow$ послед-ть ограничена (если сход., то огранич.)

$$\exists A > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |C_n x_0^n| \leq A$$

$|C_n x_0^n| \leq Aq^n \longleftrightarrow$ члены геометрич. прогрессии, $q < 1$ $\Rightarrow$ она сходится $\Rightarrow$ по <u>1-му признаку</u> сравнения ряд сходится.

<u>Радиус сходимости степ. ряда.</u>

Расм-им множ-во x таких, что ряд сходится
Мн-во неотриц. чисел:

$$R = \sup\{|x| : \text{в (·) } x \text{ ряд сход.}\}$$

$R = 0$, $R > 0$, R = символ +бесконечность
$(-R; R)$ интервал сходимости.

<u>Док-ать:</u>
1) внутри интервала ряд абсолютно сход.
2) вне интервала ряд расходится
3) в концевых (·) — всё что угодно!

$R = +\infty$ – есть точки со сколь угодно большими модулями

$\Downarrow$

в $\forall (\cdot)$ числовой оси ряд ~~абсолютно~~ расход? не явл. абс. сходящимся.

$0 < R < +\infty$ $\quad -R \quad R$ $\quad |X| > R$ – расход. Если бы за пределами существовала точка сходимости, то это противоречило бы тому, что у нас есть точ. верх. грань.

$|X_1| < R$

$R - |X_1| = \varepsilon > 0$

по св-ву верхней грани $\exists (\cdot)\ X_2$, что её модуль будет $> R - \varepsilon$:

$\exists X_2 \quad R - \varepsilon < |X_2|$

$|X_1| < |X_2|$

по Т. Абеля в $(\cdot)\ X$ ряд абсолютно сход.

$\Downarrow$

в $\forall (\cdot)$ внутри интервала ряд сходится.

Предположим, что коэффициенты ряда отлич. от 0: $C_n \neq 0$

Применим признак Даламбера к модулям:

$$\frac{|C_{n+1} X^{n+1}|}{|C_n X^n|} = \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \cdot |X|$$

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}}$$

(если такой предел существует).

Ф-ла действительна даже при $R=0$, $R=+\infty$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = A$

1) $0 < A < +\infty$ $\quad$ (1) $\to A$ $\quad$ по признаку Даламбера, если это больше $1 \Rightarrow$ ряд расход., если меньше — сход.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1} X^{n+1}|}{|C_n X^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \cdot |X| = \frac{|X|}{A}$$

$A = R$ $\qquad \frac{|X|}{A} < 1 \quad |X| < A$

2) $A = +\infty$

(1) $\to \infty$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1} X^{n+1}|}{|C_n X^n|} = 0 < 1 \Rightarrow A = R$$

3) $A = 0$

(1) $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1} X^{n+1}|}{|C_n X^n|} = \infty$$

Ряд сход. в $(\cdot)$ 0

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}$$

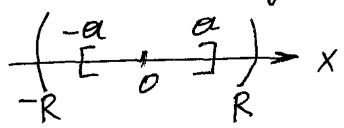
(25) <продолжение>

Св-ва суммы степенного ряда внутри интервала сходимости.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \qquad (-R; R)$$

Сумма степенного ряда непрерывна в интервале сходимости
<Т. о непр-ти суммы...>

Пусть $\exists$ сходящаяся мажоранта $\Rightarrow$ сумма ряда непрерывна



Оценим по модулю член нашего функц. ряда:

$$|c_n x^n| = |c_n| \cdot |x|^n \leq |c_n| \cdot a^n = |c_n a^n|$$

$(\cdot)$ a $\in$ интервалу сходимости

$\Downarrow$

ряд сходится в этой $(\cdot)$

$$\sum_n |c_n a^n|$$

Сумма непр. в $(\cdot)$ x, значит она непр. на всём интервале сходимости.

Ряд можно почленно интегрировать от 0 до a ?

Дифференцируемость.

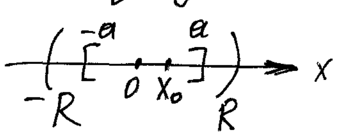
R $\quad \sum_n c_n x^n \qquad R_1 \quad \sum_n n c_n x^{n-1}$

$R_1 = R$ $\qquad$ ряд по x'

При почленном дифференцировании радиус сходимости не меняется.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n c_n|}{|(n+1)c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \overset{\to 1}{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 1 \cdot R = R$$

В интервале сходимости сумма степенного ряда диффер-ма, и её производная = сумме ряда из производных



x_0, докажем, что в этой $(\cdot)$ x' = тому, чему надо...

(Т.): Члены ряда — функции класса C^1

$\exists$ сходящ. мажоранта для ряда из производных

$$|n c_n x^{n-1}| = |n c_n| \cdot |x|^{n-1} \leq |n c_n| a^{n-1} = \underbrace{|n c_n a^{n-1}|}$$

имеем сходящ. мажоранту на $[-a; a]$ $\leftarrow$ член сходящегося числового ряда

Итог:

на всём интервале сходимости:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right)' = \sum_n n c_n x^{n-1}$$

Сумма степенного ряда — функция бесконеч. диффер-ма в интервале $(-R; R)$

!! Сумма степенных рядов образует более узкий класс среди всех бесконечно диффер-ых функций.

(26) Ряды Тейлора. 6 основных разложений. Свойства суммы степенного ряда.

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$$c_0 = S(0)$$

$$S'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots$$

$$c_1 = S'(0)$$

$$S''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots$$

$$c_2 = \frac{S''(0)}{2!}$$

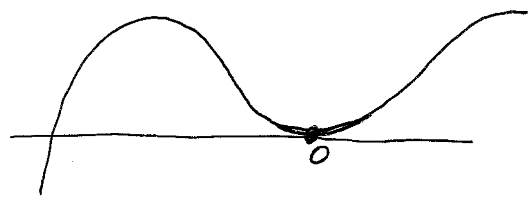
$$S'''(x) = 3\cdot 2\cdot c_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$$

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<не для ряда>:



Если ряд сходится на $(-R; R)$, его сумма в окрестности (.)0 $= 0$

все коэффициенты $= 0$

$\Downarrow$

$S \equiv 0$ на всей числовой оси

! Далеко не каждая бесконеч. дифференцируемая ф-ция является суммой степенного ряда.

Сумма сходящихся степенных рядов – <u>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ.</u>

Пусть в $U(0)$ $f(x) \in C^{\infty}(U(0))$

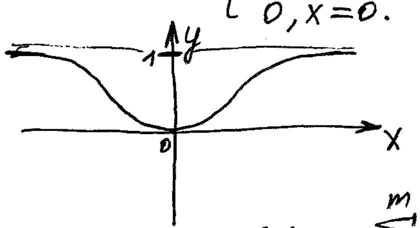
– существует ли такой степенной ряд, что $\underbrace{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n}$?

Если это так $\Rightarrow$ коэффициенты = производным:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Если ряд сходится, то сходится ли он к породившей его функции?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



все её производные существуют в (.)0 и они $= 0$.

$f^{(n)}(0) = 0$ – тогда ряд Тейлора состоит из 0.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_m(x)}_{\text{остаточный член}}$$

Он в то же время – частичная сумма ряда.

Пусть в окрестности 0 задана бесконечно диффер-ая ф-ция $f(x)$

Для того, чтобы эта ф-ция в дан. окр. раскладывалась в степенной ряд, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{m\to\infty} r_m(x) = 0$$

Т.: 1. $f(x) \in C^{\infty}(U(0))$
2. $\exists M>0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(0)$ для $\forall n : |f^{(n)}(x)| \le M$

$\Downarrow$

в $U(0)$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ – т.е. раскладывается в степ. ряд.

Д.: $r_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}x^{m+1}$ ⟨c – нек. (·) м/у 0 и x⟩, c – зависит от x, m.

Оценим по модулю: $0\le |r_m(x)| = \frac{|f^{(m+1)}(c)|\cdot|x|^{m+1}}{(m+1)!} \le M\cdot\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \to 0$, при $m\to\infty$

по Т. о „зажатой переменной": $r_m\to 0$

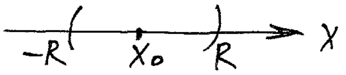
$\Downarrow$

для всех x из этой окрестности ф-ция раскладывается в степенной ряд.

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$ $(x-x_0)=t$: сдвиг по оси; св-ва такие же, но с поправкой на x_0.

Область его сходимости: интервал $(-R; R)$ с центром в (·) x_0

$c_n=\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$

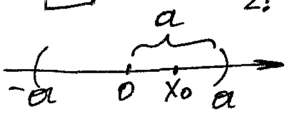


ряд Тейлора для $f(x)$: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Разложение в степ. ряды:

e^x $(e^x)^{(n)}=e^x$ на всей числовой оси ф-ция раскладывается в ряд.

(1) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$



$(e^x)^{(n)}=e^x\le e^a \Rightarrow$ ф-ция расклад. в ⟨степ⟩ ряд Тейлора на всей числовой оси, значит и в (·) x_0

$\boxed{x\in(-\infty;+\infty)}$

sin x, cos x

$\sin^{(n)}x=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$

$|\sin^{(n)}x|\le 1 \Rightarrow$ на всей числовой выполнен признак $\Rightarrow$ расклад. в свой ряд Тейлора на всей числовой оси

$\sin\frac{\pi}{2}n$ для половины $=0$ (при чётн. $\sin\frac{\pi}{2}n=0$)

$\sin\frac{\pi}{2}n$ – ф-ция нечётная, раскладывается по нечётным.

(2) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, на всей числовой оси $\boxed{x\in(-\infty;+\infty)}$

$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{\pi}{2}n)$

при n-чётн. $\cos = 0 \Rightarrow$ расклад. по чётн. n :

(3) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}$ $\boxed{x\in(-\infty;+\infty)}$

$a_1=1$, $q=-x \Rightarrow$ прогрессия бесконечно уменьшается, если $q<1$

$|-x|<1$

$|x|<1$ $x\in(-1;1)$

(4) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ $\boxed{x\in(-1;1)}$ $\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1;1)$

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ условно сход. $\boxed{-1<x\le 1}$ (будет сходиться к $\ln 2$ по II Т. Абеля)

(6) $(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\dots=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p-1)(p-n+1)}{n!}x^n$

$\boxed{x\in(-1;1)}$

(27) Ряды с комплексными числами. Формула Эйлера.

Ф-ция $W_n = U_n + iV_n$

ряд сходится, если сходятся оба ряда U_n и V_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n + i\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$$

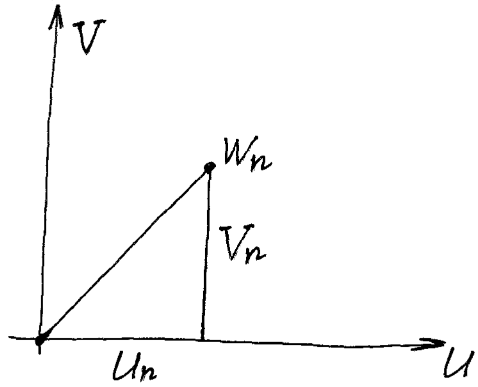
$\sum_{n=1}^{+\infty} |W_n|$ сход.

$|U_n| \leq |W_n|$

абс. сход.

$|V_n| \leq |W_n|$

абс. сход.



$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{C_n \cdot Z^n}_{\text{компл. числа}}$$

Т. Абеля:

Если степенной ряд с комплексными членами сход. в (.) $Z_0 \neq 0$, тогда он абс. сходится для $\forall Z$:

$$|Z| < |Z_0|$$

Д.: Возьмём $|Z| < |Z_0|$

Покажем, что в этой (.) сходится ряд:

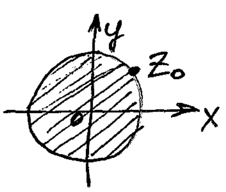
$$|C_n Z^n| = \left|C_n Z_0^n \cdot \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n\right| = |C_n Z_0^n| \cdot \left|\frac{Z}{Z_0}\right|^n = |C_n Z^n| \leq \underbrace{A \cdot q^n}$$

$\underbrace{q = \left|\frac{Z}{Z_0}\right| < 1}_{\text{сход.}} \rightarrow \underbrace{\text{ряд сходится}}$ прогрессия

послед-ть огранич. (ряд сход. в (.) Z_0, по необх. признаку его члены $\to 0$, есть $\lim$)

$\underline{|Z| < a}$ (если $= a$, то это окружность)

внутренность круга.



круг сходимости

внутри – абсолютно сход., снаружи – расходится.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ для $x \in (-\infty; +\infty)$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)|z|^n} = \frac{1}{n+1}|z| \to 0 < 1$$

$z = i\varphi$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{i\varphi^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \underline{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}.$$

(28) Ряды Фурье.

Ф-ция задана; она периодич., если
$T>0 \ \forall x \quad f(x+T)=f(x)$ $\qquad \langle (*): \sin; \cos \rangle$

Если ф-ция интегрируема, то если взять интеграл на отрезке в период, то интеграл независит от a:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \underbrace{\int_0^T f(x)dx}_{} + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx - \int_0^a f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ (не зависит от } a)$$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} x-T=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\} = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+m)} \underset{=0}{\sin(n+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\,dx = 0 \text{ всегда!!!}$$

Разложить ф-цию по гармоническим составляющим:
$\cos nx$, $\sin nx$

$f(x+2\pi)=f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Предположим, что сходится ряд из коэффициентов:

$$\left|\frac{a_n}{2}\right| + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n| + |b_n|) \text{ — сходящ. мажоранта}$$

Ряд, составленный из cos и sin, имеет сходящуюся мажоранту ⇒ сходится.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \text{ — фиксир. число; } a_n - ?$$

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx\,dx + b_k \overset{=0}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx\,dx}\Big) = \underline{a_n \pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{верно для: } n=0,1,2,\ldots$$

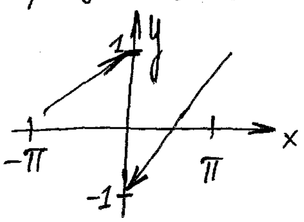
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Ряды Фурье

Ф-ция кусочно непрерывна на отр. $[a; b]$, если на этом отрезке она имеет не более конечного числа точек разрыва, причём все эти (·) разрыва первого рода (т.е. имеют предел справа и слева).

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0) \qquad \rightleftarrows \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$$

Кусочно монотонная — если этот отрезок можно представить в виде объединения конечного числа промежутков, на каждом из которых ф-ция монотонна.



Т. Дирихле: Пусть ф-ция $f(x)$ определена на всей числовой оси, имеет период 2π и на отрезке $[-\pi; \pi]$ она кусочно монотонна и кусочно непрерывна, тогда её ряд Фурье сходится на всей оси, причём:

в (·) непрерывности сходится к самой ф-ции.

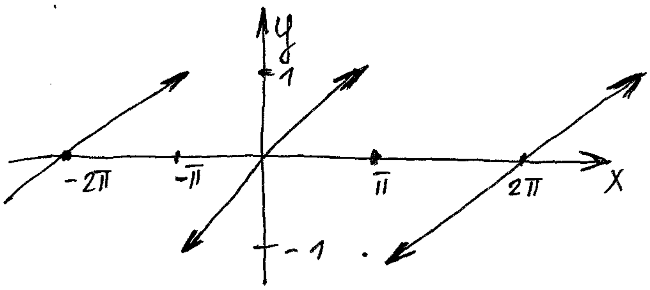
в (·)-ах разрыва сходится к полусумме пределов справа и слева: $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Разложение ф-ции в ряд Фурье:

$(-\pi; \pi)$

$f(x)=x$

Найдём коэффициент Фурье: a_n и b_n.



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

неч. ф-ция, $\int$ по симметрич. отрезку, $\int = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\cdot\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx =$$

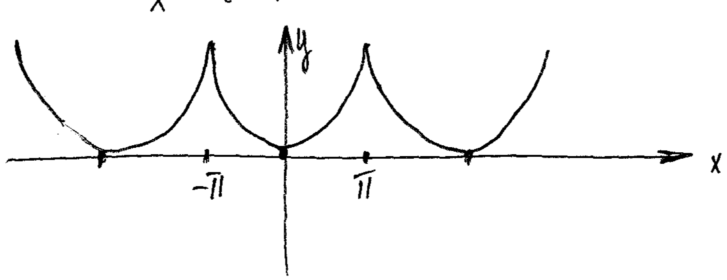
$$= -\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} = -\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}$$

$$\boxed{\cos n\pi = (-1)^n}$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$ — ряд сходится условно (нет сходящ. мажоранты)

коэф-нт Фурье убывает медленно.

x^2 $(-\pi; \pi)$



28 <продолжение>

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2\,d\sin nx = \underbrace{\frac{2}{\pi n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

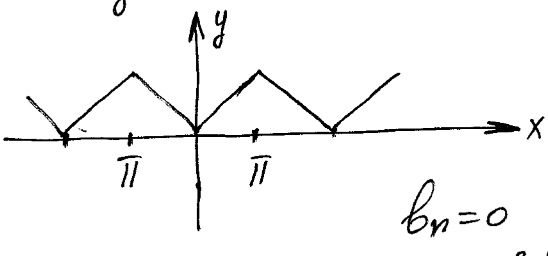
$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx = \frac{4}{\pi n^2}x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} = \frac{4}{\cancel{\pi} n^2}\cancel{\pi}\cos n\pi = (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$ — сходится лучше (есть сходящаяся мажоранта)

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}; \quad -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Разложить x по $\cos nx$ в интервале $(-\pi;\pi)$.



коэффициенты Фурье будут убывать довольно быстро

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d\sin nx = \underbrace{\frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

n — чётное $\Rightarrow [(-1)^n - 1] = 0$

n — нечёт. $\Rightarrow [(-1)^n - 1] = -2$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$T = 2l$ (ось можно растянуть...)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$