

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

---

Физический факультет

Д.В.Белов

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Издательство Московского университета

1994

ББК 22.33

Б 43

УДК 530.10

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор К.П.Белов,  
доктор физико-математических наук, профессор Б.А.Струков

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

Белов Д.В.

Б 43 Электромагнетизм и волновая оптика: Учебное пособие. -  
М.: Изд-во МГУ, 1994. - 208 с.  
ISBN 5-211-03156-3

Учебное пособие представляет собой сжатое изложение разделов "Электромагнетизм" и "Волновая оптика" лекционного курса общей физики. Акцент сделан на выявлении смысловой стороны основных физических законов и логике их применения для объяснения явлений, а не на широте охвата проблем.

Для студентов нефизических специальностей университетов и других вузов.

077(02)-94 - заказное

ББК 22.33

ISBN 5-211-03156-3

© Московский государственный  
университет, 1994

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие .....	5
<b>Часть I. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ .....</b>	
Глава I. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ .....	6
§ 1. Понятие об электростатическом поле и электрическом заряде .....	6
§ 2. Напряженность .....	10
§ 3. Потенциал .....	21
Глава II. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ВЕЩЕСТВО .....	29
§ 4. Проводник в электростатическом поле .....	29
§ 5. Диэлектрик в электростатическом поле .....	37
§ 6. Электростатическое поле при наличии вещества ...	47
Глава III. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....	51
§ 7. Общие свойства постоянного магнитного поля .....	51
§ 8. Силы, действующие в магнитном поле .....	65
§ 9. Магнитное поле при наличии вещества .....	71
Глава IV. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА .....	78
§ 10. Постоянный ток .....	78
§ 11. Квазистационарные токи .....	85
§ 12. Синусоидальный ток .....	94
§ 13. Электрические колебания .....	102
Глава V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....	111
§ 14. Теория Максвелла .....	111
§ 15. Электромагнитные волны .....	117
<b>Часть II ВОЛНОВАЯ ОПТИКА .....</b>	
Введение .....	124
Глава I. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА .....	125
§ 16. Понятие об интерференции .....	125
§ 17. Когерентность .....	127
§ 18. Интерференционная картина от двух точечных монохроматических источников света .....	131
§ 19. Оптическая разность хода .....	136
§ 20. Некоторые интерференционные схемы .....	138
§ 21. Влияние размеров источника света на интерференционную картину .....	140
§ 22. Влияние некогерентности источника света на интерференционную картину .....	142

	§ 23. Интерференция в тонких пленках .....	143
	§ 24. Применения интерференции .....	147
Глава II.	ДИФРАКЦИЯ СВЕТА .....	149
	§ 25. Понятие о дифракции света .....	149
	§ 26. Принцип Гюйгенса - Френеля .....	150
	§ 27. Метод зон Френеля .....	152
	§ 28. Метод векторных диаграмм .....	153
	§ 29. Дифракция Френеля на круглом отверстии .....	155
	§ 30. Зонная пластинка .....	157
	§ 31. Дифракция Френеля на круглом диске .....	158
	§ 32. Дифракция Фраунгофера на щели .....	158
	§ 33. Дифракционная решетка в монохроматическом свете .	163
	§ 34. Дифракционная решетка как спектральный аппарат .	166
	§ 35. Разрешающая сила объектива .....	170
Глава III.	ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА .....	172
	§ 36. Естественный и поляризованный свет .....	172
	§ 37. Оптическая анизотропия двоякопреломляющих кристал- лов .....	175
	§ 38. Построение Гюйгенса для одноосных кристаллов ..	179
	§ 39. Интерференция поляризованных лучей .....	183
	§ 40. Эллиптическая и круговая поляризация света ....	186
	§ 41. Искусственная оптическая анизотропия .....	188
	§ 42. Вращение плоскости поляризации .....	190
	§ 43. Поляризация света при отражении и преломлении на границе раздела изотропных диэлектриков .....	194
Глава IV.	ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ .....	196
	§ 44. Классическая модель осцилляторов .....	196
	§ 45. Дисперсия света .....	198
	§ 46. Поглощение света .....	201
	§ 47. Рассеяние света .....	204



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие написано на основе курса лекций, читавшегося автором на протяжении ряда лет студентам геофизического отделения геологического факультета МГУ, и охватывает материал второго семестра (электромагнетизм и волновая оптика) трехсеместрового курса физики. Помимо студентов геофизиков оно может быть использовано студентами геологического (общий поток), географического, биологического и почвенного факультетов с той оговоркой, что здесь не освещен ряд тем (электрические и магнитные свойства вещества, элементы атомной физики и квантовой оптики), входящих в программу двухсеместровых курсов физики. Рассмотрение этих вопросов можно найти в других пособиях и учебниках, например, в известном "Курсе физики" И.В.Савельева.

Небольшой объем издания заставил ограничиться изложением чисто теоретического материала и оставить в стороне вопросы прикладного характера, ссылки на лекционные демонстрации, разбор задач. Поэтому достаточно полное представление о рассматриваемых явлениях настоящее пособие может дать лишь в сочетании с лекционным курсом и семинарами.

Автор не разделяет распространенной точки зрения, что студентам нефизических специальностей достаточно иметь полукачественные представления о картине физического мира, и стремился к тому, чтобы изложение материала, пусть ограниченного по тематике, было достаточно строгим и аргументированным, содействуя развитию у студентов научного мышления и утверждая взгляд на физику как на точную науку.

Выражаю огромную благодарность Г.Е.Пустовалову за плодотворные дискуссии (им же выполнены все рисунки) и В.Л.Кагану за ряд ценных замечаний. Весьма признателен также Г.П.Воробьеву и Л.В.Пироговой, помогавшим готовить рукопись к печати.

У-1403

# ЧАСТЬ I

## Э Л Е К Т Р О М А Г Н Е Т И З М

### Глава I

#### Э Л Е К Т Р О С Т А Т И Ч Е С К О Е   П О Л Е   В   В А К У У М Е

##### § 1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАРЯДЕ

Электростатическое поле. Как хорошо известно из школьного курса физики, заряженные тела взаимодействуют друг с другом посредством электромагнитного поля. Мы начнем изучение этого взаимодействия с частного случая, когда заряженные тела неподвижны и в них отсутствуют электрические токи, т.е. распределение заряда в пространстве не изменяется со временем. При этом, естественно, постоянны во времени и все характеристики поля, порождаемого такими телами — оно называется электростатическим.

Целью настоящей главы является изучение основных свойств электростатического поля, не зависящих от специфических электрических свойств вещества. Для этого необходимо ввести физические величины, характеризующие заряженные тела и электростатическое поле, и установить законы, которым они подчиняются.

Электрический заряд. Изучение электростатических взаимодействий приводит к заключению, что заряженное тело можно охарактеризовать скалярной физической величиной — электрическим зарядом, от величины и знака которого зависит взаимодействие тела с другими заряженными телами.

Определение заряда, как и всякой другой физической величины, будет неполным, если не указать как, по крайней мере в принципе, его можно измерить. Для измерения заряда можно, например, поступить следующим образом. Будем помещать в одну и ту же точку какого-либо электростатического поля поочередно заряженные тела и интересоваться силами, действующими на них со стороны поля. Если размеры тел, как порождающих поле, так и вносимых в него, существенно меньше расстояний между телами, то опыт покажет, что исследуемые силы действуют вдоль одной прямой, но на некоторые тела — в одном направлении, а на другие — в противоположном. Первые тела характеризуются зарядами одного знака, вторые — зарядами другого знака. Модуль силы оказывается пропорциональным модулю заряда тела, вносимого в поле:

$$F \sim |q| \quad (1.1)$$

Чтобы убедиться в этом, нет необходимости уметь измерять заряд, достаточно иметь возможность уменьшать его в несколько раз. Это можно сделать, приводя в соприкосновение заряженный металлический шарик с несколькими точно такими же незаряженными шариками. Так как шарики одинаковы, заряд разделится между ними поровну, если, конечно, заранее предположить, что в процессе перераспределения зарядов суммарный заряд сохраняется.

Согласно (1.1) модули сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , действующих на тела с зарядами соответственно  $q_1$  и  $q_2$ , помещаемые поочередно в одну и ту же точку поля, относятся как модули этих зарядов:  $F_1/F_2 = |q_1|/|q_2|$ . Если первое тело обладает зарядом, принятым за единицу измерения заряда ( $|q_1| = 1$  ед.зар.), то модуль второго заряда  $|q|$ , подлежащий измерению, равен

$$|q| = (1 \text{ ед.зар.}) F_q / F_{q=1 \text{ ед. зар.}} \quad (1.2)$$

В СИ за основную электрическую единицу принимается единица силы тока – ампер (см. далее с.66), а единица заряда – кулон (Кл) – является производной и соответствует заряду, протекающему за 1 секунду через сечение проводника, по которому течет ток с силой тока в 1 ампер.

В настоящее время хорошо известно, что заряд тел обусловлен наличием электрического заряда у элементарных частиц, входящих в состав атомов: положительного – у протонов и отрицательного – у электронов. Эти, как и другие заряженные элементарные частицы, обладают элементарным электрическим зарядом, величина которого

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \quad (1.3)$$

является минимальной существующей в природе порцией заряда (на разрабатываемой в последние годы теории кварков мы не останавливаемся). Полный заряд тела

$$q = e N_p + (-e) N_e \quad (1.4)$$

где  $N_p$  – число протонов,  $N_e$  – число электронов. При равенстве числа протонов числу электронов  $q = 0$ ; при недостатке электронов ( $N_e < N_p$ ) тело заряжено положительно, при их избытке ( $N_e > N_p$ ) – отрицательно.

Таким образом, заряд тела всегда кратен величине элементарного заряда, т.е. в принципе дискретен. Однако в большинстве задач с макроскопическими телами заряд определяется с погрешностью, существенно превосходящей величину элементарного заряда, так что оказывается возможным считать заряд непрерывно изменяющейся величиной.

Плотность заряда. Распределение заряда в пространстве можно описать, введя понятие плотности заряда. Объемной плотностью заряда  $\rho$  в некоторой точке называется отношение заряда  $\Delta q$ , заключенного в малом объеме  $\Delta V$  в окрестности рассматриваемой точки, к этому объему:

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (1.5)$$

Следовательно, объемная плотность заряда численно равна заряду, приходящемуся на единицу объема. Если в формуле (1.5) перейти к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$ , то мы получим истинную, или микроскопическую, плотность заряда, которая сложным образом изменяется от точки к точке внутри вещества, выявляя распределение заряда в атомах. Для наших целей, однако, достаточно оперировать с макроскопической плотностью, т.е. с плотностью, усредненной по областям пространства хотя и малым по макроскопическим масштабам, но все же содержащим огромное число атомов (размеры области  $\gg 10^{-10}$  м;  $10^{-10}$  м = 0,1 нм = 1 Å — один ангстрем — характерный размер атомов и простых молекул). Такой макроскопически бесконечно малый объем  $\Delta V$  (а также поверхность  $\Delta S$ , отрезок  $\Delta L$ ) имеется в виду здесь и в дальнейшем, когда речь идет о макроскопических характеристиках вещества.

Если известна плотность заряда как функция координат, то можно найти заряд, заключенный в любом объеме  $V$ . Для этого разобьем рассматриваемую область пространства на малые ячейки. Заряд  $\Delta q$  в некоторой ячейке объемом  $\Delta V$  в окрестности точки с координатами  $x, y, z$  согласно (1.5) определится выражением

$$\Delta q = \rho(x, y, z) \Delta V. \quad (1.6)$$

Полный заряд в области объемом  $V$  получим, суммируя выражения вида (1.6) по всему объему и переходя к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$q = \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \sum_1 \rho(x_1, y_1, z_1) \Delta V_1 = \int_V \rho dV. \quad (1.7)$$

В некоторых случаях заряд оказывается сосредоточенным в микроскопически тонком слое вдоль поверхности, например, вблизи поверхности проводника в состоянии электростатического равновесия. При макроскопическом рассмотрении толщины слоя можно пренебречь и считать заряд распределенным по поверхности. Такое распределение заряда характеризуется поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , которая представляет собой отношение заряда  $\Delta q$  макроскопически бесконечно малого участка поверхности к площади  $\Delta S$  этого участка:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} . \quad (1.8)$$

Следовательно, поверхностная плотность заряда численно равна заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности. Заряд на малом участке  $\Delta S$  поверхности согласно (1.8) выразится формулой

$$\Delta q = \sigma \Delta S, \quad (1.9)$$

а заряд на любой поверхности  $S$ , оудучи суммой зарядов на всех ее малых участках, определится поверхностным интегралом

$$q = \int_S \sigma \, dS. \quad (1.10)$$

В ряде задач, когда заряд распределен на телах вытянутой формы (нить, цилиндр), пользуются линейной плотностью заряда  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\Delta q}{\Delta l}, \quad (1.11)$$

где  $\Delta q$  – заряд, приходящийся на участок малой длины  $\Delta l$  данного тела. Согласно (1.11) заряд на малом участке длиной  $\Delta l$  определится выражением

$$\Delta q = \tau \Delta l, \quad (1.12)$$

а заряд участка конечной длины  $l$  – интегралом

$$q = \int_l \tau \, dl. \quad (1.13)$$

Закон Кулона. Исходным пунктом в теории электричества является впервые экспериментально установленный Кулоном закон взаимодействия двух точечных зарядов, т.е. заряженных тел, размеры которых существенно меньше расстояния между ними. Согласно этому закону силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  взаимодействия двух точечных зарядов удовлетворяют третьему закону Ньютона (направлены вдоль прямой, соединяющей заряды, равны по величине и противоположны по направлению), а их модуль прямо пропорционален зарядам  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорционален квадрату расстояния  $r_{12}$  между ними (рис.1):

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} . \quad (1.14)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от выбора системы единиц и определяется экспериментально. В СИ его записывают в виде

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . \quad (1.15)$$

Постоянная  $\epsilon_0$  называется электрической постоянной и. Опыт приводит к следующему значению  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}^2/\text{Н м}^2, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н м}^2/\text{Кл}^2. \quad (1.16)$$

Закон Кулона можно записать в векторном виде:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1.17)$$

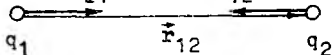


Рис. 1

здесь  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ,  $\vec{r}_{12}$  — вектор, проведенный от заряда  $q_1$  к заряду  $q_2$  (рис. 1). Формула (1.17) отражает тот факт, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются друг к другу. Действительно, в первом случае  $q_1 q_2 > 0$ , так что сила  $\vec{F}_{12}$  сонаправлена с вектором  $\vec{r}_{12}$ , т.е. направлена от заряда  $q_1$ ; в случае разноименных зарядов  $q_1 q_2 < 0$  и сила  $\vec{F}_{12}$  направлена против вектора  $\vec{r}_{12}$ , т.е. к заряду  $q_1$ .

## § 2. НАПРЯЖЕННОСТЬ

Напряженность электрического поля. Рассмотрим произвольное электростатическое поле, создаваемое какой-либо системой зарядов. Возьмем пробный заряд  $q_0$  и будем помещать его в различные точки пространства, интересуясь силой  $\vec{F}$ , действующей на него со стороны поля.

Пробным зарядом может служить заряженное тело, удовлетворяющее двум условиям. Во-первых, должны быть достаточно малы его геометрические размеры, поскольку нас интересует сила, действующая в определенной точке пространства. Во-вторых, должна быть небольшой по модулю величина заряда  $q_0$ , так как в противном случае поле самого пробного заряда может вызвать заметное перераспределение зарядов на телах, создающих исследуемое поле, и тем самым существенно исказить последнее.

Опыт покажет, что величина и направление силы  $\vec{F}$  будут зависеть от точки пространства, но в фиксированной точке эта сила действует вдоль определенной прямой и, как уже отмечалось, по модулю пропорциональна величине пробного заряда  $q_0$ . Поэтому (1.1) можно записать в векторной форме:

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{E}(x, y, z) q_0. \quad (2.1)$$

Сила  $\vec{F}$  не может служить характеристикой поля, так как она зависит от величины пробного заряда  $q_0$ , вносимого в поле. Вектор же  $\vec{E}$  не зависит от  $q_0$ , а зависит только от свойств поля в рассматриваемой точке. Он называется напряженностью электрического поля. Выражая  $\vec{E}$  из (2.1), имеем:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (2.2)$$

Напряженность электрического поля равна отношению силы, действующей на пробный заряд, к величине этого заряда. Иными словами, напряженность численно и по направлению совпадает с силой, действующей на единичный положительный пробный заряд.

Единицей напряженности в СИ согласно (2.2) является 1 Н/Кл (ньютон на кулон), это эквивалентно 1 В/м (вольт на метр) — общепринятому обозначению единицы напряженности. Действительно, как будет показано на с.24,  $1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}$ , откуда  $1\text{Н}/\text{Кл} = 1\text{Дж}/\text{Кл м} = 1\text{В}/\text{м}$ .

Для целого ряда задач оказывается важным уметь рассчитать напряженность электростатического поля по заданному распределению в пространстве зарядов, порождающих это поле.

Поле точечного заряда. Изучим сначала поле, создаваемое точечным зарядом. Обозначим этот заряд  $q$ , а положение точки пространства будем характеризовать радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным в нее из заряда  $q$ . Сила, действующая на пробный заряд  $q_0$ , мысленно помещаемый в ту или иную точку пространства, определится законом Кулона (1.17), где в соответствии с принятыми обозначениями следует заменить  $q_1$  на  $q$ ,  $q_2$  на  $q_0$  и  $\vec{r}_{12}$  на  $\vec{r}$ :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} \vec{r}. \quad (2.3)$$

Поделив согласно определению напряженности (2.2) эту силу на величину  $q_0$  пробного заряда, получим:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (2.4)$$

Для модуля  $E$  напряженности  $\vec{E}$  и ее проекции  $E_r$  на радиальное направление имеем:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}, \quad E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (2.5)$$

Как следует из этих формул, в поле положительного точечного заряда ( $q > 0$ ) напряженность направлена в сторону радиус-вектора  $\vec{r}$ , т.е. от заряда  $q$ , а в поле отрицательного заряда ( $q < 0$ ) — против  $\vec{r}$ , т.е. к заряду  $q$ . Модуль напряженности обратно пропорционален квадрату расстояния  $r$ .

Формула (2.4) приближенно описывает поле любого заряженного тела на расстояниях  $r$  от него, существенно больших размеров тела, и тем точнее, чем больше  $r$ . Иначе говоря, она определяет асимптотическое поведение поля при неограниченном удалении от порождающих его

зарядов. Картина поля точечного заряда дана на рис.2 а,б, где векторы напряженности изображены стрелками.

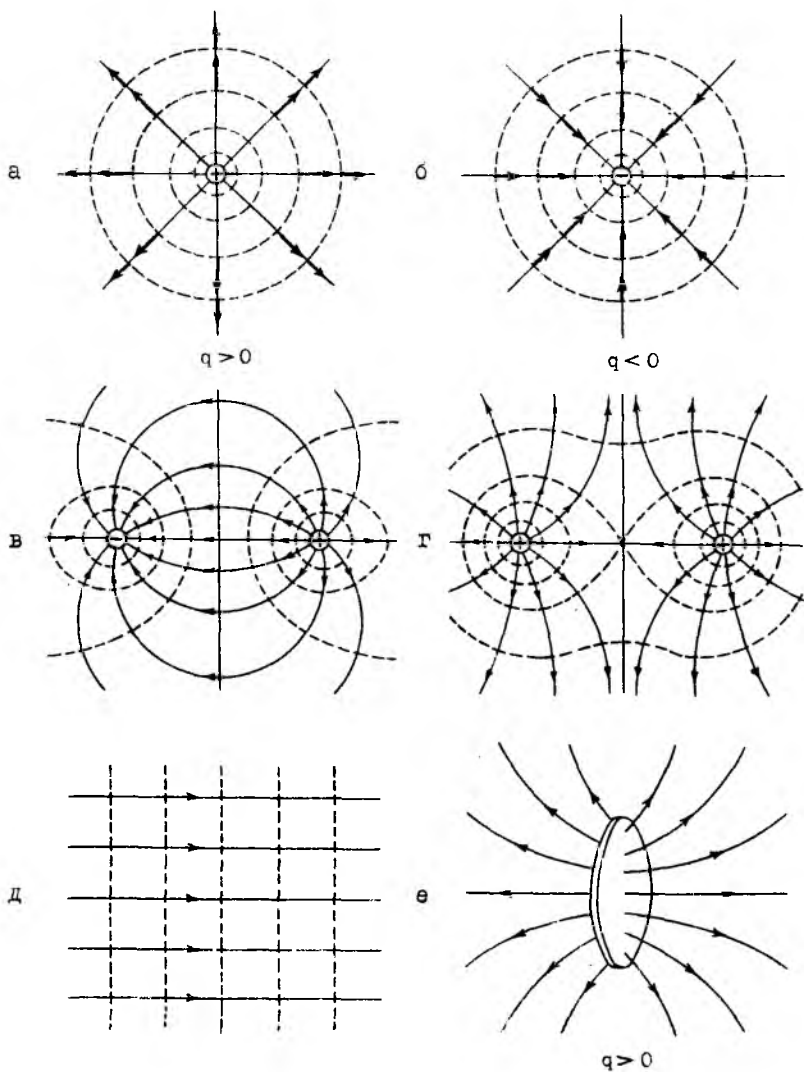


Рис.2



Принцип суперпозиции. Фундаментальным опытным фактом является то, что для электрического поля имеет место принцип суперпозиции, или наложения, согласно которому напряженность поля, создаваемого системой зарядов, равна в каждой точке пространства сумме напряженностей полей, которые создавал бы в этой точке каждый заряд системы в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_{(i)}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\vec{E}_{(i)}$  - напряженность поля, обусловленного  $i$ -м зарядом системы, и суммирование ведется по всем зарядам системы.

Принцип суперпозиции позволяет теоретически рассчитать напряженность поля при любом заданном распределении заряда в пространстве. Действительно, всякую систему заряженных тел можно представить как совокупность точечных зарядов, при необходимости разбивая мысленно протяженные тела на малые участки. Отдельный  $i$ -й точечный заряд создает поле согласно формуле (2.4), так что по принципу суперпозиции имеем:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i, \quad (2.7)$$

как это показано на рис.3 для системы трех точечных зарядов.

Линии напряженности. Когда значения какой-либо векторной величины определены во всех точках пространства (или отдельной области пространства), говорят о векторном поле. Наглядную картину векторного поля можно получить, проводя линии вектора таким образом, чтобы направление вектора в каждой точке было касательным к этим линиям (рис.4).

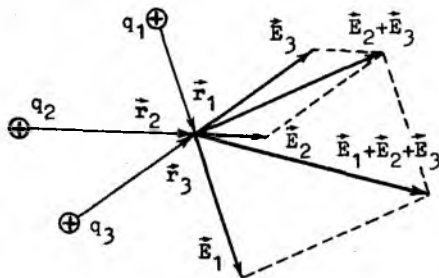


Рис.3

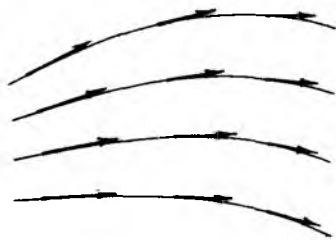


Рис.4

Условились проводить линии вектора с такой густотой, чтобы в каждой точке пространства плотность линий, т.е. число линий, пересекающих перпендикулярную к ним единичную площадку, равнялась (или по крайней мере была пропорциональной) модулю вектора. Соблюдение

ББ  
УД  
Б  
"Э  
Физ  
Физ  
не  
др  
077  
ISE

этого условия позволяет по картине линий вектора судить не только о направлении, но и об абсолютной величине вектора: где больше плотность линий, там больше модуль вектора, и наоборот.

Линии напряженности электростатического поля, или силовые линии, обладают следующим свойством. Если проводить их, соблюдая условие о густоте, то они вне заряженных тел идут непрерывно, прерываясь лишь там, где имеются заряды: начинаются на положительных зарядах (или в бесконечности) и кончатся на отрицательных зарядах (или в бесконечности). Это является прямым следствием теоремы Гаусса, которая рассматривается ниже (см. с.16). На рис.2, где представлены в сечении плоскостью чертежа картины электростатических полей, линии напряженности изображены тонкими сплошными линиями: а и б - поля положительного и отрицательного точечных зарядов; в и г - поля двух точечных разноименных и одноименных зарядов, одинаковых по модулю; д - однородное поле, т.е. поле с одинаковой во всех точках пространства напряженностью; е - поле равномерно заряженного диска.

Поток напряженности. Для характеристики свойств векторных полей вводится скалярная величина - поток вектора через поверхность. В электростатике имеют дело с векторным полем напряженности, и здесь соответственно речь идет о потоке напряженности.

В частном случае, когда поле однородно, а поверхность плоская, поток  $\Phi$  напряженности  $\vec{E}$  через площадку  $S$  по определению равен

$$\Phi = E S \cos \alpha = E_n S, \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  - угол между напряженностью  $\vec{E}$  и нормалью  $\vec{n}$  к площадке, а  $E_n = E \cos \alpha$  - проекция напряженности на нормаль (рис.5,а).

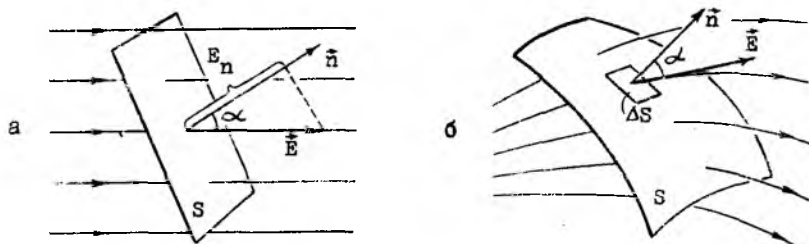


Рис.5

В общем случае, когда поле неоднородно и поверхность не плоская, мысленно разбиваем поверхность на столь малые участки, чтобы можно было приближенно считать их плоскими, а поле во всех точках данно-

го участка - однородным. Для малого потока напряженности  $\Delta\Phi$  через малый участок с площадью  $\Delta S$  согласно (2.8) приближенно имеем

$$\Delta\Phi = E \Delta S \cos\alpha = E_n \Delta S, \quad (2.9)$$

где  $E$  - модуль напряженности поля на этом участке и  $\alpha$  - угол между напряженностью  $\vec{E}$  и нормалью  $\vec{n}$  к участку (рис.5,б). Поток напряженности  $\Phi$  через поверхность  $S$  получим, суммируя потоки  $\Delta\Phi_i$  через все ее малые участки и переходя к пределу при  $\Delta S_i \rightarrow 0$ :

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \int_S E_n dS. \quad (2.10)$$

Абсолютная величина малого потока напряженности  $\Delta\Phi$  через площадку  $\Delta S$  численно равна числу линий напряженности, пронизывающих эту площадку. Действительно, как видно из рис.6, через площадку  $\Delta S$  и ее проекцию  $\Delta S_1$  на плоскость, перпендикулярную напряженности, проходит одинаковое число линий, равное  $E \Delta S_1$ , так как по условию о густоте через единицу поверхности площадки  $\Delta S_1$  проходит  $E$  линий напряженности. Так как  $\Delta S_1 = \Delta S \cos\alpha$ , то  $E \Delta S_1 = E \Delta S \cos\alpha = \Delta\Phi$ , что и требовалось доказать.

Знак потока зависит от выбора направления нормали к поверхности: при замене направления нормали на противоположное  $E_n$ , а вместе с ней и поток, меняют знак. При определении потока через замкнутую поверхность уславливаются выбирать внешнюю нормаль к поверхности. Тогда, как видно из рис.7, поток положителен на тех участках, где линии напряженности выходят из поверхности ( $\alpha < \pi/2$ ,  $E_n > 0$ ,  $\Delta\Phi = E_n \Delta S > 0$ ) и отрицателен там, где линии напряженности входят внутрь поверхности ( $\alpha > \pi/2$ ,  $E_n < 0$ ,  $\Delta\Phi < 0$ ). Таким образом, поток через замкнутую поверхность численно равен алгебраическому числу пересечений этой поверхности линиями напряженности, причем выходящие линии считаются со знаком "+", а входящие - со знаком "-".

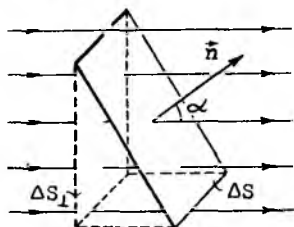


Рис.6

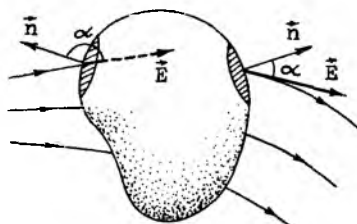


Рис.7

Теорема Гаусса. Для электростатического поля имеет место следующая фундаментальная теорема о потоке (теорема Гаусса): поток напряженности через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, находящемуся внутри этой поверхности.

Коэффициент пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В СИ он равен  $1/\epsilon_0$ , и теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i, \quad (2.11)$$

где символ интеграла с кружком означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ . Суммарный заряд в правой части (2.11) можно выразить через плотность заряда по формуле (1.7), тогда теорема Гаусса запишется так:

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (2.12)$$

где интеграл в правой части берется по объему  $V$  пространства, ограниченного поверхностью  $S$ .

Сначала докажем теорему Гаусса для поля одного точечного заряда  $q$ , которая в этом частном случае утверждает, что поток напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен  $q/\epsilon_0$  или 0 в зависимости от того, находится заряд  $q$  соответственно внутри или вне этой поверхности.

Вычислим поток напряженности  $\Phi$  через сферическую поверхность радиуса  $r$  с центром в точке, где расположен заряд  $q$  (рис.8). Согласно (2.4) и (2.5) напряженность направлена радиально, т.е. нормально к сфере, и постоянна по модулю во всех ее точках:

$$E_n = E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} = \text{const.}, \text{ поэтому}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_n dS = E_n \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

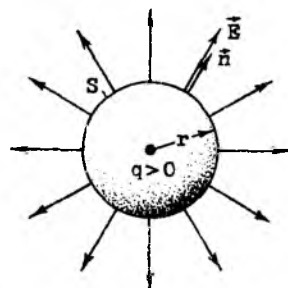


Рис.8

Мы видим, что поток не зависит от радиуса сферы и, следовательно, любую сферу с центром в точке  $q$  пересекают  $q/\epsilon_0$  линий напряженности, а это означает, что линии напряженности идут непрерывно, начинаясь или кончаясь только в точке, где находится заряд  $q$ , или в бесконечности. Из равенства линий напряженности следует, что они  $q/\epsilon_0$  раз эффективно пересекут замкнутую поверхность любой формы, охватывающую заряд  $q$  (рис.9). Если какие-либо линии напряженности пересекают поверхность многократно, то, как видно из рис.9, обязательно нечетное число раз, попеременно то выходя, то входя в нее, так что

в итоге нескомпенсированным останется только одно пересечение, как и у линий, пересекающих поверхность однократно. Таким образом, поток напряженности  $\Phi$  через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряд  $q$ , равен  $q/\epsilon_0$ .

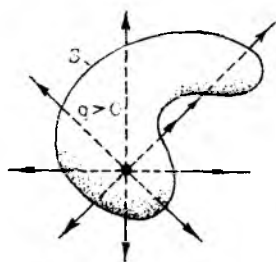


Рис.9

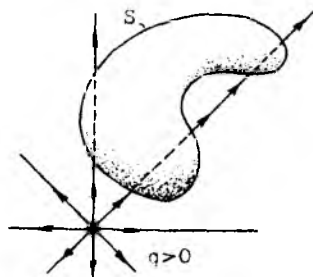


Рис.10

Если замкнутая поверхность не охватывает заряд  $q$  (рис.10), то каждая из проходящих через эту поверхность линий напряженности пересекает ее четное число раз, попеременно входя и выходя за ее пределы, так что алгебраическое число пересечений, а вместе с ним и поток  $\Phi$  равны нулю. Итак, в поле, создаваемом точечным зарядом  $q$ , поток  $\Phi$  вектора напряженности через любую замкнутую поверхность равен  $q/\epsilon_0$ , если заряд находится внутри нее, и нулю, если заряд расположен вне этой поверхности, что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы Гаусса в общем случае поля произвольной системы зарядов представим поток  $\Phi$  как сумму потоков  $\Phi_i$ , обусловленных полем каждого точечного заряда системы в отдельности, воспользовавшись принципом суперпозиции для напряженности:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}_n \, dS = \oint_S \left[ \sum_i \mathbf{E}_n^{(i)} \right] dS = \sum_i \left[ \oint_S \mathbf{E}_n^{(i)} \, dS \right] = \sum_i \Phi_i.$$

Согласно доказанному ранее, те из потоков  $\Phi_i$ , которые обусловлены зарядами, расположенными вне поверхности  $S$ , обращаются в нуль, а оставшиеся потоки, обусловленные зарядами  $q_i$ , находящимися внутри поверхности  $S$ , равны соответственно  $q_i/\epsilon_0$ . Таким образом,

$$\oint_S \mathbf{E}_n \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i,$$

где справа стоит сумма зарядов, находящихся внутри поверхности  $S$ , что и требовалось доказать.

Теорема Гаусса хотя и связывает заряды и создаваемое ими поле, не дает возможности в общем случае вычислить напряженность поля по заданному распределению зарядов, так как напряженность стоит под знаком интеграла. Исключение составляют некоторые системы с симмет-

ричным распределением заряда, когда симметрия поля позволяет выбрать замкнутую поверхность, на которой напряженность всюду перпендикулярна к ней и одинакова по модулю (кроме, возможно, участков, где поток равен нулю). В этом случае величина  $E_n = \pm E = \text{const}$  выносится из-под знака интеграла и может быть вычислена. Рассмотрим два примера.

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Рассмотрим поле, создаваемое бесконечно протяженной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\sigma > 0$ . При использовании теоремы Гаусса для нахождения напряженности конкретная форма замкнутой поверхности выбирается на основе предварительных заключений о картине поля, которые можно сделать, основываясь на симметрии распределения заряда. В рассматриваемой задаче можно заметить, что напряженность поля, во-первых, всюду перпендикулярна заряженной плоскости и направлена от нее и, во-вторых, одинакова по модулю во всех точках, равноудаленных от плоскости по обе стороны от нее (рис.11). Эти соображения подсказывают выбор поверхности в виде прямого цилиндра, у которого основания (безразлично какой формы) расположены по обе стороны от заряженной плоскости на одинаковом расстоянии от нее, где и ищется поле.

Поток напряженности через поверхность цилиндра складывается из потоков через боковую поверхность и оба основания:  $\Phi = \Phi_{\text{о.п.}} + \Phi_1 + \Phi_2$ . Поток через боковую поверхность  $\Phi_{\text{о.п.}} = 0$ , так как всюду на ней  $\vec{E} \perp \vec{n}$  и, следовательно,  $E_n = 0$ . Во всех точках обоих оснований  $E_n = E$  и одинакова, поэтому

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \int_S E_n dS = E \int_S dS = E S,$$

где  $S$  - площадь основания. Таким образом,  $\Phi = 2ES$ .

Заряд, заключенный внутри цилиндрической поверхности (т.е. расположенный на заштрихованной части заряженной плоскости), равен  $\sigma S$ , так что по теореме Гаусса имеем:  $2ES = 1/\epsilon_0 \sigma S$ , откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.13)$$

Из этой формулы видно, что модуль напряженности не зависит от положения точки и, следовательно, как справа, так и слева от плоскости поле однородно. Очевидно, что поле отрицательно заряженной плоскости ( $\sigma < 0$ ) отличается от рассмотренного только направлением напряженности - она направлена к пластине, а не от нее.

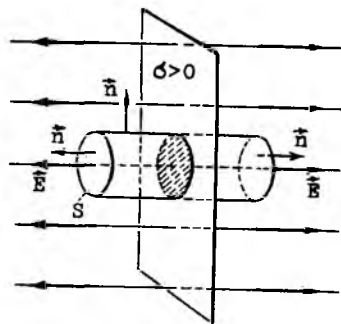


Рис.11

В реальных задачах мы имеем дело с объектами конечных размеров. Поле тонкой равномерно заряженной симметричной пластины, имеющей, например, форму диска, в целом существенно отличается от рассмотренного (рис.2,е), однако вблизи центра пластины поле приближенно такое же, как в случае бесконечной плоскости. Этим оправдано рассмотрение в физике абстрактных бесконечно протяженных объектов.

Поле сферически симметрично распределенного заряда. Пусть заряд  $q$  распределен в пределах сферы радиуса  $R$  сферически симметрично, т.е. плотность заряда  $\rho$  зависит только от расстояния  $r$  до центра сферы  $O$ . Из соображений симметрии можно заключить, что напряженность поля всюду направлена радиально и одинакова по модулю во всех точках, равноудаленных от центра сферы (см. рис.12, где предполагается для конкретности, что  $\rho > 0$ ). Поэтому на всякой сферической поверхности радиуса  $r$  с центром в точке  $O$   $E_n = E_r = \text{const.}$  и поток напряженности через нее выразится так:

$$\oint_S E_n dS = E_n \oint_S dS = E_r 4\pi r^2.$$

Применяя теорему Гаусса для сферы радиуса  $r > R$ , изображенной на рис.12 штриховой окружностью большего радиуса, и учитывая, что внутри нее заключен весь заряд системы  $q$ , имеем  $E_r 4\pi r^2 = 1/\epsilon_0 q$ , откуда

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (2.14)$$

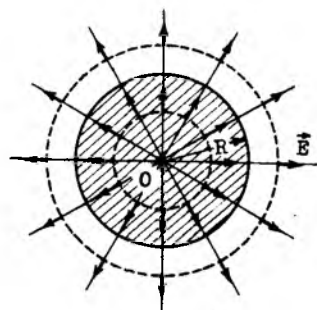


Рис.12

Таким образом, поле вне шара такое же, какое создавал бы точечный заряд  $q$ , расположенный в центре шара.

Применяя теорему Гаусса для сферы радиуса  $r < R$  (на рис.12 она изображена штриховой окружностью меньшего радиуса), имеем

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q'(r),$$

где  $q'(r)$  - заряд, заключенный внутри этой сферы. Отсюда находим

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(r)}{r^2}. \quad (2.15)$$

Таким образом, поле во внутренних точках заряженного шара определяется зарядом, находящимся внутри сферы, проходящей через точку наблюдения, и не зависит от зарядов, расположенных вне ее. При этом вид функции  $E_r(r)$  существенно зависит от того, как распределен заряд по шару, поскольку от этого зависит заряд  $q'(r)$ .

Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Теорема Гаусса в интегральной форме (2.12) имеет нелокальный характер, так как в ней фигурируют значения физических величин в различных точках пространства:  $E_n$  - во всех точках выбранной поверхности  $S$ ,  $\rho$  - во всех точках ограниченного этой поверхностью объема  $V$ . Если перейти к пределу, стягивая поверхность в точку, то получится дифференциальная форма теоремы Гаусса - дифференциальное уравнение, связывающее значения физических величин (а именно, плотности заряда и производных напряженности по координатам), взятые в одной и той же точке пространства.

Рассмотрим точку с координатами  $x, y, z$  и построим прямоугольный параллелепипед, ребрами которого являются малые приращения координат  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  (рис.13). Найдем выражение для потока напряженности через поверхность этого параллелепипеда.

Поток через нижнюю грань получим, исходя из определения (2.9) и учитывая, что ее площадь  $\Delta S = \Delta x \Delta y$ , а  $E_n = -E_z(x, y, z)$ , так как внешняя нормаль к этой грани направлена против оси  $z$ :  $\Delta \Phi = -E_z(x, y, z) \Delta x \Delta y$ . Для потока через верхнюю грань получим выражение  $E_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y$ . Действительно, в этом случае  $E_n = +E_z$ , так как направления внешней нормали и оси  $z$  совпадают, и кроме того значение  $E_z$  следует взять в точке с координатами  $x, y, z + \Delta z$ , поскольку верхняя грань смещена по оси  $z$  на  $\Delta z$ .

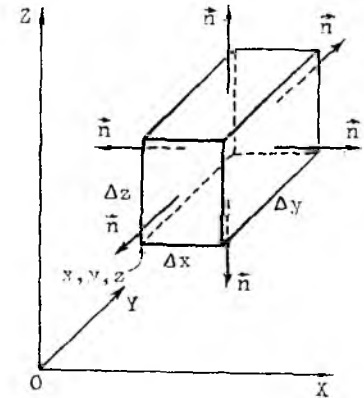


Рис.13

Аналогичным образом найдем потоки через другие грани: левую и правую [ $-E_x(x, y, z) \Delta y \Delta z$  и  $E_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$ ], переднюю и заднюю [ $-E_y(x, y, z) \Delta x \Delta z$  и  $E_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z$ ]. Суммируя потоки через грани, найдем полный поток через поверхность параллелепипеда, который по теореме Гаусса равен умноженному на  $1/\epsilon_0$  заряду  $\rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$ , находящемуся внутри этой поверхности:

$$[E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)] \Delta y \Delta z + [E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)] \Delta x \Delta z + [E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)] \Delta x \Delta y = 1/\epsilon_0 \rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Разделив обе части равенства на объем параллелепипеда  $\Delta x \Delta y \Delta z$  и перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.16)$$



Это дифференциальное уравнение представляет собой теорему Гаусса в дифференциальной форме. Сумма частных производных декартовых проекций вектора по одноименным координатам называется дивергенцией вектора. Ее обозначают символом "div" и уравнение (2.16) записывают в виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.16, a)$$

### § 3. ПОТЕНЦИАЛ

Работа электростатических сил при перемещении заряда. При перемещении пробного заряда в поле электростатические силы совершают работу. Напомним, что работа силы  $\vec{F}$  на бесконечно малом перемещении  $\vec{\Delta l}$  определяется выражением  $\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F_1 \Delta l$ , где  $\alpha$  - угол между направлениями силы и перемещения, а  $F_1 = F \cos \alpha$  - проекция силы на направление перемещения. Работа на конечном участке пути от точки В до точки С, будучи суммой малых работ, является интегралом  $A = \int_B^C F_1 dl$ . Так как сила, действующая на пробный заряд  $q_0$ , выражается формулой (2.1), то для работы электростатических сил при бесконечно малом перемещении  $\vec{\Delta l}$  пробного заряда имеем

$$\Delta A = q_0 E_1 \Delta l, \quad (3.1)$$

а для работы на конечном участке пути от точки В до точки С

$$A_{BC} = q_0 \int_B^C E_1 dl. \quad (3.2)$$

В курсе механики доказывается, что если силы взаимодействия между материальными точками механической системы удовлетворяют третьему закону Ньютона и не зависят от скорости, то эти силы потенциальны. Электростатические силы согласно закону Кулона удовлетворяют этим условиям и, следовательно, потенциальны. Напомним, что по определению потенциальных сил их работа в замкнутой системе зависит от начальной и конечной конфигураций системы и не зависит от того, по каким траекториям перемещались из начального в конечное состояние отдельные тела системы. Вычислим работу электростатических сил в двух простых случаях, воспользовавшись для сокращения выкладок свойством потенциальности электростатических сил.

1. Найдем работу электростатических сил при перемещении пробного заряда  $q_0$  в поле точечного заряда  $q$  из точки В в точку С. Выберем траекторию пробного заряда в виде радиального отрезка  $BB'$  и дуги  $B'C$  окружности, в центре которой находится заряд  $q$  (рис.14). На участке  $BB'$   $E_1 = E_r = 1/4\pi\epsilon_0 q/r^2$  (см.(2.5)), а  $dl = dr$ , так что согласно (3.2)

24-1403

$$A_{BB'} = q_0 \int_{r_B}^{r_C} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right] dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right].$$

На участке  $B'C$   $E_{\parallel} = 0$ , а следовательно, и  $A_{B'C} = 0$ . Таким образом

$$A_{BC} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right], \quad (3.3)$$

$r_B$  и  $r_C$  - расстояния от заряда  $q$  до начальной и конечной точек пути.

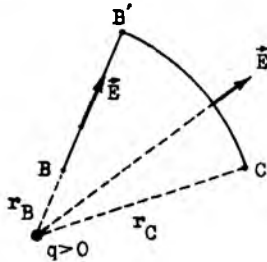


Рис. 14

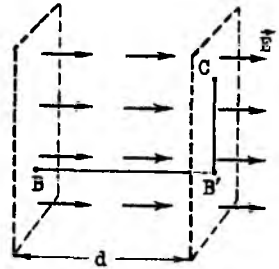


Рис. 15

2. Вычислим работу электростатических сил при перемещении пробного заряда  $q_0$  в однородном поле напряженностью  $\vec{E}$  из точки  $B$  в точку  $C$  (рис. 15). Выберем в качестве траектории пробного заряда ломаную линию  $BB'C$ . На участке  $BB'$   $E_{\parallel} = E = \text{const}$  и работа  $A_{BB'} = q_0 \int_B^{B'} E_{\parallel} dl = q_0 E \int_B^{B'} dl = q_0 E d$ , а на участке  $B'C$  работа равна нулю, так как здесь  $E_{\parallel} = 0$ . Таким образом

$$A_{BC} = q_0 E d. \quad (3.4)$$

Как станет ясно из дальнейшего (см. с. 27), в этой формуле  $d$  - расстояние между плоскими эквипотенциальными поверхностями, проходящими через точки  $B$  и  $C$  и изображенными на рис. 15 штриховыми линиями.

#### Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля.

Из независимости работы от формы траектории непосредственно вытекает равенство нулю работы по перенесению пробного заряда по замкнутому контуру. Действительно, взяв на замкнутом контуре  $L$  две произвольные точки  $B$  и  $C$  (рис. 16), запишем работу по переносу заряда  $q_0$  вдоль этого контура в виде двух слагаемых:  $A = A_{BC}^{(1)} + A_{CB}^{(2)}$ , где цифры обозначают путь. Второе слагаемое можно заменить на  $(-A_{BC}^{(2)})$ , так как при замене направления перемещения на

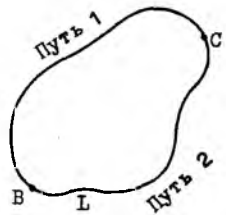


Рис. 16

обратное работа меняет знак, поэтому  $A = A_{BC}^{(1)} - A_{BC}^{(2)}$ . Но  $A_{BC}^{(1)} = A_{BC}^{(2)}$  вследствие независимости работы от формы пути, так что  $A = 0$ .

Используя для работы выражение (3.2) и сокращая на  $q_0$ , запишем полученный результат в виде

$$\oint_L E_1 dl = 0, \quad (3.5)$$

где кружок у символа интегрирования означает, что интеграл берется по замкнутому контуру. Для произвольного поля вектора  $\vec{A}$  выражение вида  $\oint_L \vec{A}_1 dl$  называется циркуляцией вектора  $\vec{A}$  по контуру  $L$ . Циркуляция наряду с потоком является удобной математической конструкцией для характеристики свойств векторных полей. Формула (3.5) означает, что циркуляция напряженности электростатического поля по любому контуру равна нулю (теорема о циркуляции напряженности электростатического поля).

Потенциал и разность потенциалов. Из свойства потенциальности электростатических сил следует, что пробный заряд, находящийся в электростатическом поле, обладает потенциальной энергией. В соответствии с общим определением потенциальной энергии, потенциальная энергия  $W_n(x, y, z)$  пробного заряда  $q_0$ , находящегося в точке поля с координатами  $x, y, z$ , измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда из рассматриваемой точки в некоторую фиксированную точку пространства - точку отсчета потенциальной энергии. Подчеркнем, что поскольку речь идет о потенциальной энергии взаимодействия пробного заряда с заданным электростатическим полем, перемещать следует только пробный заряд при неизменном положении зарядов, порождающих исследуемое поле. Обычно в качестве точки отсчета потенциальной энергии выбирается бесконечно удаленная точка, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Таким образом, с учетом (3.2) имеем

$$W_n(x, y, z) = A_{x, y, z; \infty} = q_0 \int_{x, y, z}^{\infty} E_1 dl. \quad (3.6)$$

Потенциальная энергия пробного заряда не может служить характеристикой поля, так как она зависит от величины пробного заряда. Но поскольку эта зависимость прямо пропорциональная, то отношение потенциальной энергии пробного заряда к его величине не зависит от пробного заряда. Отношение потенциальной энергии пробного заряда, находящегося в некоторой точке поля, к величине этого заряда называется потенциалом электростатического поля в данной точке:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{W_n(x, y, z)}{q_0} = \int_{x, y, z}^{\infty} E_i dl. \quad (3.7)$$

Из этого определения следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда. Единица потенциала в СИ носит название "вольт" и согласно (3.7)  $1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}$ .

Потенциал электростатического поля – скалярная величина. Когда во всех точках пространства (или отдельной области) определены значения какой-либо скалярной величины, говорят о скалярном поле. Таким образом, в электростатике мы имеем дело наряду с векторным полем напряженности также и со скалярным полем потенциала.

Выведем формулу для потенциала поля точечного заряда  $q$ . Потенциальную энергию пробного заряда  $q_0$ , находящегося на расстоянии  $r$  от заряда  $q$ , найдем согласно определению (3.6) по формуле для работы (3.3), подставляя в нее  $r$  вместо  $r_B$  и  $\infty$  вместо  $r_C$ :

$$W_n(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}. \quad (3.8)$$

Поделив это выражение на  $q_0$ , находим потенциал поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.9)$$

Для потенциала, как и для напряженности, выполняется принцип суперпозиции, т.е. потенциал  $\varphi$  в каждой точке поля, создаваемого системой зарядов, равен сумме потенциалов полей  $\varphi_i$ , которые создавал бы в этой точке каждый  $i$ -й заряд системы в отдельности:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (3.10)$$

Действительно, исходя из определения потенциала (3.7) и используя принцип суперпозиции для напряженности (2.6), имеем:

$$\varphi = \int_{x, y, z}^{\infty} E_i dl = \int_{x, y, z}^{\infty} \left[ \sum_i E_i^{(i)} \right] dl = \sum_i \left[ \int_{x, y, z}^{\infty} E_i^{(i)} dl \right] = \sum \varphi_i.$$

Подставляя вместо  $\varphi_i$  выражение (3.9) для потенциала поля, создаваемого отдельным точечным зарядом системы, получим:

$$\varphi = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}, \quad (3.11)$$

здесь  $r_i$  – расстояние от точечного заряда  $q_i$  системы до точки, где ищется потенциал, и суммирование ведется по всем точечным зарядам системы. Формула (3.11) дает возможность рассчитать потенциал поля произвольной заданной системы зарядов в любой точке пространства.

Зная потенциал как функцию координат, можно легко находить работу, совершаемую силами поля при перемещении пробного заряда из одной точки пространства в другую. В самом деле, по основному свойству потенциальной энергии работа  $A_{BC}$  по перемещению заряда  $q_0$  из точки В в точку С равна разности значений его потенциальной энергии в начальной и конечной точках пути:  $A_{BC} = W_n(B) - W_n(C)$ . Выражая потенциальную энергию через потенциал по формуле (3.7), находим

$$A_{BC} = q_0 (\varphi(B) - \varphi(C)). \quad (3.12)$$

Из этой формулы виден физический смысл разности потенциалов: она численно равна работе электростатических сил по перенесению единичного положительного пробного заряда из первой точки во вторую.

Используя формулы (3.12) и (3.2), можно выразить разность потенциалов через напряженность:

$$\varphi(B) - \varphi(C) = \int_B^C E_t dl. \quad (3.13)$$

В однородном поле эта формула принимает особенно простой вид:

$$\varphi(B) - \varphi(C) = Ed \quad (3.14)$$

(см. формулу (3.4) и следующий за ней комментарий).

**Связь между напряженностью и потенциалом.** Взаимосвязь между напряженностью и потенциалом электростатического поля видна уже из определения потенциала (3.7). Однако здесь эта связь нелокальная, так как значение потенциала в некоторой точке выражается через значения напряженности на всей кривой, вдоль которой берется интеграл. Сейчас мы установим локальное соотношение, связывающее напряженность с производными потенциала по координатам, взятыми в той же точке.

Пусть  $\vec{E}$  и  $\varphi(x, y, z)$  — напряженность и потенциал в некоторой точке поля с координатами  $x, y, z$ . Осуществим перемещение  $d\vec{l}$  пробного заряда  $q_0$  из этой точки в бесконечно близкую точку с координатами

$x+dx, y+dy, z+dz$  (рис.17). Малая работа, совершаемая электростатическими силами при этом перемещении, согласно (3.12) равна

$$dA = q_0 (\varphi(x, y, z) - \varphi(x+dx, y+dy, z+dz)).$$

Подставляя для малой работы выражение (3.1) и замечая, что в скобках стоит приращение потенциала со знаком минус, имеем  $E_t dl = -d\varphi$ , откуда:

$$E_t = - \frac{d\varphi}{dl}. \quad (3.15)$$

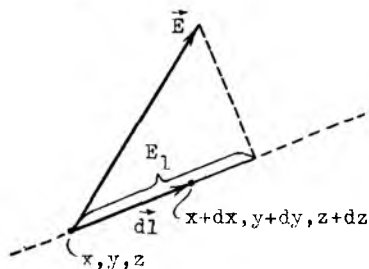


Рис.17

Выражение  $d\varphi/dl$  представляет собой производную потенциала по направлению. Она численно равна приращению потенциала при смещении на единицу длины в направлении  $\vec{l}$ . Следовательно, ее модуль характеризует быстроту изменения потенциала в рассматриваемом направлении, а знак показывает, возрастает ( $d\varphi/dl > 0$ ) или убывает ( $d\varphi/dl < 0$ ) потенциал в этом направлении.

Как следует из (3.15), быстрота изменения потенциала в том или ином направлении зависит от проекции  $E_1$  напряженности на это направление. В частности, во всех направлениях, перпендикулярных напряженности, потенциал не изменяется ( $d\varphi/dl = 0$ ), так как для этих направлений  $E_1 = 0$ . По мере приближения к направлению напряженности быстрота изменения потенциала растет, так как растет  $E_1$ , и в направлении вектора  $\vec{E}$  становится максимальной, поскольку проекция  $\vec{E}$  на направление самого себя максимальна и равна модулю  $E$ :

$$E = - \left( \frac{d\varphi}{dl} \right)_{\text{напр. } \vec{E}} \quad (3.15, a)$$

Отсюда следует, что  $(d\varphi/dl)_{\text{напр. } \vec{E}} < 0$ , а значит,  $(d\varphi)_{\text{напр. } \vec{E}} < 0$ , т.е. в направлении вектора  $\vec{E}$  потенциал убывает. Таким образом, напряженность направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциала и по модулю равна взятой с обратным знаком производной потенциала по этому направлению.

Записывая формулу (3.15) для направлений осей  $x, y, z$  декартовой системы координат, получаем формулы для проекций  $E_x, E_y, E_z$  напряженности:

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3.16)$$

Вектор, проекции которого на оси  $x, y, z$  прямоугольной декартовой системы координат равны соответственно  $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$  и  $\partial\varphi/\partial z$ , где  $\varphi(x, y, z)$  - скалярная функция, называется градиентом этой функции и обозначается символом  $\vec{\text{grad}}\varphi$ . Согласно (3.16) напряженность электростатического поля равна взятому со знаком минус градиенту потенциала:

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}}\varphi \quad (3.17)$$

Формулы (3.15) и (3.16) дают возможность рассчитывать напряженность поля, вычисляя сначала потенциал и затем дифференцируя его по координатам. Так поступают в тех случаях, когда распределение заряда на телах заранее неизвестно и для расчета поля (поскольку принцип суперпозиции здесь бесполезен) приходится решать дифференциальное уравнение для потенциала (см. далее с. 49).

Эквипотенциальные поверхности. Геометрические места точек с одинаковыми значениями потенциала представляют собой поверхности равного потенциала, называемые эквипотенциальными поверхностями. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности ортогональны друг другу, т.е. любая линия напряженности пересекает любую эквипотенциальную поверхность под прямым углом. Действительно, рассмотрим точку пересечения произвольной линии напряженности с эквипотенциальной поверхностью (рис.18). Так как при перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется, то в рассматриваемой точке  $d\phi/dl=0$  для любого направления,

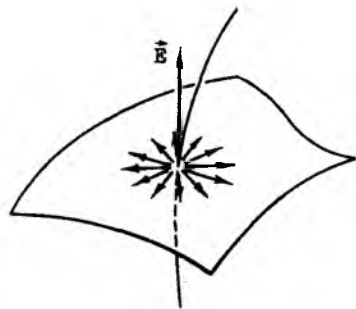


Рис.18

касательного к эквипотенциальной поверхности (на рис.18 эти направления указаны тонкими стрелками). Следовательно, согласно (3.15), равна нулю проекция напряженности на любое из этих направлений, т.е. напряженность перпендикулярна эквипотенциальной поверхности.

На приведенных на рис.2 картинах электростатических полей эквипотенциальные поверхности изображены штриховыми линиями.

Уравнения электростатического поля в вакууме. Теорема Гаусса о потоке (2.12) и теорема о циркуляции (3.5) отражают фундаментальные свойства электростатического поля и представляют собой систему уравнений электростатического поля в вакууме в интегральной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \\ \oint_L \mathbf{E}_t dl = 0. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

С математической точки зрения удобнее иметь дело с дифференциальными уравнениями. Дифференциальной формой теоремы Гаусса является уравнение (2.16), а теоремы о циркуляции - соотношения (3.16). Таким образом, система уравнений электростатики в вакууме в дифференциальной форме имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Подставляя в первое уравнение выражения для проекций напряженности из второй строки, получаем уравнение для потенциала

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.20)$$

называемое уравнением Пуассона.

В области пространства, где нет зарядов,  $\rho = 0$  и уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (3.21)$$

(символом  $\Delta \varphi$  в математике обозначают сумму вторых частных производных скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  по декартовым координатам  $x, y, z$ ). Именно это дифференциальное уравнение чаще всего приходится решать для нахождения потенциала электростатического поля в вакууме.



## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ВЕЩЕСТВО

## § 4. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Введение. Изучение электростатического поля в предыдущей главе показало, что оно определяется расположением зарядов в пространстве. Поэтому для дальнейшего развития теории электростатического поля необходимо выяснить, как распределяется заряд на телах, если их зарядить или поместить в поле. Ответ на этот вопрос существенно зависит от свойств вещества.

По своим электрическим свойствам все вещества можно разделить на проводники и диэлектрики (полупроводники в рамках тех задач, которые обычно рассматриваются в электростатике, ведут себя по существу так же, как проводники). В проводниках под действием постоянного электрического поля возникает электрический ток, в диэлектриках — нет. Это объясняется принципиальным различием их структуры. В проводниках существуют носители тока, или свободные заряды, т.е. заряженные частицы, которые под действием поля могут перемещаться в пределах проводника. В диэлектриках таких свободных зарядов нет, все заряженные частицы удерживаются в пределах атомов, молекул, ионов и т.п. и под действием поля испытывают лишь микроскопические смещения.

В этом параграфе изучается поведение проводников в электростатическом поле. Хотя большинство выводов излагаемой здесь теории справедливо для любого проводника, будем для конкретности иметь в виду металлические проводники. Как известно, металлы в твердом состоянии обладают кристаллической структурой. В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы, а "оставшиеся" электроны (обычно один-два на ион) могут свободно перемещаться в пределах проводника. Этих заведомо упрощенных представлений о структуре металлического проводника вполне достаточно, чтобы понять явления, о которых пойдет речь в настоящем параграфе.

Условия равновесия зарядов на проводниках. Опыты приводят к следующему фундаментальному положению: если сообщить проводнику заряд или поместить проводник во внешнее электростатическое поле (или сделать и то, и другое одновременно), то через достаточно короткий промежуток времени в проводнике установится равновесное распределение заряда, при котором направленного движения свободных зарядов, т.е. электрический ток, отсутствует. Это равновесное распределение

зарядов на проводниках и их электростатическое поле обладают рядом свойств, которые и изучаются в электростатике.

Прежде всего, так как при установившемся распределении зарядов в проводнике нет токов, на свободные электроны не действуют силы. Следовательно, электростатическое поле внутри проводника отсутствует:  $\vec{E}_{\text{внутр}} = 0$ . В частности, если при отсутствии внешнего поля проводник зарядить, то заряды распределяются по проводнику так, что создаваемое ими поле отлично от нуля лишь вне проводника, как это показано на рис. 19, где сечение проводника заштриховано, а картина поля вне проводника представлена линиями напряженности (сплошные линии) и эквипотенциальными поверхностями (штриховые линии). Если нейтральный проводник поместить во внешнее электростатическое поле, то в нем произойдет перераспределение зарядов (явление электростатической индукции) таким образом, что поле индуцированных зарядов скомпенсирует внешнее поле внутри проводника. Подчеркнем, что речь идет о равенстве нулю макроскопического поля, т.е. усредненного по макроскопически бесконечно малому объему; истинное же микроскопическое поле отлично от нуля и сложным образом меняется от точки к точке внутри проводника.

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, работа по перемещению пробного заряда внутри проводника равна нулю независимо от положения начальной и конечной точек перемещения. Учитывая связь работы с разностью потенциалов (3.12), заключаем, что потенциал во всех точках проводника одинаков. В частности, поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Из рис. 19 видно, как видоизменяется форма эквипотенциальных поверхностей по мере удаления от заряженного проводника: от имеющей форму поверхности проводника до сферической на больших расстояниях, где поле хорошо аппроксимируется полем точечного заряда.

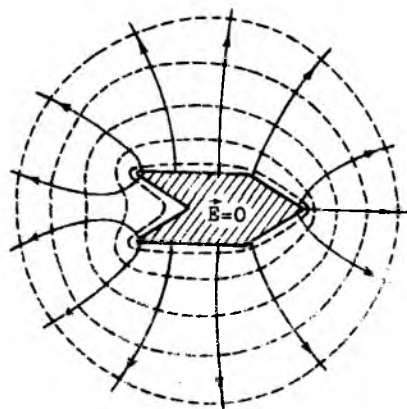


Рис. 19

Из равенства нулю напряженности внутри проводника следует также, что всюду внутри проводника  $\rho = 0$ , т.е. положительные и отрицательные заряды скомпенсированы и, следовательно, нескомпенсированный заряд может располагаться только по поверхности проводника.

Действительно, раз  $\vec{E}_{\text{внутри}} = 0$ , то и поток напряженности через любую замкнутую поверхность, взятую внутри проводника, равен нулю. По теореме Гаусса (2.11) это означает, что равен нулю заряд внутри любой такой поверхности, что возможно только при  $\rho=0$  во всех точках проводника.

Напряженность на поверхности проводника перпендикулярна этой поверхности (см. рис.19), поскольку последняя является эквипотенциальной, причем модуль напряженности пропорционален поверхностной плотности  $\sigma$  заряда в той же точке:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.1)$$

Выведем эту формулу, применяя теорему Гаусса. Рассмотрим малый элемент поверхности проводника  $\Delta S$ , на котором находится заряд  $\Delta q = \sigma \Delta S$ .

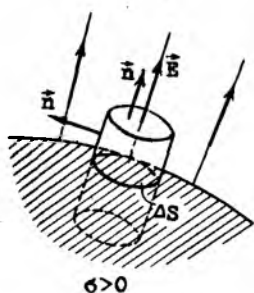


Рис.20

Окружим этот элемент поверхностью прямого цилиндра, у которого образующая перпендикулярна поверхности проводника, одно из оснований лежит внутри проводника, а другое - вне проводника бесконечно близко к его поверхности (рис.20). Поток напряженности через внутреннее основание и боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как внутри проводника  $\vec{E}=0$ , а на расположенном вне проводника участке боковой поверхности  $E_n=0$  вследствие перпендикулярности линий напряженности поверхности проводника.

Следовательно, поток через поверхность цилиндра определится потоком через его внешнее основание, который равен  $E\Delta S$ . По теореме Гаусса, этот поток равен умноженному на  $1/\epsilon_0$  заряду  $\sigma\Delta S$  внутри цилиндра:  $E\Delta S = 1/\epsilon_0 \sigma\Delta S$ , откуда и вытекает формула (4.1).

Электростатическое поле не проникает в область, окруженную замкнутой проводящей оболочкой (рис.21,а). Этим явлением экранирования пользуются, когда необходимо избавиться от влияния внешних электрических полей, обшивая, например, стены лаборатории металлическими листами (электростатическая защита). Обратное, вообще говоря, неверно: замкнутая проводящая оболочка не экранирует внешнее пространство от поля зарядов, находящихся внутри оболочки (рис.21,б). Интересно отметить, что поле вне оболочки не зависит от расположения зарядов внутри нее: при любых перемещениях этих зарядов оно остается неизменным - таким, какое создавала бы сама оболочка, если ей сообщить суммарный заряд находящихся внутри нее тел (рис.21,б,в,г). Для экранировки внешнего

пространства достаточно заземлить оболочку (рис.21,д). Строгое доказательство этих утверждений выходит за рамки общего курса физики.

При чисто качественном описании распределения заряда по поверхности проводника можно руководствоваться тем соображением, что одноименные заряды, вследствие взаимного отталкивания, стремятся рассредоточиться по поверхности проводника. Так, при соприкосновении двух проводников существенно различных размеров, избыточный заряд практически весь оказывается на поверхности большего проводника – на этом основана разрядка проводника при его заземлении. Это же соображение позволяет предположить, что на заряженной тонкой металлической пластине, например, в виде диска, поверхностная плотность заряда не постоянна, а увеличивается от центра к краям, что и подтверждается строгим расчетом.

Отметим еще, что распределение заряда существенно зависит от рельефа проводника: поверхностная плотность заряда может достигать больших значений на выпуклостях с малым радиусом кривизны (остриях) и мала во впадинах. В силу (4.1), соответствующим образом ведет себя и поле, которое может оказаться очень сильным вблизи острия и относительно слабым в окрестностях впадины. Это хорошо видно из рис.19: густота линий напряженности существенно больше у острия, чем во впадине.

Подчеркнем в заключение, что описанные закономерности равновесного распределения зарядов на проводниках выполняются, когда на носители заряда действуют только электростати-

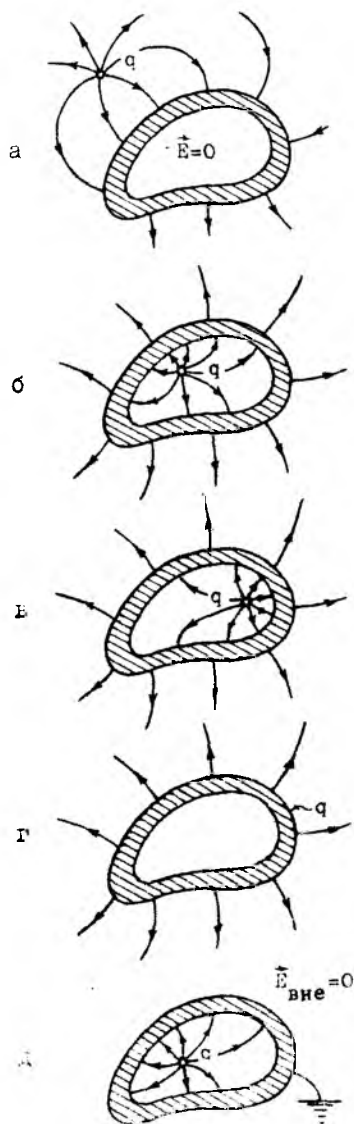


Рис.21

ческие силы. При наличии сил какой-либо другой природы (такие сторонние силы действуют, например, в источниках тока, на контакте двух металлов или полупроводников и т.д.) распределение зарядов по проводнику и создаваемое ими поле имеют существенно иной характер.

Емкость. Так как в условиях электростатического равновесия значения потенциала во всех точках проводника одинаковы, можно просто говорить о потенциале проводника. Теория показывает и опыт подтверждает, что потенциал  $\phi$  проводника прямо пропорционален заряду проводника  $q$ :

$$\phi = \frac{1}{C} q, \quad (4.2)$$

где  $1/C$  – коэффициент пропорциональности. Следовательно, отношение заряда к потенциалу является для данного проводника постоянной величиной. Она называется **электрической емкостью**, или просто **емкостью** проводника:

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (4.3)$$

Емкость зависит от геометрических свойств проводника – его размеров и формы – и не зависит от материала. Это связано с тем, что на всех проводниках с одинаковой геометрией поверхности заряд данной величины в условиях равновесия распределяется одинаково, поскольку, как доказывается в теоретической электростатике, существует единственное распределение заданного заряда по заданной поверхности, при котором всюду внутри этой поверхности напряженность равна нулю.

На емкость проводника могут оказывать влияние окружающие тела, так как индуцируемые на них заряды, вообще говоря, изменяют поле в пространстве, а следовательно, и потенциал рассматриваемого проводника при том же заряде на нем. Поэтому, когда речь идет о емкости проводника и не оговорено противное, имеется в виду емкость уединенного проводника.

Взяв малые приращения от обеих частей формулы (4.2):  $\Delta\phi = \frac{1}{C} \Delta q$ , получим

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta\phi}. \quad (4.4)$$

Отсюда усматривается физический смысл емкости: она численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на единицу. Единица емкости в СИ носит название "фарада":  $1\text{Ф} = 1\text{Кл}/1\text{В}$ .

Выведем формулу для емкости уединенного проводящего шара. Так как поле вне шара совпадает с полем точечного заряда (см. (2.14)), то потенциал на поверхности шара согласно (3.9) равен  $\phi = 1/4\pi\epsilon_0 q/R$ ,

где  $q$  и  $R$  - соответственно заряд и радиус шара. Подставляя это значение потенциала в формулу (4.3), имеем

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (4.5)$$

Из этой формулы следует, что емкость в одну фараду обладает шар радиусом  $R = 1\Phi/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  м, что в 1500 раз превышает радиус Земли. Поэтому на практике пользуются дробными единицами фарады: микрофарадой ( $1\text{мк}\Phi = 10^{-6}\Phi$ ) и пикофарадой ( $1\text{пк}\Phi = 10^{-12}\Phi$ ).

Формула (4.5) строго справедлива только для проводников сферической формы. Однако ей можно пользоваться для качественных оценок емкости несферического тела, понимая под  $R$  его характерный размер.

Конденсаторы. Система, состоящая из двух проводников, которым сообщены заряды одинаковой абсолютной величины, но противоположных знаков называется конденсатором. У конденсаторов, используемых на практике в самых разнообразных электротехнических устройствах, проводники представляют собой тонкие пластины той или иной формы - обкладки конденсатора, пространство между которыми часто заполнено диэлектриком. Расстояние между обкладками у таких конденсаторов существенно меньше размеров обкладок. При этом поле, создаваемое зарядами на обкладках, оказывается сосредоточенным в основном в пространстве между обкладками и практически отсутствует вне конденсатора.

Рассмотрим теорию плоского конденсатора, у которого обкладки являются плоские пластины, расположенные параллельно друг другу. Сначала рассчитаем напряженность поля, создаваемого заряженным конденсатором, причем для идеализированного случая, считая пластины бесконечно протяженными и равномерно заряженными с поверхностной плотностью заряда  $\pm \sigma$ . Как было показано ранее (с.18), напряженности  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  полей, создаваемых соответственно положительно и отрицательно заряженными пластинами, одинаковы по модулю  $E_+ = E_- = \sigma/2\epsilon_0$  и направлены соответственно  $\vec{E}_+$  - от пластины с положительным, а  $\vec{E}_-$  - к пластине с отрицательным зарядами (рис.22). Вне конденсатора эти напряженности имеют противоположные направления и, следовательно, здесь поле отсутствует:  $\vec{E}_{\text{вне}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$ ; между обкладками  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  направлены одинаково, так что  $E = E_+ + E_- = \sigma/\epsilon_0$ :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.6)$$

В реальном конденсаторе поле имеет такой характер лишь в средней области, а у краев конденсатора картина поля меняется: возникают так называемые краевые эффекты (рис.23). Если, однако, расстояние между пластинами существенно меньше размеров пластин, то во многих

задачах краевыми эффектами можно пренебречь, считая, что поле внутри конденсатора однородно и определяется формулой (4.6), а вне отсутствует, что мы и будем делать в дальнейшем.

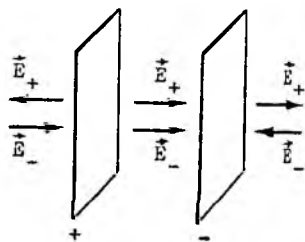


Рис.22

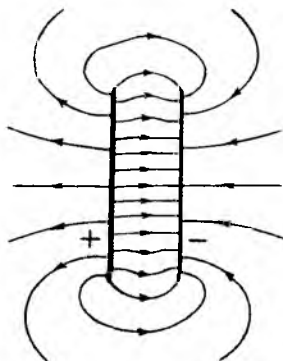


Рис.23

Для разности потенциалов между обкладками, о которой мы, забегая вперед, будем говорить как о напряжении между обкладками (в §11 будет дано общее определение напряжения и показано, что при наличии одних только электростатических сил, как в рассматриваемом случае, напряжение совпадает с разностью потенциалов) и обозначать буквой  $U$ , имеем с учетом формул (3.14) и (4.6)

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \quad (4.7)$$

где  $d$  — расстояние между обкладками.

Можно показать, что для всякого конденсатора величина заряда одной из обкладок пропорциональна напряжению между обкладками, так что их отношение

$$C = \frac{q}{U} \quad (4.8)$$

есть постоянная для данного конденсатора величина, которая называется емкостью конденсатора (сравните с формулой (4.3) для емкости уединенного проводника). Подставляя сюда выражение (4.7) для напряжения между пластинами и учитывая, что  $q = \sigma S$ , где  $S$  — площадь пластины, получаем формулу для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (4.9)$$

Если пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то, как будет показа-

но позже (см. формулу (6.9)), напряженность в пространстве между обкладками уменьшается в  $\epsilon$  раз при тех же зарядах на обкладках. Согласно (4.7) напряжение между обкладками также уменьшится в  $\epsilon$  раз, вследствие чего емкость конденсатора, как это видно из (4.8), увеличится в  $\epsilon$  раз, т.е. определится формулой

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \quad (4.10)$$

Таким образом, увеличить емкость плоского конденсатора можно, увеличивая площадь пластин, уменьшая расстояние между ними или заполняя пространство между пластинами диэлектриком.

Конденсаторы можно соединять друг с другом в батареи. При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, а при последовательном соединении обратная величина емкости батареи складывается из обратных величин емкостей соединяемых конденсаторов:

$$C_{\text{паралл}} = \sum_i C_i, \quad \frac{1}{C_{\text{послед}}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (4.11)$$

(выводы этих формул даются в школьных учебниках и поэтому здесь опущены). Комбинируя конденсаторы различными способами, можно варьировать емкость батареи конденсаторов в больших пределах. При подборе конденсаторов для электрических схем необходимо иметь в виду, что для каждого конденсатора существует предельно допустимое напряжение — напряжение пробоя, при достижении которого наступает пробой диэлектрика и конденсатор выходит из строя.

Заряженный конденсатор обладает энергией. В этом легко убедиться: если разрядить конденсатор, соединяя обкладки проводником, то в процессе разрядки по проводнику пройдет электрический ток и электрическим полем будет совершена работа над перемещающимися зарядами. Вычислим эту работу.

Пусть в процессе разрядки в некоторый момент времени напряжение на пластинах равно  $U$  и соответственно заряд пластины  $q = CU$ . За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  с одной пластины на другую перетечет заряд  $dq = C dU$ . Работа электрического поля по перемещению этого заряда согласно (3.12) равна  $dA = U dq = -UC dU$  (знак минус следует поставить потому, что положительная работа совершается при убывании напряжения, т.е.  $dA > 0$  должно соответствовать  $dU < 0$ ). Полную работу при разрядке конденсатора от напряжения  $U$  до нуля получим, взяв сумму малых работ в течение всего процесса, т.е. вычислив интеграл  $A = \int_U^0 (-C dU) = -C \int_U^0 dU = CU^2/2$ . С учетом соотношения  $U = q/C$  эта работа запишется в виде  $A = q^2/2C$ . Наконец, используя формулы



(4.10) и (3.14) для  $C$  и  $U$ , выразим работу через напряженность поля:  $A = CU^2/2 = (\epsilon_0 \epsilon S/2d)(Ed)^2 = (\epsilon_0 \epsilon E^2/2)V$ , где  $V = Sd$  – объем конденсатора. По закону сохранения энергии работа, совершенная при разрядке конденсатора, определяет энергию, которой он обладал. Таким образом, энергия заряженного конденсатора может быть представлена в следующих формах:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (4.12)$$

Энергия электрического поля. На вопрос, где локализована энергия конденсатора – на пластинах, где расположены заряды, или в пространстве между пластинами, где существует поле, – электростатика не дает ответа: электростатическое поле однозначно связано с порождающими его зарядами, и принципиально невозможно убрать одно из них, оставив другое. Ответ на этот вопрос дает общая теория электромагнитного поля, согласно которой энергией обладает поле. В частности, энергия (4.12) заряженного конденсатора представляет собой энергию его электрического поля.

Для описания распределения энергии поля в пространстве вводится физическая величина – плотность энергии поля, которая определяется как энергия поля в единице объема:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}. \quad (4.13)$$

Здесь  $\Delta V$  – объем малой области пространства в окрестности рассматриваемой точки,  $\Delta W$  – энергия поля, заключенная в этом объеме.

Электрическое поле конденсатора при пренебрежении краевыми эффектами сосредоточено в пространстве между обкладками и однородно, поэтому плотность энергии поля одинакова во всех точках между обкладками и равна отношению полной энергии поля (4.12) к объему  $V$  пространства, который это поле занимает:  $w_s = W/V = \epsilon_0 \epsilon E^2/2$ . Как следует из общей теории электромагнетизма, полученная формула для плотности энергии

$$w_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \quad (4.14)$$

справедлива для электрического поля самого общего вида.

## § 5. ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Электрический диполь. Этот параграф мы начнем с изучения простейшей системы зарядов – электрического диполя, который играет важную роль в теории диэлектрической среды. Э л е к т р и ч е с к и м д и п о л е м называют систему, состоящую из двух точечных зарядов, одинаковых по модулю и противоположных по знаку. Пусть  $+q$  и  $-q$  –

заряды диполя, а  $\vec{l}$  - вектор, проведенный от отрицательного заряда диполя к положительному. Электрический диполь удобно охарактеризовать векторной физической величиной - электрическим, или дипольным, моментом:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (5.1)$$

который согласно этому определению направлен вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному и по модулю равен произведению модуля одного из зарядов на расстояние между ними (рис.24).

Напряженность  $\vec{E}$  поля диполя по принципу суперпозиции равна сумме напряженностей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами диполя (рис.25).



Рис.24

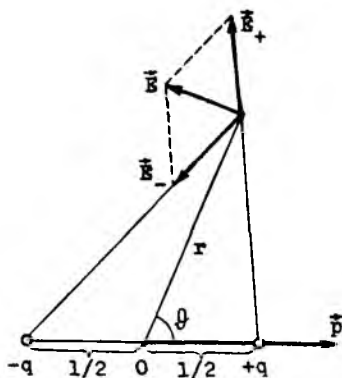


Рис.25

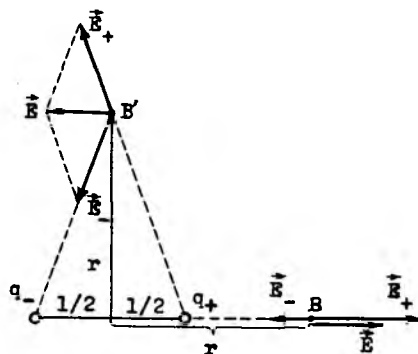


Рис.26

В точках, лежащих на оси диполя (точка В на рис.26), векторы  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  имеют противоположные направления, так что модуль напряженности равен разности модулей  $E_+$  и  $E_-$ . Используя для  $E_+$  и  $E_-$  формулу (2.5), с учетом (5.1) имеем

$$E = E_+ - E_- = (1/4\pi\epsilon_0)q/(r-l/2)^2 - (1/4\pi\epsilon_0)q/(r+l/2)^2 = (1/4\pi\epsilon_0)2qlr/(r^2-l^2/4)^2 = (1/4\pi\epsilon_0)2pr/(r^2-l^2/4)^2,$$

где  $r$  - расстояние от центра диполя до точки наблюдения. Для достаточно удаленных точек пространства, для которых  $r \gg l$ , пренебрегая  $l^2/4$  по сравнению с  $r^2$ , получаем приближенную формулу

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (5.2)$$

Для точек, лежащих на линии, проходящей через центр диполя перпендикулярно его оси (точка В' на рис.26), из подобия равнобедренных треугольников  $EE_+B'$  и  $(-q)B'(+q)$  находим  $E/E_+ = l/\sqrt{l^2+l^2}/4$ . Подставляя сюда  $E_+ = (1/4\pi\epsilon_0)q/(r^2+l^2/4)$  и пренебрегая  $l^2/4$  по сравнению с  $r^2$ , имеем для удаленных точек

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (5.3)$$

Общая формула для модуля напряженности поля в удаленной области ( $r \gg l$ ), вывод которой мы опускаем, имеет вид

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}{r^3}, \quad (5.4)$$

где  $r, \theta$  - полярные координаты точки наблюдения (рис.25)

Обратим внимание на то, что напряженность поля диполя убывает с расстоянием как  $1/r^3$ , т.е. существенно быстрее, чем в случае поля точечного заряда ( $1/r^2$ ). Картина поля диполя дана на рис.2,в, где линии напряженности изображены сплошными линиями, а эквипотенциальные поверхности - штриховыми линиями.

Рассмотрим вопрос о поведении диполя во внешнем электрическом поле. Если поле однородное, то на положительный и отрицательный заряды диполя со стороны поля действуют противоположные по направлению силы  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$  одинаковой абсолютной величины  $F_+ = F_- = qE$ , где  $\vec{E}$  - напряженность внешнего поля (рис.27,а). Моменты  $\vec{M}_+$  и  $\vec{M}_-$  этих сил относительно центра диполя имеют одинаковые направления (за чертеж) и модули  $M_+ = M_- = qE(l/2) \sin \alpha = 1/2 pE \sin \alpha$ . Следовательно, полный момент сил  $\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_-$  имеет модуль  $M = pE \sin \alpha$  и направлен за чертеж, так что

$$\vec{M} = [p \vec{E}]. \quad (5.5)$$

В реальных диполях всегда присутствуют какие-либо неэлектростатические силы, которые препятствуют взаимному притяжению зарядов диполя, удерживая их в положении равновесия при отсутствии внешнего поля. Если диполь жесткий, т.е.  $l = \text{const}$  (а-пример, два малых заряженных шарика на концах недеформируемого непроводящего стержня), то момент сил (5.5) стремится повернуть диполь к состоянию устойчивого равновесия, в ко-

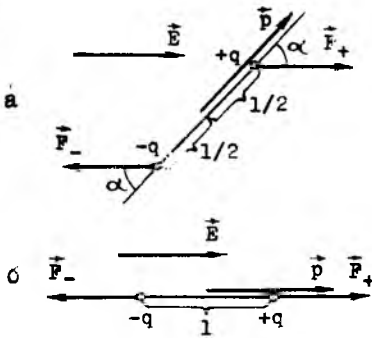


Рис.27

тором электрический момент  $\vec{p}$  направлен по напряженности внешнего поля (рис.27,б). Если же связь между зарядами не абсолютно жесткая, то диполь кроме того подвергнется соответствующей деформации. Наконец, так как суммарная внешняя сила равна нулю, центр масс диполя не приобретает ускорения.

Таким образом, однородное внешнее поле оказывает на диполь ориентирующее и деформирующее воздействие. Неоднородное поле, помимо этого, выталкивает диполь в направлении увеличения напряженности, так как в этом случае  $F_+ \neq F_-$  и результирующая сила  $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq 0$  направлена в сторону возрастания поля (рис.28).

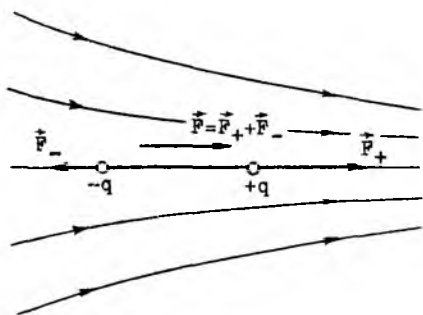


Рис.28

Диполь, находящийся в электрическом поле, обладает потенциальной энергией. Получим формулу для энергии взаимодействия жесткого диполя с однородным электростатическим полем. Напомним, что убыль потенциальной энергии равна работе потенциальных сил:  $-dW_n = dA$ . В однородном поле работа совершается электростатическими силами только при повороте диполя: при его поступательном движении перемещения обоих зарядов одинаковы, а силы  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$  равны по модулю и противоположны по направлению, так что работа равна нулю. Как видно из рис.29, при повороте диполя на малый угол  $d\alpha$  сила  $\vec{F}_+$  совершает работу  $dA_+ = F_+ l/2 d\alpha \cos(\alpha + \pi/2) = qE l/2 d\alpha (-\sin\alpha) = -1/2 pE \sin\alpha d\alpha$ . Такую же работу совершает сила  $\vec{F}_-$ , и полная работа  $dA = -pE \sin\alpha d\alpha$ . Таким образом,  $dW_n = pE \sin\alpha d\alpha$ , откуда, беря интеграл от обеих частей равенства и полагая константу интегрирования равной нулю, имеем:

$$W_n(\alpha) = -pE \cos\alpha. \quad (5.6)$$

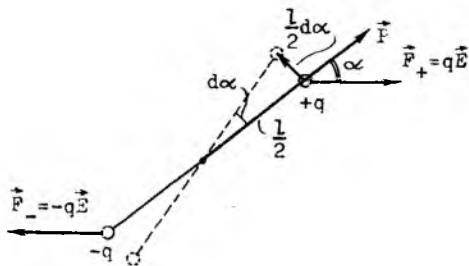


Рис.29

Общее представление о структуре диэлектриков. Перейдем к рассмотрению вопроса о структуре диэлектрических сред. Всякий диэлектрик в жидком и газообразном состоянии состоит из нейтральных атомов и молекул. Электрический заряд в пределах молекулы распределен

весьма сложным образом, однако в макроскопической теории обычно нет необходимости детально изучать это распределение заряда. Молекула в электрическом отношении, т.е. в вопросах о создаваемом ею поле и о ее реакции на воздействие внешнего поля, в хорошем приближении ведет себя так, как если бы весь ее положительный заряд был сосредоточен в "центре положительного заряда", а отрицательный - в "центре отрицательного заряда" (положение обоих центров определяется той же формулой, что и центр масс системы материальных точек, если в этой формуле заменить массы зарядами соответствующего знака). Тем самым молекулу можно уподобить диполю с электрическим моментом  $\vec{p} = q\vec{l}$ , где  $q$  - абсолютная величина положительного или отрицательного заряда молекулы, а  $\vec{l}$  - вектор, проведенный из "центра отрицательного заряда" в "центр положительного заряда".

Существуют молекулы, у которых центры положительного и отрицательного зарядов совпадают, например, молекулы, состоящие из двух одинаковых атомов ( $H_2$ ,  $O_2$  и т.п.). Они не обладают собственным дипольным моментом - у них  $\vec{p} = 0$ , так как  $\vec{l} = 0$ , и поэтому называются **неполярными**. Молекулы, у которых центры положительного и отрицательного зарядов не совпадают, имеют отличный от нуля собственный дипольный момент и называются **полярными**.

Строение твердых диэлектриков сложнее и разнообразнее. У диэлектриков, имеющих кристаллическую структуру, в узлах кристаллической решетки расположены ионы. В некоторых случаях, например, у кристаллов, образованных из атомов одного элемента, все ионы имеют положительный заряд, а связь между ними осуществляется валентными электронами (ковалентная связь). В других случаях, когда кристалл представляет собой химическое соединение элементов (типичный пример - кристалл поваренной соли  $NaCl$ ), ионы имеют разные знаки зарядов и удерживаются в решетке силами взаимного электрического притяжения (ионная связь). Кристаллическую решетку таких кристаллов можно рассматривать как состоящую из подрешеток, одна из которых образована положительными ионами, а другая - отрицательными. Ограничимся этими весьма упрощенными представлениями о структуре диэлектриков, поскольку изучение их специфических электрических свойств сейчас не входит в нашу задачу.

Поляризация диэлектриков. Рассмотрим, какие процессы происходят в диэлектрической среде при ее помещении в электростатическое поле. Со стороны поля на положительные заряды действуют силы, направленные по напряженности поля, а на отрицательные - в противоположную сторону. Вследствие этого у неполярных молекул центры положительного и отрицательного зарядов, совпадавшие при отсутствии по-

ля, смещаются друг относительно друга - молекулы приобретают индуцированный, т.е. наведенный полем, дипольный момент, направленный вдоль поля (рис.30,а). На полярные молекулы поле оказывает прежде всего ориентирующее действие: дипольные моменты молекул, при отсутствии поля ориентированные хаотически, под влиянием поля ориентируются преимущественно в направлении поля (рис.30,б). В кристаллах под действием поля также происходит смещение зарядов: в случае ковалентной связи речь идет в первую очередь о смещении электронов, образующих связи между ионами, относительно решетки, а в кристаллах с ионной связью подрешетки смещаются друг относительно друга.

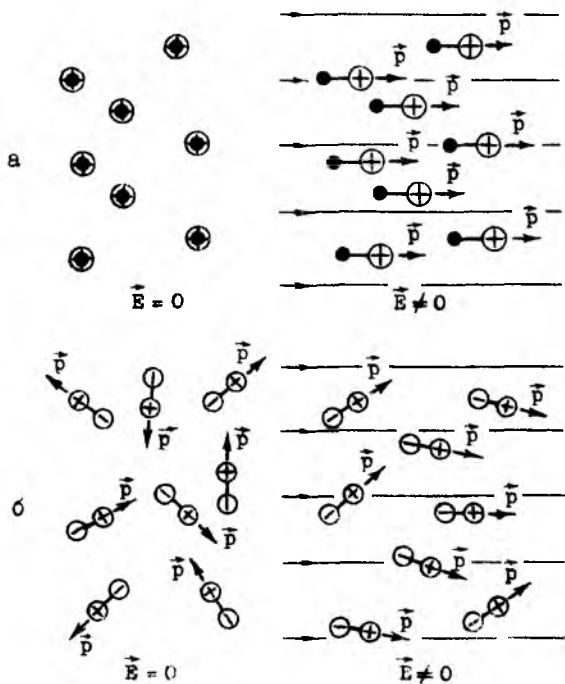


Рис.30

Мы видим, что диэлектрические среды в зависимости от их структуры по-разному реагируют на воздействие внешнего электрического поля. Однако общим для всех диэлектриков является то, что каждый малый элемент объема диэлектрика приобретает отличный от нуля суммарный дипольный момент - происходит поляризация диэлектрика. Для количественной характеристики степени поляризации диэлектрика вводится физическая величина - вектор поляриза-

ц и и, который по определению есть суммарный дипольный момент единицы объема вещества. Следовательно, если в малом объеме  $\Delta V$  в окрестности некоторой точки диэлектрика суммарный дипольный момент молекул равен  $\sum_i \vec{p}_i$ , где  $\vec{p}_i$  - момент  $i$ -й молекулы и суммирование ведется по всем молекулам в  $\Delta V$ , то по определению вектор поляризации  $\vec{P}$  в рассматриваемой точке выразится формулой

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (5.7)$$

В зависимости от характера поля и свойств диэлектрика поляризация может быть различной в разных точках диэлектрика, так что вектор поляризации, вообще говоря, является функцией координат. Как показывает теория и опыт, для изотропных диэлектриков, рассмотрением которых мы и ограничимся (к ним относятся большинство твердых диэлектриков, а также все диэлектрики в жидком и газообразном состоянии), вектор поляризации в не слишком сильных полях пропорционален напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}. \quad (5.8)$$

Безразмерный коэффициент  $\kappa$  зависит от свойств и состояния вещества и называется его диэлектрической восприимчивостью. Зависимость диэлектрической восприимчивости от тех или иных параметров, характеризующих вещество, существенно различная у разных типов диэлектриков. Так, у диэлектриков с полярными молекулами она оказывается обратно пропорциональной температуре, поскольку усиливающееся с ростом температуры хаотическое тепловое движение препятствует ориентации дипольных моментов молекул вдоль напряженности поля, уменьшая вектор поляризации; у диэлектриков с неполярными молекулами  $\kappa$  практически не зависит от температуры.

При отсутствии внешнего электрического поля положительные и отрицательные заряды в каждом малом объеме диэлектрика скомпенсированы, так что плотность заряда всюду равна нулю. Сейчас мы покажем, что при поляризации происходит перераспределение зарядов, при котором возникают нескомпенсированные заряды на поверхности, а в некоторых случаях и в толще диэлектрика - это так называемые **поляризационные**, или **связанные**, заряды.

Связь между вектором поляризации и поляризационными зарядами. Для конкретности рассуждений будем иметь в виду диэлектрик с неполярными молекулами, хотя получаемые далее соотношения справедливы для всех изотропных диэлектриков. Рассмотрим внутри диэлектрика область, ограниченную замкнутой поверхностью  $S$  (рис.31). При поляри-

зации происходит смещение положительных зарядов в направлении напряженности и отрицательных - в противоположном. Так как центр масс молекулы должен остаться на месте, а масса протона почти в 2000 раз больше массы электрона, то практически смещения испытают лишь отрицательные заряды. Из рис.31 видно, что через те участки поверхности  $S$ , где напряженность направлена внутрь поверхности, часть отрицательных зарядов покинет рассматриваемую область, а через участки, где напряженность направлена наружу, в область войдет отрицательный заряд. Если суммарный вошедший и суммарный вышедший заряды не равны друг другу, то область приобретет поляризационный заряд  $Q^P$ .

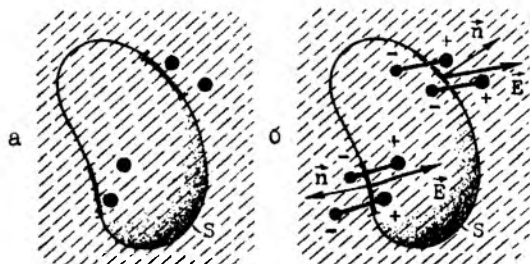


Рис.31

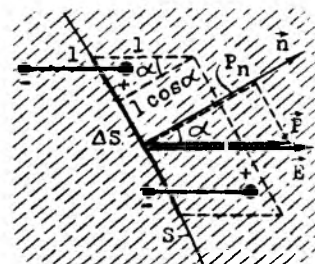


Рис.32

Сначала подсчитаем малый заряд  $\Delta Q^P$ , который приобретает рассматриваемая область за счет перехода зарядов через отдельный малый участок  $\Delta S$  поверхности  $S$ . Как видно из рис.32, где представлено сечение диэлектрика плоскостью чертежа и участок  $\Delta S$  изображен жирной линией, через  $\Delta S$  войдут отрицательные заряды тех и только тех молекул, которые находятся в цилиндре с площадью основания  $\Delta S$  и высотой  $l \cos \alpha$ , где  $l$  - величина относительного смещения положительного и отрицательного зарядов в молекуле, а  $\alpha$  - угол между внешней нормалью к поверхности и вектором поляризации. Объем этого цилиндра равен  $l \cos \alpha \Delta S$ , следовательно, в нем находится  $n_0 l \cos \alpha \Delta S$  молекул, где  $n_0$  - концентрация молекул. Умножая это число молекул на абсолютную величину одноименного заряда каждой молекулы  $q$ , найдем искомый заряд  $\Delta Q^P = -q n_0 l \cos \alpha \Delta S$  (знак минус необходимо поставить потому, что через участки поверхности, где  $\alpha < \pi/2$ , т.е.  $\cos \alpha > 0$ , область приобретает отрицательный заряд, как это видно из рис.32). В этом выражении  $ql = p$  - модуль дипольного момента молекулы,  $qn_0 = P$  - модуль вектора поляризации,  $qln_0 \cos \alpha = P \cos \alpha = P_n$  - проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности  $S$ , так что окончательно получим

$$\Delta Q^P = - P_n \Delta S. \quad (5.9)$$



Суммируя выражения вида (5.9) по всем участкам поверхности  $S$ , найдем полный поляризационный заряд  $Q^p$  рассматриваемой области:

$$Q^p = - \int_S P_n dS, \quad (5.10)$$

который, следовательно, равен взятому с обратным знаком потоку вектора поляризации через поверхность  $S$ .

Рассмотрим теперь, что происходит волизи поверхности диэлектрика. Как видно из рис. 33, на котором изображено сечение диэлектрика

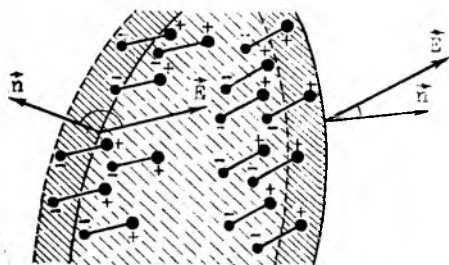


Рис. 33

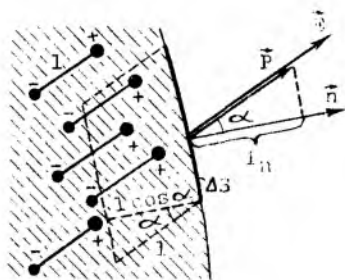


Рис. 34

плоскостью чертежа, в результате смещения электронов при поляризации в микроскопически тонком поверхностном слое (он густо заштрихован) оказываются заряды только одного знака: положительные, где напряженность направлена из диэлектрика вовне, и отрицательные, где напряженность направлена внутрь диэлектрика. В макроскопической теории толщиной этого слоя пренебрегают, считая такие заряды расположенными по поверхности диэлектрика и описывая их распределение поверхностной плотностью поляризационных зарядов  $\sigma^p$ .

Установим связь между поверхностной плотностью заряда  $\sigma^p$  и вектором поляризации. Рассмотрим элемент  $\Delta S$  поверхности диэлектрика (изображен на рис. 34 в сечении плоскостью чертежа жирным отрезком) и подсчитаем поляризационный заряд  $\Delta Q^p$  в цилиндре (изображен штриховой линией), примыкающем к этому элементу. Выкладки, аналогичные приведенным к формуле (5.9), дают:  $\Delta Q^p = qd_l \cos \alpha \Delta S = P_n \Delta S$ . Правильность знака в этой формуле следует из рис. 34: на участке поверхности, на котором  $P_n > 0$ , возникает положительный заряд  $\Delta Q^p > 0$ . Разделив согласно (1.8) этот заряд на  $\Delta S$ , находим поверхностную плотность поляризационных зарядов

$$\sigma^p = P_n. \quad (5.11)$$

Тем самым образом, поверхностная плотность поляризационных зарядов в любой точке поверхности диэлектрика равна проекции на внешнюю нормаль вектора поляризации, взятого в той же точке поверхности.

Следует заметить, что при поляризации диэлектрика поверхностные поляризационные заряды возникают всегда, а объемные поляризационные заряды в толще могут возникать только в неоднородных диэлектриках. В самом деле, для поляризационного заряда в некоторой области однородного диэлектрика с учетом (5.8) и постоянства восприимчивости  $\epsilon$  имеем  $Q^{\text{п}} = - \oint_{\text{S}} P_{\text{n}} dS = - \oint_{\text{S}} \epsilon_0 \epsilon E_{\text{n}} dS = - \epsilon_0 \epsilon \oint_{\text{S}} E_{\text{n}} dS$ . Но по теореме Гаусса  $\oint_{\text{S}} E_{\text{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q^{\text{п}}$  (предполагается, что в диэлектрике отсутствуют заряды неполяризационного происхождения) и мы приходим к равенству  $Q^{\text{п}} = - \epsilon Q^{\text{п}}$ , которое может выполняться только при  $Q^{\text{п}} = 0$  ( $\epsilon > 0$ ).

На рис. 35 в качестве примера изображено распределение поверхностных поляризационных зарядов на однородном по составу ( $\epsilon = \text{const}$ ) и однородно поляризованном ( $\vec{P} = \text{const}$ ) диэлектрическом шаре. Размеры символов заряда "+" и "-" пропорциональны модулю  $\sigma^{\text{п}}$  в каждой точке поверхности. На полушарии, где угол  $\alpha$  между внешней нормалью  $\vec{n}$  и вектором  $\vec{P}$  острый ( $\alpha < \pi/2$ ),  $P_{\text{n}} > 0$  и согласно (5.11)  $\sigma^{\text{п}} > 0$ . На другом полушарии  $\alpha > \pi/2$ ,  $P_{\text{n}} < 0$  и, следовательно,  $\sigma^{\text{п}} < 0$ . По модулю  $\sigma^{\text{п}}$  максимальна на "полюсах" ( $\alpha = 0, \alpha = \pi$ ), так как в этих точках  $|P_{\text{n}}| = P$ , и обращается в нуль на "экваторе" ( $\alpha = \pi/2$ ), где  $P_{\text{n}} = 0$ . Объемные поляризационные заряды в шаре, как и во всяком однородном диэлектрике, не возникают.

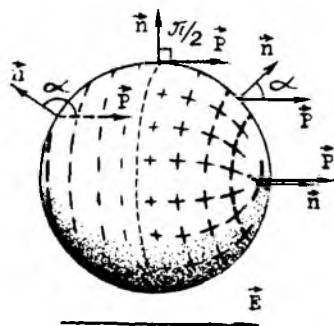


Рис. 35

Можно подметить общую тенденцию в распределении зарядов на нейтральных проводниках и нейтральных однородных диэлектриках, помещенных в электростатическое поле: в обоих случаях наведенные полями заряды (индукционные – на проводниках, поляризационные – на диэлектриках) располагаются на поверхности тела и создают поле, направленное против внешнего. Однако, если внутри проводника поле индукционных зарядов целиком компенсирует внешнее поле, то в диэлектриках поле поляризационных зарядов лишь ослабляет внешнее поле. О чем пойдет речь в следующем параграфе.

## § 6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕЩЕСТВА

Введение. Одна из основных задач электростатики состоит в нахождении электростатического поля, порождаемого произвольной системой тел. По принципу суперпозиции напряженность поля в любой точке пространства складывается из напряженностей полей, создаваемых в этой точке свободными зарядами на проводниках  $\vec{E}^{\text{св}}$  и, если диэлектрики нейтральны, как это предполагалось при их изучении в предыдущем параграфе, поляризационными зарядами на диэлектриках  $\vec{E}^{\text{п}}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{св}} + \vec{E}^{\text{п}}. \quad (6.1)$$

Если диэлектрикам сообщены заряды, то сюда добавится напряженность, обусловленная этими зарядами неполяризационного происхождения.

Подчеркнем, однако, что принцип суперпозиции для решения основной задачи электростатики в общем случае непригоден: он позволяет рассчитать напряженность поля только тогда, когда задано расположение зарядов в пространстве, в то время как распределение свободных зарядов по поверхности проводника и поляризационных зарядов в диэлектрике само определяется искомым полем (см. формулы (4.1), (5.10), (5.11) и (5.8)) и потому заранее неизвестно (исключение составляют лишь случаи, когда мы имеем дело с системой точечных зарядов или распределение заряда на телах можно установить из соображений симметрии).

Поэтому для нахождения поля приходится обращаться к уравнениям электростатики – теоремам о циркуляции и потоке напряженности, причем в последней удается исключить из рассмотрения поляризационные заряды, воспользовавшись уже известной нам зависимостью этих зарядов от напряженности поля и диэлектрической восприимчивости среды  $\epsilon$  (см. формулы (5.10), (5.11) и (5.8)). Избавляться от свободных зарядов в теореме Гаусса нет необходимости, поскольку, как будет пояснено далее (см. с.49), для расчета поля не нужно знать их конкретное распределение по поверхности проводника. Заметим, что физические характеристики проводящих сред вообще не появляются в электростатике, поскольку равновесное распределение заряда по поверхности проводника не зависит от материала проводника, а определяется только его геометрическими свойствами – размером и формой, как это уже отмечалось ранее.

Теорема Гаусса при наличии диэлектриков. Вектор электрического смещения. Запишем теорему Гаусса (2.11) для произвольной замкнутой поверхности  $S$ , внутри которой могут оказаться как свободные заряды проводников, так и поляризационные и неполяризационные заряды диэ-

лектриков. выделяя в правой части суммарный поляризационный заряд  $\sum_i q_i^n$  и обозначая прочие общим символом  $\sum_i q_i$ , имеем:

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \sum_i q_i + \sum_i q_i^n \right]. \quad (6.2)$$

воспользовавшись формулой (5.10), выразим суммарный поляризационный заряд  $\sum_i q_i^n$  внутри поверхности  $S$  через поток вектора поляризации через эту поверхность:

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \sum_i q_i - \oint_S \mathbf{P}_n dS \right].$$

Перенеся стоящий справа интеграл в левую часть и умножая обе части равенства на  $\epsilon_0$ , получим

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}_n + \mathbf{P}_n) dS = \sum_i q_i. \quad (6.3)$$

Левая часть существенно упростится, если ввести новый вектор

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (6.4)$$

который называется электрическим смещением, или электрической индукцией. Теперь теорема Гаусса принимает простой вид

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum_i q_i, \quad (6.5)$$

или с учетом (1.7)

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \int_V \rho dV. \quad (6.5, a)$$

В правой части осталась сумма только неполяризационных зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности  $S$ , но зато слева вместо потока напряженности стоит поток электрического смещения через эту поверхность. Таков наиболее общий вид теоремы Гаусса в интегральной форме.

Вектор электрического смещения, как и вектор поляризации, в изотропных диэлектрических средах пропорционален напряженности поля. Действительно, подставляя (5.8) в (6.4), имеем

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E}. \quad (6.6)$$

Беличину

$$\epsilon = 1 + \alpha \quad (6.7)$$

называют относительной диэлектрической проницаемостью, или просто диэлектрической проницаемостью вещества. В вакууме  $\vec{P} = 0$  и  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ . У газов восприимчивость мала по сравнению с единицей и чаще полагают  $\epsilon = 1$ ; у жидких и большинства твердых диэлектриков  $\epsilon$  и

$\epsilon$  имеют величину порядка нескольких единиц или десятков, достигая огромных значений у особой группы анизотропных диэлектриков (сегнетоэлектриков), для которых, однако, излагаемая теория неприменима, поскольку для них вектор поляризации не пропорционален напряженности поля. С учетом (6.7), формула (6.6) принимает вид

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (6.8)$$

Поскольку введение вектора  $\vec{D}$  носит вспомогательный характер и он редко используется при решении электростатических задач, мы не будем останавливаться на его свойствах.

Понятие о краевых задачах электростатики. Вопрос об общем методе расчета электростатического поля выходит за рамки общего курса физики, и мы здесь лишь вкратце остановимся на постановке задачи.

Пусть имеется произвольная система заряженных проводников и требуется рассчитать поле во всем пространстве вне проводников. Выше уже отмечалось, что принцип суперпозиции в большинстве случаев бесполезен и для решения задачи приходится обращаться к уравнениям электростатики. Как было показано ранее (с. 28), эти уравнения в дифференциальной форме сводятся к одному уравнению для потенциала — уравнению Пуассона (3.20). Поскольку во всем пространстве вне проводников  $\rho = 0$ , уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа (3.21). Однако уравнение Лапласа само по себе не определяет потенциал однозначно. Как доказывается в теории дифференциальных уравнений, для нахождения потенциала в некоторой области пространства необходимо иметь дополнительную информацию о поле на поверхности, ограничивающей рассматриваемую область, например, знать потенциал во всех точках этой поверхности. Такую дополнительную информацию на границе области называют граничными, или краевыми, условиями, а сама задача о нахождении решения дифференциального уравнения при заданных граничных условиях называется **к р а е в о й з а д а ч е й**.

В нашем случае граница рассматриваемой области, т.е. всего пространства вне проводников, состоит из поверхностей всех проводников и бесконечно удаленной замкнутой поверхности. На бесконечно удаленной поверхности потенциал равен нулю, так как там справедлива формула (3.9) для поля точечного заряда. Значения потенциала на поверхностях проводников определяются без затруднений, так как поверхности проводников являются эквипотенциальными, а потенциал проводника легко измерить. Таким образом, нахождение поля, создаваемого заряженными проводниками при отсутствии диэлектриков сводится к решению уравнения Лапласа (3.21) при заданных значениях потенциалов проводников.

Изложенное выше остается в силе и при наличии в пространстве помимо заряженных проводников нейтральных однородных диэлектриков; необходимо лишь дополнительно потребовать выполнения некоторых условий для производных потенциала на поверхности диэлектриков. Если, однако, диэлектрики неоднородны или им сообщены заряды неполяризационного происхождения, то задача об отыскании поля существенно усложняется.

**Диэлектрик между эквипотенциальными поверхностями.** Рассмотрим важный случай, когда о поле в диэлектрике можно сделать простое заключение, не прибегая к решению уравнений электростатики.

Пусть в произвольное электростатическое поле с напряженностью  $\vec{E}_0(x, y, z)$  вносится однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  таким образом, что он целиком заполняет пространство между эквипотенциальными поверхностями (рис. 36). Как доказывается в теоретической электростатике, в этом случае возникающие на поверхности диэлектрика поляризационные заряды не создают поля вне диэлектрика, а внутри его уменьшают первоначальное поле в  $\epsilon$  раз:

$$\vec{E}_{\text{вне}} = \vec{E}_0, \quad \vec{E}_{\text{внутри}} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}. \quad (6.9)$$

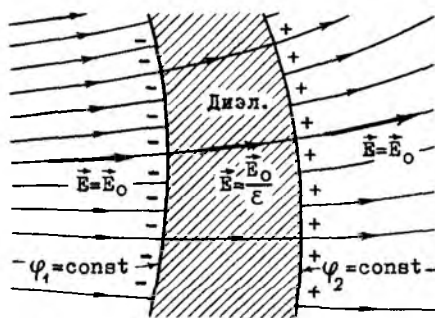


Рис. 36

Под условия сформулированной теоремы подпадает конденсатор, заполненный однородным диэлектриком, так как обкладки конденсатора являются эквипотенциальными поверхностями. Теорема верна и для проводников, погруженных в практически безграничный жидкий или газообразный диэлектрик, поскольку поверхности проводников — эквипотенциальные, а влиянием поляризационных зарядов на удаленной поверхности диэлектрика можно пренебречь. Подчеркнем, однако, что при нарушении условий теоремы поле в диэлектрике может существенно отличаться от (6.9). Так, расчет показывает что в рассмотренном ранее (с. 46) примере с однородным диэлектрическим шаром, помещенным в однородное внешнее поле  $\vec{E}_0$ , напряженность поля внутри шара  $\vec{E} = 3\vec{E}_0 / (\epsilon + 2)$ , что при  $\epsilon \gg 1$  почти в три раза отличается от результата, даваемого формулой (6.9).

## ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## § 7. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Понятие об электрическом токе. Источником магнитного поля являются движущиеся электрические заряды, т.е. электрические токи, поэтому прежде чем приступить к изучению магнитного поля необходимо дать предварительные представления об электрическом токе и ввести его основные характеристики.

Электрическим током в широком смысле слова называется всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Средами, проводящими электрический ток, являются металлические проводники, электролиты, электрическая плазма, полупроводники, т.е. все вещества, в которых имеются носители тока — заряженные частицы, которые могут сравнительно свободно перемещаться в пределах тела.

В нашу задачу не входит детальное изучение механизма протекания тока в веществе, поэтому мы ограничимся весьма упрощенной, даже примитивной, моделью. Когда по проводнику течет ток, например, под действием электрического поля, траекторию отдельного носителя тока можно схематически представить ломаной линией (рис.37): носитель

тока совершает хаотическое тепловое движение (изломам траектории соответствуют его соударения с другими частицами) и вместе с тем дрейфует, т.е. движется упорядоченно в сторону



Рис.37

действующей на него силы. При макроскопическом описании электрического тока от теплового движения можно отвлечься, поскольку в силу своей хаотичности оно само по себе не приводит к систематическому переносу заряда, и рассматривать лишь упорядоченное движение со скоростью  $\vec{u}$  вдоль траекторий, называемых линиями тока. Электрический ток называется постоянным, если движение носителей тока стационарно, т.е. скорость их направленного движения в каждой фиксированной точке проводника не меняется со временем.

Сила и плотность тока. Рассмотрим некоторую поверхность  $S$  внутри проводника. Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  между моментами времени  $t$  и  $t+\Delta t$  через эту поверхность протечет заряд  $\Delta q$ .

Предел отношения  $\Delta q/\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  называется силой тока через поверхность  $S$ :

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (7.1)$$

Если рассматривать заряд, прошедший через поверхность  $S$ , как функцию времени, то согласно (7.1) сила тока есть производная заряда по времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.2)$$

Следовательно, сила тока численно равна заряду, прошедшему через рассматриваемую поверхность за единицу времени. Из формулы (7.2) следует, что за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  между моментами  $t$  и  $t+dt$  через поверхность протечет заряд  $dq = I(t)dt$ , а за конечное время  $t = t_2 - t_1$  между моментами  $t_1$  и  $t_2$  - заряд

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

В случае постоянного тока сила тока не зависит от времени, так что  $q = I t$  и

$$I = \frac{q}{t}. \quad (7.3)$$

Сила тока - скалярная величина. Когда речь идет о силе тока через поперечное сечение тонкого проводника, выбирают одно из двух направлений вдоль проводника за положительное и приписывают силе тока положительный знак, если положительные носители тока движутся в этом направлении (или отрицательные - в противоположном, поскольку переход положительного заряда через поверхность эквивалентен переходу отрицательного заряда в противоположном направлении). Единица силы тока в СИ "ампер" будет определена позже (с.66).

Во многих задачах оказывается недостаточным знать силу тока через конечные сечения проводника и требуется более детальная информация о картине распределения тока в толще проводника. С этой целью вводится вектор  $\vec{j}$  плотности тока, который по определению направлен по скорости упорядоченного движения положительных носителей тока (рис.38,а) и численно равен силе тока через единичную площадку, перпендикулярную линиям тока. Следовательно, если на перпендикулярную к линиям тока малую площадку  $\Delta S_1$  приходится сила тока  $\Delta I$ , то

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_1}. \quad (7.4)$$

Выразим плотность тока через характеристики носителей тока: концентрацию  $n_0$ , заряд  $q$  и скорость упорядоченного движения  $\vec{u}$ . Как видно из рис.38,б, через малую площадку  $\Delta S_1$  за промежуток вре-



мени  $\Delta t$  пройдут те и только те носители тока, которые в момент  $t$  находятся в прямоугольном параллелепипеде с площадью основания  $\Delta S_{\perp}$  и высотой  $u \Delta t$  (прочие носители либо не дойдут до площадки  $\Delta S_{\perp}$ , либо пройдут мимо нее). Умножая число этих носителей  $n_0 u \Delta t \Delta S$  на заряд  $q$  отдельного носителя тока, найдем заряд  $\Delta q = q n_0 u \Delta t \Delta S$ , перенесенный через  $\Delta S_{\perp}$  за время  $\Delta t$ . Поделив его на  $\Delta t$ , получим силу тока  $\Delta I$  через  $\Delta S_{\perp}$ :  $\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q n_0 u \Delta S_{\perp}$ , откуда  $\vec{j} = \Delta I / \Delta S_{\perp} = q n_0 \vec{u}$ . Так как для положительных носителей тока векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{u}$  имеют по определению одинаковые направления, то полученную формулу можно записать в векторной форме:

$$\vec{j} = q n_0 \vec{u} . \quad (7.5)$$

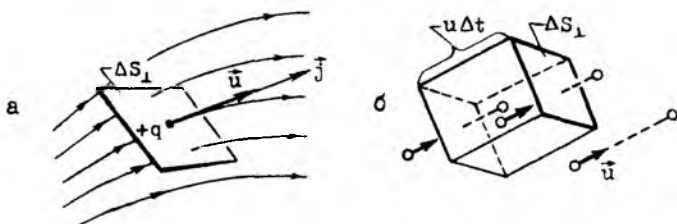


Рис.38

Если в образовании тока принимают участие как положительные, так и отрицательные заряды, то соответствующие им плотности тока  $\vec{j}_+$  и  $\vec{j}_-$  складываются:

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = q_+ n_{0+} \vec{u}_+ + q_- n_{0-} \vec{u}_- . \quad (7.6)$$

В этой формуле величины, характеризующие положительные носители тока, помечены значком +, а отрицательные - значком -.

Зная вектор плотности тока как функцию координат, можно найти силу тока через любую поверхность. Сила тока  $\Delta I$  через малую площадку  $\Delta S_{\perp}$ , перпендикулярную вектору  $\vec{j}$ , согласно (7.4) равна  $\Delta I = j \Delta S_{\perp}$ . Если малая площадка  $\Delta S$  расположена так, что нормаль к ней составляет угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{j}$  (рис.39, а), то, как видно из рисунка, сила тока через  $\Delta S$  такая же, как и через ее проекцию  $\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha$  на плоскость, перпендикулярную  $\vec{j}$ :  $\Delta I = j \Delta S_{\perp} = j \Delta S \cos \alpha = j_n \Delta S$ , где  $j_n = j \cos \alpha$  - проекция  $j$  на нормаль к площадке. Итак

$$\Delta I = j_n \Delta S . \quad (7.7)$$

Силу тока  $I$  через поверхность  $S$  конечных размеров получим, суммируя силы тока вида (7.7) через все ее малые участки (рис.39, б):

$$I = \int_S j_n dS . \quad (7.8)$$

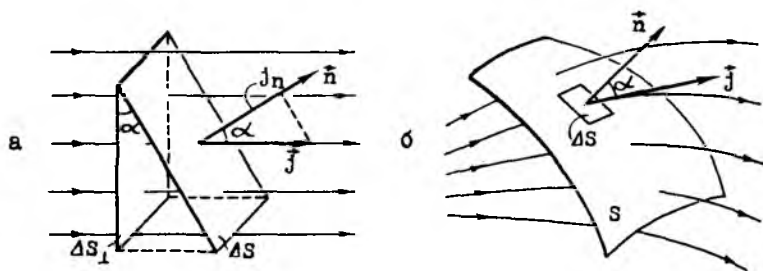


Рис.39

В некоторых случаях ток течет вдоль поверхностного слоя пренебрежимо малой толщины. Его характеризуют поверхностной плотностью тока  $\vec{j}_{\text{пов}}$ , которая по определению представляет собой вектор, направленный по скорости упорядоченного движения положительных носителей тока и численно равный силе поверхностного тока, приходящейся на отрезок единичной длины, перпендикулярный линиям тока.

Понятие о магнитном поле. Опыты показывают, что проводники, по которым течет электрический ток, взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие осуществляется посредством магнитного поля: каждый проводник с током создает в пространстве магнитное поле и в то же время испытывает действие со стороны магнитного поля, порождаемого другими проводниками с током. Если проводники неподвижны и токи в них постоянны, то, очевидно, не меняются со временем и все характеристики порождаемого ими поля. Такое постоянное магнитное поле при отсутствии в пространстве тел, обладающих магнитными свойствами, изучается в настоящем параграфе.

Построение теории постоянного магнитного поля осуществляется по той же схеме, которая использовалась ранее при изучении электростатического поля. Это позволяет провести сравнительную характеристику обоих полей и облегчает усвоение материала.

Элемент тока. Фундаментальную роль в теории силового поля играет понятие элементарного источника поля. В теории тяготения это - материальная точка, в электростатике - точечный заряд. Аналогичную роль в магнетизме играет бесконечно малый элемент проводника с током, который характеризуется вектором  $\vec{j}dV$ , где  $dV$  - объем элемента,  $\vec{j}$  - плотность тока в нем (рис.40,а). Для тонкого проводника с площадью поперечного сечения  $dS$  малым элементом является просто отрезок проводника малой длины  $dl$ , для которого  $\vec{j}dV = \vec{j}dS dl = I d\vec{l}$ , где мы учли, что  $\int j dS$  есть сила тока  $I$  в проводнике, и перенесли сим-

вол вектора  $\vec{j}$  на  $d\vec{l}$ , рассматривая последний как вектор  $d\vec{l}$ , направленный по току (рис. 40, а). В дальнейшем как сам малый элемент тонкого проводника с током, так и сопоставляемый ему вектор  $I d\vec{l}$  будем называть элементом тока.

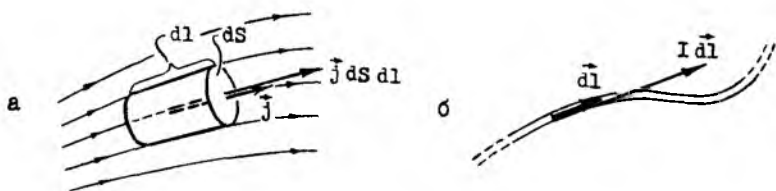


Рис. 40

Вектор магнитной индукции. К определению основной характеристики магнитного поля можно подойти тем же путем, каким была введена основная характеристика электрического поля - вектор напряженности. Рассмотрим произвольную систему проводников с постоянными токами, порождающую исследуемое магнитное поле, и будем интересоваться силой  $d\vec{F}$ , действующей на пробный элемент тока  $I_0 d\vec{l}_0$ , помещенный в ту или иную точку поля. Пробный элемент тока можно взять в виде короткого тонкого жесткого проводника, причем, чтобы иметь возможность измерить действующую на него силу, следует использовать гибкие подводящие провода. Кроме того, чтобы не пришлось учитывать действие на пробный элемент тока магнитного поля подводящих проводов, сила тока  $I_0$  в них должна быть достаточно малой.

Опыты такого рода приводят к заключению, что сила  $d\vec{F}$  пропорциональна модулю элемента тока  $I_0 d\vec{l}_0$  (в электростатике  $\vec{F} \sim q_0$ ), но зависит также от его ориентации (элемент тока - векторная величина!). А именно, в каждой точке поля существует некоторое физически выделенное направление, которое замечательно тем, что, во-первых, модуль силы  $d\vec{F}$  пропорционален синусу угла  $\alpha$  между этим направлением и направлением элемента тока:

$$dF = B I_0 dl_0 \sin \alpha, \quad (7.9)$$

где  $B$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств поля в точке расположения пробного элемента тока. Во-вторых, направление силы  $d\vec{F}$  связано с направлением элемента тока и физически выделенным направлением правилом правого винта: если вращать винт так, чтобы его нарезка поворачивалась от первого из этих направлений ко второму по кратчайшему углу, то доступательное движение винта определит направление силы  $d\vec{F}$  (рис. 41).

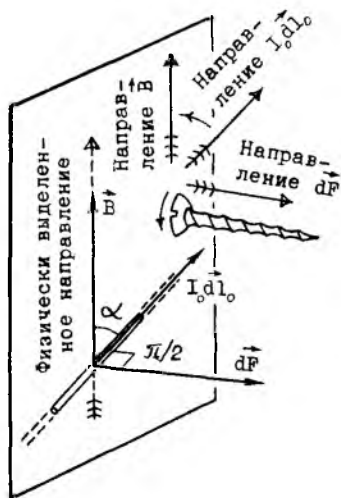
Эти два обстоятельства означают, что если ввести вектор  $\vec{B}$ , у которого направление совпадает с физически выделенным направлением, а модуль равен коэффициенту пропорциональности  $B$  в формуле (7.9), то сила  $d\vec{F}$  запишется как векторное произведение векторов  $I_0 d\vec{l}_0$  и  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = I_0 d\vec{l}_0 \vec{B}. \quad (7.10)$$

Вектор  $\vec{B}$ , как видно из процедуры его определения, не зависит ни от модуля, ни от направления пробного элемента тока и, следовательно, является характеристикой поля — он называется магнитной индукцией. Формулу (7.10), выражающую силу, действующую на элемент тока в магнитном поле, через магнитную индукцию поля, называют законом Ампера.

При ориентации элемента тока  $I_0 d\vec{l}_0$  перпендикулярно вектору  $\vec{B}$  ( $\alpha = \pi/2$ ,  $\sin\alpha = 1$ ) сила  $d\vec{F}$  максимальна по модулю и равна  $dF_{max} = I_0 dl_0 B$ , так что

$$B = \frac{dF_{max}}{I_0 dl_0}. \quad (7.11)$$



Фиг. 41

Отсюда следует, что модуль магнитной индукции численно равен максимальной силе, действующей на единичный элемент тока  $I_0 dl_0 = 1$  А м. Единичной измерения магнитной индукции в СИ является "тесла" (Тл):  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н} / (1 \text{ А м})$ .

Как всякое векторное поле, магнитное поле можно наглядно изобразить, проводя семейство линий магнитной индукции по общим правилам, о которых шла речь в электростатике (с.13). Однако картины линий магнитной индукции по своему характеру существенно отличаются от картин линий напряженности электростатического поля, что связано с различием свойств этих полей. Линии напряженности электростатического поля начинаются и кончатся на зарядах, а линии магнитной индукции не имеют начала и конца — они представляют собой, как правило, замкнутые линии, охватывающие электрические токи. Это свойство линий магнитной индукции прослеживается на рис.42, где изображены картины магнитных полей прямого бесконечного проводника с током (рис.42,а), кругового витка с током (рис.42,б) и катушки с током (рис.42,в). Векторное поле, линии которого замкнуты, называется вихревым. Следовательно, постоянное магнитное поле — вихревое

в отличие от электростатического, которое является безвихревым, поскольку его линии напряженности не замкнуты.

Принцип суперпозиции. Возникает вопрос: как теоретически рассчитывать магнитную индукцию поля, если известно распределение в пространстве токов, создающих это поле? Напомним, что аналогичная проблема в электростатике, т.е. расчет напряженности поля по заданному распределению зарядов, решалась на основе принципа суперпозиции (см. формулы (2.6) и (2.7)). Опыты показывают, что принцип суперпозиции имеет место и в случае магнитного поля: магнитная индукция в каждой точке поля, порождаемого системой проводников с токами, равна сумме магнитных индукций, создаваемых в этой точке отдельными частями системы. В частности, если проводники мысленно разбить на бесконечно малые элементы, то

$$\vec{B} = \int d\vec{B}, \quad (7.12)$$

где  $d\vec{B}$  - магнитная индукция поля, обусловленного отдельным элементом тока, и интегрирование ведется по всем проводникам системы.

Магнитное поле элемента тока.

Таким образом, задача сводится к нахождению формулы для магнитной индукции поля, которое создавал бы отдельный элемент тока. Прямые опыты здесь невозможны вследствие принципиальной неосуществимости изолированного элемента постоянно-

го тока. Поэтому искомая формула была установлена косвенным путем на основе анализа магнитных полей проводников конечной длины. Ее называют законом Био - Савара - Лапласа:

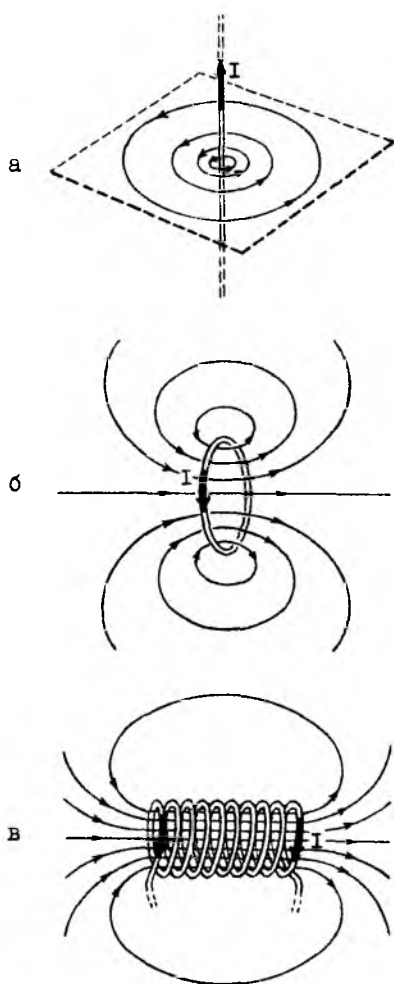


Рис. 42

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l} \vec{r}]}{r^3} \quad (7.13)$$

В этой формуле  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный из элемента тока  $Id\vec{l}$ , создающего поле, в точку пространства, где определяется вектор  $\vec{dB}$  (рис.43). Запись коэффициента пропорциональности в виде  $\mu_0/4\pi$  характерна для СИ. Константа  $\mu_0$  называется магнитной постоянной и, как показывают опыты,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \quad (7.14)$$

(в справедливости наименования "генри на метр" читатель может убедиться после изучения [11]).

Для модуля вектора  $\vec{dB}$  согласно (7.13) имеем

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2}, \quad (7.15)$$

где  $\alpha$  - угол между элементом тока  $Id\vec{l}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ ; направление вектора  $\vec{dB}$  совпадает с направлением векторного произведения  $[Id\vec{l} \vec{r}]$  и определяется правилом винта (см. рис.43).

Сравнивая (7.15) с соответствующей ей по смыслу формулой (2.5) для напряженности поля точечного заряда в электростатике, констатируем одинаковую в обоих случаях зависимость поля от источника ( $B \sim Idl$  и соответственно  $E \sim q$ ) и от расстояния от источника до точки наблюдения ( $\sim 1/r^2$ ). Более сложный вид формулы Био - Савара - Лапласа связан с векторным характером элемента тока и отражает зависимость поля от направления из элемента тока в точку наблюдения: в точках прямой, являющейся продолжением элемента тока ( $\alpha=0$ ), магнитная индукция равна нулю и возрастает до максимума по мере приближения  $\alpha$  к  $\pi/2$ , если иметь в виду точки, равноудаленные от элемента тока.

Принцип суперпозиции (7.12) вместе с законом Био - Савара - Лапласа (7.13) позволяет рассчитать магнитное поле любых проводников с постоянными токами. Приведем два примера.

Поле прямого проводника. Пусть какой-либо тонкий проводник током имеет прямолинейный участок. Рассчитаем магнитную индукцию поля, создаваемого этим прямолинейным участком проводника.

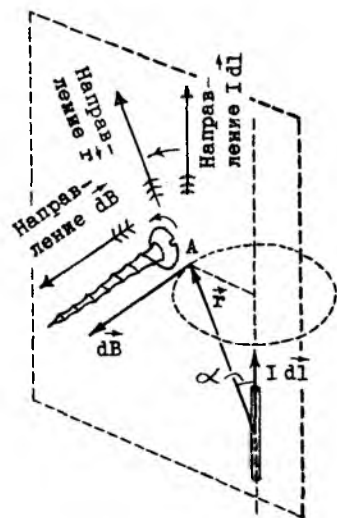


Рис.43

Расстояние от точки А, где ищется поле, до проводника обозначим  $R$ , а вдоль проводника проведем ось  $x$  с началом отсчета координаты в точке  $O$  (рис.44). Магнитная индукция  $d\vec{B}$ , создаваемая в точке наблюдения отдельным элементом проводника с координатой  $x$  и длиной  $dl=dx$ , имеет согласно (7.15) модуль

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \alpha}{r^2}.$$

Из формулы (7.13), применяя правило винта, заключаем, что векторы  $d\vec{B}$ , обусловленные всеми малыми элементами проводника, направлены одинаково - за чертёж, что символически изображено крестиком. Поэтому суммарный вектор  $\vec{B}$  имеет то же направление, а его модуль равен сумме модулей всех  $d\vec{B}$ , т.е. выражается определенным интегралом:

$$B = \int dB = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dx.$$

Рис.44

Для вычисления интеграла перейдем к переменной интегрирования  $\alpha$ , выражая через нее  $r$  и  $dx$  в подынтегральном выражении. Как видно из рис.44,  $x = R \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -R \operatorname{ctg} \alpha$ . Беря дифференциал, находим  $dx = R d\alpha / \sin^2 \alpha$ . Для  $r$  имеем  $r = R / \sin(\pi - \alpha) = R / \sin \alpha$ . Таким образом

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (7.16)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - предельные значения угла  $\alpha$ , соответствующие концам рассматриваемого участка проводника.

В идеальном случае бесконечного прямолинейного проводника  $\alpha_1 \rightarrow 0$  и  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ , так что

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}. \quad (7.17)$$

Эта формула приближенно описывает поле в области вблизи середины прямолинейного участка реального замкнутого проводника конечных размеров, если все прочие участки проводника достаточно удалены от этой области, так что их полем здесь можно пренебречь (см.рис.45, где отмеченная область обозначена точками). Картина линий магнитной индукции прямого бесконечного проводника с током дана на рис.42,а.

Поле кругового витка с током.

Замкнутый контур с током удобно охарактеризовать векторной физической величиной — магнитным моментом  $\vec{p}$ , модуль которого в случае плоского контура равен произведению силы тока  $I$  на площадь контура  $S$ :

$$p = I S, \quad (7.18)$$

а направление перпендикулярно плоскости контура и связано с направлением тока правилом винта: если вращать головку винта в соответствии с направлением тока, то поступательное движение винта определит направление вектора  $\vec{p}$  (рис.46).

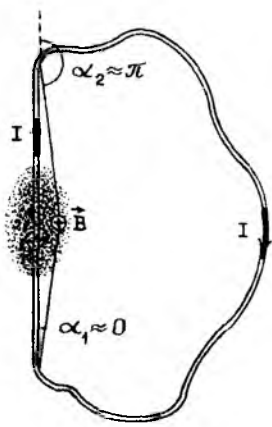


Рис.45

Найдем магнитную индукцию поля, создаваемого контуром с током, имеющим форму окружности, причем для простоты ограничимся точками пространства, лежащими на оси контура. Обозначим  $R$  радиус витка,  $I$  — силу тока в нем и  $r$  — расстояние от плоскости витка до точки  $A$ , где ищется поле (рис.47,а). Магнитная индукция  $d\vec{B}$ , обусловленная элементом тока  $I d\vec{l}$  верхней части витка, направлена согласно (7.13) перпендикулярно плоскости, проходящей через элемент тока и отрезок, соединяющий его с точкой наблюдения (изображена штриховой линией), и согласно (7.15) имеет модуль  $dB = (\mu_0/4\pi) Idl/(r^2+R^2)$ , где учтено, что расстояние от элемента тока до точки наблюдения равно  $\sqrt{r^2+R^2}$ , а  $\sin\alpha = 1$ , так как  $\alpha = \pi/2$ . Векторы  $d\vec{B}$ , обусловленные всеми малыми элементами витка, располагаются по конусу (рис.47,б).

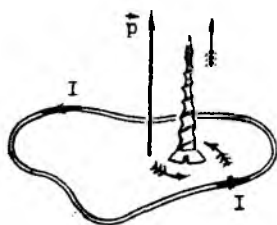


Рис.46

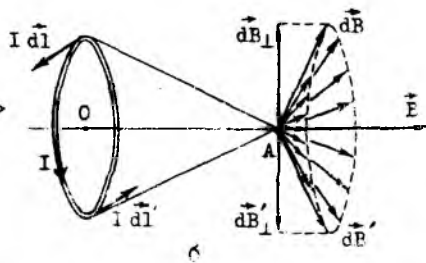
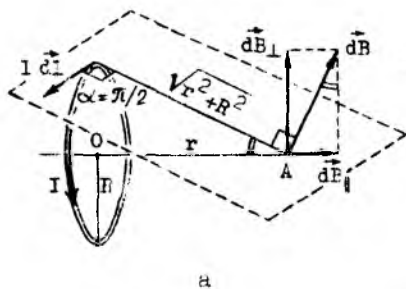


Рис.47



Чтобы сложить эти векторы, представим каждый из них в виде суммы двух составляющих:  $d\vec{B}_{\parallel}$ , направленной вдоль оси контура, и  $d\vec{B}_{\perp}$ , перпендикулярной этой оси (рис.47,а). При сложении перпендикулярные составляющие попарно взаимно уничтожаются, так как  $d\vec{B}_{\perp}$  и  $d\vec{B}'_{\perp}$ , создаваемые парой диаметрально противоположных элементов тока одинаковой длины, равны по величине и противоположны по направлению (рис.47,б). Таким образом, искомый вектор  $\vec{B}$  определяется суммой параллельных составляющих; следовательно, он направлен вдоль оси витка и имеет модуль  $B = \int dB_{\parallel}$ . Модуль  $dB_{\parallel}$  легко вычислить из подобия прямоугольных треугольников с равными острыми углами, помеченными на рис.47,а двойными дугами:

$$dB_{\parallel}/dB = R/\sqrt{r^2+R^2} \rightarrow dB_{\parallel} = dB R / \sqrt{r^2+R^2} = (\mu_0/4\pi) I R dl / (r^2+R^2)^{3/2}.$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам витка и замечая, что значения подынтегральной функции для всех элементов одинаковы, находим

$$B = \int dB_{\parallel} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{(r^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(r^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(r^2+R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{(r^2+R^2)^{3/2}}.$$

Поскольку  $I\pi R^2 = p$  есть модуль магнитного момента витка, окончательно имеем

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p}{(r^2+R^2)^{3/2}}. \quad (7.19)$$

Из этой формулы следует, что поле максимально в центре витка ( $r=0$ ) и убывает с расстоянием. Для достаточно удаленных точек ( $r \gg R$ ), пренебрегая  $R^2$  по сравнению с  $r^2$ , получаем приближенную формулу

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p}{r^3}. \quad (7.20)$$

Она имеет тот же вид, что и формула (5.2) для напряженности электрического поля диполя (для точек на оси диполя  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ ). Смысловая аналогия между диполем (в электростатике) и контуром с током (в теории постоянного магнитного поля) подтверждается и одинаковым характером их поведения во внешних полях (см. далее с.66-68).

Картина линий магнитной индукции поля кругового витка с током изображена на рис.42,б.

Уравнения постоянного магнитного поля в вакууме в интегральной форме. Опуская доказательство, сформулируем теоремы о потоке и циркуляции магнитной индукции для постоянного магнитного поля.

Теорема о потоке: поток магнитной индукции через любую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0 . \quad (7.21)$$

Теорема о циркуляции: циркуляция магнитной индукции по любому контуру L пропорциональна алгебраической сумме сил токов, пересекающих поверхность S, ограниченную этим контуром (рис.48,а) (в СИ коэффициент пропорциональности равен  $\mu_0$ ):

$$\oint_L \mathbf{B}_l dl = \mu_0 \sum_i I_i , \quad (7.22)$$

или с учетом (7.8)

$$\oint_L \mathbf{B}_l dl = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_n dS . \quad (7.22,а)$$

Выбор знаков сил токов, стоящих справа, определяется следующим правилом: токи, пересекающие поверхность под острым углом с нормалью к ней ( $I_1$  и  $I_3$  на рис.48,а), берутся со знаком плюс, а токи, пересекающие эту поверхность под тупым углом с нормалью ( $I_2$ ) - со знаком минус. При этом предполагается, что направления нормалей и направление обхода контура согласованы друг с другом правилом винта: если головку винта вращать в соответствии с принятым направлением обхода контура, то нормали следует направить в сторону поступательного движения винта (рис.48,б)

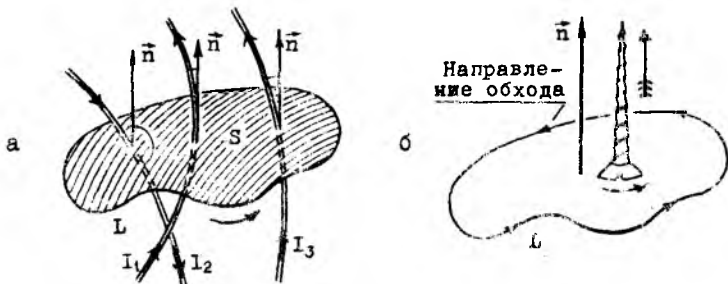


Рис.48

Вид теорем о потоке и циркуляции определяют характер поведения линий векторного поля. Если в некоторой области пространства поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю, то в каждой такую поверхность входит столько же линий, сколько выходит из нее.

т.е. в этой области линии вектора непрерывны. В электростатическом поле согласно теореме Гаусса (2.12) линии напряженности непрерывны вне заряженных тел: здесь  $\oint \vec{E}_n dS = 0$ , так как  $\rho = 0$ . В точках, где расположены заряды, непрерывность линий нарушается. Поток напряженности через поверхность, окружающую некоторый заряд, отличен от нуля и имеет тот же знак, что и заряд ( $\oint \vec{E}_n dS = 1/\epsilon_0 q$ ), т.е. линии напряженности исходят из точек, где расположены положительные заряды, и сходятся в точках, где находятся отрицательные заряды.

В постоянном магнитном поле согласно (7.21) поток магнитной индукции равен нулю через любую замкнутую поверхность, следовательно, линии магнитной индукции всюду непрерывны (они, как правило, замкнутые). Здесь нет точек, в которых линии начинались бы или кончались, подобных точкам расположения зарядов в электростатике. Поэтому говорят, что в природе отсутствуют магнитные заряды.

В векторном поле, у которого циркуляция по любому контуру равна нулю, как это имеет место для напряженности в электростатике, не существует замкнутых линий вектора. Действительно, циркуляция вектора  $\vec{A}$ , взятая по замкнутой линии вектора  $\vec{A}$ , заведомо отлична от нуля, так как в выражении  $\oint \vec{A}_1 d\vec{l}$  подынтегральная функция знакопостоянна ( $A_1 = |\vec{A}| \geq 0$ , если направление обхода контура совпадает с направлением вектора  $\vec{A}$ , и  $A_1 = -|\vec{A}| \leq 0$  в противном случае). Замкнутость линий магнитной индукции постоянного магнитного поля связана с тем, что циркуляция магнитной индукции согласно (7.22), вообще говоря, отлична от нуля.

Неравенство нулю циркуляции вектора  $\vec{B}$  по контуру, охватывающему токи, означает, что интеграл вида  $\int_A^C \vec{B}_1 d\vec{l}$  зависит не только от положения начальной и конечной точек  $A$  и  $C$ , но и от формы кривой, по которой он берется. Поэтому в магнитном поле нельзя ввести величину, которая была бы формальным аналогом потенциала в электростатике. Говорят, что магнитное поле не потенциально в отличие от электростатического, которое потенциально.

При помощи теоремы о циркуляции в общем случае нельзя рассчитать магнитную индукцию, так как последняя стоит в ней под знаком интеграла. Однако в некоторых простейших случаях, когда поле обладает достаточной симметрией, удастся выбрать замкнутый контур, во всех точках которого (или, по крайней мере, на тех его участках, где  $B_1 \neq 0$ )  $B_1 = B = \text{const}$ . Тогда в выражении для циркуляции по такому контуру величина магнитной индукции выносится из-под знака интеграла и может быть легко вычислена. В качестве примера найдем поле внутри бесконечно длинного соленоида.

Поле бесконечно длинного соленоида. На рис.42,в представлена картина линий магнитной индукции поля реального соленоида при упрощающем предположении, что соленоид представляет собой совокупность плоских витков. Если неограниченно удлинять соленоид при неизменном сечении, то линии магнитной индукции внутри соленоида будут выпрямляться вдоль его оси, а поле вне соленоида будет стремиться к нулю. Рассчитаем магнитную индукцию поля внутри такого идеального бесконечно длинного соленоида, применяя теорему о циркуляции.

Контур  $L$ , фигурирующий в этой теореме, выберем в виде прямоугольника  $ACEF$ , одна из сторон которого  $AC$  длиной  $l$  проходит через точку, где ищется поле, и параллельна оси соленоида, а противоположная ей сторона  $EF$  находится вне соленоида (рис.49). На всех участках этого контура кроме стороны  $AC$   $B_l = 0$ , так как на участке  $DEFG$   $\vec{B} = 0$ , а к участкам  $CD$  и  $GA$  вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен. Поэтому циркуляция вектора  $\vec{B}$  по всему контуру сведется к интегралу только по отрезку  $AC$ . Поскольку вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль прямой  $AC$  и по соображениям симметрии одинаков во всех ее точках, то  $B_l = B = \text{const}$  и циркуляция запишется так:

$$\oint_L B_l dl = \int_A^C B dl = B \int_A^C dl = Bl.$$

Как видно из рис.49, поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром, пересекают  $nl$  витков, где  $n$  - число витков на единицу длины соленоида. Следовательно, суммарный ток, пронизывающий эту поверхность, равен  $lnI$ , где  $I$  - сила тока в соленоиде. По теореме о циркуляции (7.22)  $Bl = \mu_0 lnI$ , откуда

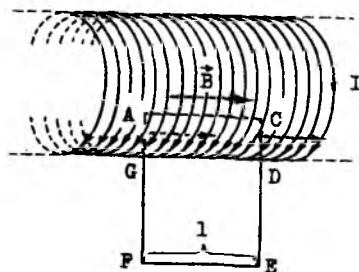


Рис.49

$$B = \mu_0 n I. \quad (7.23)$$

Из этой формулы видно, что магнитная индукция не зависит от положения точки, т.е. поле внутри бесконечного соленоида однородное. Такое поле приближенно имеет место в реальном соленоиде, у которого длина существенно больше радиуса, за исключением областей вблизи краев соленоида. По характеру создаваемого поля - практическое отсутствие поля вне и приближительная однородность внутри соленоида - длинный соленоид соответствует плоскому конденсатору в электростатике.

### § 8. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Взаимодействие прямолинейных проводников с токами. Вопрос о силовом воздействии магнитного поля на проводник с током в принципе решается следующим образом: суммируя амперовы силы (7.10), действующие на все малые участки проводника, найдем полную силу, а, суммируя моменты этих сил, — полный момент сил, действующих на проводник. Если проводник прямолинейный, а поле однородное, то формула (7.10) будет, очевидно, справедлива и для силы  $\vec{F}$ , действующей на участок проводника конечной длиной  $l$ :

$$\vec{F} = [I\vec{l}\vec{B}]. \quad (8.1)$$

В качестве примера рассмотрим взаимодействие двух параллельных проводников с током. Обозначим  $R$  расстояние между проводниками, а  $I_1$  и  $I_2$  силы тока в них (рис.50).

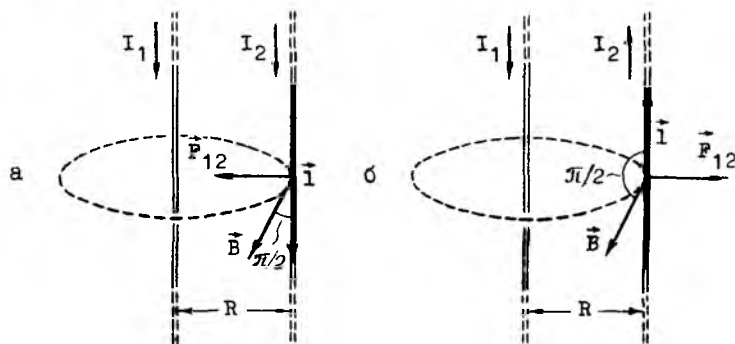


Рис.50

Вычислим силу  $\vec{F}_{12}$ , действующую на отрезок длиной  $l$  второго проводника со стороны первого, считая сначала проводники бесконечно длинными. Тогда магнитная индукция поля первого проводника в точках пространства, где расположен второй проводник, имеет одно и то же значение, определяемое формулой (7.17), и для силы  $\vec{F}_{12}$  справедлива формула (8.1):  $\vec{F}_{12} = [I_2\vec{l}\vec{B}]$ . Учитывая, что угол между  $I_2\vec{l}$  и  $\vec{B}$  равен  $\pi/2$ , для модуля силы  $\vec{F}_{12}$  получим  $F_{12} = I_2Bl$ . Подставляя сюда выражение (7.17) для  $B$ , в котором следует заменить  $l$  на  $l_1$ , получим окончательно

$$F_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2l}{R}. \quad (8.2)$$

Нетрудно понять, что для реальных проводников конечной длиной  $l$  полученная формула выполняется лишь приближенно, с тем большей точностью, чем меньше расстояние между проводниками по сравнению с их

длины. Сила  $\vec{F}_{12}$  направлена к первому проводнику, если токи  $I_1$  и  $I_2$  имеют одинаковое направление, и от первого проводника, если направления токов противоположны (рис.50, а, б). Таким образом, токи одинакового направления притягиваются друг к другу, а токи противоположных направлений отталкиваются друг от друга.

Формулу (8.2) используют для введения основной электрической единицы в СИ - единицы силы тока "ампер". Полагая  $I_1 = I_2 = 1\text{А}$ ,  $R = 1\text{м}$ , имеем для  $F_{12}/l$  значение, численно равное  $2(\mu_0/4\pi)$ , т.е. с учетом (7.14) -  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м. Таким образом, 1 ампер - сила такого тока, который, протекая по длинным параллельным проводникам, вызывает силу, действующую на единицу длины проводника, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м.

Действие магнитного поля на контур с током. Изучим теперь действие магнитного поля на замкнутый контур с током. Рассмотрим прямоугольную рамку, помещенную в однородное магнитное поле и ориентированную так, что одна из ее осей симметрии, вдоль которой проведем ось  $z$  декартовой системы координат, перпендикулярна линиям магнитной индукции, а магнитный момент  $\vec{p}$  рамки образует с магнитной индукцией поля  $\vec{B}$  угол  $\alpha$  (см.рис.51, а, а также 51, б, где дана проекция рамки на плоскость, перпендикулярную оси  $z$ ). Длины сторон 1 и 3, параллельных оси  $z$ , обозначим  $a$ , сторон 2 и 4 -  $b$ .

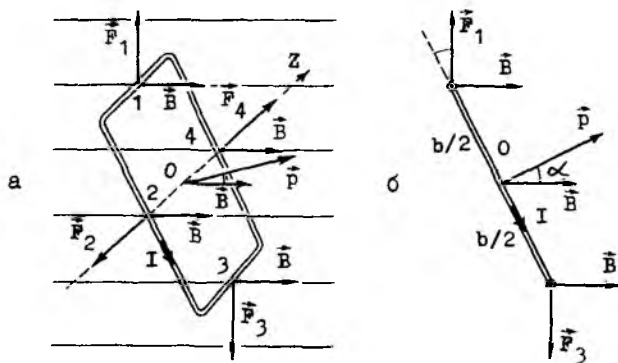


Рис.51

Силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ , действующие на соответствующие стороны рамки, найдем по формуле (8.1). Модули этих сил равны:

$$F_1 = F_3 = IaB \sin\frac{\pi}{2} = IaB, \quad F_2 = IbB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = IbB \cos\alpha, \quad (8.3)$$

$$F_4 = IbB \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = IbB \cos\alpha = F_2,$$

а направления сил даны на рис.51. Констатируем, что суммарная сила равна нулю, так как силы попарно равны по модулю и противоположны

по направлению:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ . Следовательно, центр масс рамки будет оставаться неподвижным, если он первоначально покоился.

Вычислим теперь моменты сил  $\vec{M}_z$  относительно оси  $z$ . Напомним, что по определению  $\vec{M}_z = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1)_z$ , где  $\vec{r}_1$  - радиус-вектор, проведенный от оси в точку приложения силы, а  $\vec{F}_1$  - составляющая силы, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси. Моменты сил  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_4$  равны нулю, поскольку эти силы направлены вдоль оси  $z$  и, следовательно, для них  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{41} = 0$ . Моменты сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  одинаковы, поэтому суммарный момент сил, действующих на рамку,  $\vec{M}_z = 2(\vec{r}_{11} \times \vec{F}_1)_z$ , где учтено, что  $\vec{r}_{31} = \vec{r}_{11}$ . Выразим этот момент сил через магнитный момент  $\vec{p}$  рамки с током и магнитную индукцию  $\vec{B}$  поля. Учитывая, что  $r_{11} = b/2$  и используя выражение (8.3) для силы  $F_1$ , имеем  $M_z = 2 \frac{b}{2} IaB \sin \alpha = Iab \sin \alpha$ . Поскольку  $ab = S$ , где  $S$  - площадь рамки, а  $IS = p$  есть модуль магнитного момента рамки, то

$$M_z = p B \sin \alpha. \quad (8.4)$$

Так как к тому же направление этого момента сил связано с направлениями векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{B}$  правилом винта (это видно из рис.51), то

$$\vec{M}_z = [\vec{p} \vec{B}]. \quad (8.5)$$

Момент сил (8.5) стремится повернуть рамку к положению устойчивого равновесия, при котором магнитный момент  $\vec{p}$  направлен вдоль магнитной индукции  $\vec{B}$ . (Легко убедиться, что другое положение равновесия, при котором векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{B}$  антипараллельны, неустойчиво.) Кроме того, как видно из рис.51, рамка испытывает со стороны поля деформирующее воздействие.

Рассмотрим теперь поведение контура с током в неоднородном магнитном поле. Пусть для определенности магнитная индукция существенно изменяется по модулю в направлении линий магнитной индукции и практически не изменяется в перпендикулярных к ним направлениях (на рис.52 линии магнитной индукции сгущаются слева направо, т.е. поле растет в этом направлении). Как и в однородном поле, на контур с током будет действовать момент сил, стремящийся ориентировать магнитный момент контура в направлении магнитной индукции. Однако в отличие от случая однородного поля результирующая сила, действующая на контур, теперь отлична от нуля. Действительно, силы  $d\vec{F}$ , действующие по закону Ампера (7.10) на элементарные участки контура, располагаются по конусу и дадут суммарную силу  $\vec{F}$ , направленную в сторону возрастания поля (см. рис.52,б; на рис.52,а подробно поясняется построение силы  $d\vec{F}$ , действующей на один из элементов тока  $Idl$  контура). Таким образом, неоднородное магнитное поле, ориентируя

магнитный момент контура в направлении магнитной индукции, втягивает контур в область более сильного поля. Подводя итог, заметим, что поведение контура с током в магнитном поле аналогично поведению диполя в электрическом поле.

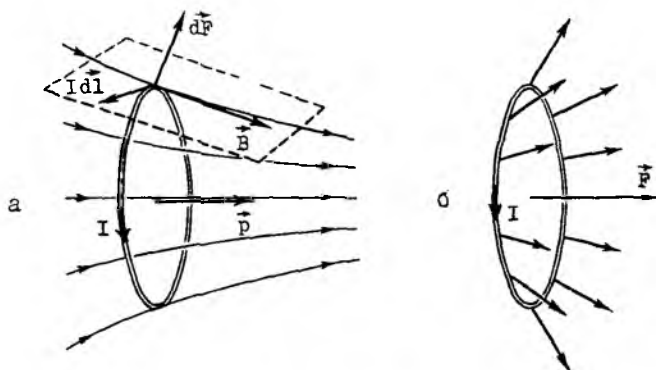


Рис. 52

Сила Лоренца. На проводник с током со стороны магнитного поля действуют силы. Каково происхождение этих сил? Поскольку электрический ток — это направленное движение зарядов, то естественно предположить, что магнитное поле действует с некоторой силой на всякий движущийся в этом поле заряд. В таком случае сила, действующая на проводник, есть результирующая всех сил, действующих на движущиеся в нем носители тока.

Рассчитаем силу, действующую на отдельный носитель тока. На элемент длины  $dl$  тонкого проводника с силой тока  $I$  действует сила Ампера (7.10). Преобразуем выражение для элемента тока, подставляя вместо силы тока выражение для  $\Delta I$ , получаемое из (7.4), в котором в свою очередь воспользуемся формулой (7.5) для плотности тока:  $Idl = q n_0 u S dl$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения проводника,  $q$  — заряд носителя тока,  $n_0$  — концентрация носителей тока,  $u$  — скорость их направленного движения. Это равенство справедливо и в векторной форме:  $Id\vec{l} = q n_0 S dl \vec{u}$ , поскольку вектор  $d\vec{l}$  в выражении элемента тока, по условию, коллинеарен вектору  $\vec{u}$  скорости положительных носителей тока. Подставляя это выражение для элемента тока в (7.10), имеем  $d\vec{F} = q n_0 S dl (\vec{u} \times \vec{B})$ . Силу  $\vec{f}$ , действующую на отдельный носитель тока, найдем, разделив силу  $d\vec{F}$  на число носителей тока  $n_0 S dl$  в рассматриваемом элементе проводника:  $\vec{f} = d\vec{F} / (n_0 S dl) = q (\vec{u} \times \vec{B})$ . Такая сила действует на всякий заряд, движущийся в магнитном поле.



Она называется силой Лоренца и при стандартном обозначении скорости буквой  $\vec{v}$  запишется в виде

$$\vec{f} = q [\vec{v} \vec{B}]. \quad (8.6)$$

Из этой формулы следует, что сила Лоренца перпендикулярна как магнитной индукции  $\vec{B}$  поля, так и скорости  $\vec{v}$  движущегося заряда (рис 53) и имеет модуль

$$f = q v B \sin \alpha, \quad (8.7)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами скорости и магнитной индукции.

Из факта перпендикулярности силы Лоренца скорости заряда и второго закона Ньютона следует, что ускорение заряда, движущегося в магнитном поле, нормально траектории. Это означает, что сила Лоренца не изменяет величины скорости, а изменяет только ее направление. Поэтому при движении заряда в магнитном поле его кинетическая энергия остается постоянной. К последнему заключению можно прийти и иным путем, замечая, что работа силы Лоренца равна нулю, поскольку, будучи перпендикулярной скорости, сила Лоренца тем самым всегда перпендикулярна малым перемещениям  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ .

**Движение заряда в магнитном поле.** Рассмотрим вопрос о движении материальной точки массой  $m$  и зарядом  $q$  в однородном магнитном поле. Начнем с частного случая, когда начальная скорость  $\vec{v}$  перпендикулярна магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис.54).

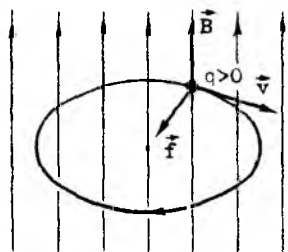


Рис.54

Поскольку все дальнейшие приращения скорости  $d\vec{v} = \vec{a} dt = \vec{f}/m dt$  ( $\vec{a}$  - ускорение) коллинеарны силе Лоренца  $\vec{f}$ , т.е. лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ , то траектория целиком лежит в этой плоскости. Далее, сила Лоренца, будучи перпендикулярной скорости, вызывает нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$ , где  $R$  - радиус кривизны траектории. По второму закону Ньютона  $m a_n = f$ , и подставляя сюда выражения для  $a_n$  и  $f$  (при этом в формуле (8.7) следует положить  $\sin \alpha = 1$ , так как в нашем случае  $\alpha = \pi/2$ ), получим:  $m v^2/R = q v B$ . Отсюда находим радиус кривизны траектории

$$R = \frac{m v}{q B}$$

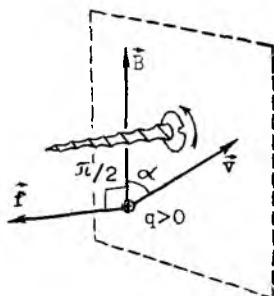


Рис.53

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (8.8)$$

Так как при движении в магнитном поле  $v = \text{const}$ , а  $B = \text{const}$  вследствие однородности поля, то радиус кривизны одинаков во всех точках траектории, т.е. последняя является окружностью. Итак, в рассмотренном случае заряд равномерно движется по окружности радиусом  $R$  из (8.8) в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ . Заметим, что согласно (8.6) для зарядов разных знаков направления силы Лоренца противоположные. Соответственно и направления вращения разноименных зарядов будут противоположными.

В общем случае, когда начальная скорость  $\vec{v}$  образует с направлением магнитной индукции угол  $\alpha$  (рис.55,а), движение можно разложить на движение вдоль оси, параллельной вектору  $\vec{B}$ , и движение в перпендикулярной к ней плоскости. Теперь сила Лоренца имеет модуль  $f = qvB \sin\alpha$  и по-прежнему лежит в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , а модуль составляющей скорости в этой плоскости равен  $v_{\perp} = v \sin\alpha$ . Поэтому аналогично предыдущему случаю траектория в перпендикулярной вектору  $\vec{B}$  плоскости представляет собой окружность, радиус которой определяется из условия  $mv_{\perp}^2/R = q v B \sin\alpha$ :

$$R = \frac{mv \sin\alpha}{qB}. \quad (8.9)$$

Движение вдоль вектора  $\vec{B}$  равномерное со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos\alpha$ , так как проекция силы Лоренца на это направление равна нулю. Таким образом, траектория результирующего движения представляет собой винтовую линию (рис.55,б) - заряженная частица как бы навивается на линии магнитной индукции.

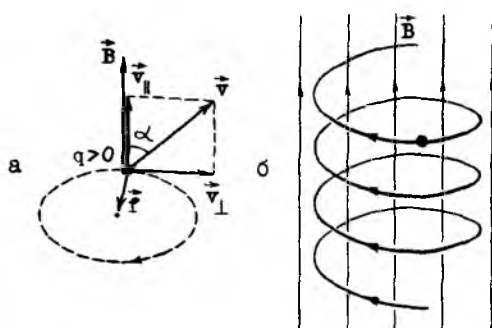


Рис.55

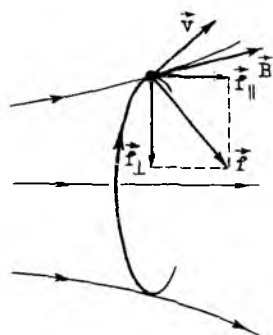


Рис.56

При движении заряда в неоднородном магнитном поле сила Лоренца имеет составляющую  $\vec{F}_\parallel$  (рис.56), направленную в сторону убывания поля. В этом случае заряд, по-прежнему нависаясь на линии магнитной индукции, будет выталкиваться в область более слабого поля. Этот механизм используют для создания так называемых магнитных ловушек, в которых при помощи магнитного поля специальной конфигурации удается удержать от разлетаия заряженные частицы плазмы. Своего рода естественной магнитной ловушкой для заряженных частиц, летящих из космоса (космических лучей), является магнитное поле Земли, с чем связано возникновение радиационных поясов вокруг Земли.

### § 9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕЩЕСТВА

Намагничивание вещества. До сих пор речь шла о магнитном поле, создаваемом проводниками с током при отсутствии вещества в окружающем пространстве. Опыт показывает, что наличие вещества приводит к изменению магнитного поля. Причина состоит в том, что все тела под действием магнитного поля начинают проявлять магнитные свойства - намагничиваются и сами создают магнитное поле (имея это в виду, говорят, что все вещества являются магнетиками).

Таким образом, при наличии вещества

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (9.1)$$

в любой точке пространства,  $\vec{B}_0$  - магнитная индукция, обусловленная токами в проводниках, а  $B'$  - магнитная индукция, обусловленная намагниченным веществом. Поле  $B'$  существенно зависит от свойств вещества, поэтому возникает необходимость ознакомиться с поведением вещества в магнитном поле. При построении теории магнитного поля мы будем исходить из заведомо упрощенной модели намагничивания вещества - модели молекулярных токов Ампера.

Согласно гипотезе, высказанной Ампером в начале XIX века, т.е. задолго до создания первых моделей атома, в веществе циркулируют микроскопические замкнутые токи - молекулярные токи.

При отсутствии внешнего магнитного поля орбиты молекулярных токов, а следовательно, и магнитные моменты этих токов ориентированы хаотически, так что суммарный магнитный

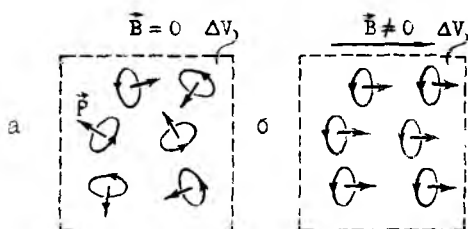


Рис.57

момент в любом объеме равен нулю - вещество не проявляет магнитных свойств (рис.57, а). При помещении вещества в магнитное поле магнит-

ные моменты молекулярных токов ориентируются вдоль поля (рис. 57, 6), и в результате каждый макроскопически бесконечно малый элемент объемом  $\Delta V$  вещества приобретает отличный от нуля магнитный момент — вещество намагничивается.

Для количественной характеристики степени намагниченности вещества вводится физическая величина — вектор намагничивания, или намагниченность, который по определению есть магнитный момент единицы объема вещества. Таким образом, если  $\sum_i \vec{p}_i^m$  — суммарный магнитный момент всех молекулярных токов в малом объеме  $\Delta V$  в окрестности рассматриваемой точки, то вектор намагничивания  $\vec{J}$  в этой точке определится формулой

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_i^m}{\Delta V} \quad (9.2)$$

(Обращаем внимание на смысловое соответствие между вектором намагничивания  $\vec{J}$  и вектором поляризации  $\vec{P}$ , определяемым формулой (5.7).) Единицей намагниченности в СИ, как следует из формул (9.2) и (7.18), является 1А/м ("ампер на метр").

Опыт и теория показывают, что для большинства веществ — магнитонеупорядоченных магнетиков — вектор намагничивания в не слишком сильных полях и при не слишком низких температурах пропорционален магнитной индукции поля:

$$\vec{J} \sim \vec{B}, \quad (9.3)$$

причем коэффициент пропорциональности, который мы пока не выписываем, зависит от свойств вещества. К магнитонеупорядоченным относятся все газообразные, жидкие и большинство твердых магнетиков.

Существуют особые группы кристаллических анизотропных веществ — магнитоупорядоченные магнетики, в которых упорядочение взаимной ориентации микроскопических магнитных моментов происходит даже в отсутствие внешнего магнитного поля за счет внутренних взаимодействий квантового происхождения. К таким магнетикам, обладающим специфическими магнитными свойствами, развиваемая далее теория, вообще говоря, не применима.

При отсутствии внешнего магнитного поля, вследствие хаотичной ориентации молекулярных токов, суммарный молекулярный ток через любую макроскопическую площадку равен нулю — макроскопические молекулярные токи в веществе отсутствуют. При наличии поля молекулярные токи ориентируются и уже взаимно не компенсируют друг друга, что приводит к появлению макроскопических молекулярных токов. Выясним, как связаны эти молекулярные токи с вектором намагничивания.

Связь молекулярных токов с вектором намагничивания. Рассмотрим мысленно внутри вещества произвольную поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$  (рис.58,а), и найдем полный молекулярный ток  $I^m$  через

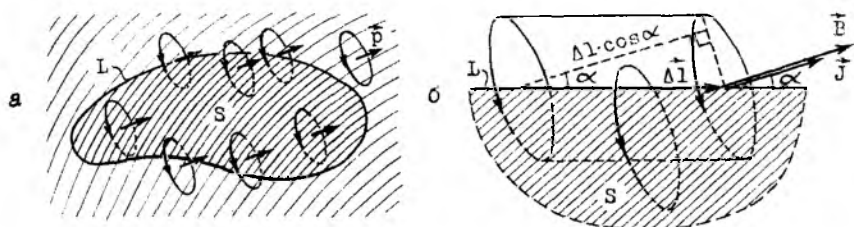


Рис.58

эту поверхность. Ясно, что вклад в этот ток дадут только те молекулярные токи, которые охватывают линию контура  $L$ , поскольку прочие токи либо вообще не пересекают поверхность  $S$ , либо пересекают ее дважды в противоположных направлениях, как это видно из рис.58,а. Разобьем контур  $L$  на малые участки и подсчитаем сначала, какой вклад  $\Delta I^m$  в ток  $I^m$  дадут молекулярные токи, охватывающие один из таких элементов  $\Delta l$  контура (см.рис.58,б). Этот элемент охватывают те и только те токи, центры которых лежат внутри изображенного на рисунке цилиндра. Число таких молекулярных токов равно произведению концентрации молекул  $n_0$  на объем цилиндра  $s \Delta l \cos \alpha$ , где  $s$  - площадь молекулярного тока,  $\alpha$  - угол между  $\Delta l$  и вектором намагничивания  $\vec{J}$ , направленным, как и магнитные моменты  $\vec{p}_i^m$ , перпендикулярно плоскостям молекулярных токов. Так как вклад каждого молекулярного тока равен силе этого тока  $1$ , то  $\Delta I^m = 1 n_0 s \Delta l \cos \alpha$ , или, учитывая, что  $1s = p_i^m$ ,  $n_0 p^m = J$ ,  $J \cos \alpha = J_1$ :  $\Delta I^m = J_1 \Delta l$ . Полный молекулярный ток через поверхность  $S$  получим, суммируя выражения  $\Delta I^m$  по всем элементам контура  $L$ :

$$I^m = \oint_L J_1 dl. \quad (9.4)$$

Таким образом, полный молекулярный ток через поверхность  $S$  равен циркуляции вектора намагничивания по контуру  $L$ , ограничивающему эту поверхность. Формула (9.4) выясняет связь между намагничённостью и объемными молекулярными токами, циркулирующими в толще вещества.

Рассмотрим теперь картину молекулярных токов у поверхности тела. На рис.59 изображено сечение тела плоскостью, перпендикулярной вектору намагничивания  $\vec{J}$  в некоторой точке поверхности тела. Видно, что в микроскопически тонком поверхностном слое толщиной порядка

радиуса отдельного молекулярного тока (на рис.59 он заштрихован) молекулярные токи имеют общее направление, образуя макроскопический поверхностный молекулярный ток – тело как бы обтекается по поверхности упорядоченными молекулярными токами.

Как показывает расчет, который мы опускаем, величина поверхностной плотности этого тока определяется проекцией вектора намагничивания на поверхность тела в той же точке (см.рис.59):

$$j_{\text{пов}}^{\text{м}} = J_1. \quad (9.5)$$

Можно показать, что поверхностные молекулярные токи всегда сопутствуют намагничиванию, тогда как объемные молекулярные токи могут возникать только в неоднородных магнетиках (сравните с аналогичной ситуацией с поляризационными зарядами в диэлектриках, с.46).

В качестве примера, иллюстрирующего формулу (9.5), на рис.60 дана картина поверхностных молекулярных токов в случае однородно намагниченного шара. Плотность  $j_{\text{пов}}^{\text{м}}$  максимальна на "экваторе" ( $J_1 = J$ ) и убывает до нуля при приближении к "полюсам" ( $J_1=0$ ), что отображено уменьшением густоты линий тока. Объемные молекулярные токи в толще однородного шара не возникают.

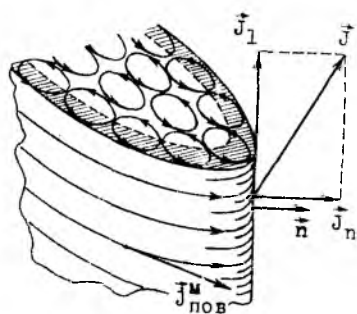


Рис.59

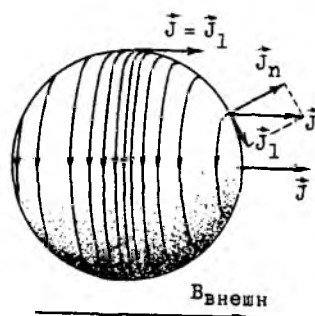


Рис.60

#### Уравнения постоянного магнитного поля при наличии вещества.

Поскольку магнитные свойства вещества обусловлены молекулярными токами, естественно предположить, что уравнения постоянного магнитного поля (7.21) и (7.22) справедливы не только в вакууме, но и при наличии вещества, причем в правой части теоремы о циркуляции (7.22) должны быть учтены все токи, пронизывающие поверхность  $S$ , как токи, текущие в проводниках, так и упорядоченный молекулярный ток  $I^{\text{м}}$ :

$$\oint_L B_1 dt = \mu_0 (\sum_k I_k + I^{\text{м}}). \quad (9.6)$$

Так как сила молекулярных токов  $I^m$  заранее неизвестна (она, как следует из формул (9.4), (9.5) и (9.3), зависит от результирующего поля  $\vec{B}$ ), исключим ее из рассмотрения, используя формулу (9.4). Теорема о циркуляции (9.6) примет вид  $\oint_L \vec{B}_1 d\vec{l} = \mu_0 \left( \sum_k I_k + \oint_L \vec{J}_1 d\vec{l} \right)$ . Переносим циркуляцию вектора намагничивания в левую часть и объединяя интегралы по контуру  $L$ , имеем после деления на  $\mu_0$

$$\oint_L (\vec{B}_1 / \mu_0 - \vec{J}_1) d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (9.7)$$

Интеграл в левой части существенно упростится, если ввести новую векторную величину

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (9.8)$$

Этот вектор называется напряженностью магнитного поля. Теорема о циркуляции принимает вид

$$\oint_L \vec{H}_1 d\vec{l} = \sum_k I_k, \quad (9.9)$$

или с учетом (7.8)

$$\oint_L \vec{H}_1 d\vec{l} = \int_S \vec{j}_n dS. \quad (9.9, a)$$

В правой части остались только токи, текущие в проводниках, но зато в левой части вместо циркуляции магнитной индукции  $\vec{B}$  стоит циркуляция напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Это и есть общий вид теоремы о циркуляции для постоянного магнитного поля при наличии вещества.

Свойства вектора напряженности магнитного поля. Из определения (9.8) следует, что размерности векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  одинаковы и, следовательно, единицей напряженности магнитного поля в СИ является 1А/м ("ампер на метр").

Из формул (9.3) и (9.8) вытекает, что для магнитнеупорядоченных сред вектор намагничивания  $\vec{J}$  пропорционален напряженности  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (9.10)$$

Коэффициент пропорциональности  $\chi$  зависит от свойств и состояния вещества и называется магнитной восприимчивостью вещества. Подставляя (9.10) в (9.8), находим

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}, \quad (9.11)$$

т.е. векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  пропорциональны друг другу. Величину

$$\mu = 1 + \chi \quad (9.12)$$

называют относительной магнитной проницаемостью вещества. С учетом (9.12) формула (9.11) за-

пишется окончательно в виде

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (9.13)$$

Вследствие коллинеарности векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линии этих векторов одинаковы по форме, однако различаются по густоте. Так, в отличие от линий вектора  $\vec{B}$ , которые всюду непрерывны, линии вектора  $\vec{H}$  непрерывны лишь в однородной среде ( $\mu = \text{const}$ ), а в неоднородных средах, в частности на границе раздела однородных сред с различными значениями магнитной проницаемости, претерпевают разрыв.

В любой точке вне вещества  $\vec{J} = 0$ , так что согласно (9.8)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (9.14)$$

т.е. в вакууме напряженность совпадает с точностью до множителя ( $1/\mu_0$  в СИ) с магнитной индукцией. Что касается физического смысла вектора  $\vec{H}$  внутри вещества, то этот вопрос, по крайней мере в частном случае, проясняется следующей теоремой, которую мы приводим без доказательства: если однородный магнетик целиком заполняет область пространства, ограниченную линиями магнитной индукции, то в любой точке магнетика

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (9.15)$$

где  $\vec{B}_0$  - магнитная индукция поля, создаваемого только токами в проводниках, т.е. того поля, которое было бы в рассматриваемой точке при отсутствии магнетика. Таким образом, напряженность магнитного поля внутри вещества определяет с точностью до не принципиального множителя  $1/\mu_0$  тот вклад, который дают в полное поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  проводники с током ( $\vec{B}'$  - магнитная индукция, обусловленная намагниченным веществом)

С учетом (9.15) формула (9.13) дает

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (9.16)$$

Таким образом, магнитная индукция внутри вещества в  $\mu$  раз больше магнитной индукции поля, существовавшего в той же точке при отсутствии вещества. Интересно заметить, что в электростатике наблюдалась противоположная ситуация: напряженность  $\vec{E}$  поля в веществе всегда меньше напряженности внешнего поля, в которое было внесено вещество.

Условиям сформулированной теоремы удовлетворяет случай, когда проводники с током погружены в практически безграничный магнетик. Это также поле в длинном соленоиде, заполненном однородным магнетиком.



Проводя параллель с электростатикой, обратим внимание на то, что смысловым аналогом напряженности  $\vec{E}$  в электростатике, как основной, силовой характеристики поля, в теории постоянного магнитного поля является не напряженность  $\vec{H}$ , а магнитная индукция  $\vec{B}$ . Напротив, сходную роль, как вспомогательные величины, удобные для описания поля при наличии вещества, играют векторы электрического смещения  $\vec{D}$  и напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Это терминологическое несоответствие обусловлено историческими причинами. Вместе с тем в формулах, в которые входят характеристики вещества ( $\alpha, \epsilon, \chi, \mu$ ), наблюдается соответствие  $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}$  (сравните (5.8) с (9.10), (6.8) с (9.13)).

## ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

## § 10. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электродвижущая сила и напряжение. Изучение основных закономерностей, которым подчиняются электрические токи, мы будем проводить чисто феноменологически, т.е. не исследуя детально механизм протекания тока, а руководствуясь лишь самыми общими представлениями и опираясь на опытные факты. В начале § 7 были введены исходные понятия о постоянном электрическом токе и определены его основные характеристики — сила и плотность тока. А теперь обсудим вопрос о том, при каких условиях возникает электрический ток.

Вызвать ток в проводнике можно, создав в нем электрическое поле, которое, действуя на носители тока, приведет их в направленное движение. Ясно, что для получения постоянного тока недостаточно одних только электростатических сил, поскольку, как мы знаем, под их действием заряд распределяется по поверхности проводника так, что поле внутри проводника отсутствует. К этому же заключению можно прийти, если исходить из закона сохранения энергии: выделение тепла, которым сопровождается протекание тока в проводниках, может происходить только за счет работы каких-либо неэлектростатических сил, ибо работа электростатических сил по перемещению заряда по замкнутой цепи, как мы знаем из электростатики, всегда равна нулю.

Итак, для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи сил неэлектростатической природы — так называемых *сторонних сил*, работа которых по переносу заряда по цепи отлична от нуля. Сторонние силы, действующие на носители тока, как правило, пропорциональны их заряду. Это позволяет, как и в случае электростатического поля, ввести *напряженность сторонних сил*  $\vec{E}^{ct}$ , определяя ее как отношение сторонней силы  $\vec{F}^{ct}$  к заряду, на который она действует:

$$\vec{E}^{ct} = \frac{\vec{F}^{ct}}{q} \quad (10.1)$$

(сравните с (2.2)). Тогда работа  $A_{BC}^{ct}$  сторонних сил по перемещению заряда  $q$  из точки  $B$  в точку  $C$  выразится формулой (3.2) с  $\vec{E}^{ct}$  вместо  $\vec{E}$ :  $A_{BC}^{ct} = q \int_B^C \vec{E}_1^{ct} dl$ . Отношение работы сторонних сил по переносу заряда  $q$  из точки  $B$  в точку  $C$  к этому заряду

$$\varepsilon_{BC} = \frac{A_{BC}^{ct}}{q} = \int_B^C \vec{E}_1^{ct} dl \quad (10.2)$$

называется электродвижущей силой, или сокращенно ЭДС, действующей на участке ВС. Согласно этому определению ЭДС численно равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда (сравните (10.2) с (3.12) и (3.13)).

В обычных цепях постоянного тока сторонние силы действуют внутри источников тока (гальванических элементов, аккумуляторов и т.п.) и имеют химическую природу. При разомкнутой цепи сторонние силы так перераспределяют заряды, что создаваемое ими электрическое поле компенсирует действие сторонних сил внутри источника ( $\vec{E} = -\vec{E}^{ст}$ ), чем и обеспечивается равновесие зарядов. В замкнутой цепи заряды распределены также и вдоль проводников внешней цепи, создавая внутри проводов электрическое поле, которое, действуя на носители тока, вызывает их направленное движение - электрический ток.

Можно показать, что в однородном по составу длинном цилиндрическом проводнике заряды распределяются по поверхности проводника с поверхностной плотностью, убывающей по мере удаления от источника приблизительно по линейному закону. Создаваемое ими электрическое поле внутри проводника однородно и, как следствие закона Ома (см. (10.12)), плотность тока одинакова во всех точках проводника. Картина постоянного тока схематически дана на рис.61, где тонкими стрелками изображена напряженность электрического поля, а жирными - напряженность сторонних сил; уменьшение поверхностной плотности заряда на проводнике внешней цепи по мере удаления от источника отражено уменьшением размеров символов "+" и "-" этих зарядов. Подчеркнем, что внутри источника сторонние силы движут заряды к одноименным с ними полюсам, т.е. против электростатических сил.

Напряжением  $U_{BC}$  на участке ВС цепи назовем отношение работы электростатических и сторонних сил, действующих на этом участке на переносимый заряд  $q$ , к величине этого заряда:

$$U_{BC} = \frac{A_{BC}^{э-ст} + A_{BC}^{ст}}{q} = \frac{A_{BC}^{э-ст}}{q} + \frac{A_{BC}^{ст}}{q}.$$

Иными словами, напряжение численно равно работе электростатических и сторонних сил по переносу единичного положительного заряда из начальной (В) в конечную (С) точку участка. Первое слагаемое согласно



Рис.61

(3.12) есть разность потенциалов на концах участка, а второе слагаемое согласно (10.2) представляет собой ЭДС, действующую на этом участке, так что

$$U_{BC} = \varphi(B) - \varphi(C) + \mathcal{E}_{BC}. \quad (10.3)$$

Если на рассматриваемом участке цепи нет сторонних сил (обычно это означает отсутствие здесь источника напряжения), то напряжение на нем просто равно разности потенциалов:

$$U_{BC} = \varphi(B) - \varphi(C). \quad (10.4)$$

Из определений ЭДС и напряжения следует, что они имеют ту же размерность, что и потенциал, т.е. в СИ измеряются в вольтах.

Законы постоянного тока. Прежде всего, констатируем два общих положения. Во-первых, постоянный ток, как правило, может течь лишь в замкнутых цепях, ибо в противном случае на концах разомкнутой цепи происходило бы накопление заряда. Это приводило бы к изменению со временем электрического поля в проводниках, что несовместимо со стационарным характером движения носителей тока. Во-вторых, сила тока через любое сечение проводника одна и та же, если в цепи нет разветвлений. В самом деле, если бы значения силы тока через два сечения проводника были различны, то на участке проводника, заключенном между этими сечениями, скапливался бы заряд, что опять-таки приводило бы к изменению электрического поля и тем самым нарушало стационарный характер тока.

Теперь перейдем к основным количественным законам постоянного тока — законам Ома и Джоуля — Ленца. Как было экспериментально установлено Омом, на участке цепи постоянного тока, состоящем из проводников первого рода (т.е. таких, свойства которых не изменяются при протекании по ним электрического тока), при отсутствии на этом участке ЭДС сила тока пропорциональна напряжению:

$$U = R I. \quad (10.5)$$

Коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств проводника, называется его сопротивлением. Для однородного цилиндрического проводника сопротивление прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади поперечного сечения  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (10.6)$$

Коэффициент пропорциональности  $\rho$ , численно равный сопротивлению единичного ( $l/S = 1 \text{ м}^{-1}$ ) цилиндрического проводника, называется удельным сопротивлением, а обратная величина

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (10.7)$$

-удельной электропроводностью, или удельной проводимостью, вещества, из которого изготовлен проводник. При не слишком низких температурах удельное сопротивление проводника приблизительно прямо пропорционально температуре (кривая 1 на рис.62).

Упомянем о замечательном явлении сверхпроводимости, которое состоит в том, что у некоторых веществ при охлаждении до соответствующей критической температуры  $T_{кр}$  наступает сверхпроводящее состояние: сопротивление скачком обращается в нуль и остается равным нулю при последующем понижении температуры (кривая 2 на рис.62).

У известных до последнего времени сверхпроводников (ртуть, олово, алюминий, цинк и некоторые другие металлы и сплавы) критические температуры не превышают нескольких кельвинов (у нитрида ниобия  $T_{кр} \approx 15K$ ). Однако недавно к изумлению физиков - теоретиков было экспериментально обнаружено явление высокотемпературной сверхпроводимости. Получен ряд оксидных соединений с критическими температурами, существенно превышающими температуру жидкого азота  $T=77,8K$ . Это открытие сулит колоссальные перспективы, если удастся преодолеть технологические трудности в создании высокотемпературных сверхпроводящих материалов с приемлемыми для технического применения механическими свойствами.

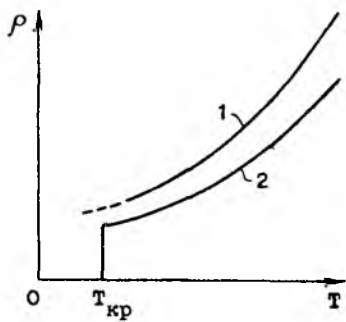


Рис.62

Другой фундаментальный закон Джоуля - Ленца утверждает, что на участке цепи постоянного тока, состоящем из проводников первого рода, непрерывно выделяется теплота, пропорциональная сопротивлению участка, квадрату силы тока и времени:

$$Q = I^2 R t. \quad (10.8)$$

Закон Джоуля - Ленца позволяет получить закон Ома для участка цепи, содержащего помимо сопротивления R также и ЭДС ε, как простое следствие закона сохранения энергии. Действительно, записав с учетом (7.3) формулу (10.8) в виде  $Q = IRq$  и поделив на q, найдем, что количество теплоты, выделяющееся при протекании единичного заряда, численно равно IR. По закону сохранения энергии эта теплота равна работе всех действующих на этом участке сил по переносу единичного заряда, т.е. напряжению (10.3):

$$IR = \varphi(B) - \varphi(C) + \epsilon_{BC}. \quad (10.9)$$

Из этого закона Ома для участка цепи с ЭДС непосредственно вытекает закон Ома для замкнутой неразветвленной цепи. Он получится, если в формуле (10.9) положить  $\varphi(B) = \varphi(C)$ , так как при обходе замкнутой цепи мы возвращаемся в исходную точку. Записывая полное сопротивление цепи в виде суммы сопротивления  $R$  внешней цепи и внутреннего сопротивления  $r$  источника, получим

$$I(R + r) = \epsilon. \quad (10.10)$$

В формулах (10.9) и (10.10)  $\epsilon$  означает суммарную ЭДС, которая при наличии нескольких последовательно соединенных источников тока равна алгебраической сумме их ЭДС. Напомним также, что при последовательном соединении нескольких сопротивлений общее сопротивление участка равно их сумме, а при параллельном соединении суммируются обратные сопротивлениям величины:

$$R_{\text{послед}} = \sum_i R_i, \quad \frac{1}{R_{\text{пар}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (10.11)$$

Уточним правило выбора знаков. Приняв некоторое направление обхода за положительное (в случае формулы (10.9) — от начальной точки В к конечной точке С), следует приписывать ЭДС источника положительный знак, если направление напряженности сторонних сил в нем совпадает с направлением обхода, и отрицательный знак в противном случае (напомним, что напряженность сторонних сил внутри источника направлена от отрицательного полюса к положительному). Знак

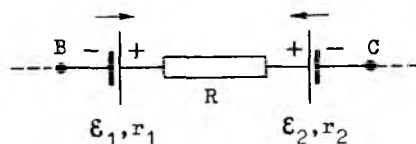


Рис. 63

силы тока зависит от того, куда движутся положительные носители тока: по выбранному направлению обхода ( $I > 0$ ) или против него ( $I < 0$ ). Так, для участка, изображенного на рис. 63, где стрелки указывают направление напряженности сторонних сил в источниках, закон Ома (10.9) запишется в виде

$$I(R + r_1 + r_2) = \varphi(B) - \varphi(C) + |\epsilon_1| - |\epsilon_2|.$$

Если при подстановке заданных значений  $R, r_1, r_2, \varphi(B), \varphi(C), \epsilon_1, \epsilon_2$  окажется, например, что  $I < 0$ , то ток течет против выбранного направления, т.е. от точки С к точке В.

Законы Ома и Джоуля — Ленца в дифференциальной форме. Выделим мысленно внутри проводника малый прямой цилиндр длиной  $\Delta l$  с площадью основания  $\Delta S$ , расположенный вдоль линий тока (рис. 64). Закон Ома (10.5) для этого цилиндрического элемента запишется в виде  $\Delta U = R \Delta I$ , где  $R$  — сопротивление элемента,  $\Delta I$  — сила тока через се-

чение  $\Delta S$ ,  $\Delta U$  — напряжение на его концах. Подставляя в эту формулу  $\Delta l = j \Delta S$  согласно (7.4),  $R = \rho \Delta l / \Delta S$  согласно (10.6),  $\Delta U = E \Delta l$  согласно (3.15,а) и с учетом того, что  $\Delta U = -\Delta\phi$ , получим  $j = (1/\rho)E$ , или, принимая во внимание (10.7),  $j = \sigma E$ . Направления векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  совпадают, так как вектор  $\vec{j}$  по определению направлен в сторону упорядоченного движения положительных носителей тока, а последние движутся по напряженности поля. Поэтому последнее равенство можно записать в векторной форме:

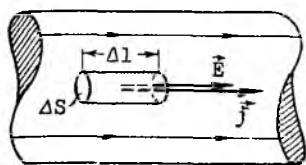


Рис.64

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (10.12)$$

Эта формула, связывающая плотность тока и напряженность поля в одной и той же точке проводника, представляет собой закон Ома в дифференциальной, или векторной, форме.

Для точки, в которой наряду с электростатическими действуют также сторонние силы (например, внутри источника тока), аналогичные выкладки с использованием (10.9) вместо (10.5), а также с учетом (10.2) приводят к следующему закону

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{ct}). \quad (10.13)$$

Аналогичным образом можно получить закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме, определяющий количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единичном объеме в окрестности рассматриваемой точки проводника — плотность теплоты  $w$ . Если в малом цилиндрическом элементе проводника объемом  $\Delta V = \Delta l \Delta S$  за время  $\Delta t$  выделяется теплота  $\Delta Q$ , то с учетом формул (10.8), (10.6), (7.4), (10.7) и (10.12)

$$w = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta V} = \frac{(\Delta l)^2 \rho (\Delta l / \Delta S) \Delta t}{\Delta t \Delta l \Delta S} = \frac{(j \Delta S)^2}{\sigma (\Delta S)^2} = \frac{(\sigma E)^2}{\sigma} = \sigma E^2,$$

$$w = \sigma E^2. \quad (10.14)$$

#### Правила Кирхгофа для разветвленных цепей постоянного тока.

Разветвленная цепь общего вида представляет собой (рис.65) совокупность неразветвленных участков ("1-2", "2-3" и т.д.), концы которых соединяются в узлах ("1", "2" и т.д.). Во всех сечениях проводника в пределах отдельного участка между соседними узлами сила тока одна и та же, как и в неразветвленной цепи. Значения же силы тока в разных участках, вообще говоря, различны.

Установим связь между силами токов, сходящихся в некотором узле. Ясно, что сумма сил токов, втекающих в узел, должна равняться

сумме сил токов, вытекающих из узла: в противном случае заряд скапливался бы в узле, приводя к изменению электрического поля в проводниках, что несовместимо с постоянством силы тока во времени. Для узла "5" на рис.65  $I_5 + I_6 = I_7 + I_8$ , или  $I_5 + I_6 - I_7 - I_8 = 0$ . Таким образом, алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0, \quad (10.15)$$

причем втекающим и вытекающим из узла токам следует приписывать противоположные знаки (первое правило Кирхгофа).

Рассмотрим теперь произвольный замкнутый контур в разветвленной цепи, например, контур "1-2-5-4-1" на рис.65 и запишем закон Ома (10.9) для всех его участков:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi(1) - \varphi(2) + \varepsilon_1, \\ I_6 R_6 &= \varphi(2) - \varphi(5) - \varepsilon_6, \\ I_8 R_8 &= \varphi(5) - \varphi(4) + \varepsilon_8, \\ I_4 R_4 &= \varphi(4) - \varphi(1) - \varepsilon_4. \end{aligned} \quad (10.16)$$

(Здесь  $R_i$  и  $\varepsilon_i$  означают сопротивление, включая внутреннее сопротивление источников тока, и модуль ЭДС соответствующего участка). Складывая эти равенства, замечаем, что значения

потенциалов в узлах, стоящие в правых частях, попарно взаимно уничтожаются, и мы имеем  $I_1 R_1 + I_6 R_6 + I_8 R_8 + I_4 R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 + \varepsilon_8 - \varepsilon_4$ . Очевидно, в общем случае

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k, \quad (10.17)$$

т.е. сумма напряжений вдоль любого замкнутого контура цепи равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре (второе правило Кирхгофа).

Не все уравнения, даваемые правилами Кирхгофа, линейно независимы. Можно показать, что максимальное число независимых уравнений получится, если записать первое правило Кирхгофа для всех узлов цепи кроме одного (это последнее уравнение было бы линейной комбинацией предыдущих) и второе правило Кирхгофа для всех простых конту-

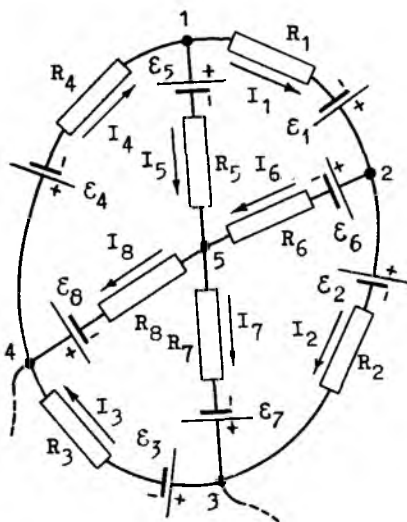


Рис.65



ров, т.е. контуров, не содержащих проводников внутри себя, например, "1-2-5-1", "2-3-5-2", "3-4-5-3" и "4-1-5-4" на рис.65. Число этих уравнений оказывается равным числу различных сил токов в цепи, так что последние могут быть рассчитаны, если известны параметры цепи - все сопротивления и ЭДС. Поскольку направления токов заранее неизвестны, их можно задать произвольно, изображая стрелками (рис.65), и руководствоваться этим при написании уравнений. Так, при записи второго правила Кирхгофа, следует обходить выбранный контур в каком-либо направлении и приписывать напряжениям  $I_k R_k$  знак "+" или "-" в зависимости от того, совпадает направление тока на данном сопротивлении с направлением обхода или противоположно ему. Значения ЭДС в правой части берут со знаком "+", если направление напряженности сторонних сил в источнике совпадает с направлением обхода, и со знаком "-" в противном случае (см. приведенное ранее уравнение для контура "1-2-5-4-1"). Истинные направления токов выяснятся в процессе решения уравнений: если найденное значение силы тока окажется положительным, ток на данном участке течет в направлении стрелки, если отрицательным - против стрелки.

## § 11. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ

Понятие о квазистационарном токе. Мы переходим к изучению переменных токов, где сила тока изменяется со временем. Однако в этой главе мы ограничимся рассмотрением так называемых квазистационарных токов, когда переменные электрические величины (сила тока, напряжение, ЭДС и т.п.) изменяются не слишком быстро.

Принципиальное различие между квазистационарными и быстроперменными токами можно уяснить на простом примере. Пусть в цепи постоянного тока ЭДС источника скачком изменилась от значения  $\epsilon_1$  до  $\epsilon_2$ . Ясно, что ток  $I_2$ , соответствующий новому значению ЭДС, установится не мгновенно, так как информация об изменении ЭДС, как и вообще любой сигнал, распространяется с конечной скоростью. Считая эту скорость в нашем случае приближенно равной скорости света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с, для времени  $\tau$ , необходимого для распространения информации об изменении ЭДС по цепи длиной  $l$ , имеем

$$\tau = \frac{l}{c}. \quad (11.1)$$

Эта формула определяет порядок величины того промежутка времени, в течение которого сложные электромагнитные процессы в цепи приведут к смене первоначального стационарного тока  $I_1$  новым  $I_2$ .

Пусть теперь ЭДС изменяется со временем непрерывно. Если это изменение достаточно медленное, то в цепи для каждого мгновенного значения ЭДС будет успевать устанавливаться соответствующий стациона-

нарный ток, и процесс в цепи будет представлять собой как бы последовательное чередование стационарных токов. Следовательно, хотя электрические величины (сила тока, напряжения и т.п.) изменяются со временем, в каждый фиксированный момент времени они подчиняются тем же основным закономерностям, что и при стационарном, т.е. постоянном, токе. В частности, сила тока одинакова во всех сечениях проводника — это основная, определяющая черта квазистационарных токов.

Для периодических во времени токов нетрудно установить количественный критерий квазистационарности. В данном случае характерным временем, в течение которого существенно изменяются переменные электрические величины, является период  $T$ . Это время должно заведомо превышать время установления тока (11.1):

$$T \gg \frac{l}{c}. \quad (11.2)$$

Электромагнитная индукция. Прежде чем перейти к изучению законов квазистационарного тока, напомним известное из школьного курса физики явление электромагнитной индукции. Это явление состоит в том, что при изменении потока  $\Phi$  магнитной индукции через поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым проводником (рис.66, а), в проводнике возникает ЭДС, равная взятой с обратным знаком скорости изменения потока (закон Фарадея):

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.3)$$

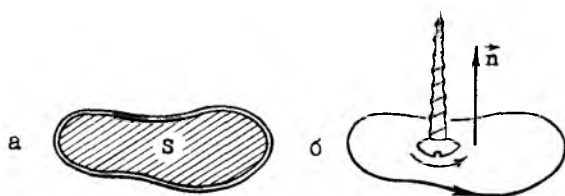


Рис.66

Поток  $\Phi = \int_S \vec{B}_n dS$  может изменяться по ряду причин. Во-первых, он изменяется, если неподвижный проводник находится в переменном магнитном поле. В постоянном поле изменение потока через ограниченную проводником поверхность может происходить при движении проводника: в неоднородном поле — при любом движении, в однородном — только при непоступательном движении (хотя  $\vec{B} = \text{const}$ ,  $B_n$  изменяется со временем за счет изменения ориентации проводника). Наконец, поток может изменяться за счет изменения площади  $S$ , т.е. при деформации проводника.

Единица потока магнитной индукции в СИ — "вебер":  $1\text{Вб} = 1\text{Тл} \cdot 1\text{м}^2$ .  
 Знак потока зависит от выбора направления нормали к поверхности  $S$ , а знак ЭДС — от выбора направления обхода проводника. Эти направления предполагаются согласованными друг с другом правилом винта: при вращении головки винта в соответствии с выбранным направлением обхода проводника поступательное движение винта определит направление нормали (рис. 66, б). При этом условии знак минус в формуле (11.3) отражает правило Ленца: индукционный ток направлен так, чтобы своим действием препятствовать причине, его вызвавшей.

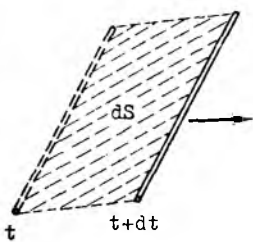


Рис. 67

ЭДС индукции наводится и в незамкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле. Она определяется той же формулой (11.3), где под  $d\Phi$  следует понимать поток магнитной индукции через поверхность  $dS$ , прочерченную движущимся проводником за время  $dt$  (рис. 67). Сторонние силы вызывают индукционные заряды, электрическое поле которых при равномерном движении проводника в однородном магнитном поле компенсирует сторонние силы:  $\vec{E} = -\vec{E}'$ .

Индукционные токи наводятся не только в тонких проводниках, но и в массивных сплошных проводниках — так называемые токи Фуко. Картина этих замкнутых индукционных токов может быть весьма сложной,

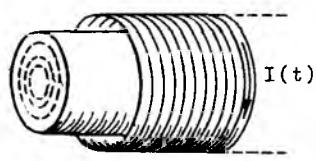


Рис. 68

однако качественные заключения об их направлении часто можно сделать, руководствуясь правилом Ленца. Например, токи, возникающие в сердечнике катушки, по которой течет переменный ток, лежат в плоскостях, перпендикулярных оси катушки (рис. 68, линии индукционного тока изображены штриховой линией).

Важным случаем электромагнитной индукции является самоиндукция. Рассмотрим замкнутый проводник с током. Этот ток порождает в окружающем пространстве магнитное поле. Легко показать, что поток  $\Phi$  магнитной индукции этого поля через поверхность  $S$ , ограниченную проводником, пропорционален силе тока  $I$  в проводнике:

$$\Phi = L I . \quad (11.4)$$

В самом деле, из принципа суперпозиции (7.12) и формулы Био-Савара-Лапласа (7.13) следует, что  $B \sim I$ . Поэтому в формуле для потока магнитной индукции  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  сила тока  $I$  является множителем в подынтегральном выражении и выносится за знак интеграла.

Коэффициент пропорциональности  $L$ , зависящий от геометрических свойств проводника — его размеров и формы, а также от положения и свойств магнетиков в окружающем пространстве, называется индуктивностью проводника. Единица индуктивности в СИ называется "генри":  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб}/1 \text{ А}$ . Если сила тока в проводнике изменяется со временем, то согласно (11.4) будет изменяться и поток  $\Phi$ , так что в проводнике возникнет ЭДС согласно закону электромагнитной индукции (11.3). Возникновение ЭДС в проводнике вследствие изменения силы тока в самом проводнике называется самоиндукцией.

Формулу для ЭДС самоиндукции получим, подставляя выражение (11.4) для потока в формулу (11.3):  $\epsilon_{\text{сам}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}$ . Считая индуктивность  $L$  постоянной (это верно, если проводник не изменяет формы и отсутствуют магнитоупорядоченные магнетики), имеем

$$\epsilon_{\text{сам}} = - L \frac{dI}{dt}. \quad (11.5)$$

Как следует из этой формулы, ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока и индуктивности проводника. Большой индуктивностью обладают катушки из проводников (соленоиды): ЭДС, индуцируемые в отдельных витках, действуют в одном направлении и при вычислении величины полной ЭДС самоиндукции в катушке суммируются с одинаковыми знаками.

Выведем формулу для индуктивности  $L$  длинного соленоида. Обозначим  $l$  длину соленоида,  $S$  — площадь поперечного сечения и  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Будем исходить из определения (11.4), согласно которому  $L = \Phi/I$ , где  $I$  — сила тока в проводнике, а  $\Phi$  — поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную проводником соленоида. Если мысленно распрямить соленоид, выбрать нормаль к ограниченной проводником поверхности, согласовав ее направление правилом винта с направлением тока (рис. 69, а), и проследить затем за трансформацией этой поверхности и нормалей к ней в процессе свертывания проводника в соленоид (рис. 69, б), то можно заметить, что поток  $\Phi$  эффективно складывается из потоков  $\Phi_i$  через поверхности  $S_i$ , ограниченные отдельными витками:  $\Phi = \sum_i \Phi_i$ . При этом

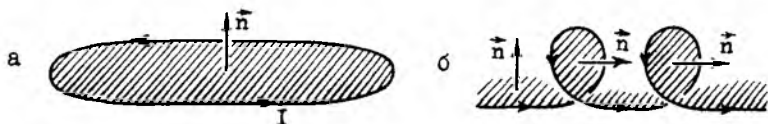


Рис. 69

вследствие сонаправленности нормалей  $\vec{n}_i$  с вектором  $\vec{B}$  все  $\Phi_i$  положительные. Пренебрегая краевыми эффектами и считая соленоид заполнен-

ным однородным магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$ , имеем для потока магнитной индукции  $\Phi_i$  через площадь каждого витка:  $\Phi_i = BS = \mu B_0 S = \mu_0 \mu n I S$  (здесь мы использовали формулы (9.16) и (7.23)). Полный поток через  $N = n l$  витков соленоида  $\Phi = N \Phi_i = \mu_0 \mu n^2 I S l$ . Разделив это выражение на силу тока  $I$ , находим окончательно

$$L = \mu_0 \mu n^2 S l. \quad (11.6)$$

Рассмотрим теперь два контура, по которым текут токи соответственно  $I_1$  и  $I_2$ . Рассуждая аналогично случаю самоиндукции, найдем, что магнитное поле тока  $I_1$  в первом контуре создаст поток  $\Phi_2$  магнитной индукции через поверхность  $S_2$ , ограниченную вторым контуром, пропорциональный силе тока  $I_1$  (рис.70):

$$\Phi_2 = L_{21} I_1. \quad (11.7)$$

Взаимно (на рисунке это не отражено) магнитное поле тока  $I_2$  второго контура создаст поток магнитной индукции  $\Phi_1$  через поверхность  $S_1$ , ограниченную первым контуром, пропорциональный силе тока  $I_2$ :

$$\Phi_1 = L_{12} I_2. \quad (11.8)$$

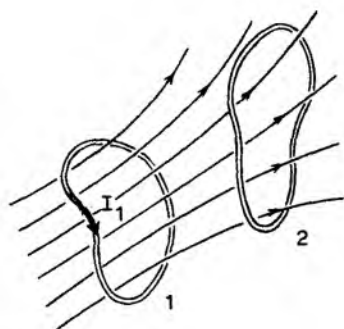


Рис.70

Можно показать, что коэффициент пропорциональности в формуле (11.8) тот же, что и в формуле (11.7):  $L_{12} = L_{21}$ . Он зависит от геометрических свойств контуров и их взаимного расположения и называется коэффициентом взаимной индукции, а о контурах при не равном нулю коэффициенте их взаимной индукции говорят как об индуктивно связанных друг с другом.

При изменении силы тока в одном из индуктивно связанных друг с другом контуров в другом возникает ЭДС - это явление называется взаимной индукцией. ЭДС взаимной индукции  $\epsilon_1$  в первом и  $\epsilon_2$  во втором контурах найдем, подставляя выражения для потоков (11.8) и (11.7) в формулу (11.3) (считаем  $L_{12} = L_{21} = \text{const}$ ):

$$\epsilon_1 = - L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \epsilon_2 = - L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (11.9)$$

Явление взаимной индукции широко используется в электротехнике и радиотехнике (трансформатор, генератор, радиоприемник и т.д.).

Энергия магнитного поля. Рассмотрим цепь, состоящую из источника постоянного тока, сопротивления и катушки индуктивностью  $L$ , в которой течет ток силой  $I$ . Предположим, что в некоторый момент действие сторонних сил источника прекращается, иначе говоря, источник мгновенно удаляется из цепи, хотя цепь по-прежнему остается замкнутой (на рис. 74 на с. 94 это соответствует мгновенному перекидыванию ключа  $K$  из положения "1" в положение "2"). Вследствие явления самоиндукции ток в цепи исчезнет не сразу, поскольку ЭДС самоиндукции, причиной возникновения которой является убывание силы тока, будет по правилу Ленца препятствовать этому убыванию, т.е. поддерживать убывающий ток. В процессе убывания тока сторонние силы, ответственные за ЭДС самоиндукции, совершают работу над носителями тока. Вычислим эту работу.

За малый промежуток времени  $dt$ , в течение которого значения силы тока и ЭДС можно считать практически неизменными, сторонние силы согласно (10.2) совершат работу  $dA = \epsilon_{\text{сам}} dq$ , где заряд  $dq$ , протекший по цепи за время  $dt$ , равен согласно (7.2)  $dq = Idt$ , а ЭДС самоиндукции выражается формулой (11.5). Таким образом, имеем  $dA = -L di/dt Idt = -L i di$ . Полную работу найдем, суммируя малые работы, совершаемые в течение всего процесса исчезновения тока от значения силы тока  $I$  до 0:  $A = \int_I^0 (-L i di) = \frac{LI^2}{2}$ . По закону сохранения энергии эта работа определяет энергию  $W$ , которой обладает катушка с током:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (11.10)$$

Как следует из общей теории электромагнетизма, эту энергию следует приписать магнитному полю соленоида. Считая соленоид достаточно длинным, можно полагать, что поле целиком сосредоточено внутри соленоида и однородно. Магнитная индукция этого поля определяется выражением (7.23), которое, если соленоид заполнен однородным магнетиком, следует согласно (9.16) умножить на магнитную проницаемость  $\mu$  магнетика:  $B = \mu_0 \mu nI$ . Выражая отсюда силу тока  $I = B/\mu_0 \mu n$  и подставляя ее вместе с выражением (11.6) для индуктивности длинного соленоида в формулу (11.10), получим

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V, \quad (11.11)$$

где  $V = lS$  - объем соленоида. Разделив энергию поля (11.11) на объем, который оно занимает, найдем энергию единицы объема - плотность энергии  $w_m$  магнитного поля. С учетом связи (9.13) между магнитной индукцией и напряженностью для плотности энергии магнитного поля можно получить несколько равноправных выражений:

$$\psi_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (11.12)$$

Эта формула, хотя она и получена нами на примере постоянного и однородного поля, определяет плотность энергии магнитного поля в самом общем случае.

Основное уравнение цепи квазистационарного тока. В цепях переменного тока мы сталкиваемся с двумя специфическими явлениями. Во-первых, переменный ток в отличие от постоянного может течь в незамкнутой цепи, в частности, в цепи с конденсатором. Во-вторых, в цепи переменного тока возникает ЭДС самоиндукции (11.5), которая, будучи пропорциональной скорости изменения силы тока, в цепях постоянного тока отсутствует. Чтобы ЭДС самоиндукции была достаточно большой, в цепь можно включить катушку.

Итак, рассмотрим неразветвленную цепь простейшего вида, состоящую из последовательно соединенных источника переменного напряжения с зависящей от времени ЭДС  $\varepsilon(t)$ , резистора сопротивлением  $R$ , конденсатора емкостью  $C$  и катушки индуктивностью  $L$  (рис.71).

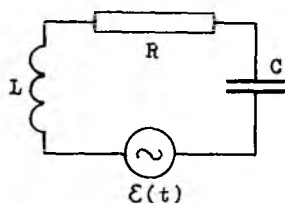


Рис.71

Предполагая выполненным условие квазистационарности, мы вправе записать для мгновенных значений силы тока, напряжений и ЭДС закон Ома. Поскольку рассматриваемая цепь разомкнута (ее концами являются обкладки конденсатора), то речь идет о законе Ома (10.9) для участка цепи с ЭДС

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_k \varepsilon_k, \quad (11.13)$$

где  $\varphi_2 - \varphi_1 = U_C$  — разность потенциалов между обкладками конденсатора. Так как при протекании переменного тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{саи}$ , то суммарная ЭДС в законе (11.13) складывается из ЭДС источника и ЭДС самоиндукции:  $\sum_k \varepsilon_k = \varepsilon_{саи} + \varepsilon(t)$ .

Обычно ЭДС самоиндукции переносят с обратным знаком в левую часть и выражение  $U_L = -\varepsilon_{саи}$  трактуют как напряжение на индуктивности. Обозначая также напряжение  $IR$  на резисторе  $U_R$ , получим

$$U_R + U_L + U_C = \varepsilon(t). \quad (11.14)$$

Таким образом, в цепи квазистационарного тока, как и в цепи постоянного тока, сумма напряжений на всех участках контура равна действующей в этом контуре ЭДС (второе правило Кирхгофа). Однако в отличие от постоянного тока напряжения на участках цепи, кроме участка с резистором, не пропорциональны силе тока:

$$U_R = RI, \quad U_L = -\epsilon_{\text{сам}} = L \frac{di}{dt}, \quad U_C = \frac{q}{C}. \quad (11.15)$$

Поэтому второе правило Кирхгофа приводит здесь не к алгебраическому соотношению между силой тока и ЭДС (как в (10.10) в случае постоянного тока), а к дифференциальному уравнению. Действительно, подставляя в формулу (11.14) выражения (11.15) для напряжений, имеем

$$L \frac{di}{dt} + RI + \frac{1}{C} q = \epsilon(t), \quad (11.16)$$

или, учитывая, что  $I = dq/dt$ , и, следовательно,  $dI/dt = d^2q/dt^2$ ,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \epsilon(t). \quad (11.17)$$

Назовем (11.17) основным дифференциальным уравнением для цепи квазистационарного тока с сосредоточенными сопротивлением  $R$ , емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ . Решая его, можно получить полную информацию о процессах, происходящих в цепи. Это общее положение иллюстрируется далее конкретными примерами типичных квазистационарных процессов.

#### Процесс заряда и разряда конденсатора через сопротивление.

Рассмотрим схему, состоящую из источника постоянного напряжения с ЭДС  $\epsilon$ , конденсатора емкостью  $C$ , резистора сопротивлением  $R$  и переключателя  $K$  (рис.72). Зарядка конденсатора происходит при подключении источника, т.е. при установке переключателя в положение 1. При перебрасывании переключателя из положения 1 в положение 2 источник отключается и происходит разряд конденсатора через сопротивление  $R$ .

**1. Разрядка конденсатора.** До начала процесса напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника. Разрядка начнется в момент  $t = 0$  перекидывания переключателя из положения 1 в положение 2. В дальнейшем источник в цепи отсутствует ( $\epsilon = 0$ ), и второе правило Кирхгофа (11.14) дает  $U_R + U_C = 0$ . Преобразуем  $U_R$  так, чтобы получить уравнение для искомого напряжения на конденсаторе:  $U_R = RI = R \frac{dq}{dt}$ , но  $q = CU_C$ , откуда  $\frac{dq}{dt} = C dU_C/dt$ , так что  $U_R = RC dU_C/dt$  и уравнение после деления на  $RC$  принимает вид

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0. \quad (11.18)$$

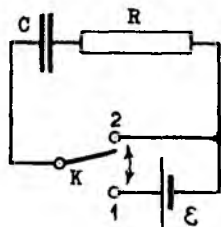


Рис.72

Это уравнение легко проинтегрировать, разделяя переменные, т.е. перенеся в одну часть равенства величины, зависящие только от функции  $U_C$ , а в другую - только от аргумента  $t$ :  $dU_C/U_C = -(1/RC) dt$ . Беря интеграл от обеих частей равенства:  $\int dU_C/U_C = -\frac{1}{RC} \int dt$ , имеем  $\ln U_C = -\frac{1}{RC} t + \ln A$ , где постоянная интегрирования представлена в виде логарифма другой постоянной  $A$ . Отсюда находим  $U_C(t) = A e^{-t/RC}$ . Постоянная  $A$  определяется из начального условия  $U_C(0) = \epsilon$ : полагая  $t = 0$ , находим  $\epsilon = A$ . Таким образом, окончательно имеем

$$U_C(t) = \epsilon e^{-t/RC}. \quad (11.19)$$



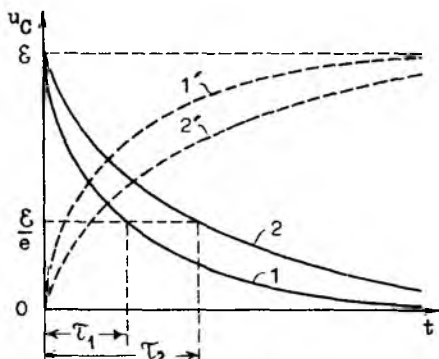


Рис. 73

2. **Зарядка конденсатора.** В цепь с первоначально незаряженным конденсатором ( $U_C(0) = 0$ ) включают в момент времени  $t = 0$  источник постоянного напряжения с ЭДС, равной  $\varepsilon$ . Теперь второе правило Кирхгофа имеет вид  $U_R + U_C = \varepsilon$ . Подставляя сюда, как и в предыдущем случае,  $U_R = RC \, dU_C/dt$  и деля на  $RC$ , имеем

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = \frac{\varepsilon}{RC}. \quad (11.20)$$

Введем вместо  $U_C(t)$  новую неизвестную функцию  $U(t) = U_C(t) - \varepsilon$ . Выражая отсюда  $U_C = U + \varepsilon$  и подставляя в (11.20), получаем для  $U(t)$  уравнение (11.18):  $dU/dt + (1/RC)U = 0$ . Его решение, как мы видели, имеет вид  $U(t) = A e^{-t/RC}$ , так что  $U_C = U + \varepsilon = A e^{-t/RC} + \varepsilon$ . Постоянная  $A$  определяется из начального условия  $U_C(0) = 0$ : полагая  $t = 0$ , имеем  $U_C(0) = A + \varepsilon = 0$ , откуда  $A = -\varepsilon$ , так что окончательно

$$U_C(t) = \varepsilon (1 - e^{-t/RC}). \quad (11.21)$$

Графики этой зависимости, описывающей процесс зарядки конденсатора, представлены на рис. 73 для тех же цепей кривыми 1' и 2'.

Итак, конденсатор заряжается от источника постоянного напряжения и разряжается через сопротивление не мгновенно, а постепенно, причем тем быстрее, чем меньше постоянная времени  $\tau = RC$ .

**Установление и исчезновение тока в цепи с индуктивностью и сопротивлением.** Рассмотрим цепь, состоящую из катушки индуктивностью  $L$ , резистора сопротивлением  $R$  и источника постоянного напряжения с ЭДС  $\varepsilon$ , который можно подключать и удалять из цепи при помощи переключателя  $K$  (рис. 74).

1. **Исчезновение тока.** Пусть в цепи, по которой течет установившийся ток силой  $I_0$  (переключатель в положении 1), в момент времени  $t = 0$  источник отключается — переключатель мгновенно перебрасывается в положение 2. Как мы уже знаем, вследствие явления самоиндукции ток в цепи исчезнет не сразу. Чтобы найти зависимость силы тока от времени, записываем второе правило Кирхгофа, которое для рассматриваемой цепи начиная с момента  $t = 0$  имеет вид  $U_L + U_R = 0$ . Заменяя  $U_L$  и  $U_R$  их выражениями из (11.15) и деля на  $L$ , имеем

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0. \quad (11.22)$$

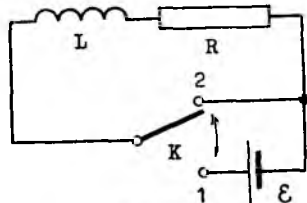


Рис. 74

Это уравнение для силы тока  $I(t)$  имеет тот же вид, что и уравнение (11.18) для  $U_c(t)$ , с той лишь разницей, что при неизвестной функции стоит коэффициент  $R/L$  вместо  $1/RC$ . Однотипны и начальные условия:  $I(0) = I_0$  и  $U_c(0) = \varepsilon$ . Поэтому решение уравнения (11.22) определяется формулой (11.19), в которой следует заменить  $U_c(t)$  на  $I(t)$ ,  $1/RC$  на  $R/L$  и  $\varepsilon$  на  $I_0$ :

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}. \quad (11.23)$$

2. Установление тока. Если в цепь, в которой ток первоначально отсутствует (переключатель в положении 2), в момент  $t = 0$  подключить источник, перекидывая переключатель в положение 1, то вследствие явления саминдукции ток в цепи установится не сразу. Второе правило Кирхгофа с момента включения источника имеет вид  $U_L + U_R = \varepsilon$ , или с учетом формул (11.15) и после деления на  $L$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}. \quad (11.24)$$

Преобразуя правую часть:  $\varepsilon/L = (R/L)(\varepsilon/R) = (R/L)I_0$ , где  $I_0 = \varepsilon/R$  — сила установившегося тока, приходим к уравнению для силы тока  $I(t)$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{R}{L} I_0, \quad (11.25)$$

аналогичному уравнению (11.20) для напряжения  $U_c(t)$ , но с иными выражениями для постоянных величин:  $R/L$  вместо  $1/RC$  и  $I_0$  вместо  $\varepsilon$ . Начальные условия для  $I(t)$  и  $U_c(t)$  также одинаковы ( $I(0) = 0$  и  $U_c(0) = 0$ ), поэтому решение уравнения (11.25) определяется формулой (11.21), в которой следует произвести указанные замены постоянных:

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-(R/L)t}). \quad (11.26)$$

Формулы (11.23) и (11.26) показывают, что исчезновение и установление тока в цепи с индуктивностью и сопротивлением происходит по тем же законам, что и разрядка и зарядка конденсатора через сопротивление, но с иной постоянной времени  $\tau = L/R$ . Графики зависимости  $I(t)$  имеют тот же вид, что и кривые  $U_c(t)$ , изображенные на рис. 73, причем кривые типа 1 и 2 соответствуют процессу исчезновения тока, а кривые типа 1' и 2' — процессу установления тока при включении источника.

## § 12. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК

Фундаментальную роль в теории и на практике играет ток, сила которого изменяется со временем по закону гармонического колебания

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (12.1)$$

В дальнейшем под переменным током мы, как правило, будем подразумевать именно такой синусоидальный ток.

При изучении цепей с электрическим током важно установить связь между силой тока и напряжением. В цепи постоянного тока, состоящей из проводников первого рода, эта связь выражается законом Ома, согласно которому сила тока пропорциональна напряжению, или ЭДС в случае замкнутой цепи (см. формулы (10.5), (10.9) и (10.10)). Отсюда терминологию, будем называть законом Ома связь между силой тока

и напряжением также и в случае цепи с синусоидальным переменным током, хотя здесь, как мы увидим далее, сила тока, вообще говоря, не пропорциональна напряжению. Начнем с установления связи между силой тока и напряжением для отдельных участков цепи.

Закон Ома для участка цепи с сопротивлением R. Пусть на участке цепи с сопротивлением R и пренебрежимо малыми емкостью и индуктивностью (участок с резистором, рис.75,а) течет переменный ток силой  $I = I_0 \sin \omega t$ . Для мгновенных значений силы тока  $I(t)$  и напряжения  $U_R(t)$  на этом участке верен закон Ома (10.5):

$$U_R(t) = R I(t) = R I_0 \sin \omega t . \quad (12.2)$$

Следовательно, напряжение  $U_R$  совершает гармоническое колебание с теми же частотой и фазой, что и сила тока, а амплитудные значения силы тока  $I_0$  и напряжения  $U_{R_0}$  связаны соотношением

$$U_{R_0} = R I_0 . \quad (12.3)$$

Зависимость силы тока и напряжения от времени дана на рис.75,б.

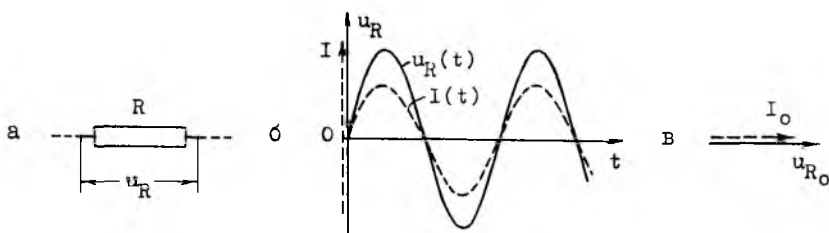


Рис.75

В курсе механики было показано, что каждому гармоническому колебанию  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  можно сопоставить вектор - амплитуду, который равномерно вращается в плоскости  $xu$  с угловой скоростью  $\omega$  и в начальный момент  $t=0$  образует угол  $\varphi$  с осью  $x$ ; рассматриваемое колебание является проекцией вектора-амплитуды  $\vec{A}$  на ось  $y$ . Вектор-амплитуду изображают в момент  $t=0$  (векторная диаграмма колебания, рис.76). В нашем случае колебания силы тока и напряжения изобразятся сонаправленными векторами - амплитудами ( $\varphi = 0$ ) с модулями  $I_0$  и  $U_{R_0}$  (рис.75,в).

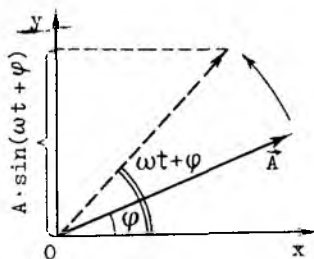


Рис.76

Закон Ома для участка цепи с емкостью. Рассмотрим участок цепи емкостью которого  $C$ , а сопротивление и индуктивность пренебрежимо малы (участок с конденсатором, рис.77,а), по которому течет ток силой  $I = I_0 \sin \omega t$ . Чтобы найти искомую связь между силой тока и напряжением  $U_C(t)$  на конденсаторе, достаточно в формуле  $U_C = q/C$  выразить заряд  $q(t)$  через силу тока. Из определения силы тока  $I = dq/dt$  имеем для малого заряда  $dq$ , протекшего за время  $dt$ :  $dq = Idt$ . Заряд  $q$ , протекший за конечное время  $t$ , найдем, взяв интеграл от  $dq$ :

$$q = \int Idt = \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t - \pi/2)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю, так как нас интересует лишь заряд конденсатора, обусловленный переменным током).

Таким образом, напряжение на конденсаторе имеет вид

$$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2), \quad (12.4)$$

т.е. оно совершает гармоническое колебание с той же круговой частотой  $\omega$ , но отстает по фазе от силы тока на  $\pi/2$  (по времени – на четверть периода), причем амплитудные значения  $I_0$  и  $U_{C_0}$  тока и напряжения связаны соотношением

$$U_{C_0} = \frac{1}{\omega C} I_0. \quad (12.5)$$

Сравнивая этот закон с обычным законом Ома  $U = RI$ , замечаем, что выражение

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (12.6)$$

играет роль сопротивления – оно называется емкостным сопротивлением. Графики и векторные диаграммы для участка цепи с емкостью представлены на рис.77,б и в.

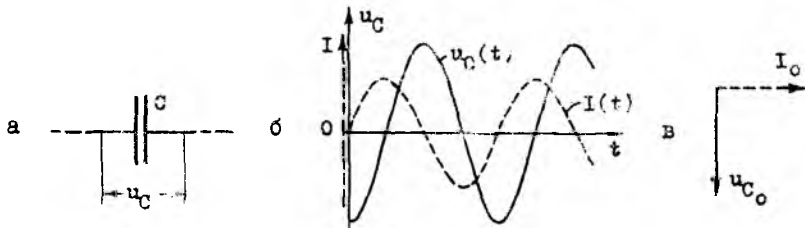


Рис.77

Закон Ома для участка цепи с индуктивностью. Рассмотрим участок цепи с индуктивностью  $L$  и пренебрежимо малыми сопротивлением и емкостью (участок с соленоидом с малым сопротивлением проводов  $R$ , рис.73,а), по которому течет ток силой  $I = I_0 \sin \omega t$ . Согласно (11.15)

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t) = \omega L I_0 \cos \omega t = \omega L I_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

Таким образом, напряжение на индуктивности

$$U_L(t) = \omega L I_0 \sin(\omega t + \pi/2) \quad (12.7)$$

также совершает гармоническое колебание с круговой частотой  $\omega$ , но опережает по фазе силу тока на  $\pi/2$  (по времени - на четверть периода), причем амплитудные значения  $I_0$  и  $U_{L0}$  силы тока и напряжения связаны соотношением

$$U_{L0} = \omega L I_0 \quad (12.8)$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (12.9)$$

играет роль сопротивления и называется индуктивным сопротивлением. Емкостное и индуктивное сопротивления называют реактивными, а обычное сопротивление  $R$  проводника - активным (смысл такой терминологии станет ясным позднее, см. с.100-102). Графики и векторные диаграммы для участка цепи с индуктивностью представлены на рис.78,б и в.

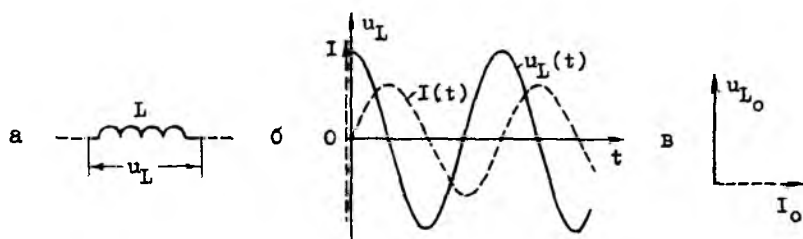


Рис.78

Закон Ома для всей цепи. Рассмотрим теперь участок цепи, состоящий из последовательно соединенных резистора с активным сопротивлением  $R$ , конденсатора емкостью  $C$  и катушки индуктивностью  $L$  с пренебрежимо малым сопротивлением проводов (рис.79,а), по которому течет ток силы  $I = I_0 \sin \omega t$ . Напряжение  $U(t)$  на этом участке складывается из напряжений  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$ :

$$U = U_R + U_C + U_L \quad (12.10)$$

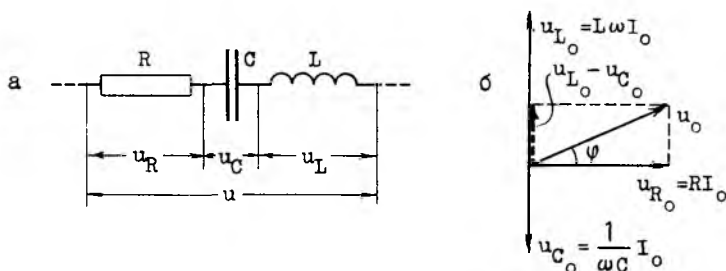


Рис.79

Так как все складываемые напряжения согласно закону Ома для соответствующих участков представляют собой гармонические колебания одинаковой частоты, то и суммарное напряжение будет гармоническим колебанием той же частоты. Его можно найти при помощи векторной диаграммы, складывая векторы-амплитуды суммируемых напряжений  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$  (рис.79,б). Сначала удобно сложить векторы  $\vec{U}_{C_0}$  и  $\vec{U}_{L_0}$ , имеющие противоположные направления, в результате чего получается вектор (изображен штриховой стрелкой), направленный в сторону большего из складываемых векторов и имеющий модуль  $I_0 |\omega L - 1/\omega C|$ . Складывая затем этот вектор с вектором  $\vec{U}_{R_0}$ , находим вектор-амплитуду  $\vec{U}_0$  суммарного напряжения. Как видно из векторной диаграммы, это напряжение  $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$  сдвинуто по фазе относительно силы тока на угол  $\varphi$ , тангенс которого определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad (12.11)$$

и имеет амплитуду

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (12.12)$$

Формулы (12.11) и (12.12) выражают закон Ома для участка цепи переменного тока с емкостью, индуктивностью и сопротивлением. Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (12.13)$$

определяет полное сопротивление. Заметим, что это сопротивление не является арифметической суммой сопротивлений  $R$ ,  $R_L$  и  $R_C$ . Более того, при увеличении меньшего из реактивных сопротивлений  $R_L$  или  $R_C$  полное сопротивление уменьшается!

Закон Ома (12.11) и (12.12) (с заменой  $U_0$  на  $\epsilon_0$ ) является вместе с тем и законом Ома для замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, емкости, индуктивности и источника переменного напряжения с ЭДС  $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (рис.80).

Энергия и мощность в цепи переменного тока. Исследуем вопрос о превращениях энергии в цепи переменного тока, изображенной на рис.80. За малый промежуток времени  $\Delta t$  работа  $\Delta A^{CT}$  сторонних сил источника расходуется на выделение теплоты  $\Delta Q$  на активном сопротивлении, а также на приращение энергии электрического поля конденсатора  $\Delta W_C$  и магнитного поля катушки  $\Delta W_M$ :

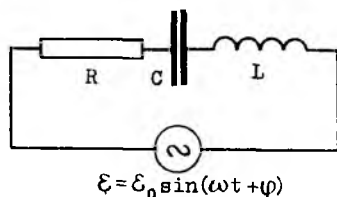


Рис.80

$$\Delta A^{CT} = \Delta Q + \Delta W_C + \Delta W_M \quad (12.14)$$

(энергия, излучаемая в виде электромагнитных волн, в рассматриваемом случае пренебрежимо мала). Поделив обе части равенства на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим слева работу сторонних сил в единицу времени, т.е. мощность источника тока  $P_\epsilon = dA^{CT}/dt$ . Будем называть выражения  $P_R = dQ/dt$ ,  $P_C = dW_C/dt$  и  $P_L = dW_M/dt$ , характеризующие соответственно скорость выделения теплоты, скорость изменения энергии электрического и магнитного полей, мощностями на соответствующих участках цепи. Тогда

$$P_\epsilon = P_R + P_C + P_L \quad (12.15)$$

Каждая из этих мощностей равна произведению силы тока на напряжение на соответствующем участке (в случае  $P_\epsilon$  - на ЭДС). Действительно, используя формулы (10.2), (10.8), (10.5), (4.12) и (11.10), имеем

$$\begin{aligned} P_\epsilon &= \frac{dA^{CT}}{dt} = \frac{\sum d\phi}{dt} = I \epsilon, \\ P_R &= \frac{dQ}{dt} = \frac{I^2 R dt}{dt} = I U_R, \\ P_C &= \frac{dW_C}{dt} = \frac{d}{dt}(q^2/2C) = I U_C, \\ P_L &= \frac{dW_M}{dt} = \frac{d}{dt}(LI^2/2) = I U_L. \end{aligned} \quad (12.16)$$

(Заметим, что подставляя (12.16) в (12.15) и поделив полученное уравнение на  $I$ , приходим ко второму правилу Кирхгофа, которое, следовательно, является прямым следствием закона сохранения энергии).

Полагая  $I = I_0 \sin \omega t$  и учитывая, что напряжения  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$  изменяются по законам (12.2), (12.4) и (12.7), находим для мощностей  $P_R$ ,  $P_C$  и  $P_L$

$$P_R = IU_R = I_0 \sin \omega t U_{R_0} \sin \omega t = I_0 U_{R_0} \sin^2 \omega t,$$

$$P_C = IU_C = I_0 \sin \omega t U_{C_0} \sin(\omega t - \pi/2) = \frac{I_0 U_{C_0}}{2} \sin(2\omega t - \pi), \quad (12.17)$$

$$P_L = IU_L = I_0 \sin \omega t U_{L_0} \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{I_0 U_{L_0}}{2} \sin 2\omega t$$

(при выводе использована формула  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  и формула приведения косинуса к синусу). Графики зависимостей мощностей от времени даны на рис.81.

Исследуем превращения энергии на участках с С и L. Из формулы  $P_C = dW_C/dt$  следует, что приращение энергии электрического поля в конденсаторе за малое время  $dt$  равно  $dW_C = P_C dt$  и, следовательно, приращение энергии  $\Delta_T W_C$  за период  $T$  определится интегралом  $\Delta_T W_C = \int_0^T P_C dt$  (аналогично выражаются приращения энергии магнитного поля в катушке - с заменой  $P_C$  на  $P_L$ ). И без вычисления интегралов ясно, что  $\Delta_T W_C$  и  $\Delta_T W_L$ , а вместе с ними и средние мощности за период  $\bar{P}_C = \frac{1}{T} \int_0^T P_C dt$  и  $\bar{P}_L = \frac{1}{T} \int_0^T P_L dt$ , равны нулю:  $\Delta_T W_C = \Delta_T W_L = \bar{P}_C = \bar{P}_L = 0$

(как видно из графиков на рис.81, площади, ограниченные подынтегральными функциями  $P_C(t)$  и  $P_L(t)$  и осью абсцисс на интервале  $0 < t < T$ , с учетом знаков равны нулю). Это означает, что на участках с емкостью и индуктивностью энергия не скапливается систематически и не выделяется из цепи: сколько энергии забирается конденсатором из цепи в те доли периода, когда электрическое поле в нем растет ( $P_C > 0$ ), столько же энергии возвращается конденсатором обратно в цепь в те доли периода, когда электрическое поле убывает ( $P_C < 0$ ), и аналогично для энергии магнитного поля катушки. По этой причине мощности  $P_C$  и  $P_L$ , а вместе с ними и соответствующие сопротивления  $R_C$  и  $R_L$  называются реактивными.

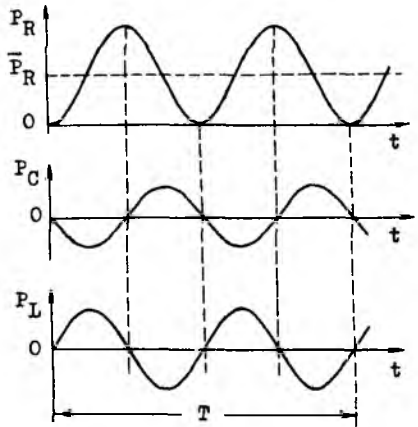


Рис.81



Иначе обстоит дело на участке с сопротивлением  $R$ . Найдем количество теплоты  $\Delta_T Q$ , выделяющееся здесь за период, а также среднюю мощность  $\bar{P}_R$ :

$$\Delta_T Q = \int_0^T P_R dt = I_0 U_{R_0} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0 U_{R_0}}{2} T, \quad (12.18)$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T} \int_0^T P_R dt = \frac{I_0 U_{R_0}}{2}.$$

Таким образом, на данном участке цепи непрерывно выделяется энергия в среднем  $I_0 U_{R_0} / 2$  в секунду. По этой причине мощность  $P_R$ , а вместе с ней и сопротивление  $R$  называются **активными**.

Воспользовавшись законом Ома (12.3) и формулой  $U_{R_0} = U_0 \cos \varphi$ , вытекающей из векторной диаграммы на рис. 79,6, запишем среднюю активную мощность в нескольких формах:

$$\bar{P}_R = \frac{I_0 U_{R_0}}{2} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0 U_0 \cos \varphi}{2}. \quad (12.19)$$

Согласно второму из этих выражений за период выделяется теплота

$$\Delta_T Q = \bar{P}_R T = \frac{I_0^2 R}{2} T. \quad (12.20)$$

По закону Джоуля-Ленца (10.8) такое же количество теплоты выделилось бы на том же сопротивлении за то же время  $T$  при протекании постоянного тока силой

$$I_\theta = I_0 / \sqrt{2}. \quad (12.21)$$

Действительно,  $Q = I_\theta^2 R T = (I_0^2 / 2) R T$ . Значение силы постоянного тока, который выделяет на активном сопротивлении такое же количество теплоты, что и рассматриваемый переменный ток за то же время (период), называется **действующим**, или **эффективным**, значением силы переменного тока. Действующее значение силы тока в  $\sqrt{2}$  раз меньше его амплитуды. Аналогично этому величины  $U_\theta = U_0 / \sqrt{2}$  и  $\epsilon_\theta = \epsilon_0 / \sqrt{2}$  называют действующими значениями напряжения и ЭДС. Все законы Ома для переменного тока, связывающие амплитуды силы тока и напряжений, верны также и для действующих значений, так как одинаковые множители  $\sqrt{2}$  в обеих частях равенств сокращаются.

Формула (12.19) запишется через действующие значения силы тока и напряжений следующим образом:

$$P_R = I_\theta U_{R_\theta} = I_\theta^2 R = I_\theta U_\theta \cos \varphi. \quad (12.22)$$

Входящий в эту формулу косинус сдвига фаз между полным напряжением и током называют **коэффициентом мощности**.

На практике важно при заданной ЭДС источника получить на данном активном сопротивлении максимально возможную мощность. Из второго выражения в (12.19) видно, что  $\bar{P}_R$  максимальна, когда максимальна амплитуда силы тока, а это имеет место, как следует из закона Ома (12.12), при выполнении условия  $\omega L - 1/\omega C = 0$  (полное сопротивление минимально). Из векторной диаграммы на рис. 79, б видно, что в этом случае  $U_L + U_C = 0$ , так что  $U = U_R$ , т.е. все приложенное напряжение, равное ЭДС источника, приходится на участок с активным сопротивлением. При этом  $\varphi = 0$ , так что

$$\cos \varphi = 1. \quad (12.23)$$

Часто в цепях переменного тока с неизбежностью присутствуют значительные емкость и индуктивность, и для увеличения потребляемой мощности целесообразно дополнительно ввести в цепь емкость или индуктивность с таким расчетом, чтобы выполнялось условие (12.23).

### § 13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В этом параграфе речь снова пойдет о цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, конденсатора и катушки. Однако теперь мы изучим явления, происходящие в этой цепи, в рамках общего метода, основывающегося на решении основного дифференциального уравнения, даваемого вторым правилом Кирхгофа. Такой подход показывает, что рассматриваемая цепь представляет собой типичную колебательную систему с сосредоточенными параметрами, вследствие чего ее называют **колебательным контуром**.

Свободные электрические колебания. Пусть в колебательном контуре, изображенном на рис. 32, в начальный момент времени  $t = 0$  осуществлено некоторое возмущение: либо конденсатору сообщен заряд  $q(0) \neq 0$ , либо в контуре возбужден ток  $I(0) \neq 0$ , либо имеет место и то, и другое одновременно, после чего контур предоставлен самому себе. Чтобы выяснить, какие процессы будут происходить в колебательном контуре, запишем для него основное дифференциальное уравнение (11.17):

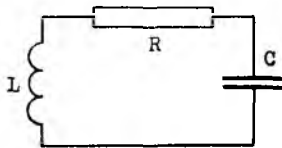


Рис. 32

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (13.1)$$

( $\varepsilon = 0$ , так как источник отсутствует). С таким уравнением мы уже встречались в курсе механики — это уравнение движения материальной точки массой  $m$ , находящейся под действием квазиупругой силы  $f_x = -kx$  и силы жидкого трения  $f_x^{\text{TP}} = -\beta \frac{dx}{dt}$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (13.2)$$

Поскольку уравнения (13.1) и (13.2) математически эквивалентны, а отличаются лишь физическим смыслом неизвестной функции и коэффициентов, то, вспоминая решение уравнения (13.2) (левый столбец табл.1) и заменяя стоящие в нем величины на соответствующие им в уравнении (13.1), получим решение уравнения (13.1) (правый столбец табл.1).

Таблица 1

Механические колебания	Электрические колебания
<u>У р а в н е н и е</u>	
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$	$\leftrightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (13.3)$
координата $x(t)$	$\leftrightarrow$ заряд $q(t)$ ,
масса $m$	$\leftrightarrow$ индуктивность $L$ ,
коэффициент трения $\beta$	$\leftrightarrow$ сопротивление $R$ ,
коэффициент жесткости $k$	$\leftrightarrow$ величина $1/C$ , обратная емкости.
<u>Р е ш е н и е</u>	
$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\rightarrow q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (13.4)$
где коэффициент затухания	
$\beta = \frac{\beta}{2m}$	$\rightarrow \beta = \frac{R}{2L}, \quad (13.5)$
круговая частота	
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$\rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (13.6)$
где	
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	$\rightarrow \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (13.7)$
постоянные $A$ и $\varphi$ определяются начальными условиями, т.е. выражаются через	
$x(0), v(0)$	$\rightarrow q(0), I(0).$

При не слишком большом затухании ( $\beta < \omega_0$ ) заряд на конденсаторе изменяется со временем по закону затухающего колебания (13.4). Используя формулы (11.15), можно показать, что сходным образом ведут себя и все другие переменные электрические величины в контуре:  $I(t)$ ,  $U_R(t)$ ,  $U_C(t)$  и  $U_L(t)$ . Такие электрические колебания в контуре называются свободными, так как они происходят при отсутствии внешних воздействий.

Практический интерес обычно представляют контуры с малым активным сопротивлением, для которых

$$\beta \ll \omega_0. \quad (13.8)$$

В этом случае, пренебрегая  $\beta^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$  в формуле (13.6) и учитывая (13.7), имеем для круговой частоты колебаний

$$\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (13.9)$$

В идеальном контуре ( $R = 0$ ) коэффициент затухания  $\beta$  обращается в нуль и колебания становятся гармоническими. Полагая для простоты в решении (13.4) начальную фазу  $\varphi$  равной нулю, найдем по формулам (7.2) и (11.15) силу тока и напряжения:

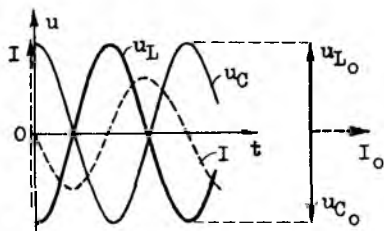
$$q(t) = q_0 \cos \omega t, \quad I(t) = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2), \quad (13.10)$$

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t, \quad U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = q_0 L \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi).$$

Напряжения на емкости и индуктивности имеют противоположные фазы (это нам уже известно из теории переменного тока), причем их амплитудные значения одинаковы, как следует из (13.10) с учетом (13.9):  $U_{L_0} = q_0 L \omega_0^2 = q_0 L (1/LC) = q_0/C = U_{C_0}$ . Графики и векторная диаграмма напряжений и силы тока для свободных колебаний в идеальном контуре приведены на рис.83.

Закон сохранения энергии для колебательного контура имеет вид (12.14), где, поскольку источник отсутствует,  $\Delta A^{eT} = 0$ :

$$\Delta(W_E + W_M) = -\Delta Q. \quad (13.11)$$



Энергия, запасенная в контуре в виде энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки, убывает, переходя в тепловую энергию. В идеальном контуре  $\Delta Q = 0$ , поскольку  $R = 0$ , так что  $\Delta(W_E + W_M) = 0$  и, следовательно,

Рис.83

$$W_E + W_M = \text{const.} \quad (13.12)$$

Это означает, что энергия в процессе колебаний лишь перераспределяется со временем между конденсатором и катушкой, сохраняя свое полное значение.

С ростом активного сопротивления  $R$  (при тех же значениях  $C$  и  $L$ ) картина свободных колебаний изменяется: увеличивается затухание колебаний, так как растет коэффициент затухания  $\beta = R/2L$ , и уменьшается их частота  $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)} = \sqrt{(1/LC - R^2/4L^2)}$ . При критическом значении сопротивления  $R_{кр}$ , определяемом из условия  $1/LC = R_{кр}^2/4L^2$ , частота обращается в нуль и при больших значениях сопротивления становится мнимой, так что решение в виде затухающих колебаний (13.4) теряет смысл. В этом случае, как следует из теории дифференциальных уравнений, решение имеет существенно аperiодический характер. На рис.84 даны графики  $q(t)$  для контуров с одинаковыми значениями  $C$  и  $L$ , но с различными  $R$  ( $R_1 < R_2 < R_{кр} < R_4$ ) при начальных условиях  $q(0) \neq 0$ ,  $i(0) = 0$ . Похожие графики имеют место для силы тока и напряжений на участках контура.

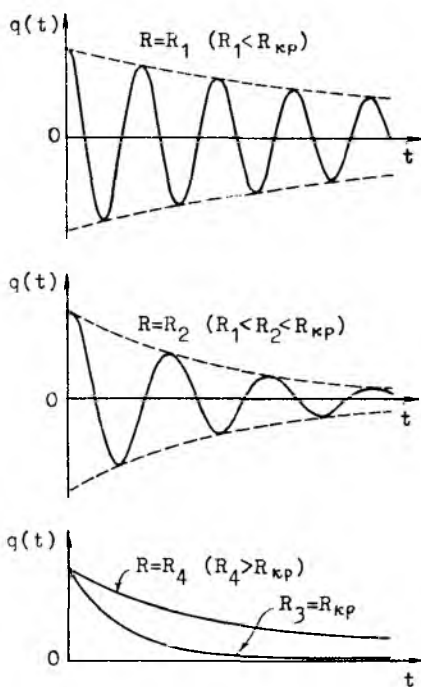


Рис.84

Вынужденные электрические колебания. Свободные колебания в контуре затухают из-за потерь энергии вследствие выделения тепла на активном сопротивлении. Иначе обстоит дело, если на контур оказывается периодическое внешнее воздействие, например, посредством включения последовательно с элементами контура источника переменного напряжения с ЭДС, изменяющейся по закону гармонического колебания  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$  (рис.80,  $\varphi = 0$ ). Эта схема представляет собой цепь переменного тока, исследовавшаяся в §12 методом векторных диаграмм. Сейчас мы рассмотрим эту цепь с иных позиций - с точки зрения вынужденных колебаний в контуре.

Основное дифференциальное уравнение (11.17) в нашем случае имеет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \sin \omega t. \quad (13.13)$$

С таким уравнением мы встречались в механике - речь идет об уравнении движения материальной точки массой  $m$ , на которую действуют квазиупругая сила  $f_x = -kx$ , сила жидкого трения  $f_x^{TP} = -\beta \frac{dx}{dt}$  и периодическая вынуждающая сила  $f_x = f_0 \sin \omega t$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin \omega t. \quad (13.14)$$

Мы знаем, что решением уравнения (13.14), описывающим установившийся процесс, является вынужденное колебание (см. левый столбец табл.2). Заменяя в этом решении величины  $x(t)$ ,  $m$ ,  $\beta$ ,  $k$  и  $f_0$  соответственно на  $q(t)$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $1/C$  и  $\varepsilon_0$ , получим установившееся решение уравнения (13.13) (правый столбец табл.2).

Таблица 2

Механические колебания	Электрические колебания
<u>У р а в н е н и е</u>	
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin \omega t \leftrightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \sin \omega t.$	
<u>Р е ш е н и е</u>	
$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi),$	
г д е <span style="float: right;">(13.15)</span>	
$A = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$	$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2R\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$

Подставляя в формулы (13.15) для  $q_0$  и  $\operatorname{tg} \varphi$  значения  $\beta$  и  $\omega_0$  из (13.5) и (13.7), получим после несложных преобразований

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (13.16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - 1/\omega C}.$$

Зная, как зависит от времени заряд конденсатора, находим силу тока и напряжения на всех элементах контура:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [q_0 \sin(\omega t + \varphi)] = q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2),$$

$$U_R = R I = q_0 \omega R \sin(\omega t + \varphi + \pi/2),$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\omega t + \varphi), \quad (13.17)$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = q_0 L \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi).$$

Итак, при подключении в колебательный контур последовательно его элементам источника переменного напряжения в контуре происходят вынужденные электрические колебания, при которых все переменные электрические величины  $I(t)$ ,  $q(t)$ ,  $U_R(t)$ ,  $U_C(t)$  и  $U_L(t)$  совершают гармонические колебания, у которых частота равна частоте источника напряжения, а амплитуды и фазы зависят от параметров контура, а также от амплитуды и частоты ЭДС источника.

Для вынужденных колебаний характерно явление резонанса, которое заключается в возрастании амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего воздействия (в нашем случае — частоты ЭДС источника напряжения  $\omega$ ) к резонансной частоте, зависящей от параметров колебательной системы (в нашем случае — параметров  $R$ ,  $C$  и  $L$  контура). Исследуем более подробно резонанс силы тока и напряжения на конденсаторе.

Амплитуда силы тока согласно первым формулам в (13.17) и (13.16) имеет вид

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (13.18)$$

Функция  $I_0(\omega)$  стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ , а при  $\omega L - 1/\omega C = 0$ , т.е. при  $\omega_{pe} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , достигает максимума  $I_0^{max} = \epsilon_0/R$ , так как при этом условии знаменатель минимален. На рис. 35,а приведены графики зависимостей  $I_0(\omega)$  — резонансные кривые силы тока — для трех значений активного сопротивления  $R_1 < R_2 < R_3$  при неизменных  $C$  и  $L$ . Кривые, соответствующие большим значениям  $R$ , располагаются ниже, так как согласно (13.18) с ростом  $R$  сила тока уменьшается. Итак, резонансная частота  $\omega_{pe}$  для силы тока равна частоте  $\omega_0$  свободных незатухающих колебаний в контуре и резонанс выражен тем отчетливее, чем меньше активное сопротивление контура.

Амплитуда напряжения на конденсаторе согласно третьей формуле из (13.17)  $U_{C_0} = q_0/C$ . Подставляя сюда выражение для  $q_0$  из (13.15), имеем

$$U_{C_0} = \frac{\epsilon_0}{CL \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (13.19)$$

Функция  $U_{C_0}(\omega)$  всюду положительна,  $U_{C_0}(0) = \varepsilon_0$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $U_{C_0} \rightarrow 0$ . Для нахождения экстремумов функции  $U_{C_0}(\omega)$  следует приравнять нулю ее первую производную:  $dU_{C_0}/d\omega = 0$ . Заметим, однако, что экстремумы этой функции совпадают с экстремумами подкоренного выражения в знаменателе (когда функция максимальна, знаменатель минимален и наоборот) и поэтому могут быть определены из более простого условия:  $d/d\omega [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = 0$ , откуда  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Из характера поведения функции  $U_{C_0}(\omega)$  следует, что этой частоте соответствует максимум, так что последняя формула определяет резонансную частоту

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (13.20)$$

На рис.85,б даны резонансные кривые  $U_{C_0}(\omega)$  для трех контуров с одинаковыми значениями  $C$  и  $L$  и разными  $R$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). По мере увеличения  $R$  кривые располагаются ниже, так как согласно (13.19) с ростом  $R$  растет  $\beta$  и, следовательно,  $U_{C_0}$  уменьшается.

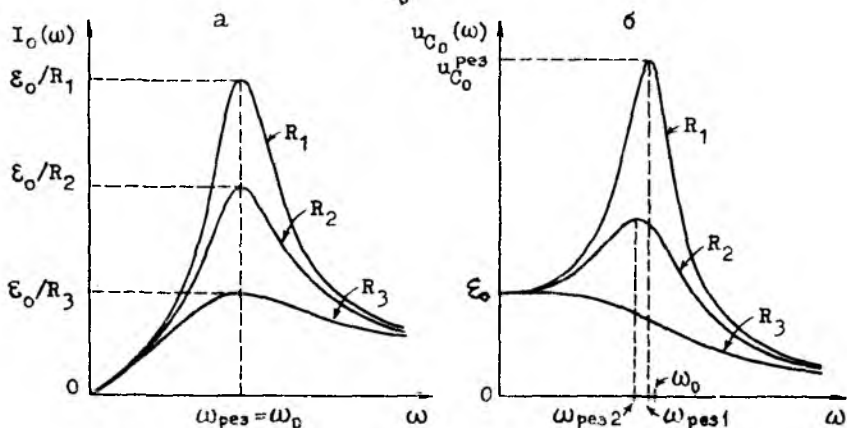


Рис.85

Как следует из (13.20), резонансная частота для напряжения на конденсаторе всегда меньше  $\omega_0$  в отличие от резонансной частоты для силы тока, которая, как мы видели, равна  $\omega_0$ . Для представляющих практический интерес контуров с малым затуханием ( $\beta \ll \omega_0$ ) членом  $2\beta^2$  в формуле (13.20) можно пренебречь. У таких контуров резонанс всех переменных электрических величин ( $q$ ,  $I$ ,  $U_R$ ,  $U_C$ ,  $U_L$ ) достигается практически одновременно при частоте ЭДС источника напряжения, равной частоте свободных незатухающих колебаний:

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (13.21)$$



Наоборот, у контуров с большим затуханием резонансная частота для напряжения на конденсаторе может заметно отличаться от  $\omega_0$ . Более того, если  $2\beta^2 > \omega_0^2$ , то выражение (13.20) становится мнимым и резонансная кривая не имеет максимума — резонанс отсутствует (см. кривую  $U_{C_0}$  для сопротивления  $R_3$  на рис.85,б).

Рассмотренное явление резонанса при последовательном соединении источника переменного напряжения с элементами контура называется **резонансом на напряжении**. Оно широко используется в радиотехнике.

Добротность. Из параметров контура  $R, C$  и  $L$  (как, впрочем, и из параметров любой другой колебательной системы) можно образовать безразмерную величину

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (13.22)$$

которая называется **добротностью** контура и характеризует его поведение.

Прежде всего замечаем, что условие (13.8), которое обеспечивает "добротное" во многих отношениях поведение контура (слабое затухание свободных колебаний, остроту резонанса при вынужденных колебаниях и т.п.), эквивалентно условию

$$Q \gg 1, \quad (13.23)$$

которое получается, если подставить в (13.8) выражения (13.5) и (13.7) для  $\beta$  и  $\omega_0$ . Добротность хороших контуров достигает нескольких сотен, не говоря уже о контурах из сверхпроводников. Выведем ряд конкретных формул для добротности, предполагая, что выполнено условие (13.8) и, следовательно,  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{своб}} = \omega_0$ .

Во-первых, добротность обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания  $\lambda$ :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (13.24)$$

Действительно, как известно из курса механики,

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega}.$$

Подставляя сюда  $\beta = R/2L$  и  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , получаем формулу (13.24).

Во-вторых, добротность обратно пропорциональна относительной убыли энергии  $\Delta_T W/W$  контура за период свободных колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta_T W}. \quad (13.25)$$

Энергия  $W$ , запасенная в контуре, определяется выражением  $W = LI_0^2/2$ . Действительно, в тот момент, когда сила тока максимальна ( $i(t)=I_0$ ), заряд на конденсаторе равен нулю (см., например, рис.83), так что

вся энергия контура сосредоточена в катушке и определяется формулой (11.10). Убыль энергии  $\Delta_T W$  за период согласно (12.20) определяется выражением  $\Delta_T W = (I_0^2 R/2) T$ , которое, если учесть, что  $T = 2\pi/\omega$  и  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , принимает вид  $\Delta_T W = I_0^2 R \pi \sqrt{LC}$ . Таким образом,  $2\pi W/\Delta_T W = 1/R \sqrt{LC} = Q$ .

В-третьих, добротность показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{C_0}^{pe3}$  (см. рис. 85, б) больше амплитуды  $\epsilon_0$  ЭДС источника напряжения:

$$Q = \frac{U_{C_0}^{pe3}}{\epsilon_0}. \quad (13.26)$$

Действительно, согласно (12.5)  $U_C = (1/\omega C) I_c$ . Но при резонансе  $\omega = \omega_{pe3} = 1/\sqrt{LC}$  и  $I_0^{pe3} = \epsilon_0/R$ . Отсюда  $U_{C_0}^{pe3} = (\epsilon_0/R) \sqrt{LC} = \epsilon_0 Q$ , что и приводит к формуле (13.26).

В-четвертых, добротность обратна относительной ширине резонансной кривой:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (13.27)$$

(вывод этой формулы мы опускаем). Шириной резонансной кривой, или полосой пропускания, называют интервал частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , ограниченный частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , на которых амплитуда в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем при резонансе (рис. 86). Отношение  $\Delta\omega/\omega_0$  называется относительной шириной резонансной кривой.

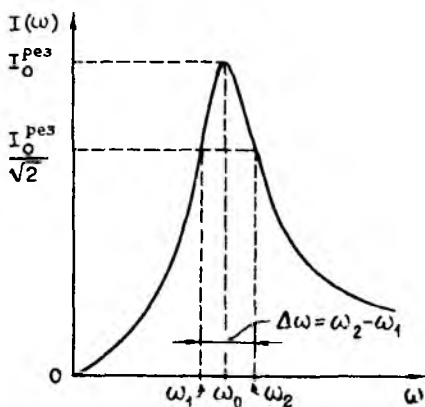


Рис. 86

Итак, у контуров с большой добротностью свободные колебания затухают медленно, как это видно из формул (13.24) и (13.25), и отчетливо выражено явление резонанса, что вытекает из формул (13.26) и (13.27). Однако, с точки зрения практического использования не всегда предпочтительнее контуры с наибольшей добротностью. Например, казалось бы выгодно увеличить добротность настроенного контура в радиоприемниках, так как при этом сужается резонансная кривая: стало бы легче отстраиваться от передач, ведущихся на соседних частотах, и можно было бы увеличить число радиоканалов, приходящихся на единичный диапазон несущих частот. Но при этом ухудшится качество звучания, так как с уменьшением ширины резонансной кривой уменьшается количество информации, которую пропускает контур.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

**Введение.** В этой главе мы возвращаемся к изучению полей. Ранее были рассмотрены два частных случая: электростатическое поле, создаваемое неподвижными зарядами, и постоянное магнитное поле, создаваемое постоянными токами. Естественно возникает вопрос о свойствах поля, которое создается в общем случае системой произвольно движущихся зарядов, и уравнениях, которыми оно описывается.

Проще всего было бы предположить, что уравнения электростатического и постоянного магнитного поля (имеются в виду прежде всего теоремы о потоке и циркуляции) носят универсальный характер. В самом деле, как бы ни двигались заряды, в каждый фиксированный момент времени они занимают определенное положение в пространстве и обладают определенными скоростями. Если бы такие мгновенные распределения зарядов и токов создавали мгновенные поля по законам электростатического и постоянного магнитного полей, то эти законы оставались бы справедливыми в самом общем случае, только входящие в них величины являлись бы функциями времени.

На деле все обстоит иначе, и уравнения поля в общем случае оказываются сложнее и богаче по физическому содержанию, чем уравнения постоянных электрического и магнитного полей. Эти уравнения были установлены Максвеллом и носят его имя. Максвелл шел по пути обобщения уравнений постоянных электрического и магнитного полей, которое заключается в двух фундаментальных положениях (гипотезах).

## § 14. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА

**Первое положение теории Максвелла.** Рассмотрим неподвижный замкнутый проводник  $L$ , находящийся в переменном магнитном поле (рис. 87). По закону электромагнитной индукции Фарадея (11.3) в проводнике возникает ЭДС индукции  $\varepsilon = -d\Phi/dt$ , где  $\Phi$  — поток магнитной индукции через поверхность  $S$ , ограниченную проводником. Распишем более подробно правую часть этой формулы:

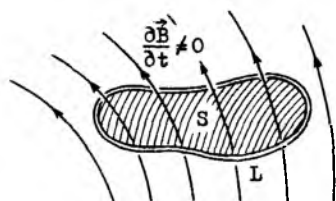


Рис. 87

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS = -\int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS.$$

Здесь мы воспользовались, во-первых, тем, что контур неподвижен, т.е. интеграл берется по фиксированной поверхности — это позволяет

заменить производную интеграла на интеграл от производной подынтегральной функции (внести производную под знак интеграла). Во-вторых, производная проекции вектора на некоторое направление равна проекции на это направление производной вектора. Наконец, мы заменили обычную производную на частную, поскольку производная вектора  $\vec{E}(x, y, z, t)$  по времени берется в фиксированной точке пространства. Чтобы убедиться в законности этих операций, рекомендуем провести указанное дифференцирование, записав поток как сумму малых потоков  $\Phi \approx \sum_i E_{n_i} \Delta S_i$ .

Если учесть также выражение ЭДС через напряженность сторонних сил (10.2), то закон Фарадея для нашего случая запишется в виде

$$\oint_L E_i^{cT} dl = - \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]_n dS. \quad (14.1)$$

Закон Фарадея носит феноменологический характер: выявляя в качестве причины возникновения ЭДС индукции в рассматриваемом случае изменение магнитного поля, он ничего не говорит о физической природе сторонних сил, ответственных за эту ЭДС.

Максвелл предположил (первая гипотеза), что всякое изменяющееся во времени магнитное поле порождает в пространстве электрическое поле. Замкнутый проводник лишь выявляет его - силы, действующие со стороны этого электрического поля на носители тока, и являются теми сторонними силами, которые вызывают индукционный ток в проводнике. Таким образом, напряженность сторонних сил в законе Фарадея (14.1) есть напряженность электрического поля, порожденного переменным магнитным полем:

$$\vec{E}^{cT} = \vec{E}, \quad (14.2)$$

и он принимает вид

$$\oint_L E_i dl = - \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]_n dS. \quad (14.3)$$

Эта формула, представляющая собой математическое выражение первой гипотезы Максвелла, является одним из фундаментальных уравнений теории Максвелла. В левой части уравнения стоит циркуляция напряженности, так что оно представляет собой обобщение теоремы о циркуляции напряженности электростатического поля.

В электростатическом поле, порождаемом неподвижными зарядами, такая циркуляция всегда равна нулю (см. (3.5)), что означает независимость работы по переносу заряда в этом поле от формы пути, позволяя ввести потенциал. Теперь мы видим, что в общем случае, когда в пространстве имеется переменное магнитное поле ( $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$ ), циркуляция напряженности электрического поля, вообще говоря, отлична от

нуля - произвольное электрическое поле непотенциально. Именно отличие от нуля циркуляции напряженности, а следовательно, и работы поля по переносу заряда по замкнутому контуру, позволяет этому полю выступать в роли сторонних сил и вызывать ток, на что не способно электростатическое поле, как это было выяснено нами ранее.

Иной характер имеет и картина линий напряженности электрического поля общего вида: здесь наряду с линиями, начинающимися и кончающимися на зарядах, как это имеет место в электростатике, существуют и замкнутые линии напряженности. Если, как в рассмотренном примере, в пространстве имеется переменное магнитное поле, а заряды отсутствуют, то все линии напряженности электрического поля замкнутые, т.е. оно является вихревым (напомним, что вихревым является также постоянное магнитное поле). Это поле иногда называют электродинамическим в отличие от электростатического, порождаемого неподвижными зарядами.

Второе положение теории Максвелла. В теории постоянного магнитного поля одно из основных уравнений дает теорема о циркуляции напряженности (см. (9.9)). Сейчас важно подчеркнуть, что справа стоит суммарный ток через любую поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ . В случае постоянного тока независимость этого суммарного тока от формы поверхности гарантируется непрерывностью линий тока, как это проиллюстрировано на рис.88 : две произвольные поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , ограниченные контуром  $L$ , пронизывает один и тот же ток  $I$ .

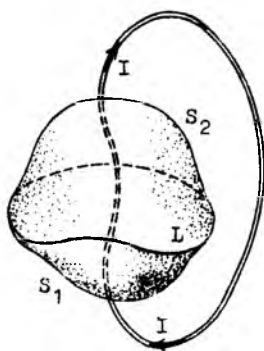


Рис.88

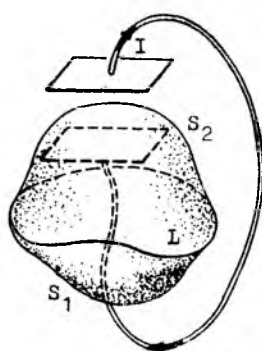


Рис.89

Иначе обстоит дело в случае переменных токов, которые могут течь и в разомкнутой цепи, в частности, в цепи с конденсатором. Так как линии тока обрываются на обкладках конденсатора (через конденсатор ток не течет), то для некоторого контура  $L$  (рис.89) наряду

с поверхностями, пронизываемыми током (поверхность  $S_1$ ), существуют поверхности, через которые ток равен нулю (поверхность  $S_2$ ). Следовательно, для переменных токов и порождаемых ими переменных полей теорема о циркуляции магнитного поля (9.9) неверна.

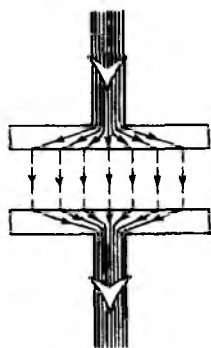


Рис.90

Следовательно, переменное электрическое поле порождает магнитное - таково качественное содержание второй гипотезы Максвелла.

Чтобы дать математическую формулировку второй гипотезы Максвелла, сопоставим чисто формально переменному электрическому полю такой ток, который порождал бы то же магнитное поле, какое порождается рассматриваемым переменным электрическим полем. Этот ток называют током смещения в отличие от обычного тока в проводниках, который представляет собой направленное движение зарядов и далее будет называться током проводимости. Целесообразность введения тока смещения состоит в том, что два разных по своей природе источника магнитного поля - ток проводимости и переменное электрическое поле - сводятся хотя и формально к одному источнику - полному току. Плотность  $\vec{j}_{\text{полн}}$  полного тока в каждой точке пространства складывается из плотности  $\vec{j}$  тока проводимости и плотности  $\vec{j}_{\text{см}}$  тока смещения в этой точке:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} . \quad (14.4)$$

Подставляя в теорему о циркуляции напряженности магнитного поля (9.9,а) вместо тока проводимости полный ток, мы учтем через ток смещения вклад в магнитное поле, обусловленный переменным электрическим полем:

$$\oint_L H_i d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \vec{J}_{cm})_n dS. \quad (14.5)$$

Остается установить связь между током смещения и переменным электрическим полем, которому он сопоставляется. Эту связь, вытекающую из постулата Максвелла о непрерывности полного тока, легко найти на том же примере цепи с конденсатором. Внутри проводника имеется по существу только ток проводимости (током смещения здесь можно пренебречь, так как электрическое поле в хороших проводниках достаточно слабое), в то время как между обкладками — только ток смещения. Поэтому условие непрерывности полного тока означает, что ток проводимости на внутренних сторонах пластин конденсатора непрерывно переходит в ток смещения (см. рис. 90, на котором линии тока проводимости изображены сплошными, а линии тока смещения — штриховыми линиями):  $\vec{J}_{cm} = \vec{J}$ . Выразим плотность тока проводимости через электрическое смещение  $\vec{D}$  поля в конденсаторе, считая, что он заполнен однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Обозначая  $S$  площадь пластины конденсатора, а  $\sigma = q/S$  поверхностную плотность заряда на ней, имеем  $J = I/S = (1/S) dq/dt = d(q/S)/dt = d\sigma/dt$ . В свою очередь  $\sigma = D$ . Действительно, напряженность  $E$  электрического поля в конденсаторе, заполненном диэлектриком, равна согласно (4.6) и с учетом (6.9)  $E = \sigma/\epsilon_0 \epsilon$  и, следовательно, согласно (6.8)  $D = \epsilon_0 \epsilon E = \sigma$ . Таким образом,  $J_{cm} = J = d\sigma/dt = dD/dt$ . Легко убедиться, что эта формула справедлива в векторной форме:

$$\vec{J}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (14.6)$$

Замена производной по времени на частную производную означает, что справа стоит скорость изменения вектора  $\vec{D}(x, y, z, t)$  в фиксированной точке пространства.

Итак, переменное электрическое поле порождает такое же магнитное поле, какое порождал бы ток, плотность которого в каждой точке пространства равна скорости изменения вектора смещения в этой точке. Подставляя выражение для плотности тока смещения (14.6) в формулу (14.5), получим

$$\oint_L H_i d\vec{l} = \int_S J_n dS + \int_S \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]_n dS. \quad (14.7)$$

Эта обобщенная теорема о циркуляции напряженности магнитного поля, справедливая в общем случае произвольно меняющихся во времени токов и полей, представляет собой второе фундаментальное уравнение теории Максвелла.

Система уравнений электромагнитного поля (уравнения Максвелла).

Совокупность четырех уравнений - обобщенные теоремы о циркуляциях (14.3) и (14.7) и теоремы о потоках (6.5,а) и (7.21) (две последние не нуждаются в обобщении и остаются справедливыми в общем случае переменных полей), называют уравнениями Максвелла. Дополняя их соотношениями (6.8) и (9.13), а также законом Ома (10.13), имеем

$$\oint_L \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = - \iint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]_{\mathbf{n}} dS, \quad \oint_L \mathbf{H}_i d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_{\mathbf{n}} dS + \iint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]_{\mathbf{n}} dS,$$
$$\oint_S \mathbf{D}_{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho dV, \quad \oint_S \mathbf{B}_{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (14.8)$$
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{ext}}).$$

Эта система уравнений описывает все классические (т.е. неквантовые) электромагнитные явления, хотя на практике уравнения Максвелла записываются не в интегральной, как в (14.8), а в дифференциальной форме подобно тому, как это было сделано с теоремой Гаусса в §2 (см. уравнения (2.16) и (2.16,а)).

Следует особо оговорить три последние уравнения, где задействованы свойства вещества. Первые два справедливы строго говоря только для статических полей и только для веществ с линейной зависимостью векторов поляризации и намагниченности от поля (см. (5.8) и (9.10)). Поэтому при решении динамических задач или в присутствии магнито- и электроупорядоченных сред эти уравнения нуждаются в соответствующей модификации. Надлежащей замены требует и третье из этих уравнений, если проводящая среда не подчиняется закону Ома.

Как и всякая новая теория, претендующая на обобщение старой, теория Максвелла должна удовлетворять принципу соответствия, т.е. старая теория должна быть заключена в новой как ее частный случай. Легко убедиться, что для статических полей, когда  $\partial \vec{E} / \partial t = \partial \vec{D} / \partial t = \partial \vec{B} / \partial t = \partial \vec{H} / \partial t = 0$ , уравнения Максвелла переходят в уравнения электростатического и постоянного магнитного полей, т.е. в уравнения старой теории.

Далее, поскольку обобщения, сделанные Максвеллом, базируются на двух отнюдь не самоочевидных положениях, носящих характер гипотез, то заранее не была очевидной и справедливость самих уравнений Максвелла. Верность новой теории должна быть подтверждена экспериментальной проверкой вытекающих из нее новых следствий. Максвелл показал, что прямым следствием его уравнений является волновое урав-



нение для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , что свидетельствует о существовании в природе электромагнитных волн. Вскоре этот вывод был блестяще подтвержден экспериментально Герцем, которому удалось в лабораторных условиях осуществить излучение и прием электромагнитных волн. Вплоть до настоящего времени все электромагнитные явления непротиворечиво объясняются в рамках теории Максвелла, если, конечно, речь не идет об электромагнитных явлениях в области микромира, для описания которых уравнения Максвелла нуждаются в соответствующей процедуре квантования.

Подчеркнем, наконец, что уравнения Максвелла выявляют неразрывную связь между электрическим и магнитным полями, которые взаимно порождают друг друга (см. уравнения Максвелла с циркуляциями). О взаимозависимости электрического и магнитного полей свидетельствует и такой факт. Одно и то же поле проявляет себя по разному относительно различных инерциальных систем отсчета: напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  этого поля в системе отсчета К отличны от напряженностей  $\vec{E}'$  и  $\vec{H}'$  этого же поля в системе отсчета К', движущейся относительно К. При этом  $\vec{E}'$  в системе К' зависит не только от  $\vec{E}$ , но и от  $\vec{H}$  в системе К (аналогично  $\vec{H}'$  зависит от  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$ ). Так, например, поле точечного заряда  $q$  является чисто электростатическим в той системе отсчета, относительно которой этот заряд покоится ( $\vec{E} = (1/4\pi\epsilon_0)(q/r^3)\vec{r}$ , а  $\vec{H}=0$ , так как тока нет), но это же поле в системе отсчета, относительно которой заряд движется, проявляет себя как совокупность электрического и магнитного полей (в этой системе отсчета  $\vec{H} \neq 0$ , так как движущийся заряд представляет собой электрический ток). Итак, в природе существует единое электромагнитное поле, объединяющее в качестве своих компонент электрическое и магнитное поля.

## § 15. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Плоская электромагнитная волна. Не останавливаясь на выводе волнового уравнения из уравнений Максвелла в общем случае, рассмотрим частный случай плоской монохроматической электромагнитной волны.

Пусть напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны друг другу во всем пространстве, будучи направлены соответственно вдоль осей  $y$  и  $z$ :  $\vec{E} = \vec{E}_y$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_z$ , и изменяются со временем по закону гармонического колебания. Можно показать (вывод не приводим ввиду громоздкости), что в однородной нейтральной диэлектрической среде уравнения Максвелла приводят к волновому уравнению для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0, \quad (15.1)$$

8<sup>х</sup>-1403

причем эти векторы не зависят от координат  $y$  и  $z$ , т.е.

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0. \quad (15.2)$$

Как известно из курса механики, решением уравнений (15.1) является волна, распространяющаяся в направлении оси  $x$  со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} \quad (15.3)$$

(напомним, что коэффициент при второй производной по времени в волновом уравнении равен  $1/v^2$ ). В вакууме ( $\epsilon = \mu = 1$ ) скорость распространения электромагнитной волны оказывается равной

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (15.4)$$

Из формул (15.3) и (15.4) следует, что скорость электромагнитной волны в вакууме больше, чем в диэлектрической среде в  $\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$  раз. Величина

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu} \quad (15.5)$$

называется абсолютным показателем преломления среды.

Перпендикулярность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлению распространения волны указывает на поперечность электромагнитной волны — это общее свойство электромагнитных волн. Независимость полей от координат  $y$  и  $z$  (формула (15.2)) означает, что для любой плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , поле одинаково во всех ее точках. Следовательно, эти плоскости представляют собой волновые поверхности, так что рассматриваемая волна — плоская. Наконец, то обстоятельство, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  распространяются, оставаясь в определенных плоскостях ( $\vec{E}$  в плоскости  $xy$ ,  $\vec{H}$  в плоскости  $xz$ ), означает, что рассматриваемая волна линейно, или плоско поляризована.

Волновое уравнение (15.1) с постоянными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  справедливо только для монохроматической волны, представляющей собой распространение гармонических колебаний. Как известно, формула плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ , имеет вид  $\xi(x, t) = A \sin \omega(t - x/v)$ . Если внести  $\omega$  в скобки и учесть известные формулы  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\lambda = vT$  и  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны и  $k$  — волновое число, то формула запишется в более компактной форме:  $\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ .

В случае электромагнитной волны роль распространяющейся величины  $\xi$  играют векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Можно показать (доказательство снова

опускаем), что колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в монохроматической волне не являются независимыми, а именно, они имеют одинаковые частоты, волновые числа и фазы:

$$E_y = E_0 \sin(\omega t - kx), \quad H_z = H_0 \sin(\omega t - kx), \quad (15.6)$$

причем амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  связаны друг с другом соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0. \quad (15.7)$$

Мгновенный "профиль" такой волны, т.е. распределение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вдоль оси  $x$  в фиксированный момент времени, изображен на рис.91.

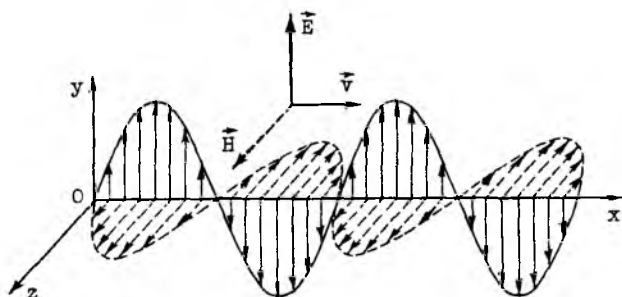


Рис.91

Относительное расположение векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  в каждой точке пространства соответствует правому венту: при вращении головки вента от  $\vec{E}$  к  $\vec{H}$  по кратчайшему углу он движется поступательно в направлении  $\vec{v}$ . Вследствие независимости полей от координат  $y$  и  $z$  такая же картина имеет место вдоль любой прямой, параллельной оси  $x$ . Этот профиль волны перемещается в направлении оси  $x$  со скоростью (15.3).

Рассмотренная в качестве примера линейно поляризованная монохроматическая плоская волна — частный случай электромагнитной волны. Вид волны непосредственно зависит от характера движения зарядов в излучающей системе. Можно утверждать, что электромагнитные волны испускаются только ускоренно движущимися зарядами или, что то же самое, переменными токами. Интенсивность излучения зависит не только от ускорений зарядов, но и от конфигурации системы. Так, например, закрытый колебательный контур, рассмотренный в § 13, излучает слабо, поскольку в процессе колебаний электрическое и магнитное поля практически сосредоточены внутри конденсатора и катушки. Значительно активнее излучают открытые системы наподобие известного из школьного курса физики вибратора Герца или элементарного диполя, о котором речь пойдет ниже.

Перенос энергии в электромагнитном поле. Как мы уже знаем, электрическое и магнитное поля обладают энергией, плотность которой  $w_e$  и соответственно  $w_m$  определяется формулами (4.14) и (11.12). Если в пространстве одновременно существуют оба поля, как это имеет место в электромагнитных волнах, то плотность энергии в каждой точке  $w = w_e + w_m = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2$ . В монохроматической волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношениями (15.6) и (15.7), с учетом которых плотность энергии в этой волне можно представить в нескольких формах:

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} E H. \quad (15.8)$$

Так как переменные электрическое и магнитное поля волны распространяются в пространстве, то вместе с ними распространяется и энергия. Выделим мысленно площадку  $\Delta s$ , расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. За время  $\Delta t$  через эту площадку пройдет поле, заключенное в параллелепипеде объема  $\Delta V = v \Delta t \Delta s$  (рис.92), и перенесет с собой энергию  $\Delta W = w \Delta V = w v \Delta t \Delta s$  (предполагается, что  $\Delta s$  и  $\Delta t$  столь малы, что поле в рассматриваемом параллелепипеде однородно). Поделив этот поток энергии на  $\Delta s \Delta t$ , найдем энергию, переносимую волной через единичную перпендикулярную площадку за единицу времени, т.е. плотность потока энергии  $S$ :  $S = \Delta W / \Delta s \Delta t = w v$ . Подставляя вместо  $v$  и  $w$  их значения по формулам (15.3) и (15.8) (последнее выражение), получим  $S = E H$ . Введем вектор плотности потока энергии

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}], \quad (15.9)$$

который называют вектором Умова - Пойнтинга.

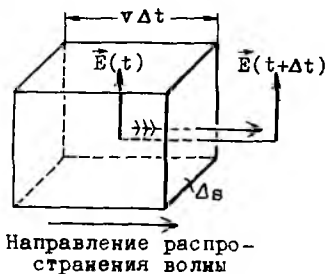


Рис.92

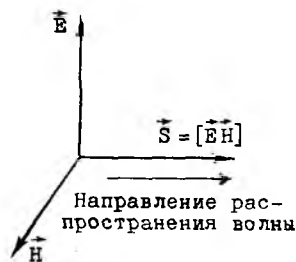


Рис.93

Вследствие взаимной ортогональности векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  модуль вектора Умова - Пойнтинга равен плотности потока энергии  $S = E H$ , а его направление совпадает с направлением распространения волны (рис.93).

Так как напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в электромагнитной волне изменяются со временем, то переменна и плотность потока энергии в фиксированной точке пространства. Для монохроматической волны с учетом (15.9) и (15.6)  $S = E\vec{H} = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx)$ . В случае высокочастотных волн, с которыми мы имеем дело в радиофизике и тем более в оптике, практический интерес представляет среднее по времени значение величины плотности потока энергии  $I = \overline{S}$ , которое мы будем называть **интенсивностью** волны. Так как среднее значение квадрата синуса за период равно  $1/2$ , то с учетом формулы (15.7) имеем

$$I = \overline{S} = E_0 H_0 / 2 = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_0 \epsilon / \mu_0 \mu} E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_0 \mu / \epsilon_0 \epsilon} H_0^2, \text{ т.е. } I \sim E_0^2 \sim H_0^2 \quad (15.10)$$

- интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды (это утверждение справедливо для волн любой физической природы).

Заметим в заключение, что формула (15.9) определяет плотность потока энергии не только для электромагнитной волны, но и в общем случае произвольного электромагнитного поля. В частности, как это ни парадоксально на первый взгляд, течение энергии происходит и в статических одновременно существующих электрическом и магнитном полях. Например, в цепи постоянного тока энергия вытекает из источника тока в окружающее пространство и втекает оттуда в проводники внешней цепи через их поверхность, выделяясь затем в виде тепла.

Излучение элементарного диполя. Рассмотрим диполь, электрический момент которого  $\vec{p} = q\vec{l}$  изменяется со временем по закону гармонического колебания:  $\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t$ . Такая ситуация возникает, например, если один из точечных зарядов диполя совершает гармоническое колебательное движение относительно находящегося в положении равновесия другого заряда диполя: при этом  $\vec{l} = \vec{l}_0 \sin \omega t$  и, следовательно,  $\vec{p} = q \vec{l}_0 \sin \omega t = \vec{p}_0 \sin \omega t$ . Так как движение заряда ускоренное, то такой диполь должен излучать электромагнитные волны. Если длина волны существенно больше размеров диполя ( $\lambda \gg l$ ), то диполь называют **элементарным**. С излучением элементарного диполя мы сталкиваемся в разных задачах: в оптике ему можно уподобить в некантовой модели процесс испускания света атомами, в радиофизике - излучение радиоволн простейшими антеннами.

Теория излучения выходит за рамки курса общей физики, и мы дадим лишь качественную картину излучения элементарного диполя. Вблизи диполя возникает переменное электромагнитное поле неволнового характера, однако в достаточно удаленной области, для точек которой расстояние  $r$  от диполя существенно больше длины волны ( $r \gg \lambda \gg l$ ) - так называемой **волновой зоне** - распространяется сфери-

ческая монохроматическая электромагнитная волна частотой  $\omega$ . Опишем основные свойства этой волны, схематически отраженные на рис.94.

1. Распространение колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каком-либо радиальном направлении описывается той же формулой, что и в плоской волне (с заменой координаты  $x$  на  $r$ ):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kr), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - kr), \quad (15.11)$$

причем направления векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  поперечно связаны правилом правого винта и выполняется соотношение (15.7).

2. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в тех же плоскостях, что и в случае постоянных полей диполя (рис.2,в) и элемента тока (рис.43): вектор  $\vec{E}$  расположен в плоскости, проходящей через ось диполя и рассматриваемое направление распространения волны, а вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен этой плоскости.

3. Амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  не постоянны, как в плоской волне, а зависят от точки пространства: обратно пропорциональны расстоянию от диполя ( $\sim 1/r$ ) и прямо пропорциональны синусу угла  $\theta$  между осью диполя и направлением распространения ( $\sim \sin \theta$ ) (в последнем можно усмотреть аналогию с формулой Био - Савара - Лапласа (7.15) для магнитного поля элемента тока). Кроме того, они пропорциональны амплитуде второй производной по времени электрического момента диполя  $p_0 \omega^2$ . Таким образом,

$$E_0 \sim p_0 \omega^2 \frac{\sin \theta}{r}, \quad (15.12)$$

$$H_0 \sim p_0 \omega^2 \frac{\sin \theta}{r}.$$

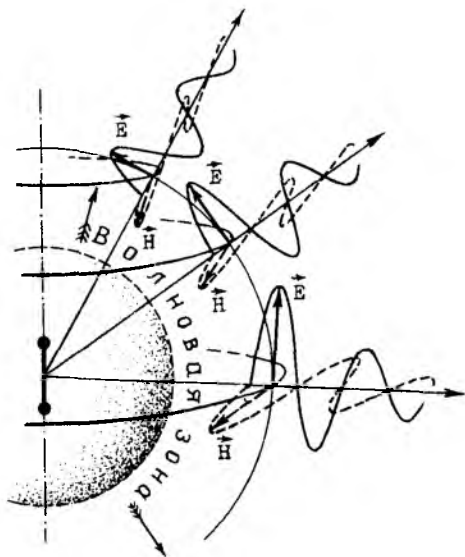


Рис.94

4. Для интенсивности волны, которая согласно (15.10) пропорциональна квадрату амплитуды, имеем с учетом (15.12)

$$I \sim p_0^2 \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (15.13)$$

Из этой формулы следует, что интенсивность, во-первых, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от диполя. Это является прямым следствием закона сохранения энергии: через каждую сферическую волновую поверхность должна проходить за единицу времени одна и та же энергия, следовательно, энергия, проходящая за единицу времени через единицу площади (а это и есть интенсивность), должна убывать с расстоянием обратно тому закону, по которому растет площадь сферы, т.е. обратно пропорционально квадрату расстояния.

Во-вторых, интенсивность неодинакова для различных направлений. Она максимальна в направлениях, перпендикулярных оси диполя (при  $\theta = \pi/2$   $\sin \theta = 1$ ) и обращается в нуль в обоих направлениях вдоль оси диполя (при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$   $\sin \theta = 0$ ). Наглядное представление о зависимости  $I(\theta)$  дает диаграмма направленности (индикатриса) излучения, которая строится так: от центра диполя в каждом направлении откладывается отрезок, длина которого пропорциональна интенсивности излучения в этом направлении, и концы отрезков соединяются. На рис.95 представлена диаграмма направленности излучения в плоскости чертежа; пространственная диаграмма получится ее вращением вокруг оси диполя на  $180^\circ$ .

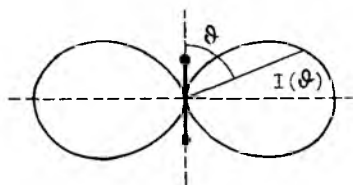


Рис.95

В-третьих, интенсивность сильно ( $\sim \omega^4$  !) зависит от частоты. С этой точки зрения в теле- и радиовещании предпочтительнее использовать более высокие несущие частоты.

ВВЕДЕНИЕ

Оптика – наука о свете. Согласно современным воззрениям свет представляет собой поток элементарных частиц – ф о т о н о в, т.е. квантов электромагнитного поля, частоты которых соответствуют видимой части спектра. Поэтому строгая трактовка оптических явлений может быть дана только в рамках последовательной квантовой теории. Однако целый ряд практически важных оптических явлений можно удовлетворительно объяснить, пользуясь приближенными теориями.

Самой грубой теорией света является г е о м е т р и ч е с к а я, или л у ч е в а я, о п т и к а. Содержание геометрической оптики составляют понятие о световых лучах как траекториях, по которым распространяется световая энергия, и законы, которым они подчиняются: закон прямолинейного распространения лучей в однородной прозрачной среде и законы отражения и преломления на границе раздела сред. Геометрическая оптика позволяет построить теорию простейших оптических приборов, в которых пучки световых лучей ограничиваются слабо и изображение предмета исследуется не слишком детально, т.е. можно пренебречь дифракционными явлениями. Законы геометрической оптики достаточно подробно изучаются в средней школе и в нашем курсе специально рассматриваться не будут.

Согласно квантовой теории фотоны, как и всякие микрочастицы, обладают наряду с корпускулярными также и волновыми свойствами. Существует целый ряд оптических явлений (интерференция, дифракция, поляризация, некоторые случаи взаимодействия света с веществом), в которых проявляется прежде всего волновая природа света. Эти явления могут быть достаточно хорошо объяснены в рамках в о л н о в о й о п т и к и, или электромагнитной теории света, т.е. приближенной теории, в которой свет рассматривается как электромагнитные волны, подчиняющиеся классической (неквантовой) теории электромагнетизма Максвелла. Изучению этих явлений и посвящена вторая часть книги.

Явления, в которых на первый план выступают корпускулярные свойства света (фотоэффект, процессы излучения и поглощения света атомами и др.) не могут быть поняты в рамках волновой оптики – они обычно рассматриваются в курсе атомной физики. Что касается последовательной квантовой теории света, то она существенно выходит за пределы курса общей физики.



## И Н Т Е Р Ф Е Р Е Н Ц И Я С В Е Т А

## § 16. ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Явление интерференции свойственно волнам любой физической природы — упругим, капиллярным, электромагнитным, для которых возмущение подчиняется линейному волновому дифференциальному уравнению. Поэтому сначала мы дадим общие представления об интерференции, не уточняя, о каких волнах идет речь.

Пусть имеется несколько источников волн. Рассмотрим достаточно удаленную от источников область пространства, где происходит наложение волн, идущих от источников, и будем интересоваться интенсивностью в этой области (напомним, что интенсивность — это усредненный по времени поток энергии, переносимый волной через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны; в достаточно удаленную точку возмущения от источников приходят практически по одному и тому же направлению, поэтому при вычислении интенсивностей как отдельных волн, так и общей, имеется в виду одна и та же площадка, перпендикулярная этому направлению).

Теория и опыт показывают, что для возмущений выполняется принцип суперпозиции: возмущение  $\xi$  в любой точке  $x, y, z$  равно сумме возмущений  $\xi_1$ , обусловленных каждой волной в отдельности:

$$\xi(x, y, z) = \sum \xi_1(x, y, z) \quad (16.1)$$

(для электромагнитных волн, где возмущением являются напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей, (16.1) есть прямое следствие принципа суперпозиции напряженностей:  $\vec{E} = \sum \vec{E}_1$ ,  $\vec{H} = \sum \vec{H}_1$ ).

С интенсивностью дело обстоит иначе. В тех случаях, когда интенсивность  $I$  в каждой точке пространства также складывается из интенсивностей  $I_1$ , обусловленных отдельными волнами:

$$I(x, y, z) = \sum I_1(x, y, z), \quad (16.2)$$

говорят, что интерференция волн отсутствует. При этом интенсивность монотонно изменяется от точки к точке, убывая по мере удаления от источников. Такая ситуация возникает, например, в акустике, если источники звука издадут шумы, или в оптике при наложении волн от независимых источников света.

Интерференцией волн называют такие случаи наложения волн, когда суперпозиция интенсивностей не имеет места.

Слагаемое, "нарушающее" суперпозицию интенсивностей, называют интерференционным членом:

$$I = \sum I_1 + (\text{инт. член}), \quad (16.3)$$

а возникающее в результате интерференции распределение интенсивности в пространстве  $I(x, y, z)$  — интерференционной картиной, или полем интерференции. Как мы увидим далее, во многих интерференционных схемах интерференционный член является знакопеременной осциллирующей функцией координат. Там, где он положителен,  $I > \sum I_1$ , а где отрицателен —  $I < \sum I_1$ , так что типичная интерференционная картина представляет собой чередование максимумов и минимумов интенсивности.

Рассмотрим простейший пример интерференции. Пусть имеются два источника, порождающие сферические монохроматические волны одинаковой частоты  $\omega$ . В каждую точку пространства приходят два гармонических колебания с соответствующими амплитудами  $(A_1, A_2)$  и фазами  $(\varphi_1, \varphi_2)$ :  $\xi_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  — от первого и  $\xi_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$  — от второго источников, и результирующее возмущение равно их сумме:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (16.4)$$

Как известно из механики, при сложении гармонических колебаний одинаковой частоты получается снова гармоническое колебание той же частоты:

$$\xi = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем квадрат его амплитуды выражается формулой

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (16.5)$$

Интенсивность, как уже отмечалось (см. (15.10)), всегда пропорциональна квадрату амплитуды:  $I \sim A^2$ , поэтому

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (16.6)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — интенсивности, обусловленные соответственно первой и второй волнами. Мы видим, что в рассмотренном примере суперпозиция интенсивностей не имеет места, т.е. волны интерферируют, причем интерференционный член  $2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  зависит от разности фаз складываемых колебаний.

Естественно возникает вопрос: какие условия необходимы для того, чтобы при наложении волн возникала их интерференция? В рассмотренном примере решающую роль играли три обстоятельства. Во-первых, существенно то, что частоты интерферирующих волн одинаковы. Во-вторых, важно, чтобы возмущения, если они имеют векторный характер, были направлены вдоль одной прямой (в противном случае было бы неправомерно складывать возмущения как скалярные величины, как это

было сделано в (16.4)). В-третьих, подразумевалось, что складываемые колебания происходят непрерывно в течении всего времени наблюдения. Последнее, как мы увидим далее, не имеет места в оптике и это обстоятельство определяет специфику оптических интерференционных схем.

### § 17. КОГЕРЕНТНОСТЬ

В оптике мы вынуждены констатировать, что ни в одном опыте не удается получить интерференцию от независимых источников света (не лазеров!), хотя первые два из перечисленных выше условий нетрудно выполнить: для обеспечения достаточной монохроматичности и одинаковости частот излучение источников можно пропустить через специальный прибор - монохроматор, а для обеспечения сонаправленности возмущений - через поляризатор. Причина отсутствия интерференции состоит в том, что нарушено третье условие: излучение света атомами не происходит непрерывно.

Простейшая модель излучения в рамках волновой оптики такова. Атом рассматривается как осциллятор, в котором положительные и отрицательные заряды связаны квазиупругими силами (подробнее о модели осцилляторов см. в § 44). За счет энергии, полученной, например, в результате очередного соударения с другим атомом, в нем возбуждаются собственные колебания и он, подобно элементарному диполю, излучает в течение некоторого времени  $\tau$  электромагнитную волну, после чего излучение прекращается до следующего возбуждения атома. Волна, испущенная в результате отдельного акта излучения, имеет вид куска монохроматической волны, называемого ц у г о м в о л н. Длина цуга  $l_{ц}$ , очевидно, определяется расстоянием, на которое распространится возмущение за время  $\tau$ :  $l_{ц} = c \tau$ , где  $c$  - скорость света. Соударения атомов носят нерегулярный, хаотический характер, поэтому  $\tau$  и  $l$  являются случайными величинами. Для среднего значения времени отдельного акта излучения  $\bar{\tau}$ , называемого в р е м е н е м к о г е р е н т н о с т и, оценки дают  $\bar{\tau} \approx 10^{-8}$  с и меньше в зависимости от конкретных условий излучения в том или ином источнике. Скорость света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с, так что длина цуга не превышает трех метров (обычно она существенно меньше). Длины волн, соответствующие видимой части спектра, лежат приблизительно в диапазоне  $\lambda = 4 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-4}$  мм, или 400 + 700 нм, или 4000 + 7000 Å ( $1 \text{ \AA} = 10^{-7}$  мм), откуда следует, что в одном цуге укладывается порядка  $10^6$  длин волн. На рис. 96 изображена чисто схематически мгновенная картина волны, идущей от излучающего атома (представлены лишь цуги с определенной длиной волны  $\lambda$ , т.е. соответствующие излучению на определенной частоте).

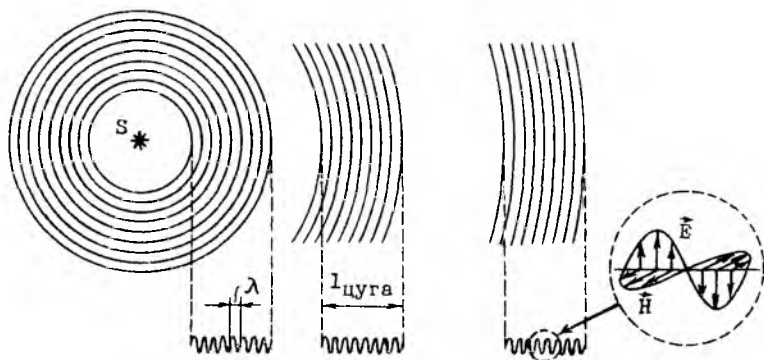


Рис. 96

Прерывный характер излучения света в корне меняет ситуацию, возникающую при наложении волн. Рассмотрим (мысленно) два одинаковых атома источника света и предположим, что из излучаемых ими световых потоков выделены волны практически одинаковой частоты и с одинаковым направлением колебаний. В каждую точку пространства приходят пути волн от обоих атомов и в каждый момент времени интенсивность определяется формулой (16.6), где  $\varphi_1 - \varphi_2$  - разность фаз колебаний, обусловленная этими путями. Через время порядка времени когерентности  $\bar{\tau}$  эти пути пройдут точку наблюдения и на смену им придут следующие, но разность фаз колебаний будет иной: по мере прихода последующих цугов она будет хаотически изменяться вследствие случайного характера испускания цугов атомами. В обычных опытах прибор регистрирует интенсивность, усредненную по времени, в течение которого разность фаз сменится множество раз, приняв с равной вероятностью всевозможные значения от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Беря среднее значение выражения (16.6), находим

$$\bar{I} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (17.1)$$

Среднее значение косинуса оказывается равным нулю ( $\overline{\cos \alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \alpha \, d\alpha = 0$ ), так что, опуская символ усреднения у интенсивностей, имеем

$$I = I_1 + I_2. \quad (17.2)$$

Итак, даже волны, идущие от двух идентичных атомов обычного источника света, не интерферируют вследствие взаимной несогласованности актов излучения. Совершенно очевидно, что по той же причине не возникает интерференция и от большего числа излучающих атомов, а следовательно, от любого числа макроскопических источников света.

Из сказанного следует, что для осуществления интерференции необходимо обеспечить такое согласование фаз колебаний, чтобы при усреднении интерференционный член не обращался в нуль. Если потребовать, чтобы разность фаз была постоянной во времени, то  $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  (среднее значение постоянной величины равно самой этой величине) и формула (17.1) по существу совпадает с формулой (16.6), т.е. в этом случае интерференция не будет принципиально отличаться от интерференции непрерывных гармонических колебаний.

Колебания, у которых одинаковые частоты, одинаковые направления и постоянная во времени разность фаз, называются **когерентными**. Таким образом, интерферируют когерентные колебания. Заметим, что перечисленные условия когерентности не являются абсолютно жесткими: если, например, колебания не строго сонаправлены или разность фаз остается постоянной не в течение всего времени наблюдения (частичная когерентность), то интерференция все равно будет наблюдаться, хотя и не столь отчетливо. Лишь при радикальном нарушении одного из условий (колебания взаимно перпендикулярны или разность фаз меняется со временем хаотически) интерференции не будет и тогда мы говорим, что колебания некогерентны.

Возникает вопрос, как на практике обеспечить необходимое для интерференции постоянство разности фаз колебаний. Один из путей заключается в том, чтобы каким-либо способом согласовать акты излучения света атомами. Это достигается, например, в специальных оптических генераторах - лазерах, получивших в последнее время широкое распространение. Однако, есть другой путь, позволяющий осуществить интерференцию при использовании обычного источника света. Идея состоит в том, чтобы заставить интерферировать не колебания, идущие от разных атомов, а колебания, которые приходили бы в точку наблюдения от одного и того же атома, но разными путями.

Простейший пример - схема, состоящая из источника света и зеркала (рис. 97). В каждую точку пространства, например, *B* от каждого атома *S* источника колебания приходят по двум путям: по прямому лучу  $SB = d_1$  и по лучу  $SAB = d_2$ , отраженному от зеркала. Так как  $d_2 > d_1$ , то колебание, идущее по пути  $d_2$ , будет запаздывать по отношению к колебанию того же цвета, идущему по пути  $d_1$ , на время  $\Delta t = d_2/c - d_1/c = (d_2 - d_1)/c$ , где  $c$  - скорость света. Разность  $d_2 - d_1$  путей, ког-

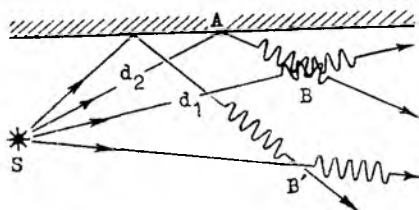


Рис. 97

лерентны, будет запаздывать по отношению к колебанию того же цвета, идущему по пути  $d_1$ , на время  $\Delta t = d_2/c - d_1/c = (d_2 - d_1)/c$ , где  $c$  - скорость света. Разность  $d_2 - d_1$  путей, ког-

рые проходит колебание от источника до места встречи, называется разностью хода лучей.

В тех точках пространства, для которых разность хода лучей меньше длины цуга:

$$|d_2 - d_1| < l_{\text{цуга}} \quad (17.3)$$

(точка  $B$  на рис.97), цуг, приходящий по более длинному пути, еще будет заставлять тот же цуг, приходящий по более короткому пути — "цуг интерферирует сам с собой". При этом разность фаз колебаний, поскольку оба они уходят от источника одновременно, определяется только временем запаздывания  $\Delta t = (d_2 - d_1)/c$  и будет одинаковой для всех последующих цугов, т.е. постоянной во времени (рис.98). Таким образом, в области, для точек которой выполняется условие (17.3), колебания когерентны и интерферируют. Говорят, что здесь имеет место временная когерентность, так как постоянство разности фаз обеспечено малым запаздыванием по времени.

В точках, для которых  $|d_2 - d_1| > l_{\text{цуга}}$  (точка  $B'$  на рис.97), цуг, приходящий по длинному пути, встречается не с тем же цугом, шедшим по короткому пути (как видно из рис.97, тот уже пройдет точку наблюдения), а с одним из последующих цугов, испущенных атомом. При этом, поскольку цуги испускаются беспорядочно во времени, разность фаз складываемых колебаний имеет случайное значение и, следовательно, по мере прихода новых цугов хаотически изменяется. Таким образом, в области, для точек которой условие временной когерентности (17.3) не выполняется, колебания некогерентны и интерференция отсутствует.

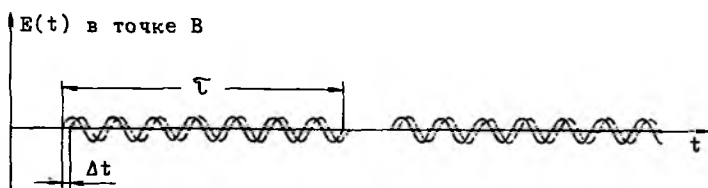


Рис.98

Подведем итог. Для осуществления интерференции необходимо выполнение условий когерентности. В оптике волны, идущие от источников света обычного типа (не лазеров), не интерферируют, так как вследствие прерывного характера и взаимной несогласованности актов излучения отдельных атомов не выполняется условие когерентности о постоянстве разности фаз во времени. Интерференцию тем не менее можно осуществить, заставив интерферировать колебания, идущие от

одного и того же источника, если они, проходя по разным путям, встречаются вновь. При этом интерференция будет наблюдаться лишь в той области пространства, где выполнено условие временной когерентности (17.3). Позже (см. § 21) мы увидим, что размеры источника света накладывают дополнительные жесткие ограничения на возможность наблюдения интерференции.

### § 18. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ КАРТИНА ОТ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА

В любой интерференционной схеме каждый  $i$ -й излучающий атом источника создает свою интерференционную картину с соответствующим распределением интенсивности  $I_i(x, y, z)$  в пространстве, и поскольку колебания, излучаемые разными атомами, не интерферируют, то наблюдаемая интенсивность  $I$  в каждой точке складывается из этих интенсивностей:  $I = \sum I_i$ . Коротче говоря, интерференционная картина от протяженного источника представляет собой простое наложение интерференционных картин, создаваемых его атомами. Так как отдельные картины  $I_i(x, y, z)$ , вообще говоря, пространственно не совпадают (каждая из них зависит от положения создающего ее атома), то в результате их наложения наблюдаемая интерференционная картина может оказаться смазанной или исчезнуть совсем (подробнее см. § 21). Однако, если размеры источника настолько малы, что картины  $I_i$  от всех его  $N$  излучающих атомов практически совпадают, то наблюдаемая интерференционная картина будет иметь тот же вид, что и картина, создаваемая отдельным атомом, но в  $N$  раз интенсивнее ее:  $I = N I_i$ . Такой источник в интерференционной схеме мы будем называть т о ч е ч н ы м .

В природе не существует строго монохроматических волн: даже кажущееся на первый взгляд монохроматическим излучение будет зарегистрировано спектрографом в виде полоски конечной ширины. Это означает, что оно представляет собой не одну монохроматическую волну с определенной частотой, а целую совокупность монохроматических волн, частоты которых лежат в некотором интервале от  $\omega$  до  $\omega + \Delta\omega$  и, соответственно, длины волн — в интервале от  $\lambda + \Delta\lambda$  до  $\lambda$ . Чем меньше эти интервалы, тем выше монохроматичность излучения. В интерференционной схеме каждая монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda_k$ , входящая в состав излучения, создает свою интерференционную картину с соответствующим распределением интенсивности  $I_k(x, y, z)$  в пространстве, и наблюдаемая интерференционная картина будет их простым наложением, поскольку колебания с различными частотами не интерферируют:  $I = \sum I_k$ . Как мы увидим позже (см. § 22), интерференционные

картины, соответствующие разным значениям длины волны, пространственно не совпадают друг с другом, поэтому в результате их наложения наблюдаемая интерференционная картина может оказаться нечеткой или даже исчезнуть совсем. Однако, если степень монохроматичности источника настолько высока, что все картины  $I_k$  в интересующей нас области пространства практически совпадают, то наблюдаемая интерференционная картина не будет существенно отличаться от случая строго монохроматической волны. Такой источник света в интерференционных схемах будем называть монохроматическим.

Хотя два обычных источника света излучают некогерентные колебания, в целом ряде интерференционных схем с одним источником колебания распространяются так, как если бы они шли от двух когерентных источников, т.е. источников, излучающих когерентные колебания. Так, в рассмотренном примере с зеркалом интерферируют две волны: прямая, идущая непосредственно от источника  $S$  и отраженная, идущая от его мнимого изображения  $S'$  в зеркале (рис.107). Поэтому сейчас мы исследуем интерференционную картину, создаваемую двумя точечными монохроматическими источниками света.

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — два такие источника (рис.99). Будем считать фазы колебаний источников одинаковыми, поскольку так обстоит дело в большинстве из рассматриваемых далее в § 20 интерференционных схем, и для простоты положим начальную фазу равной нулю. Согласно формуле монохроматической волны в точку пространства, отстоящую от источников на расстояниях соответственно  $d_1$  и  $d_2$ , приходят колебания напряженности электрического поля от первого ( $E_1$ ) и второго ( $E_2$ ) источников:

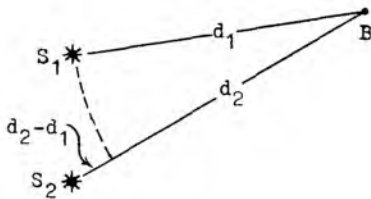


Рис.99

необходимости, так как интенсивность согласно (15.10) вполне определяется квадратом амплитуды напряженности электрического поля волны, которое, кстати, и оказывает основное действие на вещество). Складывая эти колебания (см. аналогичную процедуру на с.126), приходим к формуле (16.6) для интенсивности, где разность фаз

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10} \sin \omega(t - d_1/c) = E_{10} \sin(\omega t - \varphi_1), \text{ где } \varphi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} d_1, \\ E_2 &= E_{20} \sin \omega(t - d_2/c) = E_{20} \sin(\omega t - \varphi_2), \text{ где } \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} d_2 \end{aligned} \quad (18.1)$$

(писать формулы для напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля волн нет необходимости, так как интенсивность согласно (15.10) вполне определяется квадратом амплитуды напряженности электрического поля волны, которое, кстати, и оказывает основное действие на вещество). Складывая эти колебания (см. аналогичную процедуру на с.126), приходим к формуле (16.6) для интенсивности, где разность фаз

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (d_2 - d_1). \quad (18.2)$$



Так как для разных точек пространства разности хода  $d_2 - d_1$ , приходящих сюда лучей, вообще говоря, различны, то согласно (18.2) различны и разности фаз интерферирующих колебаний, а следовательно, и значения интенсивности света. Интенсивности  $I_1 \sim A_1^2$  и  $I_2 \sim A_1^2$  в формуле (16.6) можно считать постоянными, пренебрегая зависимостью амплитуды сферических волн от расстояния, поскольку размеры области, в которой исследуется интерференционная картина, обычно существенно малы по сравнению с расстояниями  $d_1$  и  $d_2$ .

Не вычисляя распределения интенсивности в пространстве, ограничимся нахождением точек, где она имеет максимумы и минимумы. Как следует из (16.6), интенсивность максимальна в точках, в которых  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$ , т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = m 2\pi \quad (\text{колебания синфазные}), \quad (18.3)$$

и минимальна в точках, где  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ , т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2m+1)\pi \quad (\text{колебания в противофазе}), \quad (18.4)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Подставляя эти значения разности фаз в (18.2), получим условия максимумов и минимумов, выраженные через разность хода лучей:

$$\text{условие максимумов:} \quad d_2 - d_1 = m \lambda, \quad (18.5)$$

$$\text{условие минимумов:} \quad d_2 - d_1 = (2m+1) \frac{\lambda}{2}. \quad (18.6)$$

Таким образом, в интерференционной картине максимумы располагаются в тех точках, для которых в разности хода лучей укладывается целое число длин волн, т.е. четное число полуволин, а минимумы — в точках, для которых в разности хода укладывается нечетное число полуволин. Целое число  $m$  в (18.5) называют порядком максимума.

Чтобы наглядно представить себе расположение максимумов и минимумов, для начала только в плоскости чертежа, выпишем подробно условия (18.5) и (18.6), придавая  $m$  всевозможные целые значения и располагая эти формулы по мере возрастания разности хода:

$d_2 - d_1 = 0$	- максимумы 0-го порядка	( $m = 0$ ),
$d_2 - d_1 = \pm \frac{\lambda}{2}$	- минимумы	( $m = 0, -1$ ),
$d_2 - d_1 = \pm \lambda$	- максимумы 1-го порядка	( $m = \pm 1$ ),
$d_2 - d_1 = \pm 3 \frac{\lambda}{2}$	- минимумы	( $m = +1, -2$ ),
и т.д.		

Максимумы нулевого порядка ( $d_1 = d_2$ ) располагаются на оси симметрии схемы, а минимумы и максимумы следующих порядков чередуясь располагаются на гиперболах с фокусами  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 100, где положения максимумов изображены сплошными линиями, а минимумов — штриховыми).

(Напомним, что гиперболой называется кривая, для каждой точки которой разность расстояний до двух фиксированных точек - фокусов гиперболы - есть постоянная величина.)

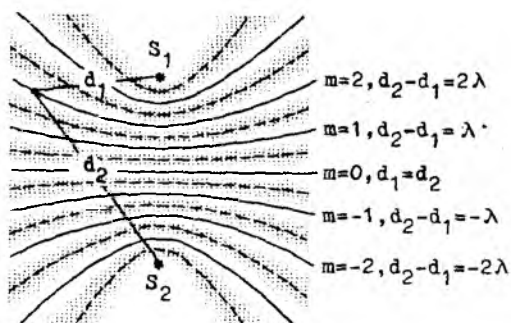


Рис.100

Очевидно, что такое же распределение интенсивности имеет место в любой плоскости, проходящей через ось симметрии схемы  $S_1S_2$ . Следовательно, геометрические места точек с максимумами и минимумами интенсивности представляют собой гиперболоиды вращения - поверхности, которые получаются вращением гипербол, изображенных на рис.100, вокруг оси  $S_1S_2$  (рис.101).

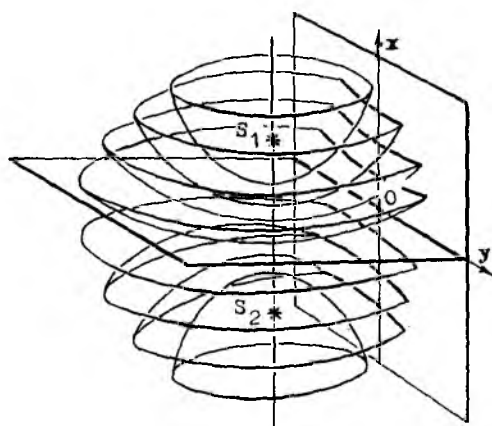


Рис.101

На практике обычно наблюдают распределение интенсивности на некоторой поверхности, располагая здесь экран или фокусируя на эту поверхность оптический прибор или глаз. В плоскости, перпендикулярной линии  $S_1 S_2$ , чередующиеся темные и светлые полосы имеют форму окружностей, а в плоскости, параллельной линии  $S_1 S_2$  (см. вертикальную плоскость на рис.101), вблизи центральной точки  $O$  они приблизительно прямолинейны и параллельны друг другу. Выведем формулы для координат  $y$  этих полос.

Пусть  $l$  - расстояние между источниками  $S_1$  и  $S_2$ ,  $D$  - расстояние от линии  $S_1 S_2$  до экрана, на котором наблюдается интерференция,  $d_1$  и  $d_2$  - расстояния от источников до произвольной точки оси  $y$  на экране (рис.102). Из прямоугольных треугольников с вершинами  $S_1$  и  $S_2$  по теореме Пифагора находим  $d_1^2 = D^2 + (y-1/2)^2$ ,  $d_2^2 = D^2 + (y+1/2)^2$ . Вычитая первое равенство из второго, имеем  $d_2^2 - d_1^2 = 2yl$ , откуда  $y = (d_1 + d_2)(d_2 - d_1) / 2l$ . Если считать, что экран достаточно удален ( $D \gg l$ ) и наблюдение ведется в малой области вблизи центра экрана ( $y \ll D$ ), то  $d_1 \approx d_2 \approx D$ , так что  $d_1 + d_2 \approx 2D$  и, следовательно,

$$y = \frac{D}{l} (d_2 - d_1). \quad (18.7)$$

Подставляя сюда значения разности хода из условий (18.5) и (18.6), получим формулы для координат максимумов и минимумов:

$$y_{\max}^{(m)} = m \lambda \frac{D}{l}, \quad y_{\min}^{(m)} = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \frac{D}{l}. \quad (18.8)$$

Расстояние между соседними максимумами, например,  $m$ -го и  $(m+1)$ -го порядков, равно  $\Delta y = y_{\max}^{(m+1)} - y_{\max}^{(m)} = (m+1) \lambda \frac{D}{l} - m \lambda \frac{D}{l} = \lambda \frac{D}{l}$ .

Такое же выражение получается и для расстояния между соседними минимумами - его называют шириной интерференционной полосы:

$$\Delta y = \lambda \frac{D}{l}. \quad (18.9)$$

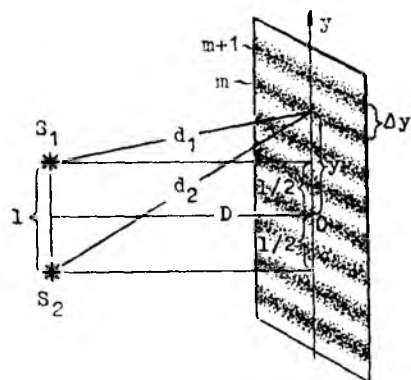


Рис.102

Ширина интерференционной полосы не зависит от порядка, следовательно, светлые и темные полосы на экране располагаются эквидистантно. Принято изображать максимумы темными линиями, как на негативе, что и сделано на рис.102. Из формулы (18.9) следует, что из-за малости длины световой волны ширина интерференционной полосы при реально допустимых значениях  $l$  и  $D$  часто не превышает десятых долей милли-

метра. По этой причине оптическую интерференционную картину обычно наблюдают через окуляр с достаточным увеличением.

В то время как положение максимумов и минимумов определяется разностью фаз интерферирующих колебаний, контрастность интерференционной картины зависит от соотношения их амплитуд. Полагая в формуле (16.5) поочередно  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$  и  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ , найдем значения амплитуды колебаний в максимумах и минимумах:

$$A_{\max} = A_1 + A_2, \quad A_{\min} = |A_1 - A_2| \quad (18.10)$$

Отсюда следует, что если  $A_1 = A_2$ , то  $A_{\max} = 2A_1$  и  $A_{\min} = 0$ . В этом случае минимумы абсолютно темные и контрастность картины максимальна. Если же одна из амплитуд существенно меньше другой, амплитуды в максимумах и минимумах мало отличаются друг от друга и интерференционная картина слабоконтрастна.

### § 19. ОПТИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ ХОДА

В некоторых интерференционных схемах лучи проходят через прозрачные среды с различными показателями преломления. Выясним прежде всего, как ведут себя величины, характеризующие монохроматическую электромагнитную волну, при переходе из одной среды в другую. Круговая частота  $\omega$ , а также обычная частота  $\nu$  и период  $T$ , связанные соотношением  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ , не изменяются за исключением особых случаев. Скорость волны изменяется в соответствии с изменением показателя преломления  $n$ :  $v = \frac{c}{n}$ . Причина такого поведения частоты и скорости станет ясной из дальнейшего, когда будет рассмотрен механизм прохождения световой волны через вещество (§ 44, 45). Следовательно, длина волны  $\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \lambda_0/n$  (где  $\lambda_0 = cT$  — длина волны в вакууме) — изменяется обратно пропорционально показателю преломления (рис.103):

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (19.1)$$

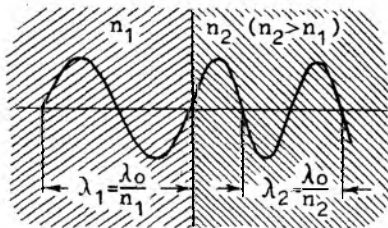


Рис.103

Когда говорят просто о длине волны излучения, подразумевают ее значение  $\lambda_0$  в вакууме.

Если волна распространяется в однородной среде с показателем преломления  $n$ , то время запаздывания  $t' = d/v$  и формулу монохроматической волны можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega(t - t') = \vec{E}_0 \sin \omega \left( t - \frac{d}{v} \right) = \vec{E}_0 \sin \omega \left( t - \frac{dn}{c} \right) = \vec{E}_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{dn}{\lambda_0} \right). \quad (19.2)$$

Отличие от случая вакуума ( $n=1$ ) состоит только в том, что вместо пройденного колебанием геометрического пути  $d$  стоит произведение  $d \cdot n$  длины пути на показатель преломления среды, которое называется **оптическим путем**.

В более общем случае, когда колебание проходит пути  $d_1, \dots, d_k$  в средах с показателями преломления  $n_1, \dots, n_k$  (рис.104), время запаздывания с учетом  $v_i = c/n_i$  равно  $t' = \sum_{i=1}^k d_i/v_i = \sum_{i=1}^k d_i n_i/c$ , и колебание в точке наблюдения определится формулой

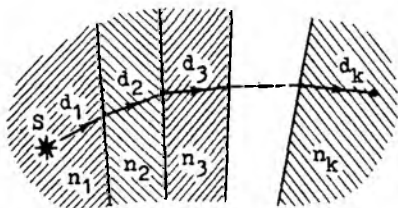


Рис.104

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega(t-t') = \vec{E}_0 \sin \omega(t - \sum d_i n_i / c). \quad (19.3)$$

Таким образом, и здесь отличие от случая вакуума состоит только в замене геометрического пути  $\sum d_i$  на оптический путь  $\sum d_i n_i$ , равный сумме оптических путей, пройденных колебанием. Следовательно, любая формула, полученная как следствие из формулы волны в вакууме, остается справедливой и в нашем более общем случае, если заменить геометрический путь на оптический. Так, в формуле (18.2), связывающей разность фаз с разностью хода, вместо разности путей  $d_2 - d_1$  (геометрическая разность хода) будет стоять разность оптических путей — **оптическая разность хода** (сокращенно **о.р.х.**):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\text{о.р.х.}), \quad (19.4)$$

и, следовательно, условия максимумов и минимумов примут вид

$$\text{о.р.х.} = \begin{cases} m\lambda_0 & \text{— условие максимумов,} \\ (2m+1)\lambda_0/2 & \text{— условие минимумов.} \end{cases} \quad (19.5)$$

Подчеркнем, что в этих формулах  $\lambda_0 = cT$  — длина волны в вакууме.

С понятием оптического пути связано важное свойство линзы: время распространения колебаний между сопряженными точками (точками, где находятся источник света  $S$  и его изображение  $S'$ , рис.105) одно и то же вдоль всех лучей (**таутохронизм**). Таутохронизм линзы объясняется тем, что хотя луч  $SCDS'$  и короче луча  $SABCS'$ , зато распространяющееся по нему колебание больший отрезок пути проходит в толще линзы ( $CD > AB$ ), где скорость волны меньше, чем в вакууме.

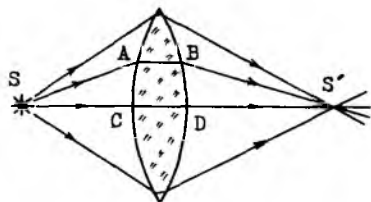


Рис.105

Поскольку время распространения связано с оптическим путем соотношением  $t = \frac{\text{опт. путь}}{c}$ , то из равенства времен вытекает равенство оптических путей:  $SA + ABn + BS' = SC + CDn + DS'$  (показатель преломления воздуха считаем равным единице). Таутохронизм линзы означает, что колебания, приходящие в точку  $S'$  по разным лучам, имеют одинаковые фазы, так что действительное изображение точечного источника представляет собой интерференционный максимум.

## § 20. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Перейдем к описанию конкретных интерференционных схем, которые сводятся при малых размерах источника света и достаточно высокой степени монохроматичности его излучения к рассмотренной в § 18 схеме с двумя когерентными источниками.

Схема Инга. Эта схема состоит из источника света  $S$  и непрозрачного экрана с двумя малыми отверстиями (рис.106). По принципу Гюйгенса каждую точку фронта волны, дошедшего до экрана, можно рассматривать как источник вторичных волн. Так как все вторичные источники, кроме расположенных в пределах отверстий, закрыты экраном, то справа от экрана ситуация такова, как если бы свет распространялся от двух источников, роль которых играют светящиеся отверстия. Эти источники, вообще говоря, когерентны, поскольку они воспроизводят одно и то же колебание, идущее от источника  $S$ , и к тому же синфазны, так как находятся на одной и той же волновой поверхности (предполагается, что отверстия равноудалены от источника). Следовательно, схема Инга сводится к схеме с двумя когерентными источниками, роль которых играют отверстия в экране.

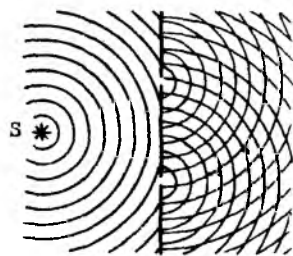


Рис.106

Зеркало Ллойда. Эта схема, упоминавшаяся ранее, состоит из источника света  $S$  и диэлектрического зеркала (рис.107). В ней происходит интерференция волн, одна из которых идет непосредственно от источника  $S$ , а другая - от "источника"  $S'$ , являющегося мнимым изображением источника  $S$  в зеркале.

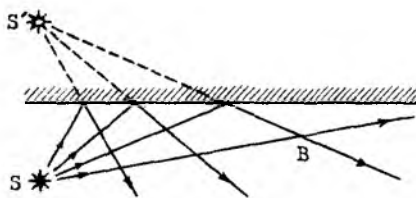


Рис.107

Отметим одну особенность этой схемы, связанную с тем, что при отражении от диэлектрического зеркала фаза волны скачком меняется на  $\pi$  (вектор  $\vec{E}$  меняет знак). Формально это изменение фазы можно учесть, считая, что колебания от источника  $S'$  проходят дополнительный путь  $\lambda/2$  (это непосредственно следует из формулы (18.2)), так что к разности хода добавится  $\lambda/2$ . Теперь условия максимумов и минимумов примут вид:

условия максимумов:  $(d_2 + \lambda/2) - d_1 = m\lambda$ , откуда  $d_2 - d_1 = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$ ,  
 условия минимумов:  $(d_2 + \lambda/2) - d_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ , откуда  $d_2 - d_1 = m\lambda$ ,

т.е. максимумы и минимумы меняются местами - картина смещена на половину ширины интерференционной полосы.

**Бизеркала Френеля.** В этой схеме источник света  $S$  помещается перед двумя соприкасающимися плоскими зеркалами (1 и 2), плоскости которых образуют малый угол (рис.108). Волна, идущая от источника, отражается от зеркал в виде двух волн, идущих от мнимых изображений  $S_1$  и  $S_2$  источника  $S$  в обоих зеркалах. Интерференцию можно наблюдать в области, где пучки отраженных лучей перекрываются (на рисунке заштрихована). В этой схеме учитывать изменение фазы при отражении не надо, так как на  $\pi$  изменяются фазы обоих интерферирующих колебаний и на разности фаз это не отразится.

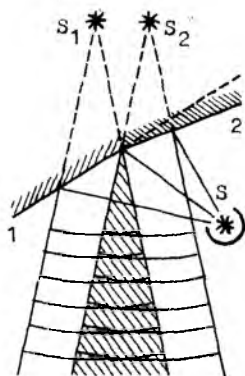


Рис.108

**Бипризма Френеля.** Бипризма представляет собой призму, сечением которой является равнобедренный треугольник с очень малыми углами при основании (рис.109). Если на большую грань бипризмы направить свет от источника  $S$ , то в результате двукратного преломления лучей исходная волна преобразуется в две, идущие от боковых граней бипризмы. Если падающий пучок лучей достаточно узкий, то в каждом из преломленных пучков продолжения лучей пересекаются в одной точке, т.е. бипризма дает два мнимых изображения  $S_1$  и  $S_2$  источника  $S$ .

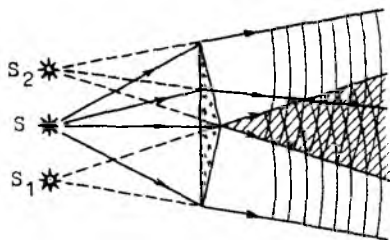


Рис.109

Следовательно, эта схема также сводится к схеме с двумя когерентными источниками. Интерференция может наблюдаться в области перекрывания преломленных пучков лучей (на рисунке заштрихована).

**Билинза Бийе.** В этой схеме используется собирательная линза, у которой двумя параллельными разрезами выпилена средняя часть, а две оставшиеся одинаковые доли линзы несколько сдвинуты или раздвинуты. Если на билинзу направить свет от источника, то два пучка лучей, возникающие при прохождении исходным пучком обеих долей билинзы, могут интерферировать.

На рис.110 представлен случай, когда доли билинзы раздвинуты и источник  $S$  находится дальше фокусного расстояния от билинзы. Интерферирующие лучи можно считать исходящими из когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$ , являющихся действительными изображениями источника  $S$  в долях билинзы.

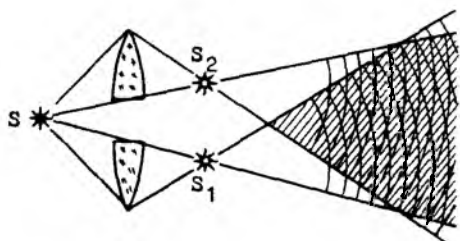


Рис.110

### § 21. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКА СВЕТА НА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННУЮ КАРТИНУ

Вопрос о влиянии размеров источника на интерференционную картину обсудим на конкретном примере схемы Юнга, в которой источник будем считать протяженным сначала в направлении оси  $y$  (рис.111).

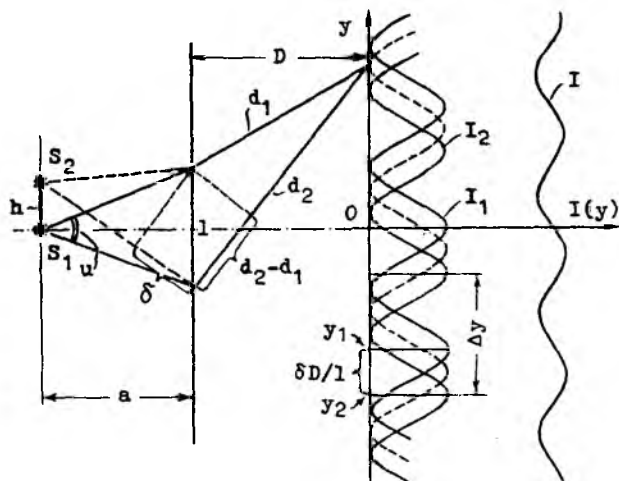


Рис.111

На этом рисунке  $h$  - длина источника света,  $a$  - расстояние от источника до экрана с отверстиями,  $l$  - расстояние между отверстиями,  $u$  - угол расхождения интерферирующих лучей при их выходе из источника - так называемая **апертура интерференции**;



остальные обозначения уже использовались ранее и их смысл ясен из рисунка. Рассмотрим два атома  $S_1$  и  $S_2$ , расположенные у противоположных краев источника. Ясно, что их интерференционные картины не совпадают: для некоторой точки  $y$  экрана разность хода (р.х.) лучей, приходящих сюда от атома  $S_1$ , равна  $d_2-d_1$ , в то время как для лучей, идущих от атома  $S_2$ , она равна  $(d_2-d_1)+\delta$ , так как до отверстий возникает дополнительная разность хода  $\delta$ . Найдем координаты  $y_1^{(m)}$  и  $y_2^{(m)}$  максимумов  $m$ -го порядка в картинах первого и второго атомов, выражая  $d_2-d_1$  из условия максимума (р.х. =  $m\lambda$ ) и подставляя в формулу (18.7):

$$y_1^{(m)}: \text{р.х.} = d_2-d_1 = m\lambda \rightarrow y_1^{(m)} = m\lambda \frac{D}{l},$$

$$y_2^{(m)}: \text{р.х.} = (d_2-d_1) + \delta = m\lambda \rightarrow d_2-d_1 = m\lambda - \delta \text{ и } y_2^{(m)} = y_1^{(m)} - \delta D/l.$$

Таким образом, вторая картина смещена относительно первой вниз на расстояние  $\delta D/l$ . На рис. 111 кривые распределения интенсивности в картинах первого ( $I_1(y)$ ) и второго ( $I_2(y)$ ) атомов проведены сплошными линиями, а интерференционные картины от прочих атомов источника, располагающиеся, очевидно, между этими кривыми, символически изображены одной штриховой линией. Суммируя все кривые, найдем результирующее распределение интенсивности  $I(y)$  (жирная кривая).

Мы видим, что в результате наложения несовпадающих картин от отдельных атомов наблюдаемая интерференционная картина оказывается менее контрастной (в минимумах  $I \neq 0$ ). По мере увеличения протяженности источника смещение  $\delta D/l$  крайних картин растет, контрастность уменьшается, и когда это смещение станет равным ширине интерференционной полосы  $\Delta y$ , минимумы исчезнут и интерференционная картина пропадет ( $I(y) \cong \text{const}$ ). Условно можно считать, что интерференционная картина еще достаточно отчетлива, если смещение  $\delta D/l$  не превышает четверти ширины интерференционной полосы:  $\delta D/l \leq \Delta y/4$ . Подставляя сюда вместо  $\Delta y$  его выражение (18.9) и используя соотношение  $u = l/a$  (апертура интерференции  $u$  предполагается малой) и  $h = a \delta/l$  (эта формула непосредственно вытекает из (18.7), если заметить из рис. 111, что геометрические построения слева и справа от экрана с отверстиями носят одинаковый характер, причем величинам  $y$ ,  $D$  и  $(d_2-d_1)$  справа соответствуют  $h$ ,  $a$  и  $\delta$  слева), найдем:

$$h \leq \frac{\lambda}{4u}. \quad (21.1)$$

Это условие весьма жестко ограничивает допустимые размеры источника. Так, при размере источника всего лишь в одну десятую долю миллиметра находим, полагая  $\lambda \approx 5 \cdot 10^3$  мкм, для максимально допустимой апертуры интерференции  $u \approx 10$  радиан. Это означает, что при расстоянии между отверстиями  $l \approx 1$  мм расстояние от источника до экрана должно быть не менее  $a \approx 1$  м.

Совсем иначе сказывается на интерференции протяженность источника в перпендикулярном направлении (рис. 112): смещение атома вдоль оси  $x$  не вносит дополнительной разности хода, поэтому все атомы, расположенные по оси  $x$ , дают на экране совпадающие интерференционные картины. Таким образом, увеличение протяженности источника в этом направлении, не ухудшая контрастности картины, делает ее более яркой. Поэтому во многих интерференционных схемах роль источника играет узкая светящаяся щель в кожухе лампы.

Если условие (21.1) выполнено и, следовательно, размеры источника света не препятствуют возникновению интерференционной картины, говорят, что имеет место пространственная когерентность.

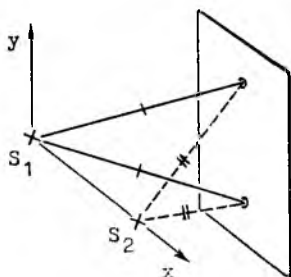


Рис. 112

## § 22. ВЛИЯНИЕ НЕМОНОХРОМАТИЧНОСТИ ИСТОЧНИКА СВЕТА НА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННУЮ КАРТИНУ

Пусть в какой-либо интерференционной схеме, сводящейся к схеме с двумя когерентными источниками, в состав излучения источника входят монохроматические волны с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Согласно формулам (18.8) и (18.9) интерференционные картины для волн с различными длинами волн неодинаковы: с ростом  $\lambda$  увеличивается ширина интерференционной полосы  $\Delta y = \lambda D/l$  ( $\Delta y_{\lambda + \Delta\lambda} > \Delta y_{\lambda}$ ).

На рис. 113 сплошными линиями представлены графики распределения интенсивности  $I_{\lambda}(y)$  и  $I_{\lambda + \Delta\lambda}(y)$  для граничных значений длин волн  $\lambda$  и  $(\lambda + \Delta\lambda)$ . Между этими кривыми непрерывно располагаются кривые интенсивности для промежуточных длин волн — они схематически изображены штриховыми линиями. Поскольку колебания с различными частотами не интерферируют, наблюдаемая картина будет представлять собой простое наложение этих картин — суммарная интенсивность  $I(y)$  изображена жирной кривой. Как видно из рисунка, с ростом порядка максимум кривой  $I_{\lambda + \Delta\lambda}$  все дальше уходит от максимума того же порядка кривой  $I_{\lambda}$ , приближаясь к

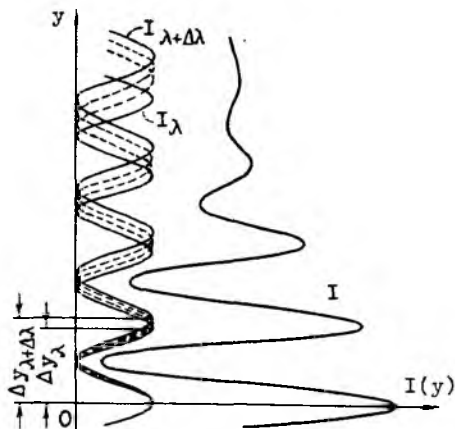


Рис. 113

ее максимуму следующего порядка — это приводит к постепенному уменьшению контрастности наблюдаемой картины. Наконец, максимум некоторого порядка  $m$  картины  $I_{\lambda + \Delta\lambda}$  догонит максимум порядка  $(m + 1)$  картины  $I_{\lambda}$ , и начиная с этого места минимумы в интерференционной картине будут отсутствовать.

Оценим этот порядок  $m$ . Согласно формуле (18.8) координаты  $y$  интересующих нас максимумов запишутся в виде  $y_{\lambda + \Delta\lambda}^m = m D (\lambda + \Delta\lambda) / l$ ;  $y_{\lambda}^{m+1} = (m+1) D \lambda / l$ . Приравнявая эти координаты, находим

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (22.1)$$

Если излучение источника настолько монохроматично, что входящие в его состав монохроматические волны практически не различимы по цвету, т.е.  $\Delta\lambda \ll 50 \text{ \AA}$  ( $\Delta\lambda \approx 50 \text{ \AA}$  — приблизительная ширина спектрального интервала каждого из семи цветов видимого спектра), то интерференционная картина будет одноцветной. В этом случае, начиная с порядка, определяемого формулой (22.1), вместе с исчезновением минимумов исчезает всякая интерференционная картина — далее будет простирается равномерное световое поле одинаковой яркости и цвета.

Если же излучение существенно немонахроматично ( $\Delta\lambda$  заметно превышает  $50 \text{ \AA}$ ), то интерференционная картина будет цветной. Цвет в каждой точке картины определится в результате наложения интерференционных картин  $I_{\lambda}$ , создаваемых всеми монохроматическими волнами, входящими в состав излучения (он будет такой, какой получится при смешении красок, имеющих чисто спектральные цвета, если каждую, со-

ответствующую  $\lambda_1$ , взять в количестве, пропорциональном значению  $I_{\lambda_1}$  в точке наблюдения). В этом случае порядок (22.1), определяющий исчезновение минимумов, не означает конца видимой картины - она может простираться существенно дальше в виде чередования цветных полос при одинаковой суммарной интенсивности  $I = \sum I_{\lambda}$  в каждой точке.

Для грубой оценки порядка  $m'$ , определяющего конец этой цветной картины, в формуле (22.1) следует положить  $\Delta\lambda = 50\text{\AA}$  и в качестве  $\lambda$  взять максимальную длину волны  $\lambda + \Delta\lambda$  интервала.

Условие (22.1) можно представить как ограничение на разность хода: выражая  $m$  из формулы (18.5) и подставляя в (22.1), имеем  $|d_2 - d_1| < \lambda^2 / \Delta\lambda$  (выражение  $\lambda^2 / \Delta\lambda$  называется длиной когерентности). Ранее мы уже имели условие, ограничивающее допустимую разность хода, - условие временной когерентности (17.3):  $|d_2 - d_1| < l_{\text{цуга}}$ . Можно показать, что  $l_{\text{цуга}} = \lambda^2 / \Delta\lambda$ , т.е. условия (17.3) и (22.1) физически эквивалентны. Конечность длины цугов означает некогерентность излучения: чем короче цуги, тем менее монохроматично излучение, и наоборот при  $l_{\text{цуга}} \rightarrow \infty$  мы получаем в пределе монохроматическую волну.

Теперь, когда мы выяснили, какую роль в интерференции играют размеры источника света и его некогерентность, можно сделать общий вывод: интерференция в оптике наблюдается при наложении двух (или большего числа) волн, идущих от одного и того же реального источника света, причем лишь в тех областях пространства, в которых имеет место пространственная и временная когерентность.

### § 23. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

Часто можно наблюдать, что тонкие прозрачные пленки (например, пролитое на асфальте масло, мыльные пузыри, пленки окисла на поверхности металла и т.д.) приобретают радужную окраску - это явление обусловлено интерференцией света.

Пусть свет от источника  $S$ , который будем считать точечным и монохроматическим (роль размеров и степени монохроматичности источника в рассматриваемом явлении обсуждается далее - см. мелкий шрифт в конце параграфа), падает на поверхность прозрачной пленки, которая изображена на рис.114 в сечении плоскостью чертежа. Лучи частично отражаются от поверхности пленки, обращенной к источнику (лучи  $1'$ ,  $2'$  и т.п.),

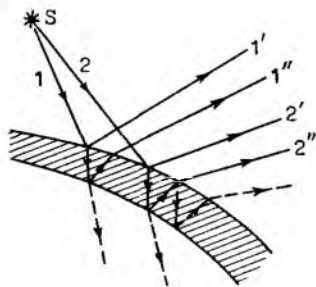


Рис.114

а частично проходят в толщу пленки, отражаются от другой ее поверхности и, снова преломившись, выходят наружу (лучи  $1''$ ,  $2''$  и т.п.). Лучи, прошедшие пленку насквозь, при наблюдении интерференции в отраженном свете не попадут в поле зрения, а лучи, испытавшие многократные отражения, мы учитывать не будем, поскольку вследствие малости коэффициента отражения их интенсивность ничтожно мала (те и другие изображены штриховой линией).

Таким образом, в области над поверхностью пленки происходит наложение двух волн, образовавшихся в результате отражения исходной волны от обеих поверхностей пленки. Это, однако, не означает, что в реальных условиях интерференция будет наблюдаться во всей области. Можно показать (см. мелкий шрифт в конце параграфа), что в случае протяженного источника оптимальные условия интерференции существуют для той пары лучей, которая образуется из одного и того же падающего луча (пары 1' -1", 2' -2" и т.п.). Поэтому на практике четкая интерференционная картина обычно наблюдается только вблизи той поверхности, на которой встречаясь интерферируют именно эти пары лучей; иными словами, интерференционная картина оказывается локализованной на этой поверхности.

В случае, представленном на рис.114, интересующие нас лучи расходятся, так что интерференционная картина локализована на поверхности, где пересекаются мысленные продолжения этих лучей, а для наблюдения интерференции лучи необходимо собрать, поставив на их пути собирающую линзу, и за ней на соответствующем расстоянии экран для наблюдений (рис.117). Можно, конечно, наблюдать интерференционную картину иначе, например, непосредственно невооруженным глазом или через микроскоп при условии, что они сфокусированы на поверхность локализации интерференционной картины.

Вычислим оптическую разность хода интерферирующих лучей, считая для простоты расчеты пленку плоскопараллельной (рис.115). Формула, которую мы получим, будет приблизительно справедлива и для неплоскопараллельной пленки, если ее толщина плавно изменяется от точки к точке и угол падения лучей невелик.

Разность хода приобретает лучами 1' и 1" начиная с точки А, где исходный падающий луч 1 разделяется на два, и кончая линией CD, перпендикулярной интерферирующим лучам, поскольку далее до места встречи колебаний на экране их оптические пути равны в силу таутохронизма линзы. Как видно из рис.115,

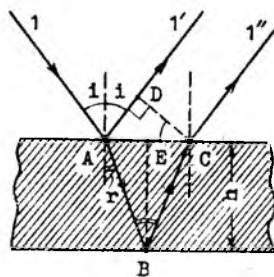


Рис.115

$$\text{о.р.х.} = (AB + BC) \cdot n - AD, \quad (23.1)$$

$n$  — показатель преломления вещества пленки.

Учитывая равенство углов, помеченных одинаковыми дугами, и используя закон преломления  $\sin i / \sin r = n$ , находим из треугольников:

$$AB = BC = h / \cos r = h / \sqrt{1 - \sin^2 r} = h / \sqrt{1 - \sin^2 i / n^2} = n h / \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

$$AC = AE + EC = 2h \operatorname{tg} r,$$

$$AD = AC \sin i = 2h \operatorname{tg} r \sin i = 2h \sin^2 i / \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

где  $i$  - угол падения лучей,  $h$  - толщина пленки. Подставляя эти выражения в формулу (23.1), имеем

$$\text{о.р.х.} = 2h n^2 / \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - 2h \sin^2 i / \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 i} .$$

Так как при отражении от оптически более плотной среды (в точке А) колебания вектора  $E$  меняют фазу на противоположную, а при отражении от менее плотной (в точке В) - не меняют фазы, то у интерферирующих колебаний возникает добавочная разность фаз  $\pi$ . Чтобы учесть ее, к оптической разности хода следует добавить  $\lambda/2$  (см. аналогичную ситуацию на с.139). Итак,

$$\text{о.р.х.} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda/2. \quad (23.2)$$

Таким образом, для однородной пленки оптическая разность хода зависит от двух факторов: угла падения луча  $i$  и толщины пленки  $h$  в месте падения луча. Рассмотрим два частных случая, в которых обеспечивается постоянство одной из этих величин и оптическая разность хода становится зависящей только от одной переменной  $i$  или  $h$ .

Полосы равного наклона. Пусть пленка плоскопараллельная (рис.116). В этом случае интерферирующие лучи параллельны, поэтому экран следует расположить в фокальной плоскости линзы и наблюдаемая на нем картина будет изображением интерференционной картины, локализованной в бесконечности. Поскольку толщина пленки  $h$  всюду одинакова, то оптическая разность хода (23.2) зависит только от угла падения  $i$ , т.е. от наклона падающих лучей. Поэтому для всех пар лучей с одинаковым углом наклона к поверхности пленки (они располагаются по конусу) оптические разности хода одинаковы, и в результате интерференции этих лучей на экране возникает линия, вдоль которой интенсивность постоянна.

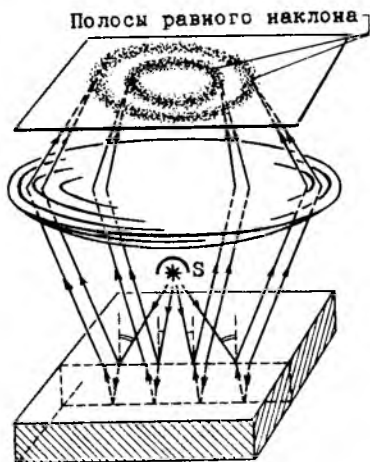


Рис.116

С ростом угла падения разность хода непрерывно уменьшается, периодически становясь равной то четному, то нечетному числу полу-волн, и в соответствии с этим на экране наблюдается картина в виде чередования светлых и темных полос (при расположении линзы и экрана

параллельно поверхности пленки они имеют форму окружностей). Их называют полосами равного наклона, так как каждая из них образована лучами, имеющими одинаковый наклон.

Полосы равной толщины. Пусть теперь пленка неоднородна по толщине, но все лучи падают на нее под одинаковыми углами (рис.117).

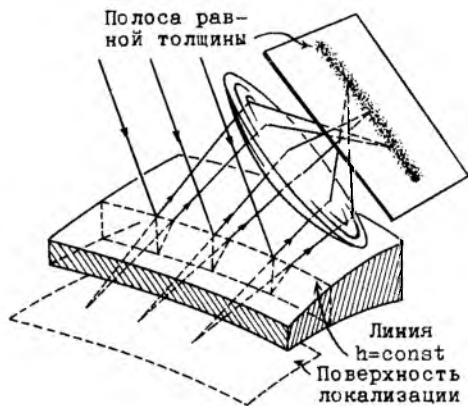


Рис.117

С ростом толщины пленки оптическая разность хода лучей непрерывно растет, поочередно становясь равной то четному, то нечетному числу полуволн, и в соответствии с этим на экране возникает чередование светлых и темных полос. Их называют полосами равной толщины, поскольку каждая из них образована лучами, идущими от тех мест поверхности пленки, где толщина одинакова.

Если пленка имеет вид клина, то при соответствующем расположении линзы и экрана полосы равной толщины представляют собой эквидистантные прямые, параллельные ребру клина.

В другой известной схеме, изучавшейся еще Ньютоном, роль тонкой пленки играет воздушный зазор между плосковыпуклой линзой и подставкой, на которой она лежит (рис.118). Здесь полосы равной толщины представляют собой систему концентрических окружностей ("кольца Ньютона").

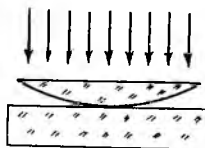


Рис.118

Для наблюдения интерференции в пленках важнейшую роль играют размеры источника света и степень монохроматичности его излучения.

Протяженность источника приводит к локализации интерференционной картины. В случае точечного источника локализация отсутствует, т.е. интерференционную картину в принципе можно наблюдать при любом положении экрана, каждому из которых соответствует своя апертура интерференции. Если, например, расположить экран так, чтобы на нем

ходились не пары 1'-1", 2'-2", как мы условились вначале, а пара 1'-2' (или 1"-2"), то апертурой интерференции будет угол между лучами 1 и 2 (см. рис. 114). Как мы видели (формула (21.1)), допустимый размер источника тем больше, чем меньше апертура интерференции  $u$ . Поэтому для существенно протяженного источника (например, когда на пленку падает свет со всех сторон) интерференция может наблюдаться практически лишь для лучей с  $u = 0$ , т.е. для лучей, образовавшихся из одного и того же падающего на пленку луча, и интерференционная картина будет локализована на соответствующей поверхности — именно эту ситуацию мы имели в виду с самого начала параграфа.

Немонохроматичность излучения существенно ограничивает допустимую толщину пленки. Дело в том, что порядок интерференционных максимумов зависит от толщины пленки (условие максимумов согласно (19.5) и (23.2) имеет вид  $2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda/2 = m\lambda$ ), так что для не слишком тонких пленок можно было бы наблюдать лишь интерференционные полосы очень высокого порядка  $m$ . Но с ростом порядка интерференции интерференционная картина смазывается за счет немонохроматичности источника (см. § 22). Поэтому наблюдать интерференцию при существенно немонохроматическом источнике удастся только в очень тонких пленках. Так, например, при наблюдении в белом свете допустимая толщина пленки, как показывает оценка, не может превышать нескольких десятков нанометров. При использовании в качестве источника света лазера, у которого степень монохроматичности чрезвычайно высока, можно наблюдать интерференцию в прозрачных пластинках толщиной в несколько сантиметров.

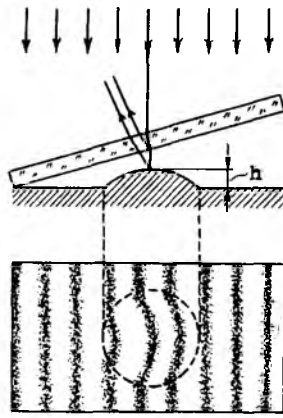
Явление интерференции в тонких пленках нашло практическое применение в создании "просветленной оптики". На поверхности линз оптических приборов, например фотоаппарата, наносится тонкая пленка прозрачного вещества, толщина и показатель преломления которой подбираются с таким расчетом, чтобы отраженные от ее поверхностей волны интерферируя эффективно гасили друг друга. Уменьшая таким образом потери на отражение, удастся заметно повысить световой поток, проходящий через линзу.

#### § 24. ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Интерференция света находит широкое практическое применение: интерференционные методы позволяют с высокой точностью измерять длину, контролировать ровность поверхности, определять показатель преломления вещества и т. д. Для этих целей используют специальные приборы и н т е р ф е р о м е т р ы. Не останавливаясь на их устройстве (интерферометры различных конструкций подробно описаны в учебной литературе), поясним лишь принципиальную сторону дела.

Пусть в некоторой интерференционной схеме, в которой используется источник света с длиной волны излучения  $\lambda$ , каким-либо способом изменили оптическую разность хода (о.р.х.) интерферирующих лучей на величину  $\Delta$ . Это приведет к смещению интерференционной картины. Как следует из условий (19.5), изменение о.р.х. на  $\lambda$  приводит к изменению порядка на единицу, т.е. к смещению картины на одну интерференционную полосу. Следовательно, смещение картины на  $N$  полос соответствует изменению о.р.х. на величину  $\Delta = N\lambda$ . Вполне реально зарегистрировать смещение интерференционной картины на одну десятую долю ширины полосы, так что интерференционный метод позволяет измерить изменение о.р.х. на величину порядка  $\Delta \cong 0,1 \lambda \cong 5 \cdot 10^{-5}$  мм. Изменение о.р.х. может возникнуть, если для одной из интерферирующих волн изменилась либо длина пути, либо показатель преломления среды, через которую она проходит. Проиллюстрируем оба случая.

Для контроля ровности некоторой поверхности на нее накладывают прозрачную, с высокой степенью точности плоскопараллельную пластинку, слегка прижимая один из ее краев. Тогда тонкая воздушная прослойка между нижней стороной пластинки и исследуемой поверхностью будет иметь форму клина (рис.119, угол клина сильно преувеличен). При освещении сверху параллельным пучком лучей можно наблюдать возникающие вследствие интерференции на этой прослойке полосы равной толщины, параллельные ребру клина. Если на исследуемой поверхности имеется бугорок высотой  $h$ , то пути лучей, отраженных от поверхности бугорка, уменьшатся (для луча, отраженного от вершины, - на  $2h$ , для других лучей - на меньшую величину). На столько же уменьшатся разности хода интерферирующих лучей ( $\Delta \approx 2h$ ), и в результате в соответствующем месте интерференционной картины произойдет смещение полос - вид интерференционной картины дан на рис.119 внизу. С учетом сделанной выше оценки минимальная толщина выступа, которую можно зарегистрировать этим методом,



$h = \Delta/2 \approx 2 \cdot 10^{-5}$  мм. Такого же порядка будет погрешность, с которой интерференционными методами можно измерять длину.

Рис.119

Для измерения показателя преломления, в специальных приборах - интерференционных рефрактометрах - один из пучков интерферирующих лучей заставляют пройти некоторый путь  $d$  в веществе с известным показателем преломления  $n$ , а второй пучок лучей - такой же путь  $d$  в веществе с неизвестным показателем преломления  $n_x$ . За счет разницы в показателях преломления лучи приобретают дополнительную оптическую разность хода  $\Delta = d(n - n_x)$ , и по смещению интерференционной картины можно определить  $n_x$ . При пути  $d = 50$  см находим для минимальной разности  $|n - n_x|$ , которую можно измерить,  $|n - n_x| \approx \Delta/d \approx 10^{-7}$ .

Упомянем в заключение, что явление интерференции лежит в основе метода получения объемных изображений предметов - оптической голографии. С изобретением лазера голографические методы исследования получили широкое развитие.



## ДИ Ф Р А К Ц И Я С В Е Т А

## § 25. ПОНЯТИЕ О ДИФРАКЦИИ СВЕТА

Чтобы дать представление о дифракции света, рассмотрим такой опыт. На пути лучей, идущих от точечного монохроматического источника света, поставим непрозрачный экран с круглым отверстием, а за ним - экран для наблюдений (рис.120). Руководствуясь представления-

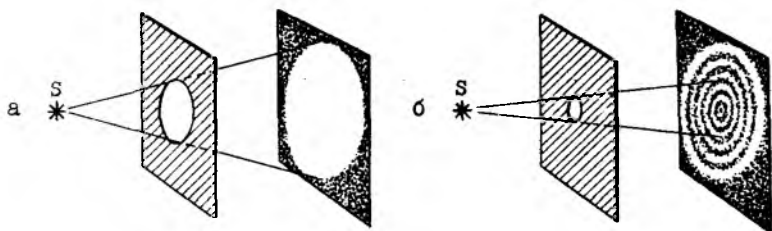


Рис.120

ми геометрической оптики, мы ожидали бы увидеть на экране светлый круг в области, куда попадают прямые лучи от источника, и полную тень вне этого круга (рис.120,а). Однако, если радиус отверстия достаточно мал или экран для наблюдений достаточно удален, то наблюдаемая картина выглядит совершенно иначе: она представляет собой чередование светлых и темных концентрических колец (рис.120,б). При этом в области, которая по законам геометрической оптики должна быть освещена, окажутся темные места, и наоборот в области геометрической тени будут места с заметной освещенностью. С увеличением радиуса отверстия наблюдаемая картина изменяется, приближаясь к той, которая следует из законов геометрической оптики. Суть дела не изменится, если вместо экрана с круглым отверстием взять другое препятствие малых размеров - изменится лишь форма темных и светлых полос на экране.

Отклонения от закона прямолинейного распространения света, проявляющиеся при наличии препятствий на пути световой волны, называют д и ф р а к ц и е й с в е т а , а возникающее при дифракции распределение интенсивности в пространстве - д и ф р а к ц и о н - н о й к а р т и н о й . Это определение не следует понимать в том смысле, что закон прямолинейного распространения света - строгий закон, а дифракция - некое аномальное явление. Напротив, дифракция, как прямое следствие волновой природы света, имеет место всегда,

при любом ограничении световых пучков. Лишь при некоторых условиях (обычно, когда размеры препятствия существенно больше длины световой волны) дифракция оказывается незначительной настолько, что ей можно пренебречь.

## §26. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА - ФРЕНЕЛЯ

Строгое решение дифракционных задач может быть дано только на основе теории электромагнетизма Максвелла и существенно выходит за рамки курса общей физики. Поэтому при изучении дифракции мы будем пользоваться теорией, на основе которой Френель в первой половине XIX века блестяще объяснил известные тогда оптические дифракционные явления. Можно показать, что эта теория является в известном приближении прямым следствием уравнений Максвелла.

В основе теории Френеля лежит так называемый принцип Гюйгенса - Френеля. Напомним, что согласно известному принципу Гюйгенса всякая волна распространяется так, как если бы каждая точка пространства, до которой доходит возмущение, сама становилась источником вторичных сферических волн.

Принцип Гюйгенса позволяет проследить за распространением фронта волны и построить его мгновенные положения в пространстве, т.е. семейство волновых поверхностей.

Пусть  $\Sigma_t$  - волновая поверхность, описывающая положение фронта волны в момент времени  $t$  (рис.121). В течение последующего малого промежутка времени  $\Delta t$  возмущение распространится от каждой точки этой поверхности как от вторичного источника в виде вторичной сферической волны на расстояние  $v(x, y, z)\Delta t$ , где  $v(x, y, z)$  - скорость волны в соответствующей точке  $x, y, z$  пространства. Огибающая  $\Sigma_{(t+\Delta t)}$  всех фронтов вторичных волн определит другую волновую поверхность, описывающую положение фронта в момент  $t+\Delta t$ .

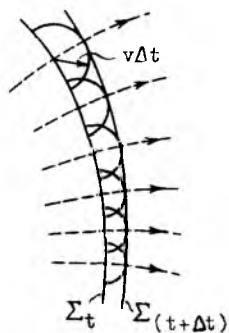


Рис.121

В изотропной среде световые лучи представляют собой по определению линии, всюду перпендикулярные волновым поверхностям (на рис.121 изображены штриховыми линиями). В геометрической оптике предполагается, что эти лучи и представляют собой те направления, вдоль которых распространяется световая энергия. Однако это предположение оказывается верным только тогда, когда дифракцией можно пренебречь. Поэтому для объяснения дифракции от него нужно отказаться и последовательно поставить вопрос о нахождении интенсивности, что и было сделано Френелем.

Рассмотрим воображаемую замкнутую поверхность  $\Sigma$ , окружающую точечный источник света  $S$  (рис.122,а). Возмущения, доходя до точек этой поверхности, будут распространяться далее согласно принципу Гюйгенса, как от совокупности вторичных источников, заполняющих поверхность  $\Sigma$ . В каждую точку пространства, например  $B$ , придут возмущения от этих источников и результат их сложения определит возмущение, а следовательно, и интенсивность в рассматриваемой точке. Идея Френеля состоит в том, что вторичные источники, поскольку они воспроизводят одно и то же возмущение, приходящее от источника  $S$ , нужно считать когерентными, так что вторичные волны должны интерферировать. Окончательно принцип Гюйгенса - Френеля сформулируем так: интенсивность света в пространстве вокруг точечного источника можно рассчитать как результат интерференции световых волн, распространяющихся от совокупности когерентных вторичных источников, заполняющих окружающую источник поверхность.

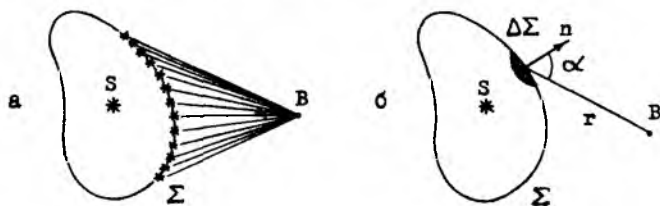


Рис.122

Используя принцип Гюйгенса - Френеля для объяснения дифракционной картины, необходимо учитывать ряд обстоятельств. Во-первых, следует считать, что вторичные источники заполняют поверхность непрерывно и равномерно, так что амплитуда колебания, идущего от малого участка поверхности  $\Sigma$ , пропорциональна площади  $\Delta\Sigma$  этого участка (рис.122,б). Во-вторых, поверхность  $\Sigma$ , как и всякая светящаяся поверхность, излучает в разных направлениях неодинаково: чем больше угол  $\alpha$  между направлением излучения и нормалью  $\vec{n}$  к элементу  $\Delta\Sigma$ , тем меньше амплитуда колебания, посылаемого в этом направлении. В-третьих, поскольку амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$  от источника, то колебания, приходящие в точку наблюдения от более удаленных участков поверхности  $\Sigma$ , будут иметь меньшую амплитуду. Заметим также, что в качестве поверхности  $\Sigma$  удобно выбирать волновую поверхность, так как при этом вторичные источники имеют одинаковые фазы.

Аналитический расчет дифракционных картин довольно сложен, поэтому, применяя принцип Гюйгенса - Френеля, мы будем пользоваться

полукачественными, но зато простыми и наглядными методами – методом зон Френеля и методом векторных диаграмм.

### § 27. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ

Если источник света точечный, а среда однородная и изотропная, то волновые поверхности имеют сферическую форму. Выберем в качестве поверхности, фигурирующей в принципе Гюйгенса – Френеля, одну из них ( $\Sigma$  на рис.123) и будем считать ее непрерывно заполненной когерентными вторичными источниками. Френель предложил для каждой точки наблюдения ( $B$  на рис.123) разбивать эту поверхность на отдельные участки – их называют з о н а м и Ф р е н е л я – с таким расчетом, чтобы колебания, приходящие от двух соседних зон, при сложении гасили друг друга.

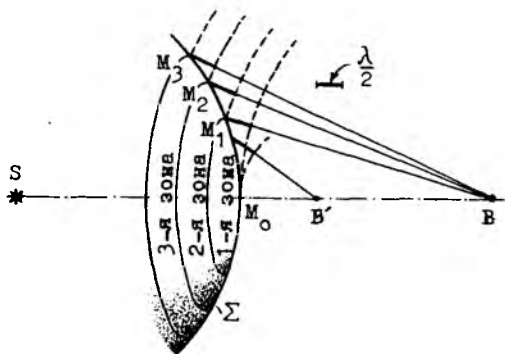


Рис.123

Чтобы обеспечивалась необходимая для этого противоположность фаз колебаний, расстояния от соседних зон до точки наблюдения должны отличаться на половину длины волны  $\lambda$ . Это условие приводит к следующему способу построения зон Френеля: проводим на выбранной сфере окружности так, чтобы каждая последующая отстояла от точки наблюдения на  $\lambda/2$  дальше предыдущей:  $M_1B = M_0B + \lambda/2$ ,  $M_2B = M_1B + \lambda/2, \dots$  (рис.123). Кольцеобразные участки сферы, заключенные между соседними окружностями, и представляют собой зоны Френеля для точки наблюдения  $B$  (первая зона имеет вид круга на сфере).

Расчет показывает (см. мелкий шрифт в конце параграфа), что площади зон с хорошей степенью точности равны, но тем не менее амплитуды  $A_1, A_2, \dots$  колебаний, приходящих от первой, второй и т. д. зон, не совсем одинаковы. Они медленно убывают с ростом номера зоны в силу двух других факторов, влияющих на амплитуду: во-первых, увеличивается угол между направлением лучей, идущих от зоны в точку

наблюдения, и, во-вторых, растёт удаление зоны от точки наблюдения (это легко видеть, осуществляя построение рисунка 122,б для участков различных зон). Следовательно, взаимное погашение колебаний, приходящих от соседних зон, будет не совсем полным.

Подчеркнем, что конкретная картина зон Френеля на выбранной поверхности  $\Sigma$  зависит от положения точки наблюдения: чем ближе точка наблюдения, тем мельче зоны (из рис.123 видно, что для точки  $B'$  размер первой зоны меньше, чем для точки  $B$ ).

Докажем равенство площадей зон Френеля. Сначала вычислим площадь, занимаемую первыми  $n$  зонами Френеля, т.е. площадь боковой поверхности сферического сегмента, которая определяется формулой  $S = 2\pi R h$ , где  $R$  - радиус сферы и  $h$  - высота сегмента, или в наших обозначениях (рис.124)  $S_n = 2\pi a \delta_n$ . Высоту сегмента  $\delta_n$  найдем, приравняв выражения для  $r_n$ , полученные по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников:

$$a^2 - (a - \delta_n)^2 = (M_n B)^2 - (M_0 B + \delta_n)^2.$$

Обозначая  $M_0 B = b$  и учитывая, что  $M_n B = M_0 B + n \lambda/2$ , как это следует из способа построения зон (см. также рис.123), имеем

$$a^2 - (a - \delta_n)^2 = (b + n \lambda/2)^2 - (b + \delta_n)^2.$$

и, раскрывая квадраты скобок,

$$2a\delta_n = bn\lambda + \frac{1}{4}n^2\lambda^2 - 2b\delta_n.$$

Пренебрегая ввиду малости длины световой волны членом  $\frac{1}{4}n^2\lambda^2$  (тем самым считаем, что число зон не слишком велико), находим

$$\delta_n = nb\lambda/2(a+b), \text{ так что } S_n = 2\pi a \delta_n = \pi ab\lambda/(a+b).$$

Площадь  $n$ -й зоны получим как разность площадей  $n$  и  $(n-1)$  зон:

$$S_n - S_{n-1} = \pi ab\lambda/(a+b) - (n-1)\pi ab\lambda/(a+b) = \pi ab\lambda/(a+b).$$

Мы видим, что она не зависит от номера зоны, следовательно, в нашем приближении (число зон не слишком велико) площади зон Френеля одинаковы.

## § 28. МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

Разобьем поверхность  $\Sigma$  на одинаковые по площади тонкие кольца, нумеруя их по мере возрастания радиуса (рис.125,а). Колебания, приходящие от них в точку наблюдения  $B$ , изобразятся на векторной диаграмме малыми векторами  $a\vec{\lambda}_1, a\vec{\lambda}_2, a\vec{\lambda}_3, \dots$ , которые будем располагать друг за другом в виде цепочки, имея в виду их дальнейшее суммирование (рис.125,б). (Напомним, что на векторной диаграмме гармоническое колебание изображается вектором-амплитудой, модуль которого равен амплитуде колебания, а направление составляет с некоторым фиксированным направлением угол, равный начальной фазе колебания.)

С ростом номера кольца векторы этой цепочки непрерывно поворачиваются, так как по мере удаления кольца от точки наблюдения

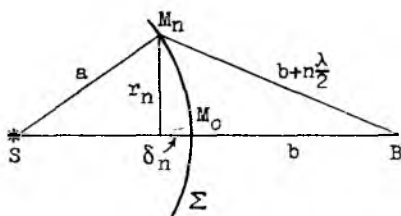


Рис.124

растет запаздывание по фазе. Если бы амплитуды колебаний были одинаковы, то были бы одинаковы и длины векторов  $dA_1$  и цепочка векторов, описав круг, замыкалась. На самом деле модули векторов  $dA_1$  непрерывно уменьшаются, поскольку с ростом номера кольца по выясненным ранее причинам уменьшается амплитуда приходящего от него колебания. Поэтому векторная диаграмма представляет собой ломаную

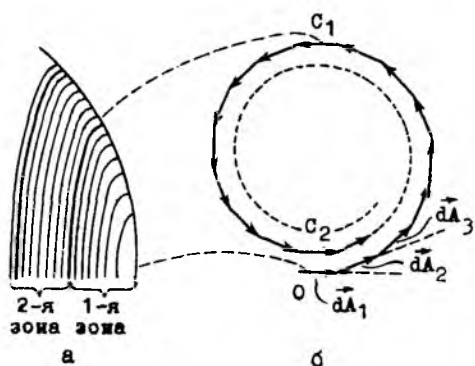


Рис.125

линию в виде спирали (на рис.125,б изображен лишь первый ее виток). Колебаниям, приходящим от первой зоны Френеля, соответствует участок  $OC_1$  диаграммы, от второй - участок  $C_1C_2$  и т.д. Действительно, колебания, приходящие от краев зоны, имеют противоположные фазы, так как разность хода для них равна полуволне, и, следовательно, изображаются на векторной диаграмме противоположно направленными векторами. Истинную векторную диаграмму получим, неограниченно уменьшая ширину колец. При этом все  $dA_1 \rightarrow 0$  и ломаная линия переходит в гладкую спираль (рис.126,а). Поскольку амплитуды  $dA_1$  убывают с ростом номера  $i$  кольца крайне медленно, шаг спирали мал, т.е. ее витки располагаются плотно.

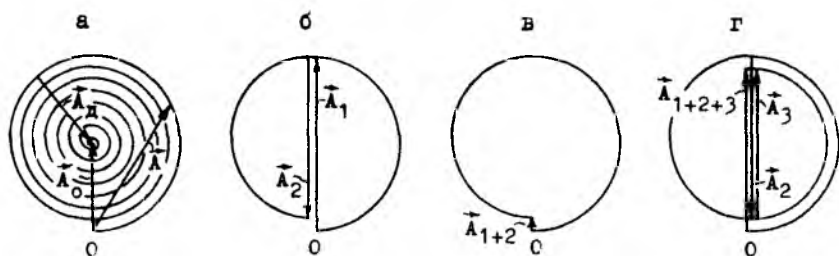


Рис.126

Пользуясь векторной диаграммой, легко найти колебание, приходящее в точку наблюдения от любого числа зон. Для этого напомним, что при суммировании колебаний следует сложить векторы-амплитуды, изображающие складываемые колебания, т.е. провести вектор из начала первого в конец последнего. Суммарное колебание от всех зон опреде-

ляется вектором  $\vec{A}_0$ , соединяющим начало и конец спирали – это соответствует отсутствию препятствия на пути световой волны. Колебания, приходящие в точку наблюдения от первой, второй, третьей зон изображаются векторами  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ , от двух первых зон – вектором  $\vec{A}_{1+2}$ , от трех первых зон – вектором  $\vec{A}_{1+2+3}$  (см. рис.126, а, б, в, г) и т.д. Отчетливо видно, что колебания от соседних зон имеют противоположные фазы (векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на рис.126, б противоположно направлены), но взаимно погашаются не полностью ( $\vec{A}_{1+2} \neq 0$  на рис.126, в).

### § 29. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

Рассмотрим дифракцию от точечного монохроматического источника света на круглом отверстии, уже упоминавшуюся ранее (рис.120, б), причем будем считать, что экран для наблюдений расположен не слишком далеко от отверстия. Такой случай наблюдения дифракции в ближней зоне называют *дифракцией Френеля*.

В качестве поверхности, фигурирующей в формулировке принципа Гюйгенса – Френеля, удобно взять сферическую волновую поверхность  $\Sigma$ , касающуюся краев отверстия (рис.127). Тогда для области пространства справа от отверстия необходимо учитывать только те вторичные источники, которые находятся в пределах отверстия (на сегменте  $M_0M$ ) – остальные будут закрыты экраном.

Прежде всего, ответим на такой вопрос: как будет изменяться интенсивность в некоторой точке  $B$  на оси схемы, если непрерывно увеличивать радиус отверстия? При увеличении радиуса отверстия открывается все большее число зон Френеля (на векторной диаграмме (рис.126, а) конец вектора  $\vec{A}$ , описывающего колебание в точке наблюдения, непрерывно перемещается по спирали) и интенсивность в точке наблюдения будет изменяться, достигая поочередно своих минимумов, когда открыто четное число зон и колебания от них попарно погашаются, и максимумов, когда открыто нечетное число зон и остается некомпенсированным колебание от одной целой зоны.

Перейдем к исследованию дифракционной картины, которое проведем, основываясь на методе зон Френеля. Пусть для определенности экран для наблюдений находится на таком расстоянии от отверстия, что для центральной точки  $B$  экрана в отверстии уложились три зоны Френеля (рис.127, а, внизу дана картина открытых зон). Тогда в центре экрана будет светлое пятно – максимум интенсивности. Если смещаться от центра экрана, проводя для каждой точки наблюдения аналогичное разбиение поверхности  $\Sigma$  на зоны Френеля, то с одной стороны отверстия зоны начнут частично закрываться экраном, а с противоположной стороны будут частично открываться новые зоны, первоначально

закрыты экраном. В точке  $B_1$  экрана (рис.127,б) интенсивность станет минимальной, так как здесь попарно погасятся колебания от целиком открытых первой и второй зон, а также от приблизительно одинаковых по величине и форме открытых частей третьей и четвертой зон (наше рассуждение не претендует на строгость) — через эту точку проходит темное кольцо. Рассуждения такого рода, подкрепленные строгим расчетом, показывают, что дифракционная картина представляет собой чередование темных и светлых колец, причем по мере удаления от центра экрана интенсивность в максимумах убывает.

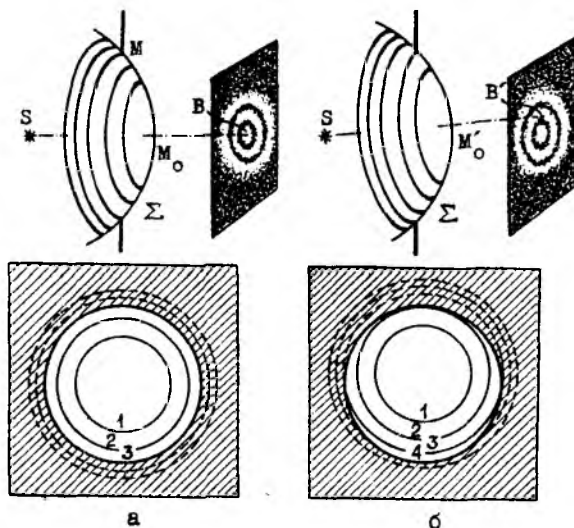


Рис.127

Теперь выясним, как зависит дифракционная картина от расстояния до отверстия. Как уже отмечалось, размеры зон Френеля тем меньше, чем ближе точка наблюдения к поверхности  $\Sigma$ . Поэтому по мере приближения экрана для наблюдений к отверстию число открытых зон для центральной точки экрана будет увеличиваться и, следовательно, интенсивность в центре экрана будет изменяться, поочередно достигая своих максимумов, когда открыто нечетное число зон, и минимумов, когда открыто четное число зон. Таким образом, вдоль прямого луча, идущего через центр отверстия, чередуются практически совершенно темные места и места, где интенсивность  $I_{\max}$  вчетверо больше той  $I_0$ , которая следует из законов геометрической оптики. (Действительно, как видно из векторной диаграммы на рис.126,а,  $A_{\max} \cong 2A_0$ , откуда



$(A_{\max})^2 \cong 4(A_0)^2$  и, следовательно,  $I_{\max} \cong 4I_0$ . Этот пример убедительно свидетельствует о полной неприменимости законов геометрической оптики для описания оптических явлений, в которых дифракция играет существенную роль.

Обращаясь снова к векторным диаграммам на рис.126, можно заметить, что дифракция существенно проявляется в той области пространства, для точек которой в отверстии укладывается сравнительно небольшое число зон Френеля. Здесь при переходе от точки к точке периодически изменяется амплитуда колебаний от  $A_{\min} \approx 0$  до  $A_{\max} \approx 2A_0$  и соответственно интенсивность от  $I_{\min} \approx 0$  до  $I_{\max} \approx 4I_0$ , и образуется контрастная дифракционная картина. Напротив, в области, для точек которой открыто очень большое число зон, при переходе от точки к точке амплитуда практически не изменяется:  $A \approx A_0$  (конец вектора  $\vec{A}$  на векторной диаграмме остается около центра спирали) и интенсивность практически такая же, как при отсутствии препятствия:  $I \cong I_0$ . С этим и связано утверждение, что дифракция незначительна, когда размеры препятствия существенно больше длины волны: в этом случае для всех точек пространства, за исключением крайне удаленных, открыто большое число зон.

### § 30. ЗОННАЯ ПЛАСТИНКА

Вернемся к ситуации, представленной на рис.123. Колебание в точке  $B$  можно представить как сумму колебаний с амплитудами  $A_1, A_2, \dots$  и т.д., приходящих от всех зон Френеля. Поскольку направления векторов-амплитуд колебаний от нечетных и четных зон противоположные (рис.126, б, г), то амплитуда результирующего колебания выразится суммой  $A_0 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = (A_1 + A_3 + \dots) - (A_2 + A_4 + \dots)$ . Амплитуда суммарного колебания  $A_1 + A_3 + \dots$  от всех нечетных зон, как и от всех четных зон  $A_2 + A_4 + \dots$ , весьма велика по сравнению с  $A_0$ , поэтому интенсивность в точке  $B$  можно существенно увеличить, преградив путь колебаниям, идущим от четных (или нечетных) зон. Для этого на прозрачной пластинке рисуют зоны Френеля, внося коррективы, связанные с несопадением сферической волновой поверхности  $\Sigma$  с плоскостью пластинки, и зачерняют зоны через одну - получается так называемая з о н н а я п л а с т и н к а (рис.128).

Амплитуду колебаний можно увеличить еще вдвое, а следовательно, интенсивность вчетверо, если вместо того, чтобы зачернять четные зоны, оставить их прозрачными, но так изменить их толщину (например, покрыть тонким слоем прозрачного вещества или просто видоизменив профиль пластинки), чтобы оптические пути идущих через них лучей изменились на нечетное число полуволн. Это приведет к дополнительному изменению на  $\pi$  фаз колебаний, приходящих от четных зон. Теперь колебания, приходящие от всех зон будут иметь одинаковые фазы и, следовательно,  $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$ .

Чтобы получить максимально возможную интенсивность, прозрачной пластинке нужно придать такой профиль, чтобы колебания от всех точек ее поверхности, а не только суммарные колебания от целых зон,

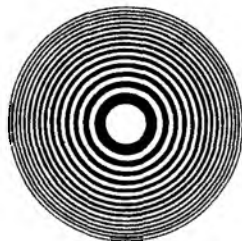


Рис.128

приходили в точку наблюдения в одинаковых фазах. При этом амплитуда результирующего колебания определится длиной спирали, т.е. увеличится в  $\pi/2 \approx 1,5$  раз. Замечательно, что такая пластинка есть не что иное, как собирательная линза!

### § 31. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА КРУГЛОМ ДИСКЕ

Пусть препятствием в схеме дифракции Френеля является небольшой непрозрачный круглый диск (рис.129). По-прежнему выбираем волновую поверхность  $\Sigma$ , проходящую

через плоскость диска (ввиду малости размеров диска и достаточной удаленности источника, сферическая волновая поверхность  $\Sigma$  практически совпадает с плоской поверхностью диска), и для некоторой точки  $B$  оси схемы разбиваем ее на зоны Френеля. В точку наблюдения приходят колебания от всей поверхности  $\Sigma$  кроме закрытой диском центральной части, и

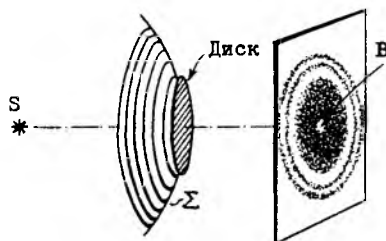


Рис.129

колебание в точке  $B$  изобразится на векторной диаграмме (рис.126,а) вектором  $\vec{A}_d$ : начало этого вектора находится в той точке спирали, которая соответствует колебанию, приходящему от края диска, а конец - в центре спирали (вектор  $\vec{A}_d$  на рис.126,а соответствует случаю, когда радиус диска несколько превышает радиус первой зоны). При смещении точки наблюдения вдоль оси схемы (или при изменении радиуса диска) изменяется число закрытых зон и, соответственно, начало вектора  $\vec{A}_d$  перемещается по спирали. Но при этом, пока диск закрывает не слишком много зон, амплитуда колебания почти не изменяется, оставаясь приблизительно равной радиусу спирали  $A_d \approx A_0$ , т.е. такой же, как при отсутствии диска. Таким образом, в самом центре области тени за диском в полном противоречии с представлениями геометрической оптики находится светлое пятно (пятно Пуассона)!

### § 32. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ЩЕЛИ

Перейдем к изучению дифракционных картин, возникающих на очень большом удалении от препятствия - в дальней зоне. Характер дифракционной картины не изменится, если вместо того, чтобы неограниченно удалять экран для наблюдений, расположить его в фокальной плоскости собирательной линзы: в обоих случаях в каждой точке экрана будут собираться и интерферировать лучи, идущие параллельно друг другу. Условимся также освещать препятствие параллельным пучком лучей, который можно получить, поместив точечный источник света в фокус со-

бирательной линзы—такая система называется к о л л и м а т о р о м. Дифракцию, возникающую при указанных условиях освещения препятствия и наблюдения дифракционной картины, называют д и ф р а к ц и е й Ф р а у н г о ф е р а, или дифракцией в параллельных лучах.

В этом параграфе рассматривается случай дифракции Фраунгофера, когда препятствием является непрозрачный экран с узкой и длинной щелью. Принципиальная схема дана на рис.130: здесь  $S$  — точечный монохроматический источник света,  $L_k$  — коллиматорная линза с фокусным расстоянием  $F_k$ ,  $L$  — собирающая линза с фокусным расстоянием  $F$ , в фокальной плоскости которой находится экран для наблюдения дифракционной картины.

При отсутствии препятствия — экрана со щелью — наблюдается светлая точка в центре экрана, которую примем за начало декартовой системы координат  $x, y$ . При наличии экрана со щелью картина усложнится вследствие дифракции, однако дифракция произойдет

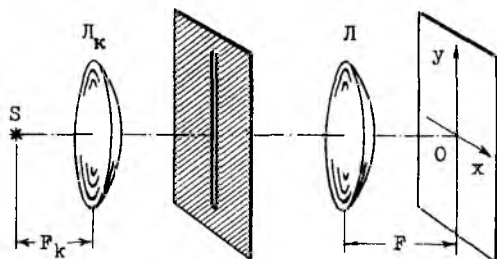


Рис.130

практически лишь в направлении оси  $x$ , так как размер щели в этом направлении (ее ширина) достаточно мал. Дифракцией в направлении оси  $y$  можно пренебречь, поскольку размер щели в этом направлении (длина) существенно превосходит длину световой волны.

Для выяснения распределения интенсивности света вдоль оси  $x$  удобно представить горизонтальное сечение схемы, проходящее через эту ось (рис.131). Применяя принцип Гюйгенса — Френеля, выберем плоскую волновую поверхность  $\Sigma$  (коллиматор дает параллельный пучок лучей, т.е. плоскую волну, волновые поверхности которой — плоскости, перпендикулярные лучам), расположенную непосредственно перед экраном со щелью — в рассматриваемом сечении она изобразится прямой линией. Ясно, что на экран для наблюдений приходят колебания только от тех вторичных источников этой поверхности, которые находятся в пределах щели — остальные закрыты экраном. Так как экран для наблюдений находится в фокальной плоскости линзы, то в каждой его точке собираются лучи, идущие от вторичных источников параллельно друг другу. Так, например, лучи, образующие некоторый угол  $\varphi$  с направлением падающих лучей, соберутся в соответствующей точке  $B$  экрана, и результат их интерференции определит интенсивность света в этой точке.



исследуем вид дифракционной картины. В центре экрана интенсивность максимальна, так как колебания от всех точек щели приходят сюда в одинаковых фазах. По мере удаления от центра экрана увеличивается разность хода между крайними лучами (как видно из рис.133, для более удаленной точки  $B'$  отрезок  $MP'$  больше, чем отрезок  $MP$  для точки  $B$ ), а следовательно, согласно (32.1) растет и число открытых зон Френеля. При этом вдоль оси  $x$  на экране будут чередоваться минимумы (открыто четное число зон, т.е.  $k = 2m$  и  $MP = m\lambda$ ) и максимумы (открыто нечетное число зон, т.е.  $k = 2m+1$  и  $MP = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ ) интенсивности. Замечая, что  $\angle M M_0 P = \varphi$  (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), находим из  $\Delta M M_0 P$   $MP = b \sin \varphi$ , где  $b = M_0 M$  — ширина щели, и условия минимумов и максимумов принимают вид:

$$\begin{aligned} b \sin \varphi &= m\lambda && \text{— условие минимумов,} \\ b \sin \varphi &= (2m+1)\frac{\lambda}{2} && \text{— условие максимумов} \end{aligned} \quad (32.2)$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$ .

Условия (32.2) охватывают все минимумы и максимумы дифракционной картины кроме центрального максимума  $\varphi = 0$  (подчеркнем, что в формулах (32.2)  $m \neq 0$ ).

В этих формулах положение минимумов и максимумов характеризуется углом  $\varphi$  наклона лучей, идущих в соответствующие точки на экране. найдем выражения непосредственно для координат  $x$  минимумов и максимумов. Как следует из рис.131, координата  $x = OB$  произвольной точки  $B$  экрана связана с углом  $\varphi$  соотношением  $|x| = F \operatorname{tg} \varphi$ .

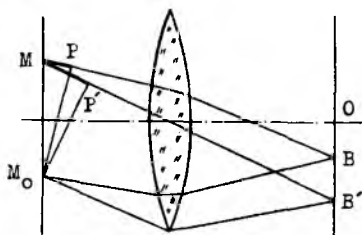


Рис.133

Если ограничиться рассмотрением малых углов дифракции и соответственно небольшой областью дифракционной картины около центра экрана  $x = 0$ , то  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$ , так что  $|x| = F \varphi$ . Выражая отсюда  $\varphi$  и подставляя в формулы (32.2) вместо  $\sin \varphi$ , получаем следующие формулы для координат минимумов и максимумов:

$$|x_{\min}| = \frac{F\lambda}{b} m, \quad |x_{\max}| = \frac{F\lambda}{b} (2m+1). \quad (32.3)$$

График  $I(x)$  распределения интенсивности вдоль оси  $x$  экрана дан на рис.134. Максимумы, как и минимумы, располагаются эквидистантно на расстоянии  $F\lambda/b$  друг от друга, причем интенсивность света в максимумах быстро убывает с ростом порядка  $m$  максимума. Более 90% всей световой энергии, падающей на экран, приходится на центральный максимум, т.е. на область, ограниченную первыми минимумами.

11-1403

Покажем, что интенсивности в максимумах нулевого (центральный максимум), первого, второго и т. д. порядков относятся друг к другу следующим образом:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots : I_m : \dots = (\pi/2)^2 : 1/9 : 1/25 : \dots : 1/(2m+1)^2 : \dots,$$

т.е. начиная с первого порядка - как обратные квадраты числа открытых зон Френеля. Действительно, для максимума  $m$ -го порядка открыта  $2m+1$  зона и, следовательно, площадь одной зоны равна  $1/(2m+1)$  доле площади щели. При этом результирующее колебание определяется только одной зоной, поскольку колебания от остальных  $2m$  зон попарно скомпенсированы. Амплитуда этого колебания пропорциональна площади зоны, т.е. величине  $1/(2m+1)$ , а интенсивность, будучи пропорциональной квадрату амплитуды, пропорциональна  $1/(2m+1)^2$ . Если бы в центральный максимум приходили колебания от всей щели как от одной зоны (с теми же относительными сдвигами фаз), то в качестве  $I_0$  стояла бы  $(1)^2$ , а не  $(\pi/2)^2$ . На самом деле колебания приходят в него в одинаковых фазах, что приводит к увеличению амплитуды в  $\pi/2$  и интенсивности в  $(\pi/2)^2$  раз. Это видно из рис. 126, б: векторная диаграмма первой зоны вследствие неодинаковости фаз малых колебаний представляет собой полуокружность, и амплитуда  $A_1$  результирующего колебания равна ее диаметру. Если бы все малые колебания имели одинаковые фазы, как это и имеет место в центральном максимуме, то полуокружность выпрямилась бы в прямую и результирующая амплитуда стала равной ее длине, т.е. увеличилась в  $\pi A_1/A_1 = \pi/2$  раз.

Выясним, как зависит дифракционная картина от ширины щели. Координаты максимумов и минимумов, как и расстояние  $\Delta x/b$  между соседними максимумами, обратно пропорциональны ширине щели  $b$ , поэтому по мере сужения щели максимумы и минимумы удаляются от центра экрана и кроме того становятся более размытыми -

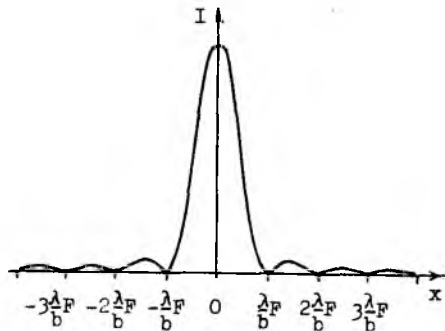


Рис. 134

дифракционная картина растягивается. В конце концов первые минимумы уйдут в бесконечность (как видно из первой формулы в (32.2), в которой следует положить  $m = 1$  и  $\varphi = \pi/2$ , это наступит при  $b = \lambda$ ), и интенсивность на экране будет монотонно убывать от центра к периферии. Наоборот, с увеличением ширины щели координаты максимумов и минимумов уменьшаются, максимумы становятся более узкими и яркими - дифракционная картина сжимается и в пределе при  $b \rightarrow \infty$  стягивается в точку в центре экрана, т.е., как и следовало ожидать, переходит в картину, согласующуюся с законами геометрической оптики.

Заметим в заключение, что на практике вместо точечного источника обычно используют узкую светящуюся щель, параллельную той, на которой происходит дифракция. Различные точки этой светящейся щели

дают дифракционные картины, смещенные по оси  $Y$ , и в результате наблюдаемая картина вытягивается вдоль оси  $Y$  и представляет собой чередование темных и светлых полос.

### § 33. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА В МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ СВЕТЕ

Возьмем теперь в качестве препятствия в схеме Фраунгофера дифракционную решетку, т.е. непрозрачную пластинку с  $N$  одинаковыми параллельными равноотстоящими друг от друга щелями. Эта схема в сечении плоскостью, перпендикулярной щелям решетки, представлена на рис.135. Здесь  $b$  — ширина щели,  $a$  — ширина непрозрачного промежутка между соседними щелями, величину  $d = a + b$  называют периодом, или постоянной, решетки.

Выбирая ту же волновую поверхность  $\Sigma$ , что и при рассмотрении дифракции на щели, и применяя принцип Гюйгенса — Френеля, замечаем, что теперь в каждой точке экрана для наблюдений собираются параллельные лучи, идущие от всех точек всех  $N$  щелей решетки. Как складываются колебания, приходящие от точек отдельной щели, мы уже изучили, так что остается просуммировать колебания, приходящие в точку наблюдения от разных щелей. Эти колебания имеют одинаковые амплитуды, но каждое последующее отстает от предыдущего по фазе на некоторый угол  $\Delta\phi$ , так как оно проходит больший на величину  $d \sin\varphi$  путь, как видно из рис.135.

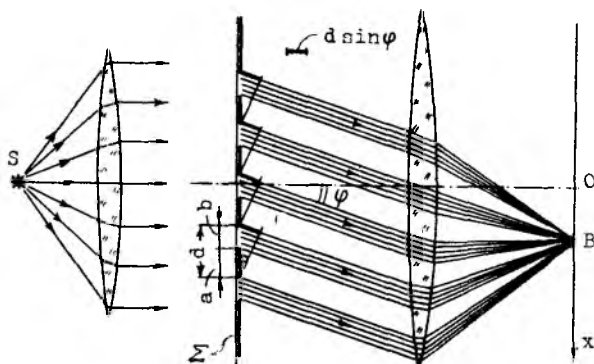


Рис.135

По формуле (18.2), связывающей разность фаз и разность хода, имеем

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi. \quad (33.1)$$

Следовательно, на векторной диаграмме колебания, приходящие от первой, ...,  $N$ -й щели изобразятся векторами-амплитудами  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_N$  одинаковой длины, из которых каждый последующий повернут по отноше-

нию к предыдущему на угол  $\Delta\phi$ , зависящий от точки наблюдения и определяемый формулой (33.1) (рис.136,а). Модуль суммарного вектора  $\vec{A} = \sum_{i=1}^N \vec{A}_i$  дает амплитуду результирующего колебания, а ее квадрат — интенсивность в точке наблюдения.

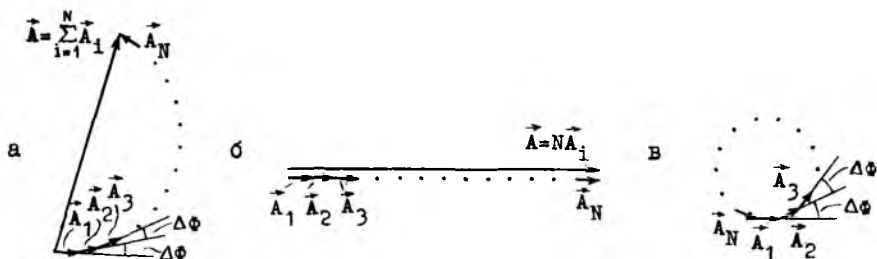


Рис.136

Интенсивность света будет иметь максимумы в тех точках экрана, в которые колебания от всех щелей приходят в одинаковых фазах:

$$\Delta\phi = 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (33.2)$$

так что все векторы  $\vec{A}_i$  на векторной диаграмме сонаправлены и при сложении дают максимально возможную амплитуду результирующего колебания  $A = N \cdot A_1$  (рис.136,б). Это — главные максимумы дифракционной картины решетки. Подставляя выражение для  $\Delta\phi$  из (33.2) в (33.1), получаем следующее условие главных максимумов:

$$d \sin\varphi = n \lambda. \quad (33.3)$$

Порядок  $n$  главного максимума определяет его порядковый номер от центра экрана, не считая центральный максимум ( $n = 0$ ).

В точках экрана, в которых приходящие от щелей колебания при сложении дают нуль, располагаются минимумы дифракционной картины. На векторной диаграмме им соответствуют такие взаимные расположения векторов  $\vec{A}_i$ , при которых конец последнего вектора  $\vec{A}_N$  совпадает с началом первого  $\vec{A}_1$  (рис.136,в). Можно показать, что это имеет место при условии

$$\Delta\phi = \frac{m}{N} 2\pi \quad (m \neq nN), \quad (33.4)$$

которое с учетом (33.1) принимает вид

$$d \sin\varphi = \frac{m}{N} \lambda \quad (m \neq nN). \quad (33.5)$$

Существенно, что в этой формуле целое число  $m$  не должно принимать значений, кратных  $N$  ( $m \neq nN$ ), ибо при  $m = nN$  формулы (33.4) и (33.5) становятся условиями (33.2) и (33.3) главных максимумов. Справедливость условия минимумов (33.4), вывод которого мы опускаем,



иллюстрируется для конкретного случая решетки с пятью щелями ( $N=5$ ) рис. 137, на котором представлены векторные диаграммы для значений  $m = 1, 2, 3, 4$  в формуле (33.4). Для других четверок значений  $m$ , не кратных пяти ( $m = 6, 7, 8, 9; 11, 12, 13, 14; \text{и т.д.}$ ), векторы располагаются аналогично (при этом к  $\Delta\phi$  просто добавляется  $2\pi, 4\pi$  и т.д.).

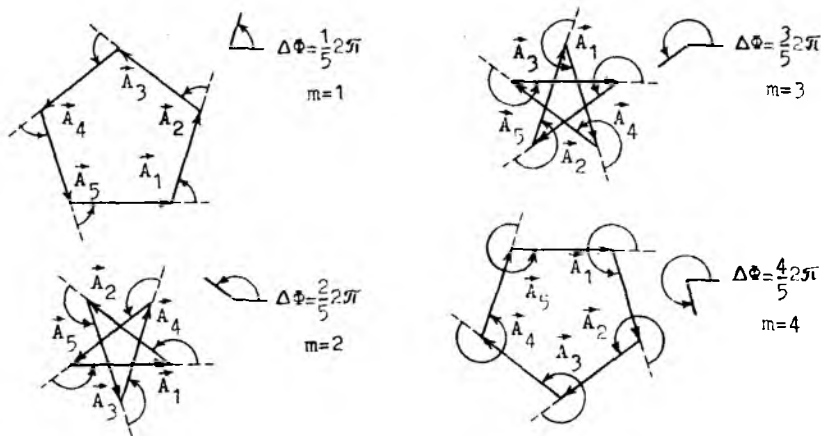


Рис.137

Чтобы дать наглядное представление о дифракционной картине решетки, удобно воспользоваться формулой (33.5), которая, как было отмечено, определяет положение и минимумов ( $m \neq n N$ ), и главных максимумов ( $m = n N$ ):

$$d \sin\varphi = \frac{m}{N} \lambda \begin{cases} m \neq n N & - \text{условие минимумов,} \\ m = n N & - \text{условие гл. максимумов.} \end{cases} \quad (33.6)$$

Полагая в этой формуле последовательно  $m = 0, 1, 2, \dots$ , констатируем, что главные максимумы и минимумы располагаются с ростом угла  $\varphi$ , т.е. по мере удаления от центра экрана, следующим образом (здесь и далее до конца параграфа см. рис.138):

$$\sin\varphi = 0; \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d}, \dots, \frac{N-1}{N} \frac{\lambda}{d}; \frac{\lambda}{d}; \frac{N+1}{N} \frac{\lambda}{d}, \dots, \frac{2N-1}{N} \frac{\lambda}{d}; 2 \frac{\lambda}{d}; \frac{2N+1}{N} \frac{\lambda}{d}, \dots, \frac{3N-1}{N} \frac{\lambda}{d};$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $N-1$  минимумов  $N-1$  минимумов  $N-1$  минимумов  
 гл. макс.  $(n=0)$  гл. макс.  $(n=1)$  гл. макс.  $(n=2)$

Таким образом, между соседними главными максимумами располагаются  $N-1$  минимумов, между которыми, естественно, в свою очередь окажутся максимумы (вторичные максимумы), однако их интенсивность мала по сравнению с главными максимумами.

1404

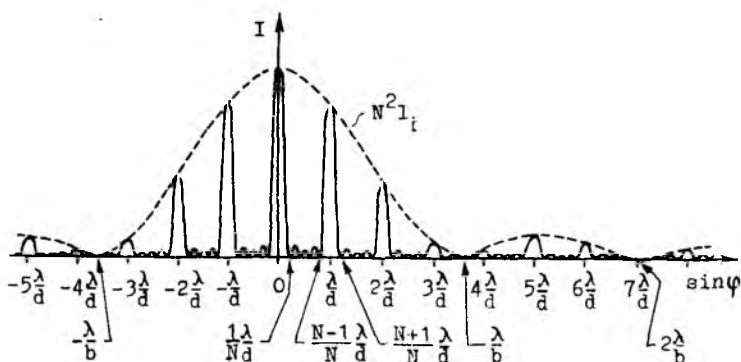


Рис. 138

О величине интенсивности света в главных максимумах  $I_{\max}$  можно судить по дифракционной картине  $I_1$ , которую создавала бы отдельная щель решетки. В самом деле, в главных максимумах  $\lambda = N \lambda_1$ , откуда, возводя в квадрат и учитывая, что  $I \sim A^2$  и  $I_1 \sim A_1^2$ , находим  $I_{\max} = N^2 I_1$ . Представленный на рис. 138 график зависимости  $I(\sin \varphi)$  по существу определяет вид дифракционной картины решетки  $I(X)$ , поскольку при небольших углах, как было показано на с. 161,  $\sin \varphi \sim X$ . Таким образом, яркими оказываются главные максимумы, расположенные в области центрального максимума картины от одной щели, а главные максимумы, находящиеся вблизи минимумов картины от одной щели, относительно слабы и могут вообще отсутствовать, если их положение совпадает с положением минимума картины от одной щели.

Итак, дифракционная картина решетки в монохроматическом свете представляет собой совокупность главных максимумов, между которыми интенсивность практически равна нулю. Существенно то, что с ростом числа щелей (у хороших решеток с периодом  $a \approx 10^{-3}$  мм при размерах решетки порядка 10 см  $N \approx 10^5$ ) ширина максимумов уменьшается, поскольку ограничивающие их с обеих сторон минимумы сближаются. Это важное свойство — узость главных максимумов — позволяет использовать решетки с большим числом щелей в качестве спектрального аппарата.

#### § 34. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА КАК СПЕКТРАЛЬНЫЙ АППАРАТ

Спектральным аппаратом называют устройство, позволяющее произвести спектральный анализ светового потока, в частности определить длины волн, входящие в его состав (качественный спектральный анализ). Известным примером прибора такого рода является призмный спектрограф.

Легко видеть, что дифракционная решетка в схеме Фраунгофера может играть роль спектрального аппарата. Действительно, если источник света немонохроматический, то на экране возникнет совокупность дифракционных картин, образованных монохроматическими волнами, входящими в состав излучения источника. Из формулы (33.3) следует, что каждой длине волны соответствует свое расположение максимумов, которые у решеток с большим числом щелей имеют вид весьма узких линий, так что дифракционная картина будет представлять собой спектральное разложение света, излучаемого источником. На рис.139 представлена дифракционная картина от источника, излучающего волны с длинами волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ ). Линии этой картины (главные максимумы) определяются условиями:

$$\begin{aligned} d \sin \varphi &= n \lambda_1, \\ d \sin \varphi &= n \lambda_2, \\ &\dots\dots\dots \\ d \sin \varphi &= n \lambda_k. \end{aligned} \quad (34.1)$$

В центре экрана ( $\varphi=0$ ) выполняется условие максимума для всех длин волн ( $n=0$ ) — здесь располагается яркий центральный максимум. По мере удаления от центра располагаются максимумы первого порядка ( $n=1$ ), причем в порядке возрастания длины волны: чем больше  $\lambda$ , тем больше угол  $\varphi$  в формулах (34.1). Совокупность максимумов первого порядка образует спектр первого порядка. Далее в той же последовательности располагаются максимумы второго порядка ( $n=2$ ), образуя спектр второго порядка, и т.д.

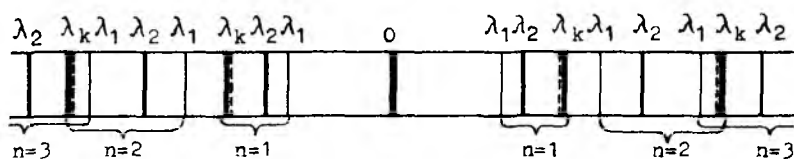


Рис.139

Начиная с некоторого порядка, спектры будут перекрываться (на рис.139 это происходит уже во втором порядке), что затрудняет спектральный анализ. С этим обстоятельством, свойственным также и ряду других приборов, связано введение специальной характеристики спектрального аппарата — дисперсионной области. Дисперсионная область  $G$  — это тот максимальный интервал длин волн  $\Delta\lambda$ , для которого спектр наблюдается обособленно, без перекрывания со спектром соседнего порядка. Выведем формулу для дисперсионной области дифракционной решетки — это тот максимальный интервал длин волн  $\Delta\lambda$ , для которого спектр наблюдается обособленно, без перекрывания со спектром соседнего порядка. Пусть источник света излучает волны с длинами волн, лежащими в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Перекрывание спектров в дифракционной картине начнет происходить в том порядке  $n$ , когда дальний край спектра, определяемый условием максимума  $n$ -го порядка для максимальной длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  для дисперсионной области  $G$ , "догонит" ближний край спектра следующего,  $(n+1)$ -го порядка, определяемый условием максимума  $(n+1)$ -го порядка для минимальной длины волны  $\lambda$  интервала  $d \sin \varphi_2 = (n+1)\lambda$ . Приравняв углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,

находим  $n(\lambda + \Delta\lambda) = (n+1)\lambda$ , откуда для дисперсионной области  $G = \Delta\lambda$  решетки получаем формулу

$$G = \frac{\lambda}{n}. \quad (34.2)$$

Так как при использовании дифракционной решетки спектральный анализ обычно проводится в спектрах не выше третьего порядка, то дисперсионная область оказывается большой - порядка нескольких тысяч ангстрем. В этом отношении дифракционная решетка превосходит многие другие спектральные аппараты высокого класса.

Важным параметром спектрального аппарата, характеризующим степень растянутости спектра, является его дисперсия. Угловое расстояние между линиями спектра, которые соответствуют длинам волн, различающимся на единицу длины. Таким образом, если  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  - две близкие длины волны и  $\Delta\varphi$  - угловое расстояние между соответствующими им линиями (т.е. угол между направлениями лучей, образующих эти линии), то угловая дисперсия по определению равна

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}. \quad (34.3)$$

Выведем формулу для угловой дисперсии дифракционной решетки. Максимуму  $n$ -го порядка для длины волны  $\lambda$  соответствует угол  $\varphi$  по формуле (33.3):  $d \sin\varphi = n\lambda$ . Максимуму того же порядка для близкой длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  будет соответствовать угол  $\varphi + \Delta\varphi$ . Связь между  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$  проще всего получить, взяв дифференциал от обеих частей формулы (33.3) (символ дифференциала обозначим буквой  $\Delta$ ):  $d \cos\varphi \Delta\varphi = n \Delta\lambda$ . Отсюда, используя определение (34.3), получаем следующую формулу для угловой дисперсии решетки:

$$D = \frac{n}{d \cos\varphi}. \quad (34.4)$$

Мы видим, что угловая дисперсия решетки увеличивается с ростом порядка спектра и обратно пропорциональна периоду решетки (для спектров невысоких порядков угол  $\varphi$  мал и  $\cos\varphi \approx 1$ ). Следовательно, если необходимо увеличить расстояние между линиями спектра, то можно либо проводить исследование в спектрах более высокого порядка, либо использовать решетку с меньшим периодом.

Одна из основных задач спектроскопии состоит в том, чтобы различать линии, соответствующие близким значениями длины волны. На первый взгляд, этого всегда можно добиться, удаляя линии друг от друга, т.е. увеличивая дисперсию спектрального аппарата, однако это не так. Рассмотрим два спектральных прибора, у которых дисперсия одинакова, но различна ширина спектральных линий - в первом приборе они более узкие. На рис.140 дано распределение интенсивности света в двух близких линиях, соответствующих длинам волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , в спектре первого (рис.140,а) и второго (рис.140,б) приборов (штрихо-

вые линии показывают распределение интенсивностей  $I_\lambda(x)$  и  $I_{\lambda+\Delta\lambda}(x)$  в каждой отдельной линии, а сплошная кривая — наблюдаемую картину  $I(x) = I_\lambda(x) + I_{\lambda+\Delta\lambda}(x)$ . Видно, что первый прибор дает возможность различить ("разрешить") эти длины волн, поскольку между максимумами наблюдается заметный провал интенсивности, в то время как в спектре второго прибора обе линии сливаются в одну и, следовательно, неразрешимы. Этот пример показывает, что для успешного разрешения близких длин волн важно, чтобы соответствующие им линии в спектре были достаточно узкими.

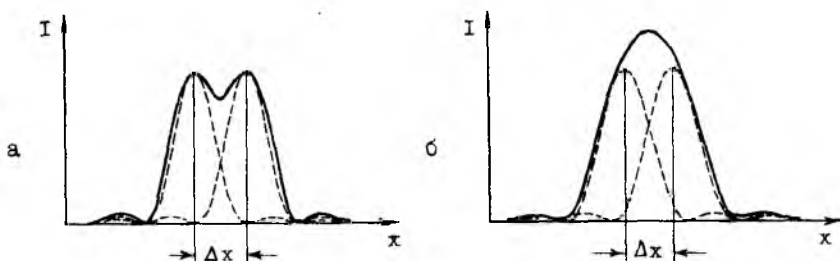


Рис.140

Для характеристики возможности спектрального аппарата разрешать близкие длины волн вводится физическая величина — разрешающая способность, которая по определению равна отношению длины волны  $\lambda$ , в области которой ведется исследование, к минимальной разности  $\delta\lambda$  длин волн, разрешимых данным аппаратом:

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \quad (34.5)$$

Согласно этому определению разрешающая способность тем выше, чем более близкие длины волн можно разрешить. Критерий разрешимости несколько условен. Принято считать по Рэлею, что линии разрешаются, если максимум одной приходится на минимум, ограничивающий другую линию (рис.140,а); при этом интенсивность света в провале между максимумами составляет около 80% от интенсивностей в максимумах.

Выведем формулу для разрешающей способности дифракционной решетки. Для длины волны  $\lambda$  положение минимума, следующего сразу за главным максимумом  $n$ -го порядка, определяется из формулы (33.6), в которой следует положить  $m = nN + 1$ :  $d \sin\varphi_1 = \frac{nN+1}{N} \lambda$ . Положение главного максимума  $n$ -го порядка для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  определяется условием  $d \sin\varphi_2 = n(\lambda + \Delta\lambda)$ . Приравняв согласно критерию Рэлея  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , имеем  $\frac{nN+1}{N} \lambda = n(\lambda + \Delta\lambda)$ , откуда для разрешающей способности  $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  решетки получаем следующую формулу:

$$A \approx n N.$$

(34.6)

Таким образом, разрешающая способность решетки зависит от порядка дифракционного спектра и от полного числа щелей и не зависит от периода решетки. Поэтому повысить ее при работе в спектре определенного порядка можно только за счет увеличения числа щелей. Увеличение же дисперсии решетки (за счет уменьшения ее периода) не отразится на разрешающей способности по той причине, что вместе с увеличением расстояния между максимумами одновременно будет увеличиваться их ширина. По разрешающей способности хорошая решетка мало уступает большинству спектральных аппаратов и позволяет разрешать длины волн, различающиеся на сотые доли ангстрема.

### § 35. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИЛА ОБЪЕКТИВА

При построении изображений в оптических приборах таких, как фотоаппарат, микроскоп и телескоп, пользуются известным свойством идеальных линз давать точечное изображение точечного объекта. Однако это верно лишь в приближении геометрической оптики: ограничение световых пучков оправами линз объектива и окуляра, диафрагмами и т.п. приводит к возникновению дифракционных явлений. Поскольку размеры этих препятствий существенно больше длины световой волны, дифракция, вообще говоря, проявляется незначительно. Однако в таких приборах, как микроскоп и телескоп, где ставится цель как можно детальнее исследовать изображение объекта, она играет решающую роль, накладывая предел на разрешающую способность этих приборов.

В оптических приборах, состоящих из объектива и окуляра, объектив дает действительное изображение предмета, которое затем рассматривается через окуляр как через лупу. Поэтому с принципиальной точки зрения достаточно выяснить роль дифракции в формировании этого действительного изображения.

Дифракционные картины от отдельных светящихся точек объекта, даваемые линзой объектива, показаны на рис. 141, а. Для каждой точки

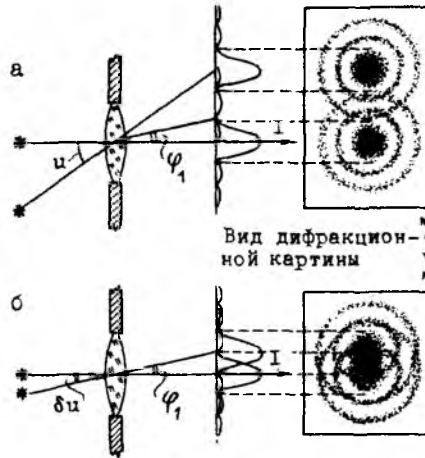


Рис. 141

это светлый кружок - центральный максимум дифракционной картины (изображен на рис.141 темным пятном), вокруг которого чередуются темные и светлые кольца (в случае существенно немонахроматического света - цветные). Таким образом, изображением точки с учетом дифракции является не точка, а кружок конечного радиуса, если принимать во внимание только область центрального максимума, на которую приходится более 80% всей световой энергии. Расчет показывает, что угловое расстояние  $\varphi_1$  между центральным максимумом и первым минимумом, т.е. угол между лучами, идущими в эти максимум и минимум (рис.141,а), определяется условием

$$D \sin \varphi_1 = 1,22 \lambda, \quad (35.1)$$

где  $D$  - диаметр линзы (сравните с условием первого минимума при дифракции на щели  $b \sin \varphi = \lambda$ , которое получается из первой формулы в (32.2) при  $m = 1$ ). При уменьшении углового расстояния  $U$  между двумя точками объекта (рис.141,а) их кружки-изображения начнут перекрываться, и когда они сольются настолько, что будут восприниматься как один кружок, исходные точки станут неразличимыми (неразрешимыми).

Физическая величина  $A$ , обратная минимальному угловому расстоянию  $\delta U$  между точками, еще разрешимыми данным объективом, называется разрешающей силой объектива:

$$A = \frac{1}{\delta U}. \quad (35.2)$$

Минимальное угловое расстояние определяется из условия Рэля (см. с.169), согласно которому предельно допустимо такое перекрывание кружков, когда край одного из них приходится на центр другого. Эта ситуация представлена на рис.141,б, из которого видно, что  $\delta U = \varphi_1$ . Выражая  $\varphi_1$  из формулы (35.1) (считаем угол  $\varphi_1$  малым, так что  $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$ ) и подставляя вместо  $\delta U$  в формулу (35.2), получаем следующее выражение для разрешающей силы объектива:

$$A = \frac{D}{1,22 \lambda}. \quad (35.3)$$

Как и следовало ожидать, разрешающая сила тем выше, чем меньше отношение длины волны к диаметру линзы, характеризующее степень проявления дифракционных явлений. Подчеркнем, что разрешающая сила объектива не зависит от даваемого им увеличения: с ростом расстояния между центрами кружков одновременно растут и размеры кружков, так что условия разрешения не улучшаются.

В случае микроскопа ситуация усложняется тем, что обычно рассматриваются несамосветящиеся объекты, освещаемые одной волной, идущей от источника света. В результате колебания, распространяющиеся от разных точек объекта, могут быть когерентными и тогда наблюдаемая картина не является, как на рис.141,б, простым наложением дифракционных картин, создаваемых отдельными точками предмета. Однако, как показывает расчет, для разрешающей силы снова получается формула вида (35.3) только с несколько иным числовым коэффициентом.

Обратно пропорциональная зависимость разрешающей силы объектива от длины волны проясняет идею создания электронного микроскопа, в котором объект вместо световых пучков облучается пучком электронов, ускоренных электрическим полем. Длина волны, характеризующая волновые свойства электронов, может быть сделана значительно меньшей длины световой волны, что приводит к увеличению разрешающей силы в сотни раз.

П О Л Я Р И З А Ц И Я С В Е Т А

§ 36. ЕСТЕСТВЕННЫЙ И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

Изучая электромагнитные волны, мы назвали *линейно*, или *плоско поляризованной*, волну, в которой векторы напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей распространяясь остаются в определенных плоскостях. Эти взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через направление распространения волны, называют соответственно *плоскостью колебаний* и *плоскостью поляризации* (рис.142,а). В дальнейшем, как и прежде, будем говорить только об электрическом векторе  $\vec{E}$  волны, схематически изображая его направление черточками поперек луча, как на рис.142,а внизу, либо точками, если плоскость колебаний перпендикулярна плоскости чертежа.



Рис.142

Каждый цуг волн, излучаемый атомом, плоско поляризован, но цуги, испускаемые разными атомами, как и последовательные цуги, испущенные одним и тем же атомом, вообще говоря, имеют различные плоскости колебаний, ориентированные случайным образом. Поэтому в каждой точке луча, идущего от обычного источника света, представлены в одинаковой мере всевозможные направления векторов  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной лучу (рис.142,б). Такой свет называется *естественным*. Электрический вектор  $\vec{E}$  каждого цуга можно разложить на две перпендикулярные составляющие ( $\vec{E}_\parallel$  и  $\vec{E}_\perp$  на рис.143); при этом и сам цуг разложится на два цуга, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. В результате волна естественного света оказывается представленной в виде двух поляризованных во взаимно



перпендикулярных плоскостях волн, причем на каждую из них вследствие равновероятности всех направлений поляризации в естественном свете приходится по половине полной интенсивности волны. Схематически это можно отразить, рисуя равное количество черточек и точек вдоль луча (рис.142,б внизу).

Свет, состоящий из естественного (естественная компонента) и поляризованного (поляризованная компонента), называется **частично поляризованным**. В нем, как и в естественном свете, представлены все перпендикулярные к лучу направления электрического вектора, но одно из них, а именно направление вектора  $\vec{E}_{\text{пол}}$  в поляризованной компоненте, является преимущественным. Для случая, представленного на рис.142,в, это преимущественное направление перпендикулярно плоскости чертежа, что отражено на нижнем рисунке преобладанием числа точек над числом черточек.

Для получения и исследования поляризованного света существуют специальные **поляризационные устройства**. Все они независимо от конкретной конструкции (принцип действия различных поляризационных устройств рассматривается в конце § 38) обладают общим свойством пропускать от луча только их составляющие с определенным направлением электрического вектора, которое называется **направлением пропускания** поляризационного устройства. Эта ситуация изображена на рис.143: от падающего луча с амплитудным значением электрического вектора  $\vec{E}$  поляризационное устройство пропускает лишь составляющую луча вдоль направления пропускания  $N_1 N_2$  с амплитудным значением электрического вектора  $\vec{E}_{\parallel}$ .

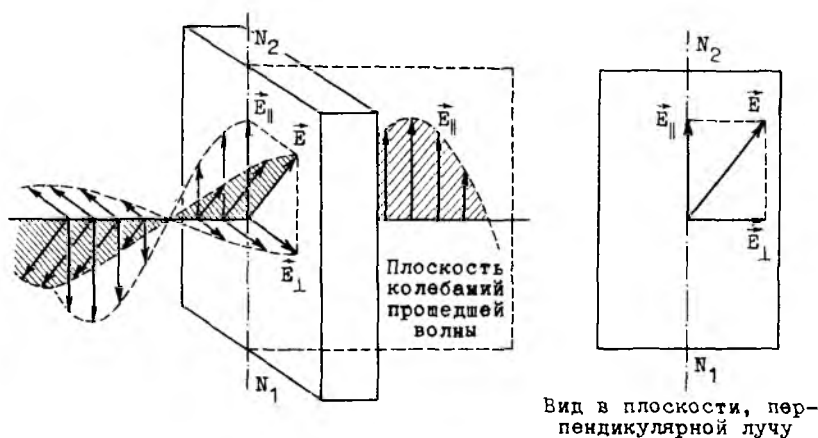


Рис.143

Отсюда следует, что поляризационное устройство можно использовать в качестве по л я р и з а т о р а: естественный свет, проходя через поляризационное устройство (поляризатор) становится плоско поляризованным, поскольку от каждого цуга пройдут составляющие с общей плоскостью колебаний, проходящей через направление пропускания.

Поляризационное устройство можно применять и для выяснения характера поляризации света, т.е. в качестве а н а л и з а т о р а. С этой целью исследуемый свет направляют на поляризационное устройство (анализатор) и, поворачивая последнее вокруг направления луча, следят за изменением интенсивности прошедшего света. Как видно из рис.143, амплитуды электрического вектора  $\vec{E}$  падающего и  $E_{\parallel}$  прошедшего цугов связаны соотношением:  $E_{\parallel} = E \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между электрическим вектором  $\vec{E}$  падающего цуга и направлением пропускания поляризационного устройства. Возводя это соотношение в квадрат, найдем для интенсивности  $I_1$ , обусловленной отдельным  $i$ -м цугом:  $I_1 = I_{10} \cos^2 \alpha_1$ , где  $I_{10}$  и  $I_1$  - интенсивности соответственно до и после анализатора. Интенсивность света, прошедшего анализатор, получим, суммируя эти выражения по всем цугам, пересекающим за секунду перпендикулярную лучу единичную площадку:  $I = \sum I_1 = \sum I_{10} \cos^2 \alpha_1$ .

Если падающий свет плоско поляризован, то для всех цугов углы  $\alpha_1$  одинаковы ( $\alpha_1 = \alpha$ ) и, следовательно,  $I = \cos^2 \alpha \sum I_{10} = I_0 \cos^2 \alpha$ :

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (36.1)$$

где  $I$  - интенсивность света, прошедшего анализатор.  $I_0$  - интенсивность падающего света.  $\alpha$  - угол между направлением электрического вектора падающей волны и направлением пропускания анализатора. Формула (36.1) носит название з а к о н а М а л ю с а. Согласно закону Малюса при повороте анализатора вместе с углом  $\alpha$  изменяется интенсивность прошедшего света, достигая через каждые  $90^\circ$  поочередно своих максимальных и минимальных значений. Максимумы наблюдаются, когда направление вектора  $\vec{E}$  падающей волны и направление пропускания совпадают ( $\alpha = 0 \rightarrow \cos 2\alpha = 1 \rightarrow I = I_0$  - проходит весь падающий свет), а минимумы - когда эти направления взаимно перпендикулярны ( $\alpha = \pi/2 \rightarrow \cos 2\alpha = 0 \rightarrow I = 0$  - анализатор не пропускает света). График зависимости интенсивности прошедшего света от угла  $\alpha$  дан на рис.144,а.

Если на анализатор падает естественный свет, то при повороте анализатора интенсивность прошедшего света изменяться не будет, оставаясь равной половине интенсивности падающего света. В случае частично поляризованного света интенсивность  $I_{\text{ест}}$ , прошедшая от его естественной компоненты, при вращении анализатора остается постоян-

ной:  $I_{\text{ест}} = \frac{1}{2} I_{\text{ест},0}$ . В то время как интенсивность  $I_{\text{пол}}$ , прошедшая от поляризованной компоненты, изменяется согласно закону Малюса:  $I_{\text{пол}} = I_{\text{пол},0} \cos^2 \alpha$ . В результате наблюдаемая интенсивность  $I$  прошедшего света будет периодически изменяться, не обращаясь, однако, в нуль при максимальном затемнении (рис.144,б).

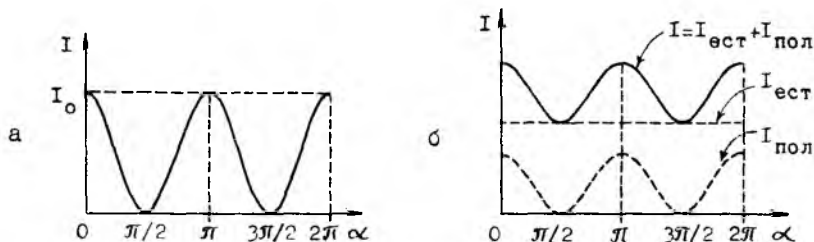


Рис.144

Рассматривая прохождение света через поляризационное устройство, мы считали последнее идеальным, пренебрегая потерями световой энергии в нем за счет отражения и поглощения. Строго говоря, в законе Малюса (36.1) под  $I_0$  следует понимать не интенсивность падающего света, а несколько меньшую величину, учитывающую эти потери. Отражается от поверхностей поляризационных устройств обычно всего несколько процентов падающей энергии, однако потери на поглощение в некоторых из них (поляроиды, турмалин, см. § 38) достаточно велики.

### § 37. ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ ДВОЙКОПРЕЛОМЛЯЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ

С поляризационными эффектами мы сталкиваемся прежде всего при прохождении светом оптически анизотропных сред, т.е. веществ, оптические свойства которых в различных направлениях неодинаковы. Анизотропия вещества может быть обусловлена как анизотропией структуры молекул (атомов, ионов), из которых оно состоит, так и характером их взаимного расположения. Первый фактор играет основную роль для жидких и газообразных анизотропных веществ, поскольку здесь, вообще говоря, отсутствует строгое упорядочение в расположении атомов, в то время как у кристаллических твердых тел анизотропия оптических свойств обусловлена главным образом характером расположения атомов в узлах кристаллической решетки.

Скорость распространения световой волны в веществе определяется показателем преломления вещества:  $v = \frac{c}{n}$ . Напомним, что показатель преломления выражается через диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ :  $n = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon}$  (считаем  $\mu = 1$ , так как большинство прозрачных сред являются слабыми магнетиками), которая в свою очередь связана с ди-

электрической восприимчивостью  $\kappa$  вещества:  $\epsilon = 1 + \kappa$ . Диэлектрическая восприимчивость, будучи коэффициентом пропорциональности между вектором поляризации  $\vec{P}$  и напряженностью  $\vec{E}$  электрического поля ( $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ ), характеризует реакцию среды на воздействие электрического поля. Следовательно, скорость распространения электромагнитной световой волны  $v = \frac{c}{n} = c/\sqrt{1+\kappa}$  зависит от того, как воздействует на среду электрический вектор волны.

В обычных изотропных средах все направления равноправны: вектор поляризации  $\vec{P}$  всегда направлен по напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и его модуль не зависит от направления  $\vec{E}$ , поэтому диэлектрическая восприимчивость  $\kappa$ , как и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и показатель преломления  $n$  среды, являются скалярными величинами. В анизотропных средах неравноправие направлений проявляется в том, что модуль и направление вектора поляризации существенно зависят от ориентации вектора  $\vec{E}$  по отношению к характерным физически выделенным направлениям в среде, вследствие чего величины  $\kappa$ ,  $\epsilon$  и  $n$  описываются матрицами. Строгая математическая трактовка оптических явлений в анизотропных средах выходит за рамки общего курса физики, и мы ограничимся упрощенным рассмотрением проблемы.

Зависимость показателя преломления от направления становится наглядной, если из интересующей нас точки среды отложить в каждом направлении отрезок, длина которого численно равна значению  $n$  для данного направления, и через концы отрезков провести поверхность (что означает "показатель преломления в данном направлении" и как пользоваться указанной поверхностью для определения скорости волны, мы уточним позже). Для большого класса так называемых двоякопреломляющих кристаллов, о которых пойдет речь в настоящем параграфе, эту поверхность можно приближенно считать эллипсоидом. Изучение двоякопреломляющих кристаллов, у которых все три полуоси эллипсоида различны, выходит за рамки нашего курса, и мы ограничимся рассмотрением таких кристаллов, у которых эллипсоид показателя преломления является эллипсоидом вращения: две его полуоси равны друг другу ( $n_o$ ), так что сечение, проходящее через его центр перпендикулярно третьей полуоси ( $n_e$ ), представляет собой окружность радиуса  $n_o$  (рис.145).

У положительных кристаллов, представителем которых является кварц,  $n_o < n_e$  и эллипсоид вытянутый (рис.145,а); у отрицательных кристаллов, типичным представителем которых является исландский шпат ( $\text{CaCO}_3$ ),  $n_o > n_e$  и эллипсоид показателя преломления сплюснутый (рис.145,б). Для обоих случаев характерно то, что в кристалле существует физически выделенное направление

ние вдоль полуоси  $n_e$ , которое называется оптической осью кристалла, в то время как все направления, перпендикулярные оптической оси, равноправны - такие кристаллы называются одноосными.

Численные значения  $n_o$  и  $n_e$ , а также ориентация оптической оси относительно характерных кристаллографических направлений в кристалле определяются конкретной структурой кристаллической решетки. Так, у исландского шпата  $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,486$  (для  $\lambda = 5893\text{\AA}$ ), а направление оптической оси совпадает с направлением кратчайшей пространственной диагонали кристалла естественной огранки (рис.146). Подчеркнем, что в монокристалле эллипсоиды показателя преломления одинаковы во всех точках - такая среда анизотропна, но однородна.

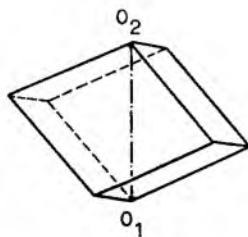
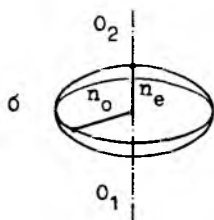
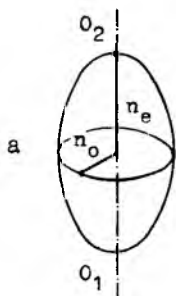


Рис.145

Рис.146

Распространение света в одноосном кристалле можно описать, применяя принцип Гюйгенса, а для этого необходимо сначала выяснить, как распространяется в таком кристалле элементарное световое возмущение. Рассмотрим световое колебание с электрическим вектором  $\vec{E}$  в некоторой точке положительного кристалла и будем интересоваться его распространением по всевозможным направлениям. Оказывается, что для каждого направления распространения вектор  $\vec{E}$  раскладывается в кристалле на составляющие, две из которых  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ , перпендикулярные рассматриваемому направлению, распространяются в виде отдельных волн (продольная составляющая вектора  $\vec{E}$  не будет распространяться в этом направлении в силу поперечности световых волн). Составляющая  $\vec{E}_e$  лежит в плоскости, проходящей через оптическую ось и рассматриваемое направление - эта плоскость называется главной плоскостью для данного направления; составляющая  $\vec{E}_o$  перпендикулярна главной плоскости (рис.147,б; исходный вектор  $\vec{E}$  и его продольная составляющая не изображены).

12-1403

Как пояснялось ранее, скорость распространения световой волны зависит от того, как воздействует на среду электрическое поле волны, поэтому для векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  она определяется значением показателя преломления в направлении этих векторов - именно в этом смысле следует понимать эллипсоид показателя преломления.

Векторы  $\vec{E}_o$ , будучи по построению перпендикулярными главной плоскости, перпендикулярны оптической оси (см. рис.147, а, б, в), поэтому скорость их распространения  $v_o$  в любом направлении определяется значением  $n_o$  показателя преломления и, следовательно, во всех направлениях одна и та же:

$$v_o = \frac{c}{n_o}. \quad (37.1)$$

Таким образом, колебания составляющих  $\vec{E}_o$ , перпендикулярных главным плоскостям, распространяются от каждой точки как в обычной изотропной среде - в виде сферической волны, которая по этой причине называется обыкновенной (ordinary), или о-волной.

С распространением составляющих  $\vec{E}_e$ , лежащих в главных плоскостях, дело обстоит иначе. Как видно из рис.147, а, б, в, значение  $n$  в направлении вектора  $\vec{E}_e$  существенно зависит от направления распространения. Для направления распространения, перпендикулярного оптической оси (рис.147, а), вектор  $\vec{E}_e$  параллелен оптической оси и значение  $n$  максимально и равно  $n_e$ , следовательно, скорость распространения в этом направлении  $v_e = c/n_e$  минимальная. По мере приближения направления распространения к направлению оптической оси значение  $n$  уменьшается (см. последовательно рис.147, а, б, в), следовательно, скорость  $v_e = \frac{c}{n}$  растет и для направления распространения вдоль оптической оси (рис.147, в) становится равной скорости обыкновенной волны:  $v_e = \frac{c}{n_o} = v_o$ , так как вектор  $\vec{E}_e$  перпендикулярен

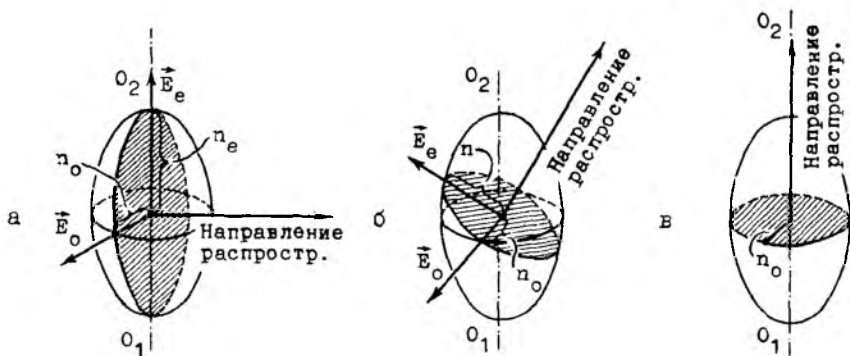


Рис.147

оптической оси. Фронт волны, представляющей собой распространение колебаний составляющих  $E_e$ , лежащих в главных плоскостях, изображен вместе со сферическим фронтом обыкновенной волны на рис.148,а — он представляет собой эллипсоид вращения. Аналогичная картина для отрицательного кристалла представлена на рис.148,б; здесь  $v_o < v_e$ , так как у отрицательного кристалла  $n_o > n_e$ . Волну, представляющую собой распространение составляющих  $E_e$ , лежащих в главных плоскостях, вследствие ее необычного характера называли **н** **е** **о** **б** **ы** **к** **н** **о** **в** **е** **н** **н** **о** **й** (extraordinary), или *e*-волной. Поскольку в направлении оптической оси скорости *o*- и *e*-волн одинаковы, фронты обеих волн имеют общие точки при пересечении с оптической осью.

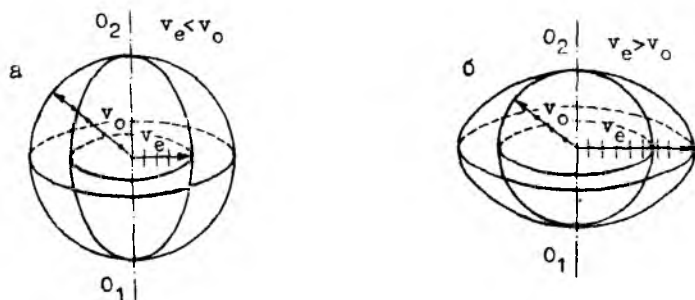


Рис.148

Подведем краткий итог. В одноосных двоякопреломляющих кристаллах световые колебания распространяются от каждой точки в виде двух волн: обыкновенной (со сферическим фронтом) и необыкновенной (с эллипсоидальным фронтом), причем в обыкновенной волне электрический вектор перпендикулярен главной плоскости, а в необыкновенной — лежит в главной плоскости для любого направления распространения.

### § 38. ПОСТРОЕНИЕ ГОЛГЕНСА ДЛЯ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Пусть на плоскую поверхность одноосного кристалла падает плоская световая волна, причем направление оптической оси лежит в плоскости падения (рис.149,а; направление оптической оси изображено штриховой линией). Каждая точка поверхности кристалла, до которой доходит возмущение, становится источником двух вторичных волн, распространяющихся в кристалле: сферической обыкновенной волны (как и в изотропной среде) и необыкновенной волны с эллипсоидальным фронтом. Фронт падающей волны  $AD$  доходит до поверхности кристалла неодновременно: когда колебание с некоторой фазой приходит в точку  $C$ , колебания с той же фазой от точек  $A$  и  $B$  уже распространятся в кристалле в виде вторичных волн на соответствующие расстояния.

Фронты обыкновенной и необыкновенной волн получим, проводя огибающие поверхности (в нашем случае – плоскости) к фронтам вторичных волн. Лучи строим как прямые линии, идущие от вторичных источников в точки касания фронтов вторичных волн с общим фронтом волны. (Заметим, что для необыкновенных лучей такая процедура не совпадает с обычной, согласно которой лучи проводятся как нормали к фронту, однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашего курса.)

Таким образом, один пучок лучей, падающий на двоякопреломляющий кристалл, порождает в нем два преломленных пучка – это явление носит название **двоиногo лучепреломления** (отсюда и происходит название кристаллов – двоякопреломляющие). Если падающий пучок лучей достаточно узкий и кристаллическая пластинка не слишком тонкая, то преломленные лучи пространственно разделяются (рис.149,б), что удобно для экспериментального изучения их свойств, которые заключаются в следующем.

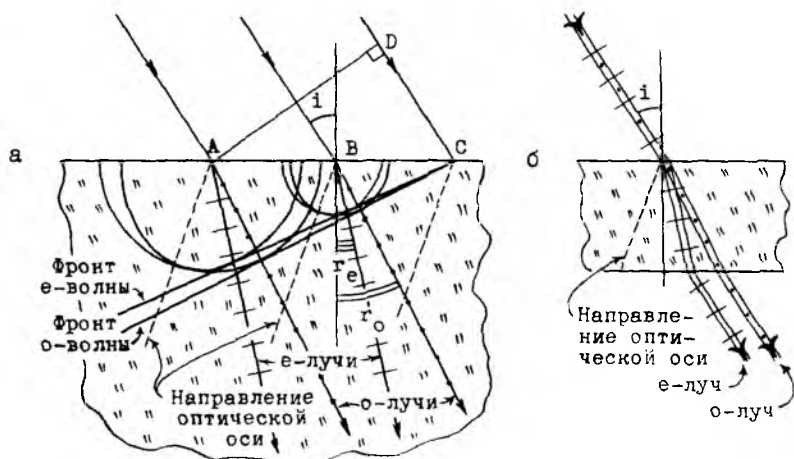


Рис.149

Во-первых, обыкновенные лучи подчиняются обычным законам преломления, а именно преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром к поверхности кристалла и отношение синуса угла падения  $i$  к синусу угла преломления  $r$  равно показателю преломления обыкновенного луча и не зависит от угла падения:  $\sin i / \sin r = n_o = \text{const}$ . Для необыкновенных лучей эти законы не выполняются. Такой вывод непосредственно следует из того, что построение обыкновенных лучей ничем не отличается от случая изотропной среды, а для необыкновенных лучей оно существенно иное.



Во-вторых, как обыкновенный, так и необыкновенный луч плоско поляризованы. Как мы видели, электрический вектор в  $o$ -волне перпендикулярен главной плоскости, а в  $e$ -волне лежит в главной плоскости. В случае, представленном на рис.149, главная плоскость для обоих лучей одна и та же - она совпадает с плоскостью чертежа, так что обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях (направление электрического вектора в этих лучах отобразено соответственно точками и черточками).

Рассмотрим два случая прохождения естественного света через одноосный кристалл, когда не происходит пространственного разделения лучей. Если выбрать такое направление падающих лучей, при котором обыкновенный луч должен распространяться вдоль оптической оси кристалла, то, как показывает построение Гюйгенса (рис.150), фронты  $o$ - и  $e$ -волн совпадают. Следовательно, луч пойдет в направлении оптической оси кристалла, не разделяясь на два - этим обстоятельством можно воспользоваться для экспериментального определения направления оптической оси в кристаллах.

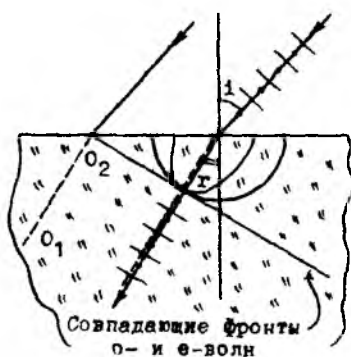


Рис.150

Другой случай представлен на рис.151: лучи падают нормально на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла так, что направление оптической оси параллельно поверхности пластинки. Построение Гюйгенса снова приводит к одинаковым направлениям распространения обыкновенного и необыкновенного лучей, однако это не означает, что свет не претерпевает никаких изменений. В толще пластинки у каждого луча фронт  $e$ -волны постепенно отстает от фронта  $o$ -волны (в случае положительного кристалла, для которого и приведен рис.151), что отражается на характере поляризации световой волны, выходящей из пластинки - к этой ситуации мы вернемся в §§ 39,40.

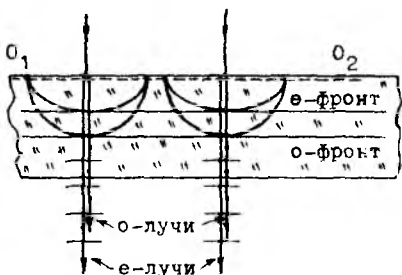


Рис.151

На явлении двойного лучепреломления основан принцип действия большинства поляризационных устройств. В самом деле, поскольку обыкновенный и необыкновенный лучи плоско поляризованы, то для того чтобы превратить двоякопреломляющий кристалл в поляризационное устройство, достаточно каким-либо образом избавиться от одного из этих лучей. В природе существуют д и х р о и ч н ы е кристаллы, в которых вследствие неодинаковых условий распространения о- и е-лучей один из них практически полностью поглощается даже при достаточно малой толщине кристалла. Такие кристаллы, типичным представителем которых является турмалин, сами по себе являются поляризационными устройствами; обычно из них нарезают плоскопараллельные пластинки, распиливая монокристалл вдоль оптической оси, чтобы падающий луч не изменял своего направления, как это было показано ранее (рис.151). В так называемых п о л я р о и д а х мельчайшие кристаллики дихроичного вещества нанесены на поверхность прозрачной пленки при соблюдении одинаковой ориентации их оптических осей, в результате чего поляризующее действие всей поверхности такое же, как у единого монокристалла. Поляризационные устройства из дихроичных веществ имеют два недостатка: во-первых, в них наряду с ненужным лучом заметно поглощается и рабочий луч, что приводит к потере в интенсивности при поляризации, во-вторых, вследствие зависимости поглощения от частоты, белый свет после их прохождения приобретает окраску.

Этих недостатков лишены поляризационные устройства, в которых используются прозрачные двоякопреломляющие кристаллы. Типичным примером такого рода устройств является п р и з м а Н и к о л я (николь), которая представляет собой призму из монокристалла исландского шпата, распиленную под определенным углом и склеенную канадским бальзамом — прозрачным веществом, показатель преломления которого  $n = 1,550$  имеет промежуточное значение между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в исландском шпате:

$n_e > n > n_o$  (рис.152). Угол разреза делают таким, чтобы угол падения  $i$  обыкновенного луча на границе раздела сред был больше предельного угла  $i_{пр}$ , определяемого, как известно, условием:

$\sin i_{пр} = n/n_o$ . Тогда обыкновенный луч испытает полное внутреннее отражение от прослойки и уйдет в сторону, в то время как необыкновенный луч беспрепятственно пройдет через прослойку и другую часть призмы. Напомним, что полное внутреннее отражение происходит на границе раздела двух сред, когда свет

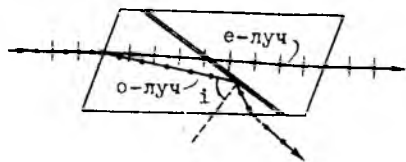


Рис.152

падает из оптически более плотной на оптически менее плотную среду и угол падения больше предельного угла. Оба эти условия выполнены для обыкновенного луча, так как  $n_o > n$  и  $i > i_{пр}$ . Необыкновенный луч не испытает полного внутреннего отражения, так как для него при задаваемом призмой направлении распространения показатель преломления исландского шпата меньше показателя преломления канадского бальзама.

### § 39. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим интерференционную схему (рис.153), в которой интерферирующие лучи приобретают разность фаз за счет различия скоростей  $o$ - и  $e$ -волн в двоякопреломляющей среде. Параллельный пучок лучей естественного монохроматического света проходит последовательно поляризатор  $P_1$ , плоскопараллельную пластинку толщиной  $a$ , вырезанную из одноосного двоякопреломляющего кристалла параллельно его оптической оси и расположенную перпендикулярно падающим лучам, и второе поляризационное устройство  $P_2$ . Направления пропускания  $N_1 N_2$  первого и  $N_1' N_2'$  второго поляризационных устройств составляют с оптической осью  $O_1 O_2$  пластинки острые углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

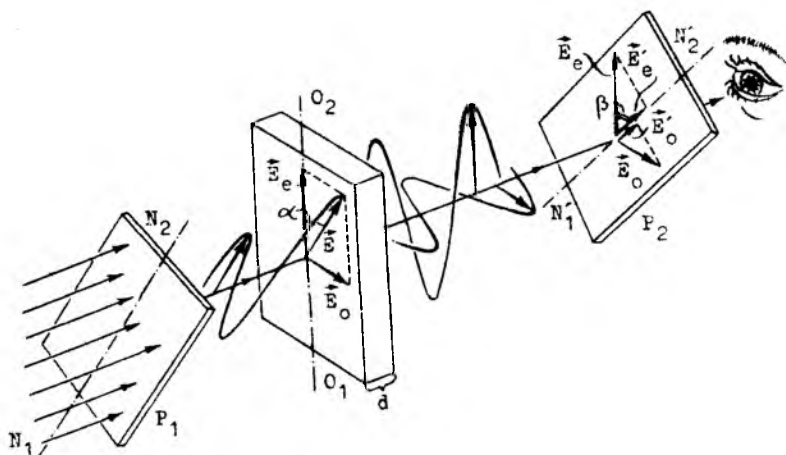


Рис.153

Поляризатор  $P_1$  поляризует естественный свет, так что на пластинку падают лучи волн, электрические векторы  $\vec{E}$  которых составляют один и тот же угол  $\alpha$  с направлением ее оптической оси. В пластинке вектор  $\vec{E}$  раскладывается на две составляющие  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ , которые, как было показано ранее (рис.151), образуют  $o$ - и  $e$ -лучи, распространяющиеся по одному и тому же направлению. Так как скорости  $o$ - и  $e$ -волн различны, колебания векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  при прохождении пластинки

приобретают сдвиг по фазе. Его можно определить по формуле (19.4), где о.р.х. равна разности оптических путей  $n_o d$  и  $n_e d$  о- и е-лучей:

$$\varphi_e - \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} (\text{о.р.х.}), \quad \text{о.р.х.} = d (n_o - n_e). \quad (39.1)$$

Этот сдвиг фаз одинаков для всех лучей и, следовательно, постоянен во времени, однако колебания векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  не интерферируют, так как их направления взаимно перпендикулярны. Поляризационное устройство  $P_2$  пропускает от каждого из векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  их составляющие  $\vec{E}'_o$  и  $\vec{E}'_e$  вдоль направления пропускания  $N_1'N_2'$ , делая тем самым колебания сонаправленными: для векторов  $\vec{E}'_o$  и  $\vec{E}'_e$  выполнены все три условия когерентности и они интерферируют.

Проследить за описанными выше последовательными разложениями электрических векторов вдоль луча удобно в проекции на плоскость, перпендикулярную лучу (рис.154): здесь сам луч изображается точкой, а все электрические векторы лежат в плоскости чертежа. Как видно из этого рисунка, амплитуды  $E_o$ ,  $E_e$ ,  $E'_o$ ,  $E'_e$  колебаний соответствующих векторов выражаются через амплитуду  $E$  электрического вектора волны, падающей на пластинку, следующим образом:

$$\begin{aligned} E_o &= E \sin \alpha, & E'_o &= E \sin \alpha \sin \beta, \\ E_e &= E \cos \alpha, & E'_e &= E \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (39.2)$$

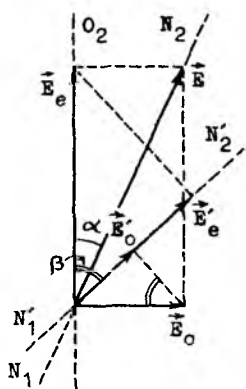


Рис.154

Как выглядит интерференционная картина, если смотреть на поверхность пластинки навстречу лучам? Если пластинка строго плоскопараллельна, а падающий свет монохроматичен, как это пока предполагалось, то условия прохождения через интерференционную схему одинаковы для всех падающих параллельных лучей. Поэтому пластинка будет равномерно освещенной и иметь цвет, соответствующий длине волны падающего света. При этом интенсивность существенно зависит от толщины пластинки, достигая своих максимального и минимального значений, когда согласно (19.5) о.р.х. (39.1) равна соответственно четному и нечетному числу полуволн:

$$\begin{aligned}
 d(n_o - n_e) &= m\lambda && - \text{условие максимумов,} \\
 d(n_o - n_e) &= (2m+1)\frac{\lambda}{2} && - \text{условие минимумов.}
 \end{aligned}
 \tag{39.3}$$

Если пластинка неоднородна по толщине, то условия интерференции одинаковы для тех участков, где толщина постоянна. Например, в случае ступенчатой пластинки (рис.155,а) интенсивность изменяется от одной ступеньки к другой, оставаясь постоянной в пределах отдельной ступеньки, а у пластинки в форме клина (рис.155,б) интерференционная картина представляет собой чередование темных и светлых полос равной толщины.

Если падающий свет существенно немонахроматический, например белый, то интерференционная картина становится многоцветной. Действительно, условия интерференции для монохроматических волн с разной длиной волны, входящих в состав излучения, неодинаковы, как это следует из формул (39.3): в оптической разности хода  $d(n_o - n_e)$  одних длин волн уложится целое (или близкое к целому), других — полуцелое (или близкое к нему) число. Первые цвета будут представлены с заметной интенсивностью, а вторые ослабятся, что и определит окраску

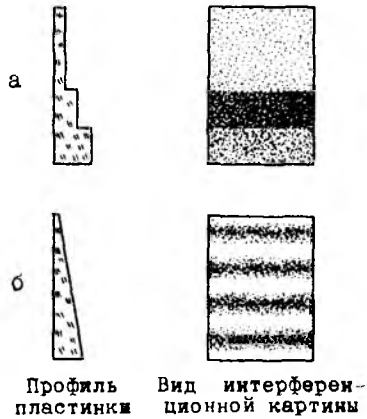


Рис.155

в соответствующем месте интерференционной картины. В случаях, представленных на рис.155, разные ступеньки будут по-разному окрашены и полосы на клине будут цветными. Как и при интерференции в тонких пленках, немонахроматичность излучения существенно ограничивает допустимую толщину пластинки.

Выясним теперь, как зависит интерференционная картина от взаимной ориентации направлений пропускания поляризационных устройств. При произвольных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  интенсивность света в некоторой точке интерференционной картины, согласно (16.5), (16.6) и (39.2), равна:

$$I_{\alpha\beta} = (E_{s1} \sin\beta)^2 + (E_{c1} \cos\beta)^2 + 2E_1^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta \cos(\varphi_o - \varphi_e),$$

где  $(\varphi_o - \varphi_e)$  — разность фаз колебаний векторов  $E_o'$  и  $E_e'$ .

Повернем одно из поляризационных устройств, например поляризатор  $P_1$ , на  $90^\circ$ . Подставляя в формулы (39.2)  $\alpha' = (\alpha + \pi/2)$  вместо  $\alpha$ , найдем значения амплитуд  $E_o'$  и  $E_e'$  для этого случая:

$$E_o' = E \cos\alpha \sin\beta, \quad E_e' = -E \sin\alpha \cos\beta.$$

Разные знаки у  $E_o'$  и  $E_e'$  означают, что векторы  $E_o'$  и  $E_e'$  имеют противоположные направления, в чем легко убедиться, осуществляя построение этих векторов при новом положении поляризатора  $P_1$ , как это сделано на рис.156. Изменение знака у одного из складываемых коле-

баний эквивалентно изменению разности фаз на  $\pi$ , поэтому для интенсивности теперь имеем

$$I_{\alpha',\beta} = (E \cos \alpha \sin \beta)^2 + (E \sin \alpha \cos \beta)^2 - 2E^2 \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta \cos(\varphi_e - \varphi_o)$$

Складывая  $I_{\alpha,\beta}$  и  $I_{\alpha',\beta}$ , получаем

$$I_{\alpha\beta} + I_{\alpha'\beta} = E^2(\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) = E^2 = I_0,$$

где  $I_0$  — интенсивность падающей на пластинку волны. Таким образом, две

интерференционные картины — исходная и получающаяся поворотом поляризатора  $P_1$  на  $90^\circ$  — оказываются дополнительными в том смысле, что при их наложении получилось бы равномерное световое поле с интенсивностью  $I_0$  падающего на пластинку света (одна картина дополняет другую до  $I = I_0 = \text{const}$ ).

Этот результат иллюстрирует рис. 157: если  $I_{\alpha\beta}(x)$  — график распределения

интенсивности в направлении оси  $x$  некоторой интерференционной картины, то интенсивность в дополнительной картине есть  $I_0 - I_{\alpha\beta}(x)$ . Отсюда, в частности, следует, что при повороте одного из поляризационных приспособлений на  $90^\circ$  максимумы переходят в минимумы и наоборот, а цвета в каждой точке интерференционной картины сменяются на дополнительные (два цвета называют дополнительными, если они в сумме дают белый).

Из изложенного выше становится ясной роль поляризатора  $P_1$ , который на первый взгляд может показаться лишним: ведь все интерферирующие лучи, независимо от направления вектора  $\vec{E}$  исходного луча, падающего на пластинку, приобретают при прохождении пластинки одинаковые разности фаз и, казалось бы, должны давать совпадающие интерференционные картины. На самом деле это не так: два падающих на пластинку луча одинаковой интенсивности, но с взаимно перпендикулярной поляризацией дают дополнительные интерференционные картины, т.е. в совокупности равномерное световое поле с интенсивностью одного падающего луча. Естественный свет можно рассматривать как совокупность пар взаимно перпендикулярно поляризованных лучей. Каждая пара даст интенсивность, равную интенсивности одного падающего луча, а следовательно, весь падающий световой поток интенсивности  $I_0$  даст интенсивность  $I_0/2$  такую же, как при отсутствии пластинки.

#### § 40. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ И КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Как было показано ранее (рис. 151), при нормальном падении световой волны на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси, выходящие из пластинки линейно поляризованные  $o$ - и  $e$ -лучи имеют общее направление. Поэтому их можно рассматривать как один луч, но с более сложным характером поляризации. Составляющие  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  каждого луча взаимно перпендикулярны и в момент выхода из пластинки имеют разность фаз

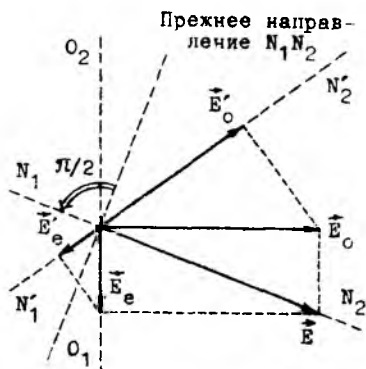


Рис. 156

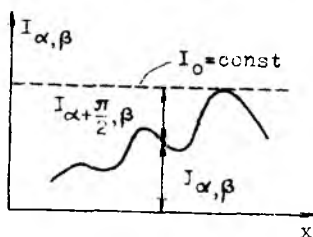


Рис. 157

$$\varphi_e - \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} d (n_o - n_e), \quad (40.1)$$

как это следует из формул (39.1). Из курса механики известно, что в результате сложении двух взаимно перпендикулярных колебательных движений одинаковой частоты получается движение по эллипсу. Применительно к нашей задаче, когда складываются колебания двух взаимно перпендикулярных векторов  $E_o$  и  $E_e$ , это означает, что конец суммарного вектора  $E_{oe} = E_o + E_e$  описывает эллипс. После пластинки каждое мгновенное значения вектора  $E_{oe}$  распространяется со скоростью  $c$ , следовательно, в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от пластинки, электрический вектор цуга описывает такой же эллипс, но с запаздыванием по времени  $t = x/c$ . Мгновенная картина цуга, т.е. распределение векторов  $E_{oe}$  вдоль луча в фиксированный момент времени, представлена на рис. 158: концы электрических векторов, перпендикулярных лучу, упрутся в винтовую линию на поверхности цилиндра с эллиптическим сечением. Таким образом, каждый цуг после прохождения пластинки становится поляризованным по эллипсу.

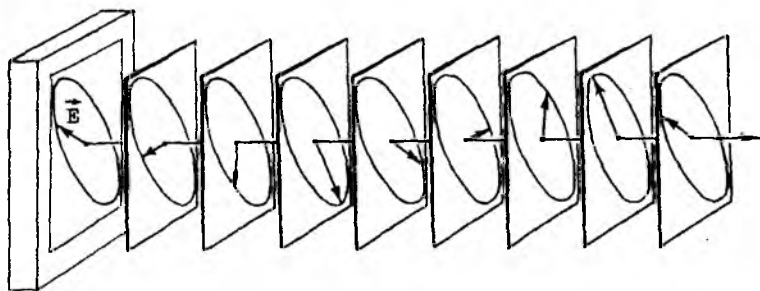


Рис. 158

Если падающий на пластинку свет естественный, то в зависимости от амплитуды ( $E$ ) и ориентации ( $\alpha$ ) вектора  $E$  падающего цуга (обозначения те же, что на рис. 153) амплитуды  $E_o = E \sin \alpha$  и  $E_e = E \cos \alpha$  колебаний его составляющих  $E_o$  и  $E_e$  различны, и в результате выходящий из пластинки свет представляет собой совокупность цугов, поляризованных по разным эллипсам со всевозможными ориентациями осей и эксцентриситетами - такой свет по существу мало отличается от естественного. Если, однако, падающий на пластинку свет плоско поляризован, как это имеет место в интерференционной схеме на рис. 153, то все выходящие из пластинки цуги волн поляризованы одинаково: эллипсы имеют одинаковые эксцентриситеты и общую ориентацию осей. Такую волну, состоящую из одинаково эллиптически поляризованных цугов, называют эллиптически поляризованной волной.

В частных случаях, при определенных соотношениях фаз и амплитуд векторов  $E_o$  и  $E_e$ , эллиптическая поляризация переходит в линейную и круговую. Если колебания векторов  $E_o$  и  $E_e$  при прохождении пластинки не приобретают сдвига фаз, т.е.  $\varphi_e - \varphi_o = 2\pi n$ , то свет не претерпит изменений и выйдет из пластинки линейно поляризованным в прежней плоскости. Для этого согласно (40.1) толщина пластинки должна удовлетворять условию  $d (n_o - n_e) = n\lambda$  (пластинка в целую волну).

Если в момент выхода из пластинки фазы колебаний векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  противоположны, т.е.  $\varphi_e - \varphi_o = (2m+1)\pi$ , то свет останется линейно поляризованным, но плоскость поляризации изменится: направления электрических векторов в падающей и прошедшей пластинку волнах симметричны относительно оптической оси пластинки (рис.159). Такая ситуация возникает, если толщина пластинки удовлетворяет условию  $d(n_o - n_e) = (2m+1)\lambda/2$  (пластинка в полуволну).



Рис.159

Наконец, если приобретаемая в пластинке разность фаз равна нечетному числу  $\pi/2$ , т.е.  $\varphi_e - \varphi_o = (2m+1)\pi/2$ , и амплитуды колебаний векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  одинаковы, то эллипс переходит в окружность — такой свет называют **поляризованным по кругу**, или **циркулярно поляризованным**. Для его получения, во-первых, толщина пластинки должна удовлетворять условию  $d(n_o - n_e) = (2m+1)\lambda/4$  (пластинка в четверть волны) и, во-вторых, направление вектора  $\vec{E}$  в падающей волне (направление пропускания поляризатора  $N_1N_2$  на рис.153) должно составлять угол  $\alpha = 45^\circ$  с направлением оптической оси пластинки — это обеспечит равенство амплитуд:  $E_o = E_e = E/\sqrt{2}$ .

Заметим, что во всех рассмотренных частных случаях характер поляризации легко угадывается без привлечения математического аппарата. Достаточно изобразить взаимно перпендикулярные векторы  $\vec{E}_o$ ,  $\vec{E}_e$  и мысленно проследить за изменением во времени их суммарного вектора при заданной разности фаз. Подчеркнем также, что пластинки в целую волну, в половину и четверть волны оказывают описанное выше поляризующее действие только на свет той длины волны, для которой они рассчитаны.

#### § 41. ИСКУССТВЕННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

Оптическую анизотропию, подобную той, которой обладают двоякопреломляющие кристаллы, можно создать и в обычных изотропных средах, если подвергнуть их соответствующему внешнему воздействию. В таких случаях говорят об **искусственной анизотропии**.

В изотропном твердом теле искусственную анизотропию можно вызвать, подвергая его механическим воздействиям. В частности, если в однородном и изотропном прозрачном образце из стекла, плексигласа и т.п. создана однородная деформация растяжения или сжатия в некотором направлении, то оно становится физически выделенным (расстояния между атомами в этом направлении изменяются больше, чем в других), в то время как все перпендикулярные к нему направления остаются равноправными. Такой образец в оптическом отношении подобен одноосному двоякопреломляющему кристаллу, причем направление наибольшей деформации играет роль оптической оси (на рис.160 направление оптической оси обозначено штриховой линией).



При не слишком больших напряжениях  $\sigma$  возникающая разность показателей преломления ( $n_o - n_e$ ), которая служит мерой оптической анизотропии, пропорциональна напряжению:

$$|n_o - n_e| = K \sigma, \quad (41.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $K$  зависит от свойств вещества. В случае неоднородной деформации напряжения в разных точках тела различны, а следовательно, неодинаковы и разности показателей преломления  $n_o - n_e$ . Если поместить такой деформированный образец вместо двоякопреломляющей пластинки в интерференционной схеме рис. 153, то на его поверхности возникнет сложная интерференционная картина. Так как интенсивность в каждой точке картины определяется оптической разностью хода  $o$ - и  $e$ -лучей  $d(n_o - n_e)$ , где  $d$  - толщина образца, то она согласно (41.1) в конечном счете зависит от напряжения в соответствующем месте образца. Это позволяет изучать характер напряжений, возникающих в различных конструкциях, изготовляя прозрачные модели этих конструкций и подвергая их при соблюдении условий моделирования соответствующим деформациям.

Рис.160

Искусственную анизотропию можно вызвать, помещая вещество, находящееся в твердом, жидком или газообразном состоянии, в электрическое поле - так называемый эффект Керра. Под действием электрического поля дипольные моменты молекул (собственные в случае полярных молекул и индуцированные полем в случае неполярных) ориентируются вдоль направления напряженности поля, которое тем самым становится физически выделенным в веществе, в то время как перпендикулярные к нему направления остаются равноправными. Следовательно, характер возникающей анизотропии соответствует одноосному двоякопреломляющему кристаллу, причем направление напряженности поля играет роль оптической оси. Теория и опыт показывают, что индуцируемая полем разность показателей преломления ( $n_o - n_e$ ) пропорциональна квадрату напряженности  $E$  электрического поля:

$$|n_o - n_e| = k E^2, \quad (41.2)$$

где коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от свойств вещества.

Явление Керра находит ряд важных применений вследствие своего быстрого действия: время установления анизотропного состояния, соответствующего мгновенному значению напряженности поля, ничтожно мало (до  $10^{-12}$  с.) Роль конструктивного элемента обычно играет ячейка Керра, представляющая собой наполненную жидкостью прозрачную кювету,

в которую погружены пластины конденсатора (рис.161). Если поместить ячейку Керра вместо двоякопреломляющей пластинки в интерференционной схеме рис.153, то интенсивность прошедшего света, которая зависит от оптической разности хода  $o$ - и  $e$ -лучей  $d(n_o - n_e)$  ( $d$  - длина обкладок конденсатора), будет согласно (41.2) следовать за изменением напряжения на конденсаторе, причем практически безынерционно. Таким способом можно модулировать интенсивность световой волны, подавая на обкладки конденсатора переменное напряжение, создавать быстродействующие фотозатворы (при скрещенных поляризационных устройствах ячейка не пропускает света при  $E = 0$  и начинает пропускать свет практически одновременно с включением поля) и т. д.

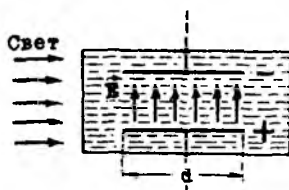


Рис.161

Искусственная анизотропия возникает в веществе и под действием магнитного поля (эффект Коттон - Мутон), при этом

$$|n_o - n_e| = D H^2, \quad (41.3)$$

где  $H$  - напряженность магнитного поля,  $D$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества. Явление Коттон - Мутон обусловлено ориентацией магнитных моментов молекул во внешнем магнитном поле и в этом смысле подобно явлению Керра - в обоих случаях механизм эффекта связан с ориентацией молекул под действием поля. Поэтому оба эффекта подчиняются одинаковым закономерностям: роль оптической оси в том и другом случае играет направление напряженности поля; квадратичная зависимость от поля означает, что оба эффекта четные, т.е. не зависят от изменения направления поля на противоположное; коэффициенты  $K$  и  $D$  убывают с ростом температуры, поскольку при этом усиливается дезориентирующее действие теплового движения молекул; наконец, оба эффекта обладают дисперсией, т.е. коэффициенты  $K$  и  $D$  зависят от длины световой волны.

#### § 42. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В природе существуют вещества, называемые оптически, или естественно, активными, которые обладают способностью поворачивать плоскость поляризации света: по мере распространения в такой среде вектор  $E$  (и соответственно  $H$ ) волны поворачивается в плоскости, перпендикулярной лучу, и при выходе из среды составляет некоторый угол  $\phi$  со своим первоначальным направлением. В этом можно убедиться на следующем опыте (рис.162): если поместить оптически активное вещество между двумя скрещенными поляри-

зационными устройствами, то наступает просветление, однако, поворачивая анализатор (на рис.162 не показан) на некоторый угол  $\varphi$ , можно снова добиться полного затемнения. Это доказывает, что свет после прохождения вещества остался плоско поляризованным, но плоскость колебаний вектора  $\vec{E}$  повернулась на соответствующий угол.

Угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации пропорционален пути  $l$ , пройденному светом в оптически активном веществе:

$$\varphi = \alpha l, \quad (42.1)$$

где постоянная вращения  $\alpha$  зависит от свойств вещества, а также существенно зависит от длины световой волны ( $\sim 1/\lambda$ ), т.е. явлению вращения плоскости поляризации присуща сильная дисперсия (см. далее мелкий шрифт и формулу (42.3)).

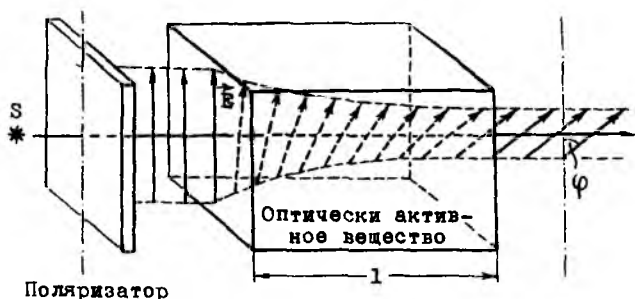


Рис.162

К оптически активным относятся некоторые кристаллы (типичный представитель - кварц), жидкости как чистые (скипидар), так и представляющие собой раствор оптически активных веществ в неактивных растворителях (водный раствор сахара, спиртовые растворы хинина, камфоры и др.), а также пары оптически активных веществ. Для растворов и паров угол поворота плоскости поляризации пропорционален концентрации  $C$ , т.е. в (42.1)  $\alpha = [\alpha] C$ :

$$\varphi = [\alpha] C l. \quad (42.2)$$

Это связано с тем, что для некристаллических веществ вращающее действие обусловлено анизотропией самих молекул, так что суммарный эффект пропорционален числу активных молекул, оказавшихся на пути луча. На законе (42.2) основаны экспериментальные методы определения концентрации оптически активных веществ в растворах по углу вращения плоскости поляризации проходящего через них света (поляриметрия, сахариметрия).

Количественно эффект вращения зависит от направления падающих лучей по отношению к характерному физически выделенному направлению

в кристалле или отдельной оптически активной молекуле, однако направление вращения для данного вещества вполне определенное. В соответствии с этим все оптически активные вещества подразделяются на право- и левовращающие: первые поворачивают плоскость поляризации по часовой стрелке, если смотреть навстречу лучу, вторые – против часовой стрелки (рис.162 дан для левовращающего вещества). Этим объясняется также возможность проявления оптической активности жидкостями и газами: несмотря на хаотичность в ориентации оптически активных молекул по отношению к направлению падающего луча, все они поворачивают плоскость поляризации в одном направлении, что и обуславливает отличный от нуля суммарный эффект. (Сравните со случаем искусственной анизотропии: там жидкость или газ из анизотропных молекул не проявляют свойств двойкопреломляющей среды, если хаотическую ориентацию молекул не упорядочить каким-либо способом, например, действием электрического или магнитного поля.)

Оптически активные вещества существуют в природе в двух модификациях таких, что структурные элементы (у кристаллов – элементарная ячейка кристаллической решетки, у жидкостей и газов – характер расположения атомов в молекуле) одной модификации являются зеркальными образами другой. На рис.163,а представлены две взаимозеркальные (энантиоморфные) формы кристалла кварца, а на рис.163,б схематически изображены два зеркальных изомера органической молекулы, состоящей из атома углерода и четырех различных радикалов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и  $R_4$  – оба изомера отличаются друг от друга взаимной перестановкой двух радикалов. (Расположив кусок стекла перпен-

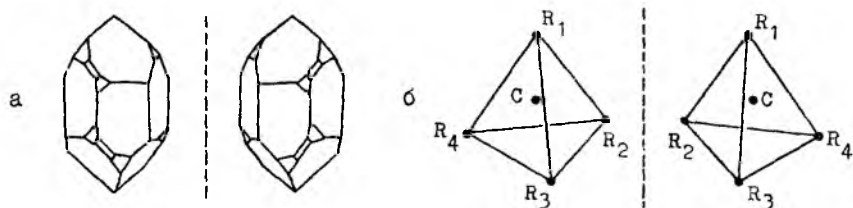


Рис.163

дикулярно плоскости чертежа вдоль штриховой линии на рис.163,а,б, и глядя сбоку сквозь стекло, можно одновременно видеть одну модификацию и зеркальный двойник другой, образованный отраженными лучами, и убедиться, что они совпадают.) Обе модификации имеют одинаковые оптические свойства, но отличаются направлением вращения: одна из них является правовращающей, другая левовращающей. Вещества, структурные элементы которых обладают центром симметрии, т.е. совпадают со своими зеркальными образами, не проявляют вращательной способности.

Феноменологическая теория явления вращения плоскости поляризации была дана Френелем, который предположил, что в оптически активных веществах световые волны, поляризованные по правому и левому кругу, распространяются с различными скоростями.

Всякий вектор, изменяющийся по закону гармонического колебания  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $E_0$ , можно представить как сумму двух векторов  $\vec{E}_d$  и  $\vec{E}_g$  одинаковых модулей  $E_d = E_g = \frac{1}{2} E_0$ , расположенных симметрично относительно вектора  $\vec{E}$  и вращающихся с угловой скоростью  $\omega$  в противоположных направлениях (рис.164). Действительно, вектор  $\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_g$  направлен по биссектрисе угла, образованного векторами  $\vec{E}_d$  и  $\vec{E}_g$ , и его проекция на это направление равна  $E = E_d \cos \omega t + E_g \cos \omega t = E_0 \cos \omega t$ .

Соответственно всякую плоско поляризованную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ , можно представить как совокупность двух распространяющихся в том же направлении циркулярно поляризованных волн с противоположными направлениями вращения электрического вектора, т.е. поляризованных по правому и левому кругу (отсюда индексы: droit-правый, gauche - левый).

Пусть  $\vec{E}_d$  и  $\vec{E}_g$  - мгновенные значения вращающихся векторов в точке  $x = 0$  оптически активной среды в момент времени  $t$  (рис.165). Если векторы  $\vec{E}_d$  и  $\vec{E}_g$  распространяются с различными скоростями  $v_d$  и  $v_g$ , то путь  $l$  они проходят за разные проме-

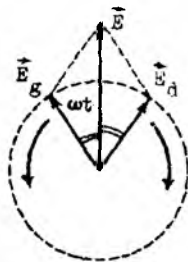


Рис.164

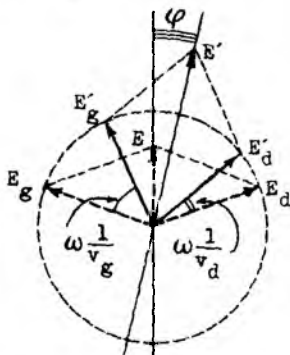


Рис.165

жутки времени  $t_d = l/v_d$  и  $t_g = l/v_g$ . Поэтому в точке  $x = l$  в момент времени  $t$  их мгновенные значения  $\vec{E}'_d$  и  $\vec{E}'_g$  будут такими, какими они были в точке  $x = 0$  на  $t_d$  и  $t_g$  секунд раньше. Углы поворота  $\angle E'_d O E_d$  и  $\angle E'_g O E_g$  векторов  $\vec{E}_d$  и  $\vec{E}_g$  равны  $\omega l/v_d$  и  $\omega l/v_g$ , а угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_g$  и  $\vec{E}' = \vec{E}'_d + \vec{E}'_g$ , определяющий поворот плоскости поляризации, будучи углом между биссектрисами углов  $\angle E O E_d$  и  $\angle E'_g O E'_g$ , равен полусумме углов  $\omega l/v_d$  и  $\omega l/v_g$  между соответственными сторонами:

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega l (1/v_g - 1/v_d).$$

Вводя показатели преломления  $n_d = c/v_d$  и  $n_g = c/v_g$  для лучей с правой и левой круговой поляризацией и учитывая, что  $\omega/c = 2\pi/Tc = 2\pi/\lambda$ , имеем окончательно:

$$\varphi = \frac{\pi l}{\lambda} (n_g - n_d). \quad (42.3)$$

Сравнивая (42.3) с экспериментальной формулой (42.1), видим, что постоянная вращения  $\alpha = \pi(n_g - n_d)/\lambda$  обратна длине волны, чем и объясняется сильная дисперсия вращательной способности (вклад в зависимость  $\alpha(\lambda)$  дают и зависимости  $n_d(\lambda)$  и  $n_g(\lambda)$ ). Вопрос о том, как связано различие показателей преломления  $n_d$  и  $n_g$  с конкретной структурой вещества, выходит за рамки нашего курса.

Способность вращать плоскость поляризации приобретают все вещества, если их поместить в магнитное поле и направить световую волну вдоль линий напряженности (эффект Фарадея). Угол поворота плоскости поляризации пропорционален напряженности поля  $H$  и пути  $l$ , пройденному светом в намагниченном веществе:

$$\varphi = \rho l H, \quad (42.4)$$

где коэффициент пропорциональности  $\rho$  зависит от свойств вещества и длины световой волны. Довольно слабый для большинства веществ эффект Фарадея сильно проявляется в ферромагнетиках.

Отметим, что характер вращения плоскости поляризации в магнитном поле отличается от случая естественной оптической активности при направлениях луча по и против напряженности поля поворот плоскости поляризации происходит в противоположных направлениях (если поставив зеркало, заставить луч пройти вдоль поля туда и обратно, то эффект удвоится). В этом смысле эффект Фарадея принципиально отличается от рассмотренной ранее искусственной анизотропии в магнитном поле, где магнитное поле играет чисто вспомогательную роль, ориентируя анизотропные молекулы и тем самым проявляя уже заложенную в них анизотропию, которая не проявлялась при  $H = 0$  вследствие хаотичной ориентации молекул.

#### § 43. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ПРИ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В рассмотренных ранее случаях поляризация света обуславливалась анизотропией среды, через которую он проходит. Однако поляризация происходит и на границе раздела двух обычных изотропных диэлектриков. Если падающий свет естественный, то преломленный и отраженный лучи частично поляризованы, причем преимущественное направление колебаний электрического вектора преломленной волны лежит в плоскости падения, а отраженной — перпендикулярно к ней (рис.166). Степень поляризации зависит от показателя преломления второй среды относительно первой  $n_{21} = n_2/n_1$  и от угла падения  $i$ , причем при угле падения  $i_E$ , для которого

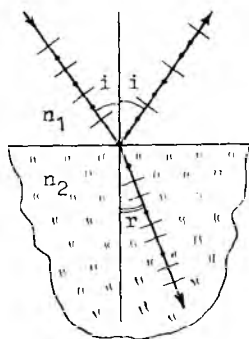


Рис.166

$$\operatorname{tg} i_E = n_{21}, \quad (43.1)$$

отраженный луч поляризован практически полностью, а степень поляризации преломленного луча максимальна. Формулу (43.1) называют за-

ном Брюстера, а определяемый ею угол  $i_E$  — углом Брюстера (рис. 167). Объяснение этого закона дано в конце §47.

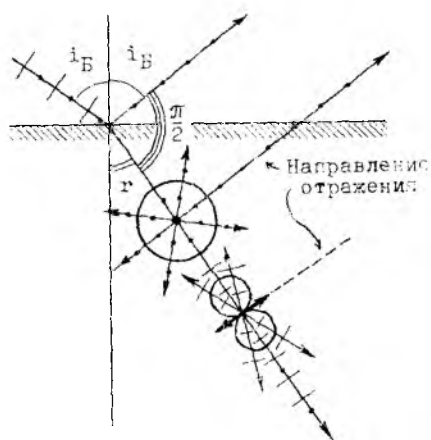


Рис. 167

Преломленный луч даже при падении света под углом Брюстера поляризован лишь частично. Степень его поляризации можно существенно повысить, заставив свет пройти последовательно через несколько параллельных друг другу прозрачных пластинок, поскольку на каждую последующую пластинку падает свет со все более сильно выраженной поляризацией в плоскости падения. Такой прибор (стопа Стольтова) иногда используется в качестве поляризационного устройства.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

§ 44. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Целый ряд оптических явлений неразрывно связан с механизмом взаимодействия света с веществом. В настоящей главе рассматриваются те из них, которые могут быть объяснены в рамках волновой оптики.

При описании взаимодействия света с веществом будем считать, что силы, связывающие заряженные частицы среды (электроны и ионы), являются квазиупругими, т.е. пропорциональны смещению  $\vec{r}$  заряженной частицы относительно положения равновесия:  $\vec{f} = -k \vec{r}$ . Как известно из механики, в этом случае частица, будучи выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе, совершает свободные гармонические колебания с круговой частотой  $\omega_0$ , зависящей от массы частицы  $m$  и константы квазиупругой связи  $k$ :  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Все такие колебания можно разделить на две группы: колебания электронов относительно практически неподвижных ионов (рис.168,а) и колебания ионов в многоатомных молекулах и твердых телах друг относительно друга при практически неизменных состояниях электронов (рис.168,б). Частоты собственных колебаний электронов соответствуют видимой, ультрафиолетовой и рентгеновской частям спектра, в то время как у ионов они существенно меньше (отчасти потому, что массы ионов в тысячи раз больше массы электрона) и располагаются в инфракрасной области.

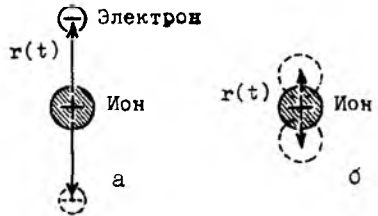


Рис.168

Колеблющаяся заряженная частица, как и всякий движущийся с ускорением заряд, излучает электромагнитные волны и, следовательно, теряет энергию, что должно приводить к затуханию колебаний. Это обстоятельство можно формально учесть, введя аналог силы трения в механике — некую тормозящую силу, пропорциональную скорости  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  заряда:  $\vec{f} = -b \frac{d\vec{r}}{dt}$ . С ее учетом уравнение движения заряженной частицы примет вид

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} - b \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (44.1)$$

Его решением, как известно из механики, являются свободные затухающие колебания. Система, которая будучи выведенной из состояния равновесия и затем предоставленной самой себе начинает совершать ко-



лебания, называется **о с ц и л л я т о р о м**. Таким образом, в рассматриваемой модели среда представляет собой совокупность осцилляторов.

Когда на вещество падает монохроматическая световая волна, ее электрическое поле, напряженность которого в фиксированной точке изменяется со временем по закону  $E = E_0 \sin \omega t$ , действует на находящуюся в этой точке частицу зарядом  $e$  с силой  $F = eE = eE_0 \sin \omega t$  (сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля волны, существенно меньше по величине и ей обычно пренебрегают). Уравнение движения заряженной частицы теперь принимает вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} - b \frac{d\vec{r}}{dt} + eE_0 \sin \omega t. \quad (44.2)$$

Это - дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, причем сила  $F = eE_0 \sin \omega t$ , действующая на частицу со стороны волны, играет роль вынуждающей силы (в проекции на ось  $x$ , выбранную в направлении вектора  $E_0$ , уравнение (44.2) принимает вид, который обычно приводится в учебниках:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x - b \frac{dx}{dt} + f_0 \sin \omega t$ , где  $f_0 = eE_0$ ). Установившимся решением этого уравнения, как известно, является вынужденное колебание:

$$\vec{r} = \vec{A} \sin(\omega t + \varphi), \quad (44.3)$$

$$\text{где } \vec{A} = \frac{eE_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \beta = \frac{b}{2m}.$$

Из выражения для амплитуды видно, что световые волны заметно возбуждают лишь те электроны, у которых частоты  $\omega_0$  собственных колебаний близки частотам  $\omega$  световых волн, т.е. лежат в видимой и ультрафиолетовой области спектра: для них разности  $\omega_0^2 - \omega^2$ , стоящие в знаменателе, малы и, следовательно, амплитуды вынужденных колебаний велики. Это наиболее слабо связанные в атоме электроны, для которых константы квазиупругой связи  $k$  достаточно малы (в квантовой модели - электроны незаполненных оболочек) - их называют **оптиче-скими** электронами. Колебания ионов и неоптических электронов практически не возбуждаются световой волной, так как для них разности  $\omega_0^2 - \omega^2$  велики (у первых  $\omega_0 \ll \omega$ , у вторых  $\omega_0 \gg \omega$ ) и соответственно малы амплитуды - эти колебания далеки от резонанса. Заметим также, что для частот волн, не лежащих в непосредственной близости к собственным частотам, хорошо работает приближение, в котором отсутствует затухание ( $b = 0$ ), и формулы (44.3) принимают более простой вид

$$\vec{r} = \vec{A} \sin \omega t, \quad \text{где } \vec{A} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (44.4)$$

Итак, под действием световой волны оптические электроны совершают вынужденные гармонические колебания с частотой падающей волны относительно неподвижных положительных зарядов (ионов). В результате атомы и молекулы становятся диполями с гармонически изменяющимися во времени электрическими моментами и сами начинают излучать вторичные световые волны той же частоты. Так как фазы вынужденных колебаний и падающей волны согласованы, то вторичные волны когерентны друг с другом и с падающей волной. Все итоговое излучение, возникающее вследствие взаимодействия падающей световой волны с веществом, включающее в себя отраженную, преломленную, а если имеет место рассеяние – и рассеянную волну, определяется как результат интерференции падающей и вторичных волн.

#### § 45. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Скорость  $v$  распространения световой волны в диэлектрической среде зависит от частоты  $\omega$  волны – это явление называется д и с п е р с и е й с в е т а. Поскольку скорость световой волны однозначно связана с показателем преломления  $n$  среды ( $v = c/n$ ), то теория дисперсии света сводится к установлению зависимости  $n(\omega)$ .

Характерный ход экспериментально наблюдаемой зависимости показателя преломления диэлектрической среды от частоты световой волны показан на рис.169 для кристалла NaCl. Мы видим, что за исключением

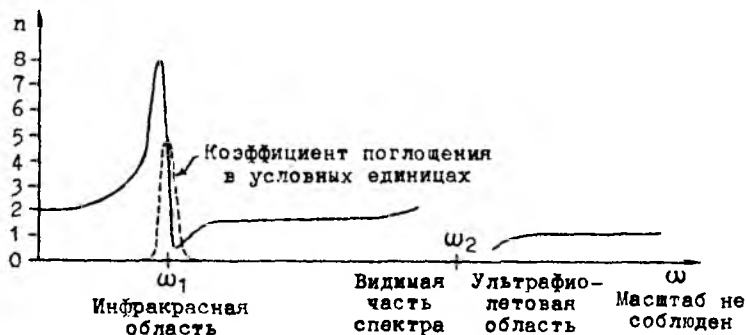


Рис.169

отдельных областей показатель преломления растет с ростом частоты – такое поведение показателя преломления называют н о р м а л ь н о й д и с п е р с и е й. В области нормальной дисперсии наблюдаемая зависимость  $n(\omega)$  хорошо аппроксимируется формулой

$$n = A + B \omega^2 + C \omega^4, \quad (45.1)$$

где  $A$ ,  $B$ , и  $C$  – константы, характеризующие вещество.

В окрестности некоторых частот ( $\omega_1$  и  $\omega_2$  на рис.169) монотонный характер зависимости  $n(\omega)$  нарушается, и кривая испытывает характерный излом. Эти области, где показатель преломления убывает с ростом частоты, называются областями аномальной дисперсии.

Аномальная дисперсия наблюдается вблизи частот, на которых вещество сильно поглощает свет. На рис.169 штриховой линией дан график зависимости коэффициента поглощения от частоты в одной из областей аномальной дисперсии (о коэффициенте поглощения см. § 46). Если частоты поглощения располагаются тесно, то зависимость  $n(\omega)$  имеет сложный вид. У прозрачных бесцветных веществ в видимой части спектра нет областей поглощения и дисперсия носит нормальный характер (стеклянная призма сильнее преломляет фиолетовые лучи, чем красные:  $n(\omega_{\text{ф}}) > n(\omega_{\text{кр}})$ ,  $\omega_{\text{ф}} > \omega_{\text{кр}}$ ). У окрашенных прозрачных веществ в видимой части спектра существуют области поглощения (чем и объясняется окраска этих веществ), а следовательно, и области аномальной дисперсии.

Элементарная теория дисперсии основывается на модели осцилляторов, описанной в предыдущем параграфе. Напомним, что показатель преломления  $n$  выражается через диэлектрическую восприимчивость  $\kappa$  ( $n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \kappa}$ ), которая является коэффициентом пропорциональности между вектором поляризации  $\vec{P}$  среды и напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ . Таким образом,  $\vec{P} = (n^2 - 1) \epsilon_0 \vec{E}$ , и задача о нахождении зависимости  $n(\omega)$  сводится к вычислению вектора поляризации как функции напряженности электрического поля монохроматической волны при прохождении последней через вещество.

Предположим сначала, что в каждой молекуле (атоме) имеется только один оптический электрон с частотой собственных колебаний  $\omega_0$ . Под действием электрического поля световой волны он совершает вынужденные колебания относительно неподвижного иона (рис.168, а), и в результате молекула становится диполем с электрическим моментом  $\vec{p}(t) = e \vec{r}(t)$ . Умножая это выражение на число молекул в единице объема  $N$ , находим вектор поляризации среды  $\vec{P} = N \vec{p} = N e \vec{r}(t)$ . Если не интересоваться пока областью частот в непосредственной близости к собственной частоте  $\omega_0$ , то для вынужденных колебаний можно воспользоваться приближенными формулами (44.4), с учетом которых

$$\vec{P} = N e \tilde{A} \sin \omega t = N e \frac{e \tilde{E}_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}.$$

Коэффициент пропорциональности  $\frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  в этой формуле, как мы видели, равен  $(n^2 - 1) \epsilon_0$ , откуда

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (45.2)$$

График этой зависимости  $n^2(\omega)$  представлен на рис.170 штриховой линией. Для выяснения хода кривой  $n^2(\omega)$  вблизи собственной частоты  $\omega_0$  пренебрегать затуханием нельзя и следует использовать строгие формулы (44.3). Мы, однако, не будем этого делать, а заметим лишь, что учет затухания сглаживает резонанс, делая амплитуду вынужденных колебаний при резонансе конечной. Это приводит к соответствующему сглаживанию кривой  $n^2(\omega)$ , которая принимает вид, изображенный на рис.170 сплошной линией. Извлекая квадратный корень, получаем искомую кривую  $n(\omega)$ , проведенную жирной линией.

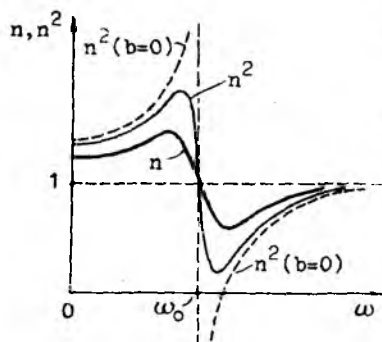


Рис.170

Если каждая молекула (атом, ион) содержит несколько оптических электронов, частоты собственных колебаний которых равны соответственно  $\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots, \omega_{ok}$ , то электрический момент молекулы равен сумме электрических моментов, обусловленных колебаниями каждого ее оптического электрона:  $\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^k e \vec{r}_i(t)$ . Выкладки, приведшие в случае одного электрона к формуле (45.2), теперь дадут

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2}, \quad (45.3)$$

и соответственно кривая  $n(\omega)$  будет иметь изломы в окрестностях каждой из собственных частот  $\omega_{oi}$  (рис.171). Сравнение этой теоретической

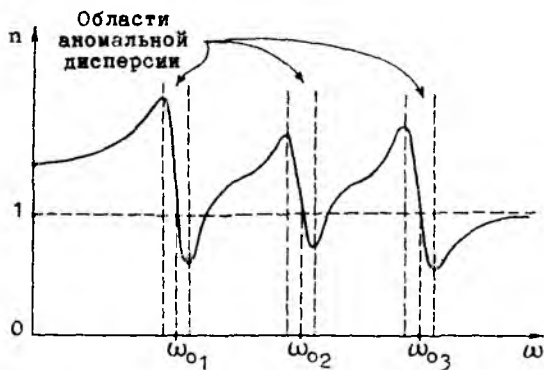


Рис.171

кой кривой  $n(\omega)$  с типичной экспериментальной кривой на рис.170 показывает, что элементарная теория дисперсии объясняет, по крайней

мере качественно, опытные данные, причем области аномальной дисперсии лежат в окрестностях частот собственных колебаний оптических электронов. Однако полной картины дисперсионных явлений классическая модель осцилляторов, даже в усовершенствованном виде, не дает и для строгого решения ряда задач необходимо привлекать квантовую теорию дисперсии.

Согласно формуле  $v = c/n$  свет в диэлектрической среде распространяется медленнее, чем в вакууме, так как  $n > 1$ . Поясним вкратце механизм такого изменения скорости света. Поскольку в рассматриваемой модели среда отличается от вакуума наличием осцилляторов, то, применяя принцип Гюйгенса, следует учитывать не только фиктивные вторичные источники, как при отсутствии среды, но и реальные вторичные излучатели - атомы и молекулы, возбуждаемые проходящей волной.

Пусть  $\Sigma(t)$  - положение в момент  $t$  фронта плоской световой волны, распространяющейся в веществе (рис.172). От фиктивных вторичных источников, заполняющих этот фронт и не изображенных на рис.172, волна за последующий малый промежуток времени  $\Delta t$  распространится на расстояние  $c \Delta t$ , и ее фронт  $\Sigma_{\Phi}$  займет положение  $\Sigma_{\Phi}(t+\Delta t)$ . За это же время  $\Delta t$  фронт волны  $\Sigma_{\text{в.т.}}$ , образованной реальными вторичными излучателями, расположенными на поверхности  $\Sigma(t)$ , хотя он и распростра-

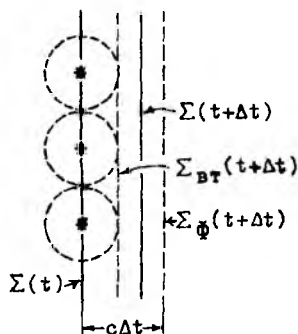


Рис.172

няется с той же скоростью  $c$ , отстанет от  $\Sigma_{\Phi}(t+\Delta t)$ , поскольку вынужденные колебания отстают по фазе от возбуждающей их волны (см. формулы (44.3)), и займет положение  $\Sigma_{\text{в.т.}}(t+\Delta t)$ . Результирующая волна, являющаяся суммой этих двух волн, имеет промежуточное значение фазы, т.е. ее фронт  $\Sigma(t+\Delta t)$  отстанет от  $\Sigma_{\Phi}(t+\Delta t)$ , а это и означает, что скорость волны в веществе меньше, чем в вакууме.

## § 46. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

При прохождении световой волны через вещество часть ее энергии поглощается, переходя во внутреннюю энергию вещества. Выведем формулу, показывающую, как изменяется интенсивность плоской световой волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ , в зависимости от пути  $l$ , который она проходит в среде.

Опыт показывает, что при прохождении очень тонкого слоя вещества толщиной  $\Delta x$  относительная убыль интенсивности, т.е. отношение

13<sup>x</sup> - 1403

изменения интенсивности  $dI$  в этом слое к интенсивности падающего света  $I(x)$  (рис. 173), пропорциональна толщине слоя:

$$\frac{dI}{I} = -K dx. \quad (46.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $K$ , зависящий от свойств вещества и длины световой волны, называется коэффициентом поглощения вещества (в общем случае, когда помимо поглощения имеет место рассеяние света, его называют коэффициентом экстинкции). Знак минус в формуле (46.1) необходим потому, что с ростом  $x$  ( $dx > 0$ ) интенсивность убывает ( $dI < 0$ ).

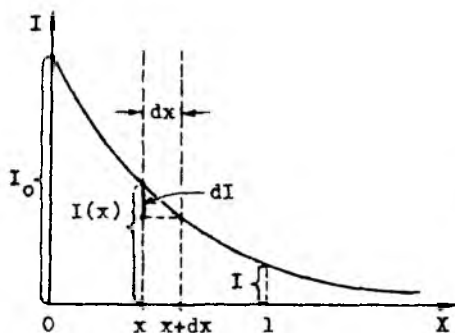


Рис. 173

Как следует из закона Бугера, коэффициент поглощения характеризует быстроту убывания интенсивности: обратная ему величина  $I_0 = 1/K$  определяет путь, при прохождении которого интенсивность света убывает в  $e \approx 2,7$  раз ( $I(I_0) = I_0/e$ ).

Для газов, а также для растворов поглощающего вещества в непоглощающем растворителе, коэффициент поглощения в свою очередь пропорционален концентрации  $c$  (закон Бера):

$$K = kc, \quad I = I_0 e^{-kcL}. \quad (46.3)$$

Закон Бера означает, что поглощенная энергия пропорциональна числу поглощающих частиц на пути световой волны. При больших концентрациях начинает сказываться взаимодействие между молекулами, которое приводит к изменению поглощательной способности молекул, и закон Бера нарушается.

Коэффициент поглощения существенно зависит от частоты световой волны. Это связано с механизмом, приводящим к потере энергии световой волной при прохождении через вещество. Во-первых, возбуждаемые падающей волной осцилляторы среды расходуют свою энергию не только на излучение вторичных волн, но также частично передают ее за счет

Чтобы найти связь между значениями интенсивности в начале ( $I_0 = I(0)$ ) и конце ( $I = I(l)$ ) пути конечной длины  $l$ , проинтегрируем равенство (46.1): правую часть — в пределах от  $I_0$  до  $I$ , левую — от 0 до  $l$ :

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = \int_0^l (-K dx) \rightarrow$$

$$\ln I - \ln I_0 = -Kl \rightarrow$$

$$I = I_0 e^{-Kl}. \quad (46.2)$$

Это — закон Бугера.

взаимодействий или при соударениях окружающим молекулам. Эта часть энергии переходит во внутреннюю энергию вещества, чем и объясняется поглощение в собственном смысле слова. Во-вторых, часть энергии вторичного излучения молекул приходится на рассеяние в стороны (она велика, например, для мутных сред, см. § 47), что также приводит к ослаблению проходящей волны и тем самым дает вклад в коэффициент поглощения. Величина как поглощенной, так и рассеянной энергии увеличивается с ростом амплитуды вынужденных колебаний, поэтому наиболее сильное поглощение наблюдается при резонансе — коэффициент поглощения имеет максимумы на частотах, равных частотам собственных колебаний осцилляторов среды.

У изолированных атомов частоты собственных колебаний оптических электронов приходятся на видимую и ультрафиолетовую части спектра и отстоят сравнительно далеко друг от друга, поэтому в разреженных парах металлов, в которых атомы практически не взаимодействуют друг с другом, зависимость  $K(\omega)$  имеет вид узких пиков (л и н и и поглощения), вне которых  $K = 0$ . На рис. 174 схематически (ширина линий поглощения сильно преувеличена) представлена зависимость коэффициента поглощения от длины волны для паров натрия в некотором диапазоне длин волн (у экспериментаторов принято характеризовать излучение не частотой, а длиной волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$  и говорить о зависимостях  $n(\lambda)$ ,  $K(\lambda)$ , и т.п. вместо  $n(\omega)$ ,  $K(\omega)$ , ...).

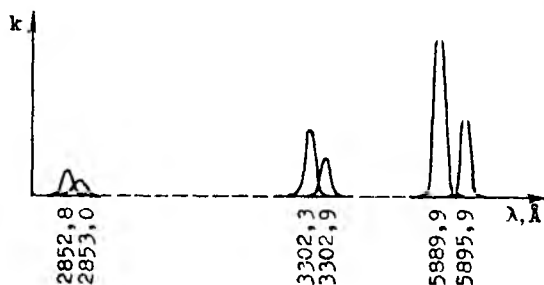


Рис. 174

У газов, состоящих из молекул, вместо узких линий наблюдаются довольно широкие полосы поглощения, в пределах которых коэффициент поглощения существенно отличен от нуля (исследование с использованием приборов с высокой разрешающей способностью показывает, что каждая полоса состоит из тесно расположенных узких линий). Кроме того, появляются полосы поглощения в инфракрасной области спектра, обусловленные колебаниями ионов. По мере повышения давления полосы расширяются и у конденсированных сред (жидкости,

твердые тела) имеют сложный характер, лишенный специфики спектров поглощения газов. Полную информацию о спектрах поглощения вещества можно получить по его спектрам испускания, которые рассматриваются в квантовой оптике и атомной физике: оба спектра по существу совпадают и представляют собой совокупность собственных частот осцилляторов, из которых состоит рассматриваемое вещество.

Все изложенное выше о дисперсии и поглощении в полной мере относится только к диэлектрическим средам. Металлы вследствие наличия у них свободных электронов плохо пропускают электромагнитные волны вплоть до рентгеновского диапазона частот и для света практически непрозрачны. Это связано не столько с сильным поглощением, сколько с высокой отражательной способностью металлов (у натрия - до 99,8%). Такое поведение металлов является следствием правила Ленца: свободные электроны под действием электрического поля падающей световой волны образуют индукционные токи, электромагнитное поле которых максимально противодействует вызвавшей их причине, т.е. гасит световую волну внутри металла.

#### § 47. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Среда, в которой оптические характеристики - показатель преломления и коэффициент поглощения, усредненные по областям, существенно меньшим длины световой волны  $\lambda$ , одинаковы во всех точках, оптически однородна. В такой среде вторичные источники в двух малых по сравнению с  $\lambda$  и одинаковых по объему элементах среды при одинаковых условиях возбуждения имеют одинаковые амплитуды и фазы. Проследим за распространением плоской монохроматической световой волны в оптически однородном веществе.

Пусть  $\Sigma$  - мгновенное положение фронта волны (рис.175). Легко видеть, что во всех направлениях, отличных от направления первичной волны, вторичные волны, идущие от точек этого фронта, взаимно гасятся. Действительно, для любого направления распространения  $\theta \neq 0$  каждому элементу среды  $\Delta V$  на фронте  $\Sigma$  найдется соответствующий элемент  $\Delta V'$  такой, что разность хода лучей, идущих от них в рассматриваемом направлении, равна  $\lambda/2$ , что обеспечит противоположность фаз колебаний и взаимное уничтожение последних. При этом весьма существенно, чтобы амплитуды и фазы колебаний, исходящих из элементов  $\Delta V$  и  $\Delta V'$ , были одинаковы, как это и имеет место в оптически однородной среде. Таким образом,



Рис.175



в оптически однородной среде световая волна сохраняет направление своего распространения.

В оптически неоднородной среде вследствие неодинаковости оптических характеристик в разных точках амплитуды и фазы вторичных источников в  $\Delta V$  и  $\Delta V'$  разные и приведенное рассуждение теряет силу. При прохождении таких веществ свет с заметной интенсивностью распространяется по всем направлениям — это явление называется *р а с с е я н и е м с в е т а*. Оптическая неоднородность может быть обусловлена наличием в однородной среде инородных частиц, размеры которых не слишком малы по сравнению с *длиной* световой волны (мутные среды). К мутным средам относятся прежде всего различные взвеси: твердых частиц в жидкости (суспензия) или газе (дым), капель жидкости в другой жидкости (эмульсия) или газе (туман), а также некоторые аморфные твердые тела вроде молочных стекол или опала.

Оптическая неоднородность возникает и в однородных по составу жидкостях и газах за счет флуктуаций концентрации, т.е. случайных отклонений значения концентрации от своего среднего значения — такие флуктуации всегда имеют место, являясь следствием хаотического характера движения молекул. Показатель преломления согласно (45.3) непосредственно связан с концентрацией молекул  $n$ , поэтому флуктуации концентрации приводят к оптической неоднородности и, следовательно, к рассеянию света. Флуктуации, обычно достаточно малые, становятся весьма значительными вблизи критических температур для ряда процессов. Так, например, сильное рассеяние наблюдается при приближении температуры газа или жидкости к критической точке (явление *к р и т и ч е с к о й о п а л е с ц е н ц и и*).

В тех случаях, когда размеры неоднородностей больше длины световой волны, наблюдаемая картина рассеяния имеет специфический вид и очень чувствительна к размерам и форме неоднородностей (укажем на такие явления, как радуга и гало вокруг солнца, вызванные наличием в земной атмосфере соответственно капелек и льдинок). Однако, если размеры неоднородностей меньше длины световой волны ( $\sim 0,2 \lambda$ ), интенсивность рассеянного света удовлетворяет общим закономерностям, установленным Рэлеем, в частности,

$$I(\theta, \lambda) \sim I_0 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\lambda^4}, \quad (47.1)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающей волны,  $\lambda$  — длина световой волны,  $\theta$  — угол между направлением наблюдения рассеянного света и направлением падающей волны.

Угловая зависимость интенсивности рассеянного света, определяемая множителем  $(1 + \cos^2 \theta)$ , наглядно отображается индикаторной

рассеяния, которая получается, если из некоторой точки в каждом направлении отложить отрезок, пропорциональный значению интенсивности  $I(\theta)$  для этого направления (рис. 176, пространственная индикатрисса получается вращением этой кривой вокруг направления падающей волны). Замечаем, что  $I(\theta) = I(\pi - \theta)$ , т.е. свет одинаково рассеивается вперед и назад.

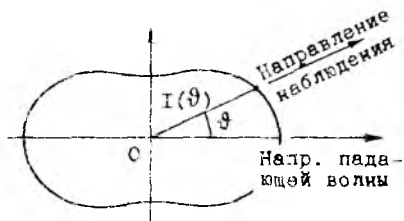


Рис. 176

Сильная обратная зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны ( $\sim 1/\lambda^4$ ) означает, что существенно интенсивнее рассеиваются волны с меньшей длиной волны, т.е. с большей частотой, и соответственно волна, проходящая в первоначальном направлении, обедняется высокими частотами. В частности, если через рассеивающую среду идет волна от источника белого света, то при наблюдении сбоку среда кажется голубоватой, а сам источник на просвет выглядит более красным. Земная атмосфера за счет флуктуаций рассеивает проходящий через нее солнечный свет — этим объясняется голубой цвет неба и изменение цвета солнца в зависимости от толщины слоя атмосферы, который проходят лучи (покраснение на закате).

При рассеянии происходит частичная поляризация света, причем свет, рассеянный по и против направления падающей волны ( $\theta = 0, \pi$ ), остается естественным, а свет, рассеянный под прямым углом ( $\theta = \pi/2$ ), оказывается полностью поляризованным с направлением колебаний электрического вектора, перпендикулярным плоскости, проходящей через направление наблюдения и направление падающей волны (рис. 177, а).

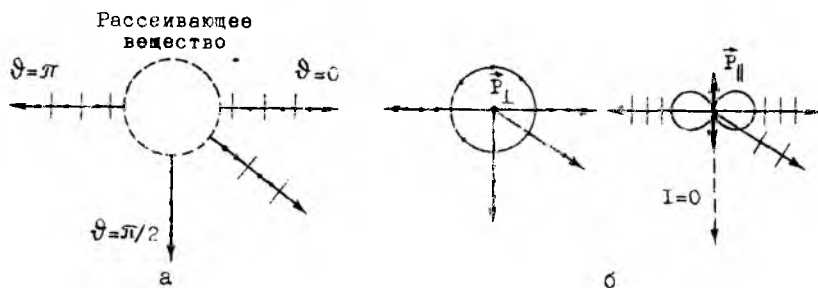


Рис. 177

Возникновение поляризации у рассеянного света имеет простое объяснение. Представим падающую волну естественного света в виде двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, с направлением электрического вектора, перпендикулярным плоскости чертежа — в первой волне и лежащим в этой плоскости — во второй. Эти волны возбуждают колебания оптических электронов в указанных направлениях, и среду можно рассматривать как совокупность двух рав-

ночисленных групп излучающих диполей, электрические моменты которых перпендикулярны плоскости чертежа ( $\vec{p}_\perp$ ) и лежат в ней ( $\vec{p}_\parallel$ ) — эти векторы изображены на рис. 177, б соответственно жирной точкой и двусторонней стрелкой.

Как мы видели ранее (см. с. 123 и рис. 95), диполь излучает неодинаково в различных направлениях. Пространственная диаграмма направленности излучения приведена на рис. 178, где длины отрезков с черточками пропорциональны интенсивности излучения в соответствующем направлении, а сами черточки указывают направление колебаний электрического вектора.

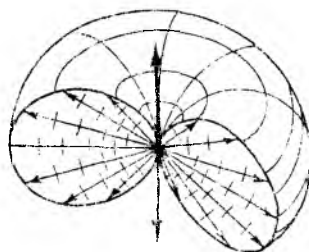


Рис. 178

Применительно к нашей задаче эта индикатрисса изобразится в сечении плоскости чертежа окружностью для диполей с  $\vec{p}_\perp$  и  $\phi$ -образной кривой для диполей с  $\vec{p}_\parallel$  (рис. 177, б). В направлении падающей волны и обратном диполи обоих типов излучают с одинаковой интенсивностью, давая в совокупности естественный свет. В направлении, перпендикулярном падающей волне, излучают только диполи с  $\vec{p}_\perp$ , чем и объясняется полная поляризация света, рассеянного в этом направлении. Для промежуточных направлений рассеянный свет поляризован частично, поскольку в них диполи с  $\vec{p}_\parallel$  излучают с меньшей интенсивностью, чем диполи с  $\vec{p}_\perp$ . Заметим, что описанная закономерность выполняется только для изотропных сред: в анизотропных средах направление вынужденных колебаний электронов не совпадает с направлением возбуждающего электрического вектора падающей волны, и приведенные рассуждения теряют силу.

Аналогичные рассуждения позволяют объяснить закон Брюстера, сформулированный в § 43. Составляющие  $E_\parallel$  и  $E_\perp$  электрического вектора преломленной волны, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные ей, возбуждают сонаправленные с ними колебания осцилляторов с дипольными моментами соответственно  $\vec{p}_\parallel$  и  $\vec{p}_\perp$  (изображены на рис. 167 вместе с индикатриссами излучения двусторонней стрелкой и жирной точкой). Диполи с  $\vec{p}_\parallel$ , как видно на рис. 167, не излучают в направлении, перпендикулярном преломленному лучу. Поэтому, если угол падения таков, что отраженные лучи перпендикулярны преломленному, как это имеет место на рис. 167, то в отраженной волне будут представлены только колебания электрического вектора, посылаемые диполями с  $\vec{p}_\perp$ . Эти колебания перпендикулярны плоскости падения, так что отраженная волна плоско поляризована. Из ортогональности отраженного и преломленного лучей следует, что угол преломления  $r = \pi - \pi/2 - i = \pi/2 - i$ , где  $i$  — угол падения (рис. 167). Подставляя это значение угла преломления в закон преломления  $\sin i / \sin r = n_{21}$ , получаем  $\text{tg } i = n_{21}$ . Тем самым мы доказали, что полная поляризация отраженной волны достигается при угле падения, равном углу Брюстера.

Учебное издание

Белов Дмитрий Владимирович

Электромагнетизм и волновая оптика

Зав. редакцией Л.А. Николаева

Редактор Е.Д. Егорушкина

Н/К

ЛР № 040414 от 27.03.92.

Подписано в печать 12.05.94.

Формат 60x90/16.

Бумага тип. №2.

Офсетная печать.

Усл. печ. л. 12,52

Уч.-изд. л. 12,52.

Тираж 1500 экз.

Заказ № 1403

Изд. № 5577.

Заказаное.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.

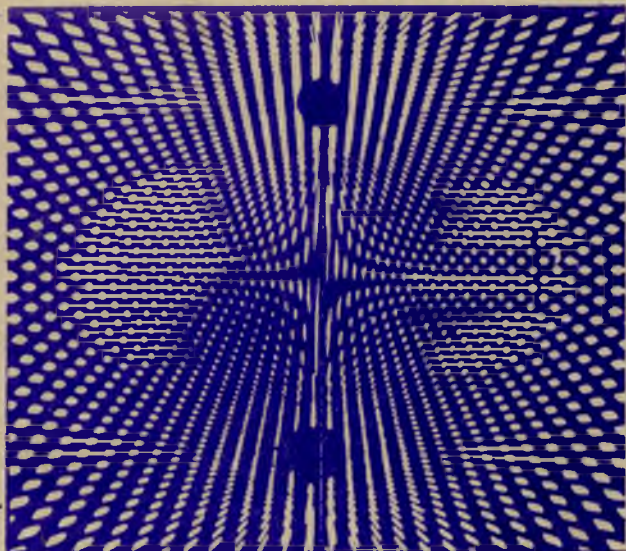
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.

119899, Москва, Ленинские горы.

Д. В. Белов

Издательство  
Московского  
университета



ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

---

И ВОЛНОВАЯ

---

ОПТИКА



---

1994