① Неопред. интеграл. Основные методы интегрирования.

Определение 1: первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ назыв. $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1: на $\langle a, b\rangle$ все первообр. для $f(x)$ отличаются постоянным слагаемым, или $\exists\, F_1(x)$ и $F(x)$ – первообр. для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$.

Док-во:

пусть $g(x) = F_1(x) - F(x)$, т. е. $g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Тогда по следствию из т. Лагранжа $g(x) = C$ на $\langle a, b\rangle$, откуда и следует ЧТД.

Определение 2: произвольн. первообр. для $f(x)$ называется неопред. интегралом, $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Теорема 2: $\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$; $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x) \pm \int g(x)$

Док-во: пусть $F(x)$ – перв.-я для $f(x)$,

Тогда $F(Ax)' = A \cdot f(x) = A \cdot F'(x)$.

пусть $G(x)$ перв-я для $g(x)$, тогда

$(F(x) \pm G(x))' = f(x) \pm g(x) = F(x)' \pm G(x)'$

вающая это мн-во, сумма длин которых $< \varepsilon$.
(какую бы маленькую ε мы ни взяли, найдется ~~...~~ $\{J\}$ с меньшей суммой интервалов).

Свойства множеств меры нуль:

Теорема 1. Всякое подмножество мер нуль (мн-ва) само — мн-во м.н.

Теорема 2 Объединение 2х мн-в м.н. также — мн. м.н.

Док-во: A и B — мн. м.н.; для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ сущ. конечная/счетная $\{J\}$, покрывающая A и такая ~~...~~ что $\sum_n |J_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, ($|J_n|$ — длина инт. J_n). для B — $\{J'_n\}$, покрыв. B и $\sum_n |J'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Система интервалов $J_1, J'_1, J_2, J'_2, \dots, J_n, J'_n$ конечн/счетна, покрывает $A \cup B$, а ее сумма —
$$\sum_n |J_n| + \sum_n |J'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следствие — объединение конечного (или счетного) числа мн. м.н. есть мн. м.н. —

Мн-во из точки x_1 – мн. м. н.
Из предыд. теорем следует, что конечное мн-во $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – мн. м. н.
Мн-во, не содержащее ни одного элем-та (пустое) – мн. м. н.
Если A – мн. м. н., – $\mu(A) = 0$.

Теорема 3 (критерий Лебега): для того, чтобы $f(x)$ была интегр. на $[a, b]$, необх. и дост., чтобы она была ограничена на этом отрезке и множество ее точек разрыва на $[a, b]$ имело меру нуль.

Следствия из кр. Лебега:

Теорема 4 Если $f(x)$ непрер. на отрезке, то она интегр. на нем.

Док-во: $f(x)$ непрер. $\Rightarrow$ она огр. на отрезке. Мн-во разрывов пусто $\Rightarrow$ имеет меру нуль.

Теорема 5: $f(x)$, $g(x)$ инт. на $[a, b]$; тогда $f(x)g(x)$ инт. на $[a, b]$.

Док-во: по кр. Лебега функции ограничены на $[a,b]$, множ-ва их отрезков имеют меру нуль. ($|f(x)| \le C_1$, $|g(x)| \le C_2$ $\forall x$ $[a,b]$, $\mu A = 0$, $\mu(B) = 0$).

$\Rightarrow |f(x)g(x)| \le C_1 C_2$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрер. в точке, то и их произведение непрерывно в ней. Поэтому каждая точка разрыва $f(x)g(x)$ принадлежит или A или B (или обеим мн-вам).

То есть $C \subset \underbrace{A \cup B}_{\text{объединение 2х множ. меры нуль}}$, из чего следует $\mu(C) = 0$.

Следствие: произведение любого конечного числа функций, инт. на $[a,b]$, интегрируемо на $[a,b]$.

Теорема 6: $f(x)$ инт. на $[a,b]$; тогда $|f(x)|$ также инт. на $[a,b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Док-во: каждая точка разрыва $|f(x)|$ является и точкой разрыва $f(x)$ $\Rightarrow$ мн-во имеет м.н. произв. интегр. суммы: $\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum |f(\xi_i)\Delta x_i|$

Если взять $\hat{T}_n$ (произвольн. нормальная последов. отмеченных разбиений), то для соответств. σ_n и σ'_n (интегр. суммы для $f(x)$ и $|f(x)|$, получим:

$$|\sigma_n| \le |\sigma'_n|,$$

перейдя к $\lim\limits_{n\to\infty}$, получим искомое нер-во.

Теорема 7. Если $f(x)$ инт. на $[a,b]$, она инт. на любом $[\alpha, \beta]$, содержащемся в $[a,b]$.

⑤ Интегр. неравенств, разбиения отрезка интегрируемости предел интегрир-я.

Теорема 1 (об инт. нерав-в): $f(x), g(x)$ инт. на $[a,b]$, и на $[a,b]$ $f(x) \le g(x)$. Тогда
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Док-во: Рассмотрим произвольное отм. разбиение $\hat{T}$ отрезка $[a,b]$. Ему соответствуют интегр. суммы
$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i.$$
Если рассм. нормальную посл. разбиений $\hat{T}_n$, то соответств. послед. интегр. сумм $\sigma_n^f \le \sigma_n^g$, перейдя к $\lim\limits_{n\to\infty}$, получаем нер-во.

Следствие 1: $g(x)$ инт. на $[a,b]$ и $g(x) \ge 0$ на $[a,b]$, тогда $\int_a^b g(x)\,dx \ge 0$.

Следствие 2: $f(x)$ инт. на $[a,b]$ $A \le f(x) \le B$ на $[a,b]$, тогда $A(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le B(b-a)$.

$(f(x) = A,\ \sigma(\hat{T}) = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i A\cdot\Delta x_i = A\cdot\sum_i \Delta x_i = A(b-a)$

(8) Пределы интегр.:

Теорема 1: $f(x)$ интегр. на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Док-во. В силу т. о разбиении отр-ка интегр. все интегралы существуют.

Возьмем произв. отмечен. разбиение $\hat{T}_1$ отрезка $[a, c]$ диаметром $\lambda(\hat{T}_1)$ и $\hat{T}_2$ отрезка $[c, b]$ с диаметром $\lambda(\hat{T}_2)$. Объединим $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, получим разбиение $\hat{T}$ отрезка $[a, b]$ диаметром $\lambda(\hat{T}) = \max\{\lambda(\hat{T}_1), \lambda(\hat{T}_2)\}$.

Соответств. интегр. сумма $\sum\limits_{\Delta x \in [a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{\Delta x_i \in [a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{\Delta x_i \in [c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Если $\lambda(\hat{T}) \to 0$, то и $\lambda(\hat{T}_1) \to 0$, $\lambda(\hat{T}_2) \to 0$. Выберем норм. послед. отмеч. разбиений и перейдем к пределу, откуда и получим искомое рав-во.

Теорема верна при любом соотнош. a, b, c, т.к.

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; преобразовывая интегралы, в любом случае получим верное соотнош.

⑥ Теорема о среднем для опред. интеграла

Теорема:

1) $f(x)$ непрер. на $[a,b]$

2) $g(x)$ интегрир. на $[a,b]$

3) $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$.

Тогда $\exists\, c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Док-во: из условия следует интегрируемость $f(x)g(x)$ на $[a,b]$. По св-вам функций, непр. на отр., $\forall x \in [a,b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$,

M – наибольш. знач. $f(x)$ на $[a,b]$, m – наименьшее.

$\Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$; интегрируем:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Т.к. $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$, $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$.

Разберем два случая:

1) $\int_a^b g(x)dx = 0$, тогда из нерав-ва следует,

что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и теорема справедлива для любого $c \in [a,b]$.

2) $\int_a^b g(x)\,dx > 0$; поделим все части нер-ва на это:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$$

Так как область значений $f(x)$ совпадает с $[m,M]$, $\exists c \in [a,b]$:

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c),$$ откуда и вытекает.

Если $g(x)=1$, то $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

средн. значение $f(x)$ на $[a,b]$

(7) Св-ва интегр как функции верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$; возьмем x и

A рассмотрим ф-ю $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Она определена на всем отр. $[a,b]$.

Теорема 1: если $f(x)$ интегр на отр. $[a,b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Док-во:

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{a} f(t)\,dt + \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Пусть $\Delta x > 0$. Т.к. $f(x)$ интегр. на $[a,b]$, она огранич. на ней: $\exists C>0: \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \leq C$

$$|\Delta F| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} C\,dt = C(x_0+\Delta x - x_0) =$$

$$= C\Delta x = C|\Delta x|.$$

Если же $\Delta x < 0$ $|\Delta F| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \right| = \left| -\int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)\,dt \right| =$

$$= \left| \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)\,dt \right| \leq \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} |f(t)|\,dt \leq \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} C\,dt = C(-\Delta x) = C|\Delta x|.$$

То есть при любом Δx справедливо $0 \le |\Delta F| \le C|\Delta x|$. По т. о зажатой переменной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$, что и означает непрерывность в x_0; т.к. x_0 – произвольная, справедливо для всего $[a, b]$.

Теорема 2: $f(x)$ непрер. на $[a, b]$, то $F(x)$ дифф. на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Док-во: $\Delta F = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$, $c \in [x_0, x_0+\Delta x]$

по т. о среднем ($g(x) = 1$)

$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c)$;

пусть $\Delta x \to 0$, т.к. $c \in [x_0, x_0+\Delta x]$ $c \to x_0$, и тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$, т.е. $F'(x_0) = f(x_0)$.

1 B **Теорема 3** (ф-ла Ньютона-Лейбница): Пусть $f(x)$ непрер. на $[a, b]$ и Φ – ее первообразная на $[a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Док-во: $F(x) = \Phi(x) + C$; $\left(F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt\right)$, $F'(x) = f(x)$

$F(a) = 0 = \Phi(a) + C$, откуда $C = -\Phi(a)$;

откуда $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$.

2 Таблица интегралов

1) $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

4) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

10) Высокий логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \left| \begin{matrix} \text{умнож.} \\ \text{и делим} \\ \text{на } 2a \end{matrix} \right| = \frac{1}{2a} \int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)} dx =$$

$$= |\text{замена}| \; \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

⑧ Методы подстановки и интегрир. по частям для определ. интегр.

Теорема 1: пусть $f(u)$ непрер. на $[a,b]$, а $\varphi(x)$ имеет непрер. производную на $[a,b]$. Пусть $\varphi(x) \in [a,b]$ для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

$$\left(= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, d\varphi(x)\right)$$

Док-во: Пусть $\Phi(u)$ - первообр-я для $f(u)$ на $[a,b]$.

$$\frac{d\Phi(\varphi(x))}{dx} = \Phi'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

т.е. $\Phi(\varphi(x))$ - первообр-я для $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ на $[\alpha, \beta]$.

По ф-ле Н-Л. $\int_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a)$,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) =$$
$$= \Phi(b) - \Phi(a).$$

все.

Теорема 2 Пусть $u(x)$, $v(x)$ имеют непр. произв. на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

<u>Док-во</u> $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Т.к. $u(x)v(x)$ – одна из первообразных для $(u(x)v(x))'$,

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

все!

② $x_{ч.р.н.} = (a\sin kt + b\cos kt)\cdot \underline{t}$ — т.к. один из корней хар-кого ур-я совпадает с k (внешняя сила с частотой маятника)

$x' = a\sin kt + b\cos kt +$
$+ t(ak\cos kt - bk\sin kt)$

$x'' = ak\cos kt - bk\sin kt + ak\cos kt - bk\sin kt +$
$+ t(-ak^2\sin kt - bk^2\cos kt)$

$2ak\cos kt - 2bk\sin kt - tak^2\sin t - tbk^2\cos kt +$
$+ k^2 t(a\sin kt + b\cos kt) = 2k\sin kt$

$2ak\cos kt - 2bk\sin kt = 2k\sin kt$
$a = 0;$
$-2bk\sin kt = 2k\sin kt;\quad -2b = 2,\quad b = -1.$

$x_{ч.р.н.} = -t\cos kt$

$\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0$ в окр. нижн. пол-я равн-я
$\Rightarrow \varphi(t) = c_1\sin \omega_0 t + c_2\cos\omega_0 t$

$\varphi'' - \omega_0^2\varphi = 0$
$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}$ в окр. верхн. пол-я р-я

Учет вязкости

$\varphi'' + \underbrace{k\varphi'}_{\text{вязкое трение}} + \omega_0^2\varphi = 0$ (в книги пол-ши р-э)

(взяли пропорционально скорости)

$\lambda^2 + k\lambda + \omega_0^2 = 0$

$D = k^2 - 4\omega_0^2$ $\quad > 0 \quad \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4\omega_0^2}}{2}$ (a) очень вязкая среда

$< 0 \quad \dfrac{-k + i\sqrt{k^2 - 4\omega_0^2}}{2}$ (б)

(a) $\varphi = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

(б) $\varphi = e^{-\frac{k}{2}t}(c_1 \sin\omega_1 t + c_2 \cos\omega_1 t)$

Теорема об устойчивости линейн. сист. 2 порядка

$x' = ax + by$

$y' = cx + dy$ $\quad |A - \lambda E| = 0$ хар-е ур-е

матрица $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

единичная

$\begin{cases} \varphi' = \omega \\ \omega' = \omega_0^2 \varphi \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ хар-е ур-е: $\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

Тривиальное реш. система асимптота-

чески ус

~~[illegible]~~ Re

добав

(R

чески устойчиво, если все частн. реш.

$\underbrace{\mathrm{Re}}_{\text{действит. часть}}\lambda_i < 0.$

$(\mathrm{Re}(\alpha \pm i\beta) = \alpha)$

9 Формула Тейлора

Рассмотрим $f(x)$, обладающ. непрерывными произв. всех порядков в $U(x_0)$.

$x \in U(x_0)$, тогда

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0), \text{ или}$$

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt + f(x_0) =$$

$$= f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(-t) = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t) = \left|\begin{matrix}\text{интегр.} \\ \text{по част.}\end{matrix}\right|$$

$$= f(x_0) - f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt = \left|\text{преобраз.}\right|$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Применим к интегралу теорему о

среднем $\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ непрер}, g(x) \text{ интегр на } [a,b], \\ \exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \end{array} \right)$

Получим:

$$\left(f(x) = f^{(n+1)}(x),\ g(x) = \frac{(x-t)^n}{n!} \right)$$

$$\exists c \in [x_0, x]: \quad \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt =$$

$$= f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

Подставим это в значение интеграла, и:

Теорема 1 $f(x)$ имеет непрер. произв. всех порядков в $U_{(x_0)}$. Тогда $\forall n$ и $\forall x \in U_{(x_0)}$

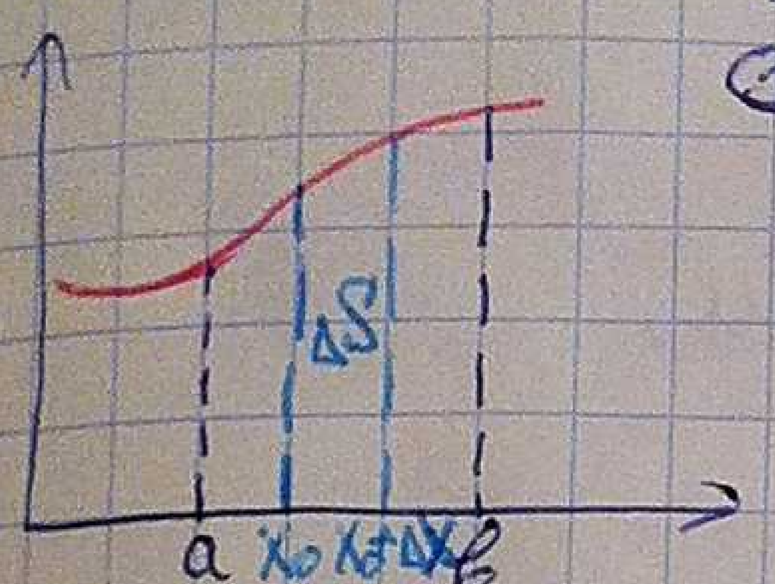
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Это – ф-ла **Тейлора** с остаточным членом в форме Лагранжа.

⑩ Площади областей и длина дуги

$f(x)$ непрер. на $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$.



① При $\forall x \in [a,b]$ рассм. $S_\triangle$, распол. на $[a,x]$ ($S(x)$). $S(a)=0$, $S(b)=S_\triangle$. Фиксируем $x_0 \in [a,b]$, дадим приращение Δx. Тогда $\Delta S = S(x_0+\Delta x) - S(x_0)$.

② $f(x)$ на $[x_0, x_0+\Delta x]$ имеет min и max, т.е.

$\exists x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\Delta x]: \forall x \in [x_0, x_0+\Delta x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Рассм. два прямоуг-ка с высотой $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Тогда $\underset{S_{\square 1}}{f(x_1)\Delta x} \leq \Delta S \leq \underset{S_{\square 2}}{f(x_2)\Delta x} \ \Big| : \Delta x \ (\Delta x > 0)$

$$f(x_1) \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f(x_2)$$

③ $\Delta x \to 0$; тогда x_1 и $x_2 \to x_0$, $f(x_1)$ и $f(x_2) \to f(x_0)$ (в силу непр-ти)

Применим т. о зажатой пер-й:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0)$, $S'(x_0) = f(x_0)$.

Т.к. x_0 – произвольная на всем отр. $[a,b]$ $S'(x) = f(x)$

Интегрируем:

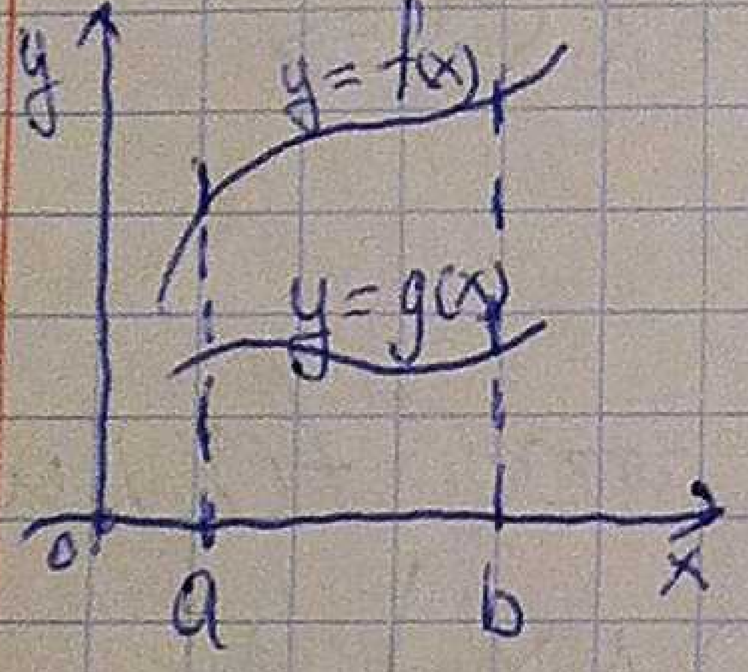
$$\int_a^b S'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx; \quad S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$S(a)$, как отмечалось, $= 0$;

$S(b)$ – площадь трапеции.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = S$$

II более общий случай:



$f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$,

$0 \le g(x) \le f(x)$

$S_{\square}$ = разность площадей 2х

трапеций предыдущего типа, одна огр. графиком $y = f(x)$, др. – $y = g(x)$.

$$\Rightarrow S = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

III если $f(x)$ и $g(x)$ отрицательны.

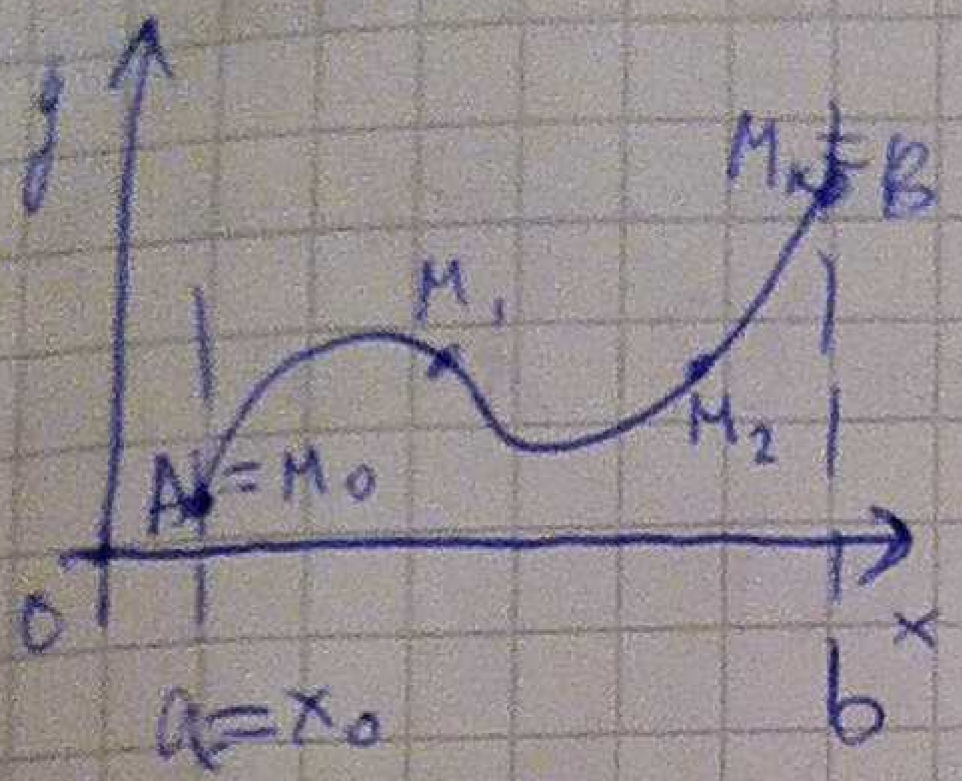
Переносим параллельным сдвигом вдоль O_y на A вверх, чтобы S были положит.

$$S = \int_a^b (f(x)+A) - (g(x)+A)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ формула опять справедлива.

Длина дуги

$\boxed{\text{дуга}}$ — кусок графика над отрезком $[a,b]$ ($\breve{AB}$)



Q — $\boxed{\text{разбиение дуги}}$ — конечное множество точек ($M_0=A, M_1, \dots, M_k=B$)

Соединим соседние точки отрезками, получим ломаную линию $\boxed{\text{длиной}}$ $\hat{l}$. Длина максим. звена — ρ.

Нормальная последоват. Q_n — если послед. соответствующих $\rho_n \to 0$.

Определение 1: l — длина дуги $\breve{AB}$, если для любой Q_n $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{l}_n = l$.

Если l существует, $\breve{AB}$ — спрямляемая дуга, нет — неспрямляемая.

Теорема 1: $f(x)$ непрерывна и имеет непрер. произв. на $[a,b]$. Тогда соответствующая дуга спрямляема и $l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

(11) Длинный логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \left| \begin{matrix} u = x+\sqrt{x^2+A}; & \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-A}}; \\ du = \frac{x+\sqrt{x^2+A}}{\sqrt{x^2+A}}; & \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|x| + \sqrt{x^2+A}| + C$$

(12) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

(13) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C$

1a: основные методы интегрирования

1) Метод подстановки:

$\int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$, если

$f(u)$ непрер. на $\langle a, b\rangle$, $\varphi(x)$ непрер. и имеет непрер. произв. на $\langle \alpha, \beta\rangle$, причем $\forall x \in \langle \alpha, \beta\rangle \Rightarrow \varphi(x) \in \langle a, b\rangle$

Док-во: по правилу дифф. сложной ф-ии —

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ \text{ЧТД.}$$

$$= \left(\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx\right)$$

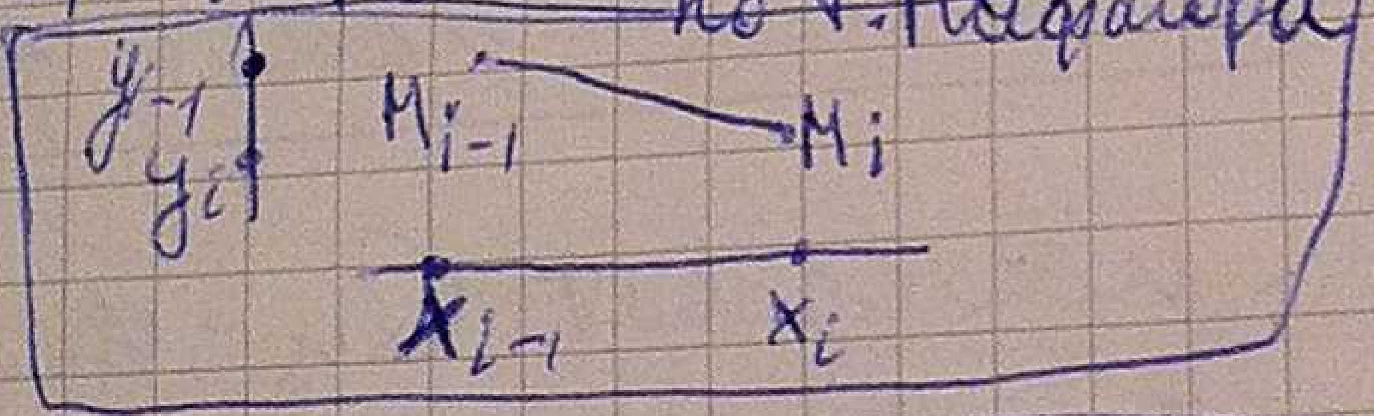
2) Интегрир. по частям:

Док-во: $Q = \{M_i\}$, спроецируем точки M_i на Ox. Тогда на $[a,b]$ возникнет разбиение T из проекций x_i. Так как длина любого отрезка не меньше длины его проекции на Ox, $\lambda \le \rho$ (λ - max длина отрезка разбиения).

Длина одного звена ломаной:

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \ldots$$

по т. Пифагора



$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)} \text{ т. Лагранжа}$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Тогда длина ломаной:

$$\hat{l} = \sum \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

Между прочим. Разбиение Ox T (из проекций x_i) вместе с точками ξ_i образует отмеченное разбиение $\hat{T}$, а длина ломаной $\hat{l}$ — интегральная сумма для функции $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ (площадь прямоугольников) $\blacksquare$

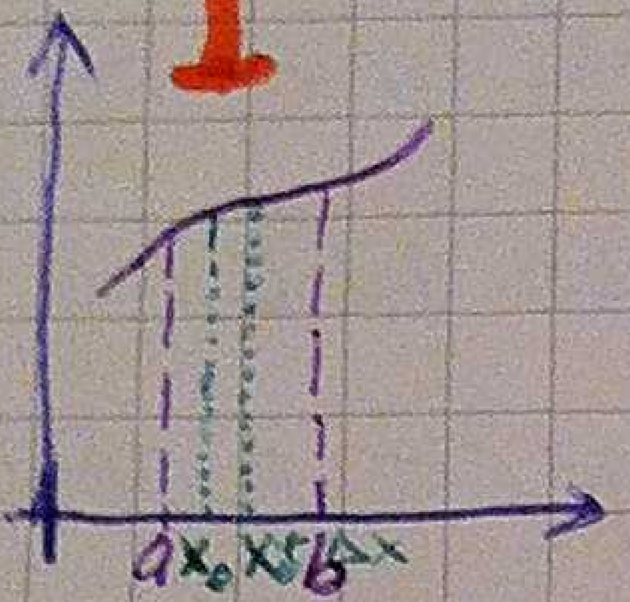
Возьмем норм. последовательность разбиений дуги Ω_n (максимальная длина ломаной $\rho \to 0$). Она порождает нормальную последовательность отмеч. разбиений на $[a, b]$ — $\{\hat{T}_n\}$. Соответствующая послед. интегральн. сумм $\{\sigma_n\}$ совпадает с послед. длин ломаных $\hat{l}_n$, $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{l}_n = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Всё.

11. Объем тел вращения

I



Функция $V(x)$ – объем тела, получающегося при вращении трапеции, расположенной на $[a, x]$.

Объем цилиндра:

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

$V(a) = 0$, $V(b) = V$.

Фиксируем произв. x_0, приращение – Δx.

Тогда $\Delta V = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$. Это – объем тела, полученного при вращении полосы.

Выберем на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ точки x_1, x_2 : $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$. Тогда ΔV заключен между двумя объектами, получившимися при вращении прямоугольников с основаниями $[x_0, x_0 + \Delta x]$ и высотами $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Так как получаются прямые круговые цилиндры, $\pi f^2(x_1)\Delta x \le \Delta V \le \pi f^2(x_2)\Delta x \quad \Big| : \Delta x$

$$\pi f^2(x_1) \le \frac{\Delta V}{\Delta x} \le \pi f^2(x_2).$$

$\Delta x \to 0$, x_1 и $x_2 \to x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_1) = f(x_0)$ (в силу непрерывности).

Перейдем к lim при $\Delta x \to 0$:

$$\pi f^2(x_0) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \le \pi f^2(x_0)$$

По теор. о зажатой переменной $V'(x_0) = \pi f^2(x_0)$.

Так как x_0 произвольно, $V'(x) = \pi f^2(x)$ на $[a, b]$.

Интегрируем по отрезку $[a, b]$

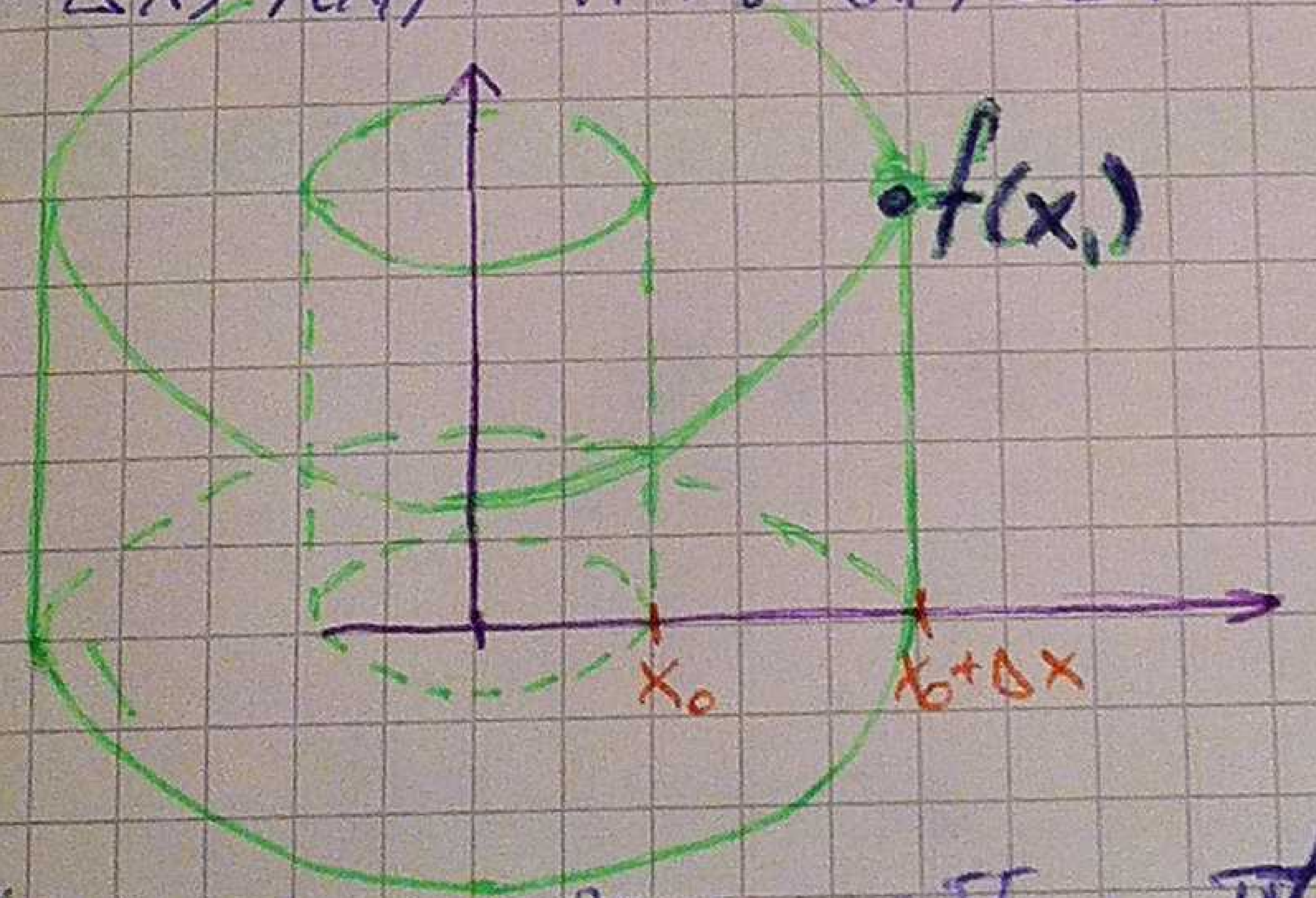
$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$. Как бы все.

II Вращение вокруг Oy.

Все то же самое, а в ● получается полый цилиндр. Поэтому

$$\pi(x_0+\Delta x)^2 f(x_1) - \pi x_0^2 f(x_1) \le \Delta V \le \pi(x_0+\Delta x)^2 f(x_2) - \pi x_0^2 f(x_2)$$

$: \Delta x$



$$\frac{\pi f(x_1)(2\Delta x x_0 + \Delta x^2)}{\Delta x} \le \frac{\Delta V}{\Delta x} \le \frac{\pi f(x_2)(2\Delta x x_0 + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$2\pi f(x_1)x_0 + \Delta x \pi f(x_1) \le \frac{\Delta V}{\Delta x} \le 2\pi f(x_2)x_0 + \Delta x \pi f(x_2)$$

перейдем к lim при $\Delta x \to 0$, применим т. о зажатой переменной; $V'(x_0) = 2\pi f(x_0)x_0$; x_0 произв. $\Rightarrow V'(x) = 2\pi x f(x)$.

12 Несобственный интеграл. (от 1 до $+\infty$)

Определение 1: Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда несобственный инт-л

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Предел существует – сходящийся, нет – несходящийся.

Формула Ньютона-Лейбница правомерна, т.к. ф-я непрерывна на $[a, b]$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\Phi(x) - \Phi(a) \quad (\Phi'(x) = f(x))$$

Рассмотрим $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

1) $p = 1$, расходится.

2) $p \neq 1$; $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{+\infty}$.

При $p > 1$ – конечное число. При $p < 1$ – ∞.

$\boxed{\text{Т. е. расходится при } p \leq 1, \text{ сх. при } p \geq 1}$

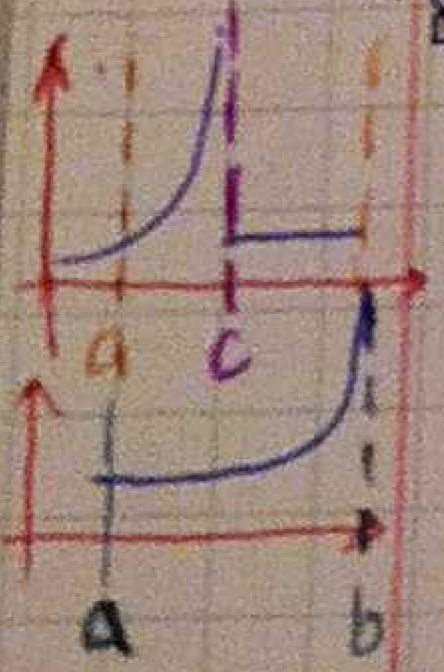
Определение 2: $f(x)$ непрер. на $[a, b]$, неограничена в окр-ти точки a.

Несобств. инт. от a до b —

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Ф-ла Ньютона-Лейбница также действует.

При этом $\Phi(x)$ в т. a — $\lim\limits_{x \to a+} \Phi(x)$.



Пусть точка, в котор. ф-я не ограничена, находится внутри отрезка $[a, b]$ (в т. c) или на его правом конце.

Тогда

а) $f(x)$ непрер. на $[a, b)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

б) $f(x)$ непрер. на $[a, c) \cup (c, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Билет 15 Дифф. ур-я I пор. Формулировка теорем сущ-я и единственности. Методы ломаных и ломаных Эйлера.

Определение 1: обыкновенное диф. ур. — ф-я зависит только от 1 переменной.

Определение 2: функция зависит от несколь-ких пер-х — уравнение в частных произв-х.

Определение 3: порядок диф. ур. — макси-мальный порядок произв-й

Определение 4: Семейство решений, где все без исключения решения этого диф-фура — общее решение ($f(x, c_1, c_2, \dots c_n)$), за-висит от n произвольных постоянных. Решение, получающееся при конкрет-ных значен. произвольных постоянных — частное решение, его график — интегральная кривая уравнения.

A Диф. ур-я I порядка:

можно разрешить относит. y':

$$y' = f(x, y).$$

если $y' = f(x)$, $\quad y = \int f(x)\,dx$.

y' задает угловой коэф. касательной к кривой $y = y(x)$. Значит, уравнение $y' = f(x, y)$ сопоставляет направление касательной к графику. Если направление изобразить отрезком — будет поле направлений.

(Задача интегрирования диф. ур-я в том, чтобы найти кривые, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля).

Определение 4: места точек, где касательные к искомым интегр. кривым сохраняют постоянное направление — изоклины. Уравнения изоклин —

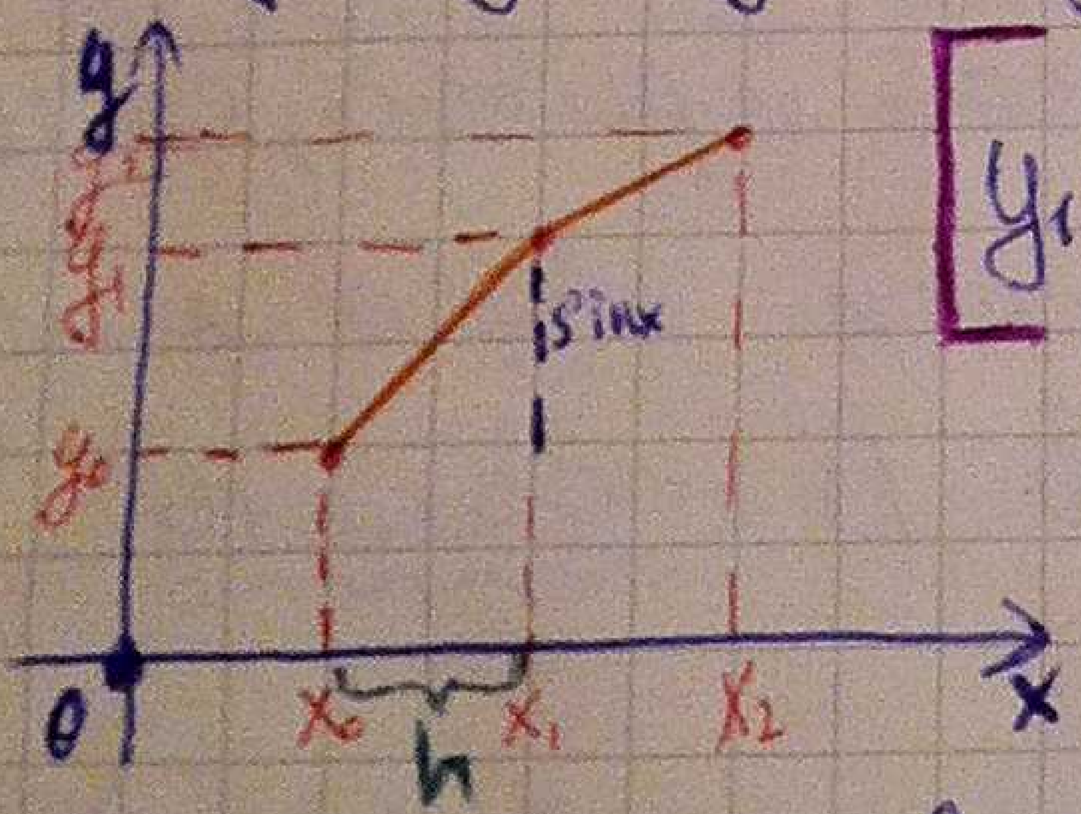
$$y' = f(x, y) = k.$$

Метод ломаных Эйлера:

Для приближенного вычисл-я значения решения $y(x)$ на $[x_0, b]$ отрезок делится на n равных отрезков длины h (шаг вычисления), $x_i = x_0 + h \cdot i$.

Приближенные значения решения в точке x_i обозначаются y_i. Для вычисления y_1 заменяем на $[x_0, x_1]$ искомый график отрезком его касательной в точке (x_0, y_0).

Тогда $y_1 = y_0 + h y_0'$, где $y_0' = f(x_0, y_0)$.



$$\boxed{y_1 = y_0 + h \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = y_0 + \sin x}$$

Соответственно, $y_2 = y_1 + h y_1'$, где $y_1' = f(x_1, y_1), \ldots, y_n = y_{n-1} + h y_{n-1}'$, где $y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1})$. При $h \to 0$ ломаные Эйлера приближаются к графику.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такая, что при шаге $h < \delta$ ломаная будет отличаться от графика меньше, чем на ε на $[x_0, b]$.

8 **Задача Коши:**
Найти решение $y(x)$ ур-я $y' = f(x, y)$, удовлетвор-ее условию $y_0 = y(x_0)$

Определение 1: множество A на плоскости открытое, если каждая точка $M_0(x_0, y_0)$ входит в него с целой окр-тью $U(M_0)$.

Если открытое мн-во дополнить его границей, оно будет замкнутым.

Определение 2: Мн-во A связное, если любые 2 его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого мн-ва.

Открытое связное мн-во D – область.

Теорема 1: Пусть в плоскости (x, y) существует обл. D, для кот. выполняются след. условия:

1) $f(x,y)$ непрер. в области D;
2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрер. в D;
3) $(x_0, y_0) \in D$.

Тогда ...
Ко...
ное ...

Ин...
кр...
Эт...
от...
пр...
по...
к...

Пусть $u(x)$ и $V(x)$ непрер. и имеют непрер. произв. на $<a, b>$, тогда

$$\int v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)V'(x)\,dx$$

(или $\int v(x)\,d\,u(x) = u(x)v(x) - \int u(x)\,dv(x)$)

<u>Док-во</u>: $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)V'(x)$, т.е.

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx =$$

$$= u(x)V(x) \quad (+C=0);$$ ЧТД.

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что задача Коши имеет решение $y(x)$, определенное на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, при этом единственное.

Иначе — через (x_0, y_0) проходит интегр. кривая, при том только одна.
Это можно утверждать только про отр. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Но можно снова применить теорему, взяв за начальную точку $(x_0 + \delta, y(x_0 + \delta))$ — главное, чтобы решение не выходило за D.

Билет 14 ур-я радиоактивного распада и роста биомассы.

А уравнение радиоакт. распада:

$x(t)$ – кол-во в-ва в момент времени t

Скор-ть распада пропорциональна кол-ву нераспавшегося в-ва в данный момент вр-ни.

$V = \frac{dx}{dt} = -px$, p зависит от в-ва.

Пусть при $t=0$ $x(0)=x_0$,

$$\frac{dx}{dt} = -px, \quad \frac{dx}{x} = -p\,dt, \quad \ln|x| = -pt + C_1,$$

$$x = C e^{-pt},$$

учитывая нач. условие $x_0 = C$,

$$\underline{x = x_0 e^{-pt}}$$

...

Период полураспада – время T, за кот. кол-во в-ва уменьшается вдвое:

$$x(T) = \frac{x_0}{2}; \quad \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-pT},$$

$$\ln\frac{1}{2} = -pT, \quad T = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{p} = \underline{\frac{\ln 2}{p}}$$

(В) Закон роста биомассы

Прирост биомассы за малый промежуток t пропорционален кол-ву биомассы и длине промежутка t.

x_0 – кол-во биомассы при $t=0$.

промежутки $t = h$, получим послед. $x_0, x_1, \dots, x_n$, X_n – кол-во биомассы в момент времени t_n.

$$\boxed{x_{n+1} - x_n = \underbrace{k}_{\text{коэф. пропорц-ти}} h x_n}$$

Рекурентное ур-е – связывающее $n+1$ член с предыдущим (n). Решение – числовая послед., члены которой удовлетворяют.

$x_{n+1} = x_n(kh+1)$; $kh+1=q$, тогда

$x_{n+1} = q x_n$, q не зависит от n.

Для любого x_0 можно найти последовательность $x_n = q^n x_0$ (геом. прогрессия)

• • •

Будем считать, что закон роста выполняется тем точнее, чем за меньший промежуток времени его рассматривать

~~[illegible]~~ $x_{n+1} - x_n = kh x_n$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = k x_n;$$

между прочим $\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$.

$x_n - x(t)$,

$\frac{dx}{dt} = kx$ при $x(0) = x_0$

$\frac{dx}{x} = k\,dt$, $\ln|x| = kt + C_1$; $\Big|\ \ln x_0 = C$,

$x = Ce^{kt} = x_0 e^{kt}$

k – удельная скорость роста.

время между 2мя делениями – время репродукции.

T – время удвоения биомассы,

$x(T) = 2x_0 = x_0 e^{kT}$, $T = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow T$ не завис. от x_0

Если отсчет не от t, а от t_0, то

$x = x_0 e^{k(t - t_0)}$

Уравн. Ферхюльста-Перла – учитывает „самоотравление популяции": $\Delta x = kx\Delta t - \delta x^2 \Delta t$.

$\delta x^2 \Delta t$ отражает снижение скорости роста попул. из-за внутривидовой конкуренции. Кол-во встреч пропорционально x^2,

δ – коэффиц. самоотравления.

$$\frac{dx}{dt} = kx - \delta x^2 = kx\left(1 - \frac{\delta x}{k}\right) = kx\left(\frac{\frac{k}{\delta} - x}{\frac{k}{\delta}}\right)$$

$$\frac{k}{\delta} = h, \quad \frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{h-x}{h}\right);$$

$$\frac{h\,dx}{x(h-x)} = k\,dt, \quad \ln\left|\frac{x}{x-h}\right| = kt + C_1$$

$$\frac{x}{x-h} = Ce^{kt}, \quad x = xCe^{kt} - hCe^{kt}$$

При $t=0$ $x=x_0$, т.е. $\frac{x_0}{h-x_0} = C \Rightarrow$

$$x = \frac{hCe^{kt}}{1+Ce^{kt}} = \frac{hx_0e^{kt}}{(h-x_0)\left(1+\frac{x_0}{h-x_0}e^{kt}\right)} =$$

$$= \boxed{\frac{hx_0e^{kt}}{h-x_0+x_0e^{kt}}}.$$

При $t \to \infty$ $x(t) \to h$ (h – max возможная числ. поп.)

Билет 15 Модель роста деревьев

1) С ростом не изменяются отношения размеров;
2) свободная энергия – только путем фотосинтеза;
3) энергия расходуется на ф-з, построение живой клетки, подъем раствора из почвы;
4) растение получает постоянное кол-во света на единицу пов-ти, поглощает в-ва из неограниченного запаса.

x – высота, $S_{\text{пов-ти листвы}}$ пропорциональна x^2, $V_{\text{ствола}}$ пропорционален x^3.

$E = \alpha x^2$ поступление E

$\beta x^2 \ (\beta < \alpha)$ – расход E на ф-з,

Доставка пит. в-в во все части раст. –

$\gamma \underbrace{x^3}_{V} \underbrace{x}_{h} = \gamma x^4$

Расход E на рост: $m = \underbrace{\rho}_{\text{ср. плотность}} x^3$

Скорость роста – $(\rho x^3)'$;

$$\delta \frac{d(\rho x^3)}{dt}$$

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d(\rho x^3)}{dt},$$

$$\alpha x^3 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2 \frac{dx}{dt} \quad \Big| : 3\delta\rho x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho}}_{a} - \underbrace{\boxed{\frac{\gamma}{3\delta\rho}}}_{b} x^2$$

* $\dfrac{dx}{dt} = a - bx^2$, $\quad \dfrac{dx}{a - bx^2} = dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\frac{\frac{d\sqrt{b}x}{\sqrt{b}}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b}x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}x}{\sqrt{a} - \sqrt{b}x}\right| = t + \ln C_1$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}x}{\sqrt{a} - \sqrt{b}x}\right| = 2\sqrt{ab}\,t + \ln C$$

$$\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + x}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - x} = Ce^{2\sqrt{ab}\,t}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + x = \sqrt{\frac{a}{b}}\, Ce^{2\sqrt{ab}t} - xCe^{2\sqrt{ab}t}$$

$$x(1 + Ce^{2\sqrt{ab}t}) = \sqrt{\frac{a}{b}}\,(Ce^{2\sqrt{ab}t} - 1)$$

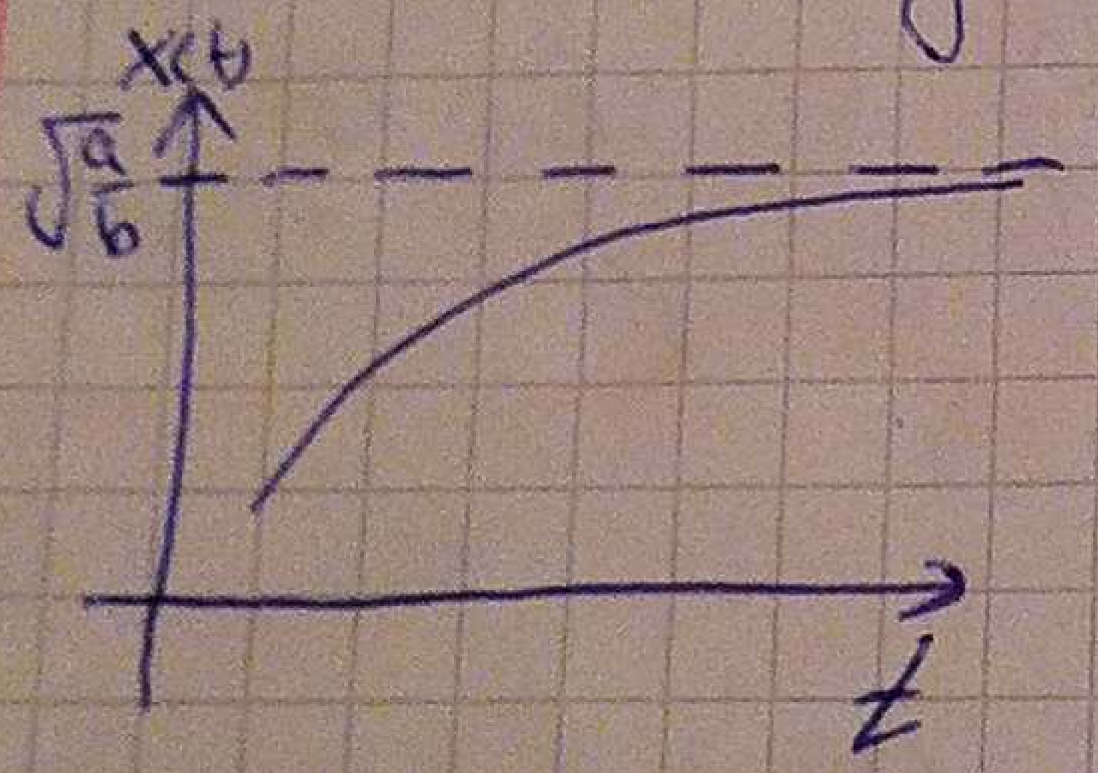
$$x(t) = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,(Ce^{2\sqrt{ab}t} - 1)}{1 + Ce^{2\sqrt{ab}t}};$$

при $t \to \infty$ $x(t) \to \sqrt{\frac{a}{b}}$.

вернемся: $\frac{dx}{dt} = a - bx^2$;

$x'' = -2bx$; $b > 0,\ x > 0 \Rightarrow x'' < 0$,

$x(t)$ – выпуклая кривая:



Билет (16) модель „хищник — жертва"

Зайцы питаются растит. пищей, её кол-во неогр., рыси — зайцами

$x(t)$ — кол-во зайцев
$y(t)$ — кол-во рысей
} пусть это — непрер. диф-ные функции

Если бы рысей не было — скорость прироста зайцев пропорц. их кол-ву: $\frac{dx}{dt} = ax \quad (a>0)$

Если бы зайцев не было — ~~рыси вы~~ V вымир. рысей пропорц-на их к-ву: $\frac{dy}{dt} = -cy \quad (c>0)$

Если есть m рысей и n зайцев, то каждая рысь может встретить любого зайца, общее число комбинаций — mn $\Rightarrow$ частота встреч характер-тся xy.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a-by); \\ \frac{dy}{dt} = -cx + pxy = y(px-c). \end{cases} \quad (a,b,c,p>0)$$

I. стац. решения:

$$\begin{cases} x(a-by)=0; \\ y(px-c)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \underset{①}{(0,0)};\ \underset{②}{\left(\frac{c}{p};\ \frac{a}{b}\right)}$$

① – отсутствие рысей и зайцев

② – $\bar{x} = \frac{c}{p}$, $\bar{y} = \frac{a}{b}$.

II если немного отойти?

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} + u(t) \\ y(t) = \bar{y} + v(t) \end{cases}$$

отклонение от стационарного реш-я (приращение к x)

подставим:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\bar{x}+u)}{dt} = (\bar{x}+u)(a-b\bar{y}-bv) \\ \dfrac{d(\bar{y}+v)}{dt} = (\bar{y}+v)(p\bar{x}+pu-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\bar{x}+u)(a-b\bar{y}-bv) \\ \dfrac{dv}{dt} = (\bar{y}+v)(p\bar{x}+pu-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \cancel{\dfrac{c}{p}a} - \cancel{\dfrac{ac}{p}} - \dfrac{cbv}{p} + \cancel{au} - \cancel{au} - \underline{bvu} \\ \dfrac{dv}{dt} = \cancel{\dfrac{ac}{b}} + \cancel{cv} + \dfrac{apu}{b} - \cancel{\dfrac{ca}{b}} - \cancel{cv} + \underline{upv} \end{cases}$$

б.м. более высокого пор-ка

③ Определенный интеграл. Простейшие св-ва. Необходимое условие интегрируемости.

A <u>Разбиение отрезка</u>: разобьем $[a, b]$ конечным числом точек x_i : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$

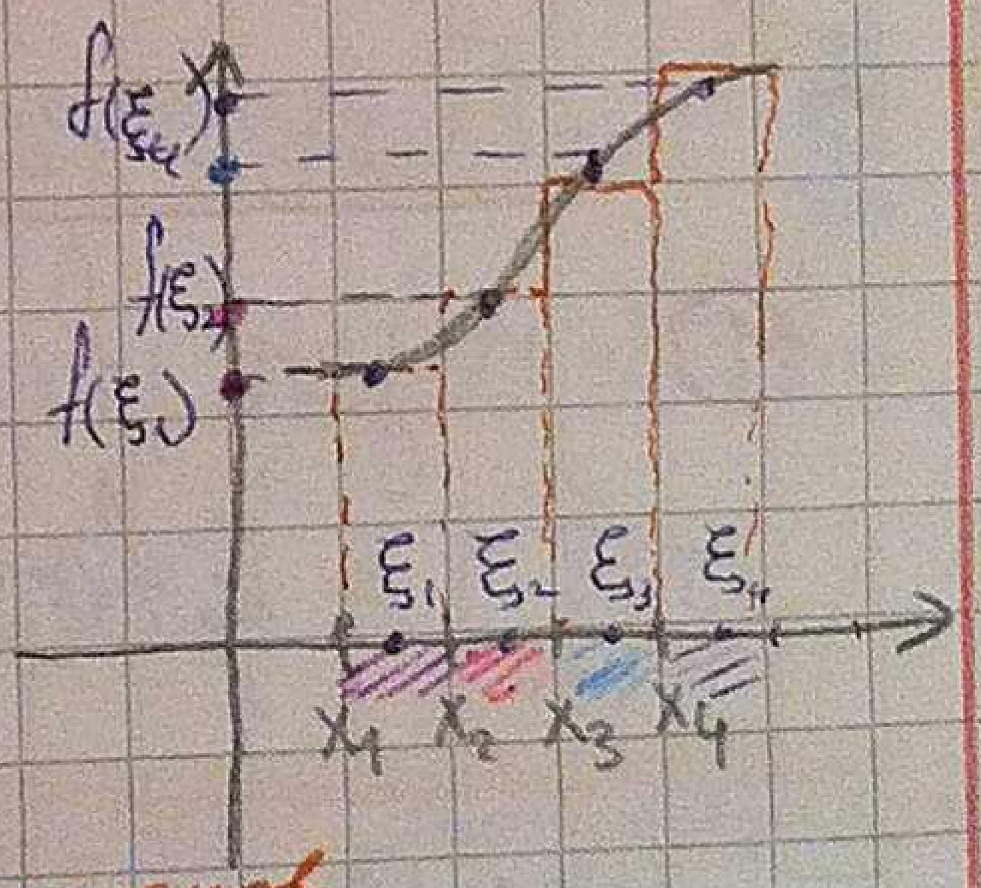
множ-во $\{x_i\} = T$.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\lambda(T) = \max\limits_i \Delta x_i$ → диаметр разбиения T

длина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$

<u>Отмеченное разбиение</u>: на каждом $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произв. точку ξ_i, $\{\xi_i\} = \hat{T}$.

<u>Интегральная сумма</u>:



$\sigma(\hat{T}) = \sum\limits_i f(\xi_i) \cdot \Delta x_i =$

$= f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) +$

$+ \ldots + f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

покажет S прямоугольников

<u>Определение 1</u>: последоват. $\hat{T}_n$ назыв. нормальной, если $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda(\hat{T}_n) = 0 = (\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_n (\xi_n - \xi_{n+1}))$

(берем много-много $\hat{T}$, таких, что $\Delta(\xi_i)$ уменьшается до 0).

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{cbv}{p} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{apu}{b} \end{cases}$$

III. дифференцируем I-е ур-е:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{bc}{p}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{bc}{p}\cdot\frac{ap}{b}u, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -acu,$$

$$\frac{d^2u}{dt} + acu = 0. \quad ac>0, \quad \omega = \sqrt{ac};$$

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u = e^{\lambda t}, \quad u'' = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad \lambda^2 = -\omega^2, \quad \lambda = \pm i\omega$$

$$e^{\lambda t} = B\sin\omega t + A\cos\omega t = u.$$

$$\begin{cases} u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ v(t) = -\frac{p}{cb}\cdot\frac{du}{dt} = -\frac{p}{cb}(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\varphi}\cos\omega t + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi}\sin\omega t\right) = \\ = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\varphi) \\ v(t) = -\frac{p\omega}{cb}\sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{-\sin\varphi}\sin\omega t + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi}\cos\omega t\right) = \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ = -\frac{p\omega}{cb}\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(\varphi+\omega t) \end{cases}$$

$u^2=(A^2+B^2)\sin^2(\omega t+\varphi)$

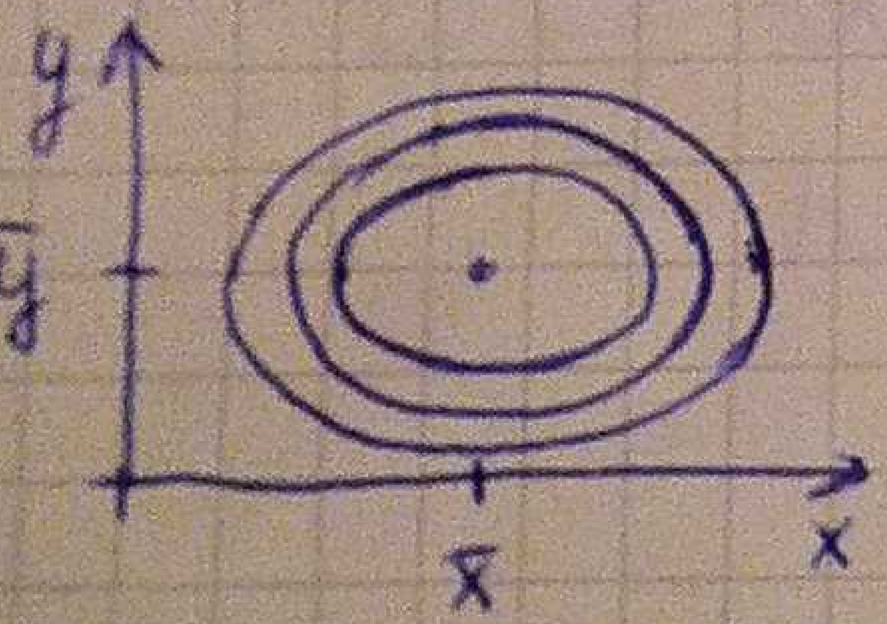
$v^2=\left(\frac{p\omega}{bc}\right)^2(A^2+B^2)\cos^2(\omega t+\varphi)$

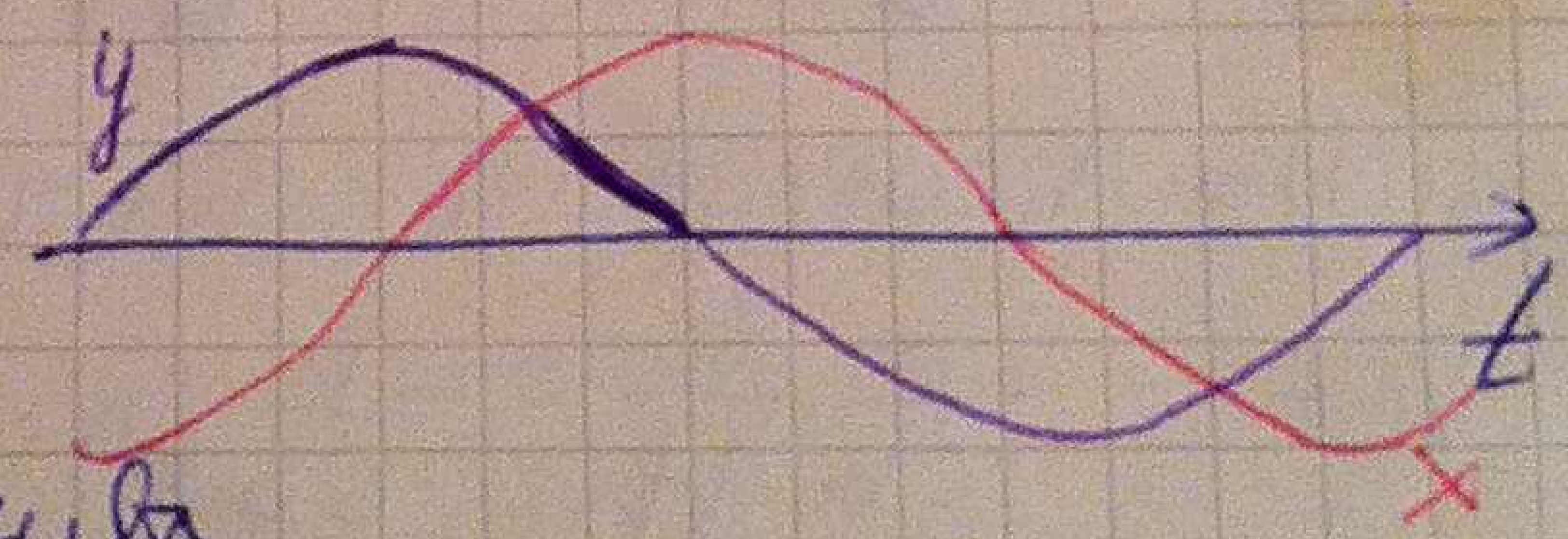
$$\frac{u^2}{\underbrace{A^2+B^2}_{=d_1^2}}+\frac{v^2}{\underbrace{\left(\frac{p\omega}{bc}\right)^2(A^2+B^2)}_{=d_2}}=1;$$

$(d_1=\sqrt{A^2+B^2})$ $\quad$ $(d_2=\left(\frac{p\omega}{bc}\right)\sqrt{A^2+B})$

$\frac{u^2}{d_1^2}+\frac{v^2}{d_2^2}=1;$ → уравнение эллипса с центром в $(0,0)$

$\frac{(x-\bar{x})^2}{d_1^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{d_2^2}=1,$ → ур-е эллипса с центром в $(\bar{x},\bar{y})$

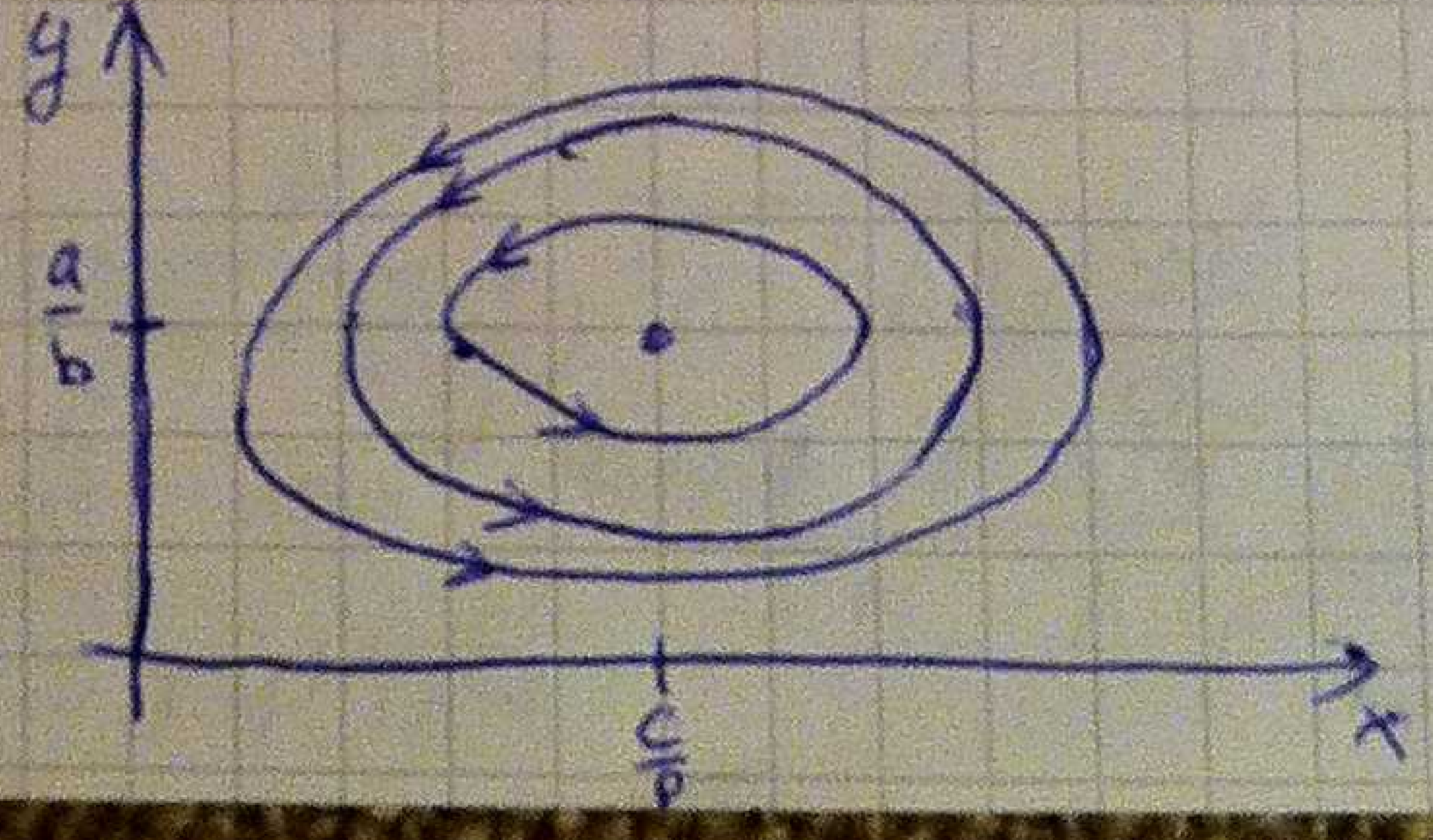




Система устойчива.

Определим направление движения:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(a-by);\\ \frac{dy}{dt}=y(px-c).\end{cases}$$



1) $x < \frac{c}{p},\ y > \frac{a}{b} \Rightarrow \cancel{\frac{dx}{dt}}\ \ \frac{dx}{dt} < 0,\ \frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow x\downarrow,\ y\downarrow.$

2) $x < \frac{c}{p},\ y < \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{dx}{dt} > 0,\ \frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow x\uparrow\ y\downarrow$

17 Линейные диф. ур-я II порядка

Определение 1: ~~линейное~~ ур-е — уравн., в которое неизвестные входят в 1ой степени, нет произведения неизвестных.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \boxed{f(x)}$$

$f(x) = 0$ — однородное

Про однородное:

Теорема 1: (сущ-я и ед-ти): если коэф. $a_i(x)$ непрер-ны на $[a, b]$, то для каждого x_0 из инт. (a, b) и любого набора чисел $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, существует одно и только одно реш-е $y(x)$, удовлетв-щее н. у:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Теорема 2: $y(x)$ — решение, тогда и $Cy(x)$ — решение.

Теорема 3: $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения, тогда $y_1(x) + y_2(x)$ — тоже решение.

Следствие Т2 и Т3:

Линейная комбинация решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с произв. коэф. $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ тоже является реш-м.

$y(x) = u(x) + i\,v(x)$; $y'(x) = u'(x) + i\,v'(x)$

Теорема 4: если решение $y(x) = u(x) + i\,v(x)$, то $u(x)$ и $v(x)$ по отдельности — решения.

Определение 2. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимые на $[a,b]$, если есть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что на $[a,b]$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0,$$

причем хотя бы одно $a \neq 0$.

Теорема 5: Если ф-ии $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно завис. на $[a,b]$, то на том же отрезке опред.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

определитель Вронского, равен нулю.

Теорема 6: Если линейно независ. ф-ии $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ явл. решением линейного однородного ур-я, то $W(x) \neq 0$ ни в одной точке $[a,b]$.

Теорема 7: Общее решение при $a \le x \le b$ лин. одн. ур-я с непрерывными на $[a,b]$ коэф-ми является $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ любых n линейно независ. на том же отрезке частных решений $y_i(x)$ с произв. коэф. C_i.

Определение 2: любые n линейно независ. решений лин. однор. дифф. ур-я n-го порядка — Фундам. Сист. решений.

19 Простейшие св-ва числ. рядов. Крит. Коши, ряды с „+" членами. Признаки сравнения.

А **Определение 1**: частичная сумма S_n – сумма n первых его слагаемых.

Опр. 2: числ. ряд *, если сх-ся последоват-ть его частичных сумм, причем предел част. ~~сумм~~ – сумма ряда $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Св-ва:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$; их сумма – $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$

Теорема 1: ряд A и B сходятся, тогда их сумма (раз-ть) тоже сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

Док-во:

частичная сумма $S_m=\sum\limits_{n=1}^{m}(a_n+b_n)=$

$=\sum\limits_{n=1}^{m} a_n+\sum\limits_{n=1}^{m} b_n = A_m + B_m.$

Тогда $S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} (A_m + B_m) =$

$= \lim\limits_{m\to\infty} A_m + \lim\limits_{m\to\infty} B_m = A + B.$

Теорема 2: от умножения всех членов ряда на C сход-ть/расх-ть ряда не меняется.

Д-во: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Ca_n$, $C \neq 0$.

$S = A_n$ $\quad S = A_n'$

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}$ $\quad A_n' = CA_n \Rightarrow$ если $\downarrow$ a_n, то сх. и Ca_n, и наоборот.

Теорема 3: (необх. пр. сх-ти) — если ряд $\downarrow$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Док-во: $a_n = S_n - S_{n-1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Теорема 4: от добавл./отбрас-я конечного числа членов сх-ть/р-ть ряда не меняется.

Д-во: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'$ (получен добавл-ем/отбр-ем членов).

$\exists N: \ \forall n \geq N \Rightarrow a'_n = a_n$.

Тогда, начиная с N, $A'_n - A_n = C$,

или $A'_n = A_n + C$.

т.е. $\{A_n\}$ и $\{A'_n\}$ либо обе имеют предел, либо не имеют.

Теорема 4: если $\downarrow\uparrow$, то посл.-ть его S_n ограничена.

~~Док-во~~

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}_{S_n} + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots)}_{\substack{R_n \\ \text{(остаток ряда)}}}$$

если $\downarrow\uparrow$, то $S = S_n + R_n$

Теорема 5: если $\downarrow\uparrow$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

(B) Критерий Коши

Определ. 3: $\{b_n\}$ – фундамент. посл-ть, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n, m \geq N \Rightarrow |b_n - b_m| < \varepsilon$.

(Разница между 2мя членами убывает)

Теорема 6 (крит. Коши сх-ти последоват-ти): Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она явл. фундамент-ой.

Док-во необходимости:

сходящ-ся посл-ть $\{b_n\}$; возьмем произв. ε,

$\exists N: \forall k \geq N \Rightarrow |b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

опред. сходимости

n, m – большие или равные N;

$k = n$ и m,

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|b_n - b_m| = |(b_n - b) - (b_m - b)| \leq |b_n - b| + |b_m - b| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Теорема 6: (крит. Коши сх-ти рядов):

Ряд сходится тогда и только тогда, когда посл-ть его частичных сумм фундаментальна.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N:$

$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

Теорема 7: Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то сходится и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Док-во: т.к. $\sum_{n=1} |a_n|$ сходится, то по крит. Коши $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n, m \geq N \, (m > n) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$

Определение 2: Если для любой норм. послед. $\{\hat{T}_n\}$ соответствующая послед. интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ сходится к одному и тому же пределу J, то этот предел называется определенным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a,b]$:

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \sigma_n} = \lim_{n\to\infty} \sigma(\hat{T}_n) = \lim \sum_i f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = J$$

предел σ_n при $\Delta \xi_i \to 0$ стремится к J

S под графиком

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

В Простейшие свойства опр. инт.

① пусть $f(x) = C$ на $[a,b]$, тогда

$$\sigma(\hat{T}) = \sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_i C\cdot\Delta x_i = C\cdot\sum_i \Delta x_i = C(b-a),$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = C(b-a), \text{ и } \int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

② если $f(x)$ и $g(x)$ интегр. на $[a,b]$, то

а) $\int_a^b A f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$ при $\forall A$;

б) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Но тогда $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| < \varepsilon$;

$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \Rightarrow$ вып. критерий Коши,

ряд $\sum_{k=n+1}^{m} a_k$ сходится.

2

Ряды с „+" членами

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \ge 0\ \forall n$;

тогда $\{S_n\}$ монотонно $\uparrow$:

$$S_1 \le S_2 \le S_3 \le \ldots \le S_n \le \ldots$$

Отсюда в силу т. Вейерштрасса: если посл. частичных сумм ограничена, она имеет предел $\Rightarrow$ ряд $\overset{\downarrow}{\uparrow}$.

Теорема 1 (1ый признак срав-я):

Пусть даны 2 ряда, и $\forall n \Rightarrow a_n \le b_n$.

Тогда, если ряд b_n $\overset{\downarrow}{\uparrow}$, то и ряд a_n $\overset{\downarrow}{\uparrow}$.

Док-во:

$A_n \le B_n$; ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сх-тся к числу B

$\Rightarrow B_n \le B$, $A_n \le B$, т.е. $\{A_n\}$ ограничена — ряд сходится.

Теорема 2 (2ой призн. ср-я):

$a_n \sim k b_n$ при $n \to \infty$, $k \neq 0$.

Тогда или $\overset{\downarrow}{\uparrow}\overset{\downarrow}{\uparrow}$, или $\overset{\uparrow}{\downarrow}\overset{\uparrow}{\downarrow}$.

Док-во:

по опред. эквив-ти $a_n = k b_n q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$

пусть $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, тогда

$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |q_n - 1| < \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} < q_n < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} k b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} k b_n.$$

Сходится по 1му пр-ку ср-я.

Билет 20 Признаки Коши и Даламбера

Теорема 1 (призн. Коши):

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

Тогда если $q<1$ $\downarrow\uparrow$, $q>1$ – $\uparrow\downarrow$, $q=1$?

Док-во

пусть $q<1$; возьмем $\varepsilon_1>0$ такое, чтобы $q_1=q+\varepsilon_1<1$.

$$\exists N:\ \forall n\geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon_1$$

(раскрыт lim)

$$-\varepsilon_1<\sqrt[n]{a_n}-q<\varepsilon_1$$

$$q-\varepsilon_1<\sqrt[n]{a_n}<\varepsilon_1+q=q_1<1$$

$\sqrt[n]{a_n}<q_1$, $a_n<q_1^n$ убыв. геом. прогр. $\Rightarrow$ сходится

Теорема 2 (признак Даламбера):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \begin{array}{l} q<1 \downarrow\uparrow \\ q>1 \uparrow\downarrow \\ q=1 ? \end{array}$$

Док-во:

① Пусть $q<1$. Возьмем $\varepsilon_1>0$ такое, что $q_1 = q+\varepsilon_1 < 1$. раскроем предел:

$$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon_1,$$

$$q-\varepsilon_1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon_1 = q_1,$$

$$a_{n+1} < a_n q_1$$

Начиная с N:

$a_{N+1} < a_N q_1$;

$a_{N+2} < a_{N+1} q_1 < a_N q_1^2$;

$a_{N+3} < a_{N+2} q_1 < a_N q_1^3$

. . . .

$\forall k \geq 1 \Rightarrow a_{N+k} < a_N q_1^k \qquad N+k=m$

$a_m < \underbrace{(a_N q_1^{-N})}_{C} q_1^m$, $a_m < C q_1^m$, $\downarrow\uparrow$ по I-му признаку ср-я.

② пусть $q > 1$, возьмем $\varepsilon_2 > 0$ такое, что
$q_2 = q - \varepsilon_2 > 1$.

Из lim:

$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow$

$$q - \varepsilon_2 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon_2,$$

$$1 < q_2 < \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ послед. $\{a_n\}$ монотонно возрастает с номера N, значит она не может $\to 0$, нарушен необх. признак, $\updownarrow$.

Билет 21 Признак Коши

Теорема 1: $g(x)$ определена на полуоси $[a, +\infty)$, монот. $\uparrow$, и ограничена сверху (т.е. $\exists M > 0: \forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow g(x) \leq M$).
Тогда сущ-ет предел при $x \to +\infty$.

Док-во:

C – ТВГ множества значений ф-ии $\{g(x)\}$

Возьмем $\varepsilon > 0$, по свойству ВГ $\exists x_\varepsilon$: $C-\varepsilon < g(x_\varepsilon)$

Тогда для $\forall x > x_\varepsilon$

$$C-\varepsilon < g(x_\varepsilon) \le g(x) \le C < C+\varepsilon,$$

т.е. $\forall x > x_\varepsilon \Rightarrow |g(x) - C| < \varepsilon$

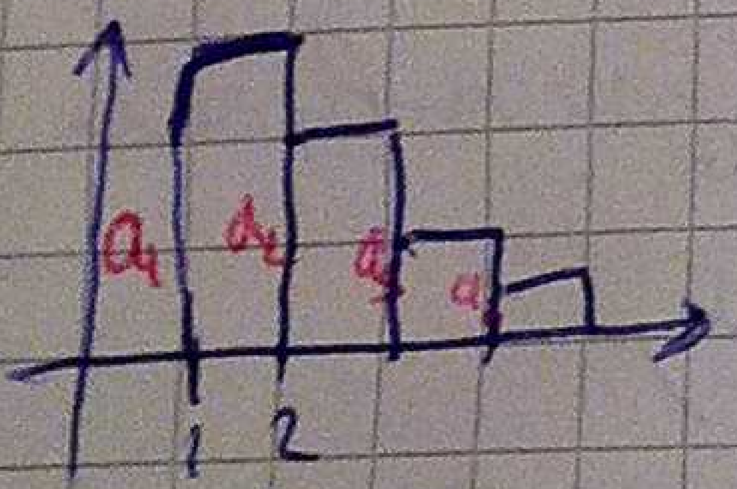
если взять $\dot{U}_\infty = \{x : |x| > A\}$, где $A > x_\varepsilon$,

то $\forall x \in \dot{U}_\infty$ $(x>0) \Rightarrow |g(x) - C| < \varepsilon$?

т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = C$

* * *

Геометр. интерпретация ряда с положит. членами:



$S_n = S_{\text{фигуры над отрезком}} [1, n+1]$,

$S_{\text{всей фиг.}} = S_{\text{ряда}}$.

Теорема 2 (инт. пр. Коши):

Задан $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ с положит. чл. и $f(x)$, опред-ная на $[1, +\infty)$, причем

1) $f(x)$ непрер. на $[1, +\infty)$;

2) $f(x) > 0$ на $[1, +\infty)$;

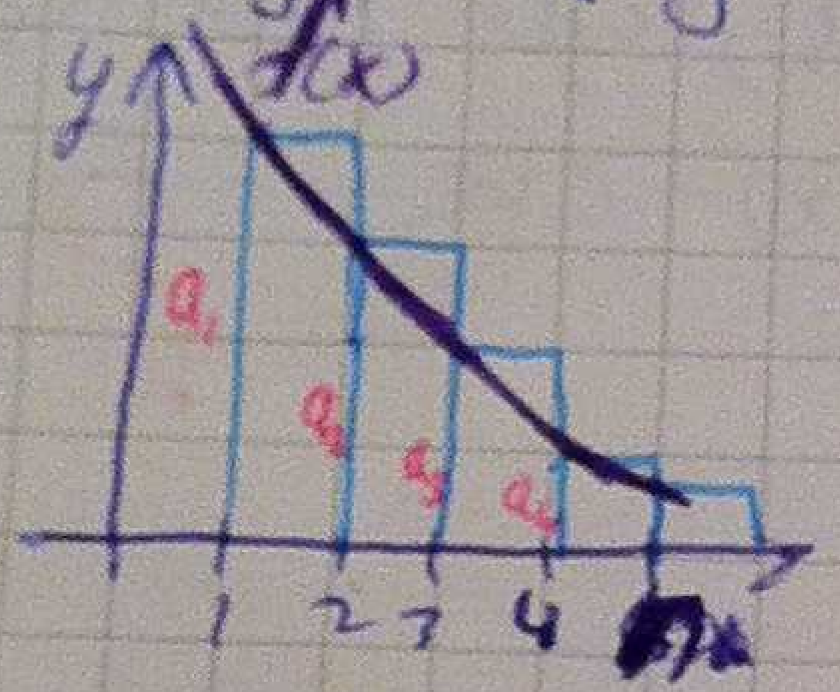
3) $f(x)$ монот. $\downarrow$ на $[1, +\infty)$;

4) $\forall n$ $f(n) = a_n$.

Тогда ряд $\downarrow\uparrow$ в, тогда и только в том случае, если $\downarrow\uparrow$ $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Док-во:

① Пусть ряд сходится. Тогда $\forall n \Rightarrow A_n \le A$.



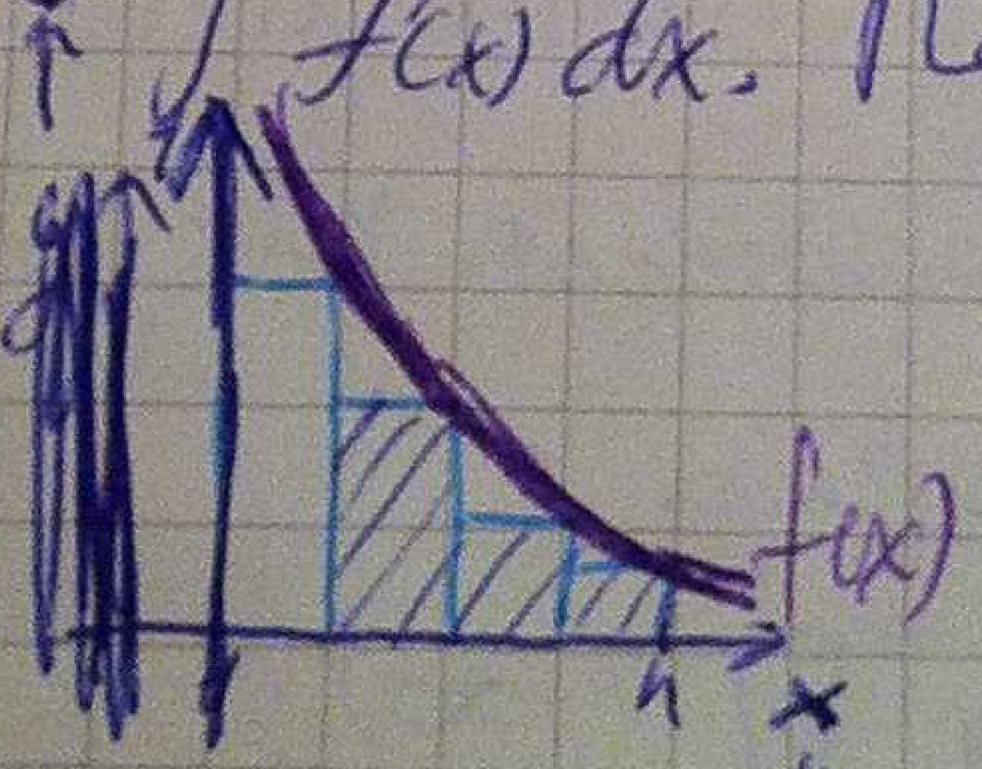
$F(b) = \int\limits_1^b f(x)\,dx$, это $\uparrow$ ф-я. Численно равна S криволинейной трапеции под $f(x)$ на $[1, b]$.

Выберем наименьшее $n \ge b$.

$S_{⏢} < S_{▟} \Rightarrow F(b) \le A_{n-1} \le A$.

Теперь $F(b)$ удовлетворяет условиям Т1, $\Rightarrow \exists \lim\limits_{b\to\infty} F(b) = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, что и означает, что $\int$ сходится.

② Пусть $\downarrow\uparrow$ $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Передвинем ▟ на 1 влево:



$S_{▟} = A_n - a_1$, вся фигура в трапеции $\Rightarrow A_n - a_1 \le \int\limits_1^n f(x)\,dx \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$,

или $A_n \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx + a_1$, что означает ограниченность частичных сумм ряда $\Rightarrow$ сходится.

* * *

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

при $p \leq 0$ $\updownarrow$

при $p > 0$:

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится (билет 12)

$\Rightarrow$ ряд $\downarrow\uparrow$

Билет 22 Абсолютная/условная сходимость. Признак Лейбница

У ряда ∞ много положит. и отрицат. членов.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$; $\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, $\quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$,

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$, $\quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$,

$a_n = a_n^+ + a_n^-$;

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, \text{ если } a_n \geq 0, \\ 0, \text{ если } a_n < 0. \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, \text{ если } a_n \geq 0, \\ a_n, \text{ если } a_n < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ сумма всех пол. чл. $\qquad$ сумма всех отр. чл.

Теорема 1: Ряд $\downarrow\uparrow$ абсолютно тогда и только тогда, когда $\downarrow\uparrow$ a_n^+ и a_n^-, справедливо рав-во $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

Док-во:

① $|a_n^+| \le |a_n|$; $|a_n^-| \le |a_n|$; $|a_n| = |a_n^+| + |a_n^-|$

Пусть $\downarrow\uparrow$, тогда по I-му пр. ср-я сходятся $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^+|$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^-|$.

Но $|a_n^+| = a_n^+$, $|a_n^-| = -a_n^-$,

откуда следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$.

② Пусть, обратно, $\downarrow\uparrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^+|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^-|$.

т.к. $|a_n^+| = a_n^+$, $|a_n^-| = -a_n^-$,

$\downarrow\uparrow$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^+|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n^-|$.

Т.к. $|a_n| = |a_n^+| + |a_n^-|$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ тоже $\downarrow\uparrow$.

По простейш. св-вам числ. рядов

$$a_n = a_n^+ + a_n^- \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

Если и a_n^+ и a_n^- расходятся — a_n или $\overset{\uparrow}{\downarrow}$, или $\overset{\downarrow}{\uparrow}$ условно.

Определение 1: Знакочер. ряд — . . . .

Теорема 2 (призн. Лейбница):

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 1) знакочер.;

2) посл-ть $\{|a_n|\}$ монот. убывает;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда $\overset{\downarrow}{\uparrow}$.

Док-во:

Пусть ряд начинается с „+" члена.

$c_n = |a_n|$, тогда ряд — $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \dots$

① Частичн. суммы с четн. номерами — S_{2k}.

а) $S_{2k} = (c_1 \overset{+}{-} c_2) + (c_3 \overset{+}{-} c_4) + \dots + (c_{2k-1} \overset{+}{-} c_{2k})$

или

б) $S_{2k} = c_1 - (c_2 \overset{+}{-} c_3) - \dots - (c_{2k-2} \overset{+}{-} c_{2k-1}) - c_{2k}$

Т.к. c_n монот. $\downarrow$, выражение в скобках в а) положит.-но $\Rightarrow$ $S_2 < S_4 < \dots < S_{2k} < \dots$

Из б) следует, что $S_{2k} < c_1$; то есть $\{S_{2k}\}$ — монот. $\uparrow$ и огр-ная.

Док-во: выберем произвольное $\hat{T}$ и составим соответствующую сумму.

$\sigma = \sum_i (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \sum_i f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \pm \sum_i g(\xi_i) \cdot \Delta x_i =$
$= \sigma' + \sigma''$.

Возьмем произв. норм. последовательность $\{\hat{T}_n\}$, для нее справедливо $\sigma_n = \sigma_n' + \sigma_n''$,
и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

③ $f(x) \neq 0$ на $[a,b]$ только в конечном числе (k) точек; тогда она интегр. на $[a,b]$ и инт. $= 0$.

Док-во: из условия следует, что $f(x)$ огранич. на $[a,b]$: $\exists C > 0: \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \le C$.

Возьмем произв. $\hat{T}$, $0 \le |\sigma| = |\sum_i f(\xi_i) \Delta x_i| \le 2kC\lambda(\hat{T})$

Возьмем произв. посл. $\{\hat{T}_n\}$, $0 \le |\sigma_n| \le 2kC\lambda(\hat{T}_n)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\hat{T}_n) = 0$, по т. о „зажатости перем."
получим $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx = 0$.

④ (следствие предыд. теоремы): $f(x)$ интегр. на $[a,b]$, $g(x)$ определена на $[a,b]$ и отлична от $f(x)$ лишь в конечном числе точек, тогда $g(x)$ тоже интегр на $[a,b]$, и $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса есть предел

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$

② Рассмотрим S_{2k+1} (нечёт.).

$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$.

Т.к. $a_n \to 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \overbrace{a_{2k+1}}^{\to 0} = S$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. $\Rightarrow$ ряд $\downarrow\uparrow$.

Билет 23 Непрерывность суммы функц. ряда

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$; $\downarrow\uparrow$ в т. x_0, если $\downarrow\uparrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$

Мн-во всех точек, в кот. сходится — область сходимости.

Определение 1: числ. ряд с „+"-членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ — мажоранта для функц. ряда на $\langle a,b\rangle$ если $\forall n\ \forall x \in \langle a,b\rangle \Rightarrow |u_n(x)| \le a_n$

Теорема 1 (о непрер-ти суммы функц. ряда)

Пусть задан $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$,

1) $\forall n$ $u_n(x)$ непрер. на $\langle a, b\rangle$;

2) существует сходящаяся мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ на $\langle a, b\rangle$.

Тогда функц. ряд сходится абсолютно на $\langle a, b\rangle$, и его сумма $S(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

Док-во:

Возьмем $x_0 \in \langle a, b\rangle$. В силу I-го признака ср-я функц. ряд сходится.

Далее:

$$S(x) = S_m(x) + \underbrace{R_m(x)}_{\text{остаток ряда}}$$

$$S(x_0) = S_m(x_0) + R_m(x_0)$$

$$|S(x) - S(x_0)| = |(S_m(x) - S_m(x_0)) + R_m(x) - R_m(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |S_m(x) - S_m(x_0)| + |R_m(x)| + |R_m(x_0)|.$$

Оценим остаток ряда:

$$|R_m(x)| = \left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} |u_n(x)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = \alpha_m$$

α_m — остаток сходящ-ся мажоранты $\Rightarrow \to 0$ при $m \to \infty$.

По опред. бесконечно малой

$\exists N: \forall m \geqslant N \Rightarrow \alpha_m < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $m = N$, тогда $|R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$

~~т.к. при добавл. конечного кол-ва членов сх. ряда не меняется,~~

$\cancel{|S(x) - S(x_0)| \le |S_N(x) - S_N(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon}$

$\cancel{|S(x) - S(x_0)| + R(x) \le |S_N(x) - S_N(x_0)| + R_N(x)}$

$$|S(x) - S(x_0)| \le |S_N(x) - S_N(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$$

взяли и заменили R_m

$S_N(x)$ непрерывна на $\langle a,b \rangle$, в т.ч. в x_0:

$\exists U(x_0): \forall x \in U \Rightarrow |S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

из 2х предыдущих — $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$.

24 dx и $\int$ функц. рядов

Теорема 1: функц. ряд, условия:

1) $\forall n$ $u_n(x)$ непрер. на $[a,b]$;

2) сущ. $\overset{\downarrow}{\uparrow}$ мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ на $[a,b]$

Тогда ряд абсол. сходится и

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx}_{\text{обязательно сходится}},$$

Док-во в силу предыд. теоремы ряд $\overset{\downarrow}{\uparrow}_{*}$ на $[a,b]$, а его $S_m(x)$ – непрер. ф-я.

$$S(x) = \underset{\left(\sum\limits_{n=1}^{m} u_n(x)\right)}{S_m(x)} + \underset{\left(\sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\right)}{R_m(x)}$$

Т.к. $S(x)$ и $S_m(x)$ – непрер., $R_m(x)$ тоже непрер.

$\Rightarrow$ можно интегрировать:

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b S_m(x)dx + \int\limits_a^b R_m(x)dx.$$

по св-вам опр. инт-ла

$$\int\limits_a^b S_m(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{m} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$$

$$0 \le \left|\int_a^b R_m(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\right)dx\right| \le \int_a^b \left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n(x)\right| dx \le$$

$$\le \int_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} |u_n(x)|\right)dx \le \int_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n\right)dx = \underbrace{(b-a)}_{const}\underbrace{\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n}_{R} = \gamma_m$$

Но это — const · R мажоранты ⇒ б. мал. при $m \to \infty$

Значит, по т. о зам. пер. $\int_a^b R_m(x)\,dx \to 0$ при $m \to \infty$.

Перейдем в ● к $\lim\limits_{m\to\infty}$:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int_a^b u_n(x)\,dx + 0$$

ЧТД

Теорема 2 (о dx функц. рядов)

Пусть задан функц. ряд,

1) $\forall n$ $u_n(x)$ непрер. и имеет непрер. произв. на [a, b];

2) ряд $\underset{\uparrow}{\downarrow}$ на [a, b];

3) существует сходящаяся мажоранта для $\sum\limits_{n=1} u_n'(x)$ на [a, b]

Тогда сумма несх. ряда дифф.-ма на $[a, b]$ и $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$

Док-во:

фиксируем $x \in [a, b]$, тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ подходит под предыдущие 2 теор. (абс. $\Rightarrow$, сумма непрер.-на):

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x) - u_n(a)) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a);$$

или $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) + \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(t)\right)dt$

дифф.-ем:

интеграл с перемен. при верхнем пределом

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)\,dx$$

Билет 25 Теорема Абеля для степенных рядов; R и инт. сходимости; сохранение R при дифф. и интегрир. ряда.

Степенной ряд: $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$

Теорема 1 (1ая теорема Абеля):

Если степ. ряд $\downarrow\uparrow$ при $x_0 \neq 0$, то он $\downarrow\uparrow$ при $\forall x$, таком, что $|x| < |x_0|$.

Док-во:

возьмем $x \neq 0$: $|x| < |x_0|$;

$$|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |c_n x_0^n| q^n \quad \left(q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1\right)$$

Т.к. ряд $\downarrow\uparrow$ в точке x_0, $c_n x_0^n \to 0$.

Поэтому посл. $\{c_n x_0^n\}$, как всякая сходящ. послед-ть, ограничена:

$$\exists A > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |c_n x_0^n| \leq A$$

$$|c_n x_0^n| \cdot q^n \leq A \cdot q^n$$

$$|c_n x^n| \leq \underbrace{A \cdot q^n}_{\text{сх. геом. пр.}}$$

сх. геом. пр. $\Rightarrow \downarrow\uparrow$ по I пр-ку ср.

Определение 1: R сходимости —

$R = \sup\{|x| : \text{в т. } x \text{ ряд } \overset{\downarrow}{\uparrow}\}$

При $0 < R \le +\infty$ можно говорить об интервале сход-ти $(-R, R)$.

Теорема 2 дан степ. ряд с ненулевым R сходимости. Он абсолютно $\overset{\downarrow}{\uparrow}$ внутри него,

$\updownarrow$ вне, в концевых точках $\pm R$ — ?.

Теорема 3: Пусть задан степ. ряд, где все $c_n \ne 0$. Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$

Теорема 4: При почл. дифф.-нии R сход-ти степ. ряда не меняется ($R_1 = R$).

Док-во: $(c_n x^n)' = n c_n x^{n-1}$

$(c_{n+1} x^{n+1})' = (n+1) c_{n+1} x^n$

$$R_1 = \lim \frac{|n c_n|}{|(n+1) c_{n+1}|} = \lim \frac{n}{n+1} \cdot \lim \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R$$

Теорема 5: При почленном интегрир. R не меняется.

26 Св-ва суммы степ. ряда. Ряды Тейлора. Осн. разложения.

Теорема 1: Сумма степ. ряда диф-ма в интервале сходимости,

$$\left(\sum_n c_n x^n\right)' = \sum_n n c_n x^{n-1}$$

Теорема 2: Сумма степ. ряда, $R \neq 0$, бесконечно диф-ма в инт. сходимости, причем все производные получаются почленным диф-ем.

Ряды Тейлора

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$ сумма $- S(x)$,

как c_n связаны с производными $S(x)$

$$S(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots$$

подставим x_0; $c_0 = S(x_0)$

дифф-ем

$$S'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \ldots + n c_n (x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

подст. x_0 — $c_2 = \frac{S''(x_0)}{2!}$

приходим к ф-ле: $\forall n \quad c_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}x_0}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Рассм. бесконечно дифф. $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ — ряд Тейлора для $f(x)$ в (x_0)

$$\boxed{\text{Сумма сход-ся степенных ф-й = аналитич. ф-ии.}}$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_n(x)}_{\text{остаточный член}}$$

Теорема 3: Чтобы $f(x)$ раскл. в ряд Тейлора в точке x, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Теорема 4: Если $\exists M > 0$:

$\forall n \ \forall x \in U(x_0) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M$

то $f(x)$ раскл. в ряд Тейлора в $U(x_0)$

что $\{\alpha_n\}$

Док-во: $g(x) = f(x) + \underbrace{(g(x) - f(x))}$;
отлично от 0 только в k точек
$\Rightarrow$ по предыд. теореме ЧТД.

C Необходимое условие интегрируемости

Теорема 1. Если $f(x)$ инт. на $[a,b]$, то она ограничена на нём, т. е. $\exists C>0: \forall x\in[a,b] \Rightarrow |f(x)|<C$.

(от противного)

Док-во: предпол., $f(x)$ инт. на $[a,b]$ но не огр. на нём. Возьмем $\{\hat{T}_n\}$, тогда для $\{\sigma_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx = J.$$

Выберем новую $\{\hat{T}_n'\}$ такую: Разбиение $\hat{T}_n$ порождает отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, и $f(x)$ не огр. хотя бы на одном из них, например $[x_{k-1}, x_k]$. Вместо ξ_k берем ξ_k': $f(\xi_k')\Delta x_k = f(\xi_k)\Delta x_k + [f(\xi_k') - f(\xi_k)]\Delta x_k$.

Поскольку $f(\xi_k')$ можно брать сколь угодно большой, найдется ξ_k' такое: $|\underbrace{[f(\xi_k') - f(\xi_k)]\Delta x_k}_{\alpha_n}| > n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\{\alpha_n\}$ – б. б.

$\sigma_n' = \sigma_n + \alpha_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n' = J$, что значит

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{1+x} = (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n$$

4 Формулировка критерия Лебега и следствия из него.

рассмотрим посл. $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Частичная сумма — $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Сумма всех чл. посл.: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Определение 1: множ-во A — счетное, если его элементы можно пронумеровать. Бесконеч. мн-ва, которые не являются счетными — несчетные (напр. множ-во чисел, образующ. отрезок $[a, b]$).

Пусть $\{J=(\alpha, \beta)\}$ — система интервалов.

Определение 2: $\{J\}$ образует покрытие мн-ва A, если каждый элемент из A принадлежит хотя бы одному интервалу из этой системы.

Определение 3: Мн-во A — множество меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ конечная либо счетная $\{J\}$, покры-