1 Неопределённый интеграл. Основные методы интегрирования.

Первообразной для ф-ции $f(x)$ на промежутке $\langle a;b\rangle$ называется ф-ция $F(x)$ такая, что на всём $\langle a;b\rangle$ выполняется соотношение:

$$F'(x)= f(x)$$

Существование $F(x)$ гарантировано для непрерывных ф-ций $f(x)$. Единственности нет, т.к.: $(F(x)+C)' = f(x)$, т.е. $F(x)$; $[F(x)+C]$ - это всё первообр-ые.

Если $F_1(x)$ - другая первообр-я для $f(x)$, то на $\langle a;b\rangle$ $\exists$ такая пост. C, что на $\langle a;b\rangle$ справедливо: $F_1(x)= F(x)+C$

Рассм: $g(x)=F_1(x)-F(x)$: $g'(x)=F_1'(x)-F'(x)= f(x)-f(x)=0$

По следствию из Т. Лагранжа $g(x)= C \Rightarrow$

Неопределённый интеграл – произвольная первообразная для $f(x)$: $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Простейшие св-ва интегралов:

- $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot\int f(x)dx$;
- $\int [f(x)\pm g(x)]dx= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. – св-во линейности

если $F(x)$, $G(x)$ – первообразные ф-ций $f(x)$ и $g(x)$, то $[F(x)\pm G(x)]' = F'(x)\pm G'(x)= f(x)\pm g(x)$.

Св-ва интегралов (методы интегрирования).

Т.:
1. $f(u)$ непр. на $\langle a;b\rangle$ ← метод подстановки (замены переменной) (1)
2. $\varphi(x)\in C^1(\langle a;b\rangle)$
3. $\forall x\in\langle a;b\rangle$ $\varphi(x)\in\langle a;b\rangle$

$\Downarrow$

если $\int f(u)du = F(u)+C$, то $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)]+C$

$\int f(u(x))du(x) = F[u(x)]+C$

Д.: Оба интеграла существуют, т.к. подынтегральн. ф-ции непр. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{dx}F[\varphi(x)] = F'_u[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)= f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

(*): $\int e^{x^3}\cdot x^2 dx$

Т.: Пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x)\in C^1(\langle a;b\rangle)$, тогда: ← (2) метод интегрирования по частям

$$\int v(x)\cdot u'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Д.: Все ф-ции ↗ непрерывны, сл-но имеют первообразную, отсюда:

$$\int (u(x)\cdot v(x))' = \int v(x)\cdot u'(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Одной из первообразных для $(u(x)\cdot v(x))'$ явл. $u(x)\cdot v(x)$, тогда отсюда всё и следует...

Более наглядная запись:

$$\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x)$$

(*): $\int e^x x\,dx$

$\int x^2\cos x\,dx$

и т.д.

② Таблица интегралов.

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0, a\neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

10. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a>0)$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A\neq 0)$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

---

(8): $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = a\cdot u \\ dx = a\,du \end{array} \right\} = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2-a^2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(9): $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = a u \\ dx = a\,du \end{array} \right\} = \int \frac{a\,du}{a^2+a^2u^2} = \int \frac{du}{a(1+u^2)} = \frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

(10): $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(a+x)}{a+x} - \int\frac{d(a-x)}{a-x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|a+x| - \ln|a-x|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

(11): $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \left\{ \begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+A} = u \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{du}{u} \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

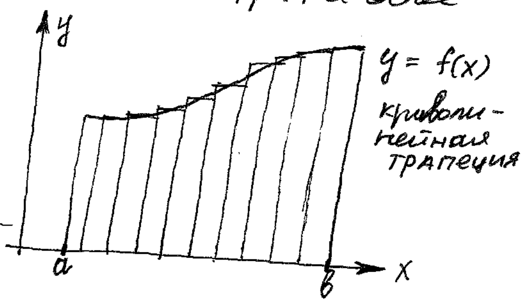
(12): $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

(13): $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

③ Определённый интеграл. Простейшие св-ва. Необходимые условия интегрируемости.

Пусть на отр $[a;b]$ задана ф-ция $f(x)$. Разобьём этот отр. на более мелкие конечным числом точек x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$



Множество точек x_i – разбиение отрезка (T)

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\lambda(T) = \max\limits_i \Delta x_i$

Δx_i – длина отр. $[x_{i-1}; x_i]$; $\lambda(T)$ – диаметр разбиения $\to 0$

На каждом отр. выбираем произвольную (·) ξ_i:

$\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i$ – сумма по всем отрезкам.

Интегральная сумма для ф-ции $f(x)$

Определение: Число J называется пределом интегральных сумм, когда диаметр разбиения $\to 0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T : \lambda(T) < \delta \text{ при любых } \{\xi_i\}$$

выполняется нер-во $\left|\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$ или $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i = J$

Определённый интеграл от ф-ции $f(x)$ по отр $[a;b]$ – этот предел, кратко:

$$\int\limits_a^b f(x)dx. \quad \leftarrow \text{это число, а не функция!!!}$$

Если интеграл существует, то ф-ция называется интегрируемой на отр. $[a;b]$

Свойства:

Т.: Если $f(x), g(x)$ – инт-мы на $[a;b]$, то:

1. $\int\limits_a^b C f(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$
2. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g x dx$

Д.: T – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$, ξ_i – произвольн. промежут. точки:

$\sum\limits_i [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum\limits_i g(\xi_i)\Delta x_i$; при $\lambda(T) \to 0$:

интегральн. сумма

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b f(x)dx, \quad \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b g(x)dx \ ;$$

по **Т.** о пределе суммы: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_i [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

Т.: Пусть ф-ция $f(x)$ отлична от нуля на $[a;b]$ лишь в конечном числе точек. Тогда она интегрируема на $[a;b]$ и интеграл $= 0$.

Д.: $f(x) \neq 0$ лишь в числе точек $= k$ (k – число (·), отличных от 0).

Тогда она ограничена на $[a;b]$:

при $k > 0$: $\forall x \in [a;b]$ $|f(x)| \leq C$

Оценка по модулю сверху интегральной суммы: $0 \leq \left|\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq C \cdot 2k\,\lambda(T)$

($2k$, т.к. каждая (·) ξ_i может дважды участвовать в инт. сумме)

Пусть $\lambda(T) \to 0$, тогда по **Т.** „о зажатой переменной":

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

Т. (следствие): Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, а $g(x)$ определена на $[a;b]$ и отлична от $f(x)$ лишь в конечном числе точек. Тогда $g(x)$ тоже интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Д.:
$$g(x) = f(x) + [g(x) - f(x)]$$
$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = 0$ по Т. (предыдущ.) (т.к. эта ф-ция $\neq 0$ лишь в кон. числе (·)…).
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Т. (необходимый признак интегрируемости):

Д. Если ф-ция интегрируема на отрезке, то она огр. на этом отр.: $\exists C>0: \forall x\in[a;b]\ |f(x)|\leq C$

Предположим, что $f(x)$ – инт., но не огр.

$\varepsilon=1 \quad \exists\delta: \forall T: \lambda(T)<\delta\ \forall f(\xi_i)$
$$\Big|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\Big| < 1$$
$$J-1 < \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i < J+1 \quad (1)$$
T – разбиение, фиксируем его. Т.к. $f(x)$ не огр. на $[a;b]$, то она не огр. хотя бы на маленьком отр. $[x_{k-1};x_k]$, входящем в T. Фиксируем все (·) ξ_i на отрезках $[x_{i-1};x_i]$. Теперь все слагаемые суммы (1) фиксированны, кроме $f(\xi_k)\Delta x_k$. Но на $[x_{k-1};x_k]$ ф-ция не огр., значит $f(\xi_k)\Delta x_k$ может быть ог. большой за счёт ξ_k. Вместе с этим слагаемым будет большой и вся сумма, что противоречит (1) $\Rightarrow$ теорема справедлива.

Если ф-ция неогр., то она неинт-ма.; но: если она огранич., не обязат., что она инт-ма. (Пример: ф-ция Дирихле).

Т. (об инт-ти неравенств):

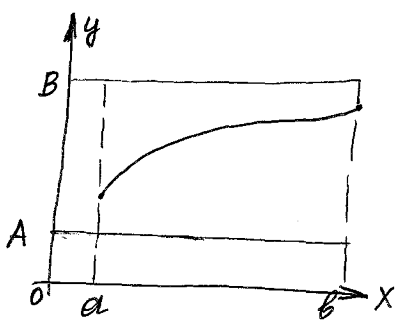
1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$
2. $f(x)\leq g(x)$ на $[a;b]$

$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(\xi_i)\leq g(\xi_i)$$
$$f(\xi_i)\Delta x_i\leq g(\xi_i)\Delta x_i$$
$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i$$

Д.:
$$0 \leq g(x)$$
$$0 \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$A \leq f(x) \leq B$$
$$\int_a^b A\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b B\,dx$$
$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a)$$



Пусть $f(x)\equiv C$ на $[a;b]$, тогда
$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$
$$\downarrow$$
$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i C\Delta x_i = C\sum_i \Delta x_i = C(b-a)$$

④ Формулировка критерия Лебега, следствия из него. (опр: мн-во меры 0, св-ва...)

Произвольн. числовая посл-ть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Её частичная сумма: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (Сумма беск. убыв. геом. прогрессии S)

Сумма всех членов этой посл-ти — предел S_n при $n \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Этот lim сущ-ет не всегда ($1, 1, 1, \dots, 1, \dots \to S_n = n \Rightarrow$ нет суммы всех членов)

<u>Определение</u>: Мн-во A называется счётным, если можно установить взаимно однозначное соответствие м/у его эл-ами и мн-вом натур. чисел.

Т.е. счётные мн-ва — те, которые можно перенумеровать.

<u>Бесконечные</u> мн-ва — <u>несчётные</u>.

Мн-во натур. чисел — <u>счётное</u> (кажд. эл-ту надо сопоставить этот же эл-нт)

Мн-во рац. чисел ($\frac{m}{n}$, $n \neq 0$) — <u>счётное</u>.

Мн-во чисел, образующих $[a; b]$ — <u>несчётное</u> (в нём слишком много эл-тов)

Рассм-им нек. мн-во A и произвольн. с-му интервалов $\{J = (\alpha; \beta)\}$ (конечн. и бесконечн.)

<u>Определение</u>: С-ма интервалов $\{J\}$ образует покрытие мн-ва A, если кажд. эл-нт из $A \in$ хотя бы одному интервалу из этой с-мы.

<u>Определение(1)</u>: Мн-во A называется мн-вом меры нуль, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более, чем счётная с-ма интервалов $\{J_n\}$, покрывающая это мн-во, сумма длин которых меньше ε. $\mu(A) = 0$.

(„не более, чем" $\to$ с-ма $\{J_n\}$ либо конечна, либо счётна.)

Мн-ва меры нуль бывают счётные и несчётные. $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \{J_n\}\ \sum_n |J_n| < \varepsilon}$

<u>Св-ва множеств меры нуль:</u>

1) <u>Т.</u> Всякое подмножество мн-ва меры 0 само явл. мн-ом меры 0.

$\mu(A) = 0$

$A_1 \subset A$ $\mu(A_1) = 0$ "$\subset$" - покрывает

2) <u>Т.</u> Объединение 2х мн-тв меры 0 явл. также мн-ом меры 0.

$C = A \cup B$

$\mu(A) = \mu(B) = 0$

$\Downarrow$

$\mu(C) = 0$

<u>Д:</u> $A; B$ - мн-ва меры 0

$\forall \varepsilon > 0$; $\frac{\varepsilon}{2}$; В силу <u>опр.(1)</u> для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ сущ-ет не более, чем счётная с-ма инт-ов $\{J_n\}$, покрывающая A и такая, что:

$$\sum_n |J_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |J_n| \text{ - длина интервала } J_n$$

для B: $\sum_n |J_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$

С-ма интервалов $J_1, J_1', J_2, J_2', \dots, J_n, J_n', \dots$ не более, чем счётна, покрывает объединение $A \cup B$, а сумма длин с-мы меньше ε:

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |J_n'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Т.е. для $A \cup B$ выполнены все условия <u>опр.(1)</u> $\Rightarrow$ мн-во есть мн-во меры 0.

- Объединение <u>конечного числа</u> мн-тв меры 0 есть мн-во <u>меры 0</u>.
- <u>Пустое</u> мн-во имеет <u>меру 0</u>.

<u>Т.2)</u> обобщается на случай объединения <u>счётного</u> числа мн-тв A_i.

T. (критерий Лебега интегрируемости ф-ций):

Для того, чтобы ф-ция $f(x)$ была интегрируемой на отр. $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была огр. на этом отр. и мн-во её точек разрыва имело меру 0.

Следствия:

1) T.: Если ф-ция непр. на отр., то она инт-ма на нём.

Из непр-ти $\Rightarrow$ огр-ть на отр.; мн-во её точек разрыва имеет меру 0 $\Rightarrow$ инт-ть (по крит. Лебега).

2) T.: Если ф-ция огр. на отр. и имеет на нём конечное число точек разрыва, то она инт-ма на этом отр.

3) T.: Если $f(x)$ и $g(x)$ – инт-мы на отр. $[a;b]$, то их пр-ие $f(x)\cdot g(x)$ инт-мо на нём.

D.: из инт-ти $f(x)$ и $g(x)$ (по кр. Лебега) $\Rightarrow$ их огр-ть на $[a;b]$ и то, что мн-во точек разрыва каждой из них имеет меру нуль:

$|f(x)| \le C_1, \quad |g(x)| \le C_2 \quad \forall x \in [a;b];$

$\mu(A)=0, \ \mu(B)=0$, A и B – мн-во точек разрыва $f(x)$ и $g(x)$.

$\Downarrow$ $|f(x)\cdot g(x)| \le \underbrace{C_1\cdot C_2}_{\text{непр-но}}$, т.е. $f(x)\cdot g(x)$ – огр. на $[a;b]$.

если $f(x)$ и $g(x)$ – непр. в $(\cdot)$ x, то их пр-ие тоже непр. в эт. $(\cdot)$

Поэтому кажд. $(\cdot)$ разрыва пр-ие $f(x)\cdot g(x) \in$ одному из мн-тв A и B, $\Rightarrow$

$M \in A \cup B$, M – мн-во $(\cdot)$-ек разрыва

$\mu(A\cup B)=0 \Rightarrow \mu(M)=0.$

4) T.: Если ф-ция $f(x)$ инт-ма на отр., то её модуль инт-ем на нём.

$|f(x)| \le C$, т.е. огр. (т.к. $f(x)$ огр. на $[a;b]$, по крит. Лебега) $\mu(A)=0$

Все точки разрыва модуля содержатся среди всей ф-ции.

$B \subseteq A \quad \mu(B)=0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

5) T.: Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то она инт-ма на любом отр. $[\alpha;\beta]$, содержащемся в $[a;b]$.

Из инт-ти на $[a;b]$ (по крит. Лебега) $\Rightarrow$ огр-ть её, мн-во $(\cdot)$ её разрыва имеет меру 0. Отсюда (по крит. Лебега) она обл-ет теми же св-ми на $[\alpha;\beta]$. утверждение теоремы.

⑤ Интегрирование неравенств. Разбиение отрезка интегрирования; пределы интегрирования.

<u>Т. (инт-ие неравенств):</u>

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$
2. $f(x) \leq g(x)$ на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

<u>Д.</u>: Рассм-им произвольное разбиение T отрезка $[a;b]$ и выберем произв. промежут. точки $\{\xi_i\}$. Тогда: $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$; $f(\xi_i)\Delta x_i \leq g(\xi_i)\Delta x_i$

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$$

$\lambda(T) \to 0$ (диаметр разбиения), по <u>Т о перех. к пределу в нер-ве</u> <u>получаем</u> из $(2) \to (1)$.

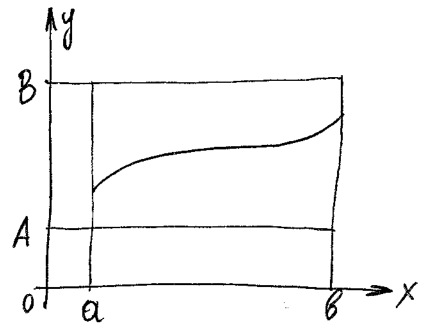
$$0 \leq g(x)$$

$$0 \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$A \leq f(x) \leq B$$

$$\int_a^b A dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b B dx$$

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a)$$



<u>Следствие 1:</u> Если $g(x)$ инт-ма на $[a;b]$ и $g(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0 \qquad \text{Д: } f(x) \equiv 0 \text{ и т.п.}$$

<u>Следствие 2:</u> Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$ и $A \leq f(x) \leq B$ на $[a;b]$, то

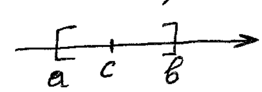
$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a)$$

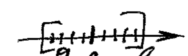
<u>Т. (разбиение отрезка инт-ия, пределы инт-я):</u>

Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$; c - произвольное число, $a < c < b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$





<u>Д.</u>: T_1 - произвольное разбиение отрезка $[a;c]$ с диаметром $\lambda(T_1)$, $\{\xi_i'\}$ - произвольный набор точек.; на $[c;b]$: T_2, $\lambda(T_2)$, $\{\xi_i''\}$.

Объединяем T_1 и $T_2 \to$ T - разбиение отр. $[a;b]$, $\{\xi_i'\}$ и $\{\xi_i''\} \to$ набор промежут. точек $\{\xi_i\}$ на $[a;b]$;

$$\lambda(T) = \max\{\lambda(T_1), \lambda(T_2)\} \quad (3)$$

Соответствующая интегральная сумма на $[a;b]$ равна

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \underbrace{\sum_i f(\xi_i')\Delta x_i}_{\updownarrow} + \underbrace{\sum_i f(\xi_i'')\Delta x_i}_{\updownarrow} \quad (4)$$

суммы на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$.

$\lambda(T) \to 0$, из $(3) \Rightarrow \lambda(T_1) \to 0$ и $\lambda(T_2) \to 0$, тогда все слагаемые в (4) стремятся к соответствующим интегралам

$$\Downarrow$$

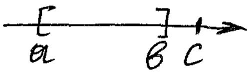
Т-ма док-на.

Для произвольного соотношения м/у a и b:

По определению: $\int_a^a f(x)dx = 0$;

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

$\Rightarrow$ Предыдущ. <u>Т.</u> справедлива при произвольном соотношении м/у a, b, c:

<u>Д.</u>:  $a < b < c$

По этой <u>Т.</u> (переобозначая <u>пределы интегрирования</u>, т.е. числа a, b и c) получается:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \text{Т. справедлива.}$$

Все соотношения, содержащие знак "=", остаются в силе, а формулы, где фигурируют нер-ва, будут справедливы, только если <u>нижний предел</u> инт-ла < <u>верхнего</u>.

⑥ Теорема о среднем для определённых интегралов.

Т. (о среднем):

1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $g(x)$ инт-ма на $[a;b]$
3. $g(x)\geq 0$ на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\exists (\cdot)\, C \in [a;b]: \quad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx. \quad (1)$$

Д.: Ф-ция непр. и инт-ма на отр. По св-вам ф-ций, непр-ых на отр („всякая ф-ция, непр-я на отр., достигает на нём точ. верхней и точ. нижней граней"):

$$M = \sup_{[a;b]}\{f(x)\} \qquad \forall x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$m = \inf_{[a;b]}\{f(x)\}$$

т.к. $g(x)\geq 0 \Rightarrow \quad m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$

по Т. об инт-ии нер-тв:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx \quad (2)$$

$\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ (по следствию из этой Т.)

1) $\int_a^b g(x)\,dx = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$$

2) $\int_a^b g(x)\,dx > 0$

Поделим (2) на $\int_a^b g(x)\,dx > 0$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

Обл. знач. ф-ции совп. с отр. $[m;M]$.

По Т. о промежут. значениях для непр. на отр ф-ции $f(x)$:

$$\exists c \in [a;b]: \quad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c) \quad \Rightarrow (1)$$

Если в (1) $g(x)\equiv 1$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b dx; \qquad f(c) = \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

среднее значение ф-ции $f(x)$ на отр $[a;b]$.

(1) остаётся верным и в случае $g(x)\leq 0$; важно, чтобы ф-ция была знакопостоянной на отр., а не строго положит. или строго отрицательной.

⑦ Свойства интеграла как ф-ции верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. (при непр. подынтегр. ф-ции на $[a;b]$)

$f(x)$ – инт-ма на $[a;b]$

$x \in [a;b]$

Расс-им новую ф-цию $F(x)$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $\left(\begin{array}{l} F(a) = 0 \\ F(b) = \int_a^b f(x)dx \end{array} \right)$

Св-ва ф-ции $F(x)$ при различных условиях, накладываемых на $f(x)$:

Т.: Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то $F(x)$ непр. на этом отрезке.

Д.: x_0 – произвольная (·); $x_0 \in [a;b]$. Приращение ΔF в этой (·):

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} = \int_{x_0}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_0+\Delta x} = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

1) $\Delta x > 0$. Т.к. f инт-ма на $[a;b]$, то она огр. на нём:

$\exists C > 0: \forall x \in [a;b] \; |f(x)| \leq C \; (\forall t \in [x_0; x_0+\Delta x] \; |f(t)| \leq C)$

$$|\Delta F| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta t} |f(t)|dt \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} C dt = C(x_0+\Delta x - x_0) = C\Delta x = C \cdot |\Delta x|$$

2) $\Delta x < 0$:

$$|\Delta F| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| = \left| - \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \right| \leq \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} |f(t)|dt \leq \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} C dt =$$
$$= C(-\Delta x) = C|\Delta x|$$

Из 1) и 2) => при любом знаке Δx:

$0 \leq |\Delta F| \leq C|\Delta x|$ (Δx – такое, чтобы не выйти за пределы $[a;b]$)

Отсюда по Т. о „зажат. перем." находим, что:

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ => $F(x)$ непр. в (·) x_0

Поскольку x_0 – произвольная (·) на $[a;b]$ => теорема верна.

Т.: Если $f(x)$ непр. на отр. $[a;b]$, то $F(x)$ диф-ма на этом отр., причём:

$F'(x) = f(x)$

Д.: x_0 – произвольная (·); $x_0 \in [a;b]$. Приращение ΔF:

$\Delta F = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$, где $c \in [x_0; x_0+\Delta x]$. (пользуемся Т-мой о среднем, полагая $g(x) \equiv 1$)

$\Downarrow$

$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c)$

$\Delta x \to 0$. Т.к. $c \in [x_0; x_0+\Delta x]$, то $c \to x_0$, тогда в силу непр-ти $f(x)$ =>

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$, т.е $F'(x_0) = f(x_0)$

Т.к. x_0 – произвольна, то $F(x) = f(x)$ – ч.т.д.

Интеграл как ф-ция верхнего предела явл. одной из первообразных. ($F(x)$ явл. одной из первообразных для $f(x)$ на $[a;b]$).

Для всякой непрерывной на отр. функции сущ-ет неопред. интеграл.

Т. (ф-ла Ньютона – Лейбница):

1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $\Phi(x)$ – её произвольн. первообразная. на $[a;b]$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

Д.: $F(x)$ – такие первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$. По св-ам первообр-ых:

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

$x = a$:

$$F(a) = 0 = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$$

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

$x = b$:

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$ – „подстановка от a до b"

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b \longleftrightarrow$$ связь м/у опред. и неопред. интегралом, позволяет с пом. неопред. интеграла вычислять интеграл определённый.

(*): $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

(8) Методы подстановки и интегрирования по частям для определ. интегралов.

Т: 1. $f(u)$ - непр. на $[a;b]$ $\qquad u=\varphi(x)$

2. $\varphi(x)\in C^1$ на $[\alpha;\beta]$

3. $\forall x\in[\alpha;\beta] \Rightarrow \varphi(x)\in[a;b]$

4. $\varphi(\alpha)=a;\quad \varphi(\beta)=b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(u)du=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Д: Все подинтегральные ф-ции сущ-ют в силу условий т-мы.
Пусть $\Phi(u)$ - первообразная для $f(u)$ на $[a;b]$

$$\int_a^b f(u)du=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(\varphi(x))=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\Phi(\varphi(\beta))-\Phi(\varphi(\alpha))=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\int_a^b f(u)du=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

(*): $$\int_0^1 e^{-x^3}x^2dx=-\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3)=-\frac{1}{3}e^{-x^3}\Big|_0^1=-\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^0=\frac{1-e^{-1}}{3}$$

$$\int_0^1 e^{-x^3}x^2dx=\left\{\begin{matrix}-x^3=u\\-3x^2dx=du\\x^2dx=-\frac{1}{3}du\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{3}\int_0^{-1}e^u du=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 e^u du=\frac{1}{3}e^u\Big|_{-1}^0=\frac{1-e^{-1}}{3}$$

Т: Пусть $u(x), v(x)\in C^1([a;b])$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$, или $$\int_a^b v(x)du(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)dv(x)$$

Д: $$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\int_a^b (uv)'dx=\int_a^b vu'dx+\int_a^b uv'dx$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b v(x)u'(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

(*): $$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx=\int_0^\pi x^2 d\sin x=x^2\sin x\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi x\sin x\,dx=x^2\sin x\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi x\,d\cos x=$$

$$=x^2\sin x\Big|_0^\pi+2x\cos x\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi\cos x\,dx=2\pi-2\sin x\Big|_0^\pi=2\pi$$

⑨ Формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа)

Расс-им ф-цию $f(x) \in C^{\infty}(U(x_0))$; Окр-ть $U(x_0)$ может быть и не мала, или совпадать со всей числ. осью.
Фиксируем произвольную (•) $x \in U(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \text{ (в силу формулы Ньютона-Лейбница)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$ ← применим неск. раз ф-лу интегрирования по частям:

{x - постоянное число}

$$f(x) = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = f(x_0) - f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2!} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt = \ldots =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt}_{r_n(x)}.$$

применим Т. о среднем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$$

$\left(f = f^{(n+1)},\ g = \frac{(x-t)^n}{n!}\right)$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \cdot \int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c) \cdot \int_{x_0}^{x}(x-t)d(x-t) =$$

$$= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

__Т.__: Пусть $f(x) \in C^{\infty}(U(x_0))$. Тогда при любом n и для $\forall x \in U(x_0)$ справедлива формула:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{остаточный член}},$$

где $c \in [x_0; x]$

(*): $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^c \qquad e^c < e < 3$

$x_0 = 0$

$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}01$

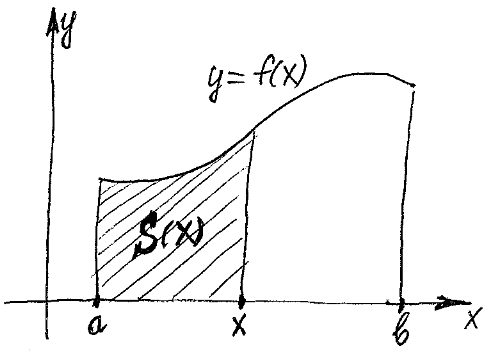
$\underline{n=3}$: $\frac{3}{4!} = \frac{1}{2\cdot4} = \frac{1}{8}$

$\underline{n=4}$: $\frac{3}{5!} = \frac{1}{2\cdot4\cdot5} = \frac{1}{40}$

$\boxed{n=5}$: $\frac{3}{6!} = \frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{240} < 0{,}01$

(10) S области, l дуги.

Пусть 1. $f(x)$ непр. на $[a;b]$
2. $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$
S – ?

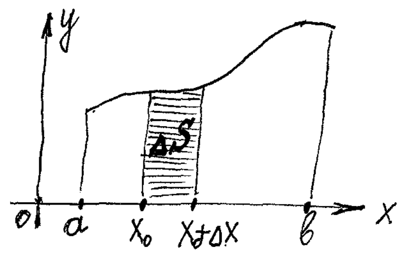


при $\forall\ x \in [a;b]$ вводим ф-цию $S(x)$ – площадь от a до x.

$S(a)=0$
$S(b) = S_{полн.}$

Фиксируем произвольное $x_0 \in [a;b]$, Δx – приращение (произвольное)
Тогда приращение $S(x)$: $\Delta S = S(x_0+\Delta x) - S(x_0)$

ΔS – площадь узкой полоски на участке $[x_0; x_0+\Delta x]$



Т. к. $f(x)$ непр. на отр. $[x_0; x_0+\Delta x]$, то она имеет на этом отр. min и max:

$\exists\ x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\Delta x]: \forall x \in [x_0, x_0+\Delta x]\quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Рассмотрим 2 прямоугольника с высотой $f(x_1)$ и $f(x_2)$:

$f(x_1)\Delta x \leq \Delta S \leq f(x_2)\Delta x$

Пусть $\Delta x > 0$:

$$f(x_1) \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f(x_2)$$

$\Delta x \to 0$, тогда $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, т. е. ← по Т. о „зажатой переменной"

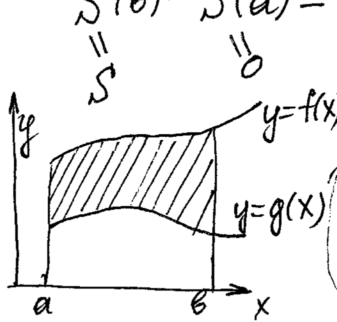
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0) \qquad \underset{f(x_0)}{\underset{\downarrow}{f(x_1)}} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \underset{f(x_0)}{\underset{\downarrow}{f(x_2)}}$$

$S'(x) = f(x)$

площадь – первообразная для ф-ции к рассматриваемому графику.

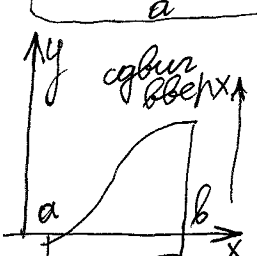
$$\int_a^b S'(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underset{S}{\underset{\parallel}{S(b)}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{S(a)}} = \int_a^b f(x)dx \quad \text{, сл-но} \quad \boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



$S = S_f - S_g$

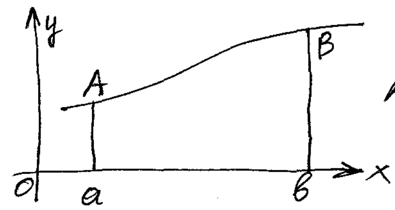
$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad f(x) \geq g(x)}$$



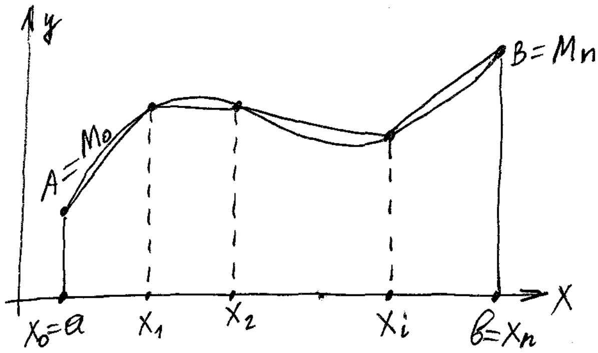
$$S = \int_a^b [(f(x)+C) - (g(x)+C)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Длина дуги.

$f(x)$ — непр. на $[a;b]$.



$\breve{AB}$



Выберем конеч. число точек $M_0=A, M_1, M_2, \dots, M_n=B$, соединим их отрезками.

$\widehat{l}_{AB}$ — длина ~~дуги~~ ломаной; ρ — длина максимального звена ломаной.

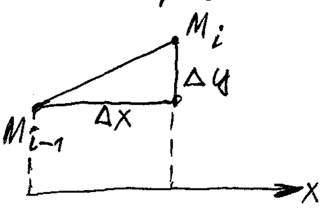
$$\boxed{l_{AB}=\lim_{\rho\to 0}\widehat{l}_{AB}} \quad : \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\{M_i\}:\rho<\delta:\ |\widehat{l}_{AB}-l_{AB}|<\varepsilon$$

разбиение

Если для произвольной $f(x)$ величина l_{AB} существует, то дуга называется спрямляемой, иначе — неспрямляемой.

Т.: $f'(x)$ — непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ $\breve{AB}$ — спрямляема и $\boxed{l_{AB}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$.
$(f(x)\in C^1([a;b]))$

Д.: $\{M_i\}$ — произвольный набор точек, спроектируем их на OX $\to$
$\to$ разбиение T из проекций x_i точек M_i. Диаметр разбиения $\lambda(T)\le\rho$.



$$M_{i-1}M_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+[f'(\xi_i)\Delta x_i]^2}=\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta x_i$$

$\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$, на $[x_{i-1},x_i]$ с избытком выполнены условия Т. Лагранжа.

$\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$

$\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

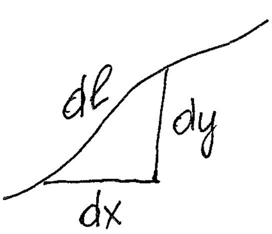
$\Delta y_i=f'(\xi_i)\Delta x_i$

$$l_{AB}=\sum_i\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta x_i \qquad \lambda(T)\to 0:$$

$$l_{AB}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

Ф-ция, заданная параметрически:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad \varphi,\psi\in C^1([a;b]) \qquad \dot{x}(t)\text{ — производная по } t.$$
$$\varphi'\neq 0$$



по Т. Пифагора:

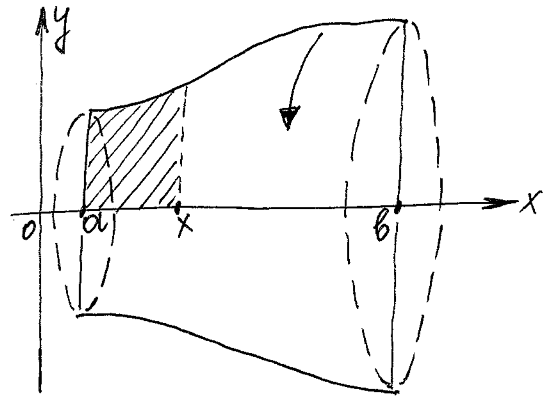
$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\dot{x}dt)^2+(\dot{y}dt)^2}$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$\boxed{l_{AB}=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt}$$

11) Объёмы тел вращения.

$\boxed{V_{ox}}$ $V(x)$ – вводим ф-цию, равную объёму тела, которое получается при вращении части трапеции, расположенной на участке $[a;x]$.

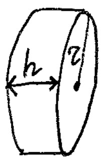


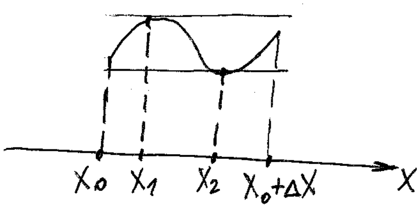
$V(a)=0$

$V(в)=V$

Фиксируем произвольную (·) $x_0 \in [a;в]$ и дадим аргументу приращение Δx:

$\Delta V = V(x_0+\Delta x) - V(x_0)$, ΔV – объём тела, полученного при вращении тонкой полоски.





выбираем на $[x_0; x_0+\Delta x]$ точки x_1 и x_2; эта полоска заключена м/у 2мя прямоугольниками с высотами $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Тогда:

ф-ция непр. на $[x_0, x_0+\Delta x]$

$\downarrow$

достигает своих точной верх. и точ. нижн. граней

$\downarrow$

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

$\Delta x > 0$

$$\pi f^2(x_1)\Delta x \leq \Delta V \leq \pi f^2(x_2)\Delta x$$

$$\pi f^2(x_1) \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq \pi f^2(x_2)$$

$\Delta x \to 0$:

$x_1, x_2 \to x_0$

В силу непрерывности $f(x) \to f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x_0)$$

$V'(x_0) = \pi f^2(x_0)$, т.к. x_0 – произвольн. (·), то $V'(x) = \pi f^2(x)$

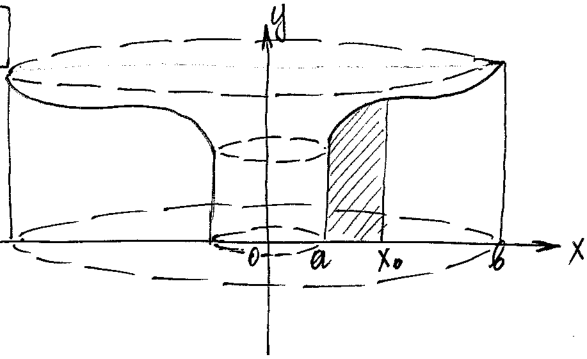
<u>Ф-ла Ньютона-Лейбница</u>:

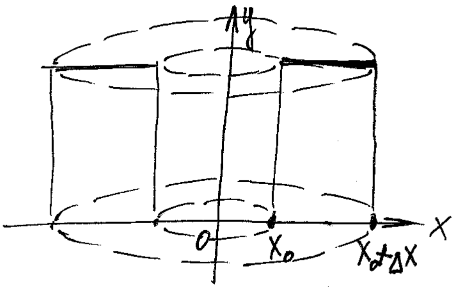
$$V(в) - V(a) = \pi \int_a^в f^2(x)\,dx$$

$V(в) = V$, $V(a) = 0$

$$\boxed{V_{ox} = \pi \int_a^в f^2(x)\,dx}$$

$\boxed{V_{oy}}$





$$\pi f(x_1)(x_0+\Delta x)^2 - \pi f(x_1)\, x_0^2 \leq \Delta V \leq \pi f(x_2)(x_0+\Delta x)^2 - \pi f(x_2)\, x_0^2$$

$$2\pi f(x_1)x_0\cdot\Delta x + \pi f(x_1)(\Delta x)^2 \leq \Delta V \leq 2\pi f(x_2)x_0\Delta x + \pi f(x_2)(\Delta x)^2$$

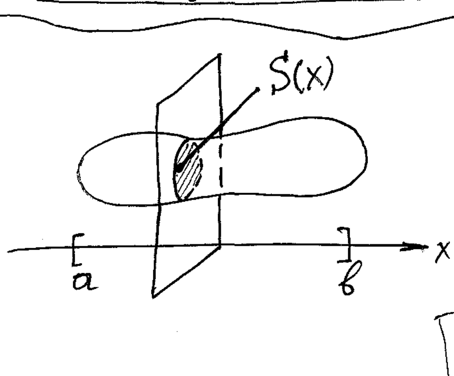
$$2\pi f(x_1)x_0 + \pi f(x_1)\cdot\Delta x \leq \frac{\Delta V}{\Delta V} \leq 2\pi f(x_2)x_0 + \pi f(x_2)\Delta x$$

$\Delta x \to 0$; $x_1, x_2 \to x_0$; по Т. о „зажатой переменной":

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi\cdot x\cdot f(x)$$

$$\int_a^b V'(x)\,dx = 2\pi\int_a^b |x|\cdot f(x)\,dx$$

$$\boxed{V_{oy} = 2\pi\int_a^b |x|\cdot f(x)\,dx}$$



Пусть: тело располагается вдоль Ox;
для любого x известен $S(x)$;

Н-ти V.

$$dV = S(x)\,dx$$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

(12) Несобственный интеграл.

Интеграл (II рода):

1) по бесконечному промежутку;
2) ф-ция не ограниченна.

<u>Определение</u>: Пусть $f(x) \in C([a;+\infty))$, т.е. непр. на полуоси $[a;+\infty)$. <u>Несобственным интегралом</u> от этой ф-ции по данной полуоси называется величина:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \quad , \qquad \int_a^b f(x)dx \quad b>a$$

он существует, т.к. ф-ция опр-на на $[a;b]$.

Если lim существует, то интеграл <u>сходящийся</u>, а его значение = lim. Если конечный lim не существует, то интеграл <u>расходящийся</u> и ему не соответствует никакого числового значения.

Справедлива ф-ла Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \Phi(f)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) - \Phi(a), \quad \text{где } \Phi'(x) = f(x).$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$: вопрос о существовании $\int$ сводится к тому, сущ-ет ли предел у Φ.

(*): $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 0-(-1) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty}$$ – расходится

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$ интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}; \quad \text{при } p\neq 1: \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty}$$

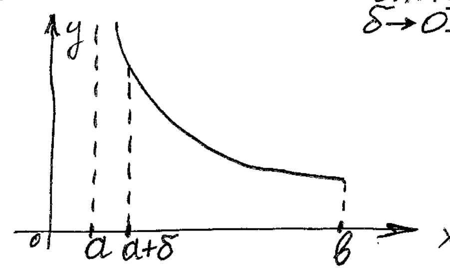
$\left.\begin{matrix} -p+1>0 \\ p<1 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ расход. $\qquad \left.\begin{matrix} -p+1<0 \\ p>1 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ сход.

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} : \begin{cases} p>1 & \text{– сход.} \\ p\leq 1 & \text{– расход.} \end{cases}}$$

Определение: $f(x) \in C([a;b])$, неограниченна в окрестности $(\cdot)$ a.
Несобственным интегралом от a до b называется величина

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0_+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$$

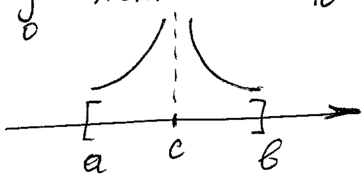
Если $\lim$ сущ-ет $\Rightarrow$ сходится, иначе — расходится.
Также справедлива ф-ла Ньютона-Лейбница, причём под значением первообразной $\Phi(x)$ в $(\cdot)$ a понимается $\lim\limits_{\delta\to 0_+}\Phi(a+\delta)$



(*): $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2-0=2$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x}dx = 0-\int_0^1 dx = -1$$



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$: требуется сходимость обоих интегралов

(13) Дифференциальные уравнения I порядка. Формулировка теоремы о существовании и единственности. Методы изоклин и ломаных Эйлера.

Ур-ия первого порядка.

$y' = f(x, y)$

<u>Решение</u> – любая функция, при подстановке которой вместо y, получается тождество на данном промежутке.

Решение – целое семейство функций.

Задача Коши: $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Производная – угл. коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$

Ур-ие каждой точке плоскости $(x; y)$ сопоставляет направление касательной к интегральной кривой в той же точке.

Если это направление изобразить отрезком, получится поле направлений.

<u>Задача</u>: найти кривые, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

<u>Область</u> – множество конкретного вида.

Мн-во называется областью, если оно удовлетворяет условиям:

1. $\forall M_0 \in D$ $\exists U(M_0) \subset D$ $\qquad D$ – область

2. для $\forall M_1, M_2 \in D$ можно соединить непрерывной кривой, которая содержится в данной области.

<u>Область</u> – открытое, связанное множество.

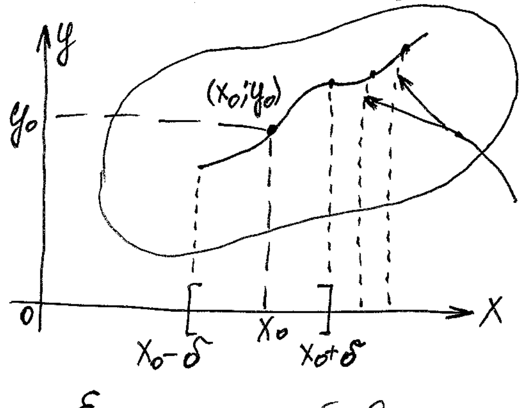
<u>**Т.** (о существовании и единственности):</u>

Пусть в плоскости (x, y) $\exists$ область D, для которой:

1. $f(x, y) \in C^1(D)$
2. $(\cdot)$ $(x_0, y_0) \in D$

$\Downarrow$

$\exists\, \delta > 0$ такое, что задача Коши имеет решение $y = y(x)$ на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, причём единственное.



ч/з $(\cdot)$ $(x_0; y_0)$ обязательно проходит интегральная кривая, и только одна.

<процесс продолжения> можно за начальную $(\cdot)$ взять $(x_0 + \delta; y(x_0 + \delta))$ и применить теорему снова.

δ зависит от максимальной производной по y

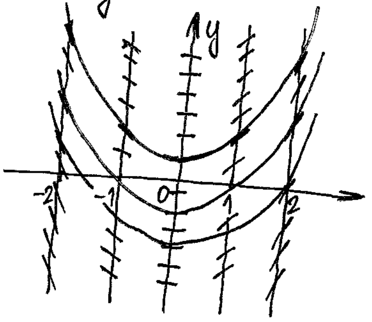
Если не требовать условия $f(x, y) \in C^1(D)$, то решение будет, но не факт, что единственное (может быть много прямых, проходящих ч/з $(\cdot)$)

Изоклины - геометрические места точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

$f(x,y)=k$ — ур-ие на плоскости (изоклина - линия)

Во всех (·) кривой касательные будут иметь один наклон

$y'=x$



$x=k$ — ур-ие изоклины

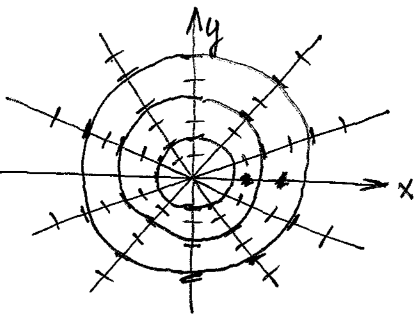
$k=0;\ \pm1;\ \pm2\ ...$

$y=\int x\,dx \qquad y=\frac{x^2}{2}+C$

$y'=-\frac{x}{y}$

$-\frac{x}{y}=k \qquad k=0:\ x=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$



оси выкидываются

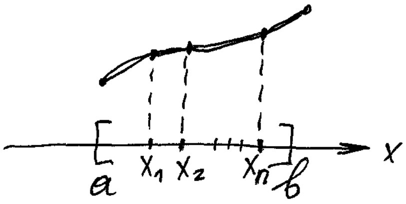
$k\neq0,\ y=-\frac{1}{k}x$

$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow$ прямые $\perp$

$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1$

Метод ломаных Эйлера.

Приближённое вычисление значения искомого решения $y(x)$: при $x=b$: $[x_0;b]$ делится на n равных отрезков длины h (шаг вычисления).



$y'=f(x;y)$

$y(a)=y_0$

$h=\frac{b-a}{n}$

Вместо графика возникает ломаная, накапливается погрешность.

$x_i=x_0+h_i$

y_i — приближённые значения искомого решения в (·) x_i

для вычисления y_1 заменяем на $[x_0;x_1]$ искомую интегральную кривую отрезком её касательной в (·) $(x_0;y_0)$:

$y_1=y_0+hy_0',\quad y_0'=f(x_0;y_0)$

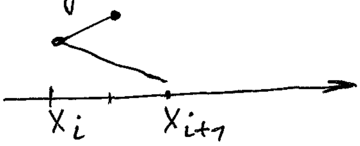
$$\boxed{y_{i+1}=y_i+hf(x_i;y_i)}$$

При $h\to0$ ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой.

$y_i\to y_b$

Улучшенный метод Эйлера.

Сдвигаемся на пол-шага.



$y_{i+1}=y_1+hf(x_{i+\frac12};y_{i+\frac12})$

мы уловим малейшие изменения решения.

(14) Уравнение радиоактивного распада; роста биомассы.

Модель радиоактивного распада.

Скорость распада радиоактивного в-ва пропорциональна количеству нераспавшегося в-ва в данный момент времени.

$x(t)$ - кол-во в-ва, измеренное в момент времени t

$x(0) = x_0$

$dx = -kx\,dt$

$\dfrac{dx}{dt} = -kx$ - ур-ие радиоакт. распада. , $k>0$, $v\downarrow$, $x>0$.

$\int \frac{dx}{x} = -\int k\,dt$

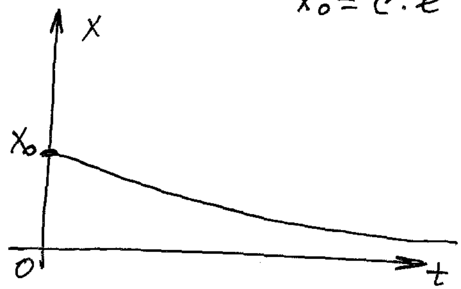
$\ln|x| = -kt + \ln|c|$

$\ln|x| = \ln e^{-kt} + \ln|c|$

$x = c \cdot e^{-kt}$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}}$$

$x_0 = c \cdot e^0$ c - начальное количество в-ва



$\bar{t}$ - период полураспада:

$\bar{t} = \frac{1}{2} x_0$

$\frac{x_0}{2} = x_0 \cdot e^{-k\bar{t}}$

$\ln \frac{1}{2} = -k\bar{t}$

$k\bar{t} = \ln 2$

$$\boxed{\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}}$$

Модель теряет сходство с реальностью при больших значениях t

Время полного распада $\to \infty$

Закон роста биомассы.

① $\underbrace{x_{n+1} - x_n = kh\, x_n}$

рекурентное уравнение

$h = t$, шаг

x_0 – кол-во биомассы при $t = 0$

k – не зависит от n и h.

$x_{n+1} = (kh+1)x_n$

$(kh+1) = q$: $x_{n+1} = q x_n$, q – не зависит от n.

$x_n = q^n x_0$ – геометрич. прогрессия.

②

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = kx_n \qquad \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{при } x(0) = x_0 \qquad \frac{dx}{x} = k\,dt$$

$$dx = kx\,dt$$

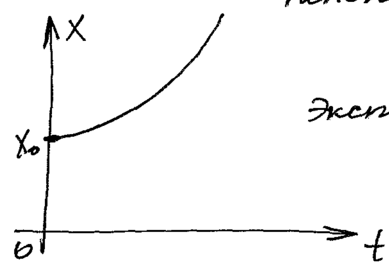
$$x(t) = x_0 \cdot e^{kt}$$

k – положит.

Физич. смысл имеют положит. решения.

k – удельная скорость роста

$2k_0 = x_0 e^{k\bar{t}}$ $\quad \bar{t} = \frac{\ln 2}{k}$, не зависит от x_0



Экспоненциальн. рост.

В реальных условиях бесконечный рост невозможен; с ростом биомассы не хватает питания, поэтому скорость роста должна замедлиться

Модель не учитывает замедления: (т.е. реально для небольшой системы)

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Модель Ферхгюльста–Перла:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$$ – ур-ие с разделяющимися переменными:

$\downarrow$

$$\int \frac{dx}{(a-bx)x} = \int dt$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{(a-bx)+bx}{(a-bx)x}dx = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x} + \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\int \frac{d(a-bx)}{a-bx} = \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\ln|a-bx| = t + c$$

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-bx}\right| = t + c$$

$t \to +\infty$

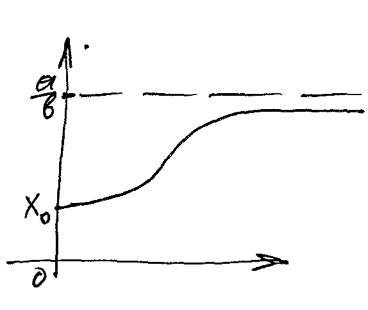
$\ln \to +\infty$

$\left|\frac{x}{a-bx}\right| \to \infty$; $a - bx \to 0$

$\underbrace{a - bx = \alpha(t)}_{\text{б.м.}} \ldots t \to 0$

$x = \frac{a}{b} - \frac{\alpha(t)}{b} \to 0$

$x = \frac{a}{b}$



(15) Модель роста деревьев

x – линейный размер растения

kx^2dt – энергия, получаемая деревом, идущая на фотосинтез, увеличение V, подъём вещ-тв.

$\Downarrow$

$\ell x^2 dt$ – затраты на фотосинтез

$V \sim x^3$: $md(x^3)$ – затраты на рост.

т.к. процесс ~ скорости роста (=> производная от ~~массы~~)

закачка пит. вещ-тв:

$V \sim x^3$; высота $\sim x$

$\sim x^4$: $n \cdot x^4 dt$

$$kx^2dt = \ell x^2 dt + m\,dx^3 + nx^4dt$$

$$kx^2dt = \ell x^2dt + 3x^2m\,dx + nx^4dt$$

$$\Downarrow$$

$$\ell < k$$

$$kx^2 = \ell x^2 + 3x^2m\frac{dx}{dt} + nx^4$$

$$3x^2m\frac{dx}{dt} = kx^2 - \ell x^2 - nx^4 \quad \Big| : 3x^2m$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2(k-\ell)}{3x^2m} - \frac{n\,x^2}{3m} \; ; \qquad \frac{k-\ell}{3m} = a \; ; \quad \frac{n}{3m} = b :$$

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2 \xrightarrow{\text{переходим}} \frac{dx}{dt} = a^2 - b^2x^2$$

$$\frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = dt$$

$$\frac{1}{2ab}\cdot \ln\left|\frac{a+bx}{\underset{\to 0}{a-bx}}\right| = t + \ln C$$

$$\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| = 2ab\,t + \ln C$$

$$\frac{a/b + x}{a/b - x} = Ce^{2abt}$$

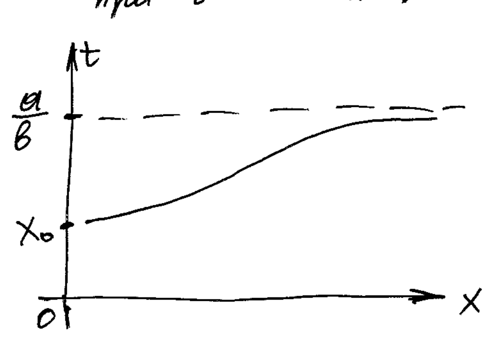
$$\frac{a}{b} + x = \frac{a}{b}Ce^{2abt} - xCe^{2abt}, \quad \text{т.е. } x(t) = \frac{\frac{a}{b}\left(Ce^{2abt} - 1\right)}{1 + Ce^{2abt}}$$

при $t \to \infty \quad x(t) \to \frac{a}{b}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx$$

$$\Downarrow$$

$x(t)$ – выпуклая кривая



есть предельная высота :

$$\underline{dx = kx\,dt}$$

(16) Модель „хищник – жертва".

Имеется 2 вида, один поедает другой (рыси и зайцы)

$x(t)$ – количество „жертв"
$y(t)$ – количество „хищников" – непрерывно дифференцируемые функции

2 ограничения для жертв: еда и хищники

Если корма много:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(b-y)$$

Критич. число: если „хищн." < чем это число, то число „жертв" ↑, а если >, то число „жертв" ↓

$b<y \quad k_1<0 \to$ убыль
$b>y \quad k_1>0 \to$ рост

$$\frac{dy}{dt} = k_2(x-a)$$

$x>a, \; k_2>0 \to$ рост числа „хищников"
$x<a, \; k_2<0 \to$ убыль числа „хищников"

Замена: $x(t)-a = u(t)$
$y(t)-b = v(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -k_1 v \\ \dfrac{dv}{dt} = k_2 u \end{cases}$$

Пусть u, v – удовлетв. ур-ям $\to$ тождество продифференцируем по dt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -k_1\frac{dv}{dt} = -k_1k_2u$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k_1k_2u = 0$$

$$\sqrt{k_1k_2} = w$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + w^2u$$

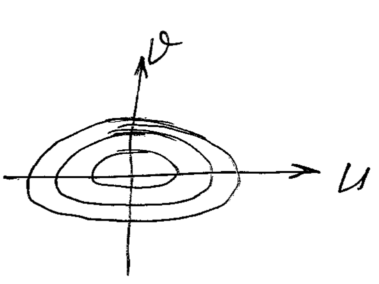
$u(t) = c_1\sin wt + c_2\cos wt \to$ свернуть в синусоиду, т. е. можно привести к виду:

$u(t) = A\cdot\sin(wt+\varphi)$ – ур-ие гармонич. колебаний.

$$v(t) = -\frac{1}{k_1}\cdot\frac{du}{dt} = -\frac{1}{k_1}Aw\cos(wt+\varphi)$$

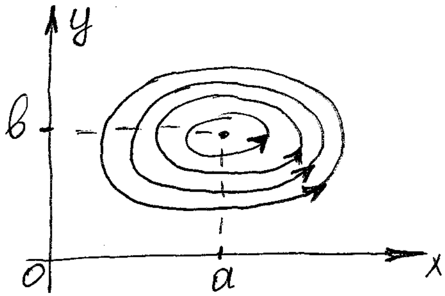
$$v^2 - B\cos(wt+\varphi)$$

$\dfrac{u^2}{A^2} + \dfrac{v^2}{B^2} = 1$ (уравнение эллипса)



Фазовые кривые представляют собой эллипсы, движ. по этим кривым ⇒ движ. по эллипсам ⇒ замкнут. циклы; периодич. повторяемость численности.

Эллипсы с центрами в т. (·) A и B



отстрел хищников

↓

переход на большие эллипсы

↓

min количество ↓

max количество ↑ (и т. д)

(17) Линейные дифференциальные уравнения II порядка.
(ур-ия с перемен. коэф-ми, Т. о сущ. и един-ти, однородн. ур-ия, определитель Вронского)

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$$

$p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ — непрерывные функции на $[a; b]$; $\in C(\langle a; b \rangle)$

$\Downarrow$

<u>Т. о существовании и единственности.</u>

$y'' = 0$ $\qquad$ $y' = const = c_1$

$(y')' = 0$

$y = \int c_1 dx$

$y = c_1 x + c_2$

1) в (·) x_0 решение равно заданному значению y_0

2) $y'(x_0) = \underbrace{y_0^{\prime}}$ — обозначение, показывающее, чему равна $y'(x_0)$, это <u>не производная</u> y_0!

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow y = c_1 x + c_2$

$0 = c_2$

$y' = c_1$

$c_1 = 1$

$y = x$

<u>Задача Коши</u>:

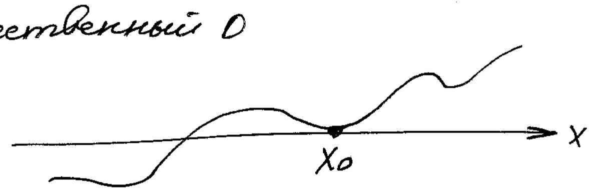
Пусть задано уравнение вместе с начальными условиями

$\forall x_0, y_0, y_0'$, $x_0 \in \langle a; b \rangle$ $\exists$ решение задачи, удовлетворяющее условию, опред. на $\langle a; b \rangle$ и это решение единственно.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

1. решение — тождественный 0

$$\begin{cases} y(x_0) \equiv 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$



такого быть не может!

решение удовлетворяет нач. условиям
тождественный 0 удовл. нач. условиям $\Big\}$ => по <u>Т. о единств-ти</u>

$\Downarrow$

тождест. 0 — есть решение

Линейные однородные уравнения.

1) если решения данного ур-ия умножить на const, то полученное значение также будет решением данного уравнения.

$$(Ay)''+p(Ay)'+qAy=0$$

$$Ay''+pAy'+Aqy=0$$

$$A\underbrace{(y''+py'+qy)}_{=0}=0$$

2) если y_1 и y_2 – решения, то их сумма (разность) – тоже решения.

$$(y_1\pm y_2)''+p(y_1\pm y_2)'+q(y_1\pm y_2)=0$$

$$(y_1''+\underbrace{py_1'+qy_1}_{=0})\pm(\underbrace{y_2''+py_2'+qy_2}_{=0})=0$$

$\Downarrow$

следствие:

Если y_1, y_2 – решения уравнения, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

$$y-c_1y_1+c_2y_2$$

y_1, y_2 - 0 существенно разными решениями (линейно независимыми на дан. промежутке)

2 решения ур-ия называются линейно независ. на пром-ке $\langle a;b\rangle$, если из $c_1y_1+c_2y_2=0$ на $\langle a;b\rangle$ следует, что $c_1=c_2=0$

Линейная зависимость: найдётся такая пара c_1 и c_2, что $c_1\neq c_2\neq 0$,

$$c_1y_1+c_2y_2=0$$

$$y_1=-\frac{c_2}{c_1}\cdot y_2 \quad \text{решения пропорциональны.}$$

Фундаментальная с-ма решений – 2 линейно независ. решения.

$\tilde{y}(x_0)=y_0$ если всё это удовлетв. начальным условием того

$\tilde{y}(x_0)=y_0^T$ уравнения, то $\tilde{y}$ ~~есть~~ y.

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0$$

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_0^T$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \text{ – определитель Вронского.}$$

найдётся C_1 и C_2 $\Rightarrow$ $\tilde{y}$ совпадает с линейной комбинацией y_1 и y_2

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \text{ определитель Вронского}$$

1) Если y_1, y_2 – линейно зависимые решения, то опред-ль Вронского $=0$, т.е. $\exists c_1$ и $c_2\neq 0$, что

$$c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)=0$$

$$\begin{cases} c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0 \\ c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0 \end{cases}$$

т.к. $\exists c_1$ и c_2 $\Rightarrow$ определитель $=0$: $\underline{W(x)=0}$

(17) ⟨продолжение⟩

2) Пусть $W(x_0)=0$, тогда y_1 и y_2 – линейно завис. и $\Rightarrow W(x_0)\equiv 0$ (по **Т.** о сущ. и единств-ти).

Д.: $\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$

c_1 и $c_2 \neq 0$

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = y$

$\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \end{cases}$ – удовлетв. начальным условиям.

По **Т.** о сущ. и единств-ти линейная комбинация $\equiv 0$.

$\exists\, y_1$ и y_2: $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$

$\Downarrow$

y_1 и y_2 линейно зависимы

$\Downarrow$

$W(x_0)=0$

Любое решение диф. уравнения – линейная комбинация линейно независ. решений.

Линейные неоднородные уравнения.

$y'' + py' + qy = f$

p, q, f – непр. на $\langle a; b\rangle$

Обозначим ч/з $\overset{\circ}{y}$ – любое решение однородн. уравнения, а ч/з $\bar{y}$ – некоторые решения неоднородного уравнения (f)

Сложим:

$\overset{\circ}{y} + \bar{y}$ – сумма решений неоднор. ур-ия.

$$(\overset{\circ}{y}+\bar{y})'' + p(\overset{\circ}{y}+\bar{y})' + q(\overset{\circ}{y}+\bar{y}) = \underbrace{(\overset{\circ}{y}'' + p\overset{\circ}{y}' + q\overset{\circ}{y})}_{=0} + \underbrace{(\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y})}_{=f} = f$$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}$

Возьмём произвольное решение $\tilde{y}$ неоднор. ур-ия.

$\tilde{y} - \bar{y}$, подставляем:

$(\tilde{y}-\bar{y})'' + p(\tilde{y}-\bar{y})' + q(\tilde{y}-\bar{y}) = f - f = 0$

Разность 2х решений однородного ур-ия удовлетв. решению неоднородн. ур-ия:

$\tilde{y} - \bar{y} = \overset{\circ}{y}$

$\tilde{y} = \overset{\circ}{y} + \bar{y}$

$\Downarrow$

решение неоднород. ур-ия: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}$

Принцип суперпозиции решений:

Правая часть – $\sum$ 2х ф-ций

$$y'' + py' + qy = f_1 + f_2$$

$\bar{y}_1$ – реш. ур-ия с f_1 в правой части

$\bar{y}_2$ – реш. ур-ия с f_2 в правой части

$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$ – реш. ур-ия с суммой в прав. части.

(18) Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

① Однородные:

$y''+py'+qy=0$

$p, q = const$

$y=e^{\lambda x}$

$y'=\lambda e^{\lambda x}$ $\forall \lambda$

$y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0 \quad |: e^{\lambda x}\neq 0$

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ – характеристич. ур-ие для диф. ур-ия.

1) $\underline{D>0}$: $p^2-4q>0 \Rightarrow \lambda_1\neq\lambda_2$

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} = \overset{\neq 0}{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}}\cdot\overset{\neq 0}{(\lambda_1-\lambda_1)}$$

$W(x)\neq 0$ – решения линейно независимы, имеют вид:

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$

$y''-2y'-3y=0$

$\lambda^2-2\lambda-3=0$

$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=1$ Ответ: $y=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{x}$

2) $\underline{D=0}$

$p^2=4y$

$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$

$e^{\lambda_1 x}\cdot x e^{\lambda_1 x}=y$ – реш. ур-ия

$y'=e^{\lambda_1 x}+\lambda_1 x e^{\lambda_1 x}$

$y''=2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$

$$\lambda_1^2 x\cdot e^{\lambda_1 x}+2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+pe^{\lambda_1 x}+p\lambda_1 x e^{\lambda_1 x}+qxe^{\lambda_1 x}=\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{=0}e^{\lambda_1 x}+\underbrace{(2\lambda+p)}_{=0}e^{\lambda_1 x}=0$$

Составим определитель Вронского: левая часть характеристич. ур-ия.

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x\cdot e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1+\lambda_1 x)e^{\lambda_1 x}\end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1+\lambda_1 x\end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}(1+\cancel{\lambda_1 x}-\cancel{\lambda_1 x}) = e^{\lambda_1 x}\neq 0$$ – решение системы

линейно независимы $\Rightarrow$ ответ: $y=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 x e^{\lambda_1 x}$

(*): $y''-2y'+y=0$

$(\lambda-1)^2=0$ $\quad \lambda_{1,2}=0$ $\quad y=c_1\cdot e^x+c_2 x e^x$

3) $\underline{D<0}$

$p^2-4q<0 \Rightarrow$ есть комплексные решения

$\lambda_{1,2}=a\pm i w$

$\lambda_{1,2}=-\frac{p\pm i\sqrt{|D|}}{2}$

$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$

λ_1, λ_2 – комплексные числа

Действит. и мнимая части ф-ции явл. решениями ур-ия:

$$e^{(a+iw)} = e^{ax}\cdot e^{iwx} = e^{ax}(\cos wx + i\sin wx) = \underbrace{e^{ax}\cdot\cos w(x)}_{y_1} + i\underbrace{e^{ax}\cdot\sin wx}_{y_2}$$

$y_1 = e^{ax}\cdot\cos wx$

$y_2 = e^{ax}\cdot\sin wx$

Проверим, что y_1 и y_2 образуют фундаментальную с-му решений:

$y_1' = a\cdot e^{ax}\cdot\cos wx - w\cdot e^{ax}\cdot\sin wx$

$y_2' = a\cdot e^{ax}\cdot\sin wx + w e^{ax}\cdot\cos wx$

$$e^{ax}(a\cdot\cos wx - w\sin wx - a\sin wx + w\cos wx)\cdot e^{ax} = e^{ax}\begin{vmatrix}\cos wx & \sin wx \\ a\cos wx - w\sin wx & a\sin wx + w\cos wx\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow W(x)\neq 0$$

$\Downarrow$

$y = e^{ax}(C_1\cdot\cos wx + C_2\sin wx)$

Функция описывает колебательный процесс.

$y'' - 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$a = 1;\ w = 2$

$y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x)$

Метод неопределённых коэффициентов.

$y'' - 2y' - 3y = x$

1) $y'' - 2y' - 3y = 0$ $\quad\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = -1$ $\quad$ Ответ: $y = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x}$

$\lambda^2 - 2x - 3 = 0$

2) $y = Ax + B$

Надо проверить, не является ли 0 корнем:

Если да, то надо умножить на x (x^2)

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = Ax + B \\ -2 & y' = A \\ 1 & y'' = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & -3A = 1 \\ x^0 & -3B - 2A = 0 \end{array} \qquad A = -\frac{1}{3};\ B = -\frac{2}{3};\ A = \frac{2}{9}$$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

3) Сложим общ. и част. решения:

$y = c_1\cdot e^{-3x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$

1) –//–

2) $y = A\cdot e^{-x}$

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = A\cdot e^{-x} \\ -2 & y' = -A\cdot e^{-x} \\ 1 & y'' = A\cdot e^{-x} \end{array}$$

$-3A - 2A + A = 1$

$-4A = 1;\ A = -\frac{1}{4};\ \Rightarrow y = -\frac{1}{4}e^{-x}$

3) $y = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x}$

$y'' - 2y' - 3y = e^{x}$

1) –//–

2) $y = A e^{-x}\ |\cdot x$

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = Ax\cdot e^{x} \\ -2 & y' = A\cdot e^{x} - Axe^{x} \\ 1 & y'' = -2Ae^{x} + Axe^{x} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} xe^{x} & -3A + 2A + A = 0 \quad \underline{0 \equiv 0}\ ! \\ e^{x} & 2A - 2A = 1 \\ & -4A = 1 \\ & A = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$y = c_1\cdot e^{3x} + c_1\cdot e^{-x} - \frac{1}{4}x\cdot e^{-x}$

Если $p_n(x)\cdot e^{kx}$, то надо искать „y", но проверить, не является ли k корнем в №1)

$x\cdot\cos 2x$

$y = Ax + B\cos 2x + C(x+D)\cdot\sin 2x$

(19) Простейшие св-ва числовых рядов. Критерий Коши (+ следствие). Ряды с положит. членами; признаки сравнения.

Ряд – последовательность (бесконеч.) чисел, объединённых знаком "+"

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

a_n – действительные числа

$a_n=f(n)$ – общий член числового ряда,

$f(n)$ – ф-ция натурального аргумента

Рассм-им сумму первых n слагаемых (частичная сумма ряда):

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ← конечное число

Определение: Если существует конечный предел последовательности $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то ряд – сходящийся, а S – его сумма:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Посл-ть 1, 1, 1, 1, не имеет суммы.

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бесконечен или не существует, то ряд расходящийся.

Сумма (разность) 2х сход. рядов есть сходящ. ряд, сумма которого равна сумме (разности) сумм исходных рядов:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$$

$A_n=a_1+a_2+\ldots a_n$

$B_n=b_1+b_2+\ldots b_n$

$$S_n=(a_1+b_1)+\ldots+(a_n+b_n)=A_n+B_n$$

Возьмём $n\to\infty$, $A_n\to A$, $B_n\to B$, по Т. о сходящ. посл-ти lim суммы = = сумме lim.

1) если 1 ряд сход., другой – нет, $\Longrightarrow$ сумма расходится.

2) от умножения всех членов ряда на число отличное от 0, его сходимость (расходимость) не меняется.

$c\neq 0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c\cdot a_n$ (сумма меняется, но сходимость/расходимость – нет).

Если исходный ряд расх., то a_n не имеет lim $\Rightarrow S_n$ – не имеет lim.

Необходимый признак сходимости.

Т.: У всякого сходящегося ряда общий член стремится к 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ – сход.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}A_n=0$$

Д.: $S_n=a_1+\ldots a_n$

возьмём сумму на 1 номер меньше: $S_{n-1}=a_1+\ldots+a_{n-1}$

Если S_n имеет lim, то $S_n\to S$

$\Downarrow$

S_{n-1} имеет lim, $S_{n-1}\to S$

$\Downarrow$

a_n имеет lim, $=S-S=0$ $\qquad a_n\to 0$.

- если ряд сходится, то послед-ть его частичных сумм ограничена (обратное — неверно!)

- если ряд сходится, то остаток ряда стремится к 0

$$R_n = S - S_n$$

$$S_n \to S \Rightarrow R_n \to 0$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots)}_{R_n \text{ — остаток ряда}}$$

- от изменения (добавления или отбрасывания <u>конечного</u> числа членов сходимость или расходимость ряда не меняется.

Пусть ряд сходился:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

изменяем конечное число членов:

$$a_1' + a_2' + \dots + a_n' + \dots$$

Разность м/у рядами : $A_n' - A_n$.

Т.к. изменилось лишь конеч. число членов $\Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \;\; a_n = a_n'$

$\Leftarrow$ если $\uparrow n$, то разность перестаёт меняться

$$A_n' - A_n = const$$

Тогда: начиная с N : $A_n' = A_n + C$, значит новый ряд тоже будет сходиться

$\Downarrow$

изменение конеч. числа слагаемых приводит к тому, что ряды будут различаться на нек. <u>const.</u>

(19) ⟨продолжение⟩

Критерий Коши:

(необх. и дастаточ. условие для сход-ти ряда)

Пусть задан ряд: $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ — сход.} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m \geq N \Downarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

1) Пусть ряд сходится.

Возьмём $\varepsilon > 0$, поделим на 2.

В силу определения lim:

$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

Рассм-им разность $S_n - S$:

$$S_n - S_m = |\underbrace{(S_n - S) - (S_m - S)}_{\text{тождество}}| \leqslant \underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{|S_n - S|} + \underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{|S_m - S|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>если $m < n$:</u>

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \Rightarrow S_n - S_{n-1}, \ m = n - 1$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \ |a_n| < \varepsilon$

2) Рассм-им ряд...

Пусть сход. ряд из модулей

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ — сход.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n, m \geqslant N \ \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_n|\right| < \varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| < \varepsilon$$

⇓

выполняется критерий Коши

↓

достат. условие

↓

ряд сходится

⇓

- Если сходится ряд из модулей, то сходится и сам ряд (но не наоборот!)

<u>Абсолютно сход. ряд</u> — ряд, для которого сход. ряд из модулей.

<u>Условно сход. ряд</u> — ряд сходящ., ряд из модулей — несходящ.

Ряды с положит. членами.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 0$ (члены неотрицательны)
$n = 1, 2, \ldots$

$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots$

Частичные суммы рядов с положит. членами образуют монотонно ↗ послед-ть.

Если для таких рядов послед-ть частичных сумм ограничена, то ряды – <u>сходящиеся.</u>

<u>1-й признак сравнения:</u>

Пусть даны 2 ряда с положит. членами:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, $a_n \leq b_n$ для всех n. (начиная с к.-л. члена)

Тогда, если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ – сход., то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – сход.

$\underset{\text{сумма } a_n \text{ от 1 до } n}{A_n} \leq \underset{\text{сумма } B_n \text{ от 1 до } n}{B_n} \leq B \implies$ послед. A_n – монотонна, огранич.

$\Downarrow$

по <u>Т. Вейерштрасса</u>: имеет предел

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = a$

Ряд из A_n – сход-ся $\Rightarrow A \leq B$

<u>2-ой признак сравнения:</u>

Если $a_n \sim b_n$, то оба ряда сход-ся или расход. одновременно.

$a_n \sim b_n$, если $a_n = b_n \cdot q_n$, где $\lim_{n \to \infty} q_n = 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\ N: \forall n \geq N \Rightarrow |q_n - 1| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < q_n < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} b_n < b_n \cdot q_n < \frac{3}{2} b_n$

$\frac{b_n}{2} < a_n < \frac{3}{2} b_n$

1) если b_n – сход., то от умножения на const:

$\frac{3 b_n}{2}$, $\frac{b_n}{2}$ – сход. $\Rightarrow a_n$ – сход.

2) если a_n – не сход. $\Rightarrow \frac{3}{2} b_n$, $\frac{b_n}{2}$ – не сход.

$\Downarrow$

b_n – несход.

(20) Признаки Коши и Даламбера.

I Признак Коши.

Т: Пусть задан ряд с положит. (неотриц.) членами и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

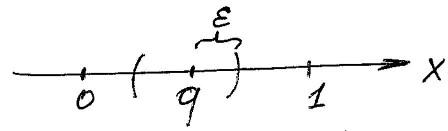
Тогда:

$$\begin{cases} q<1 \rightarrow \text{ряд сходится} \\ q>1 \rightarrow \text{ряд расходится} \\ q=1 \rightarrow \text{неизвестно} \end{cases}$$

т. е. члены ряда ведут себя почти как члены геометрич. прогрессии.

Если $q=0 \Rightarrow$ члены ряда убывают быстрее членов любой геометрич. прогрессии

Д.: 1. $q<1$



Определение предела: $\varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geq N\ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$

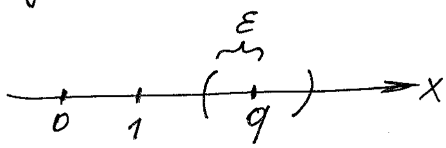
$$q-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{q+\varepsilon} = q_1 < 1$$

$$a_n < q_1^n$$

Рассм-им наряду с этим рядом геом. прогрессию

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_1^n$ – сходится (по аналогии с геом. пр.)

2. $q>1$



$\exists N: \forall n \geq N \quad |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$

$$1 < q_2 = \underbrace{q-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon$$

$$\underset{\searrow \infty}{q_2^n} < a_n$$

$a_n \not\to 0$, т.е. нарушен необход. признак, члены такого ряда $\not\to 0$, а стремится к ∞

(*): $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{3n-2} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – расх., но признак Коши ответа не даёт, т.к. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ – сход., но признак Коши для данных рядов груб, и их нельзя сравнить с геом. прог.

(II) Признак Даламбера.

Т: Пусть дан ряд со строго положит. членами и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

$\Downarrow$

$q < 1 \Rightarrow$ сход.

$q > 1 \Rightarrow$ расход.

$q = 1 \Rightarrow$ признак ответа не даёт.

Д: 1. $q < 1$

$\varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \leq N \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$

$\langle a_1 + a_1 q + a_1 q^2 .. \rangle$

$$\underbrace{q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q_1}_{q_1 < 1}$$

$$a_{n+1} < a_n q_1$$

$$a_{N+1} < a_N q_1$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} q_1 < a_N q_1^2$$

$$a_{N+3} < a_N q_1^3$$

$$\cdots$$

$$a_{N+k} < a_N q_1^k$$

$N + k = m$; $k = m - n$

$a_m < a_N \cdot q_1^{m-n}$

$a_m < \underbrace{(a_N q_1^{-N})}_{c\text{-постоянная}} q_1^m \qquad a_m < c \cdot q_1^m$

Начиная с нек. номера члены нашего ряда оказываются меньше членов геометрич. прогр., которая сход., сл-но по 1-му признаку $\Rightarrow$ ряд. сход.

2. $q > 1$

$1 < q_2 = q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad a_n < a_{n+1}$

Начиная с нек. номера посл-ть членов $\uparrow$, т. е. $a_n \not\to 0$ (значит ряд расходится)

т. е. расходимость получается, если нарушается признак...

(*): какая величина растёт быстрее показат. ф-ции.

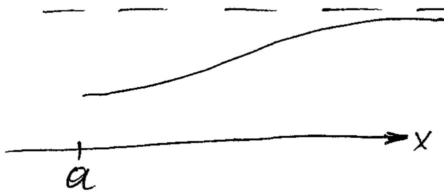
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1} n!}{(n+1)!\, b^n} = \frac{b}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$\boxed{\text{Факториал растёт быстрее всех.}}$

(21) Интегральный признак Коши. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.



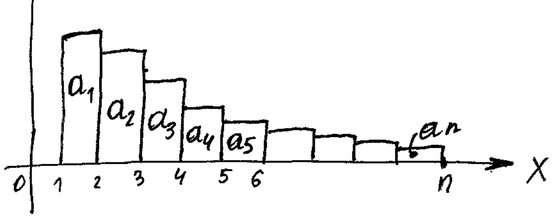
аналог Т. Вейерштрасса для функции:

1. $f(x)\nearrow$ на $[a;+\infty)$ (быть может, в широком смысле)
2. $\exists C>0$ $f(x)\le C$ на $[a;+\infty)$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$



$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Площадь ступенчатой фигуры, уходящей $\to\infty$

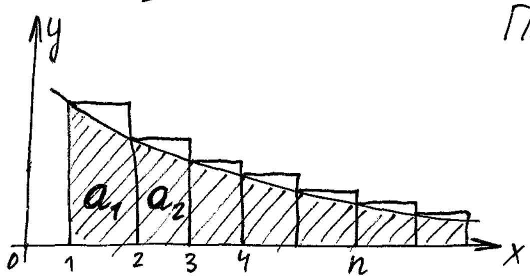
Т.: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ $a_n>0$:

1. $f(x)$ – непр. на $[1;+\infty)$
2. $f(x)>0$ –//–//–
3. $f(x)\searrow$ –//–//–
4. $\forall n$: $f(n)=a_n$ (связь м/у рядом и функцией)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ - сход.} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ - сход.}$$

Д.: 1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – сход.



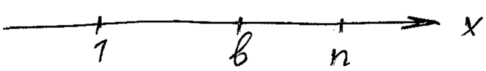
Площадь под графиком не превосходит площади ступенчатой фигуры.

$$\int_1^n f(x)\,dx \le a_1 + \ldots + a_n \ldots \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$$

(не зависит от n)

$F(b) = \int_1^b f(x)\,dx$

$F(b)\nearrow$ (т.к. $f(x)$ – положит.)



$b < b_2$

$F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \ge 0$

$$\Downarrow$$

$F(b_1) \le F(b_2)$

$$F(b) = \int_1^b f(x)\,dx \le F(n) = \int_1^n f(x)\,dx \le A$$

$$\Downarrow$$

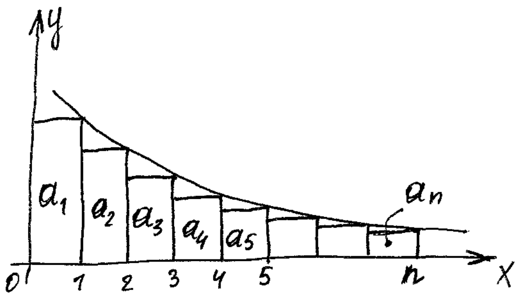
$$\exists \lim_{b\to+\infty} F(b)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ – сход.}$$

⟨ сходится ряд $\Rightarrow$ сход. интеграл. ⟩

2. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ – сход.



сдвигаем всё на 1 влево.

Площадь под графиком больше площади ступенчатой фигуры.

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ - сход.

$a_2+a_3+...+a_n \le \int\limits_1^n f(x)dx \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$

от добавления члена сходимость не меняется

⟨из ограниченности частичных сумм ⇒ сходимость⟩

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ $\quad p \le 1$ – расх., т.к. $\frac{1}{n^p} \not\to 0$ (расходимость вытекает из необх. признака).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ – (ф-ция непр. на $(1;+\infty)$, убывает на всей оси; положительна).

ряд-сход. ⇔ $\int$-сход.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $\quad p > 1$ – сход.
$\quad p \le 1$ – расход

(*): $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

$\langle (1+t)^p - 1 \sim pt_{p>0} \rangle$

$a_n \sim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – сход. (т.к. $3/2 > 1$)

22 Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Если ряд сходится, а ряд из модулей для него расходится, то данный ряд называется <u>условно сходящимся.</u>

Ряд, для которого сходится ряд из модулей, — <u>абсолютно сходящийся</u> ряд.

Т: Если ряд с неотриц. членами сходится, то при произвольной перестановке его членов, сумма его не меняется.

<перестановка: члены те же, но под другими номерами>

$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ — сходится.

$a_1' + a_2' + \dots + a_n' + \dots$

Доказать, что ряд сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

Д.: 1. $A_n' \leq A_m$ → сумма первого ряда

$A_n' \leq A_m \leq A$ при любом A частичная сумма ограничена сверху.

Переходим к пределу:

$A' \leq A$

2. Пусть наоборот: исходный теперь — A', переставленный — A.

Мы можем всё переставить:

$A \leq A'$ и $A' \leq A$ (из п.п. 1.)

$A = A'$

<u>Положит. и отрицат. ряды.</u>

$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ $\qquad a_n^+ + a_n^- = a_n$

$a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ $\qquad a_n^+ - a_n^- = |a_n|$

Если член ряда положит. ⇒ все положит. члены остаются, а $a_n^- = 0$.

Если член ряда отриц., ⇒ все отрицат. члены остаются, а все $a_n^+ = 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = 0 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \dots$$

<u>Очевидные оценки:</u>

- $|a_n^+| \leq |a_n|$
- $|a_n^-| \leq |a_n|$
- Ряд абсолютно сходится ⇔ когда сходятся оба ряда a_n^+ и a_n^-.

Т.: Для абсолютно сходящихся рядов от перестановки слагаемых рядов сумма не меняется.

$\Downarrow$

справедливо свойство конечных сумм.

Т. Римана: Если ряд условно сходится, то для $\forall$ действительного числа, включая символы $+\infty$ и $-\infty$, можно так переставить члены этого ряда, что сумма переставленного ряда будет равна сумме исходного ряда (т.е. ряд будет сходиться к этому же числу).

Знакочередующиеся ряды.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot a_n+\ldots$, где $a_n\geq 0$, называется знакочередующимся.

Т. (признак Лейбница):

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

1. Знакочередующийся ряд (!)
2. $|a_n|\downarrow$: $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ (т.е. члены ряда $\to$ к 0)

$\Downarrow$

ряд сходится, а его сумма удовлетворяет нер-ву: $0\leq S\leq a_n$.

Д.: Рассм-им послед-ть частичных сумм. с чётными членами.

$|a_n|=c_n$

$$S_{2k}=\underbrace{(c_1-c_2)}_{\searrow 0}+\underbrace{(c_3-c_4)}_{\searrow 0}+\ldots+\underbrace{(c_{2k-1}-c_{2k})}_{\searrow 0}$$

S_{2k} образует монотонно возрастающую последовательность:

$S_2<S_4<S_6<\ldots<S_{2k}<\ldots$

$$S_{2k}=c_1-\underbrace{(c_2-c_3)}_{\searrow 0}-\underbrace{(c_4-c_5)}_{\searrow 0}-\ldots-\underbrace{(c_{2k-2}-c_{2k-1})}_{\searrow 0}-\underbrace{c_{2k}}_{\searrow 0}$$

$S_{2k}<c_1$

По Т. Вейерштраса послед-ть имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2k}=S$

$S_{2k+1}=S_{2k}+\overset{\nearrow 0}{a_{2k}}\Rightarrow S_{2k+1}\longrightarrow S$

(послед-ть частичных сумм с чётными членами $\longrightarrow S$ и имеет сумму? $\to S$)

вся $S_n\to S\Rightarrow$ расходится.

(*): $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ – сходится.

23) Непрерывность суммы функционального ряда.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ <u>Область сходимости</u> – множество всех X, для которых ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ на X:

$\forall x \in \langle a; b\rangle \ \forall |u_n(x)| \leq a_n$

<u>T. (о непрерывности суммы ряда):</u>

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

Пусть:

1. $\forall n$ $u_n(x)$ непр. на $\langle a; b\rangle$

! 2. $\exists$ сходящаяся мажоранта на $\langle a; b\rangle$

$\Downarrow$

ряд сходится и сумма непрерывна:

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ непр. $\langle a; b\rangle$

<u>Д.</u>:

1) 1-й признак сравнения

$\downarrow$

ряд сходится на $\langle a; b\rangle$

2) сумма ряда – непр. ф-ция ⚠

$\Rightarrow \exists S(x)$

$$-\begin{array}{l} S(x) = S_n(x) + \underset{\text{остаток}}{R_n(x)} \\ \underline{S(x_0) = S_n(x_0) + R_n(x_0)} \end{array}$$

$|S(x)-S(x_0)| = |(S_n(x)-S_n(x_0)) + R_n(x) - R_n(x_0)| \leq |S_n(x)-S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)|$

$\underline{\forall \varepsilon>0}$ $\quad \frac{\varepsilon}{3}>0$

$|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

остаток числового ряда из a_n

$\Downarrow$

для $\frac{\varepsilon}{3}$ найдётся такой номер N... :

$\exists N: \forall n \geq N \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{3}$

$\to 0$ (предел $=0$)

$|R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для <u>всех!</u> x <u>сразу!</u> из $\langle a; b\rangle$

$|S(x)-S(x_0)| < |S_N(x)-S_N(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$

$S_n(x)$ – конечная сумма непр. функций.

Выбираем окрестность

$$\underbrace{\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0)}\quad |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

(24) Дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ <u>Область сходимости</u> – мн-во всех X, для которых ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$, мажорирующий ряд.

$\forall x \in \langle a; b\rangle \ \forall \ |U_n(x)| \leq a_n$

<u>**Т.** (о почленном интегрировании):</u>

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$

1. $\forall n$ $U_n(x)$ непр. на $[a;b]$ отрезок!
2. $\exists$ сходящаяся мажоранта на $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_a^b U_n(x)\,dx$$

<u>**Д.**</u>:

$\underset{\text{частич. сум.}}{S_m(x)}$, $\underset{\text{остаток}}{R_m(x)}$:

$$S(x) = S_m(x) + R_m(x)$$

По <u>Т. о непр-ти суммы ряда</u>:
$$\begin{cases} S_m - \text{непр.} \\ R_m - \text{непр.} \\ S - \text{непр.} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ непрерывн. ф-ция интегрируема $\Leftarrow$

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b S_m(x)dx + \int\limits_a^b R_m(x)dx$$

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{m} U_n(x)\right)dx + \int\limits_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx$$

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{m}\int\limits_a^b U_n(x)dx + \underbrace{\int\limits_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx}_{\alpha_m \to 0,\ \text{при } m\to\infty}$$

$$|\alpha_m| = \left|\int\limits_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} U_n(x)\right)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} U_n(x)\right|dx \leq \int\limits_a^b \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} |U_n(x)|\right)dx \leq$$

от X не зависит, а зависит только от m

$$\leq \int\limits_a^b \underbrace{\left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n\right)}_{R_m^a}dx = (b-a)R_m^a$$

при $m\to\infty$ $R_m^a \to 0$

$$0 \leq |\alpha_m| \leq (b-a)\underset{\to 0}{R_m^a}$$

по Т. о зажат. перем.:

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_m = 0$$

T. (о почленном дифференцировании):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x), \quad x \in [a;b].$$

1. $\forall n \quad U_n(x) \in C^1([a;b])$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ сход. на $[a;b]$
3. $\exists$ сходящ. мажоранта на $[a;b]$ для ряда из производных $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$

$$\Downarrow$$

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$$

Д.: Возьмём ряд из производных и применим к нему теоремы об интегрировании (т.е. всё наоборот).

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x U_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} [U_n(x) - U_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(a).$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)}_{\text{также диффер-ма}} = \underbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(a)}_{\text{константа}} + \int_a^x \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} U'(t)\right)}_{\text{непр. функция, т.е. она дифференцируема}} dt}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$$

(25) Теорема Абеля для степенных рядов; радиус и интервал сходимости.
(Сохр. R при диф-ии и инт-ии ряда)

<u>Степенной ряд</u> — как бы многочлен бесконечной степени.

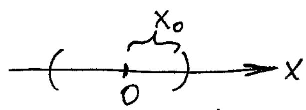
$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

Его <u>область сходимости</u> — симметричный интервал $(-R; R)$
Внутри этого интервала ряд бесконечно дифференцируем.
Такой ряд всегда сходится при $x=0$.

<u>Т. Абеля:</u>

Если степенной ряд сходится в (·) $x_0 \neq 0$, то этот ряд абсолютно сходится для $\forall x$ таких, что $|x| < |x_0|$
<одна точка сходимости тянет за собой весь интервал>.

<u>Д.:</u> $|0| < x < |x_0|$



сходится ряд из модулей:

$$|C_n x^n| = \left|C_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |C_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1 \ (\text{т.к. } |x| < |x_0|)$$

$$\Downarrow$$

$$|C_n x_0^n| \cdot q^n$$

Рассмотрим послед-ть $C_n x_0^n \Rightarrow$ ряд сход. в (·) x_0

$$\Downarrow$$

по необход. признаку $C_n x_0^n \to 0 \Rightarrow$ послед-ть ограничена (если сход., то огранич.)

$$\exists A > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |C_n x_0^n| \leq A$$

$|C_n x_0^n| \leq A q^n \leftrightarrow$ члены геометрич. прогрессии, $q < 1 \Rightarrow$ она сходится $\Rightarrow$ по <u>1-му признаку</u> сравнения ряд сходится.

<u>Радиус сходимости степ. ряда.</u>

Расм-им множ-во x таких, что ряд сходится
Мн-во неотриц. чисел:

$$R = \sup\{|x| : \text{в (·) } x \text{ ряд сход.}\}$$

$R = 0$, $R > 0$, $R =$ символ $+$бесконечность
$(-R; R)$ интервал сходимости.

<u>Док-ать:</u> 1) внутри интервала ряд абсолютно сход.
2) вне интервала ряд расходится
3) в концевых (·) — всё что угодно!

$R=+\infty$ — есть точки со сколь угодно большими модулями

$\Downarrow$

в $\forall(\cdot)$ числовой оси ряд ~~абсолютно расход~~? не явл. абс. сходящимся.

$0<R<+\infty$ $\quad \overset{(\quad\cdot\quad)}{\underset{-R\qquad R}{\longrightarrow}}$ $\quad |x|>R$ — расход. Если бы за пределами существовала точка сходимости, то это противоречило бы тому, что у нас есть точ. верх. грань.

$|x_1|<R$

$R-|x_1|=\varepsilon>0$

по св-ву верхней грани $\exists(\cdot)\ x_2$, что её модуль будет $>R-\varepsilon$:

$\exists x_2 \quad R-\varepsilon<|x_2|$

$|x_1|<|x_2|$

по Т. Абеля в $(\cdot)\ x$ ряд абсолютно сход.

$\Downarrow$

в $\forall(\cdot)$ внутри интервала ряд сходится.

Предположим, что коэффициенты ряда отлич. от 0:

$c_n\neq 0$

Применим признак Даламбера к модулям:

$$\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\cdot|x|$$

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}}$$

(если такой предел существует).

Ф-ла действительна даже при $R=0$, $R=+\infty$

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=A$$

1) $0<A<+\infty$ $\qquad (1)\to A$

по признаку Даламбера, если это больше $1\Rightarrow$ ряд расход., если меньше — сход.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\cdot|x|=\frac{|x|}{A}$$

$$\frac{|x|}{A}<1 \qquad |x|<A$$

$A=R$

2) $A=+\infty$

$(1)\to\infty$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=0<1 \Rightarrow A=R$$

3) $A=0$

$(1)\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=\infty$$

Ряд сход. в $(\cdot)\ 0$

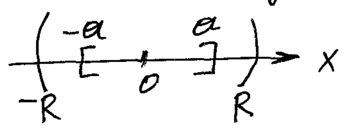
$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

(25) <продолжение>

Св-ва суммы степенного ряда внутри интервала сходимости.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \qquad (-R;R)$$

Сумма степенного ряда непрерывна в интервале сходимости
<Т. о непр-ти суммы...>
Пусть $\exists$ сходящаяся мажоранта $\Rightarrow$ сумма ряда непрерывна



Оценим по модулю член нашего функц. ряда:

$$|C_n x^n| = |C_n|\cdot|x|^n \le |C_n|\cdot a^n = |C_n a^n|$$

(·) a $\in$ интервалу сходимости

$\Downarrow$ ряд сходится в этой (·)

$\sum_n |C_n a^n|$

Сумма непр. в (·) x, значит она непр. на всём интервале сходимости.

Ряд можно почленно интегрировать от 0 до a ?

Дифференцируемость.

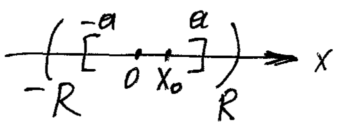
R $\quad \sum_n c_n x^n \qquad R_1 \quad \sum_n n c_n x^{n-1}$

$R_1 = R$ $\qquad$ ряд по x'

При почленном дифференцировании радиус сходимости не меняется.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nc_n|}{|(n+1)c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\overset{\to 1}{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=1\cdot R=R$$

В интервале сходимости сумма степенного ряда диффер-ма, и её производная = сумме ряда из производных



x_0, докажем, что в этой (·) x' = тому, чему надо...

(Т.): Члены ряда – функции класса C^1
$\exists$ сходящ. мажоранта для ряда из производных

$$|n c_n x^{n-1}| = |nc_n|\cdot|x|^{n-1} \le |nc_n|\, a^{n-1} = \underbrace{|nc_n a^{n-1}|}$$

имеем сходящ. мажоранту на $[-a;a]$ $\leftarrow$ член сходящегося числового ряда

Итог:
на всём интервале сходимости:

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\Big)' = \sum_n n c_n x^{n-1}$$

Сумма степенного ряда – функция бесконеч. диффер-ма в интервале $(-R;R)$

!! Сумма степенных рядов образует более узкий класс среди всех бесконечно диффер-ых функций.

(26) Ряды Тейлора. 6 основных разложений. Свойства суммы степенного ряда.

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$c_0 = S(0)$$

$$S'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots$$

$$c_1 = S'(0)$$

$$S''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

$$c_2 = \frac{S''(0)}{2!}$$

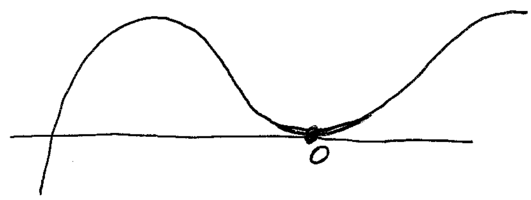
$$S'''(x) = 3\cdot 2\cdot c_3 + \dots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$$

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<не для ряда>:



Если ряд сходится на $(-R; R)$, его сумма в окрестности (.) $0 = 0$
все коэффициенты $= 0$
$\Downarrow$
$S \equiv 0$ на всей числовой оси

! Далеко не каждая бесконеч. дифференцируемая ф-ция является суммой степенного ряда.

Сумма сходящихся степенных рядов — <u>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ.</u>

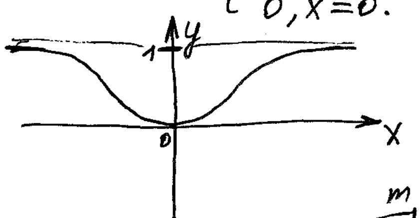
Пусть в $U(0)$ $f(x) \in C^\infty(U(0))$
— существует ли такой степенной ряд, что $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$?

Если это так $\Rightarrow$ коэффициенты = производным:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Если ряд сходится, то сходится ли он к породившей его функции?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



все её производные существуют в (.) 0 и они = 0.

$f^{(n)}(0) = 0$ — тогда ряд Тейлора состоит из 0.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\text{многочлен Тейлора}} + \underbrace{r_m(x)}_{\text{остаточный член}}$$

Он в то же время — частичная сумма ряда.

Пусть в окрестности 0 задана бесконечно диффер-ая ф-ция $f(x)$.
Для того, чтобы эта ф-ция в дан. окр. раскладывалась в степенной ряд, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{m\to\infty} r_m(x) = 0$$

Т.: 1. $f(x) \in C^{\infty}(U(0))$
2. $\exists M>0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(0)$ для $\forall n : |f^{(n)}(x)| \leq M$

$\Downarrow$

в $U(0)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ – т.е. раскладывается в степ. ряд.

Д.: $r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1}$ <c – нек. (·) м/у 0 и x>, c – зависит от x, m.

Оценим по модулю: $0 \leq |r_m(x)| = \frac{|f^{(m+1)}(c)| \cdot |x|^{m+1}}{(m+1)!} \leq M \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \to 0$, при $m \to \infty$

по Т. о „зажатой переменной": $r_m \to 0$

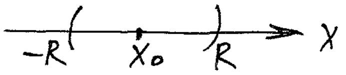
$\Downarrow$

для всех x из этой окрестности ф-ция раскладывается в степенной ряд.

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$ $(x-x_0)=t$: сдвиг по оси; св-ва такие же, но с поправкой на x_0.

Область его сходимости: интервал $(-R; R)$ с центром в (·) x_0

$C_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$

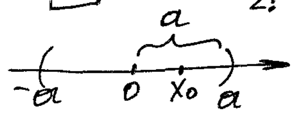


ряд Тейлора для $f(x)$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Разложение в степ. ряды:

e^x $(e^x)^{(n)} = e^x$ на всей числовой оси ф-ция раскладывается в ряд.

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$



$(e^x)^{(n)} = e^x \leq e^a \Rightarrow$ ф-ция расклад. в (степ) ряд Тейлора на всей числовой оси, значит и в (·) x_0

$\boxed{x \in (-\infty; +\infty)}$

$\sin x, \cos x$

$\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{\pi}{2} n)$

$|\sin^{(n)} x| \leq 1 \Rightarrow$ на всей числовой выполнен признак $\Rightarrow$ расклад. в свой ряд Тейлора на всей числовой оси

$\sin \frac{\pi}{2} n$ для половины $= 0$ (при чётн. $\sin \frac{\pi}{2} n = 0$)

$\sin \frac{\pi}{2} n$ – ф-ция нечётная, раскладывается по нечётным.

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, на всей числовой оси $\boxed{x \in (-\infty; +\infty)}$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2} n)$

при n – нечётн. $\cos = 0 \Rightarrow$ расклад. по чётн. n:

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}$ $\boxed{x \in (-\infty; +\infty)}$

$a_1 = 1$, $q = -x \Rightarrow$ прогрессия бесконечно уменьшается, если $q < 1$

$|-x| < 1$

$|x| < 1$ $x \in (-1; 1)$

(4) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ $\boxed{x \in (-1; 1)}$ $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1; 1)$

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ условно сход. $\boxed{-1 < x \leq 1}$ (будет сходиться к $\ln 2$ по II Т. Абеля)

(6) $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)(p-n+1)}{n!} x^n$

$\boxed{x \in (-1; 1)}$

27 Ряды с комплексными числами. Формула Эйлера.

Ф-ция $W_n = U_n + iV_n$

ряд сходится, если сходятся оба ряда U_n и V_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n + i\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$$

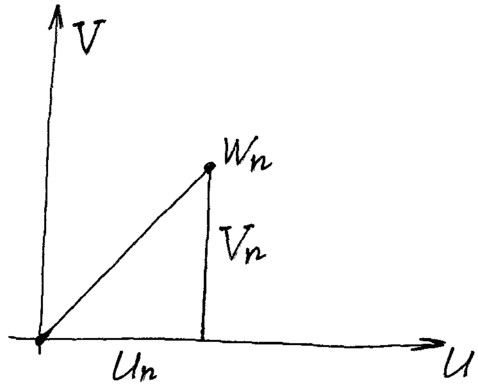
$\sum_{n=1}^{+\infty} |W_n|$ сход.

$|U_n| \le |W_n|$

абс. сход.

$|V_n| \le |W_n|$

абс. сход.



$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{C_n \cdot Z^n}_{\text{компл. числа}}$$

Т. Абеля:

Если степенной ряд с комплексными членами сход. в (.) $Z_0 \ne 0$, тогда он абс. сходится для $\forall Z$:

$$|Z| < |Z_0|$$

Д.: Возьмём $|Z| < |Z_0|$

Покажем, что в этой (.) сходится ряд:

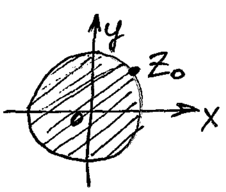
$$|C_n Z^n| = |C_n Z_0^n \cdot \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n| = |C_n Z_0^n| \cdot \left|\frac{Z}{Z_0}\right|^n = |C_n Z^n| \le \underbrace{A \cdot q^n}_{\text{прогрессия}}$$

$\underbrace{q = \left|\frac{Z}{Z_0}\right| < 1}_{\text{сход.}} \rightarrow$ ряд сходится

послед-ть огранич. (ряд сход. в (.) Z_0, по необх. признаку его члены $\to 0$, есть lim)

$\underline{|Z| < a}$ (если $= a$, то это окружность)

Внутренность круга.



круг сходимости

внутри — абсолютно сход., снаружи — расходится.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ для $x \in (-\infty; +\infty)$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)|z|^n} = \frac{1}{n+1}|z| \to 0 < 1$$

$z = i\varphi$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{i\varphi^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \underline{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}.$$

(28) Ряды Фурье.

Ф-ция задана; она периодич., если

$T>0 \quad \forall x \quad f(x+T)=f(x)$ $\qquad \langle (*): \sin; \cos \rangle$

Если ф-ция интегрируема, то если взять интеграл на отрезке в период, то интеграл независит от a:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \underbrace{\int_0^T f(x)dx}_{} + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx - \int_0^a f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$ (не зависит от a)

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} x-T=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\} = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+m)} \underbrace{\sin(n+m)x}_{=0} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx = 0$$ всегда!!!

Разложить ф-цию по гармоническим составляющим:

$\cos nx$, $\sin nx$

$f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Предположим, что сходится ряд из коэффициентов:

$$\left|\frac{a_n}{2}\right| + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|)$$ – сходящ. мажоранта

Ряд, составленный из cos и sin, имеет сходящуюся мажоранту $\Rightarrow$ сходится.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$ n – фиксир. число; a_n – ?

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx}_{=0}\Big) = \underline{a_n \pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$$ верно для: $n = 0, 1, 2, \dots$

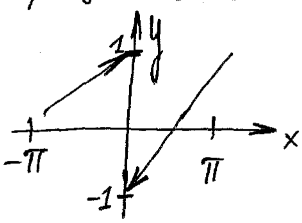
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$ $\qquad n = 1, 2, 3, \dots$

Ряды Фурье

Ф-ция <u>кусочно непрерывна</u> на отр. $[a;b]$, если на этом отрезке она имеет не более конечного числа точек разрыва, причём все эти (•) разрыва первого рода (т.е. имеют предел справа и слева).

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+0) \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$$

<u>Кусочно монотонная</u> – если этот отрезок можно представить в виде объединения конечного числа промежутков, на каждом из которых ф-ция монотонна.



<u>Т. Дирихле</u>: Пусть ф-ция $f(x)$ определена на всей числовой оси, имеет период 2π и на отрезке $[-\pi;\pi]$ она кусочно монотонна и кусочно непрерывна, тогда её ряд Фурье сходится на всей оси, причём:

в (•) непрерывности сходится к самой ф-ции.

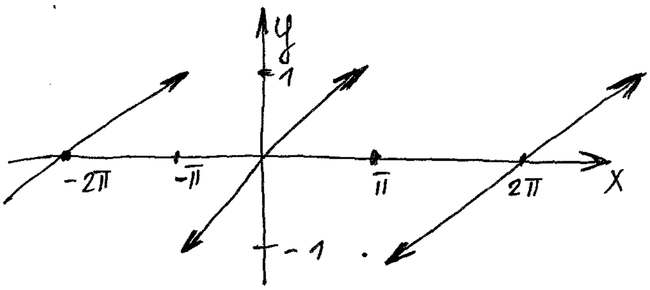
в (•)-ах разрыва сходится к полусумме пределов справа и слева: $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

<u>Разложение ф-ции в ряд Фурье:</u>

$(-\pi;\pi)$

$f(x)=x$

Найдём коэффициент Фурье: a_n и b_n.



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

неч. ф-ция, $\int$ по симметрич. отрезку, $\int = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\cdot\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx =$$

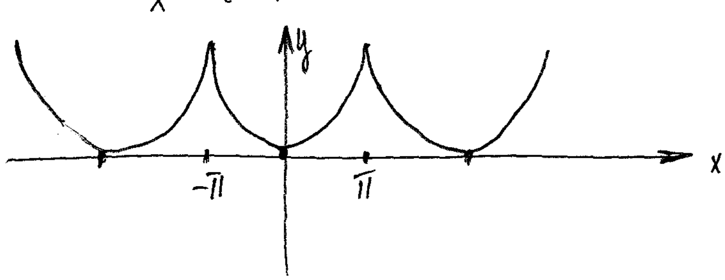
$$= -\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{0} = -\frac{2}{\cancel{\pi} n}\cancel{\pi}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}$$

$$\boxed{\cos n\pi = (-1)^n}$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$ – ряд сходится условно (нет сходящ. мажоранты)

коэф-нт Фурье убывает медленно.

x^2 $(-\pi;\pi)$



(28) <продолжение>

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2 d\sin nx = \underbrace{\frac{2}{\pi n} x^2 \sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

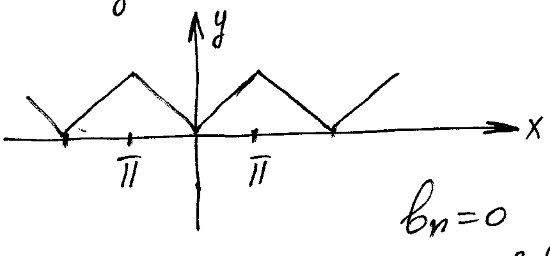
$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx = \frac{4}{\pi n^2} x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} = \frac{4}{\pi n^2}\pi\cos n\pi = (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$ — сходится лучше (есть сходящаяся мажоранта)

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}; \quad -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Разложить x по $\cos nx$ в интервале $(-\pi; \pi)$.



коэффициенты Фурье будут убывать довольно быстро

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d\sin nx = \underbrace{\frac{2}{\pi n} x\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

n – чётное $\Rightarrow [(-1)^n - 1] = 0$

n – нечёт. $\Rightarrow [(-1)^n - 1] = -2$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$T = 2\ell$ (ось можно растянуть...)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n\sin\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$