МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Бобров А.Н.
Радославова Т.В.

Задачи по высшей математике для биологов

МОСКВА
2013

УДК 517.1, 517.2, 517.3, 517.9

Бобров А.Н., Радославова Т.В. Задачи по высшей математике для биологов. Учебное пособие. М.: Биологический факультет МГУ, 2013. — 111 с.

Рецензенты:

доктор физико–математических наук, зав. лаборатории *С.Ю. Мисюрин*
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

кандидат физико–математических наук, доцент *Ю.Н. Сударев*
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Настоящая пособие — сборник задач и упражнений к основным разделам курса высшей математики, читаемого на биологическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. Примеры подобраны так, чтобы помочь глубже усвоить теоретические вопросы курса, разобраться в применимости теорем и утверждений математического анализа. Большое количество задач и упражнений снабжены решениями и указаниями.

Рекомендовано к опубликованию решением Ученого и Учебно–методического советов биологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Оглавление

Настоящая пособие – сборник задач и упражнений к основным разделам курса высшей математики, читаемого на биологическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. Примеры подобраны так, чтобы помочь глубже усвоить теоретические вопросы курса, разобраться в применимости теорем и утверждений математического анализа. Большое количество задач и упражнений снабжены решениями и указаниями.

В учебном пособии подобраны задачи практически ко всем темам, изучаемым в курсе высшей математики на биологическом факультете МГУ. Особое внимание уделено таким разделам, как понятие предела последовательности и функции, непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной, свойства функций многих переменных, понятие первообразной и свойства определённого интеграла, решение дифференциальных уравнений, исследование рядов.

Предполагается, что читатель уже знаком с соответствующими теоретическими разделами, но для удобства основные определения и формулировки теорем приведены в тексте.

Авторы

1 Последовательности, понятие предела

1.1. Показать, что для любого натурального n справедливо равенство:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

► Введем обозначения $\Delta_1 = 1 + 2 + \ldots + n$, $\Delta_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ и преобразуем сумму Δ_2:

$$\Delta_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n$. Значит

$$\Delta_2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + n.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства n^2 и n:

$$\Delta_2 + n^2 + n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n = \Delta_2 + 2\Delta_1 + n.$$

Выразим Δ_1:

$$\Delta_1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

Стоит иметь в виду, что аналогичными рассуждениями (рассматривая Δ_3) можно получить тождество

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Продолжив рассуждения, и зная Δ_1, Δ_2, …, Δ_{n-1}, можно найти Δ_n (рассматривая Δ_{n+1}).

Заметим, что для доказательства этих формул можно применить метод математической индукции. Однако для этого нужно знать конечную формулу, подлежащую доказательству. Предложенный же метод является конструктивным, т. е. позволяет получать в явном виде новые выражения.

Также Δ_1 есть сумма n членов арифметической прогрессии, формулой для которой можно воспользоваться.

1.2. Доказать, что сумма двух возрастающих (убывающих) последовательностей возрастает (убывает).

1.3. Доказать, что произведение двух положительных возрастающих (убывающих) последовательностей возрастает (убывает). Будет ли верно утверждение, если не требовать положительности последовательностей? Привести примеры.

1.4. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, $b_n > 0$ $\forall n$, возрастает (убывает), если неотрицательная последовательность $\{a_n\}$ возрастает (убывает), а $\{b_n\}$ убывает (возрастает). Будет ли верно утверждение, если отказаться от условий $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$?

1.5. Пусть $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ не является возрастающей. Что можно сказать о $\{a_n + b_n\}$? Привести примеры.

1.6. Является ли возрастающей разность двух возрастающих последовательностей? Привести примеры.

1.7. Является ли возрастающим отношение двух возрастающих последовательностей? Привести примеры.

Определение 1.1. Число b называется верхней границей множества A, если $\forall\ a \in A$ выполняется $a \leqslant b$.

Определение 1.2. Наименьшая из верхних границ множества A называется точной верхней гранью множества* A и обозначается $\sup A$.

Теорема 1.1 (о точной верхней грани). Число M является точной верхней гранью множества A в том и только том случае, когда выполняются два условия:

$$\begin{aligned} &1. \forall a \in A: \quad a \leqslant M; \\ &2. \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: \quad a > M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично дается определение точной нижней грани $\inf A$ множества A, и формулируется необходимое и достаточное условие для точной нижней грани.

Найти $\inf a_n$, $\sup a_n$.

1.8. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

► Заметим, что $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Кроме того, $a_1 = 0$. Значит $\inf a_n = \min a_n = 0$. Докажем, что $\sup a_n = 1$. Нам остается проверить лишь второе условие. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Значит $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ и $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. ■

1.9. $a_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

1.10. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

Определение 1.3. Последовательность $\{a_n\}$ сходится, если

$$\exists a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Число a называется пределом последовательности и обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1.11. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

► Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, для всех $n \geqslant N$ выполняется $0 < \dfrac{|\sin n|}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N} < \varepsilon$, что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$. ■

* Множество A является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Дадим отрицание утверждения (1.1): последовательности $\{a_n\}$ расходится, если

$$\forall a \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geqslant N: \quad |a_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

1.12. Доказать, что последовательность $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ расходится.

► Пусть $a \geqslant 0$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Для любого N выберем $n = 2N$. Тогда

$$|a_n - a| = |-1 - a| = a + 1 \geqslant 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно $a \geqslant 0$ не может являться пределом последовательности.

Пусть $a < 0$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Для любого N выберем $n = 2N + 1$. Тогда

$$|a_n - a| = |1 - a| = 1 - a > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно $a < 0$ не может являться пределом последовательности. Таким образом, никакое a не может являться пределом последовательности $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$. ■

1.13. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$.

► Предварительно преобразуем выражение $|a_n - a|$:

$$|a_n - a| = \left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем N такое, чтобы $N > \dfrac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$, и тем самым $\dfrac{1}{2(2N-1)} < \varepsilon$. Но тогда, для любого $n \geqslant N$

$$|a_n - a| = \frac{1}{2(2n-1)} \leqslant \frac{1}{2(2N-1)} < \varepsilon,$$

а значит, выполняется (1.1) и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$. ■

1.14. Доказать, что условие (1.1) выполняется для $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}$ и $a = 2$.

1.15. Доказать, исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9-n^3}{1+2n^3} = -\dfrac{1}{2}$.

Определение 1.4. Последовательность $\{b_k = a_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если $n_{k+1} > n_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

1.16. Доказать, что если $\{a_n\}$ — сходящаяся последовательность и $\{a_{n_k}\}$ — любая ее подпоследовательность, то она сходится и к тому же пределу.

1.17. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$?

◊ *Указание.* Рассмотреть подпоследовательности $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$.

1.18. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right]$?

◊ *Указание.* Рассмотреть подпоследовательности с четными и нечетными номерами.

1.19. Доказать, что если существуют равные пределы $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Какими должны быть возрастающие последовательности $\{n_k\}$ и $\left\{n_k^{'}\right\}$, чтобы из существования и равенства пределов $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k^{'}} = a$ следовало, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и он равен a?

1.20. Пусть заданы числа $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что для каждого $p = 1, 2, \ldots, s$, существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_p$.

1.21. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что для каждого x_p, $p = 1, 2, \ldots$, существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_p$.

► Будем строить последовательность следующим образом:

$$x_1, x_1, x_2, x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что последовательность $\{a_{n_k}\}$ с номерами $n_k = 1, 2, 4, 7, 11, \ldots$ (т. е. при $n_1 = 1$, $n_{k+1} = n_k + k - 1$) представляет из себя последовательность, все члены которой равны x_1, и, значит, её предел равен x_1. При $n_k = 3, 5, 8, 12, \ldots$ (т. е. при $n_1 = 3$, $n_{k+1} = n_k + k$) все члены $\{a_{n_k}\}$ равны x_2, значит $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_2$. Далее аналогично. ■

Известны (см., например, [1]) арифметические свойства пределов: если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходятся последовательности $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ (если $b_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$), причем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{ и } b_n \neq 0 \quad \forall n.$$

1.22. Доказать, что сумма сходящейся и расходящейся последовательностей расходится.

◊ *Указание.* Доказать от противного.

1.23. Обязательно ли расходится сумма двух расходящихся последовательностей? Привести примеры.

1.24. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. Обратное утверждение неверно, если $a \neq 0$. Привести примеры.

1.25. Можно ли утверждать, что сходится или расходится последовательность $\{a_n b_n\}$, если известно, что $\{a_n\}$ сходится, а $\{b_n\}$ расходится?

◊ *Указание.* Рассмотреть последовательности: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$ и $\{a_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$.

1.26. Обязательно ли расходится $\{a_n b_n\}$, если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ расходятся?

◊ *Указание.* Рассмотреть $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$.

1.27. Показать, что для $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ существует, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует.

1.28. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то последовательность *средних арифметических* $\{\xi_n\}$, где

$$\xi_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (см., например, [6], 113а, с. 58).

1.29. Пусть $\{a_n\}$ — сходящаяся положительная последовательность. Доказать, что последовательность *средних геометрических* $\{\eta_n\}$, где

$$\eta_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (см., например, [6], 114, с. 59).

1.30. Доказать, что если $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

► Воспользуемся результатом задачи 1.29.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

■

Теорема 1.2 (о переходе к пределу в неравенствах). Пусть заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $a_n \leqslant b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $a \leqslant b$.

1.31. Если в условиях предыдущей теоремы заменить нестрогие неравенства на строгие, будет ли верным такое утверждение?

◊ *Указание.* Рассмотреть $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ или $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Теорема 1.3 (Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Формулировку теоремы можно уточнить: неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. Для невозрастающей последовательности необходимо потребовать ограниченности снизу.

1.32. Последовательность $\{a_n\}$ определяется следующим образом:

$$a_0 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

► Из определения последовательности $\{a_n\}$ следует, что $a_n > 0$. Докажем, что при любом выборе a_0 верно неравенство $a_n \geqslant 1$ $n = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$(a_n - 1)^2 \geqslant 0,$$
$$a_n^2 - 2a_n + 1 \geqslant 0,$$
$$\text{так как} \quad a_n > 0, \quad \text{то} \quad a_n - 2 + \frac{1}{a_n} \geqslant 0,$$
$$a_n + \frac{1}{a_n} \geqslant 2,$$
$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant 1.$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу.

Сравним a_{n+1} и a_n при $n = 1, 2, \ldots$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \bigvee a_n,$$
$$a_n + \frac{1}{a_n} \bigvee 2a_n,$$
$$\frac{1}{a_n} \bigvee a_n.$$

Поскольку $a_n \geqslant 1$, то $\dfrac{1}{a_n} \leqslant a_n$, а значит, $a_{n+1} \leqslant a_n$. То есть последовательность $\{a_n\}$ является невозрастающей. По теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, который мы обозначим a. Для нахождения a достаточно перейти к пределу в равенстве $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$. Получим $a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$ (заметим, что $a \geqslant 1$ в силу теоремы о переходе к пределу в неравенствах). Решая уравнение и выбирая корень, больший нуля, получаем $a = 1$. ■

2 Функции, предел и непрерывность

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0.

Определение 2.1. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \overset{\circ}{U}(x_0) = \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.1. Убедившись, что выполняется условие (2.1), доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, где

$$f(x) = \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11}, \quad x_0 = 11, a = 23.$$

► Сделаем тождественные преобразования при $x \neq 11$:

$$\left|\frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23\right| = \left|\frac{2x^2 - 44x + 242}{x - 11}\right| = |2x - 22| = 2\,|x - 11|\,.$$

Теперь ясно, что если для $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то для всех x таких, что $0 < |x - 11| < \delta$, будет выполняться

$$|f(x) - 23| = 2\,|x - 11| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 23$. ■

2.2. Доказать, что при $x \to -2$ выполняется (2.1) для $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$ и $a = -7$.

2.3. Доказать, что

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$$

проверив непосредственно условие (2.1).

2.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.

◊ *Указание.* Написать условия (2.1) из определения предела функции для $f(x)$ и для $|f(x)|$ и убедиться, что они совпадают.

2.5. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$. Обратное утверждение неверно. Привести пример.

2.6. Показать, что не существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, где

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

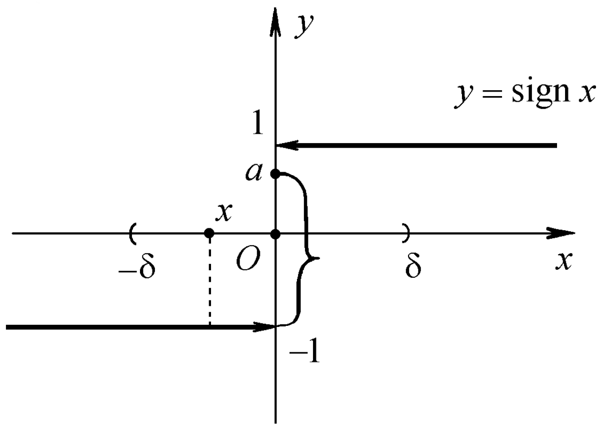

Рис. 1

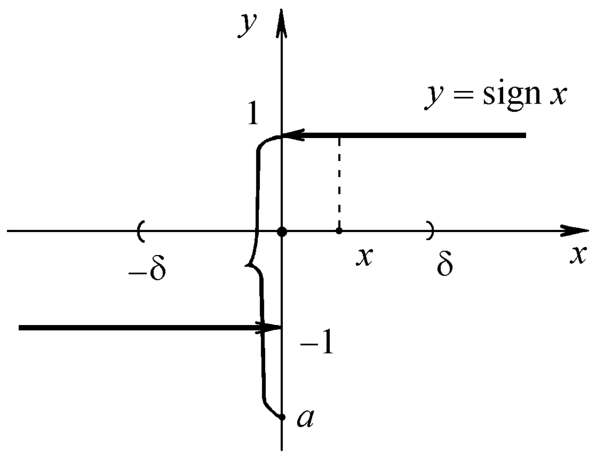

Рис. 2

► Нам надо доказать, что имеет место следующее утверждение, являющееся отрицанием условия (2.1):

$$\forall a \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \overset{\circ}{U}(0) \quad \exists x \in \overset{\circ}{U}(0) : |f(x) - a| > \varepsilon.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $a \geqslant 0$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и пусть $\overset{\circ}{U}(0)$ — произвольная проколотая окрестность точки 0. Тогда для любого $x < 0$ из этой окрестности (см. рис. 1) имеем

$$|f(x) - a| = |-1 - a| = a + 1 \geqslant 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, любое число $a \geqslant 0$ не может быть пределом функции при $x \to 0$.
Пусть $a < 0$, $\overset{\circ}{U}(0)$ — произвольная проколотая окрестность точки 0 и $x > 0$ — любая точка из этой окрестности. Имеем (см. рис. 2)

$$|f(x) - a| = |1 - a| = 1 - a \geqslant 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $a < 0$ тоже не может быть пределом функции при $x \to 0$. ■

2.7. Показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$ и $f(x_0+0) = f(x_0-0)$.

2.8. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то для любой $\{x_n\}$, $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ и равен a.

◊ *Указание.* Проверить, что выполняется условие (1.1) из определения сходящейся последовательности.

2.9. Доказать, что если существуют последовательности $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0$, $x_n' \neq x_0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = b$, $a \neq b$, то функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to x_0$.

◊ *Указание.* Доказать от противного, применив утверждение 2.8.

2.10. Доказать, что если для каждой последовательности $\{x_n\}$ такой, что она лежит в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $x_n \to x_0$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, то все такие пределы равны между собой.

2.11. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для всякой $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ (определение предела по Гейне).

◊ *Указание.* Использовать утверждения из задач 2.8 – 2.10.

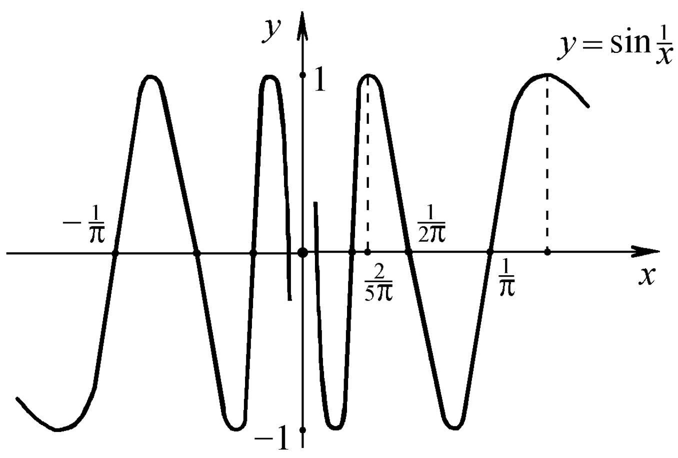

Рис. 3

2.12. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует (см. рис. 3).

◊ *Указание.* Рассмотреть последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$ и $\left\{x_n^{'}\right\} = \left\{\dfrac{2}{\pi + 4\pi n}\right\}$, или показать непосредственно для любого a, что условие (2.1) не выполняется.

2.13. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$?

► Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем $\overset{\circ}{U}(0) = \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(0)$. Тогда для любого $x \in \overset{\circ}{U}(0)$ имеем $|x| < \varepsilon$ и $|f(x) - 0| = \left|x \sin \dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$ (см. рис. 4), откуда следует, что $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. ■

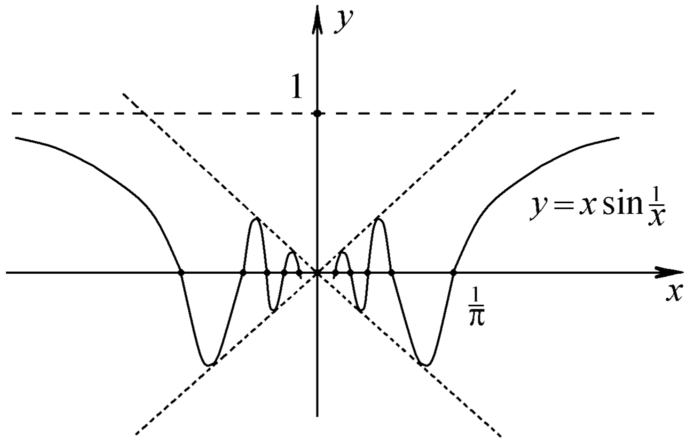

Рис. 4

Будем считать, что каждая из функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ не обращаются в нуль ни в одной точке некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0.

Определение 2.2. Функцию $\alpha(x)$ называют эквивалентной функции $\beta(x)$ (обозначение: $\alpha \sim \beta$) при $x \to x_0$, если в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ справедливо соотношение $\alpha(x) = \beta(x) \cdot q(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = 1$.

Очевидно, это определение эквивалентно следующему:

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

2.14. Верно ли следующее утверждение: пусть при $x \to x_0$ $f(x) \sim \varphi(x)$, $g(x) \sim \psi(x)$, $h(x) \sim \eta(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x) + \psi(x)}{\eta(x)} = a$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) + g(x)}{h(x)} = a$. Привести примеры.

► В общем случае утверждение неверно. Действительно, рассмотрим при $x \to 0$ функции $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = -\operatorname{tg} x$, $\eta(x) = (e^x - 1)^3$. Эквивалентными для них являются соответственно:

$$\varphi(x) \sim x, \quad \psi \sim -x, \quad \eta \sim x^3.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0,$$

хотя на самом деле

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\eta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

■

Определение 2.3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2.15. Доказать по определению, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\sin x$ в точке $x=x_0$.

► Для любого $\varepsilon>0$ при $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ имеем

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon.$$

■

б) $f(x)=\sqrt{x}$ в точке $x=x_0\geqslant 0$.

► Для любого $\varepsilon>0$ и $x_0>0$ при $|x-x_0|<\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$ имеем

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon.$$

Если $x_0=0$, то при $|x|<\delta=\varepsilon^2$ имеем $\sqrt{x}<\varepsilon$. ■

в) $f(x)=\cos x$ в точке $x=x_0$.

г) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=x_0$.

д) $f(x)=x^3$ в точке $x=x_0$.

2.16. Обязательно ли будет разрывной в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x)+g(x)$, если

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в x_0;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в x_0?

Привести соответствующие примеры.

2.17. Обязательно ли будет разрывной в данной точке x_0 произведение двух функций $f(x)g(x)$, если

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в x_0;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в x_0?

Привести соответствующие примеры.

2.18. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функций, $|f(x)|$ также является непрерывной функцией.

♢ *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 2.5.

2.19. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если} \quad f(x) < -c, \\ f(x), & \text{если} \quad |f(x)| \leqslant c, \\ c, & \text{если} \quad f(x) > c, \end{cases}$$

где c — любое положительное число, также непрерывна.

2.20. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases} \tag{2.2}$$

является разрывной в каждой точке вещественной прямой $\mathbb{R}$.

2.21. Привести пример функции, заданной на всей числовой прямой, непрерывной лишь в одной точке.

♢ *Указание.* Рассмотреть функцию $xD(x)$, и доказать, что она непрерывна при $x = 0$ и разрывна в остальных точках.

2.22. Привести пример функции, заданной на всей числовой прямой, и имеющей предел только при $x \to +\infty$.

♢ *Указание.* Рассмотреть функцию $\dfrac{D(x)}{x}$.

Теорема 2.1 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции $f(u)$ и $g(x)$ непрерывны в точках u_0 и x_0 соответственно. Если $g(x_0) = u_0$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

2.23. Обязательно ли будет разрывной в данной точке x_0 суперпозиция двух функций $f(g(x))$, если

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в x_0;

б) функция $f(x)$ разрывна в x_0, а функция $g(x)$ непрерывна.

Привести соответствующие примеры.

2.24. Обязательно ли будет разрывной в точке x_0 суперпозиция $f(g(x))$ двух разрывных в этой точке функций $f(x)$ и $g(x)$.

◊ *Указание.* Рассмотреть $f(x) = g(x) = D(x)$. Тогда $D(D(x)) \equiv 1$. Можно привести другой пример. Рассмотрим $f(x) = x^2$ и

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{— рациональное число,} \\ -1, & \text{если } x \text{— иррациональное число.} \end{cases}$$

Тогда $f(g(x)) = g^2(x) \equiv 1$.

2.25. Доказать, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x \text{— рациональное число } \dfrac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{— иррациональное число,} \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь, m — целое, n — натуральное число, непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках.

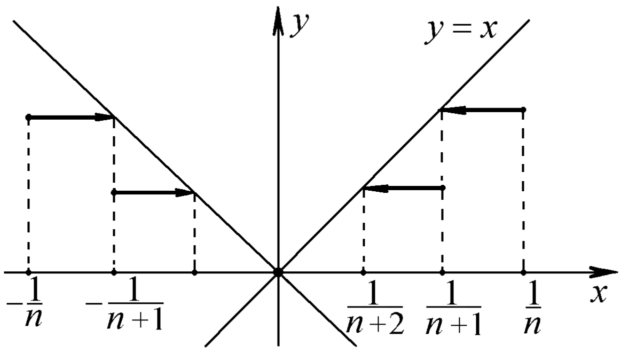

Рис. 5

► Пусть $x_0 = \dfrac{m}{n}$ — рациональное число. Тогда $R(x_0) = \dfrac{1}{n}$. Очевидно, что последовательность рациональных чисел $\left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{pn}\right\}$ сходится к x_0 при $p \to \infty$. Однако $\lim\limits_{p\to\infty} R\left(\dfrac{pm+1}{pn}\right) = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{pn} = 0$, а значит, не выполняется условие непрерывности в точке.

Пусть x_0 — иррациональное число. Тогда $R(x_0) = 0$. Если x_n — последовательность иррациональных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $R(x_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R(x_n) = 0$. Если $\left\{\dfrac{m_k}{n_k}\right\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0, то $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} R(x_n) = \lim_{k\to\infty} R\left(\frac{m_k}{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0.$$

Значит, по определению предела по Гейне (см. задачу 2.11) $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$ и функция непрерывна в иррациональных точках. ■

2.26. Функция $f(x) = \dfrac{1}{n+1}$, при $x \in \left(\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$; $f(0) = 0$; $f(-x) = f(x)$, $x \in [-1; 1]$ (см. рис. 5). Является ли $f(x)$ непрерывной в точке $x = 0$?

2.27. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \quad 0 \quad, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывной на $(-\infty; +\infty)$?

2.28. Можно ли доопределить функцию $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ в точке $x = 0$ так, чтобы она стала непрерывной на всей числовой прямой?

$\Diamond$ *Указание.* Положить $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$, предварительно вычислив предел.

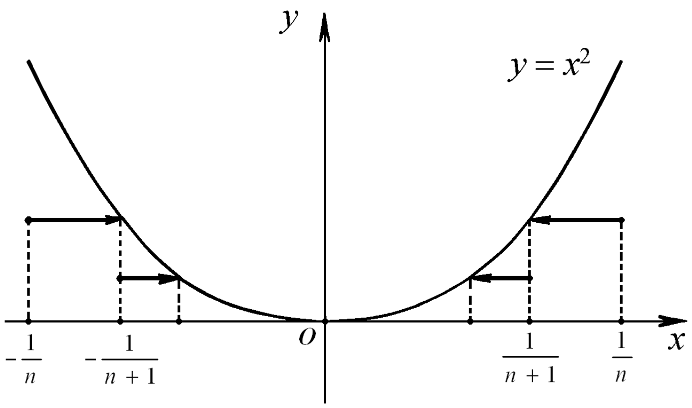

Рис. 6

2.29. $f(x) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ при $x \in \left(\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$; $f(0) = 0$; $f(-x) = f(x)$, $x \in [-1; 1]$ (см. рис. 6). Является ли $f(x)$ непрерывной в точке $x = 0$?

2.30. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x + C, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Как надо выбрать константу C, чтобы $f(x)$ была непрерывной на всей числовой прямой?

2.31. Являются ли непрерывными функции

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad \text{г)}\ \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Теорема 2.2 (первая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда в интервале (a, b) существует точка c, в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$, $c \in (a, b)$.

Теорема 2.3 (вторая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает различные значения: $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Тогда для любого числа C, лежащего в интервале (A, B), существует такая точка c интервала (a, b), что $f(c) = C$.

2.32. Если в условиях первой и второй теорем Больцано–Коши вместо условия непрерывности на отрезке $[a, b]$ потребовать непрерывности лишь на полуинтервале $[a, b)$, останутся ли в силе утверждения теорем? Привести соответствующие примеры.

Теорема 2.4 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C$ для всех $x \in [a, b]$.

Заметим, что отсюда следует существование точных верхней и нижней граней множества значений функции на отрезке $[a, b]$: $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

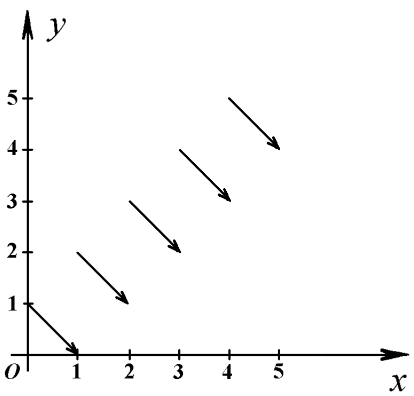

Рис. 7

Теорема 2.5 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней, т. е. на отрезке $[a, b]$ существуют такие x_1, x_2, что $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$, $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$.

2.33. Если в условиях первой и второй теорем Вейерштрасса вместо условия непрерывности на отрезке $[a, b]$ потребовать непрерывности лишь на полуинтервале $[a, b)$, останутся ли в силе утверждения теорем? Привести соответствующие примеры.

Теорема 2.6 (о существовании обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на некотором промежутке X. Тогда на промежутке Y значений этой функции существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, т. е. $g(f(x)) \equiv x$ для всех $x \in X$, $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$, причем $g(y)$ является строго монотонно возрастающей (убывающей) и непрерывной.

2.34. Являются ли условия строгой монотонности и непрерывности необходимыми для существования обратной функции? Привести соответствующие примеры.

$\Diamond$ *Указание.* На рис. 7 изображен график кусочно-монотонной и кусочно-непрерывной функции (имеет точки разрыва первого рода при натуральных x), однако имеющая однозначную обратную функцию, определенную на полуинтервале $[0, +\infty)$. Докажите.

2.35. Привести пример функции, не являющейся кусочно-монотонной, но обладающей однозначной обратной функцией.

► В качестве примера рассмотрим функцию $y = x + D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. 2.2). Эта функция определена на всей числовой прямой Ox, ни в одном интервале не является монотонной и разрывна в каждой точке. Однако у этой функции существует однозначная обратная функция. Действительно, если x — иррациональное число, то $y = x$ и y также иррационально. Значит, на множестве иррациональных точек существует однозначная обратная функция $x = y$. Если x — рациональное число, то $y = x + 1$ и y также рационально. Тем самым, на множестве рациональных точек существует однозначная обратная функция $x = y - 1$. Значит на всей прямой Oy существует однозначная обратная к $x + D(x)$ функция, которая равна $y - D(y)$. ■

3 Производная

Определение 3.1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3.1. Найти по определению производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \sin x$ в точке $x = x_0$.

► Пусть Δx — приращение аргумента, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x \cos x_0 + \sin x_0 \cos \Delta x - \sin x_0}{\Delta x} =$$
$$= \cos x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \sin x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \cos x_0 + \sin x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(\Delta x)^2}{2\Delta x} = \cos x_0.$$

■

б) $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$.

в) $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = x_0 > 0$.

г) $f(x) = \ln x$ в точке $x = x_0 > 0$.

► Пусть Δx — приращение аргумента, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln x_0 \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right) - \ln x_0}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln x_0 + \ln \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0 \Delta x} = \frac{1}{x_0}.$$

■

3.2. Обязательно ли будет не иметь производной в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x) + g(x)$, если

а) функция $f(x)$ имеет в x_0 производную, а функция $g(x)$ не имеет в x_0 производной;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют в x_0 производных?

Привести соответствующие примеры.

3.3. Обязательно ли будет не иметь производной в данной точке x_0 произведение двух функций $f(x)g(x)$, если

а) функция $f(x)$ имеет в x_0 производную, а функция $g(x)$ не имеет в x_0 производной;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют в x_0 производных?

Привести соответствующие примеры.

◊ *Указание.* В точке $x = 0$ рассмотреть: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = g(x) = |x|$.

3.4. Обязательно ли не имеет производной в данной точке x_0 сложная функция $f(g(x))$, если

а) функция $f(u)$ имеет в $u_0 = g(x_0)$ производную, а функция $g(x)$ не имеет в x_0 производной;

б) функция $f(u)$ не имеет в $u_0 = g(x_0)$ производной, а функция $g(x)$ имеет в x_0 производную;

в) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют в производных в соответствующих точках?

Привести соответствующие примеры.

◊ *Указание.* В точке $x = 0$ рассмотреть: **а)** $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$; **б)** $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$; **в)** $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

3.5. Если функция $f(x)$ дифференцируема на конечном интервале $(a; b)$ за исключением точки $c \in (a; b)$ и имеет разрыв в этой точке, то может ли

а) существовать конечный $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$;

б) существовать $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \infty$?

3.6. Если функция $f(x)$ дифференцируема на конечном интервале $(a; b)$ за исключением точки $c \in (a; b)$ и существует $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, то обязательно ли

а) $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to c} |f'(x)| = +\infty$?

◊ *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

3.7. Если функция $f(x)$ дифференцируема на конечном интервале $(a; b)$ за исключением точки $c \in (a; b)$ и существует $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$?

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

3.8. Если функция $f(x)$ дифференцируема на луче $(a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то обязательно ли существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$.

3.9. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема на луче $(a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Обязательно ли существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = \cos(\ln x)$.

3.10. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

3.11. Пусть $\varphi(x) = o(x)$ при $x \to 0$ и $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Доказать, что $\varphi(x)$ имеет производную в точке $x = 0$, равную нулю.

3.12. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции является нечетной функцией, а производная нечетной дифференцируемой функции является четной функцией.

3.13. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции является также периодической функцией с тем же периодом.

3.14. Доказать, что функция (см. рис. 4)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не имеет производную в точке $x_0 = 0$.

► В точке $x_0 = 0$ имеем $\Delta y = \Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}$. Значит $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \sin\dfrac{1}{\Delta x}$ предела при $\Delta x \to 0$ не имеет (см. задачу 2.12). ■

3.15. Существуют ли $f'(0)$ и $f''(0)$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

► При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. При $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(2 \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \right)$$

не существует. ■

3.16. Доказать, что для $f(x)$ из задачи 2.26 $f'(0)$ не существует (см. рис. 5).

◊ *Указание.* Рассмотреть $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ для $x_n = \frac{1}{n}$ и $x_n' = -\frac{1}{n}$.

3.17. Существует ли $f'(0)$ для $f(x)$ из задачи 2.29 (см. рис. 6)?

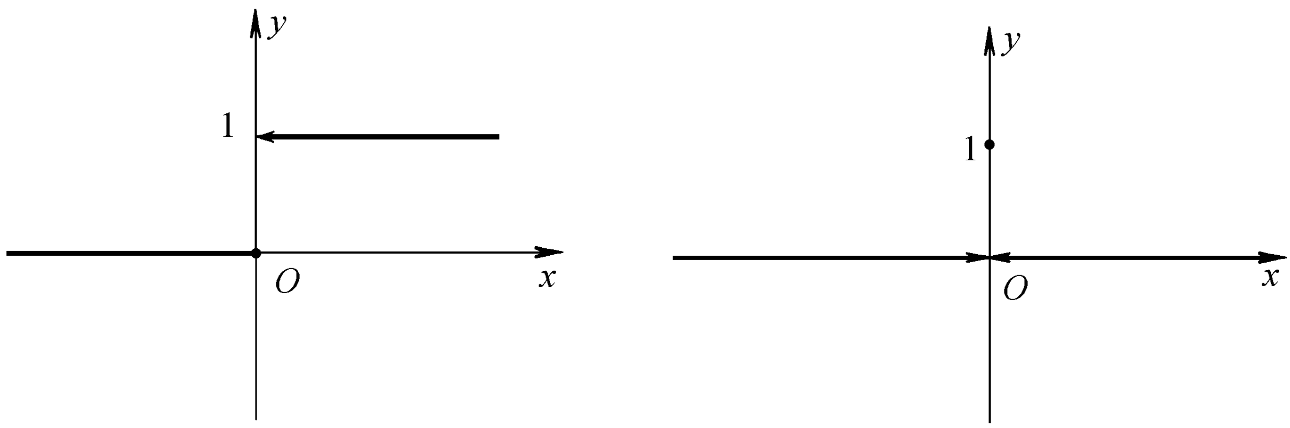

Рис. 8

3.18. Может ли функция $f(x)$ иметь производную (см. рис. 8)

а) $f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

б) $f'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

3.19. Может ли непрерывная в окрестности точки $x = 0$ функция иметь производную $f'(x)$ для $x \neq 0$, но $f'(0)$ не существует, причем (см. рис. 9, 10, 11)

а) $f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$;

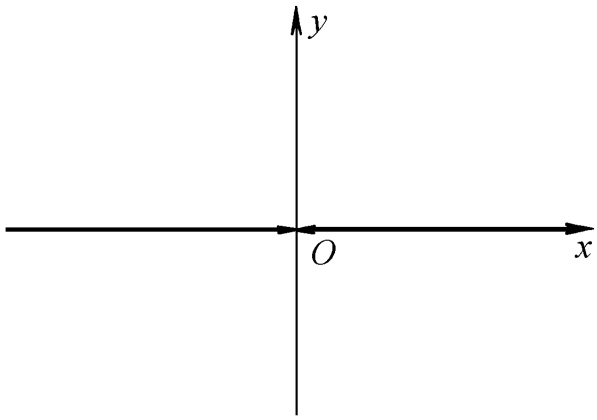

Рис. 9

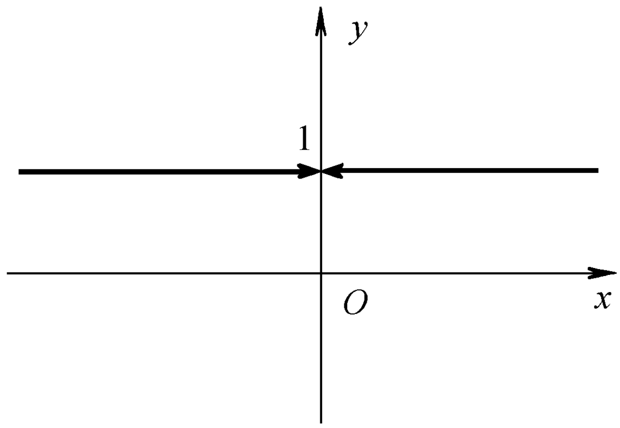

Рис. 10

б) $f'(x) = 1 \quad \forall x \neq 0$;

в) $f'(x) = x + 1 \quad \forall x \neq 0$.

3.20. Имеют ли производные в точке $x = 0$ следующие функции:

а) $y = x\,|\sin x|$;

б) $y = x \cdot \left|x^3\right|$.

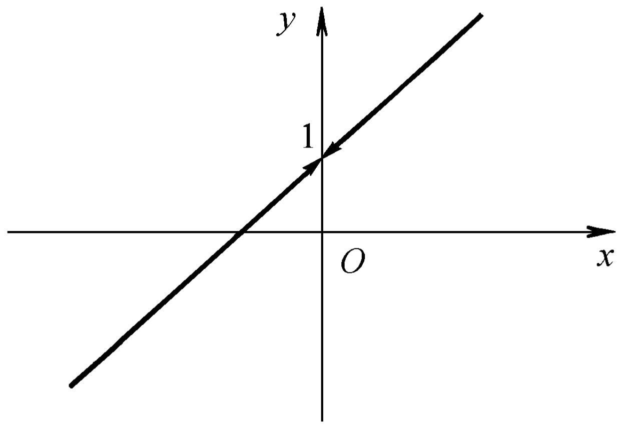

Рис. 11

3.21. Известно, что $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f(\varphi(x))$ имеет в точке $x = 0$ производную, равную нулю.

3.22. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x = 0$. Найти $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$.

> **Теорема 3.1 (лемма к теореме Ферма).** Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале X и имеет в точке $x_0 \in X$ конечную производную $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что $0 < x - x_0 < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), а для всех $x \in X$ таких, что $0 < x_0 - x < \delta$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Необходимо заметить, что при рассмотрении непрерывно дифференцируемых функций, использование этой леммы приводит к выводу о монотонности функции в некоторой окрестности точки x_0. Однако, в общем случае это далеко не так.

3.23. Привести пример функции, имеющей конечную производную в точке, но не являющейся монотонной ни в какой окрестности этой точки.

► Рассмотрим функцию $f(x) = x^2\left(D(x) - \dfrac{1}{2}\right) + x$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. 2.2). Убедимся, что в точке $x = 0$ функция $x^2 D(x)$ является дифференцируемой. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\Delta x)^2 D(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \Delta x D(\Delta x) = 0,$$

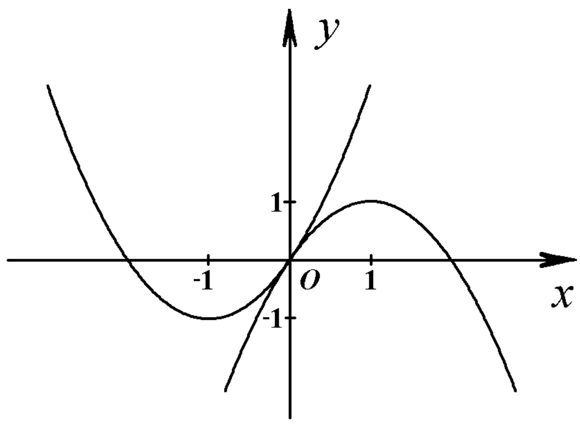

Рис. 12

поскольку функция Дирихле ограничена. Нетрудно убедится, что в остальных точках $x^2D(x)$ разрывна, и, значит, недифференцируема. Тем самым $f(x)$ дифференцируема лишь в точке $x=0$ и

$$f'(0) = \left(x^2D(x) - \frac{1}{2}x^2 + x\right)'\bigg|_{x=0} = \left((x^2D(x))' - x + 1\right)\bigg|_{x=0} = 1.$$

Значит, все условия леммы выполнены, но, в чем легко убедиться, функция не является монотонной ни в какой окрестности точки $x=0$.

Утверждение леммы, конечно же, остается верным. При рациональных значениях x точки графика $f(x)$ лежат на параболе $y = \frac{1}{2}x^2 + x$, а при иррациональных — на параболе $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ (см. рис. 12). Очевидно, что при $0 < x < 2$ обе ветви параболы лежат выше оси Ox, а при $-2 < x < 0$ — ниже оси. Так как $f(0) = 0$, то утверждение леммы выполняется. ■

Теорема 3.2 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале X и в точке $x_0 \in X$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Если в этой точке функция дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$.

3.24. Привести пример функции, дифференцируемой лишь в точке своего минимума (максимума).

► Рассмотрим функцию $f(x) = x^2(D(x)+1)$, где $D(x)$ — функция Дирихле из задачи 2.2. Из задачи 3.23 мы знаем, что $x^2D(x)$ дифференцируема лишь в точке $x=0$ и её производная равна 0. В остальных точках она разрывна и, значит, недифференцируема. Это же верно и для $f(x)$. Точки её графика лежат на параболе $y = 2x^2$, если x рационально, и на параболе $y = x^2$, если x иррационально. Обе эти параболы имеют минимум в точке $x=0$, значит и $f(x)$ имеет в этой точке минимум. ■

3.25. Верно ли утверждение, обратное к теореме Ферма? То есть, если у функции производная обращается в ноль в некоторой точке, значит в этой точке находится минимум или максимум функции.

◊ *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = x^3$ в точке $x = 0$. Другой пример дает функция $x^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (сравнить с 3.23).

Теорема 3.3 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. имеет производную $f'(x)$ в каждой точке интервала (a, b);
3. на концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда в интервале (a, b) найдется такая точка c, что $f'(c) = 0$.

3.26. Будет ли верна теорема Ролля, если потребовать непрерывности функции лишь на полуинтервале $[a, b)$? Привести пример.

3.27. Будет ли верна теорема Ролля, если функция не имеет производной в одной точке интервала (a, b)? Привести пример.

3.28. Какое условие теоремы Ролля нарушено для функции

а) $y = |x|$;

б) $y = x$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2}$?

Теорема 3.4 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, и существует производная $f'(x)$ в каждой точке интервала (a, b). Тогда в интервале (a, b) существует такая точка c, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема 3.5 (Коши). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют производные $f'(x)$, $g'(x)$ на интервале (a, b), при этом $g'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Тогда в интервале (a, b) существует такая точка c, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.29. Известно, что $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$, дифференцируема на $(0; 1)$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f'(x) \geqslant -2$. Доказать, что $f(x)$ — линейная функция.

◊ *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x) = f(x) + 2x - 4$.

► Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 2x - 4$. Так как $g'(x) = f'(x) + 2 \geqslant 0$ $\forall x \in (0; 1)$, то $g(x)$ не убывает на $[0; 1]$. Так как $g(0) = f(0) - 4 = 0$ и $g(1) = f(1) + 2 - 4 = 0$, то $g(x) \equiv 0$ на $[0; 1]$. Следовательно, $f(x) + 2x - 4 = 0$ $\forall x \in [0; 1]$, откуда $f(x) = -2x + 4$ $\forall x \in [0; 1]$, т. е. $f(x)$ — линейная функция. ■

3.30. Доказать, что если существуют $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a-} f'(x) = A$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то существует $f'(a) = A$.

◊ *Указание.* Применить теорему Лагранжа.

3.31. Будет ли верна теорема Лагранжа, если потребовать непрерывности функции лишь на полуинтервале $[a, b)$? Привести пример.

3.32. Будет ли верна теорема Лагранжа, если функция не имеет производной в одной точке интервала (a, b)? Привести пример.

3.33. Доказать свойство Дарбу: если функция дифференцируема на $[a; b]$, то её производная, принимая какие-нибудь два значения, принимает и любое промежуточное.

$\Diamond$ *Указание.* Свести задачу к случаю $f'(a) = 0$, $f'(b) > 0$ и применить теорему Лагранжа.

3.34. Привести пример такой недифференцируемой в одной точке интервала (a, b) функции $g(x)$, что заключение теоремы Коши не выполняется.

► Рассмотрим $f(x) = x$ и $g(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 2]$. Все условия теоремы Коши, кроме условия дифференцируемости функции $g(x)$ в точке $x = 0$ выполнены. Однако $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{2 - (-1)}{2 - 1} = 3$, в то же время, как $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = -1$ при $x \in [-1, 0)$ и $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 1$ при $x \in (0, 2]$. ■

3.35. Привести пример функции, которая не имеет максимального значения ни на каком, сколь угодно малом, отрезке.

► Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \text{— рациональное число } \dfrac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{— иррациональное число,} \end{cases}$$

где $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь, m — целое, n — натуральное число. Пусть задан произвольный отрезок $[a, b]$. Выберем любое число $x_0 \in (a, b)$ и любое $C > 0$. В интервале (a, b) лежит лишь конечное число рациональных чисел вида $\dfrac{m}{n}$ с $n \leqslant C$. Тогда существует некоторая проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, целиком лежащая в (a, b) и такая, что в ней нет рациональных чисел со знаменателем не превосходящим C. Значит для всех рациональных точек этой окрестности $f(x) > C$. В силу произвольности выбора числа C, мы доказали локальную неограниченность $f(x)$.

Заметим также, что $f(x)$ является разрывной в любой точке вещественной прямой $\mathbb{R}$. ■

Теорема 3.6 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет конечную производную $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

где остаточный член $o((x - x_0)^n)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ более высокого порядка чем $(x - x_0)^n$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

3.36. Для произвольного натурального n получить разложение функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$.

◊ *Указание.* Воспользоваться результатами задачи 3.22.

3.37. Найти такое значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Проверить существование и найти значения $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$, если

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

► Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то для непрерывности в точке $x = 0$ необходимо положить $a = 1$. Далее, пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o\left(x^2\right) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} o(1) = 0.$$

При $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

следовательно,

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3} + o(1)\right) = -\frac{1}{3}.$$

$$f''(x) = \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\cos x - x\sin x - \cos x)\, x^2 - 2x\,(x\cos x - \sin x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^3\sin x - 2x^2\cos x + 2x\sin x}{x^4} = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}, \quad \forall x \neq 0.$$

$$f'''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\left(x + o\left(x^2\right)\right) - 2x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + 2\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) + \dfrac{x^3}{3}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3 - 2x + x^3 + 2x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} o(1) = 0.$$

$$f'''(x) =$$

$$= \frac{\left(-2x\sin x - x^2\cos x - 2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right)x^3 - \left(-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x\right)3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x}{x^4}, \quad \forall x \neq 0.$$

$$f^{(IV)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 3x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + 6x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 6\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3 + \frac{x^5}{2} + 3x^3 - \frac{x^5}{2} + 6x - 3x^3 + \frac{6x^5}{4!} - 6x + x^3 - \frac{6x^5}{5!} + o\left(x^5\right)}{x^5} =$$

$$= \frac{6}{4!} - \frac{6}{5!} = \frac{6}{4!}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{6\cdot 4}{4!\cdot 5} = \frac{6}{3!\cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

■

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

4 Функции многих переменных

Определение 4.1. Проколотой окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ называется открытый* круг на плоскости с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ радиуса $\delta > 0$

$$\overset{\circ}{U}(M_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что условие $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ эквивалентно условию $0 < |x - x_0)| < \delta_1$, $0 < |y - y_0| < \delta_1$, быть может при некотором другом $\delta_1 > 0$.

Определение 4.2. Число a называется пределом функции $f(x, y)$ при $M \to M_0$ и обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overset{\circ}{U}(M_0) : \forall M \in \overset{\circ}{U}(M_0) \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon.$$

4.1. Доказать, что если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$, $y = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, \varphi(x)) = a$.

4.2. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для $\lim\limits_{y \to y_0} f(\psi(y), y)$.

Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то говорят, что существует *повторный предел* функции $f(x, y)$, который обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$. Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

4.3. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

существуют повторные пределы $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = -1$, в то время как предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

► Для повторных пределов имеем:

$$\lim_{y \to 0} \frac{x - y}{x + y} = \frac{x}{x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} = \frac{-y}{y} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} (-1) = -1.$$

Однако, на прямых $y = kx$ при $k \neq -1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{x - kx}{x + kx} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{1 - k}{1 + k} = \frac{1 - k}{1 + k},$$

получаем различные значения, значит предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует. ■

* Т.е. без границы

4.4. Показать, что для функции

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

повторные пределы существуют и равны между собой: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, в то время как предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

► Для повторных пределов имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Однако,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4} = 0,$$

но

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Значит, предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует. ■

4.5. Показать, что для функции

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

оба повторных предела $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не существуют, тем не менее существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

► Зафиксируем $x \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ не существует (см. задачу 2.12). Но, в силу очевидной оценки $\left|y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |y|$ имеем $\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$. Значит, предел $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не существует, и не существует повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$. Аналогично доказывается, что не существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

С другой стороны, $\forall\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ так, что для всех (x,y): $0 < |x| < \delta$, $0 < |y| < \delta$ верно

$$|f(x,y)| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon,$$

значит, по определению $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. ■

4.6. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует, если

а) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; **б)** $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

в) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **г)** $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{x}$.

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть поведение $f(x,y)$ вдоль прямых $y = kx$. Например, в случае **а)** при $y = kx$ получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2},$$

т. е. пределы функции вдоль различных прямых $y = kx$ различны, чего не может быть, если существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ (см. задачу 4.1).

4.7. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

► Поскольку $(x-y)^2 \geqslant 0$, то $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$ и $x^2-xy+y^2 \geqslant xy$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \dfrac{2}{\varepsilon}$ такое, что для всех (x,y): $|x| > \delta$, $|y| > \delta$ верно

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{xy}\right| \leqslant \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|} < \frac{2}{\delta} = \varepsilon,$$

значит, по определению $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$. ■

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

► Выразим функцию через экспоненту $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Поскольку $x\to\infty$, то $\dfrac{1}{x}\to 0$ и $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{1}{x}$. Значит

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x^2}{x(x+y)}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x}{x+y}} = e^1 = e.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\left|\frac{x}{x+y}-1\right| = \frac{|y|}{|x+y|} \to 0$$

при $x\to\infty$, $y\to a$. ■

Определение 4.3. Функция $f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$ если она определена в некоторой окрестности M_0 и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

4.8. Показать, что функция

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y\neq 0\\ 0, & x=0 \quad \text{или} \quad y=0,\end{cases}$$

разрывна в точках $(0,y)$, $y\neq 0$ и в точках $(x,0)$, $x\neq 0$, но непрерывна в точке $(0,0)$.

4.9. Привести пример разрывной функции двух переменных, являющейся непрерывной по каждой переменной в отдельности.

► Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

При фиксированном $y_0\neq 0$ $\varphi(x)=f(x,y_0)$ является непрерывной функцией аргумента x как частное двух непрерывных функций, при том, что знаменатель дроби не обращается в нуль. При $y_0=0$ функция $\varphi(x)= = f(x,0)\equiv 0$ также, очевидно, непрерывна. Аналогично, является непрерывной функция $\psi(y)=f(x_0,y)$.

Однако, как функция двух переменных $f(x,y)$ разрывна в начале координат $(0,0)$ (см. задачу 4.6). ■

4.10. Доказать, что следующие функции непрерывны в начале координат:

а) $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

◊ *Указание.* $\left|f\left(x,y\right)\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$

б) $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

◊ *Указание.* $\left|f\left(x,y\right)\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{|x|}=|y|,\quad x\neq 0.$

в) $f\left(x,y\right)=\sin\left(x^2+y^2\right).$

◊ *Указание.* $\left|f\left(x,y\right)\right|\leqslant x^2+y^2.$

г) $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}x^2\ln\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

◊ *Указание.* $\left|f\left(x,y\right)\right|=\left|x^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\leqslant\left(x^2+y^2\right)\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right|.$

Определение 4.4. Частными производными функции $z = f(x, y)$ по x и по y в точке (x_0, y_0) называются следующие пределы:

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x};$$

$$z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Определение 4.5. Функция $f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если в некоторой окрестности этой точки выполняется соотношение:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$, A и B - постоянные.

Теорема 4.1 (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 4.2 (о значении частных производных дифференцируемой функции). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то у неё в этой точке существуют обе частные производные, причём $z'_x(x_0, y_0) = A$ и $z'_y(x_0, y_0) = B$, где A и B - постоянные из определения 4.

Теорема 4.3 (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет обе частные производные в окрестности точки (x_0, y_0), которые как функции двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

4.11. Доказать, что условие ([1], стр. 67, опр. 6.6)

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \tag{4.1}$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$, в определении дифференцируемости функции двух переменных, эквивалентно условию

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho = o(\rho), \tag{4.2}$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

► Заметим сначала, что условие $\left\{ \begin{smallmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{smallmatrix} \right.$ эквивалентно условию $\rho \to 0$.

Пусть выполнено условие (4.1). Тогда для $\rho \neq 0$

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = \alpha \Delta x + \beta \Delta y = \left(\frac{\Delta x}{\rho} \cdot \alpha + \frac{\Delta y}{\rho} \cdot \beta \right) \cdot \rho = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho,$$

где $|\varepsilon| \leqslant |\alpha| + |\beta| \to 0$ при $\rho \to 0$.

Пусть теперь выполнено условие (4.2), тогда

$$\varphi = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon\frac{\Delta x}{\rho}\Delta x + \varepsilon\frac{\Delta y}{\rho}\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha = \dfrac{\varepsilon \Delta x}{\rho}$, $\beta = \dfrac{\varepsilon \Delta y}{\rho}$. Так как $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$, то $|\alpha| \leqslant \varepsilon$, $|\beta| \leqslant \varepsilon$, откуда $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$. ■

4.12. Показать, что функция $z = f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет частные производные $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

► По определению частных производных находим

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x\cdot 0|}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot y|}}{y} = 0.$$

Далее, при $x_0 = y_0 = 0$

$$\Delta z = \Delta f(0,0) = \sqrt{|xy|} = \rho\cdot\frac{\sqrt{|xy|}}{\rho} = \varepsilon(x,y)\cdot\rho,$$

где $\varepsilon(x,y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не имеет предела при $x\to 0$, $y\to 0$, так как, например, $\varepsilon(x,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(x\to 0)$, а $\varepsilon(x,0) = 0 \to 0$ $(x\to 0)$.
Очевидно, что $\Delta f(0,0) = \sqrt{|xy|} \to 0$ $(x\to 0, y\to 0)$, откуда следует, что $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$.
Заметим, что при $x>0$, $y>0$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

неограниченна в любой окрестности точки $(0,0)$, так как, например, при $y=\sqrt{x}$, $x>0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{y}{x}} = +\infty$. ■

4.13. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0,\end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0,0)$ частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, которые разрывны в точке $(0,0)$ и неограниченны в любой окрестности этой точки, тем не менее эта функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

► Используя формулы и правила дифференцирования
при $x^2+y^2\neq 0$ находим:

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

При $x_n = y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$, $n\in\mathbb{N}$, получим $f'_x(x_n,y_n) = -2\sqrt{n\pi} \to -\infty$ $(n\to\infty)$, при этом $x_n\to 0, y_n\to 0$, так что $f'_x(x_n,y_n)$ неограниченна в любой окрестности точки $(0,0)$ и разрывна в точке $(0,0)$. Аналогичное утверждение имеет место для f'_y (для той же последовательности точек (x_n,y_n)).

Далее, исходя из определения

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x} = 0.$$

Аналогично $f'_y(0,0) = 0$.

Так как $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, то

$$\Delta z = \Delta f(0,0) = \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \rho\cdot\varepsilon(x,y),$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\varepsilon(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = \rho\cdot\sin\dfrac{1}{\rho^2} \to 0$ $(\rho\to 0)$, значит, $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$. ■

4.14. Доказать, что

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

разрывна в точке $(0,0)$, но имеет $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$.

◊ *Указание.* Рассмотреть последовательность $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^3}\right)\to(0;0)$ $(n\to\infty)$ и $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ вычислить исходя из определения.

4.15. Показать, что

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

непрерывна и имеет ограниченные частные производные в окрестности точки $(0,0)$, однако недифференцируема в точке $(0,0)$.

◊ *Указание.* Воспользовавшись неравенством $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$, вычислить $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ и убедиться, что $\varepsilon = \dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ не является бесконечно малой при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$.

4.16. Дифференцируема ли в точке $(0,0)$ функция

$$z = f(x,y) = \begin{cases} 0, & x=0,\\ 0, & y=0,\\ 1, & \text{в остальных точках}, \end{cases}$$

(см. рис. 13). Существуют ли f'_x ,f'_y в точке $(0,0)$?

4.17. Исследовать на дифференцируемость функции

а) $f(x,y) = |x|\,y$;

б) $f(x,y) = |xy|$.

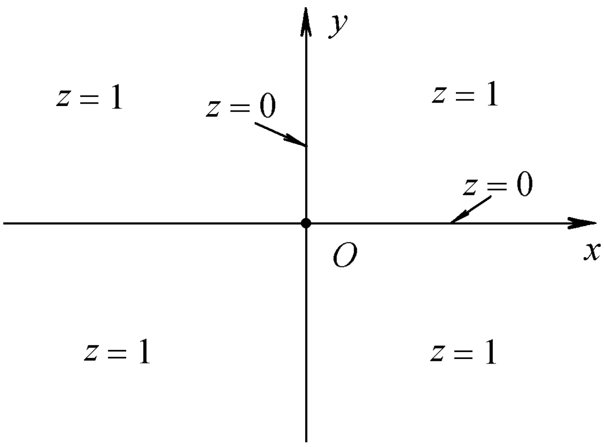

Рис. 13

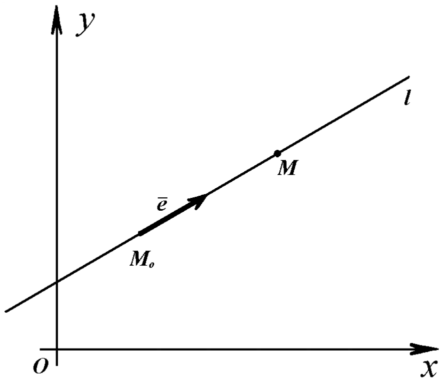

Рис. 14

Пусть заданы точка $M_0 \in \mathbb{R}^2$ и вектор $\vec{e}$. Проведем через M_0 единственным образом определенную прямую l с направляющим вектором $\vec{e}$. Будем рассматривать точки M, лежащие на этой прямой (см. рис. 14). Обозначим через M_0M расстояние между точками M_0 и M, взятое со знаком, где знак "плюс" берется, если вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{e}$ коллинеарны, и "минус" — в противном случае.

Определение 4.6. Производной функции $z = f(M)$ по направлению $\vec{e}$ в точке M_0 называется выражение

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in l}} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}.$$

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0 и вектор $\vec{e} = (e_x, e_y)$ имеет единичную длину, т. е. $e_x^2 + e_y^2 = 1$, то производная по направлению может быть вычислена по формуле

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = z'_x(M_0) \cdot e_x + z'_y(M_0) \cdot e_y.$$

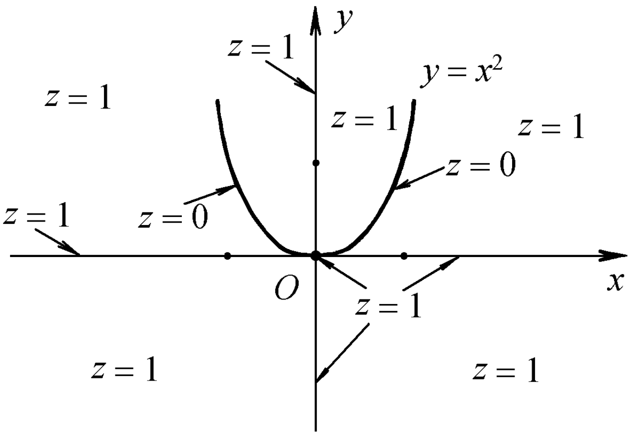

Рис. 15

4.18. Показать, что функция (см. рис. 15)

$$z = f\,(x, y) = \begin{cases} 0, & y = x^2, x \neq 0, \\ 1, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

недифференцируема в точке $(0, 0)$, однако имеет частные производные и производные по любому направлению в этой точке.

◊ *Указание.* Производные вычислить по определению, показать, что функция разрывна в точке $(0, 0)$.

4.19. Показать, что функции

а) $f\,(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^3, x \neq 0, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$

б) $f\,(x, y) = \begin{cases} 1, & y = \pm x^2, x \neq 0, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$

недифференцируемы в точке $(0, 0)$, но имеют f'_x, f'_y и $f'_{\vec{e}}$ в этой точке по любому направлению.

Теорема 4.4 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных). Пусть функция $f(x, y)$ и все её производные первого и второго порядка непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, т. е. $f \in C^2(U(M_0))$, и выполняются условия:

1. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$;
2. $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

Тогда при $\Delta > 0$ функция имеет в точке M_0 локальный экстремум, причем максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ и минимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Если $\Delta < 0$, то у $f(x, y)$ в точке M_0 локального экстремума нет.

Заметим, что при $\Delta = 0$ признак не дает ответа на поставленный вопрос, и необходимо дополнительное исследование.

4.20. Пусть при выполненных условиях предыдущей теоремы $\Delta > 0$. Может ли $f''_{xx}(x_0, y_0) = 0$?

► Воспользоваться теоремой о равенстве смешанных производных (см., например, [3], стр. 370). ■

4.21. Исследовать функцию $z = xy^2$ на экстремум.

► Найдем стационарные точки: $z'_x = y^2$, $z'_y = 2xy$,

$$\begin{cases} y^2 = 0, \\ 2xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \\ x \quad \text{любое}. \end{cases}$$

Таким образом, стационарными точками для функции являются точки вида $(x; 0)$, т.е. все точки на оси Ox. В этих точках

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, теорему о достаточных условиях локального экстремума применить нельзя, и требуется дополнительное исследование.

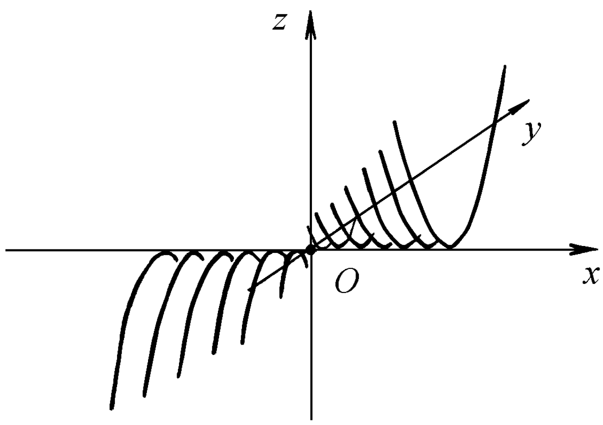

Рис. 16

Сечения поверхности $z = xy^2$ при $x > 0$ представляют из себя параболы ветвями вверх и при $x < 0$ — параболы ветвями вниз (см. рис. 16). Поэтому (см. также схему знаков значений функции на рис. 17) точки $(x; 0)$, $x > 0$ — точки нестрогого локального минимума, а точки $(x; 0)$, $x < 0$ — точки нестрогого локального максимума.

Из схемы знаков значений функции видно, что в любой окрестности точки $(0; 0)$ найдутся как точки, в которых $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$, так и точки, в которых $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$. Следовательно, точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума. ■

4.22. Исследовать функцию $z = (x - y)\, y^2$ на экстремум.

4.23. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4 - 2y^2x^2 + y^3$ на экстремум.

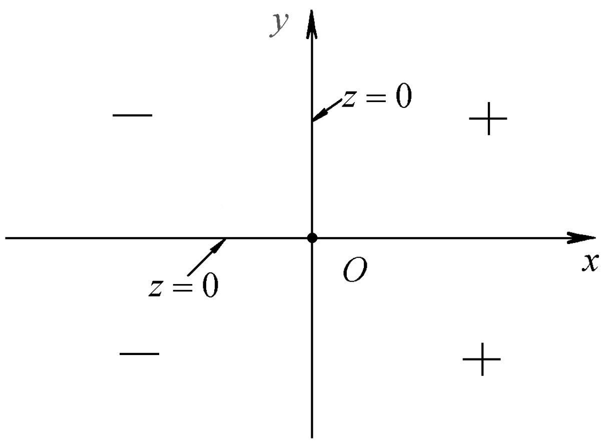

Рис. 17

4.24. Исследовать функцию $z = x^2 + xy^2 - 3x + 2y$ на экстремум.

◊ *Указание.* Имеются две стационарные точки $(1, -1)$ и $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Для исследования в точке $(1, -1)$ перейти к новым координатам с помощью преобразования параллельного переноса:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + 1, \\ y = \tilde{y} - 1, \\ z = \tilde{z} - 3. \end{cases}$$

В новых координатах $\tilde{z} = (\tilde{x} - \tilde{y})^2 + \tilde{x}\tilde{y}^2$ и точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума. Следовательно и $(1, -1)$ в исходных координатах также не является точкой экстремума.

5 Первообразная, определенный интеграл

Определение 5.1. Непрерывная функция $F(x)$ называется (точной) первообразной функции $f(x)$ на промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется $F'(x) = f(x)$.

5.1. Для всякой ли функции существует первообразная? Привести примеры.

► Не для всякой. Действительно, рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

На интервале $(0;1)$ первообразной для $\operatorname{sign} x$ будет функция $F(x) = x + C_1$, где C_1 — произвольная константа. На интервале $(-1;0)$ — функция $F(x) = -x + C_2$. По определению первообразной $F(x)$ должна быть непрерывной функцией. Рассмотрим поведение $F(x)$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = C_2, \quad \lim_{x\to 0+} F(x) = C_1.$$

Из условия непрерывности получаем $C_1 = C_2 = C$. Т.е. на множестве $(-1;0)\cup(0;1)$ первообразной для $\operatorname{sign} x$ служит

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & x > 0, \\ C, & x = 0, \\ -x + C, & x < 0. \end{cases}$$

Однако ни при каком выборе константы C функция $F(x)$ не является дифференцируемой в точке $x = 0$, значит, на интервале $(-1;1)$ у функции $\operatorname{sign} x$ не существует первообразной.

Утверждать существование первообразной можно лишь для непрерывных функций. ■

5.2. Найти первообразную для функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

► При $x \geqslant 0$, $e^{|x|} = e^x$ и $F(x) = e^x$ — одна из первообразных. При $x < 0$ первообразной будет $F(x) = -e^{-x} + C$ для $\forall\ C$. Так как первообразная по определению должна быть непрерывной, то

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = 1 = \lim_{x\to 0+} F(x) = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Таким образом, функция

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ -e^{-x} + 2, & x < 0, \end{cases}$$

является непрерывной на $\mathbb{R}$ и на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ имеем $F'(x) = e^{|x|}$. Докажем, что эта функция является первообразной для $f(x)$ на всей числовой прямой. Для этого достаточно проверить, что $F'(0) = e^0 = 1$. Рассмотрим приращение $\Delta x > 0$:

$$F'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Если же $\Delta x < 0$, то

$$F'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-e^{-\Delta x} + 2 - 1}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом $F'_+(0) = F'_-(0) = F'(0) = 1$. ■

5.3. Найти первообразную для следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ x + 1, & x < 0; \end{cases}$ **б)** $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geqslant 1, \\ x - 1, & x < 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ -x^2, & x < 0; \end{cases}$ **г)** $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 0; \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$

Заметим, что если на интервале X, конечном или бесконечном, у функции $f(x)$ есть первообразные $F(x)$ и $G(x)$, то $F(x) = G(x)+C$, где C — некоторая константа. Однако здесь существенно, что речь идет об интервале. Если мы рассмотрим множества, отличные от интервалов, то утверждение может и не быть верным.

5.4. Привести пример функции $f(x)$ и множества X, на котором она задана, таких, что первообразными для $f(x)$ являются не только функции вида $F(x) + C$.

► Рассмотрим множество $X = \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Пусть на X задана функция $f(x)$ и её первообразная $F(x)$: $F'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1, & x > 0; \\ C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $(F(x) + \varphi(x))' = f(x)$ на X. Обратно, любая первообразная на этом множестве может быть представлена в таком виде. ■

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Если $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Неопределенный интеграл обладает следующими основными свойствами:

1. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$, где α, β — постоянные.

5.5. Найти $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

► Подынтегральная функция непрерывна на всей числовой оси, значит первообразная должна быть непрерывна на $\mathbb{R}$. Преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x}.$$

Последнее равенство справедливо на каждом интервале $n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, n — произвольное целое число. Продолжим исследование на каждом таком интервале:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x} \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C_n,$$

где константа C_n зависит от выбора интервала $\left(n\pi - \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$. Из непрерывности первообразной следует, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi-0} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi+0} F(x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}.$$

Отсюда мы получаем соотношение, связывающее константы C_n и C_{n+1}: $C_{n+1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + C_n$ или

$$C_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_n = 2\frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_{n-1} = 3\frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_{n-3} = \ldots = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} + C_0.$$

Обозначим произвольную константу C_0 через C и заметим, что $n < \dfrac{2x+\pi}{2\pi} < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. А это значит, что $n = \left[\dfrac{2x+\pi}{2\pi}\right]$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Следовательно

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right] + C,$$

при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Здесь C — произвольная константа, а значения в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ определяются по непрерывности $F\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} F(x)$. ■

Теорема 5.1 (о замене переменной в неопределенном интеграле). Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на интервале X и $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на интервале Y функция, причем $\varphi(t) \in X$ $\forall t \in Y$, то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.1}$$

5.6. Являются ли условия теоремы о замене переменной необходимыми для выполнения равенства 5.1?

► Эти условия являются достаточными, но избыточными. Рассмотрим следующий пример. Функции $f(x) = 3x^2$, $\varphi(t) = \sqrt[3]{t}$ определены для всех действительных чисел, кроме того, $\int f(x)\,dx = x^3 + C$. Рассмотрим функцию $f(\varphi(t))\varphi'(t) = 3(\sqrt[3]{t})^2 \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{t})^2} = 1$, она имеет первообразную t. Но и $F(\varphi(t)) = (\sqrt[3]{t})^3 = t$. Тем самым формула замены переменной для этих функций справедлива на всей числовой оси. Однако, функция $\varphi(t) = \sqrt[3]{t}$ недифференцируема при $t = 0$. ■

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разбиением T отрезка $[a;b]$ называется конечное множество точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Назовем диаметром разбиения T число $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$. На каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}; x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k и образуем интегральную сумму $\sigma_T = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Определение 5.3. Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a;b]$, если для любой последовательности разбиений $\{T_n\}$ таких, что $\lambda(T_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и любом выборе точек ξ_k соответствующая последовательность интегральных сумм имеет один и тот же предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = I$. Число I называется интегралом (Римана) от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Класс функций, интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a;b]$, обозначается $R[a;b]$.

5.7. Привести пример неинтегрируемой на отрезке $[0;1]$ функции.

► Рассмотрим на $[0;1]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ не существует, т. к. функция неограниченна на отрезке $[0;1]$. Действительно, при любом разбиении отрезка $[0;1]$ на отрезке $[x_0;x_1]$, здесь $x_0=0$, существует точка ξ_1, в которой значение функции больше любого наперед заданного числа. Значит, и интегральную сумму, вне зависимости от выбора других точек ξ_k, можно сделать сколь угодно большой. ■

Задача 5.7 иллюстрирует следующее необходимое условие интегрируемости функции на отрезке:

Теорема 5.2 (необходимое условие интегрируемости на отрезке). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.

5.8. Привести пример ограниченной функции, неинтегрируемой на отрезке $[0;1]$.

► Рассмотрим функцию Дирихле из задачи 2.20:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$$

Каково бы ни было разбиение T отрезка $[a;b]$, в любом отрезке разбиения $[x_{k-1};x_k]$ найдется рациональная точка ξ_k. При таком выборе точек, интегральная сумма будет равна:

$$\sigma_T(D)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=x_1-x_0+x_2-x_1+\ldots+x_n-x_{n-1}=x_n-x_0=b-a.$$

С другой стороны, если в каждом отрезке разбиения выбирать только иррациональные точки, то интегральная сумма будет равна нулю. Значит, предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю не существует. ■

5.9. Интегрируема ли по Риману на $[-1;1]$ функция, имеет ли $f(x)$ точную первообразную?

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

в) $f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.10. Показать, что

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

дифференцируема на всей числовой прямой, но $F'(x)$ неинтегрируема на $[-1;1]$.

◊ *Указание.* $F'(x)$ неограниченна на $[-1;1]$. Задача 5.10 дает пример функции $f(x)=F'(x)$, имеющей первообразную на отрезке, но неинтегрируемой (по Риману) на нём.

5.11. Привести пример неинтегрируемой по Риману на $[0;1]$ функции, квадрат которой интегрируемая по Риману на $[0;1]$ функция.

Определение 5.4. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры 0, если $\forall\, \varepsilon > 0$ существует такая, не более чем счетная,* система $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ интервалов $J_n = (\alpha_n; \beta_n)$, что

1. $\forall a \in M\ \exists\, n_0$: $a \in J_{n_0}$, т. е. $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ является покрытием множества M;
2. сумма длин интервалов J_n меньше ε, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

Пустое множество $\varnothing$ мы считаем по определению множеством меры 0.

5.12. Доказать, что конечное множество точек вещественной прямой $\{x_1, \ldots, x_n\}$ является множеством меры 0.

► Для каждой точки x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим интервал $J_k = (x_k - \delta, x_k + \delta)$, где $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2n}$. Тогда, для любого k имеем $x_k \in J_k$ и

$$\sum_{k=1}^{n} |J_k| = \sum_{k=1}^{n} (x_k + \delta - x_k + \delta) = \sum_{k=1}^{n} 2\delta < 2n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. ■

5.13. Доказать, что любая последовательность точек вещественной прямой $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множеством меры 0.

► Для каждой точки x_n, $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим интервал $J_n = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$, где $\delta_n < \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}$. Тогда, объединение интервалов J_n покрывает множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + \delta_n - x_n + \delta_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = 2 \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма бесконечной геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ равна 1. ■

5.14. Привести пример множества на числовой прямой $\mathbb{R}$, не являющегося множеством меры 0.

◊ *Указание.* Рассмотреть отрезок $(0;1)$ или интервал $[0;1]$.

Теорема 5.3 (критерий Лебега интегрируемости функции на отрезке). Ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва является множеством меры 0.

Согласно теореме Лебега классу интегрируемых по Риману функций принадлежат:

1. непрерывные на отрезке функции;
2. ограниченные кусочно-непрерывные на отрезке функции, т. е. функции, непрерывные на отрезке всюду, кроме, быть может, конечного множества точек;
3. монотонные на отрезке функции.

---

* Т. е. либо конечная, либо счетная.

5.15. Доказать, что функция Римана (см. 2.3)

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если}\, x \text{— рациональное число}\, \dfrac{m}{n}, \\ 0, & \text{если}\, x \text{— иррациональное число}, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0; 1]$.

► В задаче 2.25 было доказано, что функция $R(x)$ непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных. Для того, чтобы воспользоваться критерием Лебега интегрируемости функции на отрезке, докажем, что множество рациональных точек отрезка $[0; 1]$ счетно. Для этого рассмотрим рациональное число $\dfrac{m}{n} \in [0; 1]$, где m — целое положительное, n — натуральное число. Назовем число $h = m + n$ высотой рационального числа $\dfrac{m}{n}$. Будем нумеровать рациональные числа отрезка $[0; 1]$ натуральными числами $1, 2, \ldots$ по возрастанию высоты, т. е. сначала занумеруем все числа высоты $h = 1, 2, 3, 4$. Это рациональные числа $0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$. Поставим им в соответствие натуральные числа $1, 2, 3, 4$. Затем занумеруем рациональные числа высоты 5. Это рациональные числа $\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}$. Поставим им в соответствие натуральные числа $5, 6$. И продолжим этот процесс. Ясно, что при этом мы установили взаимно однозначное соответствие между рациональными числами отрезка $[0; 1]$ и всеми натуральными числами $\mathbb{N}$. ■

5.16. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0; 1]$.

◊ *Указание.* Доказать, что множество точек разрыва $f(x)$ является счетным, воспользоваться результатом задачи 5.13 и критерием Лебега интегрируемости функции на отрезке.

5.17. Вычислить следующие интегралы исходя из определения интеграла Римана:

а) $\int\limits_{-1}^{4} (1 + x)dx$;

► Функция $(1 + x)$ непрерывна на $[-1; 4]$, следовательно, интегрируема по Риману на $[-1; 4]$. Поэтому для вычисления интеграла достаточно выбрать удобную последовательность разбиений отрезка с отмеченными точками, предел интегральных сумм для которых легко вычисляется.
Возьмем $x_i = -4 + \dfrac{(i+1)}{n}$, $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = 1, ..., n$. Тогда

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i + \xi_i \Delta x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} = (x_n - x_0) + \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = (4 + 1) + \frac{16 - 1}{2} = 12,5,$$

и $\int\limits_{-1}^{4} (1 + x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 12,5.$ ■

б) $\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{x^2}$.

$\Diamond$ *Указание.* Для произвольного разбиения $T: x_0 = 1 < x_1 < \ldots < x_n = 3$ взять $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$.

5.18. Привести пример функции, определенной на $[0;1]$, непрерывной на $(0;1)$, и неинтегрируемой по Риману на $[0;1]$.

Определение 5.5. Если $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, то $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 5.4 (об интеграле с переменным верхним пределом). Если $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ является непрерывной на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемой в каждой точке непрерывности функции $f(x)$, причем $F'(x) = f(x)$.

Теорема 5.5 (Ньютона–Лейбница). Если $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

5.19. Пусть интегрируемая на $[a;b]$ функция f имеет в точке $x_0 \in (a;b)$ неустранимый разрыв первого рода и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Доказать, что F не является дифференцируемой в точке x_0.

5.20. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

интегрируема на $[-1;1]$ и $F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)dt$ дифференцируема на $(-1;1)$. Найти $F'(0)$.

Теорема 5.6 (об интегрируемости сложной функции). Пусть $f(u)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[\alpha;\beta]$ непрерывную производную. Пусть, далее, $\varphi(x) \in [a;b]$ $\forall x \in [\alpha;\beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(u)\,du = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

5.21. Можно ли условие непрерывности функции $f(x)$ на $[a;b]$ заменить условием интегрируемости?

► В общем случае нельзя. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

разрывную, но интегрируемую на отрезке $[0;1]$. В качестве $\varphi(t)$ рассмотрим функцию Римана (см. задачу 2.25). В задаче 5.15 мы показали, что она является интегрируемой при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Однако, их суперпозиция $f(\varphi(t))$ равна функции Дирихле, и, значит, неинтегрируема (см. задачу 5.8). ■

Теорема 5.7 (о среднем). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ заданы на отрезке $[a;b]$ и выполняются следующие условия:

1. $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$;
2. $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$;
3. $g(x)$ является на $[a;b]$ неотрицательной (неположительной).

Тогда найдется такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

5.22. Можно ли в теореме о среднем исключить условие 3?

► Вообще говоря, нет. Рассмотрим функции $f(x) = x$ и

$$g(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & 0 < x, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

на отрезке $[-1;1]$. Функция $g(x) = \operatorname{sign} x$ ограничена и имеет разрыв только в точке $x = 0$, поэтому интегрируема. Функция $f(x) = x$ — непрерывная и, значит, интегрируемая. Таким образом все условия теоремы о среднем, кроме условия 3, выполнены. Однако

$$\int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^1 |x|\,dx = 1, \quad \int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^1 \operatorname{sign} x\,dx = 0,$$

и равенство $\int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx$ не выполняется ни при каком значении $c \in [-1;1]$. ■

5.23. Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x + \frac{1}{2}$. На отрезке $[-3;1]$ нет такой точки c, что

$$\int\limits_{-3}^1 f(x)\,dx = f(c)\,(1 - (-3)),$$

так как $\int\limits_{-3}^1 f(x)\,dx = 0$, а функция $f(x)$ не принимает нулевого значения. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

5.24. Определить знаки следующих определенных интегралов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;

► Доопределим по непрерывности функцию $\frac{\sin x}{x}$ единицей при $x = 0$. Имеем

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} d(x-\pi) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_0^{\pi} \frac{-\sin t}{t+\pi} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x+\pi} \right) dx = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x+\pi)} dx \geqslant \pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x+\pi} dx.$$

Применяя теорему о среднем и интегрируя неравенство $\frac{1}{x+\pi} > \frac{1}{2\pi}$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ получим при некотором $c \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$I \geqslant \pi \frac{\sin c}{c} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{x+\pi} \geqslant \pi \frac{\sin c}{c} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dx \geqslant \pi \frac{\sin c}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} > 0.$$

■

б) $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx$; **в)** $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx$; **г)** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$.

5.25. Показать, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует, вообще говоря, интегрируемость $f(x)$.

◊ *Указание.* Рассмотреть функцию из задачи 5.11.

Приведем несколько задач на приложения определенного интеграла.

5.26. Привести пример фигуры, для которой площадь не может быть определена, а для тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox объем не может быть определен.

◊ *Указание.* Рассмотреть фигуру (см. рис. 18)

$$\{(x;y) : x \in [0;1], \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \text{ если } x \text{ рационально}, \ y = 0, \text{ если } x \text{ иррационально}\}.$$

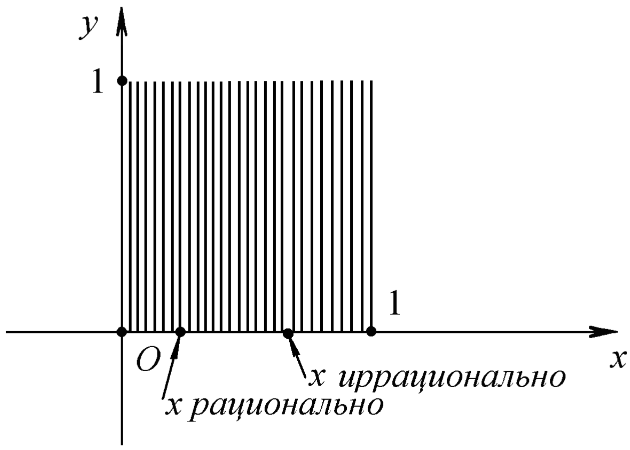

Рис. 18

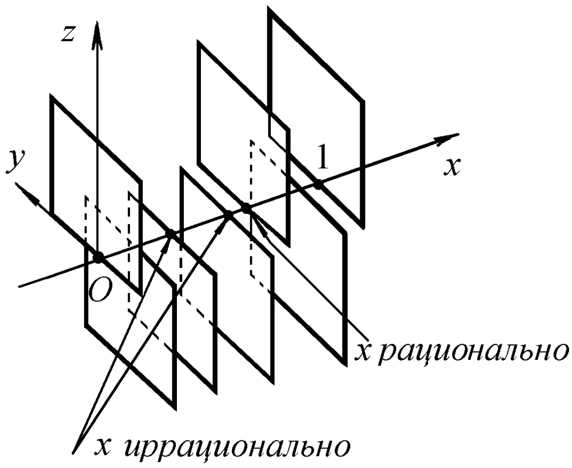

Рис. 19

5.27. Привести пример тела, протяженного вдоль оси Ox, $x \in [a;b]$, для которого площади поперечных сечений $S(x)$, $x \in [a;b]$, — непрерывная функция (например, постоянная), следовательно $\int\limits_a^b S(x)dx$ существует, однако объем тела не может быть определен.

◊ *Указание.* Рассмотреть тело, состоящее из одинаковых квадратных пластин, параллельных yOz, $z > 0$, если x рационально, и $z < 0$, если x иррационально, $x \in [0;1]$, (см. рис. 19 и рис. 20).

5.28. Доказать, что если дуга $\smile{AB}$ спрямляема, $A_n \in \smile{AB}$, $A_n \to A$ $(n \to \infty)$, то спрямляемы дуги $\smile{A_nB}$ и существует предел их длин l_n при $n \to \infty$, равный длине $\smile{AB}$ (см. рис. 21).

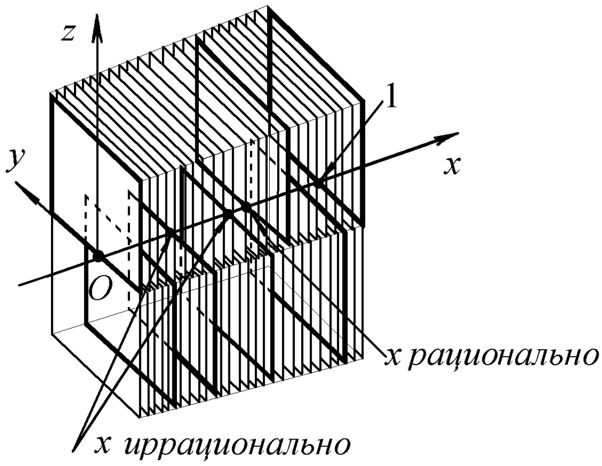

Рис. 20

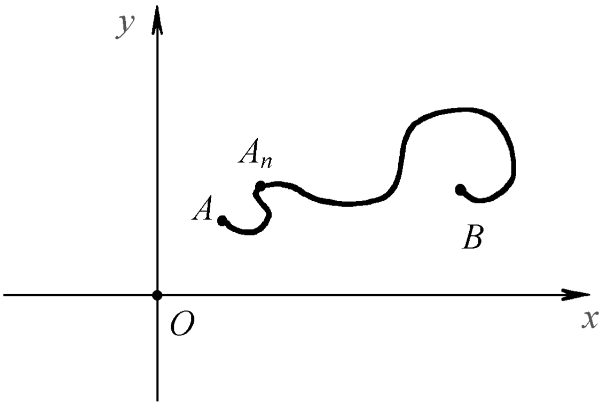

Рис. 21

5.29. Доказать, что кривая

$$\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не является спрямляемой на $\left[0; \dfrac{1}{\pi}\right]$.

► Рассмотрим (см. рис. 22) дуги $\overset{\smile}{A_N B}$, соответствующие отрезкам $\left[\dfrac{1}{N\pi}; \dfrac{1}{\pi}\right]$, $N = 2, 3, \ldots$, и вписанные ломаные $A_N B$ с вершинами в точках пересечения с осью Ox и точках локальных экстремумов функции $\sin\dfrac{1}{x}$. Для

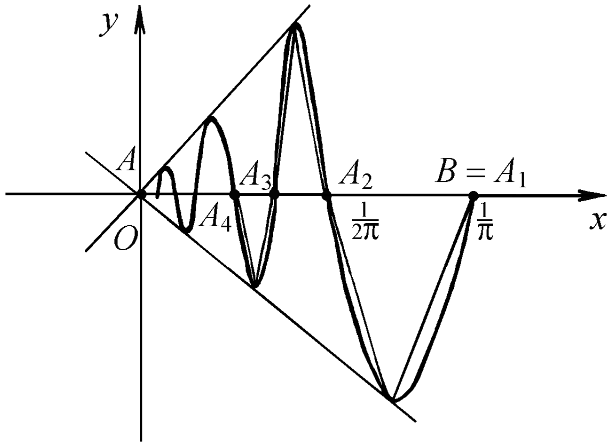

Рис. 22

длин $\breve{l_N}$ дуг $\breve{A_N B}$ и длин l_N ломаных $A_N B$ выполняется неравенство $\breve{l_N} > l_N$. Причем,

$$l_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{(2n-1)\pi} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

в силу расходимости гармонического ряда. Осталось только воспользоваться результатом задачи 5.28. ■

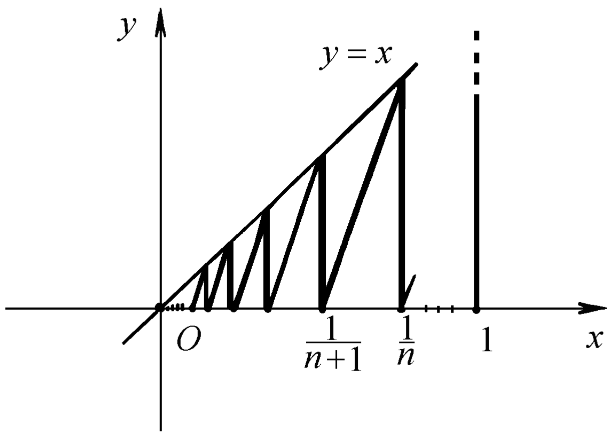

Рис. 23

5.30. Кривая l определена на $[0; 1]$ следующим образом: проходит через начало координат, на отрезке $\left[\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n}\right]$ является двухзвенной ломаной с вершинами в точках $\left(\dfrac{1}{n+1}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. рис. 23). Спрямляема ли кривая?

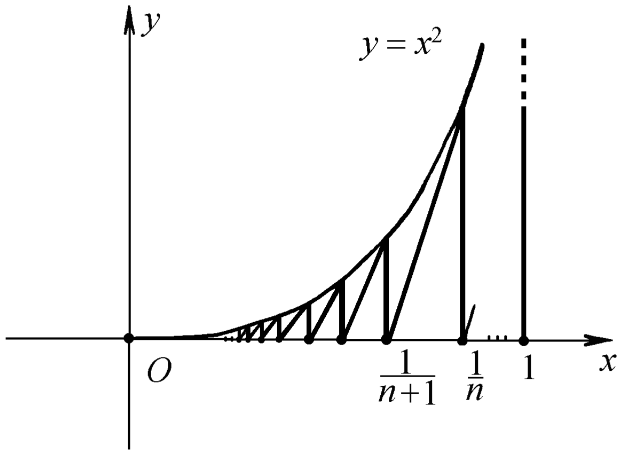

Рис. 24

5.31. Кривая l определена на $[0;1]$ следующим образом: проходит через начало координат, на отрезке $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$ является двухзвенной ломаной с вершинами в точках $A_{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1},0\right)$, $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right)$, $A_n\left(\dfrac{1}{n},0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. рис. 24). Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} l_{\smile \atop A_{n+1}A_1}$?

Определение 5.6. Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[a;+\infty)$ и $\forall\ b > a$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Величина

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$.

Определение 5.7. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a;B)$ и $\forall\ b$: $a < b < B$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Величина

$$\int\limits_a^{B} f(x)\,dx = \lim_{b\to B-}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется несобственным интегралом II рода от функции $f(x)$.

5.32. Доказать следующие утверждения:

Пусть сходятся несобственные интегралы I рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Тогда

1. $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))\,dx$ сходится и равен $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

2. $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)\,dx$ сходится и равен $c\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ для любого действительного c.

3. Если $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a; \infty)$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Сформулировать и доказать соответствующие утверждения для несобственных интегралов II рода.

5.33. Пусть $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a; \infty)$. Доказать, что

1. Если $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a; \infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (первый признак сравнения).

2. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (второй признак сравнения).

Сформулировать и доказать соответствующие утверждения для несобственных интегралов II рода.

5.34. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$; **в)** $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **г)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+x-2}$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; **е)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$; **ж)** $\int\limits_0^1 \ln^2 x\,dx$.

◊ *Указание.* В **е)** дважды применить формулу интегрирования по частям.

Определение 5.8. Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящимся.

Аналогичные определения имеют место и для несобственных интегралов II рода.

5.35. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a; \eta]\ \forall \eta \geqslant a$. Доказать, что если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Сформулировать и доказать соответствующие утверждения для несобственных интегралов II рода.

5.36. Известно, что если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на конечном отрезке $[a,b]$, то $|f(x)|$ и $f(x)\,g(x)$ тоже интегрируемы на $[a,b]$. Верны ли соответствующие утверждения для несобственных интегралов?

► Нет, вообще говоря, неверны. Действительно, рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то по первому признаку сравнения $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ является абсолютно сходящимся. Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Покажем, что $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Имеем

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right)dx.$$

Предположим, что последний интеграл сходится. Повторяя предыдущие рассуждения, убедимся, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Складывая два сходящихся интеграла, получим расходящийся интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. Это противоречие доказывает расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$. Значит, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится по первому признаку сравнения.

Кроме того, мы показали, что при $f(x) = g(x) = \frac{\sin x}{x}$ из сходимости интегралов $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ не следует, вообще говоря, сходимость $\int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. ■

5.37. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

► Нет, вообще говоря, не следует. Действительно, рассмотрим функцию (см. рис. 25).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — натуральное число,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на луче $[0;+\infty)$, значит $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке $[0;b]$. Для любого $b>0$ верно $\int\limits_0^b f(x) = 0$, значит несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен 0. Однако, очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует.

Заметим, что, модифицируя этот пример, можно добиться того, чтобы $f(x)$ была непрерывной на луче $[0;+\infty)$ и неограниченной на нем. ■

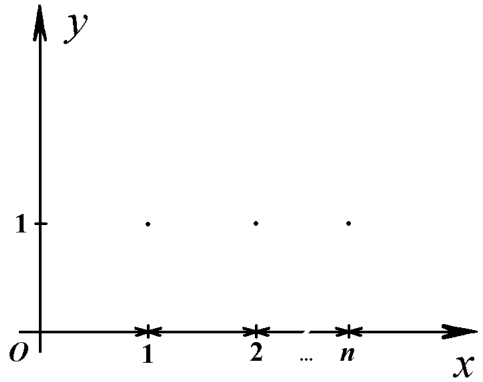

Рис. 25

5.38. Доказать, что если $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, то несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

5.39. Исследовать на сходимость следующие интегралы:

а) $\int\limits_a^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$; **в)** $\int\limits_0^{3} \dfrac{dx}{(x-3)^2}$; **г)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^\alpha x}$;

д) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$; **е)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$; **ж)** $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$; **з)** $\int\limits_0^{1} \dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\,dx$;

и) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\,dx$; **к)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{\ln x}$; **л)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{\ln^\alpha x}$.

$\Diamond$ *Указания.* В **г)** сделать замену переменных $\ln x = t$. В **д)** применить интегрирование по частям. В **е)** сделать замену переменных $\ln\ln x = t$. В **ж)** применить интегрирование по частям. В **и)** воспользоваться неравенством $\dfrac{|\sin x|}{x\sqrt{1+x}} \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}}$ $\forall x \in [1;+\infty)$. В **к)** воспользоваться неравенством $\dfrac{1}{\ln x} > \dfrac{1}{x}$ $\forall x \in [2;+\infty)$. В **л)** воспользоваться неравенством $\dfrac{1}{\ln^\alpha x} > \dfrac{1}{x}$ для всех достаточно больших x.

6 Дифференциальные уравнения

Теорема 6.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Пусть в области* D задана непрерывная функция $f(x, y)$, имеющая в D непрерывную производную $f'_y(x, y)$. Пусть также $(x_0, y_0) \in D$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

имеет на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ единственное решение.

6.1. Найти все решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Удовлетворяет ли эта задача теореме существования и единственности решения?

► Заметим, что функция $y(x) \equiv 0$ является решением задачи Коши. Далее, считая, что $y \neq 0$, решим задачу методом разделения переменных:

$$y' = \sqrt{y}, \quad dy = \sqrt{y}\,dx, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx,$$

$$2\sqrt{y} = x + C, \quad y = \frac{(x + C)^2}{4},$$

$$y(0) = 0 = \frac{C^2}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 0,$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Таким образом, решениями задачи Коши являются две функции $y = 0$ и $y = \dfrac{x^2}{4}$, и задача не удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Действительно, $f(x, y) = \sqrt{y}$, как функция двух переменных имеет производную $f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, разрывную в любой области, содержащей начало координат. ■

6.2. Через каждую точку плоскости проходят две интегральные кривые для уравнения $(y')^2 = 1$. Противоречит ли это теореме существования и единственности решения задачи Коши?

6.3. Доказать, что если y_0 — ненулевое решение линейного однородного уравнения первого порядка $y' + p(x)y = 0$ с непрерывным коэффициентом $p(x)$, то

1. для любого C функция $y = Cy_0$ тоже решение этого уравнения;
2. для любого решения y этого уравнения найдется константа C такая, что $y = Cy_0$.

*Областью называется непустое множество D точек, обладающее следующими двумя свойствами: 1) D — открытое множество, т. е. каждая точка D имеет окрестность, целиком принадлежащую D; 2) множество D связно, т. е. любые две его точки можно соединить состоящей из конечного числа звеньев ломаной, целиком лежащей в D.

Таким образом $y = Cy_0$ — общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$.

6.4. Пусть $\overline{y}$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные на промежутке $\langle a; b\rangle$ функции. Доказать, что

1. если y — другое решение этого уравнения, то $y - \overline{y}$ — решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$;
2. если y_0 — решение однородного уравнения, то $y_0 + \overline{y}$ — решение неоднородного уравнения;
3. для любого решения y неоднородного уравнения найдется константа C такая, что $y = Cy_0 + \overline{y}$.

Таким образом $y = Cy_0 + \overline{y}$ — общее решение уравнения $y' + p(x)y = f(x)$.

6.5. Пусть даны два решения y_1 и y_2 линейного уравнения $y' + p(x)y = f(x)$. Выразить через них общее решение этого уравнения.

6.6. Найти то решение уравнения $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$, которое останется ограниченным при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

◊ *Указание.* Рассмотреть формулу для общего решения $y = C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$.

Пусть задано дифференциальное уравнение n–го порядка, разрешённое относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{6.2}$$

Решить это уравнение — значит найти такую функцию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке её в равенство (6.2) обращает его в тождество.
Если для уравнения (6.2) в точке x_0 заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{6.3}$$

то говорят, что задана задача Коши (6.2), (6.3) для уравнения (6.2) . Решить задачу Коши (6.2) , (6.3) — значит найти такое решение уравнения (6.2) $y = \varphi(x)$, для которого выполняются условия (6.3), т.е.

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Введем вспомогательные функции

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y_1' = y'(x), \dots, y_n(x) = y_{n-1}' = y^{(n-1)}(x).$$

Тогда уравнение (6.2) можно переписать как

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x), \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)). \end{cases}$$

Эта система есть частный случай более общей системы n дифференциальных уравнений "нормальной формы"

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)). \end{cases} \tag{6.4}$$

Если для системы (6.4) заданы начальные условия в точке x_0

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{6.5}$$

то говорят, что задана векторная задача Коши. Таким образом, задача Коши (6.2), (6.3) сводится к векторной задаче Коши (6.4), (6.5).

Теорема 6.2 (существования и единственности решения векторной задачи Коши). Пусть функции $f_i(x, y_1, \dots y_n)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и имеют в D непрерывные частные производные по y_1, y_2, …, y_n; пусть также дана точка $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что векторная задача Коши (6.4), (6.5) имеет на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ решение, и притом, единственное.

6.7. Могут ли графики двух решений уравнения

а) $y' = x + \sin y$,

б) $y'' = x + \sin y$,

пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0)?

► **а)** Функция $f(x, y) = x + \sin y$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x, y) = \cos y$ на всей плоскости xOy. По теореме 6.1 через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая этого уравнения. Следовательно пересечение графиков двух его решений в точке (x_0, y_0) невозможно.

б) Уравнение $y'' = x + \sin y$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 для каждого набора (x_0, y_0, y_0') начальных данных, и значит, через точку (x_0, y_0) проходит единственная кривая с тангенсом угла наклона касательной равным y_0'. Задавая различные y_0', получим различные интегральные кривые, пересекающиеся в точке (x_0, y_0) под разными углами. Таким образом, пересечение интегральных кривых уравнения $y'' = x + \sin y$ в точке (x_0, y_0) возможно. ■

6.8. Могут ли графики двух решений уравнения

а) $y' = x + \sin y$,

б) $y'' = x + \sin y$,

в) $y''' = x + \sin y$

касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0)?

6.9. Сколько существует интегральных кривых уравнения $y^{(n)} = x^2 + y^3$, проходящих через точку $(0, 0)$ и имеющих тангенс угла наклона касательной в этой точке, равный двум?

6.10. Сколько интегральных кривых уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и f_y' непрерывны на всей плоскости xOy) проходят через точку (x_0, y_0) с заданным направлением касательной, образующим угол $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ с осью Ox?

6.11. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и f_y' непрерывны на всей плоскости xOy) может иметь решения $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?

Теперь сформулируем отдельно теорему существования и единственности задачи Коши для очень важного частного случая уравнения (6.2) — линейного дифференциального уравнения n–го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{6.6}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{6.7}$$

Теорема 6.3 (существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n–го порядка). Пусть все коэффициенты $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, линейного дифференциального уравнения (6.6) и функция $f(x)$ непрерывны на промежутке $\langle a; b\rangle$, $x_0 \in \langle a; b\rangle$ и y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ — произвольные числа. Тогда на $\langle a; b\rangle$ существует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (6.6), удовлетворяющее начальным условиям (6.7).

6.12. Может ли $y = x^2$ быть решением уравнения $y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = 0$ с непрерывными на $\langle a; b\rangle$, $a < 0 < b$, коэффициентами $p\,(x)$ и $q\,(x)$?

► Для исследуемого уравнения поставим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Очевидно, что все условия теоремы существования и единственности линейного однородного уравнения 2–го порядка выполнены. Нетрудно заметить, что функция $y(x) \equiv 0$ является решением этой задачи. В силу единственности решения, функция $y(x) = x^2$, также удовлетворяющая начальным данным, не может быть решением этого уравнения. ■

6.13. При каких n уравнение $y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0$ с непрерывными на $\langle a; b\rangle$, $a < 0 < b$, коэффициентами может иметь частное решение $y = x^3$?

◊ *Указание.* Рассмотреть начальные условия в точке $x_0 = 0$ и воспользоваться единственностью решения задачи Коши.

6.14. Могут ли графики двух решений уравнения $y'' + q(x)\, y = 0$ с непрерывной $q(x)$ располагаться так, как на рисунках 26, 27?

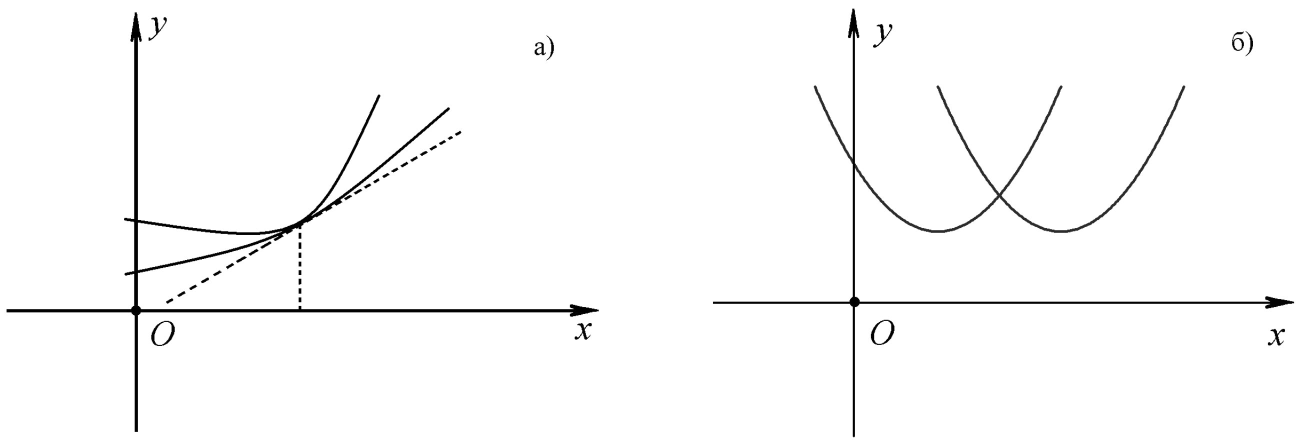

Рис. 26

6.15. Могут ли графики двух решений уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами на прямой Ox

а) пересекаться;

б) касаться друг друга?

Определение 6.1. Функции y_1, y_2, …, y_n называются линейно зависимыми на $\langle a; b\rangle$, если существуют постоянные α_1, α_2, …, α_n, не все равные нулю (т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$) такие, что на $\langle a; b\rangle$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \tag{6.8}$$

В противном случае (т.е. если тождество (6.8) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$) функции y_1, y_2, …, y_n называются линейно независимыми на $\langle a; b\rangle$.

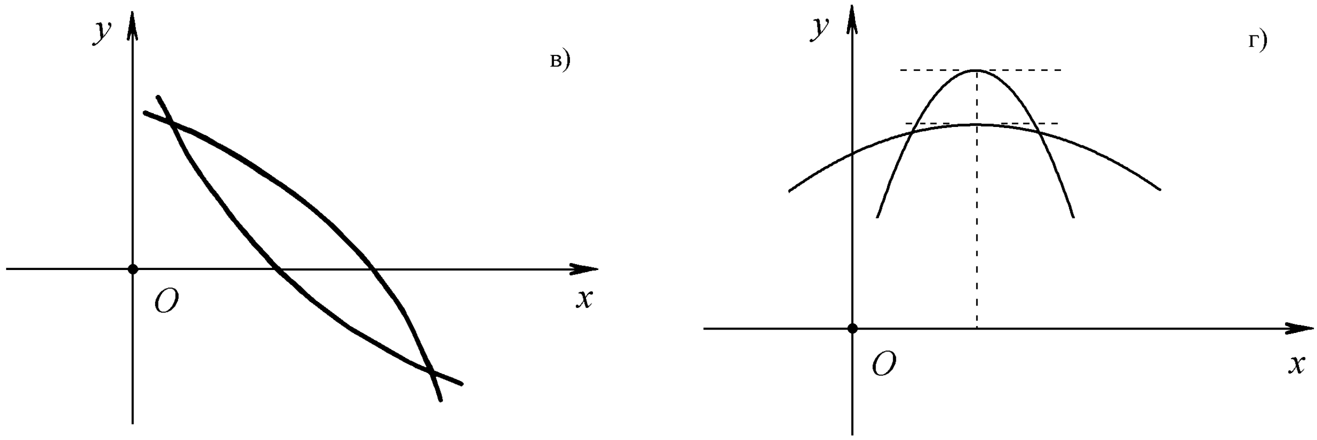

Рис. 27

Линейное дифференциальное уравнение n–го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{6.9}$$

называется однородным.

Определение 6.2. n линейно независимых решений уравнения (6.9) называются фундаментальной системой решений этого уравнения.

Из общей теории решения линейных дифференциальных уравнений известно, что если y_1, y_2, ..., y_n — фундаментальная система решений однородного уравнения (6.9), то общее решение этого уравнения дается формулой

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{6.10}$$

Если известно ещё и частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения (6.6), то общее решение неоднородного уравнения дается формулой

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \bar{y}. \tag{6.11}$$

6.16. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми

а) $y_1 = x + 2$, $y_2 = x - 2$;

б) $y_1 = 6x + 9$, $y_2 = 8x + 12$.

6.17. Исследовать, являются ли функции $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$ линейно зависимыми.

► Рассмотрим тождество

$$\alpha_1(x^2 - x + 3) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(2x - 4) \equiv 0.$$

Или
$$(\alpha_1 + 2\alpha_2)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)x + (3\alpha_1 - 4\alpha_3) \equiv 0.$$
Последнее тождество возможно только, если все коэффициенты при степенях x равны нулю. Т. е. должны выполнятся равенства
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Определитель матрицы этой системы равен нулю (проверьте!), следовательно система имеет нетривиальные (ненулевые) решения. Например, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 3$ — ненулевые решения этой системы. Значит, выполняется тождество
$$4y_1(x) - 2y_2(x) + 3y_3(x) \equiv 0,$$
что означает, что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ линейно зависимы. ■

Теорема 6.4 (первая теорема об определителе Вронского). Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции y_1, y_2, …, y_n линейно зависимы на $\langle a; b\rangle$, то определитель Вронского
$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{6.12}$$
тождественно равен нулю на этом промежутке.

Теорема 6.5 (вторая теорема об определителе Вронского). Если y_1, y_2, …, y_n — линейно независимые решения однородного уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными на промежутке $\langle a; b\rangle$ коэффициентами, то $W(x) \neq 0$ для любого x из $\langle a; b\rangle$.

6.18. Являются ли линейно зависимыми системы функций

а) x, e^x, xe^x;

б) $\ln x^2$, $\ln 3x$, 7;

в) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 3x$;

г) $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+2}$;

д) x, $|x|$, $2x + \sqrt{4x^2}$.

► **а)** Вычислим определитель Вронского
$$W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x & xe^x \\ 1 & e^x & e^x + xe^x \\ 0 & e^x & 2e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 + x \\ 0 & 1 & 2 + x \end{vmatrix} = e^{2x}(x - 2) \not\equiv 0.$$
Следовательно, данные функции линейно независимы. Если бы они были линейно зависимы, то по теореме 6.4 выполнялось бы тождество $W(x) \equiv 0$. ■

6.19. Линейное однородное уравнение какого порядка на интервале $(0; 2)$ может иметь четыре таких частных решения: $y_1 = x^2 - 2x + 2$, $y_2 = (x-2)^2$, $y_3 = x^2 + x - 1$, $y_4 = 1 - x$?

6.20. Определитель Вронского для функций y_1, y_2, $\ldots$, y_n равен нулю при всех $x \in \mathbb{R}$. Могут ли быть эти функции линейно зависимыми? Линейно независимыми?

6.21. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = \left|x^5\right|$ удовлетворяют уравнению $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1; 1)$? Объяснить, почему такое возможно.

6.22. Доказать, что два решения уравнения $y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = 0$ с непрерывными на промежутке $\langle a; b\rangle$ коэффициентами, имеющие максимум при одном и том же значении $x_0 \in (a; b)$, линейно зависимы на $\langle a; b\rangle$.

6.23. Графики четырех решений уравнения $y''' + xy = 0$ касаются друг друга в одной точке. Сколько линейно независимых имеется среди этих решений?

6.24. В интервале $(a; b)$ дана фундаментальная система решений y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Построить соответствующее дифференциальное уравнение.

► Рассмотрим систему функций $y_1, y_2, \ldots, y_n, y$, где y обозначает произвольное решение искомого уравнения. Эта система линейно зависима (см. (6.10)), поэтому по теореме 6.4 определитель Вронского для неё равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.13}$$

Раскладывая этот определитель по элементам последнего столбца убеждаемся, что (6.13) действительно представляет собой однородное дифференциальное уравнение n–го порядка относительно y. При подстановке вместо y функций y_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) получаем определитель с двумя равными столбцами, и следовательно, равный нулю. Это значит, что функции y_k обращают уравнение (6.13) в верное тождество, т. е. являются его решением. При $y^{(n)}$ в уравнении (6.13) стоит коэффициент, с точностью до знака совпадающий с определителем Вронского $W(x)$ для системы решений y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Так как по теореме 6.5 $W(x) \neq 0$, то на него можно поделить и записать уравнение (6.13) в виде (6.9). ■

6.25. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение возможно меньшего порядка, имеющее данные частные решения:

а) $1, \cos x$; **б)** x, e^x; **в)** $e^x, \sin x$.

◊ *Указание.* Выяснить, являются ли функции линейно независимыми и составить для определителя Вронского уравнение $W\,(y, y_1, y_2) = 0$.

6.26. Построить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами возможно более низкого порядка, имеющий данные частные решения:

а) x^2e^x;

б) x, e^{3x};

в) $xe^x \sin x$.

► **а)** Решение x^2e^x порождается корнем характеристического уравнения $\lambda = 1$ кратности 3. Характеристическое уравнение наименьшей степени с таким корнем имеет вид

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Этому характеристическому уравнению соответствует дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$$

которое имеет общее решение $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$. При $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$ получаем данное частное решение. ■

6.27. Пусть y_1, y_2, …, y_n — фундаментальная система решений для уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке $\langle a; b\rangle$ коэффициентами и точка x_0 принадлежит $\langle a; b\rangle$. Доказать, что для определителя Вронского справедлива формула Остроградского–Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}. \tag{6.14}$$

► При разложении определителя в уравнении (6.13) по элементам последнего столбца получаем

$$y^{(n)}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^n y\cdot\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $W(x) \neq 0$ для любого $x \in (a; b)$, то получаем, что

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

Кроме того, заметим, что

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)},$$

откуда $W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$. ■

6.28. Дифференциальное уравнение $xy'' + 2y' - xy = 0$ имеет частное решение $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$. Найти общее решение.

► Для нахождения второго частного решения воспользуемся формулой (6.14) Остроградского–Лиувилля. Имеем $W(x) = C \cdot e^{-\int p_1(x)\,dx} = Cx^{-2}$, где C — некоторая константа. С другой стороны, по определению

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Разделив на y_1^2, получим

$$\frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{Cx^{-2}x^2}{e^{2x}} = \frac{C}{e^{2x}}.$$

Из уравнения $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{e^{2x}}$ получаем, что

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C}{e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}Ce^{-2x} + \widetilde{C_1},$$

или

$$y_2 = -\frac{1}{2}Ce^{-2x} \cdot \frac{e^x}{x} + \widetilde{C_1}\frac{e^x}{x}.$$

Общим решением уравнения будет

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha\frac{e^x}{x} + \beta\left(-\frac{C}{2}\frac{e^x}{x} + \widetilde{C_1}\frac{e^x}{x}\right) = C_1\frac{e^x}{x} + C_2\frac{e^{-x}}{x}.$$

■

6.29. Дифференциальное уравнение $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$ имеет частное решение $y_1 = \operatorname{tg} x$. Найти общее решение уравнения.

6.30. Пусть $y = y_1(x)$ есть частное решение уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными на промежутке $\langle a; b\rangle$ коэффициентами. Показать, что подстановка $y = y_1z$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

► Функцию $y = y_1z$ продифференцируем n раз по формуле Лейбница:

$$y' = y_1z' + y_1'z, \quad y'' = y_1z'' + 2y_1'z' + y_1''z, \quad \ldots$$
$$y^{(n)} = y_1z^{(n)} + ny_1'z^{(n-1)} + \ldots + C_n^k y_1^{(k)}z^{(n-k)} + \ldots + ny_1^{(n-1)}z' + y_1^{(n)}z.$$

Здесь $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$y_1z^{(n)} + (ny_1' + p_1y_1)z^{(n-1)} + \ldots + (y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_ny_1)z = 0.$$

Коэффициент при z равен нулю, так как y_1 есть решение исходного уравнения. Разделив на y_1 и вводя новую функцию $u = z'$, сведем уравнение к линейному уравнению порядка $(n-1)$

$$u^{(n-1)} + q_1u^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1}u = 0.$$

Если теперь найти для последнего уравнения фундаментальную систему решений u_1, u_2, …, u_{n-1}, то для исходного уравнения система решений

$$y_1, \quad y_2 = y_1 \int u_1\,dx, \quad y_3 = y_1 \int u_2\,dx, \quad \ldots, \quad y_n = y_1 \int u_{n-1}\,dx$$

будет линейно независимой, и значит, фундаментальной для исходного уравнения. Действительно, пусть это не так, и существует линейная зависимость

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0,$$

$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 \neq 0$. Поделив на y_1 и продифференцировав, получим

$$C_1 + C_2 \int u_1\,dx + C_3 \int u_2\,dx + \ldots + C_n \int u_{n-1}\,dx = 0$$

и

$$C_2 u_1 + C_3 u_2 + \ldots + C_n u_{n-1} = 0.$$

Так как u_1, u_2, …, u_n — линейно независимая система, то $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$. Кроме того, $C_1 = 0$, так как $y_1 \not\equiv 0$. Следовательно, y_1, y_2, …, y_n линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Заметим, что если известно r частных решений исходного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен на r единиц. ■

6.31. Решить уравнение $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, если известны частные решения $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

► Полагая $y = y_1 z = xz$, $z' = u$ (см. задачу 6.30), получим уравнение

$$x^2(2x-1)u'' + 2x(5x-3)u' + 6(x-1)u = 0.$$

Из соотношения $y_2 = xz_2$, $z_2' = u_2$ находим, что $u_2 = \dfrac{1}{x^3}$ — частное решение последнего уравнения (как и всякая функция вида $\dfrac{C}{x^3}$). Применим ещё раз метод понижения порядка из задачи 6.30: $u = \dfrac{w(x)}{x^3}$, $w'(x) = s(x)$. Получим уравнение

$$(2x-1)s' - 2s = 0,$$

решая которое, находим

$$w' = s = C_1(2x-1).$$

Следовательно, $w = C_1(x^2 - x) + C_2$, $z' = u = \dfrac{C_1(x^3 - x)}{x^3} + \dfrac{C_2}{x^3}$, $z = C_1\left(\ln|x| + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2C_2}{x^2} + C_3$. Тогда $y_1 = x\ln|x| + 1$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$, $y_3 = x$ — фундаментальная система решений исходного решения, а

$$y = C_1(x\ln|x| + 1) + \frac{C_2}{x} + C_3 x$$

— общее решение. ■

6.32. Решить уравнения, зная одно частное решение

а) $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$;

б) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$, $y_1 = \operatorname{tg} x$.

6.33. Решить уравнения

а) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$;

б) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$;

в) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

◊ *Указание.* Найти одно частное решение в виде показательной функции $y_1 = e^{ax}$ или алгебраического многочлена $y_1 = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$. Затем воспользоваться формулой Остроградского–Лиувилля или методом задачи 6.30.

В заключение этой главы рассмотрим несколько геометрических и физических задач, а также задач из биологии, приводящих к дифференциальным уравнениям.

6.34. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $x = 0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

► Очевидно, что уравнением данного семейства окружностей является

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2.$$

Считая, что y — непрерывно дифференцируемая функция от x, продифференцируем это равенство и получим

$$x - a + (y-a)y' = 0.$$

Выражая из последнего уравнения параметр a и подставляя в уравнение семейства, получим

$$(xy'-y)^2 = 2xy((y')^2+1).$$

■

6.35. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении $1:2$.

► Рассмотрим случай $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, т. е. кривая лежит в первой четверти. Обозначим через S площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции, осями координат и перпендикуляром из точки кривой на ось Ox. В случае, если $y(0) \geqslant 0$, получаем

$$S = \frac{2}{3}xy = \int\limits_0^x y(t)\,dt \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{3}xy = \int\limits_0^x y(t)\,dt$$

(в зависимости от того, большую или меньшую часть прямоугольника xy закрывает трапеция). Дифференцируем эти равенства по x и получаем в первом случае

$$\frac{2}{3}(xy'+y) = y, \quad \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad x = Cy^2;$$

во втором случае

$$\frac{1}{3}(xy'+y) = y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}, \quad y = Cx^2.$$

Здесь C — некоторая положительная константа.

Случай, когда $y(0) \leqslant 0$, сводится к рассмотренному, если оси Ox и Oy поменять местами. Если кривая расположена в других четвертях, то получаем эти же два решения, только константа C теперь может принимать отрицательные значения. ■

6.36. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

► Пусть β — угол, который радиус–вектор точки (x, y) на кривой образует с осью Ox, т. е. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$. Из геометрических соображений угол α наклона касательной к кривой в точке (x, y) равен 2β. Значит, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ и мы получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Это однородное уравнение первого порядка решается заменой $y = xt(x)$. Тогда $y' = xt' + t$, $xt' + t = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ или

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - t^2}{t + t^3} dt = \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1 + t^2}\right) dt.$$

Тогда

$$\ln|x| = \ln|t| - \ln(1 + t^2) + \ln|C|, \quad x = C\frac{t}{1 + t^2} = C\frac{xy}{x^2 + y^2},$$

т. е. $x^2 + y^2 = Cy$ — искомая кривая. ■

6.37. Найти кривую, у которой расстояние до любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

6.38. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью 2.

► Ограничимся рассмотрением случая $x, y \geqslant 0$. Напишем уравнение касательной в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Тогда $ab = 4$, $b = \dfrac{4}{a}$, и мы получаем семейство прямых $\dfrac{x}{a} + \dfrac{ay}{4} = 1$. Найдем дифференциальное уравнение этого семейства. Для этого продифференцируем по x и исключим a:

$$\frac{1}{a} + \frac{ay'}{4} = 0, \quad a^2 = \frac{-4}{y'}, \quad a = 2\sqrt{\frac{-1}{y'}},$$

$$\frac{x\sqrt{-y'}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{-y'}} = 1,$$

или

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}.$$

Это так называемое уравнение Клеро. Оно является уравнением, неразрешенным относительно y' и решается методом введения параметра (см. 9, 11). Положим $y' = p$. Тогда $y = xp + 2\sqrt{-p}$, $y' = p = p + xp' - \dfrac{p'}{\sqrt{-p}}$, $p'\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{-p}}\right) = 0$.

1. Уравнение $p' = 0$ дает $p = C$ и приводит к семейству прямых $y = Cx + 2\sqrt{-C}$. Это общее решение уравнения Клеро.

2. Из уравнения $x - \dfrac{1}{\sqrt{-p}} = 0$ выражаем p через x и подставляя в уравнение $y = xy' + 2\sqrt{-y'}$, получаем особое решение $y = \dfrac{1}{x}$ исходного уравнения, представляющее из себя уравнение огибающей семейства $y = Cx + 2\sqrt{-C}$. Действительно, для любой точки (x_0, y_0) на кривой $y = \dfrac{1}{x}$ уравнение касательной $y = -\dfrac{1}{x_0^2}x + \dfrac{2}{x_0}$ задает прямую из семейства, являющуюся общим решением при $C = -\dfrac{1}{x_0^2}$. Обратно, любая прямая $y = Cx + 2\sqrt{-C}$ из этого семейства является касательной к кривой $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{-C}}, \sqrt{-C}\right)$.

Отметим, что в точках огибающей нарушается единственность решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения. ■

6.39. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна единице.

6.40. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной $20°C$. Когда тело остынет до $25°C$, если за 10 минут оно охладилось от $100°C$ до $60°C$?

► Учитывая закон остывания тела, можно написать соотношение

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0),$$

где T — температура тела. $T_0 = 20°C$ — температура окружающей среды, k — коэффициент пропорциональности. Интегрируя это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, получим

$$T = Ce^{kt} + 20.$$

Из начального условия $T(0) = 100°C$ находим $C = 80$, а из условия $T(10) = 60°C$ находим $k = -\dfrac{\ln 2}{10}$. Таким образом $T = 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20$. Положив $T = 25$, находим требуемый момент времени $t = 40$ мин. ■

6.41. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4,5 \cdot 10^9$ лет, и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

► Обозначим через $x(t)$ — количество урана в момент времени t, $t \geqslant 0$. Так как скорость распада пропорциональна количеству урана в данный момент времени t, то получаем простейшую модель радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными дает $x(t) = x(0)e^{-kt}$, где $x(0)$ — начальное количество урана в момент времени $t = 0$. Отметим, что период полураспада определяется по формуле $\bar{t} = \dfrac{\ln 2}{k}$.

Определим начальное количество урана в породе. Для этого найдем количество s полностью распавшегося урана из пропорции $\dfrac{s}{14} = \dfrac{238}{206}$. Получим $s = 14 \cdot \dfrac{238}{206} \approx 16,2$ мг. Следовательно, первоначальное количество урана в куске породы было $100 + 14 \cdot \dfrac{238}{206} \approx 116,2$ мг.

По формуле для периода полураспада находим $k = \dfrac{\ln 2}{4,5 \cdot 10^9}$. Наконец, из формулы решения $x(t) = 116,2 \cdot e^{-kt}$ получаем $100 = 116,2 \cdot e^{-kT}$,

$$T = \frac{\ln 1,162}{k} = \frac{4,5 \cdot 10^9}{\ln 2} \approx 970 \cdot 10^6 \text{ лет}$$

— возраст горной породы. ■

6.42. Рассмотрим модель Бэйли в теории эпидемий (см., например, [13]). Предположим, что изучаемое заболевание носит длительный характер, так что процесс передачи инфекции — значительно более быстрый, чем течение самой болезни. При этом будем предполагать, что зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным. Найти зависимость числа незараженных особей от начальных данных в промежутке времени, меньшем времени жизни одного поколения (т. е. без учета естественной смертности).

► Пусть $x(t)$ — число незараженных особей в момент времени t, $y(t)$ — число зараженных к моменту t, α, β — соответственно число незараженных и зараженных в начальный момент $t = 0$. Здесь $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда, поскольку общее количество особей колонии неизменно, то для любого t

$$x(t) + y(t) = \alpha + \beta. \tag{6.15}$$

Так как инфекция передается при встречах зараженных с незараженными, то число незараженных будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между теми и другими, т. е. пропорционально произведению xy. Для промежутка времени от t до $t + \Delta t$ имеем

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = -\gamma xy\Delta t,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma xy.$$

Здесь $\gamma > 0$ — коэффициент, отражающий вирулентность заболевания. Подставив в это равенство выражение $y(t)$ из (6.15), получим дифференциальное уравнение относительно $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x(\alpha + \beta - x).$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получаем:

$$\frac{dx}{x(\alpha + \beta - x)} = -\gamma dt, \quad \frac{1}{\alpha + \beta}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{\alpha + \beta - x}\right) = -\gamma dt,$$

$$\frac{1}{\alpha + \beta}(\ln x - \ln(\alpha + \beta - x)) = -\gamma t + C,$$

$$\frac{x}{\alpha + \beta - x} = Ce^{-\gamma(\alpha+\beta)t}.$$

При $t = 0$ число незараженных, т. е. $x(0)$, равно α. Подставляя в решение эти начальные данные, находим $C = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Таким образом

$$\frac{x}{\alpha + \beta - x} = \frac{\alpha}{\beta}e^{-\gamma(\alpha+\beta)t}.$$

Разрешая это уравнение относительно x, получим закон убывания числа незараженных особей со временем:

$$x(t) = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta e^{\gamma(\alpha+\beta)t}}.$$

■

6.43. Найти зависимость плотности количества муравьев от расстояния до муравейника в стационарной модели (см., например, [14]).

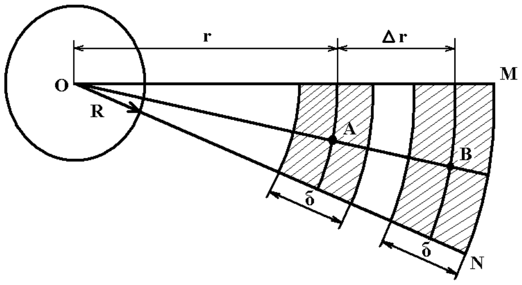

Рис. 28

► В мирмекологии хорошо известен общинный характер жизни муравьев. Найденную пищу или строительный материал муравьи не потребляют на месте, а несут в муравейник. Поэтому вблизи муравейника муравьев больше, чем вдали от него. Будем считать для простоты, что основанием муравейника служит круг радиуса R и что пространство вне муравейника однородно и по распределению питательных веществ и по проходимости. Это значит, что все точки, лежащие на окружности радиуса R, равноправны в смысле ценности их окрестностей для муравьев. Поэтому плотность муравьев во всех точках окружности радиуса r ($r > R$) будет одной и той же. Отсюда следует, что при анализе плотности, как функции от расстояния r до муравейника, мы можем ограничиться рассмотрением точек, лежащих на одном луче.

Мы будем рассматривать стационарный случай, т. е. такой случай, когда плотность в каждой точке вне муравейника не меняется со временем. Это не значит, что муравьи не перемещаются. В поисках пищи они переходят с одного места на другое до тех пор, пока что-нибудь не найдут. Мы считаем их поисковые перемещения случайными, поэтому если несколько муравьев покинуло некоторую окрестность за единицу времени, то примерно такое же количество пришло в эту окрестность из других участков. Аналогично, если какое-то количество муравьев скрылось в муравейнике с пищей, то примерно такое же количество вышло из муравейника в поисках пищи. Описанная ситуация осуществляется в реальных муравейниках в течении нескольких дневных часов.

Пусть $p(r)$ — плотность муравьев на расстоянии r от центра муравейника. Тогда $p(R)$ — значение плотности на границе муравейника. Рассмотрим две точки лежащие на одном луче: точку A, отстоящую от центра муравейника на расстоянии r, и точку B, отстоящую на расстоянии $r + \Delta r$ (см. рис. 28). Проследим за обменом муравьями между окрестностями этих точек. Пусть $n(r)$ — количество муравьев в окрестности точки A, $n(r + \Delta r)$ — количество муравьев в окрестности точки B. В поисках пищи муравьи разбегаются в разных направлениях, при этом ни одно направление не является предпочтительным. Следовательно, если из окрестности точки A в направлении точки B вышло $\alpha_{AB} n(r)$, $\alpha_{AB} < 1$, муравьев, то из окрестности точки B в направлении точки A вышло $\alpha_{BA} n(r + \Delta r)$ муравьев, причем $\alpha_{AB} = \alpha_{BA}$.

Однако не все муравьи, вышедшие из окрестности точки A в направлении точки B, дойдут до окрестности этой точки. Часть из них, найдя по дороге пищу, вернется в муравейник. Понятно, что эта часть будет тем больше, чем больше расстояние Δr между точками A и B. Таким образом, количество муравьев, вышедших из окрестности точки A и дошедших до окрестности точки B, можно выразить как

$$n_{AB} = \alpha_{AB} n(r) - \beta \alpha_{AB} n(r) \Delta r,$$

где $\beta > 0$ — коэффициент, определяющий долю вернувшихся. Этот коэффициент зависит от ценности пространства. Чем богаче пространство, тем больше β.

Что же касается количества муравьев, вышедших из окрестности точки B в направлении точки A, то к нему нужно еще прибавить тех муравьев, которые выйдя в других направлениях, по дороге нашли пищу и отправились в муравейник. Такие муравьи, если они еще не вышли из сектора OMN, также попадут в окрестность точки A, и их будет тем больше, чем больше Δr. Таким образом, количество муравьев, вышедших из окрестности точки B и попавших в окрестность точки A, можно выразить

$$n_{BA} = \alpha_{BA} n(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha_{BA} n(r + \Delta r)\Delta r.$$

Так как мы рассматриваем стационарную модель, когда количество муравьев в окрестности каждой точки должно оставаться неизменным, то $n_{AB} = n_{BA}$, т. е.

$$\alpha_{AB} n(r) - \beta\alpha_{AB} n(r)\Delta r = \alpha_{BA} n(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha_{BA} n(r + \Delta r)\Delta r.$$

В силу равенства коэффициентов n_{AB} и n_{BA}, последнее уравнение можно переписать в виде

$$n(r) - \beta n(r)\Delta r = n(r + \Delta r) + \beta_1 n(r + \Delta r)\Delta r.$$

Поскольку количество муравьев равно плотности, умноженной на площадь, то последнее равенство можно переписать в виде

$$p(r)S_A - \beta p(r)S_A\Delta r = p(r + \Delta r)S_B + \beta_1 p(r + \Delta r)S_B\Delta r, \tag{6.16}$$

где S_A, S_B — площади окрестностей точек A и B соответственно. Вычислив площади в полярных координатах, будем иметь

$$S_A = r\delta\Delta\varphi, \quad S_B = (r + \Delta r)\delta\Delta\varphi.$$

Подставляя эти выражения в (6.16), получим

$$p(r)r\delta\Delta\varphi - \beta p(r)r\delta\Delta\varphi\Delta r = p(r + \Delta r)(r + \Delta r)\delta\Delta\varphi - \beta_1 p(r + \Delta r)(r + \Delta r)\delta\Delta\varphi\Delta r.$$

Сократим обе части равенства на $\delta\Delta\varphi$ и сгруппируем слагаемые:

$$(r + \Delta r)p(r + \Delta r) - rp(r) = -(\beta_1 p(r + \Delta r)(r + \Delta r) + \beta p(r)r)\Delta r.$$

Разделив это равенство на Δr, перейдем к пределу при $\Delta r \to 0$. Получим

$$\frac{d}{dr}[rp(r)] = -(\beta + \beta_1)rp(r).$$

Обозначим для удобства $\beta + \beta_1 = \varepsilon$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{[rp(r)]'}{rp(r)} = -\varepsilon.$$

Это уравнение для плотности является уравнением с разделяющимися переменными. Используя начальные данные, получаем решение

$$p(r) = \frac{R}{r}p(R)e^{-\varepsilon(r-R)}. \tag{6.17}$$

Заметим, что величины R и $p(R)$ несложно найти экспериментальным путем. Коэффициент ε подсчитать гораздо труднее. Это объективная характеристика взаимоотношений данного вида с данной питательной средой. Однако можно поступить следующим образом. Если считать, что построенная модель достаточно верно отражает суть дела и, следовательно, существует некоторое ε, с которым формула (6.17) дает зависимость плотности от расстояния, то эту константу можно вычислить исходя из самой формулы (6.17). В самом деле, если формула верна, то она верна для всех $r > R$ и, в частности, для некоторого $r = r_0 > R$. Подставив $r = r_0$ в (6.17), получим

$$p(r_0) = \frac{R}{r_0}p(R)e^{-\varepsilon(r_0-R)},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{1}{r_0 - R}\ln\frac{Rp(R)}{r_0 p(r_0)}.$$

Таким образом для получения значения константы ε нам необходимо знать значение плотности $p(r)$ ещё при одном значении $r = r_0$. Это значение можно найти экспериментально так же, как и $p(R)$.

Нужно обратить внимание на ещё одну погрешность нашей модели. Из (6.17) следует, что $p(r) \neq 0$ для сколь угодно больших значений r. В реальных муравейниках это конечно не так. Однако при больших r величина $p(r)$ становиться столь малой, что мы без особой погрешности можем ей пренебречь. ■

7 Ряды

Определение 7.1. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с общим членом a_n называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ частичных сумм $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Число S при этом называется суммой ряда. В противном случае ряд называется расходящимся.

7.1. Исследовать на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

► Разберем отдельно два случая. Пусть $q \neq 1$, тогда преобразуем частичную сумму

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \tag{7.1}$$

следующим образом. Домножим обе части равенства 7.1 на q:

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$$

и вычтем из 7.1. Сократив соответствующие слагаемые, получим

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

или

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заметим, что если $|q| < 1$, то второе слагаемое стремиться к нулю, и сумма ряда равна $\frac{1}{1-q}$. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и ряд расходится. Если же $q = -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд также расходится.

Остается лишь рассмотреть случай $q = 1$. Но тогда $S_n = n + 1$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится.

Подводя итог, можно сказать, что бесконечная геометрическая прогрессия сходится к сумме $\frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$, а в остальных случаях расходится. ■

7.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

7.3. Как известно, если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то будет сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$. Может ли сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

◊ *Указание.* Доказать от противного.

7.4. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$? Привести примеры.

7.5. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sum\limits_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$, $p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \ldots$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка их следования, также сходится и имеет ту же сумму. Верно ли обратное?

► Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает существование предела любой подпоследовательности его частичных сумм, равного сумме ряда S. Выберем подпоследовательность частичных сумм $\{S_{p_n}\}$ следующим образом:

$$S_{p_1} = a_1, \quad S_{p_2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1},$$
$$S_{p_3} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1},$$
$$S_{p_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_n-1}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{p_n} = S$. Но последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ как раз и совпадает с $\{S_{p_n}\}$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и имеет сумму S.

Обратное утверждение неверно, так как из сходимости некоторой подпоследовательности, вообще говоря, не следует сходимость самой последовательности. Действительно, рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. Если сгруппировать члены ряда попарно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-1)$, то полученный ряд, состоящий из нулей, конечно, сходится.

Заметим, что если дополнительно потребовать неотрицательность членов ряда, то обратное утверждение становится верным (см. задачу 7.10). ■

Теорема 7.1 (критерий Коши сходимости числового ряда). Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n \geqslant N$ и любого m выполняется $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$.

7.6. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) сходятся, и $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ для всех n начиная с некоторого номера n_0, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (C), если ряды (A) и (B) расходятся?

► Из условия имеем для всех $n > n_0$ и любого p

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} \leqslant b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p},$$

значит,

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}| \leqslant \max\{|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|, |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}|\}.$$

Воспользовавшись критерием Коши для сходящихся рядов (A) и (B), $\forall\ \varepsilon > 0$ найдём такое N (выберем его больше n_0), что при $n > N$ и любом p правая часть последнего неравенства будет меньше ε. А значит, по критерию Коши сходится и ряд (C).

Если же ряды (A) и (B) расходятся, то о сходимости ряда (C) ничего утверждать нельзя. Действительно, рассмотрим ряды с $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $c_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ соответственно. При выполнении неравенств $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, все ряды расходятся (см. задачи 7.7 и 7.21). Но, при выполнении тех же неравенств, в качестве ряда (C) можно взять сходящийся ряд, состоящий из нулей. ■

7.7. Используя критерий Коши сходимости числового ряда доказать расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при $0 < p \leqslant 1$.

► Воспользуемся отрицанием условия Коши: $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ N\ \exists\ n \geqslant N\ \exists\ m$: $|S_{n+m} - S_n| \geqslant \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $m = n$, тогда

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \ldots + \frac{1}{(2n)^p} \geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши не выполняется, и ряд расходится. ■

Если в критерии Коши положить $m = 1$, то $|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1}|$, и условие Коши превращается в необходимое условие сходимости числового ряда: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Это утверждение дает возможность доказывать расходимость рядов, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует, то ряд расходится.

7.8. Является ли условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ достаточным для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Привести примеры.

7.9. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно. Привести примеры.

► Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и начиная с некоторого номера $a_n < 1$. Тем самым

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 + \ldots + a_{n+m}^2 < a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}.$$

Применяя критерий Коши, убеждаемся, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

Заметим, что обратное неверно. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. ■

Приведем задачи на исследование сходимости знакопостоянных рядов.

Теорема 7.2 (критерий сходимости ряда с неотрицательными членами). Если частичные суммы S_n числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n \geqslant 0$ ограничены, то ряд сходится. В противном случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, и ряд расходится (к бесконечности).

На основании данного утверждения обычно решается вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \tag{7.2}$$

где p — любое действительное число, а при $p = 1$ получается собственно гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots . \tag{7.3}$$

При $p < 0$ общий член ряда не стремится к нулю, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости, и ряд (7.2) расходится. Расходимость таких рядов (в том числе и гармонического ряда) при $0 < p \leqslant 1$ была исследована в задаче 7.7. Как мы увидим в дальнейшем (см. задача 7.21), при $p > 1$ ряд (7.2) сходится.

Иногда возникает заблуждение, что между сходящимися при $p > 1$ рядами (7.2) и расходящимся гармоническим рядом (7.3) не существует "промежуточных" сходящихся или расходящихся рядов, однако, это не так. Соответствующие примеры будут предъявлены позднее (см. задачи 7.29 и 7.30).

7.10. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов исходного ряда, сходится, то данный ряд также сходится и к той же сумме.

► Обозначим частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ через S_n и S_{p_k} соответственно. Здесь $\{p_k\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел $p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \ldots$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, то в соответствии с теоремой 7.2 существует $C > 0$ такое, что $S_{p_k} \leqslant C$ для всех p_k. Переходя к последовательности $\{S_n\}$, заметим, что для любого n найдется p_k такой, что $n \leqslant p_k$, а в силу монотонности S_n будет верно и $S_n \leqslant S_{p_k} \leqslant C$. Значит, последовательность $\{S_n\}$ ограничена и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Остается заметить, что если некоторая подпоследовательность сходящейся последовательности имеет предел S, то и сама последовательность также стремится к S. ■

7.11. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

► Так как $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ следует ограниченность их частичных сумм, значит и частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ограничены, а ряд сходится.

Далее, воспользуемся оценкой

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Все частичные суммы, стоящие в правой части неравенства, ограничены, значит ограничены частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, и он сходится.

Положив $b_n = \dfrac{1}{n}$, получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$ сходится по доказанному. ■

Теорема 7.3 (признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если для всех $n \geqslant N$, где N — некоторое натуральное число, выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

7.12. Можно ли из условия теоремы 7.3 исключить требование неотрицательности членов рассматриваемых рядов? Привести примеры.

► Нельзя. Действительно, рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$. Для всех натуральных n верно $-\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{2^n}$. Однако гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится (см. задачу 7.7), а бесконечная геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится, т. к. $|q|=\dfrac{1}{2}<1$ (см. задачу 7.1). ■

Может возникнуть заблуждение, что данная теорема распространяется на произвольные ряды заменой неравенства $a_n \leqslant b_n$ неравенством $|a_n| \leqslant |b_n|$. Однако, это неверно.

7.13. Можно ли в теореме 7.3 заменить неравенство $a_n \leqslant b_n$ неравенством $|a_n| \leqslant |b_n|$ и отказаться от условия неотрицательности членов рассматриваемых рядов? Привести примеры.

► Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Для всех натуральных $n \geqslant 2$ выполняется $\left|\dfrac{1}{n\ln n}\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|$. Однако, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится (см. задачу 7.33), а $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ — расходится (см. задачу 7.29). ■

Теорема 7.4 (признак сравнения в предельной форме). Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$, $C\neq 0$, $a_n \geqslant 0$, $b_n>0$, т. е. $a_n \sim C\cdot b_n$ при $n\to\infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ являются равносходящимися, т. е. из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

7.14. Привести примеры рядов, для исследования сходимости которых применима теорема 7.3, но неприменима теорема 7.4.

► Для рядов с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n=\dfrac{1}{n}$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, где

$$b_n=\begin{cases}1/n, & \text{если } n \text{ нечетное},\\ 2/n, & \text{если } n \text{ четное},\end{cases}$$

выполняется $a_n \leqslant b_n$, и по теореме 7.3 из расходимости гармонического ряда следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Однако, использование теоремы 7.4 невозможно, поскольку отношения $\dfrac{a_n}{b_n}$ образуют последовательность $1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}, \ldots$, которая не имеет предела.

Другой пример дают ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где

$$a_n=\begin{cases}1/n^2, & \text{если } n \text{ нечетное},\\ 1/n^3, & \text{если } n \text{ четное},\end{cases}$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{n^2}$. Для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$, и по теореме 7.3 из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (см. задачу 7.21) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Однако, используя теорему 7.4, никакого вывода сделать нельзя. Действительно, отношения $\dfrac{a_n}{b_n}$ образуют последовательность $1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{4}, \ldots$, которая не имеет предела. ■

7.15. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, то можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

◊ *Указание.* Рассмотреть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$.

7.16. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\alpha}\right)\right),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

► Пользуясь свойством логарифма, перепишем общий член ряда в виде $a_n = -\ln\left(n^\alpha \sin \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Очевидно, что при $\alpha \leqslant 0$ общий член не стремится к нулю, значит не выполняется необходимое условие сходимости, и ряд расходится. При $\alpha > 0$ имеем $\dfrac{1}{n^\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$, и используя разложение функции $\sin x$ по формуле Тейлора в точке $x = 0$ при $x = \dfrac{1}{n^\alpha}$, получим

$$a_n = -\ln\left(n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha}\right) = -\ln\left(n^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

при $n \to \infty$. Или

$$a_n \sim \frac{1}{6n^{2\alpha}}.$$

Значит, по признаку сравнения в предельной форме наш ряд будет сходиться при $\alpha > \dfrac{1}{2}$ и расходиться при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. ■

7.17. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt[n]{e} - n - 1}{n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n\sqrt[n]{e} - n - 1)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - n^2 \sin\dfrac{1}{n}\right)$.

◊ *Указание.* Обозначить $\dfrac{1}{n} = x$ и применить формулу Тейлора.

7.18. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

◊ *Указание.* Свести задачу к случаю знакопостоянного ряда и сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2n}$.

7.19. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

► По критерию Коши, из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что $\forall\, \varepsilon$ существует натуральное число N такое, что $\forall\, n > N$ и $\forall\, p$ справедливо неравенство

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Т. к. $\{a_n\}$ — положительная монотонно убывающая последовательность, то из этого неравенства следует, что $pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Полагая, далее, последовательно $p = n$ и $p = n+1$, отсюда находим, что $2na_{2n} < \varepsilon$ и $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ при $n > N$. Следовательно, $na_n < \varepsilon$ при любом $n > 2N$. Что и доказывает наше утверждение. ■

7.20. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится и расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (теорема Коши).

► Поскольку

$$\begin{gathered} a_2 \geqslant a_3, \\ a_4 \geqslant a_5,\ a_4 \geqslant a_6,\ a_4 \geqslant a_7, \\ a_8 \geqslant a_9,\ a_8 \geqslant a_{10},\ a_8 \geqslant a_{11},\ a_8 \geqslant a_{12},\ a_8 \geqslant a_{13},\ a_8 \geqslant a_{14},\ a_8 \geqslant a_{15}, \\ \text{и т. д.} \end{gathered}$$

то

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}.$$

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена (см. теорему 7.2), значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также ограничена, и ряд сходится. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, последовательность его частичных сумм неограниченна, значит, неограниченна последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, и он расходится.

Остальные случаи исследуются с помощью неравенства

$$4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^n a_{2^n} \leqslant 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + \ldots + 2a_{2^n} = 2(a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{2^n}).$$

■

7.21. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$.

◊ *Указание.* Применить результаты задачи 7.20.

Теорема 7.5 (признак Даламбера). Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если существует конечный или нет предел выражения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то при $D < 1$ ряд сходится, при $D > 1$ (включая случай $D = \infty$) ряд расходится.

Из доказательства теоремы можно сделать следующее важное замечание: если $D > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

7.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!e^n}{2^n n^n}$.

► Рассмотрим

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}2^n n^n}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}n!e^n} = \frac{en^n}{2(n+1)^n} = \frac{e}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Используя второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \dfrac{1}{2} < 1$ и ряд сходится. ■

Теорема 7.6 (признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами. Если существует конечный или нет предел выражения $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то при $K < 1$ ряд сходится, при $K > 1$ (включая случай $K = \infty$) ряд расходится.

Из доказательства теоремы можно сделать следующее важное замечание: если $K > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

7.23. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

► Рассмотрим

$$K_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -2\frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Значит, ряд сходится. ■

7.24. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!e^n}{n^n}$.

► Повторяя рассуждения задачи 7.22, убеждаемся, что $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1$ при $n \to \infty$. Таким образом, признак Даламбера неприменим. Для исследования $K_n = \sqrt[n]{a_n}$ воспользуемся формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$:

$$K_n = \sqrt[n]{\frac{n!e^n}{n^n}} = \frac{e\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{e}{n}\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Значит, признак Коши неприменим.

Однако, нужно заметить, что повторяя предыдущие рассуждения с формулой Стирлинга

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^n} \sim \frac{e^n\sqrt{2\pi n}n^n}{n^n e^n} = \sqrt{2\pi n}$$

при $n \to \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости, и ряд расходится. Конечно, это исследование нужно было провести до применения признаков Даламбера и Коши. ■

7.25. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ сходится (расходится) по признаку Даламбера, то он сходится (расходится) и по признаку Коши. Привести пример ряда, сходящегося по признаку Коши, к которому нельзя применить признак Даламбера (тем самым признак Коши *сильнее* признака Даламбера).

$\lozenge$ *Указание.* См. задачи 1.30 и 1.27.

Теорема 7.7 (интегральный признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Пусть на луче $[1;+\infty)$ определена положительная, монотонно убывающая и непрерывная функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$ для всех n, начиная с некоторого n_0. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ являются равносходящимися, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

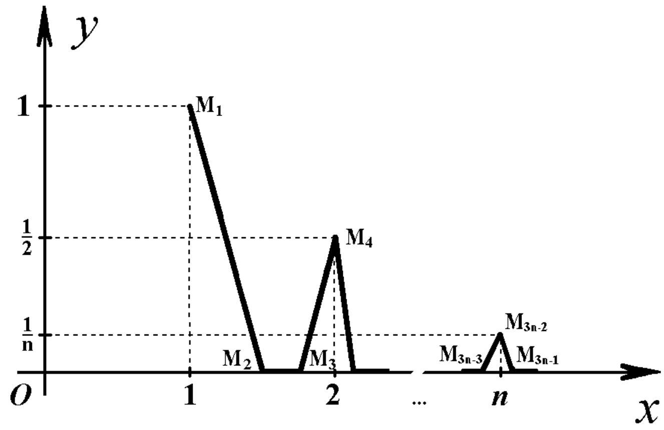

Рис. 29

7.26. Привести пример, когда при отказе от монотонности функции $f(x)$ в теореме 7.7 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

► Рассмотрим расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Функцию $y = f(x)$ зададим (см. рис. 29), описав её график как ломаную, с вершинами в точках $M_1, M_2, \ldots$ плоскости Oxy. Положим $M_1(1,1)$, $M_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Далее, для каждого $n = 2, 3, \ldots$ положим $M_{3n-3}\left(n - \frac{1}{2^n}, 0\right)$, $M_{3n-2}\left(n, \frac{1}{n}\right)$, $M_{3n-1}\left(n + \frac{1}{2^n}, 0\right)$. Тогда для всех натуральных n выполняется условие $a_n = f(n)$.

Три точки M_{3n-3}, M_{3n-2}, M_{3n-1} образуют треугольник площади $\Delta_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{2^n} = \frac{1}{n2^n}$. Тогда исследование сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сводится к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. Используя очевидную оценку $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, применим признак сравнения со сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, и убедимся, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ сходится, а значит, сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. ■

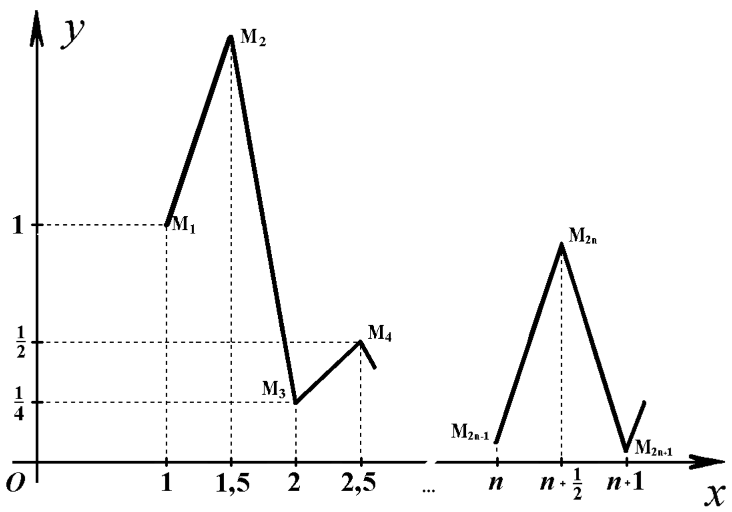

Рис. 30

7.27. Привести пример, в котором при отказе от монотонности функции $f(x)$ в теореме 7.7 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

► Рассмотрим сходящуюся геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Функцию $y = f(x)$ зададим (см. рис. 30), описав её график как ломаную, с вершинами в точках $M_1, M_2, \ldots$ плоскости Oxy. Положим $M_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Далее, для каждого $n = 2, 3, \ldots$ положим $M_{2n-1}\left(n, \frac{1}{2^n}\right)$, $M_{2n}\left(n+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2^n}\right)$. Тогда для всех натуральных n выполняется условие $a_n = f(n)$.

Площадь Δ_n фигуры, лежащая под отрезками $M_{2n-1}M_{2n}$, $M_{2n}M_{2n+1}$ ломаной не меньше, чем её часть, лежащая под отрезком $M_{2n-1}M_{2n}$. Эта фигура представляет из себя трапецию площади $\Gamma_n = \frac{\left(\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^n}\right)}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Тогда интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, равный $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$, не меньше $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$, причем последний ряд, очевидно, расходится. Это доказывает расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. ■

7.28. Можно ли в теореме 7.7 отказаться от условия положительности a_n и $f(x)$?

▶ Нельзя. Действительно, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n^2$. Он расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n^2$ не существует, и не выполняется необходимое условие сходимости ряда. С другой стороны для интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\cos x^2\,dx$ верно

$$\int\limits_1^{+\infty}\cos x^2\,dx=\lim_{x\to+\infty}\int\limits_1^{x}\cos t^2\,dt=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\int\limits_1^{x^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Здесь мы использовали замену переменной $t=\sqrt{u}$. Далее

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{d\sin x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\sin x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2}\sin 1+\frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Поскольку $\left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right|\leqslant\frac{1}{x^{3/2}}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ сходится, то по признаку сравнения для несобственных интегралов сходится и $\int\limits_1^{+\infty}\cos x^2\,dx$. ■

7.29. Используя интегральный признак Коши, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

7.30. Используя интегральный признак Коши, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится.

Теперь рассмотрим ряды не являющиеся знакопостоянными.

Определение 7.2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно сходящимся.

Заметим, что из абсолютной сходимости следует и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Обратное неверно.

7.31. Привести пример условно сходящегося ряда.

◊ *Указание.* См. задачу 7.33.

Теорема 7.8 (признак Лейбница). Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, где $c_n\geqslant 0$. Если последовательность $\{c_n\}$ монотонно убывая стремится к нулю, то ряд сходится.

7.32. Можно ли в признаке Лейбница отказаться от условия монотонности последовательности $\{c_n\}$.

▶ Нет, нельзя. Действительно, рассмотрим ряд

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

удовлетворяющий всем условиям признака Лейбница кроме монотонности. Его частичные суммы S_{2n} можно представить в виде $S_{2n}=S'_n-S''_n$, где S'_n — частичные суммы расходящегося гармонического ряда, а

S_n'' — частичные суммы сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (см. задачу 7.21). Поэтому существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n''$, а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \infty$. Предположим, что рассматриваемый ряд сходится, тогда существуют как конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, так и конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$. Складывая две сходящиеся последовательности S_{2n} и S_n'', мы получим расходящуюся последовательность S_n'. Это противоречие приводит нас к тому, что рассматриваемый ряд расходится. ■

7.33. Доказать условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

7.34. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, $p\in\mathbb{R}$.

7.35. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ сходится условно*.

► Это знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$, где $c_n = |a_n| = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} q_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$, получим

$$c_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{2^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} =$$
$$= \frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \sim \frac{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{-2n}}{(2n+1)\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},\quad n\to\infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится по второму признаку сравнения, так как расходится ряд $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Далее,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2n+2)!!(2n+1)!!}{(2n+3)!!(2n)!!} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1,$$

а значит, $c_{n+1} < c_n$, и по теореме Лейбница ряд сходится. Таким образом, ряд сходится условно. ■

7.36. Доказать, что

а) сумма (разность) двух абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно;

б) сумма (разность) абсолютно сходящегося и условно сходящегося рядов сходится условно.

◊ *Указание.* В **а)** воспользоваться неравенством $|a_n \pm b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$. В **б)** провести доказательство от противного.

7.37. Можно ли утверждать, что сумма двух условно сходящихся рядов сходится условно (не абсолютно)?

*Здесь $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n$ и $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)$.

◊ *Указание.* Рассмотреть условно сходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, их сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ сходится условно (доказать!). Рассмотреть условно сходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$. Их сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно.

7.38. Доказать, что сходимость ряда из комплексных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ эквивалентна сходимости двух действительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $c_n = a_n + ib_n$.

► Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A и B соответственно. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\ \forall n\geqslant N_1 \Rightarrow |A_n-A|<$ $<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists N_2\ \forall n\geqslant N_2 \Rightarrow |B_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, где A_n, B_n — частичные суммы этих рядов. Тогда, для $\forall n\geqslant \max\{N_1,N_2\}$

$$|A_n+iB_n-(A+iB)| = |A_n-A+i(B_n-B)| \leqslant |A_n-A|+|B_n-B| < 2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Откуда следует, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся к числу $A+iB$.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится к $A+iB$. Тогда по определению $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N$

$$|\sum_{k=1}^{n} c_k-(A+iB)| = |A_n+iB_n-(A+iB)| = \sqrt{(A_n-A)^2+(B_n-B)^2}<\varepsilon,$$

откуда $|A_n-A|<\varepsilon$ и $|B_n-B|<\varepsilon$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к A, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится к B. ■

Определение 7.3. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots . \tag{7.4}$$

Множество точек x, в которых ряд (7.4) сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Любой ряд вида (7.4) сходится как минимум в одной точке $x=x_0$.

7.39. Привести пример степенного ряда, сходящегося только в одной точке.

◊ *Указание.* Рассмотреть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ и убедиться, что при $x\neq 0$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 7.9 (Абеля). Если степенной ряд (7.4) сходится в точке $\bar{x}\neq x_0$, то он абсолютно сходится в любой точке x такой, что $|x-x_0|<|\bar{x}-x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда существует действительное число $R\geqslant 0$, называемое радиусом сходимости степенного ряда, такое, что в интервале $|x-x_0|<R$ ряд (7.4) сходится абсолютно, а при $|x-x_0|>R$ ряд расходится. Если $R=0$, то это означает, что ряд (7.4) сходится лишь в одной точке $x=x_0$. Если $R=\infty$, значит, степенной ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой. Интервал $(x_0-R;x_0+R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

7.40. Привести пример степенного ряда, сходящегося всюду.

Теорема 7.10 (Коши–Адамара). Радиус сходимости R степенного ряда (7.4) определяется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{7.5}$$

Заметим,что в формуле Коши–Адамара можно заменить верхний предел $\varlimsup$ на просто предел lim, если только последний существует. Кроме того, радиус сходимости R может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{7.6}$$

если этот предел существует (см. задачу 1.30).

7.41. Привести пример степенного ряда с заданным радиусом сходимости R_0.

◊ *Указание.* Рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{R_0^n}$ и воспользоваться формулой (7.6).

7.42. Показать, что в концевых точках $x = x_0 \pm R$ интервала сходимости степенной ряд может сходиться как абсолютно, так и условно, а может и расходиться. Привести соответствующие примеры.

7.43. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — радиус сходимости R_2. Доказать, что для радиуса сходимости R ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$ верно неравенство $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$. Причем $R = \min\{R_1, R_2\}$ если $R_1 \neq R_2$.

► Обозначим $r = \min\{R_1, R_2\}$. Для любого $x \in (-r, r)$ сходятся оба ряда, и значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$. Таким образом, $R \geqslant r$.

Если $R_1 = R_2$, то возможно $R > r$. Например, если $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1-\alpha^n}{n\alpha^n}$, где $\alpha > 1$, то $R_1 = R_2 = 1$, $a_n + b_n = \frac{1}{\alpha^n}$, и значит, $R = \alpha > r = 1$.

Если $R_1 \neq R_2$, то для всех x_0 таких, что $\min\{R_1, R_2\} < x_0 < \max\{R_1, R_2\}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$ расходится как сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов. Более того, по теореме Абеля он будет расходится для всех x таких, что $|x| > |x_0|$. Таким образом, $R = r$. ■

7.44. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^2+1}} x^n$; **б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n - \sin n}$; **в)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n x^n$.

◊ *Указание.* В **а)** для доказательства монотонности последовательности $\left\{\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ исследовать на монотонность функцию $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}}$, для чего рассмотреть её производную.

*Здесь $\varlimsup$ обозначает верхний предел последовательности.

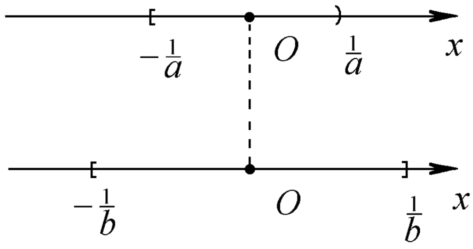

Рис. 31

7.45. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n, \quad a,b>0.$$

► Представим ряд как сумму двух рядов

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\,x^n \quad \text{и } S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}\,x^n.$$

Для ряда $S_1(x)$ радиус сходимости $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}}}=\dfrac{1}{a}$. При $x=\dfrac{1}{a}$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}\cdot\dfrac{1}{a^n}=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, а при $x=-\dfrac{1}{a}$ получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ — условно сходящийся ряд. Таким образом, $S_1(x)$ сходится абсолютно при $x\in\left(-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$ и условно при $x=-\dfrac{1}{a}$.

Для ряда $S_2(x)$ радиус сходимости $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}}}=\dfrac{1}{b}$. В точке $x=\dfrac{1}{b}$ ряд сходится, в точке $-\dfrac{1}{b}$ сходится абсолютно. Таким образом, ряд $S_2(x)$ сходится абсолютно при всех $x\in\left[-\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{b}\right]$.

При $a>b>0$ получаем (см. рис. 31), что исходный ряд сходится на $\left[-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$, причем в точке $x=-\dfrac{1}{a}$ — условно, а на $\left(-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$ — абсолютно (см задачи 7.43 и 7.36).

При $0<a<b$ получаем (см. рис. 32), что исходный ряд сходится абсолютно при $x\in\left[-\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{b}\right]$ (см задачи 7.43 и 7.36).

При $a=b>0$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n(n+1)}{n^2}x^n$, сходящийся абсолютно при $x\in\left(-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$ и условно при $x=-\dfrac{1}{a}$.

Учитывая все выше изложенное, получаем ответ: при $a>b>0$ ряд сходится абсолютно на $\left(-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$, в точке $x = -\dfrac{1}{a}$ сходится условно; при $0 < a < b$ ряд сходится на $x \in \left[-\dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{b}\right]$ абсолютно; при $a = b > 0$ сходится на $\left[-\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{a}\right)$, причем в точке $x = -\dfrac{1}{a}$ сходится условно. ■

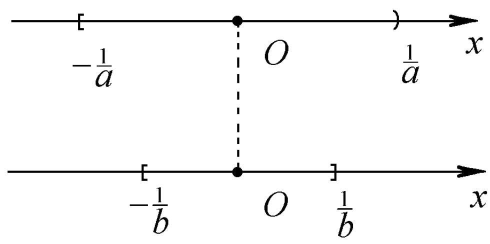

Рис. 32

7.46. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^n.$$

► Радиус сходимости ряда равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!!\,(2n+3)!!}{(2n+1)!!\,(2n+2)!!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, который расходится, а при $x = -1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(2n)!!}{(2n+1)!!}$, сходящийся условно (см. задачу 7.35).

Тем самым, мы получили ответ: сходится абсолютно при $|x| < 1$, сходится условно при $x = -1$. ■

7.47. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

7.48. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

► При исследовании этого ряда легко допустить ошибку в вычислении радиуса сходимости. Действительно, неправильно применяя формулу (7.6), получаем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$

Таким образом, ряд должен быть абсолютно сходящимся на интервале $(-2;2)$. Однако, в точке $x=\dfrac{3}{2}$ мы получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n^2}}{2^{n^2+n}}$. Применяя к этому ряду признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^2+n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}=\infty,$$

т. е. ряд расходится.
Приведем верные рассуждения. Обращая внимание на степени переменной x, выпишем коэффициенты a_n из представления (7.4):

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^k}, & n=k^2, \quad k=0,1,2,\ldots,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Применить к такой последовательности формулу (7.6) невозможно, и нужно проводить вычисления по (7.5), вычисляя именно верхний предел.
Однако, можно поступить иначе. Пусть x — фиксировано. Исследуем ряд на абсолютную сходимость, используя признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm1,\\ \infty, & |x|>1.\end{cases}$$

Таким образом, при $|x|\leqslant 1$ ряд сходится абсолютно, а при $|x|>1$ — расходится. ■

Теорема 7.11 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Степенной ряд (7.4) внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать, т. е. при $x\in(x_0-R;x_0+R)$ существует

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots$$

Это утверждение справедливо и для концов интервала сходимости при условии, что ряд, составленный из производных сходится в концевых точках.

7.49. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет уравнению $y^{IV}-y=0$.

7.50. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{(n!)^2}$ удовлетворяет уравнению $xy''-y'-y=0$.

С помощью почленного дифференцирования найти суммы рядов:

7.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$.

◊ *Указание.* Ввести новую переменную $t=\dfrac{x}{3}$.

7.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2nx^{2n}}{n\,(2n-1)}$.

► Обозначим сумму ряда $S(x)$. Тогда

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2nx^{2n-1}}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)};$$

$$S''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Так как последний ряд есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\left(-x^2\right)$, то радиусы сходимости $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ равны 1, т.е. ряды сходятся при $|x| < 1$. Заметим, что при $x = \pm 1$ ряд $S(x)$ также сходится. Интегрируя, находим, так как $S'(0) = 0$, $S(0) = 0$,

$$S'(x) = 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + C = 2\operatorname{arctg} x \quad (C = 0)\,,$$

$$S(x) = 2\int_0^x \operatorname{arctg} t dt + C = 2\operatorname{arctg} x \cdot x + \ln\left(1+x^2\right) \quad (|x| \leqslant 1)\,.$$

■

7.53. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Теорема 7.12 (о почленном интегрировании степенного ряда). Степенной ряд (7.4) на любом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости, можно интегрировать почленно, т. е. на отрезке $[x_0; x]$, где $|x - x_0| < R$, верно

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots\,.$$

С помощью почленного интегрирования найти суммы рядов:

7.54. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n!} x^{2n}$.

► Обозначим сумму ряда $S(x)$. Тогда

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = xe^{x^2},$$

$$S(x) = \left(xe^{x^2}\right)' = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

7.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

► Для суммы ряда $S(x)$ имеем

$$\int\limits_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \cdot S_1(x),$$

$$\int\limits_0^x S_1(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1;$$

$$S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$S(x) = (x \cdot S_1(x))' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

■

7.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,(n+2)\,x^n.$

Найти суммы рядов:

7.57. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n\,(n+1)}{n!}.$

► Для суммы S ряда имеем:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = S_1 + S_2,$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2.$$

Для S_1 имеем $S_1 = S_1(2)$, где

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x.$$

Таким образом

$$S = e^2 + S_1(2) = e^2 + 2e^2 = 3e^2.$$

■

7.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}.$

◊ *Указание.* Рассмотреть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} x^n.$

7.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,n}{(2n+1)!}.$

◊ *Указание.* Рассмотреть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,nx^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

7.60. Найти сумму ряда

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n (n+1)}{n!}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!2^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n2^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Определение 7.4. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся на множестве X, если при каждом $x \in X$ существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и $\forall\, \varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что при $n \geqslant N$ неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in X$.

В случае равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ используют обозначение

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

7.61. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $\{f_n(x)\}$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \{\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)|\} = 0.$$

7.62. Доказать, что если $f_n(x)$ — непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом отрезке, то функция $f(x)$ также непрерывна на $[a; b]$

7.63. Исследовать последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на равномерную сходимость в указанных промежутках:

а) $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$;

б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

► **а)** Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Из монотонности функции $f_n(x) = x^n$ следует, что

$$\max_{[0;\frac{1}{2}]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Используя результаты задачи 7.61, получаем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

б) Все функции $f_n(x) = x^n$ — непрерывны на отрезке $[0; 1]$. Заметим, что предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

имеет разрыв в точке $x = 1$. Предположим, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[0; 1]$, тогда из результатов задачи 7.62 следует, что предельная функция $f(x)$ должна быть также непрерывна на $[0; 1]$. Это противоречие доказывает, что последовательность $\{x^n\}$ сходится на $[0; 1]$ неравномерно. ■

7.64. Исследовать последовательности функций на равномерную сходимость в указанных промежутках:

а) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 33);

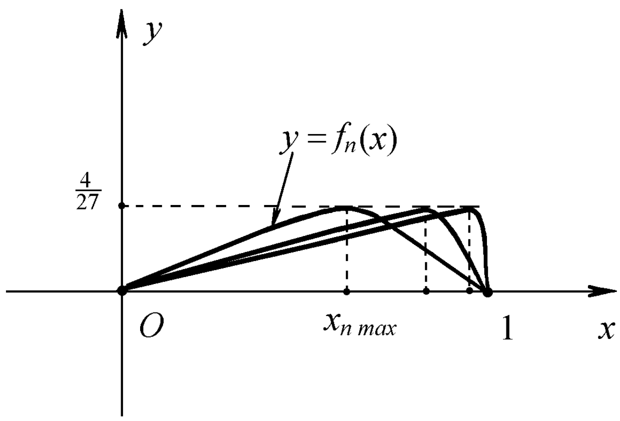

Рис. 33

► Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для любого $x \in [0;1]$. Найдем экстремум функции $f_n(x)$: $f'_n(x) = $ $= 2nx^{2n-1} - 3nx^{3n-1} = nx^{2n-1}(2-3x^n)$; $(x_n)_{max} = \sqrt[n]{\dfrac{2}{3}} \to 1 \quad (n \to \infty)$; $(f_n)_{\max} = \dfrac{4}{27}$. Таким образом, для $\varepsilon = \dfrac{4}{27}$ выполняется условие:

$$\forall N \quad \exists n = N \quad \exists x = (x_n)_{\max}: \quad |f_n(x)| \geqslant \varepsilon = \frac{4}{27},$$

т.е. последовательность не является равномерно сходящейся. ■

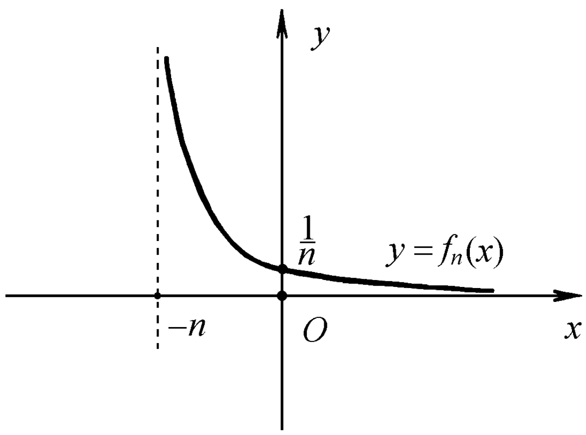

Рис. 34

б) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}, 0 < x < +\infty,\ n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 34);

в) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n},\ 0 < x < 1,\ n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 35).

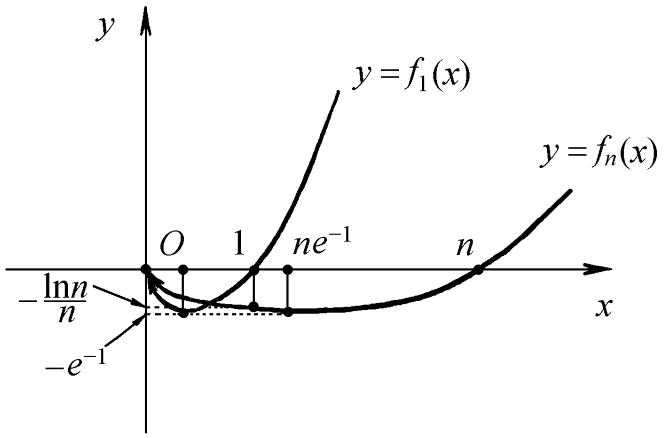

Рис. 35

Определение 7.5. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Теорема 7.13 (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда). Сумма равномерно сходящегося на множестве X ряда непрерывных функций также непрерывна на X.

7.65. Является ли равномерно сходящимся на $(-\infty; +\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$?

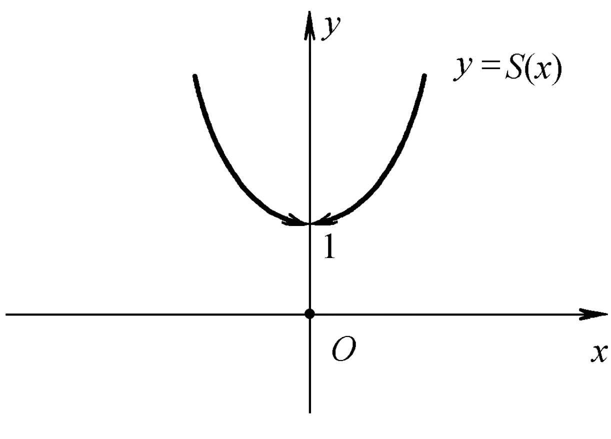

Рис. 36

► Сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

является разрывной в точке $x = 0$ функцией (см. рис. 36), и, следовательно, ряд не может быть равномерно сходящимся. ■

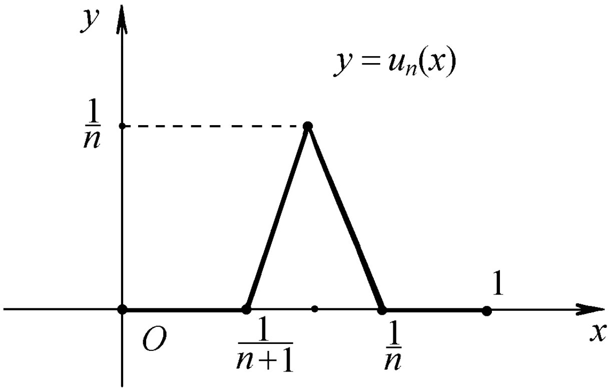

Рис. 37

7.66. Пусть $n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 37)

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ \text{линейна на отрезках} & \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}\right] \text{ и } \left[\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Является ли ряд равномерно сходящимся? Имеет ли ряд сходящуюся мажоранту?

◊ *Указание.* Ряд сходится равномерно к

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,\, x = 1/n, \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ \text{линейна при} & x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}\right], \\ \text{и при} & x \in \left[\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Проверить!

Сходящаяся мажоранта не существует, так как если $|u_n(x)| \leqslant a_n \ \forall x \in [0;1]$, то $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, но тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по первому признаку сравнения (теорема 7.3), так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

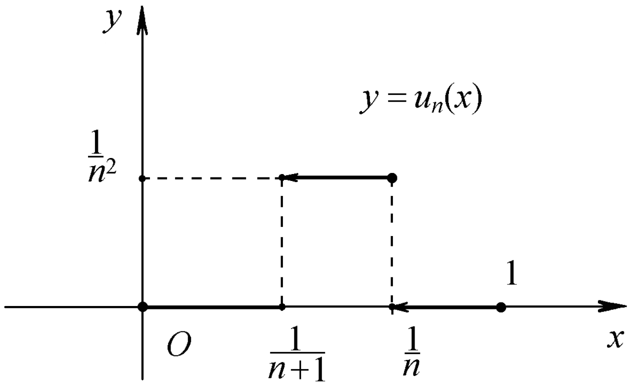

Рис. 38

7.67. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где (см. рис. 38)

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & x \in \left(\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{в остальных точках отрезка } [0;1], \end{cases}$$

равномерно сходится на $[0;1]$ (доказать!). Сумма ряда не является непрерывной функцией. Какое условие теоремы о непрерывности суммы функционального ряда, имеющего сходящуюся мажоранту, и теоремы 7.13 нарушено?

8 Различные задачи

8.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$

$\Diamond$ *Указание.* Применить утверждение задачи 1.30 к последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

8.2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, если

а) $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$; **б)** $a_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$; **в)** $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{3^n}$;

г) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{3^n n!} = \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$; **д)** $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot \ldots \cdot (5n-3)}$.

$\Diamond$ *Указания.* Применить утверждение задачи 1.30 в случаях **а)**, **б)**, **г)**, **д)**. В случае **в)** применить формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} q_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.

8.3. Пусть $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-1;1]$ и

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Дифференцируема ли $f(x)$ в точке $x = 0$?

8.4. Пусть $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-1;1]$ и

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}}, & x \in \left(\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Дифференцируема ли $f(x)$ в точке $x = 0$?

8.5. Пусть $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $(x_n, y_n) \in \overset{\circ}{U}(x_0,y_0)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a$.

8.6. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = a$ существует для всякой последовательности $(x_n, y_n) \in \overset{\circ}{U}(x_0,y_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

8.7. Доказать, что если $\varphi(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$, то $f(x,y) = \varphi(x)$ имеет $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$ в любой точке (x_0, y_0), $y_0 \in \mathbb{R}$.

8.8. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $F(x,y) = f(x)$ непрерывна в точке (x_0, y) для любого $y \in \mathbb{R}$. Сформулировать и доказать соответствующее утверждение для $f(y)$.

8.9. Доказать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0, \end{cases}$ непрерывна в любой точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

8.10. Пусть $\varphi(x,y)$ имеет предел u_0 при $x \to x_0$, $y \to y_0$, а $f(u)$ непрерывна в точке u_0. Доказать, что сложная функция $f(\varphi(x,y))$ имеет предел при $x \to x_0$, $y \to y_0$, равный $f(u_0)$.

8.11. Показать, что функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не имеет производной в точке $(0,0)$ ни по какому направлению и не является дифференцируемой в этой точке.

8.12. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y) = |x|^3 y$.

$\lozenge$ *Указание.* Применить теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции.

8.13. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y) = |x-y|^3$.

$\lozenge$ *Указание.* Применить теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции.

8.14. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на $[a,b]$. Доказать, что функция $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$ непрерывна на $[a,b]$.

8.15. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$ дифференцируема на $[a,b]$ и найти $F'(x)$.

8.16. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \not\equiv 0$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

8.17. Пусть $\breve{AB} = \breve{AC} \bigcup \breve{CB}$, где C — точка на $\breve{AB}$, $C \neq A$, $C \neq B$. Доказать, что если $\breve{AB}$ спрямляема, то $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$ спрямляемы, при этом $l_{\breve{AB}} = l_{\breve{AC}} + l_{\breve{CB}}$.

8.18. Доказать, что условие "f интегрируема на $[a, \eta]$ для любого $\eta \geqslant a$" в задаче 5.35 опустить нельзя. Привести пример.

8.19. Уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ с непрерывными на $\langle a, b \rangle$ коэффициентами $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ имеет частное решение $\bar{y}$; пусть $x \in (a, b)$. Может ли это уравнение иметь решение

$$\textbf{а)}\ \bar{y} + (x - x_0)^2; \quad \textbf{б)}\ \bar{y} + \cos(x - x_0) - 1?$$

8.20. Пусть общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 e^x + C_3(x + x^2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Может ли быть частным решением этого уравнения функция

$$\textbf{а)}\ y = x + 1; \quad \textbf{б)}\ y = x^2?$$

8.21. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного дифференциального уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение данного уравнения.

8.22. Зная частные решения $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ уравнения $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$, найти его общее решение.

8.23. Зная три частных решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ линейного неоднородного дифференциально уравнения второго порядка, написать его общее решение.

8.24. Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий:

а) $x^2 + Cy^2 - 2y = 0$;

б) $(x - a)^2 + by^2 = 1$.

8.25. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

8.26. Доказать, что кривая, все нормали к которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

8.27. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox, касательной и нормалью к этой кривой.

8.28. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси Ox от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

8.29. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

8.30. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скорость. Сколько останется соли в баке через час?

8.31. В воздухе комнаты объемом 200 м^3 содержится 0,15% углекислого газа CO_2. Вентилятор подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

8.32. Доказать, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

8.33. Найти сумму ряда $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$.

$\Diamond$ *Указание.* $y\,(x)$ удовлетворяет уравнению $y^{IV} - y = 0$. Найти начальные условия и соответствующее частное решение этого уравнения.

8.34. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n\,(n+1)}{n!}$.

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

8.35. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} a^n$.

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} x^n$.

8.36. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$\Diamond$ *Указание.* Рассмотреть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2}(x\cos x - \sin x)$.

8.37. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ $(a > 0)$ образуют с плоскостями координат треугольную пирамиду постоянного объема.

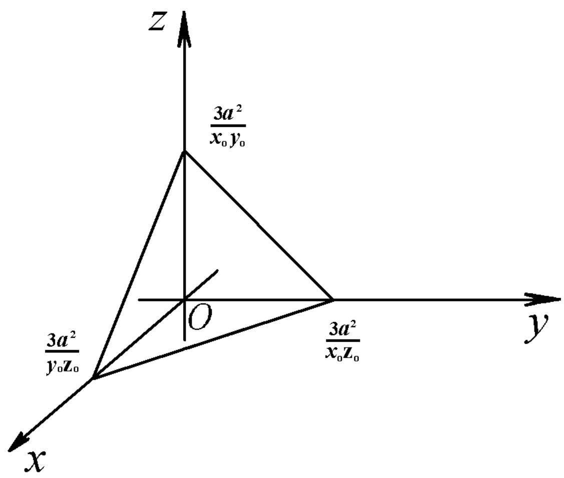

Рис. 39

► Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на поверхности. Найдем уравнение касательной плоскости в этой точке:

$$F(x, y, z) = xyz - a^3 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy,$$
$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0,$$
$$y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0.$$

Заметим, что координаты точки (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют уравнению поверхности, а значит, $x_0y_0z_0 = a^3$. Таким образом, окончательно уравнение касательной плоскости имеет вид

$$y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3a^3.$$

Заметим, что из уравнения поверхности следует, что x_0, y_0, $z_0 \neq 0$, и напишем для этой плоскости уравнение в отрезках

$$\frac{x}{3a^3/y_0z_0} + \frac{y}{3a^3/x_0z_0} + \frac{z}{3a^3/x_0y_0} = 1.$$

Значит, треугольная пирамида, образованная касательной плоскостью с координатными плоскостями, имеет вершины в точках $O(0, 0, 0)$, $A\left(\frac{3a^3}{y_0z_0}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3a^3}{x_0z_0}, 0\right)$, $C\left(0, 0, \frac{3a^3}{x_0y_0}\right)$ (см. рис. 39). Её объем равен

$$V = \frac{1}{6}\frac{27a^9}{x_0^2y_0^2z_0^2} = \frac{9}{2}\frac{a^9}{(x_0y_0z_0)^2} = \frac{9}{2}\frac{a^9}{a^6} = \frac{9}{2}a^3.$$

■

8.38. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

9 Ответы

Последовательности, понятие предела

1.3. Не будет. **1.5.** $\{a_n + b_n\}$ может оказаться возрастающей, убывающей, немонотонной. **1.6.** Может возрастать, убывать или не быть монотонной. **1.7.** Не обязательно. **1.8.** 0; 1. **1.9.** -5; 7/2. **1.10.** -1; 3/2. **1.17.** Не существует. **1.18.** Не существует. **1.23.** Может сходиться и может расходиться. **1.25.** Нет. **1.26.** Нет.

Функции, предел и непрерывность

2.14. Нет. **2.16. а)** Да; **б)** Нет. **2.17. а)** Нет; **б)** Нет. **2.23. а)** Нет; **б)** Нет. **2.24.** Нет. **2.26.** Да. **2.27.** Да. **2.29.** Да. **2.30.** $C = 1$. **2.31. а)**, **б)** Непрерывна при $x \neq 0$; **в)** Непрерывна на $[0; \infty)$; **г)** Непрерывна на $[0; 1) \cup (1; 2]$.

Производная

3.1. б) $2x_0$; **в)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. **3.2. а)** Да; **б)** Нет. **3.3. а)** Нет; **б)** Нет. **3.4. а)** Нет; **б)** Нет; **в)** Нет. **3.5. а)** Может; **б)** Может. **3.6. а)** Не обязательно; **б)** Не обязательно. **3.7.** Не обязательно. **3.8.** Не обязательно. **3.9.** Не обязательно. **3.10.** Вообще говоря, нельзя. **3.17.** Да; $f'(0) = 0$. **3.18. а)** Нет; **б)** Нет. **3.19. а)** Нет; **б)** Нет; **в)** Нет. **3.20. а)** Да; **б)** Да. **3.22.** $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n = 1, 2, \ldots$ **3.25.** Вообще говоря, нет. **3.26.** Нет. **3.27.** Нет. **3.31.** Нет. **3.32.** Нет. **3.37. б)** $a = 1$; $f'(0) = \dfrac{1}{2}$; $f''(0) = \dfrac{1}{3}$; $f'''(0) = \dfrac{1}{4}$; $f^{IV}(0) = \dfrac{1}{5}$.

Функции многих переменных

4.7. б) a. **4.16.** Недифференцируема; $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. **4.17. а)** f'_x не существует в точках $(0; y)\,, y \neq 0$; в остальных точках функция дифференцируема; **б)** f'_x не существует в точках $(0; y)\,, y \neq 0$; f'_y не существует в точках $(x; 0)$, $x \neq \neq 0$; в остальных точках функция дифференцируема. **4.20.** Нет. **4.22.** В точках $(x; 0)$, $x > 0$, нестрогий локальный минимум; в точках $(x; 0)$, $x < 0$, нестрогий локальный максимум, точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума. **4.23.** Нет локальных экстремумов. **4.24.** Нет локальных экстремумов.

Первообразная, определенный интеграл

5.3. а) $e^x + C$ при $x \geqslant 0$, $\dfrac{x^2}{2} + x + 1 + C$ при $x < 0$; **б)** $x \ln x - x + C$ при $x \geqslant 1$, $\dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2} + C$ при $x < 1$; **в)** $\dfrac{|x|^3}{3} + C$; **г)** $\dfrac{x^4}{4} \operatorname{sign} x + C$. **5.9. а)** Интегрируема;

(точной) первообразной не имеет (см. задачу 3.18а); **б)** $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$; не имеет (см. 3.18б); **в)** $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$; не имеет. **5.11.** 1 в рациональных точках, -1 в иррациональных. **5.18.** $\dfrac{1}{x(x-1)}$ при $x \in (0,1)$, 0 при $x = 0$, $x = 1$. **5.20.** 1. **5.23.** Условие непрерывности. **5.24. б)** Минус; **в)** Плюс; **г)** Минус. **5.30.** Нет. **5.31.** Да. **5.34. а)** -1; **б)** $\dfrac{\pi}{2}$; **в)** $\dfrac{\pi}{2}$; **г)** $\dfrac{2}{3}\ln 2$; **д)** 1; **е)** $\dfrac{a}{b^2+a^2}$; **ж)** 2. **5.39. а)**, **б)**, **в)** Расходятся; **г)** Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$; **д)** Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$; **е)** Расходится; **ж)** Сходится; **з)** Сходится; **и)** Сходится абсолютно; **к)** Расходится; **л)** Расходится;

Дифференциальные уравнения

6.2. Нет. $y' = 1$ и $y' = -1$ — два разных уравнения, разрешенных относительно производной. **6.6.** $y = \operatorname{tg} x - \sec x$. **6.8. а)**, **б)** Нет; **в)** Да. **6.9.** При $n = 1$ ни одной; при $n = 2$ одна; при $n \geqslant 3$ бесконечно много. **6.10.** При $n = 1$ ни одной, если $f(x_0, y_0) \neq \operatorname{tg}\alpha$, одна, если $f(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$; при $n = 2$ одна; при $n \geqslant 3$ бесконечно много. **6.11.** $n \geqslant 5$. **6.12.** Нет. **6.13.** $n \geqslant 4$. **6.14. а)** Нет; **б)** Да; **в)** Нет; **г)** Нет. **6.15. а)** Могут при $n \geqslant 2$; **б)** Могут при $n \geqslant 3$. **6.16. а)** Нет; **б)** Да. **6.18. а)**, **б)**, **г)** Линейно независимы; **б)**, **д)** Линейно зависимы. **6.19.** $n \geqslant 2$. **6.20.** Могут быть линейно зависимыми и линейно независимыми. **6.21.** Линейно независимы. Уравнение не удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. **6.23.** Одно, если графики этих решений касаются оси Ox, два в остальных случаях. **6.26. а)** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; **б)** $y''' - 3y'' = 0$; **в)** $y^{IV} - 4y''' + 24y'' - 40y' + 100y = 0$. **6.29.** $C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x\operatorname{tg} x)$. **6.32. а)** $y = C_1\dfrac{e^{-x}}{x} + C_2\dfrac{e^{2x}}{x}$; **б)** $y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x \operatorname{tg} x)$. **6.33. а)** $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$; **б)** $y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x$; **в)** $y = C_1(x \ln|x| + 1) + C_2 x$. **6.37.** $x^2 + y^2 = Cx$. **6.39.** $x^2 + y^2 = 1$.

Ряды

7.2. Расходится. **7.3.** Нет. **7.4.** Может сходиться или расходиться. Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходятся, а с ними расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \pm \dfrac{1}{n}\right)$. Однако, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-n}{n^2}$ расходятся, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1-n}{n^2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится. **7.8.** Нет. **7.15.** Можно, если a_n, $b_n > 0$, нельзя в общем случае. **7.17. а)**, **в)**, **д)** Сходятся; **б)**, **г)**, **е)** Расходятся. **7.34.** При $p > 1$ сходится абсолютно, при $0 < p \leqslant 1$

сходится условно, при $p \leqslant 0$ расходится. **7.37.** Вообще говоря, нельзя. **7.40.** Например, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. **7.44. а)** При $x \in (-1;1)$ сходится абсолютно, при $x=-1$ сходится условно; **б)** При $x \in (-1;1)$ сходится абсолютно, при $x=-1$ сходится условно; **в)** Сходится абсолютно при $x \in \left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$. **7.47.** $R = \dfrac{1}{3}$, интервал сходимости $\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$, при $x = -\dfrac{4}{3}$ — сходится условно, при $x = -\dfrac{2}{3}$ — расходится. **7.51.** $-\ln(3-x)+\ln 3$, при $-3 \leqslant x < 3$. **7.53.** $\dfrac{1}{4}\left(2\operatorname{arctg} x - \ln(1-x) + \ln(1+x)\right)$ при $|x|<1$. **7.56.** $\dfrac{3x-x^2}{(1-x)^3}$ при $|x|<1$. **7.58.** $2e$. **7.59.** $\dfrac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$. **7.60. а)** $4e^3$; **б)** $\dfrac{3}{4}\sqrt{e}$; **в)** $\cos 2 - \dfrac{1}{2}\sin 2$. **7.64. б)** Сходится равномерно к $f(x) \equiv 0$, так как $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall\, x \in (0;+\infty)$; **в)** Сходится равномерно к $f(x) \equiv 0$, так как $|f_n(x)| \leqslant |f_n(1)| = \dfrac{\ln n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall\, x \in (0;1)$. **7.67.** Функции $u_n(x)$ не являются непрерывными на $[0;1]$.

Различные задачи

8.2. а) $\dfrac{2}{e}$; **б)** $\dfrac{4}{e}$; **в)** ∞; **г)** $\dfrac{2}{3}$; **д)** $\dfrac{3}{5}$. **8.3.** Да; $f'(0) = 1$. **8.4.** Нет. **8.12.** Дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^2$. **8.13.** Дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^2$. **8.19.** Нет. **8.20. а)** Нет; **б)** Да. **8.21.** $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$. **8.22.** $y = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{x-1} + x$. **8.23.** $y = 1 + C_1(x-1) + C_2(x^2-1)$. **8.24. а)** $(x^2-y)y' - xy = 0$; **б)** $y^3y'' + ((y')^2 + yy'')^2 = 0$. **8.25.** $y = \dfrac{2a^2}{C \pm x}$. **8.27.** $(x-C)^2 + y^2 = C^2$. **8.28.** $x = y(C - k\ln|y|)$. **8.29.** $y = \dfrac{Ca^2}{x} + Cx^2$. **8.30.** $10e^{-3}$ кг $\approx 0,5$кг. **8.31.** Через $10\ln 11 \approx 24$мин. **8.33.** $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x} + \cos x)$. **8.34.** $(a+1)\,e^a$. **8.35.** $a\,(a+1)\,e^a$. **8.36.** $\dfrac{1}{2}(a\cos a - \sin a)$.

Указатель теорем

Список литературы

1. Сударев Ю.Н. *Курс лекций по высшей математике.* М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2001, 80 с.

2. Сударев Ю.Н., Першикова Т.В., Радославова Т.В. *Основы линейной алгебры и математического анализа.* М.: Академия, 2009, 352 с.

3. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа. Том 1.* М.: Высшая школа, 1981, 687 с.

4. Демидович Б.П. *Задачи и упражнения по математическому анализу.* М.: Наука, 1990, 624 с.

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу.* М.: МГУ, 1988, 416 с.

6. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Справочное пособие по высшей математике. Том 1. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл.* М.: УРСС, 2000, 360 с.

7. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Справочное пособие по высшей математике. Том 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента.* М.: УРСС, 1995, 223 с.

8. Шибинский В.М. *Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа.* М.: Высшая школа, 2007, 543 с.

9. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* М.-Л.: Гостехиздат, 1939, 384 с.

10. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1992, 128 с.

11. Першикова Т.В., Александрова Е.В., Бобров А.Н. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2003, 60 с.

12. Боярчук А.К., Головач Г.П. *Справочное пособие по высшей математике. Том 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах.* М.: УРСС, 1998, 384 с.

13. Бэйли Н. *Математика в биологии и медицине.* М.: Мир, 1970, 326 с.

14. Гильдерман Ю.И. *Лекции по высшей математике для биологов.* Новосибирск: Наука, 1974, 410 с.

15. Першикова Т.В., Бобров А.Н. *Высшая математика. Исследование рядов.* М.: МГУ, 2000, 52 с.

Доцент кафедры математического анализа механико–математического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
кандидат физико–математических наук
Бобров Александр Николаевич

Доцент кафедры математического анализа механико–математического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
кандидат физико–математических наук
Радославова Татьяна Васильевна

Задачи по высшей математике для биологов
Учебное пособие

Рецензенты:
доктор физико–математических наук, зав. лаборатории *С.Ю. Мисюрин*
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
кандидат физико–математических наук, доцент *Ю.Н. Сударев*
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Подготовка оригинал–макета — А.Н. Бобров