② Детерминированное явление - если есть некий комплекс условий, обеспеч. событие, то оно всегда выполняется.

Случайное событие - любой исход опыта, который может как произойти, так и не произойти, т.е. может произойти с различными взаимоисключ. исходами.

Случайный эксперимент - математич. модель соотв-го реального эксперимента, результат которого невозможно предсказать.

Статистическая устойчивость частот при увеличении величины выборки частота случ. события стремится к фиксир.-ному числу. $\frac{M(A)}{N_0} = const$

Пространство элемент. исходов $-(\Omega)$ непустое множ-во, элементы которого символизируют тот или иной исход рассматр. процесса.

- Дискретное - число элемент. исхо-в конечно.
- Произвольное (непрерывное) - множ-во исходов не являющ-ся конечным.

Действия над событиями:

Сумма: $A \cup B$ · (произошло либо A, либо B.

Произведение $A \cap B$ произошло и A, и B.

Разность $A \setminus B$ A произошло, B - нет

Обратное соб-е $\bar{A}$ · A не произошло

Связь формулировок

	теория множеств	теор. вер.
Ω	множ-во пространство	ПЭИ, достоверное событ.
ω	элемент мн-ва	элемент. событие
$A\cup B$	объединение мн-в	сумма событий
$A\cap B$	пересечение мн-в	произвед-е событий
$A\setminus B$	разность мн-в	разность событий
$A\cap B=\varnothing$	мн-ва не пересек.	события несовместны
$A=B$	множ-ва равны	события равносильны
$A\subset B$	A подмнож B	A влечет B

Алгебра событий - $\mathcal{F}$ - множ-во подмнож-в называется алгеброй если:

1) $\Omega\in\mathcal{F}$, $\varnothing\in\mathcal{F}$
2) $A\in\mathcal{F}$, то $\bar{A}\in\mathcal{F}$.
3) $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$, то $A\cup B\in\mathcal{F}$, $A\cap B\in\mathcal{F}$.

если доп-но выполняется: $A_n\in\mathcal{F}$,

$\bigcup\limits_n A_n\in\mathcal{F}$, $\bigcap\limits_n A_n\in\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ - σ-алгебра

Вероятностное пространство - тройка символов: Ω - множ-во элемент. исходов

$\mathcal{F}$ - σ-алгебра событий

$P(A)$ - вероятность опред. на σ-алгебре

Формализация задачи - состоит в определении вероятностного пр-ва с параметрами: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(3) ПЭИ дискретно, если оно конечно, тогда $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Вероятность: (задание вер-ти)

Ω-дискретное ПЭИ тогда $P: \Omega \to \mathbb{R}$ / наз-ся вероятностной мерой (вероятностью) если $\forall \omega \in \Omega$ $P(\omega) \geq 0$. —

$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. тогда $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) = \sum P(\omega)$

Теорема сложения:

Ω-дискр. ПЭИ.

$\forall A, B \in \mathcal{F}$, $AB = \varnothing$. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Д-во:

$P(A+B) = \sum_{\omega \in A+B} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) = P(A) + P(B)$

Обобщенная:

Ω-дискр. ПЭИ.

$\forall A_1, \dots A_n \in \mathcal{F}$: $A_i A_j = \varnothing$ $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$

$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$. (д-во по индукции

Аксиомы:

A1: $\mathcal{F}$ - σ-алгебра событий

A2: $\forall A \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$ соб-ю A ставится в соответствие его вероятность $P(A) \geq 0$.

A3 $P(\Omega) = 1$.

A4 (конечной аддитивности).

$A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$ $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

A4* (усиление):

$A_1 A_2 \dots A_n \in \mathcal{F}$ $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Классическое определение вер-ти:

$\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ - ПЭИ

$\mathcal{F}$ - σ-алгебра, содерж все 2^n подмнож-в

$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \dots \omega_{i_m}\}$ мн-ва Ω.

$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots n$. $\rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$

$|A|$ - число эл-в множ-ва A.

Статистическое опред-е:

n - число испытаний.

μ - число появлений соб-я A при n независ. испытаний.

μ/n - частота появления A

$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\mu}{n}$.

(4) Комбинаторика - раздел математики, занимся подсчетом числа комб-ий элементов конечного множ-ва при опред. усл-ях

Генеральная совокупность объема n - произвольное конечное множ-во E. $E=\{a_1, \dots a_n\}$ выборкой из генеральной совокупности объема r наз-ся произв. набор элементов $E(A)=\{a_{i_1}, \dots a_{i_r}\}$

Правило умножения - если $\exists N_1$ спос-в выполнить действие 1 а затем N_2 спос-в выполнить действие N_2, то $\exists N_1 N_2$ способов выполнить N_1 и N_2 последов.

Правило сложения - если сущ. N_1 способов выполнить действие 1 и N_2 способов выполнить действие N_2, то $\exists N_1+N_2$ способов выполнить 1 или 2.

Выборки	Упоряд.	Неупоряд.
с возвр-м	n^r	C^r_{n+r-1}
без возвр-я	A_n^r	C_n^r

Подсчет числа выборок (N) объема r из n-ген. сов-ти

1) Упоряд. с возвр-м: на каждом месте наход-ся один из n эл-в, по пр. умнож-я: $N=n^r$.

2) Упоряд без возвр-я: на 1-ом месте один из n, на 2-ом один из n-1 и т.д. $N=n(n-1)\dots(n-r+1)$. $= \frac{n!}{(n-r)!} = A_n^r$

3) Неупоряд без возвр-я ~~А~~ размещ-е могут реализ r! способами $N= \frac{A_n^r}{r!} =$

$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$

4) Неупоряд без возвр с: сопост каждой выборке двоичный вектор:
$E=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $A\{a_1, a_2, a_1, a_1\} \to (111010)$ (нули раздел-т.)
$\exists$ двоичный вектор: $n+r-1$, r единиц.
$\exists$ $N = C^r_{n+r-1}$ таких векторов.

Число размещений по ячейкам (r).

частицы	Различимые	Неразличимые
с запретом	$\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$	C^{r-1}_{n-1}
без запрета	r^n	C^{r-1}_{n+r-1}.

1) Различ. без запрета: каждая частица может попасть в любую из r: $N=r^n$
2) Различ. с запретом: в 1-ую n_1 из n эл. в во 2-ую n_2 из $n-n_1$ эл-тов $N=C^{n_1}_n \cdot C^{n_2}_{n-n_1} \dots C^{n_r}_{n-n_1-\dots-n_{r-1}}$ $= \frac{n!}{(n-n_1)! \, n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! \, n_2!} \dots = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$.
3) Неразлич без запрета: дв-ый вектор..., получ-ся вектор $n+r-1$ длиной, содерж n единиц. $N = C^n_{n+r-1} = C^{r-1}_{n+r-1}$
4) Неразлич. с запретом: снимем запрет, заранее поместив в к. ячейку по 1-ой частице: $N=C^{r-1}_{n-r+r-1} = C^{r-1}_{n-1}$.

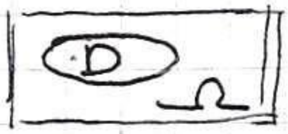
Исп-м класич. опред вер-ти
N шаров M белых $N-M$ черных, зачерп-на выбир n шаров. (Неупор без возвр.), P(m белых)
$|\Omega| = C^n_N$ $\quad P(A_m) = \frac{C^m_M \, C^{n-m}_{N-M}}{C^n_N}$.

Разбиение на подмнож-ва:
$A=\{a_1, a_2, \dots a_n\} = B_{n_1} \cup \dots B_{n_m}$; $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$
$t = C^{n_1}_n \, C^{n_2}_{n-n_1} \dots C^{n_m}_{n-n_1-\dots-n_{m-1}} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_m!}$

(5) Аксиомы

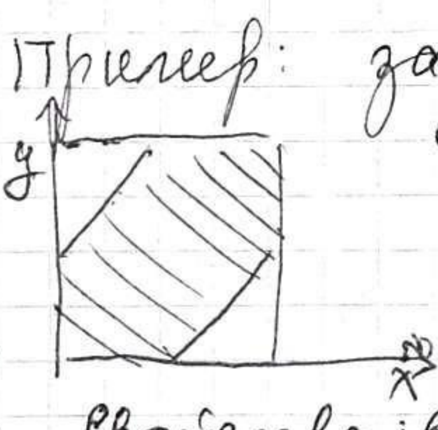
А1) $\mathcal{F}$ - σ алгебра событий
А2) $\forall A \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$ соб-ю A ставится в соотв-е её вероятность $P(A) \geq 0$.
А3) Акс $P(\Omega) = 1$.
А4) акс-ой аддитивности:
$A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathcal{F}$ $\quad P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.
А4*) $A_1, A_2 \ldots A_n$ $\quad P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Геометрич. определение: используют, если ПЭИ - бесконечное множ-во



Вер-ть попадания т x в D
$\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad P(A) = \frac{mes D}{mes \Omega}$
mes-мера области (l, S, V).

Пример: задача о встрече



Свойства вероятности:

1) $A + \bar{A} = \Omega$ $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. по А3, А4.
2) $A = \Omega$, $P(\varnothing) = 0$.
3) $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
4) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $\quad$ A, B-несовм.

Д-во: $A + B = A + B\bar{A}$, $B = B\bar{A} + BA$

$P(A+B) = P(A) + P(B\bar{A})$

$P(B) = P(B\bar{A}) + P(AB)$ ..

5) A, B - любые $P(A+B) \leq P(A) + P(B)$.

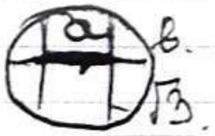
6) $A \subset B$ $P(A) \leq P(B)$. A и $B\bar{A}$ - несовм.

Д-во: $B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B\bar{A})$

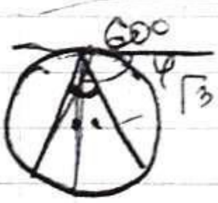
$A \cap B\bar{A} = A\bar{A}B = \varnothing$.

$P(B) = P(A) + P(B\bar{A})$.

Парадокс Бертрана: с какой вер-ю произв хорда длиннее стороны равност. впис. в Δ ($\sqrt{3}$)? Ответ завис. от способа измерения.

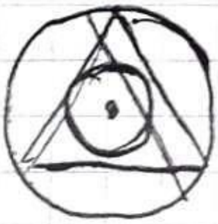
1) 

$P = \frac{a+2в}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

2) 

через угол: $60° < \varphi < 120°$

$P = \frac{120-60}{180-0} = \frac{1}{3}$.

3) 

Отношение S впис и S опис.

$P = \frac{\pi (0{,}5)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$.

(6) Условная вероятность - $A, B \in \mathcal{F}$,
$P(B)>0$ тогда: условная вероятность
событ при усл B явл-ся $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Теорема умножения $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A), P(B)>0$
тогда: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.
Д-во из опред-я усл. вероятности.
Обобщ-е теорема умножения:
$A_1, \dots A_n \in \mathcal{F}$ $\forall k = \overline{1,n}$ $P(A_1 \dots A_k) > 0$, тогда
$P(A_1, \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.
доказ-ся по индукции.

Независимость: $A, B \in \mathcal{F}$, A и B независ-мы,
если $P(AB) = P(A) P(B)$
Д-во: $P(A) P(B) > 0$, $P(A|B) = P(A)$
усл. вероятн = безусл. $P(B|A) = P(B)$.

Независимость в совокупности:
$A_1, \dots A_n \in \mathcal{F}$ $A_1, \dots A_n$ независ в
совокупности если $\forall k \in \overline{2,n}$
$i_1 \dots i_k$ $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$: $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$

Пример Бернштейна:
Тэтраэдр; грани: синяя, красная, белая, 3х цв-я.
C_1 - красный, C_2 - синий, C_3 белый
$P(C_1) = \frac{1}{2}$ $P(C_1 C_2) = \frac{1}{4} = P(C_2 C_3) = P(C_3 C_1) = P(C_1) \cdot P(C_2)$

$P(C_1 C_2 C_3) = \frac{1}{4} \neq P(C_1) P(C_2) P(C_3)$.

Формула полной вероятности

$H_1 \dots H_n$ образ полную группу событ, если $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, $H_i \neq \varnothing$ $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$ $i, j = \overline{1, n}$

Ф-ла: $H_1 \dots H_n$ полная группа соб-ий, тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$

Д-во: $A = A\Omega = A(H_1 \uplus H_2 \dots \cup H_i) =$
$AH_1 \cup AH_2 \cup \dots \cup AH_i$ $(AH_i \cap AH_j \neq \varnothing, \forall i, j \overline{1,n}, i \neq j)$

$\sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$.

Ф-ла Байеса:

$H_1 \dots H_n$ - полная гр. событий, тогда
$\forall A \in \mathcal{F}$ $\forall k = \overline{1, n}$ $P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} =$
$\frac{P(H|A_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i)}$.

(7) Схема Бернулли - последоват. n одинаковых независимых исп-ний, имеющих 2 возм-х несовмест. исхода, достиг-ся с вероятностями $p(n)$ = успех $q(n) = 1 - p(n)$ - неуспех.

Вероятн. пространство:

$\Omega = \{(i_1 \dots i_k)\ i = 0,1,\ k = 1,2 \dots n\}$.

$\Omega = 2^n$ - множ-во двоичных векторов длин. n

$\mathcal{F} = 2^{2^n}$.

Биномиальное распред-е. (пар-ры n и m)

μ_n число успехов

C_n^m число способов кот-ми осуществл. успех

$P_n(m) - P(\mu_n = m) - C_n^m p^m q^{n-m}$.

Полином-я схема:

Послед. из n одинаковых независ. исп-ний с 2-(рия) несовмест. исходами, достиг. с вероятностями: $p_1(n) \dots p_m(n)$

$\sum p_i(n) = 1$ {ПЭИ-множ-во всех векторов длины n, комп-ми кот. явл-ся нат. числа от 1 до m, соотв-е тому или иному элемент. исходу.}

μ_i число выпадений i-го исхода в полином. схеме

$P(\mu_1 = n_1 \dots \mu_m = m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{m_1} \dots p_m^{n_m}$.

(8) Предельные теоремы. при больших значениях n и m сложно рассчитать вер-ть, поэтому использ. приближ. ф-ль.

Схема серий - если 1-но испытание, вероятность успеха - p_1, если 2 исп-я, вероятность успеха в каждом - p_2, n испытаний - вер-ть успеха в каждом - p_n. Вероятность меняется от серии к серии но не внутри нее. (когда меняется число исходов).

Теорема Пуассона:

p_n - вероятность успеха в схеме Бернулли: $\lambda_n = np \to const$; $n \to \infty$, $p \to 0$, тогда для $m<n$ $p_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

Д-во:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \frac{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-m+1)}{n^m} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^m}$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\cdot 1 \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$

Пуасс. распред-е: $P(m) = \frac{(np)^m e^{-(np)}}{m!}$

$$\left|C_n^m p^m q^{n-m} - \frac{(np)^m \cdot e^{-(np)}}{m!}\right| \le np^2$$

Локальная т. Муавра-Лапласа

P_n - вер-ть успеха в схеме Бернулли

B - множ-во m, при кот $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ - равн. но огр-но по n.

тогда: $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right)\left(1+\bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

Интегр. теорема Муавра-Лапласа

$\forall a,b \in R \quad P\left\{a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{a,b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Следствие:

$P\{m_1 \leq \mu_n \leq m_2\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{m_1}}^{x_{m_2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x_{m_2}) - \Phi(x_{m_1})$

$x_{m_{1,2}} = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} \quad (i=1,2)$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ - табл. величина

$np \leq 20$ - т. Пуассона

$np > 20$ - т. М.-Л.

⑧ Случайная величина 1) величина, принимающая различные значения в зависимости от случайных обст-в.

2) величина, значение кот-ой зависит от случая и для которой опред-ся ф-я $F(x) = P(\xi < x)$

3) действит ф-я $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ такая, что $\forall x \in R \ \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

4) $\xi : \Omega \to R$ случ. величина, если $\forall x \in R \ (\xi^{-1}(-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

Функция распределения:

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.

Свойства ф-ии распред-я

① $\forall x_1, x_2 \in R \quad x_1 \leq x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$ монот. неубыв-я.

Д-во: $P(\xi < x_1) \leq P(\xi < x_2)$. $A \subset B : P(A) \leq P(B)$.

$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \underset{(+)}{\cup} \{x_1 \leq \xi < x_2\}$, несовмест.

$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$. $\to$

$F(x_2) = F(x_1) + \underbrace{P\{x_1 \leq \xi < x_2\}}_{\geq 0} \to F(x_1) \leq F(x_2)$.

②. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

т.к $F(x)$ вер-ть: $0 \leq F(x) \leq 1$

(3) $F(x)$ - непрерывна слева

$\forall x \in R \quad \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

(4) $F(x)$ имеет конечное число точек разрыва.

Распред-е вероятностей - закон описывающее область значений случ-ой величины и вероятности их принятия.

Любая ф-я, облад-я 3-мя свойствами ф-ии распред-я явл-ся ф-ей распред-я некоторой величины ξ.

$\tilde{P}$ на $\mathcal{F}$: $P(x_1, x_2] = F(x_2) - F(x_1)$.

(10) Дискретные случайные величины принимают конечное или счетное множ-во значений $\{x_1, \ldots x_n\}$ с положит. вероятностями: $P(\xi = x_k) = p_k$

p_1	p_2	$p_3 \ldots$	p_n
x_1	x_2	x_3	x_n

$\sum_{k \in N} p_k = 1$

В случае дискретного распред-я $F(x)$ имеет разрывы в точках x_k величины p_k.

Примеры: 1) Вырожденное $p(\xi = c) = 1$ достов. соб-е.

2) Дискретное равномерное $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{matrix}$.

3) Бернуллиевское: $\begin{cases} 0, p \\ 1, q = 1 - p \end{cases}$

4) Биномиальное: с пар-ми n, p:

$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ - вер-ть k успехов

5) Гипергеометрическое $p_m = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ (шары).

6) Геометрическое $p_k = p q^k$ - вероятн-ть появления 1-го успеха в сх Б. после k неудач

7) Распред-е Паскаля $p_k = C_{n+k-1}^k p^n q^k$

вероятность появл-я k неудач после n-го успеха.

8) распред-е Пуассона: $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda > 0$

$\lambda - pn$ ...

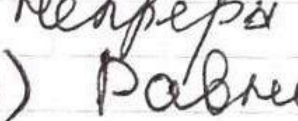
приближ. вычисл-е схемы Б.

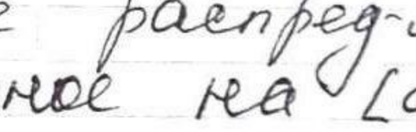
(11) Абс. непрерывная случ. величина
если $\exists$ ф-я $p_\xi(x)$: $\forall x \in R$ $p_\xi(x) \geq 0$:
$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$. $\forall x \in R$ $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$
$p_\xi(x)$ - плотность случ. величины
$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = p_\xi(x)$ непр. всюду, кроме конечного множ-ва точек, не имеющих пред. точек
а $F_\xi(x)$ имеет конечное число т. разрыва.

Свойства плотности:
1) $p_\xi(x) \geq 0$ $-\infty < x < -\infty$ (т.к. $F_\xi(x)$ > неуб)
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$
3) $F_\xi'(x) = p(x)$ в т. непр. ее.

Непрерывные распред-я.
1) Равномерное на $[a; b]$. опис. ошибку округл-я при $[-\frac{n}{2}; \frac{n}{2}]$ n-цена дел-я

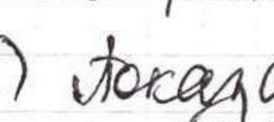
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases} \to F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

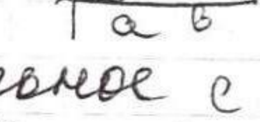




2) Показательное с пар-м λ.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \to F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$





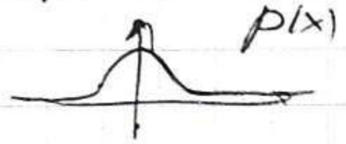
Св-во отсутствия последействия:
$\forall x, y > 0$: $P\{\xi \geq x+y \mid \xi \geq x\} = \frac{P\{\xi \geq x+y, \xi \geq x\}}{P(\xi \geq x)} =$

$$= \frac{1-P(\xi<x+y)}{1-P(\xi<x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P(\xi \geq y)$$

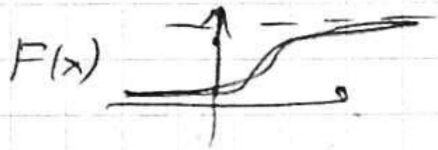
Вероятность работы прибора в теч нек времени после того, как он проработ t_0 не завис от t_0.

3) Нормальное распред-е пар-ры (a, σ)

$$p_\xi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$



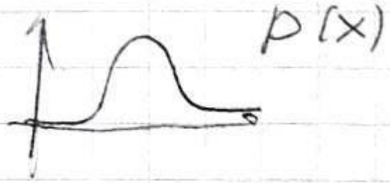
4) Нормальное с пар-ми 0, 1 (стандарт)

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

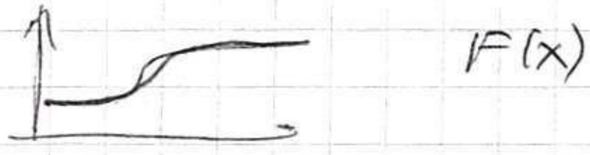
Опис. разброс результатов измен-ся ~~вд~~ в завис-ти от многих пар-в.

5) Распред. Коши

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$$



$$F_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} x + \pi/2).$$



(12) Смесь распределений

Пусть есть $n \geq 2$ случ. величин с ф-ями распред-я $F_1(x), F_n(x)$.

$F(x)$ - смесь распред-ний, задав-х $F_1, \dots F_n$, если $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(x)$ $\left(\alpha_k \geq 0 \; \forall k = \overline{1,n} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\right)$.

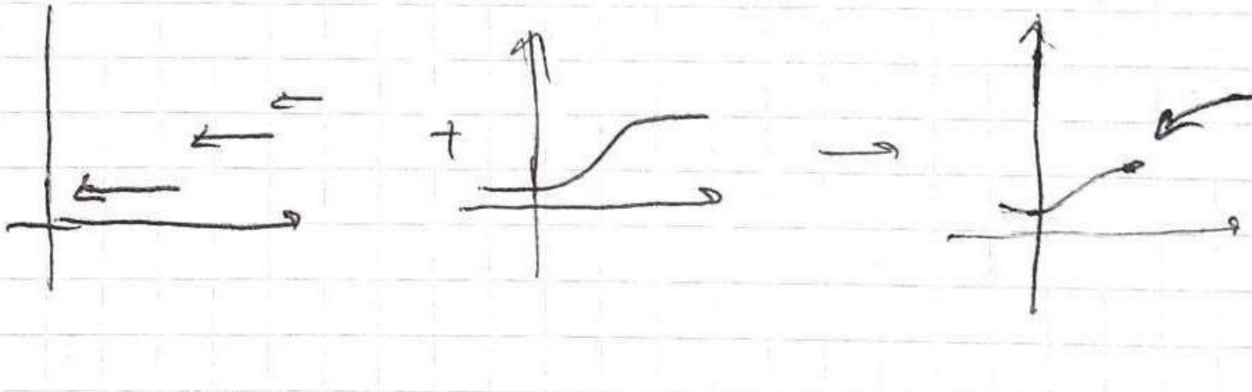
Теорема Лебега - любая $F(x)$ ф-я распред-я может быть представлена в виде смеси распред-ний, задав-х

$F_1(x)$ - ф-я распред-я дискр. величины,

$F_2(x)$ - ф-я распред. непр. величины,

$F_3(x)$ - сингулярная ф-я (нельзя задать $p_\xi(x)$)

Смесь дискр. и непр. распред-я дает распред-е ни дискр-е, ни непрерывное



(13) Многомерная ф-я распред-я:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вер. простр-во $\xi_1 \dots \xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ сл. вел-ны

тогда $(\xi_1, \dots \xi_n) : \Omega^n \to \mathbb{R}$ - случайный вектор

$F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots \xi_n < x_n)$ - многомерная ф-я распред-я.

Свойства: $\vec{\xi} = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$ - случ вектор $F_{\xi_{1n}}(x_1 \dots x_n)$.

1) $F_{\xi_1, \xi_n}(x_1 \dots x_n)$ моном. неубывающая

$\forall x_{11}, x_{12}, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$ $x_{11} < x_{12}$: $F(x_{11}, x_2 \dots x_n) < F(x_{12}, x_2, x_n)$

2). $\forall k = \overline{1,n}$ $\lim\limits_{k \to -\infty} F(x_1 \dots x_n) = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} F(x_1 \dots x_n) = 1$.

3) непрерывность слева по каждому аргументу

$\forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ $\forall k = \overline{1,n}$ $\lim\limits_{x_k \to x_{k_0} - 0} F(x_1 \dots x_n) = F(x_1 \dots x_{k-1}, x_{k_0}, x_{k+1} \dots x_n)$

4). $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $a_i < b_i$ $(i = \overline{1,n})$ $P(a_1 \le \xi_1 < b_1 \dots a_n < \xi_n < b_n) =$
$= F(b_1 \dots b_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i + \sum\limits_{i,j} p_{ij} - \dots + (-1)^n F(a_1 \dots a_n) \geq 0$.

для 2: $P(a_1 \le \xi_1 \le b_1, a_2 \le \xi_2 \le b_2) = F(b_1 b_2) - F(a_1 b_2) - F(b_1 a_2) + F(a_1 a_2)$

Дискретные:

$\vec{\xi}$ распред-но дискретно, если ф-я $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принимает конечное число знач. $x_s = (x_{s_1} \dots x_{s_n})$

тогда $P_s(\xi = x_s) = p_s > 0$ $\forall s$ $\sum\limits_{s} p_s = 1$

Непрерывные

$\vec{\xi}$ распред. непрерывно, если $\exists p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1 \dots x_n)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ $p(x_1 \dots x_n) \geq 0$.

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x_1 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$.

$$F_{\xi_1 \dots \xi_n} = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \dots u_n) du_1 \dots du_n.$$

$$p(x_1 \dots x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Распределения:

1) Равномерное распред в обл-ти нап-ти

$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin D \\ \frac{1}{S_D} & (x,y) \in D \end{cases}$ если D-круг $F_{\xi,\eta}(X) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin D \\ \frac{1}{\pi R^2} & (x,y) \in D \end{cases}$

2) Двумерное нормальное распред-е:

$p_{\xi,\eta}(x, y, \sigma_1, \sigma_2, a_1, a_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(\frac{-(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} + \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right)$

соотв. плотности:

$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x, y, \sigma_1, \sigma_2, a_1, a_2, \rho)\, dy = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} = \varphi_\xi(x, a, \sigma_1)$.

также для x. норм распред-е (a, σ).

3) Дискретное на конечном множ-ве точек

На пл-ти задано конечное число точек, для каждой точки задана вер-ть

$P\{\xi = x_3, y_3\} = p_3 > 0 \quad \sum_3 p_3 = 1.$ (x_3, y_3)

Д др. обознач-е: $P\{\xi = x_k, \eta = y_m\} = p_{km} > 0$.

$F(+\infty, +\infty) = P\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\} = P\{\Omega \cap \Omega\} = 1$.

совокупность пар - закон распред-я 2 мерной случ. величины. ?

если $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ - случ. вектор

$F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(x)$ - маргинальные (одном-е) ф-ции распред-я

p_{ξ_1}, p_{ξ_2} - маргинальные плотности.

$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2}(u, v)\, dv \right) du$ - $p_{\xi_1}(x) = \int_R p_{\xi_1\xi_2}(x, v)\, dv$

совместное совмест

Чтобы по марг. получ одномерные, нужно устремлен. перем-е к $+\infty$.

(14) Независимость:
случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ независ, если

1) $F_{\xi_1, \xi_n}(x_1 \dots x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n)$ во всех точках $(x_1 \dots x_n)$ областей определ совместная ф-я распад-ся на произведение функций.

~~Теорема~~

Опр 2: $\forall B_1 \dots B_n \in B(R)$

$P\{\xi_1 \in B_1 \dots \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \dots P\{\xi_n \in B_n\}$

Теорема: случ. вектор $(\xi_1 \dots \xi_n)$ распред. дискретно тогда для того, чтобы $\xi_1 \dots \xi_n$ были независимы необх-мо и достаточно $P\{\xi_1 = x_1, \dots \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n = x_n\}$ $\forall x_1 \dots x_n \in R^n$.

следствие: случ. величины одна из кот. имеет вырожд. распред-е, независимы.

Теорема: случ. вектор $(\xi_1 \dots \xi_n)$ распред. абсолютно непрерывно тогда для того чтобы $\xi_1 \dots \xi_n$ были независ. необходимо и достаточно:

$p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1 \dots x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \dots p_{\xi_n}(x_n)$ во всех точках этих плотностей.

(15) Ф-ция от случайной величины -
случ. величина ξ задан на нек. пространстве
$\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Случ. вектор $\vec{\xi}$
задает отобр-е на множестве R: $\xi: \Omega \to R$.
Суперпозиция ф-ции ξ на Ω и ф-ции $g(x)$,
заданной на действит. прямой явл-ся ф-ей
$\eta = g[\xi(\omega)] = \eta(\omega)$.

Распред-е квадрата норм. станд-ой случ. величины (χ^2 с 1-ой степ. свободы).
сл. величина распред. с пар-ми $(0, 1)$.

$\eta = \xi^2$

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = \begin{cases} P\{\xi^2 < y\}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} \\ 0, & y \le 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi_0(\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$\Phi_0(y) = \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Преобраз. вектора:

$$\begin{cases} z_1 = g_1(x_1, \dots x_n) \\ \dots \\ z_m = g_m(x_1, \dots x_n) \end{cases}$$ - m ф-ций от n перем. $G: R^n \to R^m$

$m = 1$ $z_1 = g(x_1, \dots x_n)$ $R^2 \to R$.

$$\begin{cases} \Im_1 = g_1(\xi_1 \dots \xi_n) \\ \dots \\ \Im_m = g_m(\xi_1 \dots \xi_n) \end{cases}$$ сл. вектор $(\xi_1, \dots \xi_n) \to (\Im_1, \dots \Im_m)$ случ. вектор.

$$P\{(\Im_1, \dots \Im_m) \in B^n\} = P\{(\xi_1 \dots \xi_n) \in B' = G^{-1}(B^n)\} = P_{\xi_1 \dots \xi_n}(B')$$

Формула свертки
1) дискретный случай: ξ, η $\Im = g(\xi, \eta) = \xi + \eta$

$P\{\xi = x_k, \eta = y_m\} = p_{km}$ $\qquad x_k + y_m = z_s$

$P\{\Im = \xi + \eta = z\} = \sum P\{\xi = x_k, \eta = y_m\}$.

Пусть ξ и η - целочисл. значения $\xi\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\end{pmatrix}$ $\alpha_k = P(\xi = k)$

$\eta\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots\end{pmatrix}$ $\beta_m = P(\eta = m)$

Найдем распред. их суммы: $\zeta = \xi + \eta$

$\{\zeta = \xi + \eta = z\} = \{\xi = 0, \eta = z\} \cup \{\xi = 1, \eta = z-1\} \cup \dots \cup \{\xi = z, \eta = 0\}$.

$p_{km} = p\{\xi = k, \eta = m\}$

$P\{\zeta = \xi + \eta = z\} = \sum_{k=0}^{z} P\{\xi = k, \eta = z-k\} = \sum_{k=0}^{z} p_{k, z-k}$ ф-ла композиции

Пусть ξ_k, α_k - независ. — $p_{km} = \alpha_k \beta_m$

$P\{\zeta = \xi + \eta = z\} = \sum_{k=0}^{z} \alpha_k \beta_{z-k}$ - свертка распред-я

2) ξ, η - абс. непрерывны $\zeta = \xi + \eta$ $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$

$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv$. $F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} p(v)dv$.

$P_{\xi+\eta}(z) = P\{\xi + \eta < z\} = P\{(\xi,\eta) \in D_z\} = (D_z = \{u, v \mid u+v < z\}) =$

$= \iint_{D_z} p_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-u} p_{\xi,\eta}(u,v)\,dv\right)du =$

$= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, t-u)\,du\right)dt$; $p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(u, z-u)\,du$

ф-ла комп.

ξ, η - независ. $p_{\xi,\eta}(u,v) = p_\xi(u)\,p_\eta(v)$.

$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)\,p_\eta(z-u)\,du$ - ф-ла свертки.

1) Распред-я суммы 2-х норм. величин:

$\xi \sim (a_1, \sigma_1^2)$, $\eta(a_2, \sigma_2^2)$.

$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,p_\eta(z-x)\,dx$ - по ф-ле свертки

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = z-a_1-a_2 \\ \delta = x-a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\sigma_1^2} - \frac{(u-\delta)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) d\delta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\delta^2\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - 2u\delta\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{u^2}{\sigma_2^2}\frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\right)\right) d\delta = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right(\ldots$$

$$\left(\frac{u\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} - \delta\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\right) + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\Bigg)\Bigg) d\delta =$$

$$= \left(t = \delta\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{u\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}},\ |J| = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{u^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{(z-a_1-a_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

норм. распред-е с пар-ми $a_1+a_2;\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

2) Распред. суммы 2-х пуасс-ких величин.

$\xi_1 = \Pi(\lambda_1)$, $\xi_2 = \Pi(\lambda_2)$.

$$P(\xi_1+\xi_2 = m) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\xi_1}(m-k)\, P_{\xi_2}(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{m-k}e^{-\lambda_1}}{(m-k)!}\cdot\frac{\lambda_2^{k}e^{-\lambda_2}}{k!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m!}{(m-k)!\,k!}\lambda_1^{m-k}\lambda_2^{k}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$ пуасс. с пар-ом $\lambda_1+\lambda_2$

3) ~~Обычной~~ распред. суммы 2-х величин

$\xi_1 = p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\xi_2 = p_m(k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$

$P\{\xi_1 + \xi_2 = z\} = \sum_{k=0}^{z} p_n(k) \cdot p_m(z-k) = \sum_{k=0}^{z} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot$

$\cdot C_m^{z-k} \cdot p^{z-k} \cdot (1-p)^{m-z+k} = \sum C_n^k C_m^{z-k} p^z (1-p)^{m+k-z}.$

(16) Числ. хар-ки

ξ-дискр. случ. величина с распред

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$, $p_k = p(\xi = x_k)$; мат. ожидание

$M\xi = \sum_k x_k p_k$ - мат ($\exists$ если ряд сходится)

2) ξ - абс. непр. случ. величина - с плотностью $p_\xi(x)$

$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx$ (сущ. если несобств. инт. сходится)

Примеры: 1) $M\xi$ для $p_\xi(x) - \frac{1}{a-b}$ (равн.) $= \frac{a+b}{2}$.

2) для норм. распред $M\xi = a$

3) для распред. Коши $M\xi$ не сущ.

4) для биноми - $M\xi = np$ 6) геометрич: $M\xi = \frac{q}{p}$

5) для Пуасс $M\xi = \lambda$ 7) гипергеометр $M\xi = \frac{nM}{N}$ 8) показат $M\xi = \frac{1}{\lambda}$

Мат. ожидание ф-ии от случ. величин

$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ многомерн. случ. величина,

$\eta = g(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ ф-я от нее; если η-абс. непр., то

$\int_{-\infty}^{+\infty} z p_\eta(z) dz = M\eta$.

Т1. $\eta = g(\xi)$ $M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_\xi(x) dx$. - непр.

дискр: $M\eta = \sum_k g(x_k) p_k$.

Т. 2. ξ, η - двум-ый вектор, $\eta = g(\xi, \eta)$

$M\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) p_{\xi,\eta}(x,y) dx dy$ - непр.

дискр: $M\eta = \sum_{k,m} g(x_k, y_m) p_{km}$

Свойства

1) $\forall C \in \mathbb{R}$ $M(C\xi) = CM\xi$

2) $\forall C \in \mathbb{R}$ $MC = C$ $(p_\xi = 1)$ } из свойств рядов

3) $M\xi \le M|\xi|$

4) $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$

Д-во: ξ, η - абс. непр. с $p_{\xi,\eta}(x,y)$. $\mathfrak{I} = \xi+\eta$.

$$M\mathfrak{I} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y) p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} x p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ \iint_{\mathbb{R}^2} y p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} x \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\right)}_{p_\xi(x)} dx +$$

$$\int_{\mathbb{R}} y \underbrace{\left(\int p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\right)}_{p_\eta(y)} dy = M\xi + M\eta.$$

5) ξ, η независ. $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$

Д-во: $\mathfrak{I} = g(\xi,\eta) = \xi\eta$.

$$M(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, p_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, p_\xi(x) p_\eta(y)\,dx\,dy$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x)\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y p_\eta(y)\,dy\right) = M\xi\, M\eta$$

Дисперсия: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если мат. ожидание правой части $\exists$. Из св. в мат. ожидании: $D\xi = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$
$M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

1) дискр. величина: $D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p_k =$
$\sum_k x_k^2 p_k - (M\xi)^2$

2) непр. величина: $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx - (M\xi)^2$.

Свойства дисперсии:

1) $D\xi \geq 0$
2) $\forall C \in \mathbb{R}$ $DC = 0$
3) $\forall C \in \mathbb{R}$ $D(C\xi) = C^2 D\xi$

} из опред-я, свойств рядов

4) $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 + 2M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$.

(16 продолжение) если ξ_1 и ξ_2 независ., то $D(\xi_1+\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

Д-во: $D(\xi_1+\xi_2)=M(\xi_1+\xi_2-M(\xi_1+\xi_2))^2=M((\xi_1-M\xi_1)+(\xi_2-M\xi_2))^2=D\xi_1+D\xi_2+2M(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2)$, если ξ_1 и ξ_2 независ., то $M(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2)=(M\xi_1-M\xi_1)(M\xi_2-M\xi_2)=0$

$D\xi_1+D\xi_2=D(\xi_1+\xi_2)$.

Вычисление: 1) нормальное распр-е $D\xi=\sigma^2$.
2) Бернулли: $M\xi=p$. $D\xi=pq$
3) Биноми. $D_{\text{биноми}}=npq$
4) Пуасс $D\xi=\lambda$.
5) гипергеометр.: страшно.
6). равномерное: $\frac{(b-a)^2}{12}$

ковариация
случ величины ξ и η: $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta))$
$=M(\xi\eta)-M\xi M\eta$.

Свойства:
1) $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$.
2) $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$.
3) $\forall c_1 c_2\in\mathbb{R}: \operatorname{cov}(c_1\xi_1, c_2\eta)=c_1c_2\operatorname{cov}(\xi_1,\eta)$
4) ξ и η - независ $\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$ (обр. неверно

для дискр: $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\sum\limits_{k,m}(x_k-M\xi)(y_m-M\eta)P\left(\begin{cases}\xi=x_k\\ \eta=y_m\end{cases}\right)$

для непр. $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-M\xi)(y-M\eta)p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy$.

Коэффициент корреляции: $\rho=\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$.
предп. ся что $D\xi$, $D\eta$ сущ.

Свойства:

1) $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$.
2) ~~2~~ если ξ, η незав., то $\rho(\xi,\eta)=0$
3) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\eta = c_1 \xi + c_2$ $|\rho(\xi,\eta)| = 1$.

Д-во: 1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $D(\lambda\xi+\eta) = \lambda^2 D\xi + 2\lambda \operatorname{cov}(\xi,\eta) + D\eta \geq 0$
рассматр. как кв. трехчлен отн λ:
$\operatorname{cov}(\xi,\eta)^2 - D\xi D\eta \leq 0$, $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D(\xi) D(\eta)} \to$
$|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$

3). пусть $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$ $M\eta = c_1 a + c_2$ $D\eta = c_1^2\sigma^2$,
$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - a)(c_1\xi + c_2 - c_1 a + c_2) =$
$c_1 M(\xi-a)^2 = c_1\sigma^2 \to |\rho(\xi,\eta)| = \frac{c_1\sigma_1^2}{c_2\sigma_2^2} = 1$

Связь между некоррелир. и независимостью.
$\rho = 0 \to$ независ., не следует, за искл. 2-мерн. нр. в.
$$\varphi(x,y,a_1,a_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2}\right)\right].$$
$M\xi = a_1$, $M\eta = a_2$, $D\xi = \sigma_1^2$, $D\eta = \sigma_2^2$. $\rho = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$

Если $\rho = 0$ совм. плотность распад-ся на произвед. одном. плотностей.
$$\varphi(x,y,a_1,a_2,\sigma_1,\sigma_2,0) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$
необх. и дост. усл-е независ. 2х величин.

Дисперсия линейной комб-ии n произвол. вел.
$D(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n) = M(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n - M(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n))^2 =$
$= M((c_1\xi_1 - M(c_1\xi_1)) + \ldots + (c_n\xi_n - M(c_n\xi_n)))^2 =$
$= M(c_1\xi_1 - Mc_1\xi_1)^2 + \ldots + M(c_n\xi_n - M(c_n\xi_n))^2 +$
$+ 2\sum_{i,j,\, i<j} M(c_i\xi_i - M(c_i\xi_i))(c_j\xi_j - M(c_j\xi_j)) = c_1^2 M(\xi_1 - M\xi_1)^2 +$
$\ldots + c_n^2 M(\xi_n - M\xi_n)^2 + 2\sum_{i<j} c_i c_j M(\xi_i - M\xi_i) M(\xi_j - M\xi_j)$

$$D(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i^2 D\xi_i}_{\Sigma \text{ дисперсий}} + \underbrace{2\sum_{i<j} c_i c_j \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)}_{\Sigma \text{ ковариаций}}$$

(18) Неравенство Маркова
Пусть $\xi = \xi(\omega) \geq 0$ - неотриц. с величина и $M\xi \exists$, тогда $\forall a$ $P\{\xi \geq a\} \leq \frac{M\xi}{a}$

- оценивает „хвост" распред-я
- универсально: справ. ∀ неотриц. случ. вел-ны, имеющ. $M\xi$, но в ряде случаев может стать тривиальн.
- формулировка справедлива и для дискр. и для непр. с. в.

Для непр. случ. в. с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ \varphi(x), x>0 \end{cases}$

$$P\{\xi \geq a\} = \int_a^{+\infty} p_\xi(x)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{a} M\xi$$

для дискр. ξ принием зн-я $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$,
$\forall a > 0$ $\exists k \in N$: $x_k < a$, $x_{k+1} \geq a$.

$$M\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i \geq \sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i p_i \geq a \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i = aP\{\xi \geq a\} \rightarrow$$

$$P\{\xi \geq a\} \leq \frac{M\xi}{a}.$$

Неравенство Чебышева
ξ - произв. с.в. задана $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеет $M\xi$, $D\xi$
$\forall \varepsilon > 0$: ~~$P\{|\xi - M\xi|\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$~~ $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

Д-во: $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = P\{(\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Сходимость по вероятности.
$\eta_1 \ldots \eta_n$ - беск. послед. случ величин задан на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Послед. сходится по вероятности к сл. вел. η
$(\eta_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $P\{|\eta_k - \eta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Др. формулировка:
$\eta = const = c$, что послед. с. в. $\eta_1, \ldots \eta_n$ сх-ся по вер-ти к const c, если $P\{|\eta_n - c| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
или $P\{|\eta_n - c| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\left(\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c\right)$

Закон больших чисел

$\xi_1, \dots \xi_n$ - беск. послед-ть с.в. зад-х на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеющих $M\xi_n$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$,

$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$. Исх. послед-ть подчин-ся ЗБЧ, если $\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\frac{S_n}{n} - M\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(на одн. не сх-ти по вер-ти:)

$\eta_n = \frac{S_n}{n} - M\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Теорема Маркова

послед с. в. $\xi_1 \dots \xi_n$, имеющих $D\xi_n$, подчин-ся ЗБЧ, если $\frac{DS_n}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\frac{S_n}{n} - M\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?

Теорема Чебышева:

$\xi_1 \dots \xi_n$ имеющая $D\xi$ - независ (попарно независ. или некоррелир.)

и $D\xi_k < C \; \forall k \in N, \forall C > 0$, то послед. подч. ЗБЧ.

Д-во: $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 \; \forall j \neq i$, $DS_n = D(\xi_1 \dots \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \leq nC$

$\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\frac{S_n}{n} - M\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

⇒ лев. часть также → 0

для послед. выполн-ся ЗБЧ.

Теорема Бернулли

$\xi_1 \dots \xi_n$ - послед. независ ~~испыт~~ (попарно независ/некорр.) бернулл. случ. величин: $\xi = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p=q \end{cases}$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n = \mu_n$ - число успехов, распред. бином.

$D\xi_k = pq$, $M\xi = p$ $\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| < \varepsilon\} \to 1, n \to \infty$

Д-во: $\mu_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_i$ по ~~нер~~ Чебышева: $\varepsilon > 0$:

$P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\frac{\mu_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{D\mu_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1 + \dots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{nqp}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$

(19) Сходимость по распред-ю

Послед. с. в $\xi_1 \dots \xi_n$ с ф-ями распред-я $F_1(x), \dots F_n(x)$ соотв, и ф-я распред-я случ-вел ξ — $F_\xi(x)$

Послед. ф-ий $F_1(x) \dots F_n(x)$ слабо сх-ся к ф-ии распред-я $F(x)$. ($F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\forall x \in R$ $F(x)$ непр-на).

(поточная сходимость) в таком случае $\xi_1, \dots \xi_n$ сх-ся по распред-ю к случ. вел-не ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$).

слабая сходимость.

центральная предельная теорема

① $\xi_1 \dots \xi_n$ независ. одинак. распред. сл. вел, имеющие один. дисперсию σ^2, то

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

где $D\xi_k = \sigma^2$, $a = M\xi_k$.

② т. Ляпунова

$\xi_1 \dots \xi_n$, независ. имеющие 3-ий абс. момент ($M\xi_n^3$) $\to D\xi_k$, $M\xi_k$

ΣB_k кон-в.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k; \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - M\xi_k|^3$$

то при $\frac{C_n}{B_n} \to 0$ $(n\to\infty) \Rightarrow P\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$

③ $\xi_1 \dots \xi_n$ — независ, $P\{\xi_n = 1\} = 1 - P\{\xi_n = 0\} = p$, $0<p<1$, то при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$ равн. по x

Интегр. т. Муавра-Лапласа. - частный случай из пред. теорем.

~~Ассимт~~ Асимптотическая норм-ть

Беск. послед. $\eta_1 \dots \eta_n$ (x) опред на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

и 2 послед-ти $A_1 \dots A_n$ - произв

$B_1 \dots B_n$ - $B_k > 0$.

Послед $\eta_1 \dots \eta_n$ (случ. величина η_k) асимпт. нормальна с параметрами

(A_n, B_n), если $P\left\{\frac{\eta_n - A_n}{B_n} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$.

Интегр. т. Муавра-Лапласа:

схема Бернулли с пар-ми n, p. $n \to \infty$

$\mu_1 \dots \mu_n$ (x)) - число успехов в сх Б.

μ_n - асимпт. нормальна, в кач-ве

$A = np$. $(M\mu_n)$, $B_n = \sqrt{npq}$, $\sqrt{D\mu_n}$.

μ_n асимптотич. нормальна с пар-ми

$np, \sqrt{npq}$.

(20) Теорема Слуцкого

Пусть $z = g(x_1, x_m)$ дост. гладкая ф-я m переменных, задано m беск. послед. случ. величин.

$\xi_1^{(1)} \dots \xi_n^{(1)}$ причем $\xi_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$,

$\xi_1^{(n)} \dots \xi_n^{(n)}$ $\quad \xi_n^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} c_n$, $c_1 \dots c_n$ const.

Тогда $\eta_n = g(\xi_n^{(1)}, \dots \xi_n^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(c_1 \dots c_n)$.

Теорема о сходимости.

Пусть даны 2 послед-ти $\xi_1 \dots \xi_n$ (1) и $\eta_1 \dots \eta_n$ (2),

Предп, что (1) т.е. послед. ф-ций распред этих с.в: $F_n(x) = F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = F_\xi(x)$, озн-т. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ (слабо сходится)

Предп, что (2) ~~послед ф-ций~~ $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c_n$ сх-ся по вер-тии.

Образуем след-ю послед.:

$\zeta_n^{(1)} = \xi_n + \eta_n$, $n = 1, 2 \dots$

$\zeta_n^{(2)} = \xi_n \cdot \eta_n$

$\zeta_n^{(3)} = \xi_n / \eta_n$, тогда $F_{\zeta_n^{(1)}}(x) \to F(x-c)$.

$F_{\zeta_n^{(2)}}(x) \to F(x/c,\ c \neq 0)$

$F_{\zeta_n^{(3)}}(x) \to F(xc)$.