СЕМИНАРЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Аннотация

Обсуждаются криволинейные системы координат. Вводятся касательные и единичные вектора для криволинейных систем координат. Даются определение скалярного и векторного произведений и ортогональности векторов. Определяются параметры Ламе. В криволинейных системах координат записываются вектора скорости и векторные дифференциальные операторы (градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа)

1. Декартова система координат. В декартовой прямоугольной системе координат положение точки в трёхмерном пространстве задается длинами трёх проекций точки на три взаимно перпендикулярные оси (абсцисс, ординат, аппликат) (см. рис. 1).

В декартовой системе координаты являются непосредственно длинами проекций. Элемент длины dl связан с дифференциалами координат dx, dy и dz следующим очевидным соотношением:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1}$$

2. Криволинейные системы координат. Однако связь 1 характерна только для декартовой прямоугольной системы координат, в иных (криволинейных) системах координат связь dl и дифференциалов координат dq_1, dq_2 И dq_3 будет даваться соотношением:

$$dl^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dq_i dq_k, \tag{2}$$

где i и k принимают значения от 1 до 3 (трёхмерное пространство). Здесь g_{ik} представляет собой тензор второго ранга, состоящий из девяти элементов, называемый *метрическим тензором*; формула 2 является, по сути, его определением. Для ортогональной системы координат все $g_{ik} = 0$, если $i \neq k$. Для декартовой прямоугольной

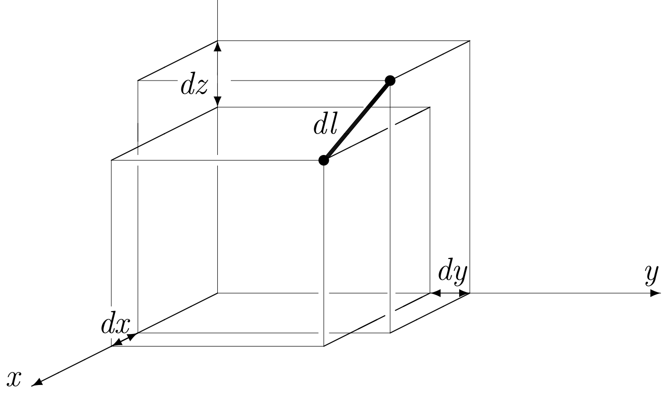


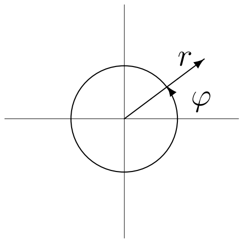
Рис. 1: Декартова система координат

системы координат (и только для неё) все ненулевые элементы равны между собой $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$.

Симметрия решаемых задач часто заставляет пользоваться криволинейными системами координат, из которых самыми распространёнными, безусловно, являются полярная (плоское круговое движение), цилиндрическая (наличие аксиальной симметрии) и сферическая (наличие сферической симметрии). Рассмотрим их подробнее.

Полярная система координат.

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется двумя координатами: радиусом r и углом φ, (рис. 2) которые связаны с декартовыми координатами следующим образом:

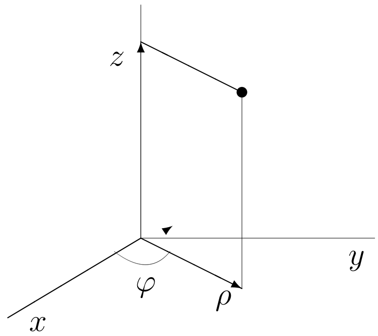


$$x = r\cos\varphi, \tag{3}$$
$$y = r\sin\varphi, \tag{4}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5}$$
$$\varphi = \mathtt{arctg}(y/x) \tag{6}$$

Рис. 2:
Полярная система координат

Цилиндрическая система координат.

В цилиндрической системе координат положение точки в пространстве определяется тремя координатами: радиусом ρ, углом φ и аппликатой z (рис. 3), которые связаны с декартовыми координатами следующим образом:

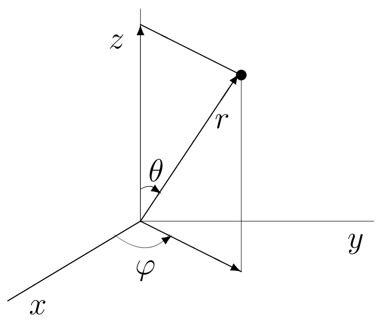


$$z = z, \tag{7}$$
$$x = \rho\cos\varphi, \tag{8}$$
$$y = \rho\sin\varphi, \tag{9}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{10}$$
$$\varphi = \mathtt{arctg}(y/x) \tag{11}$$

Рис. 3:
Цилиндрическая система координат

Сферическая система координат.

В сферической системе координат положение точки в пространстве определяется радиусом r и двумя углами: полярным θ $(0 \le \theta \le \pi)$, отсчитываемого от оси z и азимутальным φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ (см. рис. 4). Связь сферических координат с декартовыми даётся формулами:



$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \tag{12}$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{13}$$
$$z = r\cos\theta \tag{14}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{15}$$
$$\theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \tag{16}$$
$$\varphi = \mathtt{arctg}(y/x) \tag{17}$$

Рис. 4:
Сферическая система координат

3. Скалярное и векторное произведение векторов. Напомним определения скалярного и векторного произведения векторов.

Определение 1. Назовём скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ число, равное $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\phi$, где ϕ - угол между этими векторами.

Скалярное произведение обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или $(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Через декартовы координаты каждого из векторов скалярное произведение выражается:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{18}$$

Очевидно, данное равенство будет справедливо и для криволинейных ортогональных систем координат. Используя *символ Кронекера* [1] δ_{ij}, определяемый следующим образом:

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{, если } i \neq j; \\ 0 & \text{, если } i \neq j \end{array} \right. , \tag{19}$$

можем записать скалярное произведение в виде двойной суммы по координатам каждого из векторов (i и j обозначают координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно) :

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_i b_j \delta_{ij}. \tag{20}$$

Укажем на ряд очевидных свойств скалярного произведения:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{21}$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \tag{22}$$
$$m\,\mathbf{a}\cdot n\,\mathbf{b} = mn\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{23}$$

Равенство нулю скалярного произведения двух ненулевых векторов $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ означает, что угол между этими двумя векторами прямой (вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны)

[1] Леопольд Кро́некер (Leopold Kronecker) (1823–1891), немецкий математик

Определение 2. Векторным произведением двух векторов **a** и **b**, угол между которыми, отсчитываемый от вектора **a** к вектору **b**, равен α, называется вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**

$$|\,\mathbf{c}\,| = |\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,| = |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\sin\alpha|, \tag{24}$$

перпендикулярный плоскости этих векторов и направленный так, чтобы три вектора **a**, **b** и **c** образовали правую тройку (т. е. чтобы после совмещения начал векторов **a**, **b** и **c** кратчайший поворот от **a** к **b** казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора **c**, идущим против часовой стрелки, см. рис. 5).

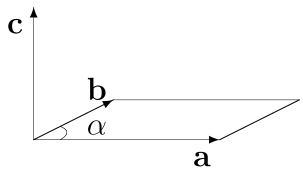


Рис. 5:
К определению векторного произведения

В декартовых координатах векторное произведение можно выразить через компоненты векторов **a** и **b** следующим образом:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{n}_x(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{n}_y(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{n}_z(a_xb_y - a_yb_x), \tag{25}$$

или для каждой из кооординат векторного произведения

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k, \tag{26}$$

где ϵ_{ijk} - *антисимметричный тензор Леви-Чивита*, [2] опредляемый следующим образом:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, если } ijk = xyz\text{,или } yzx\text{,или } zxy; \\ -1 & \text{, если } ijk = xzy\text{,или } yxz\text{,или } zyx; \\ 0 & \text{, если хотя бы два индекса совпадают} \end{cases}, \tag{27}$$

Очевидные свойства векторного произведения:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} \tag{28}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0 \tag{29}$$

Задача 1.1. *Доказать, что*

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{30}$$

[2]Туллио Леви-Чиви́та (Tullio Levi–Civita) (1873 - 1941), итальянский математик, механик, автор трудов по тензорному анализу, римановой геометрии, небесной механике, гидродинамике.

4. Касательные и единичные вектора. Проведем через точку M с координатами q_1^0, q_2^0, q_3^0 в пространстве три кривые таким образом, чтобы вдоль каждой из этих кривых две координаты были фиксированы, а изменялась только одна из координат. Рассмотрим вектора $\mathbf{e}$, выходящие из точки M, касательные к каждой из этих кривых (*касательные вектора*) и направленные в сторону увеличения координат (см. рис. 6).

Назовём *единичным вектором* , или *ортом*, $\mathbf{n}$ касательный вектор $\mathbf{e}$, нормированный на его модуль.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \tag{31}$$

Математическая процедура определения касательных векторов состоит в следующем. Введем формальный параметр t.

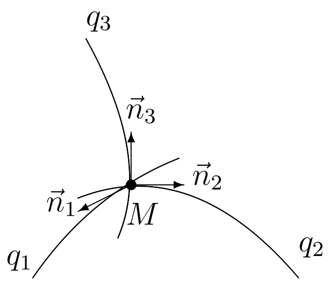


Рис. 6:
Три кривые, проходящие через точку $M(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$

Тогда каждую из трёх вышеупомянутых кривых можно записать в параметрическом виде:
первая кривая:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0 + t, \\ q_2(t) &= q_2^0, \\ q_3(t) &= q_3^0; \end{aligned} \tag{32}$$

вторая кривая:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0, \\ q_2(t) &= q_2^0 + t, \\ q_3(t) &= q_3^0; \end{aligned} \tag{33}$$

третья кривая:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0, \\ q_2(t) &= q_2^0, \\ q_3(t) &= q_3^0 + t; \end{aligned} \tag{34}$$

Тогда для каждой из кривых (номер кривой обозначается индексом i) вектор

$$\mathbf{e}_i = \left.\frac{\partial q(t)}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{35}$$

будет касательным вектором.

Для иллюстрации всего вышесказанного рассмотрим следующую задачу:

Задача 1.2. *Выразить единичные вектора для сферической системы координат* $\boldsymbol{n}_r, \boldsymbol{n}_\theta$ *и* $\boldsymbol{n}_\varphi$ *в точке с координатами* r, θ *и* φ *через единичные вектора для декартовой системы координат* $\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y$ *и* $\boldsymbol{n}_z$

Рассмотрим три кривых:
первая кривая, вдоль которой по закону (32) меняется только радиус r. Декартовыми координатами такой кривой будут:

$$x_r(t) = (r+t)\sin\theta\cos\varphi, \tag{36}$$
$$y_r(t) = (r+t)\sin\theta\sin\varphi, \tag{37}$$
$$z_r(t) = (r+t)\cos\theta. \tag{38}$$

Тогда по (35) для проекции касательного вектора $\mathbf{e}_r$ на ось x получаем:

$$\left.\frac{\partial x_r(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin\theta\cos\varphi. \tag{39}$$

Аналогично, для осей y и z

$$\left.\frac{\partial y_r(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin\theta\sin\varphi, \tag{40}$$
$$\left.\frac{\partial z_r(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos\theta. \tag{41}$$

Таким образом, мы получили разложение касательного вектора по единичным векторам декартовой системы координат:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{n}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{n}_y + \cos\theta\mathbf{n}_z. \tag{42}$$

Отметим, что $|\mathbf{e}_r| = 1$, т. е. в данном случае $\mathbf{e}_r$ совпадает с $\mathbf{n}_r$.

Далее, рассмотрим вторую кривую, вдоль которой меняется только полярный угол θ – "меридиан"сферы. Её декартовы координаты:

$$x_\theta(t) = r\sin(\theta+t)\cos\varphi, \tag{43}$$
$$y_\theta(t) = r\sin(\theta+t)\sin\varphi, \tag{44}$$
$$z_\theta(t) = r\cos(\theta+t); \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial x_\theta(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r\cos\theta\cos\varphi. \tag{46}$$
$$\left.\frac{\partial y_\theta(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r\cos\theta\sin\varphi, \tag{47}$$
$$\left.\frac{\partial z_\theta(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -r\sin\theta, \tag{48}$$

а касательный вектор $\mathbf{e}_\theta$ имеет вид:

$$\mathbf{e}_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\mathbf{n}_x + r\cos\theta\sin\varphi\mathbf{n}_y + -r\sin\theta\mathbf{n}_z. \tag{49}$$

Легко видеть, что $|\mathbf{e}_\theta| = r$, и, следовательно, единичный вектор $\mathbf{n}_\theta = \mathbf{e}_\theta/|\mathbf{e}_\theta|$

$$\mathbf{n}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{n}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{n}_y + -\sin\theta\mathbf{n}_z. \tag{50}$$

Наконец, для кривой, вдоль которой меняется лишь азимутальный угол φ – "параллели"сферы, имеем:

$$x_\varphi(t) = r\sin\theta\cos(\varphi + t), \tag{51}$$
$$y_\varphi(t) = r\sin\theta\sin(\varphi + t), \tag{52}$$
$$z_\varphi(t) = r\cos\theta; \tag{53}$$

$$\left.\frac{\partial x_\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -r\sin\theta\sin\varphi. \tag{54}$$
$$\left.\frac{\partial y_\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r\sin\theta\cos\varphi, \tag{55}$$
$$\left.\frac{\partial z_\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{56}$$

откуда

$$\mathbf{e}_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{n}_x + r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{n}_y + 0\mathbf{n}_z, \tag{57}$$
$$\mathbf{n}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{n}_x + \cos\varphi\mathbf{n}_y + 0\mathbf{n}_z. \tag{58}$$

Все три единичных вектора ортогональны друг другу.

Задача 1.3. *Выразить единичные вектора для цилиндрической системы координат $\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_z$ и $\boldsymbol{n}_\varphi$ в точке с координатами ρ, z и φ через единичные вектора для декартовой системы координат $\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y$ и $\boldsymbol{n}_z$*

Для *параболической системы координат* её координаты σ, τ и ϕ связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = \sigma\tau\cos\phi, \tag{59}$$
$$y = \sigma\tau\sin\phi, \tag{60}$$
$$z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2). \tag{61}$$

Задача 1.4. *Выразить единичные вектора для параболической системы координат $\boldsymbol{n}_\sigma, \boldsymbol{n}_\tau$ и $\boldsymbol{n}_\phi$ в точке с координатами σ, τ и ϕ через единичные вектора для декартовой системы координат $\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y$ и $\boldsymbol{n}_z$*

5.Параметры Ламе . Рассмотрим одну из кривых, вдоль которой меняется лишь одна криволинейная координата q. Установим связь между элементом длины этой кривой dl и дифференциалом соответствующей координаты dq. Величину dl можно выразить через дифференциалы декартовых координат:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{62}$$

Но на рассматриваемой нами кривой dx, dy и dz определяются изменением криволинейной координаты dq:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q} dq, \tag{63}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q} dq, \tag{64}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q} dq. \tag{65}$$

Тогда

$$dl = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 dq^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 dq^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 dq^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2} dq = H dq. \tag{66}$$

Величина

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2} \tag{67}$$

называется *параметром Ламе*[3] и даёт нам связь dl и dq в данной точке:

$$dl = H dq. \tag{68}$$

В трёхмерном пространстве необходимо знать три параметра Ламе.

Элемент объема dV, равный в ортогональных криволинейных координатах $dl_1 dl_2 dl_3$ также можно записать через параметры Ламе:

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 = \tag{69}$$

$$= dx dy dz \qquad \text{в декартовых координатах} = \tag{70}$$

$$= \rho d\rho d\varphi dz \qquad \text{в цилиндрических координатах} = \tag{71}$$

$$= r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \qquad \text{в сферических координатах.} \tag{72}$$

Задача 1.5. *Рассчитать параметры Ламе для сферической системы координат.*

[3]Габриель Ламе (Gabrial Lamé) (1795 - 1870) – французский математик и инженер; занимался математической физикой и теорией упругости, в 1833 г. разработал теорию криволинейных координат

Дифференцируя выражения (12)-(14) по r, θ и φ и подставляя в (68), получим:

$$H_r = 1 \tag{73}$$
$$H_\theta = r \tag{74}$$
$$H_\varphi = r\sin\theta. \tag{75}$$

Задача 1.6. *Рассчитать параметры Ламе для цилиндрической системы координат.*

Ответ:

$$H_z = 1 \tag{76}$$
$$H_\rho = 1 \tag{77}$$
$$H_\varphi = \rho. \tag{78}$$

Задача 1.7. *Рассчитать параметры Ламе для параболической системы координат.*

6. Скорость в криволинейной системе координат. Разложим вектор элементарного перемещения $d\mathbf{l}$ по единичным векторам криволинейной системы координат:

$$d\mathbf{l} = dl_1\mathbf{n}_1 + dl_2\mathbf{n}_2 + dl_3\mathbf{n}_3 = H_1 dq_1\mathbf{n}_1 + H_2 dq_2\mathbf{n}_2 + H_3 dq_3\mathbf{n}_3. \tag{79}$$

Скорость — это производная перемещения по времени. Поэтому получаем:

$$\mathbf{v} = H_1\dot{q}_1\mathbf{n}_1 + H_2\dot{q}_2\mathbf{n}_2 + H_3\dot{q}_3\mathbf{n}_3. \tag{80}$$

Далее будем называть $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ – *обобщенными скоростями* , а сами q_1, q_2, q_3 – *обобщенными координатами* .

Так, для цилидрической системы координат получаем:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{n}_\theta + \dot{z}\mathbf{n}_z; \tag{81}$$
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2; \tag{82}$$

для сферической системы координат:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi; \tag{83}$$
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \tag{84}$$

Задача 1.8. *Записать разложение скорости по единичным векторам для параболической системы координат.*

Задача 1.9. *Справедлива ли для ускорения $\boldsymbol{w} = \ddot{\mathbf{r}}$ формула, аналогичная формуле (80):*

$$\boldsymbol{w} = H_1\ddot{q}_1\boldsymbol{n}_1 + H_2\ddot{q}_2\boldsymbol{n}_2 + H_3\ddot{q}_3\boldsymbol{n}_3\,?$$

Ответ: Нет.

7. Градиент, дивергенция, ротор и оператор Лапласа

Рассмотрим скалярную функцию f, зависящую от радиус-вектора $\mathbf{r}$. Найдем изменение величины функции $f(\mathbf{r})$ при бесконечно малом перемещении $d\mathbf{r}$ из точки $\mathrm{M}(\mathbf{r}_0)$ в точку $\mathrm{M}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r})$

$$df = f(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0).$$

Учитывая, что $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ это сложная функция декартовых координат, получим

$$df = f(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz - f(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz. \tag{85}$$

Величины dx, dy, dz связаны с вектором $d\mathbf{r}$ очевидными соотношениями:

$$dx = |d\mathbf{r}|\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_x}), dy = |d\mathbf{r}|\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_y}), dz = |d\mathbf{r}|\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_z}). \tag{86}$$

Введем единичный вектор $\mathbf{s}$, сонаправленный вектору бесконечно малого перемещения $d\mathbf{r}$

$$\mathbf{s} = \cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_x})\mathbf{n}_x + \cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_y})\mathbf{n}_y + \cos(\widehat{d\mathbf{r}, \mathbf{n}_z})\mathbf{n}_z$$

и определим *производную по направлению* $\boldsymbol{s}$ как

$$\frac{f(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0)}{dl} = \frac{df}{dl}, \tag{87}$$

где dl – длина вектора $d\mathbf{r}$.

Введем вектор *градиента функции* $f(\boldsymbol{r})$, который определяется следующим образом:

$$\mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{n}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{n}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{n}_z. \tag{88}$$

Как следует из сказанного выше, производная по направлению может быть представлена в виде скалярого произведения единичного вектора $\mathbf{s}$ и градиента функции $f(\mathbf{r})$

$$\frac{df}{dl} = \mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}. \tag{89}$$

Таким образом, вектор градиента ориентирован по направлению наибольшего роста функции $f(\mathbf{r})$ в данной точке $\mathbf{r}_0$, а его величина совпадает с величиной производной по этому направлению.

Теперь обратимся к *векторной* функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ (или, как часто говорят, векторному полю $\mathbf{a}(\mathbf{r})$). Важнейшими величинами, характеризующими её изменение в окрестности некоторой точки являются скалярная величина, называемая дивергенцией, и векторная величина, называемая ротором.

Определение 3. Дивергенцией вектора $\mathbf{a}$ называется отнесенный к единице объема поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность бесконечно малого объема, окружающего рассматриваемую точку.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint\limits_S a_n dS}{V} \tag{90}$$

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед с вершиной в точке М с декартовыми координатами x_0, y_0 и z_0; длины сторон параллелепипеда будут dx, dy и dz соответственно. Рассчитаем дивергенцию некоторого векторного поля $\mathbf{a}$ в точке М. Рассмотрим две грани этого параллелепипеда, перпендикулярные оси x. Поток через первую из них ($x = x_0$) равен $-a_x dydz$ (знак минус связан с тем, что вектор нормали к поверхности $\mathbf{n}$ направлен наружу); поток через вторую поверхность, учитывая бесконечно малое изменение векторного поля $\mathbf{a}$, мы можем записать как:

$$(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx) dydz.$$

Аналогичный вид будут иметь потоки через остальные четыре грани бесконечно малого параллелепипеда. Сложив все потоки и, учитывая, что объем параллелепипеда равен $dxdydz$, получим выражение для дивергенции в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{91}$$

Равенство дивергенции нулю означает отсутсвие источников поля в этой точке.

Задача 1.10. *Расчитать дивергенцию векторного поля* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$.

Ответ: Для любой точки $\operatorname{div} \mathbf{a} = 3$

Рассмотрим теперь *циркуляцию* векторного поля $\mathbf{a}$ по некоему контуру:

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}, \tag{92}$$

где $d\mathbf{l}$ — элемент длины вдоль этого контура. Для некоторой точки М расположим три контура в каждой из координатных плоскостей. Сопоставим каждому из контуров величину циркуляции по нему, нормированную на его площадь. Устремив площадь контура к нулю, получим три компоненты вектора *ротора* векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, обозначаемого $\operatorname{rot} \mathbf{a}$), вида:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_i = \lim_{S_i \to 0} \frac{\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{S_i}. \tag{93}$$

Здесь i нумерует координаты, а S_i — площадь контура, перпендикулярного i- ой оси.

Вновь рассмотрим бесконечно малый параллелепипед. Циркуляция по контуру, образованному нижней гранью параллелепипеда, будет равна

$$a_x dx + \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) dy - \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} dy \right) dx - a_y dy = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Разделив на площадь контура $dxdy$, получим проекцию вектора ротора на ось z. Таким образом, декартовы координаты вектора ротора равны:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \tag{94}$$

Удобно записывать координаты вектора ротора, используя определитель:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{95}$$

Наконец, рассмотрим следующую дифференциальную операцию:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \triangle f \tag{96}$$

Говорят, что сумма вторых производных функции $f(\mathbf{r})$ есть результат действия на эту функцию *оператора Лапласа*, или *лапласиана*,

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

8. Оператор Гамильтона

Введем векторный оператор[4] "набла"(оператор Гамильтона[5])

$$\nabla = \mathbf{n}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Часто этот оператор можно рассматривать как некоторый, пусть и символический, вектор. Тогда векторные дифференциальные операции можно записать следующим образом:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f \tag{97}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} \tag{98}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} \tag{99}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{100}$$

Применяя оператор Гамильтона к произведению, следует учитывать, что операция дифференцирования действует на каждый из множителей.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] &= \nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\times\mathbf{b}] + \nabla\cdot[\mathbf{a}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}] = \\ &= \nabla\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\end{aligned} \tag{101}$$

Приведем далее ряд формул векторного анализа, оставив их доказательство читателю.

[4]Напомним, что оператор — это правило, по которому одной функции ставится в соответствие другая функция.

[5]Уильям Роуан Гамильтон (1805-1865)), ирландский математик, физик и механик

$$\nabla(f\mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{a} + f\nabla \cdot \mathbf{a} \tag{102}$$
$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{a} + f\nabla \times \mathbf{a} \tag{103}$$
$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \tag{104}$$
$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \tag{105}$$
$$\nabla \times \nabla f = 0 \tag{106}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0 \tag{107}$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}, \tag{108}$$

где

$$\Delta\mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{n}_x + \Delta a_y \mathbf{n}_y + \Delta a_z \mathbf{n}_z. \tag{109}$$

9. Дифференциальные векторные операторы в криволинейных координатах

Градиент. В криволинейных координатах элемент длины связан с дифференциалом координаты параметром Ламе (68). Тогда изменение координаты q_i на величину dq_i приведет к тому, что на отрезке длиной $dl_i = H_i dq_i$ величина функции f изменится на df, то есть производная по направлению единичного вектора $\mathbf{n}_i$ окажется равной:

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i, \tag{110}$$

а собственно вектор градиента в криволинейных кординатах заишется в виде:

$$\mathrm{grad}\ f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathbf{n}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathbf{n}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\mathbf{n}_3. \tag{111}$$

Дивергенция. Чтобы рассчитать величину дивергенции в криволинейных коорднатах, воспользуемся её определением (90). Поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность MM_1PM_3 равен $-a_2 dl_1 dl_3$ (рис. 7). Определяя поток через поверхность M_2NQF, следует учесть не только изменение проекции вектора на направление $\mathbf{n}_2$ в точке M_2, но и изменение площади поверхности. Таким образом, поток через поверхность M_2NQF окажется равным

$$a_2 dl_1 dl_3 + \frac{\partial(a_2 dl_1 dl_3)}{\partial q_2} dq_2.$$

Сложив потоки через MM_1PM_3 и M_2NQF, получим

$$\frac{\partial(a_2 dl_1 dl_3)}{\partial q_2} dq_2 = \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3. \tag{112}$$

Аналогичным образом сложим потоки и через другие грани нашей фигуры. Учтем также выражение для элемента объема (69). Окончательно, таким образом, получим:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right). \tag{113}$$

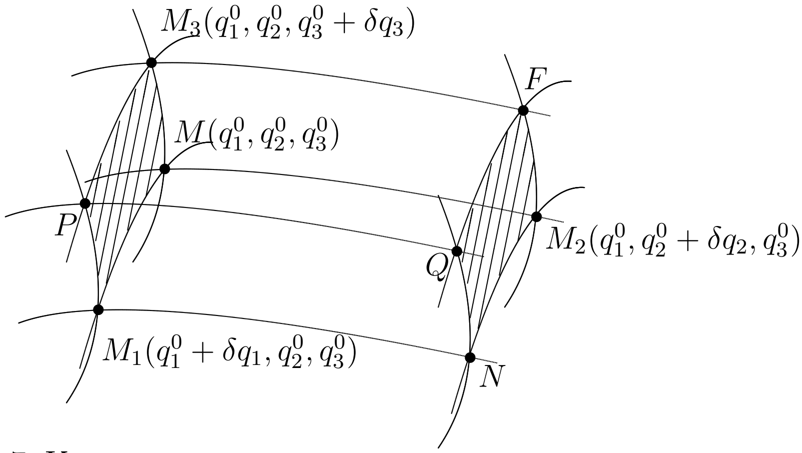


Рис. 7: К расчету дивергенции в криволинейных координатах.

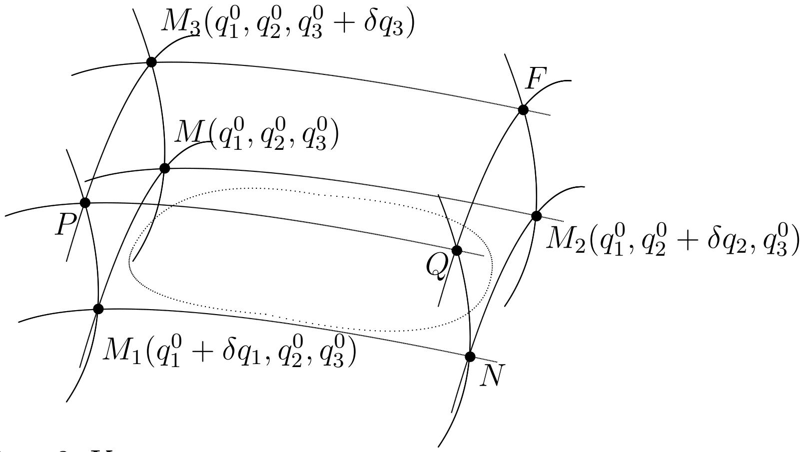


Рис. 8: К расчету ротора в криволинейных координатах

Ротор. Чтобы рассчитать проекцию ротора вектора **a** на ось q_3, рассмотрим циркуляцию вектора **a** по контуру MM_2NM_1 (рис. 8).

На участке MM_2 получим величину $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$, равную $a_2 dl_2 = a_2 H_2 dq_2$, на участке M_2N получим

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = a_1 H_1 dq_1 + \frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_2} dq_1,$$

на участке NM_1:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = -\left(a_2 H_2 dq_2 + \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_1} dq_2 \right),$$

наконец, на участке M_1M:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = -a_1 H_1 dq_1.$$

Знаки "минус"здесь учитывают то, что направление обхода противоположно направлению оси. Сложив все $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ и учитывая, что площадь, ограниченная контуром MM_2NM_1, равна $H_1H_2dq_1dq_2$, получим:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right). \tag{114}$$

Лапласиан. Из (96), (111) и (113) получаем:

$$\triangle f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right). \tag{115}$$