1) Дифференцируемость функции нескольких переменных, достаточное условие дифференцируемости.

Теорема: пусть в $O_{\delta(\bar a)}$ сущ. $\frac{\partial f(\bar x)}{\partial x_s}$, $s=1\ldots n$ и $\frac{\partial f(\bar x)}{\partial x_s}$, $s=1\ldots n \in C(\bar a)$ $\to$ $f(\bar x)$ диф. в $\bar x=\bar a$

Док-во:

пусть $n=2$.

Необходимо док-ть, что $f(x;y)=f(a;b)+\frac{\partial f(a;b)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(a;b)}{\partial y}\Delta y$

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Запишем приращение $\Delta f(x;y)=f(x;y)-f(a;b)=$
$=f(a+\Delta x;b+\Delta y)-f(a;b)=f(a+\Delta x;b+\Delta y)-f(a;b+\Delta y)+$
$+f(a;b+\Delta y)-f(a;b)$

Применим теорему Лагранжа:

$$f(a+\Delta x;b+\Delta y)-f(a;b+\Delta y)=\frac{\partial f(a+\xi\Delta x;b+\Delta y)}{\partial x}\Delta x$$

$$f(a;b+\Delta y)-f(a;b)=\frac{\partial f(a;b+\eta\Delta y)}{\partial y}\Delta y \qquad 0<\xi,\eta<1$$

$$\Delta f(x;y)=\frac{\partial f(a+\xi\Delta x;b+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(a;b+\eta\Delta y)}{\partial y}\Delta y$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(a+\xi\Delta x;b+\Delta y)}{\partial x}&=\frac{\partial f(a;b)}{\partial x}+\bar{o}(1)\\ \frac{\partial f(a;b+\eta\Delta y)}{\partial y}&=\frac{\partial f(a;b)}{\partial y}+\bar{o}(1)\end{aligned}\right|$$

в силу непрерывн. частных произв. при $\Delta x\to 0$

Помним обрезан:

$$\Delta f(x;y) = \frac{\partial f^{(a;b)}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f^{(a;b)}}{\partial y}\Delta y + \bar{\bar{o}}(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \quad и \quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \Rightarrow \begin{matrix} |\Delta x| \leq |\rho| \\ |\Delta y| \leq |\rho| \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \bar{o}(|\Delta x| + |\Delta y|) \sim \bar{o}(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ч.т.д.

2) Вычисление частных производных сложной функции

Теорема: пусть $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}) + \ldots + \varphi_m(\bar{x}))$ есть отображение из R^n в R^m, определённое в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a}$ и дифференц. в этой точке. Пусть, далее, для всякого $\varepsilon > 0$ при отображении φ образ некоторой δ-окрестности $O(\bar{a}, \delta)$ содерж. в ε-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$. Пусть, для любой $\bar{y} \in O(\bar{b}; \varepsilon)$ $\exists f(\bar{y}) \in D(\bar{b})$. Тогда, $h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$ является диф. в $\bar{x} = \bar{a}$, причём

$$\frac{\partial h}{\partial x_s} = \frac{\partial h}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \ldots + \frac{\partial h}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_s} \qquad s = 1 \ldots n$$

Док-во:

т.к. $f(\bar{y}) \in D(\bar{b}) \Rightarrow \Delta f = df + \bar{o}(|\Delta \bar{y}|)$ при $\Delta \bar{y} = \bar{y} - \bar{b}$,

где $df = \sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta y_l$.

$$\Delta y_l = \Delta \varphi_l(\bar{x}) \Rightarrow \Delta h(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta \varphi_l(\bar{x}) + \bar{o}(|\Delta \varphi(\bar{x})|)$$

С другой стороны:

$$\Delta \varphi_l(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_s} \Delta x_s + \bar{o}(|\Delta \bar{x}|), \quad s = 1 \ldots n, \; l = 1 \ldots m$$

Частные производные функции $\varphi_l(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ – вещественные числа, поэтому $\exists M > 0$:

$$|\Delta\varphi_e(\overline{x})| \le 2Mn\,|\Delta\overline{x}|\ , \quad |\Delta\varphi| \le 2Mn^2|\Delta\overline{x}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|\Delta\varphi_e(\overline{x})|}{|\Delta\overline{x}|} \le 2Mn & \text{при } M = \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{|\Delta\varphi|}{|\Delta\overline{x}|} \le 2Mn^2 & \text{при } M = \dfrac{1}{2n^2} \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{o}}(|\Delta\varphi_e(\overline{x})|) \sim \overline{\overline{o}}($$

Подставим, получим

$$\Delta h(\overline{x}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_e}\frac{\partial y_e}{\partial x_s}\Delta x_s + \overline{\overline{o}}(|\Delta\overline{x}|)$$

Ч.т.д.

3) Дифференциал функции 2 переменных, инвариантность формы 1 дифференциала.

$f(x;y) \rightsquigarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

Инвариантность формы первого дифференциала: если в выр-е для первого дифференциала $df(\overline{y})$ вместо независимого приращения Δy_s подставить дифференциал функции $y_s = \varphi_s(\overline{x})$, то полученное выражение будет дифференциалом сложной фун. $h(\overline{x}) = f(\varphi(\overline{x}))$. Другими словами, форма первого дифференциала не изменится, если независимые переменные оказываются зависимыми функциями.

$f(x;y)$; $x(u;\vartheta)$; $y(u;\vartheta)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}d\vartheta\right) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}d\vartheta\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)d\vartheta$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}d\vartheta$$

Утверждение инвариантности является переформулировкой теоремы о дифференцировании сложной функции.

4) Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл

Пусть задано направление $\bar{e} = (e_1 \dots e_n)$ $|\bar{e}| = 1$ и

$\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n$ - направления осей координат $Ox_1 \dots Ox_n$.

Тогда, если α_s - угол между $\bar{k}_s$ и $\bar{e}$, то $e_s = (\bar{e}, \bar{k}_s) = |\bar{e}||\bar{k}_s| \cos\alpha_s \Rightarrow e_s = \cos\alpha_s$.

$(e_1 \dots e_n)$ - направляющие косинусы направления $\bar{e}$

Пусть $f(\bar{x}) \in D(\bar{x})$, $\bar{x} = \bar{a}$ и $\bar{e}$ - произвольное направл

Рассмотрим $h(t) = f(\bar{a} + t\bar{e}) \Rightarrow$ при $t = 0$

$$dh(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} \cos\alpha_i = h'(0)$$

Определение: величина $h'(0)$ называется производной функ. $f(\bar{x})$ по направлению $\bar{e}$ в точке $\bar{a}$

Определение: вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ называют градие

функции $f(\bar{x})$ в $\bar{x} = \bar{a}$

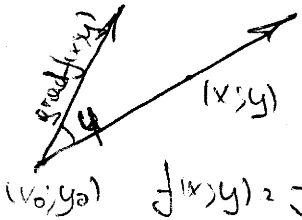
Максимальное знач-е произв. $f(\bar{x})$ по напр. равно $|\mathrm{grad}\,\bar{e}$

достигается при $\bar{e} = \frac{\mathrm{grad}\,\bar{e}}{|\mathrm{grad}\,\bar{e}|}$ (min при $\bar{e} = \frac{\mathrm{grad}\,\bar{e}}{|\mathrm{grad}\,\bar{e}}$

Производная по напр. равна нулю, если вектор градиен

равен нулю или $\perp$ вектору направления

Градиент по вектору.



$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\varphi \\ y = y_0 + t\sin\varphi \end{cases}$$

$f(x;y) = f(t)$

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

Связь производной по напр. и градиента

$$\operatorname{grad} f(x;y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial n} = |\operatorname{grad} f(x;y)|\cos\varphi$ при $\varphi = 0$ $|\operatorname{grad} f(x;y)| = \frac{\partial f}{\partial n}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad} z(x_0, y_0), \vec{n})$$

скалярное произведение

5) Равенство вторых смешанных производных функции 2-х переменных

Теорема (Шварца): пусть $f(x_1, x_2)$ в некоторой окрестности $\bar{x} = \bar{a} = (a_1, a_2)$ имеет смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, причём они непрерывны в $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда в $\bar{x} = \bar{a}$ эти производные равны $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

Док-во:

Рассм. функ. $\Delta^2 f$ функ. $f(\bar{x})$ в $\bar{x} = \bar{a}$:

$$\Delta^2 f = f(a_1 + h_1; a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1; a_2) - f(a_1; a_2 + h_2) + f(a_1; a_2)$$

Положим $\varphi(x) = f(x, a_2 + h_2) - f(x; a_2)$

Дважды применим формулу Лагранжа:

$$\varphi(a_1 + h_1) - \varphi(a_1) = h_1 \varphi'(a_1 + \theta_1 h_1) = h_1 (f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h_1; a_2 + h_2) -$$
$$- f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h_1; a_2)) = h_1 h_2 f''_{x_1 x_2}(a_1 + \theta_1 h_1; a_2 + \theta_2 h_2) =$$
$$= h_1 h_2 (f''_{x_1 x_2}(a_1; a_2) + \bar{\bar{o}}(1))$$ в силу непр. $f''_{x_1 x_2}(x_1; x_2)$ в $\bar{x} = \bar{a}$.

Положим $\psi(x) = f(a_1 + h_1; x) - f(a_1; x)$

$$\psi(a_2 + h_2) - \psi(a_2) = h_2 \psi'(a_2 + \theta'_2 h_2) = h_2 (f'_{x_2}(a_1 + h_1; a_2 + \theta'_2 h_2) -$$
$$- f'_{x_2}(a_1; a_2 + \theta'_2 h_2)) = h_2 h_1 f''_{x_2 x_1}(a_1 + \theta'_1 h_1; a_2 + \theta'_2 h_2) =$$
$$= h_2 h_1 (f''_{x_2 x_1}(a_1; a_2) + \bar{\bar{o}}(1))$$

Причём $\varphi(a_1 + h_1) - \varphi(a_1) = \psi(a_2 + h_2) - \psi(a_2) \Rightarrow f''_{x_1 x_2}(a_1; a_2) = f''_{x_2 x_1}(a_1; a_2)$

Ч.т.д.

6) Формула Тейлора функции 2 переменных

Теорема (остаток в форме Лагранжа): пусть $f(x_1;x_2)$ имеет $(k+1)$ диф. для $\forall \bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$, где ε – некоторое положит. число. Тогда $\forall \bar{b} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ $\exists \bar{c} = \bar{a} + \theta(\bar{b}-\bar{a})$ при $0<\theta<1$, что $f(\bar{b}) = f(\bar{a}) + \sum\limits_{s=1}^{k} \frac{d^k f(\bar{a})}{s!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}} + R$

$$R = \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}$$

Док-во:

пусть $g(t) = f(\bar{a} + t(\bar{b}-\bar{a}))$. Тогда, по ф. Тейлора для одной переменной $g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \ldots + \frac{g^k(0)}{k!} + \frac{g^{k+1}(\theta)}{(k+1)!}$

Справедливы равенства $g(0) = f(\bar{a})$, $g'(0) = df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}$ ...

... $g^k(0) = d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}$, $g^{k+1}(\theta) = d^{k+1} f(\bar{c})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}$

Подставляя, получим:

$$f(\bar{b}) = f(\bar{a}) + \sum_{s=1}^{k} \frac{d^k f(\bar{a})}{s!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}} + \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}$$

Ч.т.д.

Приложение к 6 билету

Пусть существует $f(\bar{x})$ и она имеет дифф. в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Зафиксируем приращение $\bar{h}=d\bar{x}$ ⇒ ⇒ получим новую функцию $g(\bar{x})=g(\bar{x},h)$, определенную выражением

$$g(\bar{x})=df(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$$

Второй дифференциал функции $f(x;y)$:

$$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Сделаем линейную замену: $\begin{cases} x=at+b; & x_0=at_0+b \\ y=ct+d; & y_0=ct_0+d \end{cases}$

$$f'(t_0)=\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}y'(t_0)=a\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}+c\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}$$

$$f''(t_0)=\left(\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}\cancel{x'(t_0)}\ \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}y'(t_0)\right)'_t=a\left(\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}x'(t_0)+\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}x'(t_0)\right)$$

$$+c\left(\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}x'(t_0)+\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}y'(t_0)\right)=a^2\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}+2ac\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}+$$

$$+c^2\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}$$

$$d^2f(t_0)=\left(a^2\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}+2ac\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}+c^2\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}\right)(dt)^2$$

$$d^nf=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(dx)^k(dy)^{n-k},\quad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

7) Необходимое и достаточное условие локального экстремума функции 2 переменных

Теорема (необходимое условие локального экстремума):

если $\overline{a}$ - точка локального экстремума функции $f(\overline{x})$ и существует дифференциал $df(\overline{x})$ её в этой точке, то для любого приращения $\Delta\overline{x}$ имеем

$df(\overline{x})|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0$ или $\operatorname{grad} f(\overline{x})|_{\overline{x}=\overline{a}} = \overline{0}$

Док-во:

Достаточно док-ть, что при $s=1\ldots n$ выполняется равенство $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_s}\Big|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0$

Рассмотрим $g(t) = f(\overline{a} + t\overline{e}_s)$, где $\overline{e}_s$ - направляющий вектор оси Ox_s $\Rightarrow$ $g(t)$ имеет в $t=0$ точку локального экстремума $\Rightarrow$ $g'(0)=0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g'(0) = \frac{\partial f(\overline{x})}{x_s} = 0$

Ч.т.д.

Теорема (достаточное условие локального экстремума):

пусть в $\overline{x}=\overline{a}$ $df(\overline{x})=0$, $\exists d^2f(\overline{x}) \neq 0$, тогда:

1) если $d^2f(\overline{x})>0$, то в $\overline{x}=\overline{a}$ $f(\overline{x})$ им. лок. min (наоборот)

2) если $d^2f(\overline{x})$-неопред. форма, то $\overline{a}$ не явл. точ. лок. экстр.

Док-во: (для $d^2f(\bar{x})>0$)

Пусть A — матрица квадратичной формы $d^2f(\bar{x})$ переменных Δx_s, $s=1..n$, $S(\bar{a})$ — множество точек $\bar{x} \in R^n$ с условием $|\Delta\bar{x}|=1$

Множ-во $S(\bar{a})$ огранич. и явл. замкнутым, так как совпадает со своей границей $\partial S(\bar{a})$ => содержит эту границу => $S(\bar{a})$ — компакт => $d^2f(\bar{x})$ как функция от приращения $\Delta\bar{x}$ достигает минимума m, т.е. $\exists \bar{e}_0$ $|\bar{e}_0|=1$ такой, что $d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}=\bar{e}_0}=m>0$

$\forall \Delta\bar{x} = |\Delta\bar{x}|\bar{e}=1$ имеем $d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}} = |\Delta\bar{x}|^2 d^2f(\bar{x})\big|_{\Delta\bar{x}=\bar{e}}$

По ф. Тейлора:

$\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{a}) + \frac{1}{2}d^2f(\bar{a}) + \bar{o}(|\Delta\bar{x}|^2) = 0 + \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 m + \bar{o}(|\Delta\bar{x}|^2) \geq |\frac{1}{2}\Delta\bar{x}|^2 m(1+\bar{o}(1))$, т.е. найдется $\varepsilon>0$ $\forall \bar{x}\in O(\bar{a},\varepsilon) \mapsto \Delta f(\bar{y})>0$ (знак приращ. совпад. с d^2

Аналогично для $d^2f(\bar{x})<0$.

Ч.т.д.

8) Теорема о неявной функции

Определение: функ-я $\varphi(\bar{x})$, зависящая от $(n-1)$ переменной $\bar{x} = (x_1 \dots x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, называется неявной функцией, сост. $f(\bar{x}, y) = 0$, если для любой точки $\bar{x}$ из δ-окрестности имеет место равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$

Теорема: пусть:

1) $f(x;y) \in O_{\varepsilon}(a;b) \in R^2$

2) $f(a;b) = 0$

3) $\forall (x;y) \in O_{\varepsilon(a;b)}$ $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \in C(a;b)$

4) $\frac{\partial f(a;b)}{\partial y} > 0$

тогда существует единственная $y = \varphi(x)$, определённая в некоторой δ-окрестности a, такая что

1) $\varphi(a) = b$

2) $\forall x \in O_{\delta(a)}$: $f(x, \varphi(x)) = 0$ и $\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x;y)|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x;y)|_{y=\varphi(x)}}$

Док-во:

т.к. $f'_y(x;y) \in C(O_{\varepsilon}(a;b))$ и $f'_y(a;b) > 0$, то $\exists K \in O_{\varepsilon(a;b)}$ - -квадрат с центром в $(a;b)$ и со сторонами, $\parallel$ осям, длины $2h$, внутри которого $\min f'_y(x;y) = m > 0$.

В силу того, что $f'_y(x;y)>0$ то $f(a;y)\nearrow$. Т.к. $f(a;b)=0$, то $f(a;b+h)>0$ и $f(a;b-h)<0$ в силу непрерывности $f(x;y)$ $\exists\delta>0: \forall x\in[a-\delta;a+\delta]$ имеем $f(x;b+h)>0$ и $f(x;b-h)<0.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на отрезке $[A_1;A_2]$, где $A_1=(x;b-h)$ и $A_2=(x;b+h)$ функ-я $g(y)=f(x;y)$ обращается в $\exists! y_x=0$

Каждой точке $x\in[a-\delta;a+\delta]$ поставим в соответствие точку y_x. Оно определяет функ. $y=\varphi(x)=y_x$, для которой $f(x;\varphi(x))=f(x;y_x)=0$ при этом из $f(a;b)=0$ получаем $b=\varphi(a)=y_a$

Ф-я $\varphi(x)$ является искомой. Необходимо док-ть, что $y=\varphi(x)$ диф. внутри интервала $(a-\delta;a+\delta)$, причем

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x;\varphi(x))}{f'_y(x;\varphi(x))}$$

Докажем непрерывность $\varphi(x)$. Пусть x и x_0 принадлежат $(a-\delta,a+\delta)$. Покажем, что $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\to0$ при $\Delta x=x-x_0\to0$. Положим $y=\varphi(x)$, $y_0=\varphi(x_0)$, $\Delta y=\Delta\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f(x;y)=f(x_0;y_0)=0$ $\Rightarrow$ для функ. $g(t)=f(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y)$ справедливо $g(0)=g(1)=0.$

$g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y)\Delta y$

По т. Ролля $\exists \theta \in (0,1): g'(\theta) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{f'_x(\xi)}{f'_y(\xi)}$, где $\xi = (x_0 + \theta\Delta x; y_0 + \theta\Delta y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leq \dfrac{M}{m}$, $M = \max\limits_K |f'_x(x;y)|$, $m = \min\limits_K |f'_y(x;y)| > 0$

т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – ограничена $\Rightarrow$ $\Delta y = \Delta x \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x)$ – непрерывна.

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ имеем, $\vdots$

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x;y)|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x;y)|_{y=\varphi(x)}}$$

Ч.т.д.

9) Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.

Метод множителей Лагранжа: пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — независимые вещественные переменные. Рассмотрим ф-ю Лагранжа $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$.

Для того, чтобы некая неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была точкой условного экстремума этой функции на невырожденном многообразии Ω_1, необходимо, чтобы при некотором $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$ имело место равенство $dL(\bar{x}, \bar{\lambda})|_{\bar{x}=\bar{a}, \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0} = 0$, т.е. чтобы все частные производные функции $L(\bar{x}, \bar{\lambda})$ по переменным x_s и λ_r обращались в нуль.

Док-во:

По теореме о сис-ме неявных функций, в некоторой ε-окрестности точки $\bar{a} \in R^n$ существует m гладких функций $\psi_1(\bar{z}), \dots, \psi_m(\bar{z})$, где $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ таких, что $\varphi_k(\psi_1(\bar{z}), \dots, \psi_m(\bar{z})) \equiv 0$, а также

$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0), \dots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) \equiv 0$, $(\psi_1(\bar{z}_0), \dots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) = \bar{a}$

Пусть $\bar{e}_r$ - направляющий вектор оси Ox_r, $r = m+1, \dots, n$

Рассмотрим функции $h_{k,r}(t) = \varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \dots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r)$

$h_{k,r}(t) = 0$, где $k = 1, \dots, m$ и функ.

$h_{0,r}(t) = f(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \dots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r)$

В точке $t=0$ производные всех функций равны нулю у первой – потому что тождественно равна нулю, у второй – потому что $t=0$ должна быть локальным экстремумом.

Вычислим $h'_{k,r}(t)|_{t=0}$

$$h'_{k,r}(t)|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_r}$$

$$h'_{0,r}(t)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

где $k=1,\ldots,m$; $r=m+1,\ldots,n$ т.е. имеем

$$h'_{k,r}(t)|_{t=0} = (\overline{\Phi}_k, a_r) = 0, \quad h'_{0,r}(t)|_{t=0} = (\overline{F}, a_r) = 0$$

$F = \operatorname{grad} f(\overline{x})$ в $\overline{x} = \overline{a}$, $\overline{\Phi}_1 = \operatorname{grad} \varphi(\overline{x}), \ldots \overline{\Phi}_m = \operatorname{grad} \varphi_m(\overline{x})$ – – линейная комбинация F.

$$\overline{a}_r = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_r}, \ldots, \frac{\partial \psi_m}{\partial x_r}, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ m+r\text{ – место.}}}{1}, \ldots, 0\right)$$

Таким образом, все векторы $a_{m+1}, \ldots, a_n \perp$ каждому из векторов $\overline{F}, \overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_m$, при этом, очевидно, векторы $\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_m$ будут линейно независимы.

Порядок действий для нахождения условного экстремума:

1) Находим фун-ю Лагранжа $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{m=1}^{n} \lambda_m g_m($

2) Решаем сис-му

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases}$$

Находим $\lambda_1 \ldots \lambda_m$. и $\bar{x} = \bar{a}$

3) Составляем $L^0(\bar{x}, \lambda_1 \ldots \lambda_m)$.

4) Находим $d^2 L^0(\bar{x}, \lambda_1 \ldots \lambda_m)$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$

5) Вычисляем $\begin{cases} \text{grad}\, g_1(\bar{a}) = 0 \\ \ldots \\ \text{grad}\, g_m(\bar{a}) = 0 \end{cases}$

6) Ограничиваем $d^2 L^0$ найденной системой

7) Исследуем $d^2 L^0|_W$ на определённость по критерию Сильвестра.

Приложение к билету по условному экстремуму. ...

$f(x;y)$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(O_\delta(x_0;y_0))$ $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in C(O_\delta($

$\varphi(x;y)=0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \varphi(x;y) \in C(O_{\delta(x_0;y_0)})$ $\frac{\partial \varphi(x_0;y_0)}{\partial y} \neq 0$

1) Необходимое условие экстремума в $(x_0;y_0)$ функ. $f(x;y)$ при условии $\varphi(x_0;y_0)=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x;y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Обозначим $\lambda = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial \varphi / \partial y}$

Док-во

По т. о неявной функции $\exists!\, y(x),\ x \in O_\delta(x_0)$

$y'(x_0) = -\frac{\partial \varphi(x_0;y_0)/\partial x}{\partial \varphi(x_0;y_0)/\partial y}$ пусть $y=y(x)$ и $f(x;y(x))$

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f/\partial y}{\partial \varphi/\partial y}$$

Пусть $\lambda = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial \varphi/\partial y}$

Пусть в точке $(x_0; y_0; \lambda_0)$ выполняются все 3 условия системы $(*)$

Введём функцию Лагранжа $L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda \varphi(x;y)$

2) Достаточное условие

Пусть выполнено необходимое условие и

а) $\Delta(x_0; y_0; \lambda_0) > 0 \Rightarrow f(x_0; y_0) - max$

б) $\Delta(x_0; y_0; \lambda_0) < 0 \Rightarrow f(x_0; y_0) - min$

10) Первообразная, неопределённый интеграл и его свойства.

Определение: функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $(a;b)$, если $\forall x \in (a;b)$ имеем $F'(x) = f(x)$

Определение: совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом.

Свойства (доказываются диф. обеих частей):

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \quad \forall \alpha \neq 0$

3) $\int f(x)dx = \int g(x)dx \quad (f = g)$

Эквивалентно

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int g(x)dx\right)'$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(\int g(x)dx\right)$$
$$f(x) = g(x)$$
$$f(x)dx = g(x)dx$$

11) Замена переменных и интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Правило интегрирования по частям:

$$u(x)\vartheta(x) - \int u(x)\,d\vartheta(x) = \int du(x)\cdot\vartheta(x)$$

Док-во:

$$d(u\vartheta - \int u\,d\vartheta) = du\,\vartheta + \cancel{u\,d\vartheta} - \cancel{u\,d\vartheta} = du\,\vartheta$$

$$\int d(u\vartheta - \int u\,d\vartheta) = \int du\,\vartheta$$

$$u\vartheta - \int u\,d\vartheta = \int du\,\vartheta$$

Ч.т.д.

Правило замены переменной:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Док-во:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_t = \left(\int f(x)\,dx\right)'_x \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Ч.т.д.

12) Определённый интеграл, его геометрический смысл, вычисление площади под параболой $y = x^2$ на $x \in [0;1]$

Определение: определённым интегралом $f(x)$ на $[a;b]$ называют число, равное площади криволинейной трапеции.

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

С другой стороны

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + n^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2n+1)(n+1)}{6n^{\cancel{3}\,2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Определение: число $\mathcal{I}$ называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения T отрезка $[a;b]$ с условием $\Delta_T < \delta$ справедливо $|\mathcal{I} - S(T,\xi)| < \varepsilon$

13) Ограниченность интегрируемой на отрезке функции

Теорема: пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда она ограничена на нём.

Док-во:

Пусть $f(x)$ не ограничена на $[a;b]$. $\forall T: a=x_0<x_1 \dots <x_n=b$ - разбиение, такое что $\Delta_T<\delta$ и $\exists \Delta_r=[x_{r-1};x_r]$, на котором $f(x)$ - неограниченна.

Покажем, что $S(V;\xi)$ не ограничена. Возьмём $\forall M>0$

Построим разметку V разбиения T такую, что $|S(V;\xi)|>M$

Положим $$A=\left|\sum_{k=1,k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|$$

Поскольку $f(x)$ не огранич. на $\Delta_r \Rightarrow \exists \xi_r \in \Delta_r$:
$$|f(\xi_r)|>\frac{M+A}{\Delta x_r}$$

Отсюда
$$|S(V;\xi)| \geq |f(\xi_r)\Delta x_r| - \left|\sum_{k=1,k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| > \frac{M+A}{\Delta x_r}\Delta x_r - A = M$$

$S(V;\xi)$ - не ограничена, т.е. $f(x)$ - не интегрируема.

Ч.т.д.

14) Критерий интегрируемости. Пример неинтегрируемой функции Дирихле.

Определение: $\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$

Определение: $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$

Лемма: $\forall T$ имеем $\underline{S}(T) \leq S(T;\xi) \leq \overline{S}(T)$

Лемма: $\forall T_1$ и T_2 имеем $\underline{S}(T_1) \leq \overline{S}(T_2)$

Необходимость:

Пусть $\lim\limits_{dT \to 0} S(T;\xi) = I \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T$ при $dT < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |S(T;\xi) - I| < \varepsilon \iff I - \varepsilon < S(T;\xi) < I + \varepsilon$

Рассмотрим T произвольное $(dT < \delta_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{S}(T) = \inf\limits_{\xi \in \lambda(T)} S(T;\xi)$, $\overline{S}(T) = \sup\limits_{\xi \in \lambda(T)} S(T;\xi)$ $\quad \lambda(T)$ - множ-во разметок разбиения T $\Rightarrow$

$\Rightarrow I - \varepsilon \leq \underline{S}(T) \leq I + \varepsilon$ и $I - \varepsilon \leq \overline{S}(T) \leq I + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{S}(T), \overline{S}(T) \in [I - \varepsilon; I + \varepsilon] \mapsto |\overline{S}(T) - \underline{S}(T)| \leq 2\varepsilon$

поэтому, для всякого $\varepsilon > 0$ получили

$$\lim_{\Delta_T \to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$$

Достаточность:

Если $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$, то $\exists \lim\limits_{dT \to 0} S(T;\xi) = I$

$\overline{J} = \inf\limits_{T \in A'} \overline{S}(T)$ – верхний интеграл, $\underline{J} = \sup\limits_{T \in A'} \underline{S}(T)$ – нижний интеграл, где A' – множество всех разбиений $[a;b]$.

Существует лемма: $\underline{S}(T) \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq \overline{S}(T) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \overline{J} - \underline{J} \leq \overline{S}(T) - \underline{S}(T)$

Следовательно, при $d_T \to 0$ получаем $h = \overline{J} - \underline{J} \to 0$, т.е. $h = 0$ и $\overline{J} = \underline{J} = J$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall T$ при $d_T < \delta \Rightarrow |\overline{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$

Для $\forall V$- размеченного разбиения имеем $|\overline{S}(T(V)) - \underline{S}(T(V))| < \varepsilon$

и $\underline{S}(T(V)) \leq S(T, \xi) \leq \overline{S}(T(V))$; $\underline{S}(T(V)) \leq J \leq \overline{S}(T(V)) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(T; \xi), J \in [\underline{S}(T(V)); \overline{S}(T(V))] < |\varepsilon| \Rightarrow$

$\Rightarrow |S(T, \xi) - J| < \varepsilon$.

Ч.т.д.

Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in R \\ 0, & x \in I \end{cases}$$ – не интегрируема по Риману на $[a;b]$

$\forall T$ верно $\overline{S}(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$

$\underline{S}(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0$.

$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = b - a$.

15) Интегрируемость непрерывной на отрезке функции.

Теорема: всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нём.

Док-во:

В силу т. Кантора функ-я $f(x) \in C[a;b]$ является равномерно непрерывной на $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [a;b] : |x_1 - x_2| < \delta \mapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$T : d(T) < \delta$

$\sup |f(x_1) - f(x_2)| = M_i - m_i \Longleftrightarrow 0 \le M_i - m_i \le \varepsilon$

$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a) \to 0$

$\lim_{d(T) \to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$

16) Интегрируемость монотонной на отрезке функции.

Теорема: Всякая $f(x)$ ограниченная и монотонная на $[a,b]$ интегрируема на нём.

Док-во:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : d(T) < \delta \Rightarrow |\overline{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \delta \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = \delta(f(b) - f(a)) \to 0$$

$$\lim_{d(T)\to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$$

Ч.т.д.

17) Определённый интеграл как функция верхнего предела интегрирования, его непрерывность.

Теорема: пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является непрерывной на $[a;b]$.

Док-во:

т.к. $f(x)$ - интегрируема, то $\exists M>0$: $\forall x \in [a;b] \mapsto$

$\mapsto |f(x)| \leq M$. Возьмём x, $x+\Delta x$

$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq$
$\leq M|\Delta x|$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \Delta x = \dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |\Delta F(x)| < \varepsilon \Rightarrow \Delta F(x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0 \Rightarrow F(x)$ непрерывна на $[a;b]$

ч.т.д.

18) Дифференцируемость интеграла определённого как функции верхнего предела интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема: пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и непрерывна в $x_0 \in [a;b]$, тогда $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в $x = x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Док-во:

т.к. $f(x) \in C(x_0)$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t, |t - x_0| < \delta \mapsto$

$\mapsto f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$

$\forall |\Delta x| < \delta$ таких, что $x_0 \geq a$, $x_0 + \Delta x \leq b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\Delta x|} \int_x^{x+\Delta x} (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{|\Delta x|} \leq \frac{1}{|\Delta x|} \int_x^{x+\Delta x} (f(x_0) + \varepsilon) dt$$

т.е. при $\forall \Delta x, |\Delta x| < \delta$ справедливо

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leq f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Ч.т.д.

Теорема: пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и имеет не более конечного числа точек разрыва, тогда $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообр. для $f(x)$ на $[a;b]$ и для любой первообразной $\Phi(x)$ справедлива формула:

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Док-во:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) \quad ; \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Пусть $\Phi(x)$ - любая первообразная для $f(x)$.

Тогда $\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + \cancel{C} - F(a) - \cancel{C} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Чтд.

19) Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема: пусть $f(x) \in C[x_0; x_1]$. Пусть точки $a, b \in [x_0; x_1]$, $\alpha < \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и множество значений функции $\varphi(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$ является подмножеством отрезка $[x_0; x_1]$. Пусть, также $\varphi'(t) \in C[\alpha; \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Док-во:

т.к. $f(x) \in C[a; b]$, то по т. Ньютона-Лейбница $\exists F(x)$ и $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

при всех $t \in [\alpha; \beta]$ по условию теоремы определена $G(t) = F(\varphi(t))$, причём $G'(t) = F'_t(\varphi(t)) = F'_\varphi(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow G(t)$ - первообр. для $f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Ч.т.д.

Теорема: пусть на $[a; b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Док-во:

Пусть $h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = h(b) - h(a) = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

Ч.т.д.

30) Несобственные интегралы, исследование сходимости интегралов $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$. Признаки сходимости

Определение: пусть a — вещественное число и пусть для $\forall A > a$ функ. $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a; A]$, и $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$. Если $A \to +\infty$ $\exists\, I = \lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$, то этот предел называется несобственным интегралом $f(x)$ на $[a, +\infty)$

Исследование сходимости $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$

Известно, что
$$\int \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} + C, & \beta \neq 1 \\ \ln x + C, & \beta = 1 \end{cases}$$

Поэтому, при $\beta > 1$ $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\beta} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{1-\beta} b^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} \right) =$

$= -\frac{1}{1-\beta}$ — сходится

при $\beta = 1$ $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\beta} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b = +\infty$ — расходится

при $\beta < 1$ $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\beta} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{1-\beta} b^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} \right) = +\infty$ — расходится.

Исследование сходимости $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$:

Известно, что $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + C, & \alpha \neq 1 \\ \ln x + C, & \alpha = 1 \end{cases}$

При $\alpha > 1$ $\lim\limits_{a\to 0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{a\to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha} \right) = +\infty$

$\alpha = 1$ $\lim\limits_{a\to 0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{a\to 0} \ln \frac{1}{a} = +\infty$

$\alpha < 1$ $\lim\limits_{a\to 0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{a\to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}$

Признаки сходимости!

Теорема! пусть для $\forall x \in [a; +\infty)$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ и пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда будет сходиться $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Док-во:

Т.к. интеграл от функции $g(x)$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B = B(\varepsilon) > 0$: $\forall A_1, A_2; A_1 > A_2 > B$ справедливо неравенство $\int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon$ Но поскольку

$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon \sim$ Условие Коши вып. для $f(x)$. Ч.т.д.

Критерий Коши:

1) пусть $f(x)$ определена на $[a;+\infty)$ и $\forall A>a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_a^A f(x)dx = \mathcal{Y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \mathcal{Y} = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists A(\varepsilon)>a$:

$\forall (A_2 > A_1 > A) \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

2) пусть $f(x)$ определена на $(a;b]$ и $\forall \delta>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \mathcal{Y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \mathcal{Y} = \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon)>0$:

$\forall (0<\delta_1<\delta_2<\delta) \Rightarrow \left| \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

21) Эйлеровы интегралы $\Gamma(\alpha)$, $B(\alpha,\beta)$ исследование их сходимости, свойства.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$$

В окрестности нуля подынтегральное выр-е мажорируется функцией $x^{\alpha-1}$, а на бесконечности функцией $e^{-x/2}$.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$$

при $x\in[0;1)$ $\quad e^{-x}x^{\alpha-1}<x^{\alpha-1}=\frac{1}{x^{1-\alpha}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ при $1-\alpha<1$ сходится $\Rightarrow \alpha>0$

при $x\in(1,+\infty)$ $\quad e^{-x}x^{\alpha-1}<e^{-x/2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}e^{-x/2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x/2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-x/2}(-2)\Big|_1^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-2e^{-b/2}+2e^{-1/2}\right)=0+2e^{-1/2}=2e^{-1/2}$$

ч. т. д.

$$B(\alpha;\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Сходимость доказывается разбиением на 2 интеграла

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\int_0^{1/2}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

при $x \in [0; \frac{1}{2}]$ $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} < x^{\alpha-1}$.

$$\int_0^{1/2} x^{\alpha-1} dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \Rightarrow \text{при } 1-\alpha<1 \text{ сходится } (\alpha>0)$$

$$\int_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{1/2} t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1} dt \quad \text{сходится при } \beta>0$$

Свойства:

1) $\Gamma(1)=1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cancel{x^{1-1}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(\alpha+1)-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\cdot x\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} d\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha} d(e^{-x}) =$$

$$= -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^{\alpha} = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

3) $\Gamma(n+1) = n!$ где $n \in \mathbb{N}$

4) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$

5) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

6) $B(\alpha;\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$$B(\alpha;\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \left| \begin{array}{l} x = t/1+t \\ x+xt=t \\ t = x/1-x \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\beta-1} \frac{1}{(1+t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\, dt$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \left| \begin{matrix} x = ty, & t = \mathrm{Const} > 0 \\ dx = t\,dy & \end{matrix} \right| = t^{\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty}\, dy$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{t^{\alpha}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty}\, dy$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y}\, dy \quad \Big| \; t^{\alpha-1}$$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = t^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y}\, dy$$

$$\int_0^{+\infty} \Gamma(\alpha+\beta)\cdot \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-ty} e^{-y}\, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-ty}\, dy \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y}\, dy$$

$$\int_0^{+\infty} \Gamma(\alpha+\beta)\, \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha;\beta)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{y^{\alpha}} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y}\, dy = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y}\, dy = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha;\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$$

$$B(\alpha;\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ч.т.д.

22) Двойной интеграл, его св-ва

Определение: двойной интеграл — интеграл от функции двух переменных, взятый по обоим переменным одновременно.

По сути двойной интеграл — объем криволинейного цилиндра, порожденного поверхностью $f(x;y)$ и компактом.

Определение: компакт — ограниченное непрерывное мн-во

Свойства

1) Если $f(x;y)$ интегрируема в D и если область D при помощи кривой Γ площади нуль разбивается на две связные и не имеющие внутренних точек D_1 и D_2, то функция $f(x;y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причем

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy$$

2) Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы в D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\iint\limits_D [\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)]\,dx\,dy = \alpha\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy + \beta\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$$

3) Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ инт. в D, то $f \cdot g$ инт. в D

4) Если функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы в D

и $f(x) \leq g(x)$

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_D g(x;y)\,dx\,dy$$

5) $\iint\limits_D dx\,dy = S(D)$ – площадь D.

23) Интегрирование по прямоугольнику и кругу

P(прямоугольник): $\left\{(x;y)\ \begin{matrix} a\le x\le b & a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,\ T_x \\ c\le y\le d & c=y_0<y_1<\ldots<y_{m-1}<y_m=d,\ T_y \end{matrix}\right.$

В каждом прямоугольнике P_{ij} возьмём точку $A_{ij}(\xi_{ij};\theta_{ij})$

$S(P_{ij})=\Delta x_i\Delta y_j$

Определение: Сумма $S(T)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_{ij};\theta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ называется интегральной суммой, отвечающей различному разбиению стандартного прямоугольника P.

Длину $\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2}=\Delta$ называют диаметром P_{ij}.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall T_x,T_y,\ \delta\ 1\to\ |S(T)-\mathcal{I}|<\varepsilon.$

$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}f(\xi_i,\theta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i\sum\limits_{j=1}^{m}f(x_i;y_j)\Delta y_j$

$F(x)=\int\limits_c^d f(x;y)\,dy=\lim\limits_{dT\to 0}\sum\limits_{j=1}^{m}f(x_i;\theta_j)\Delta y_j$

$F(x_i)=\sum\limits_{j=1}^{m}f(x_i;y_j)\Delta y_j+\alpha\quad(\alpha\to 0$ при $\Delta y_j\to 0)$

$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b F(x_i)\,dx+\beta\quad(\beta\to 0$ при $\Delta x_i\to 0)$

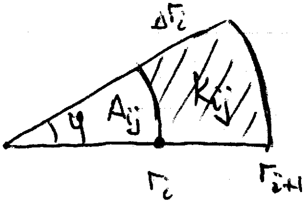
$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x;y)\,dy\right)$

Следствие: пусть $f(x;y)=h(x)g(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow\iint\limits_P h(x)g(y)\,dx\,dy=\left(\int\limits_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int\limits_c^d g(y)\,dy\right)$

Кр: $(x;y)$ $\quad x^2+y^2 \leq R^2$

В полярных координатах: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



$\varphi_1 = 0 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = 2\pi$

$r_1 = 0 < r_2 < \ldots < r_{m-1} < r_m = R$

$S = \frac{1}{2}R^2\varphi$ – площадь сектора $\Rightarrow S(K_{ij}) = \frac{1}{2}(r_j+\Delta r_j)^2\Delta\varphi_i - \frac{1}{2}r_j^2\Delta\varphi_i$

$= \frac{1}{2}\Delta\varphi_i(\cancel{r_j^2} + 2r_j\Delta r_j + \Delta r_j^2) - \cancel{\frac{1}{2}r_j^2\Delta\varphi_i} = r_j\Delta r_j\Delta\varphi_i + \frac{1}{2}\Delta r_j^2\Delta\varphi_i$

При $d(T) \to 0$ $\begin{cases} \Delta r \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0 \end{cases}$

$S(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_j\cos\varphi_i; r_j\sin\varphi_i)(r_j\Delta r_j\Delta\varphi_i + \frac{1}{2}\Delta r_j^2\Delta\varphi_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_j\cos\varphi_i, r_j\sin\varphi_i)r_j\Delta r_j\Delta\varphi_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_j\cos\varphi_i; r_j\sin\varphi_i)\Delta r_j^2\Delta\varphi_i}_{\text{Остаток}}$

$\iint_D f_1(r;\varphi)\,dr\,d\varphi = \lim_{dT\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_1(r_j;\varphi_i)\Delta r_j\Delta\varphi_i\right) =$

$= \lim_{dT\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_j\cos\varphi_i; r_j\sin\varphi_i)r_j\Delta r_j\Delta\varphi_i$

$|\text{Остаток}| \to 0$, т.к. $\Delta r_j \to 0$.

$\iint_{Кр} f(x;y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\int_0^r r f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\right)$

Чтобы определить двойной интеграл в произвольной области R, отличной от прямоугольной, выберем прямоугольник $[a;b] \times [c;d]$, покрывающий R и введём $g(x;y)$ такую, что

$$\begin{cases} g(x;y) = f(x;y), & \text{при } f(x;y) \in R \\ g(x;y) = 0, & \text{при } f(x;y) \notin R \end{cases}$$

$$\iint\limits_R f(x;y)\,dA = \iint\limits_P g(x;y)\,dA$$

площадь разбиения покрытия

Сводим преобразование в полярные координаты:

$$\left|\frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\varphi)}\right| dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

34) Несобственные двойные интегралы. Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона.

Определение: посл-ть компактов называется исчерпанием D, если $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ и $K_n \subset K_{n+1} \setminus \partial K_{n+1}$

Определение: $\iint_D f(x;y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} (f(x;y)\,dxdy), \forall \{K_n\})$

Теорема: пусть $f(x;y) \in C(D)$, $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n$, где $\{K_n\}$ - исчерпание D, $f(x;y) > 0$ $\quad \exists J = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x;y)\,dxdy \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \{K_m'\}$ - исчерпание D $\exists J' = \lim_{m\to\infty} \iint_{K_m} f(x;y)\,dxdy \Rightarrow$

$\Rightarrow J = J'$

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dxdy = \sqrt{\pi}$$

Рассмотрим $\iint_P e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_P e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$

При интегрировании по кругу $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\iint_{Кр} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(-e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right) =$$

$$= \pi(1 - e^{-\infty^2}) \longrightarrow \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$