1. Введение

Работа химиков, физиков и представителей других естественно-научных профессий часто связана с выполнением количественных измерений различных величин. При этом возникает вопрос анализа достоверности получаемых значений, обработки результатов непосредственных измерений и оценки погрешностей расчетов, в которых используются значения непосредственно измеряемых характеристик (последний процесс также называется обработкой результатов *косвенных* измерений). По целому ряду объективных причин знания выпускников химического факультета МГУ о расчете погрешностей не всегда достаточны для правильной обработки получаемых данных. В качестве одной из таких причин можно назвать отсутствие в учебном плане факультета курса по статистической обработке результатов измерений.

К данному моменту вопрос вычисления погрешностей, безусловно, изучен исчерпывающе. Существует большое количество методических разработок, учебников и т.д., в которых можно почерпнуть информацию о расчете погрешностей. К сожалению, большинство подобных работ перегружено дополнительной и не всегда нужной информации. В частности, большинство работ студенческих практикумов не требует таких действий, как сравнение выборок, оценка сходимости и др. Поэтому кажется целесообразным создание краткой разработки, в которой изложены алгоритмы наиболее часто употребляемых вычислений, чему и посвящена данная разработка.

2. Обозначения, принятые в данной работе

A -измеряемая величина, $\overline{A}$ -среднее значение измеряемой величины, $\Delta\overline{A}$ - абсолютная погрешность среднего значения измеряемой величины, $\varepsilon = \frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}} \cdot 100\%$ - относительная погрешность среднего значения измеряемой величины.

3. Расчет погрешностей непосредственных измерений

Итак, предположим, что были проведены n измерений одной и той же величины A в одних и тех же условиях. В этом случае можно рассчитать среднее значение этой величины в проведенных измерениях:

$$\overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n} \tag{1}$$

Как вычислить погрешность $\overline{A}$? По следующей формуле:

$$\Delta\overline{A} = t_{\gamma,n-1} \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \overline{A}\right)^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

В этой формуле используется коэффициент Стьюдента $t_{\gamma,n-1}$. Его значения при разных доверительных вероятностях и значениях n приведены в таблице.

3.1. Пример расчета погрешностей непосредственных измерений:

Задача.

Проводили измерения длины L металлического бруска. Было сделано 10 измерений и получены следующие значения: 10 мм, 11 мм, 12 мм, 13 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм. Требуется найти среднее значение $\overline{L}$ измеряемой величины (длины бруска) и его погрешность $\Delta\overline{L}$.

Решение.

С использованием формулы (1) находим:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_i}{10} = \frac{10+11+12+13+10+10+11+10+10+11}{10} = 10{,}8\ \text{мм}$$

Теперь с использованием формулы (2) найдем абсолютную погрешность $\Delta\overline{L}$ среднего значения $\overline{L}$ при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числе степеней свободы $f = n-1 = 10-1 = 9$ (используем значение $t_{0.95,9}$ =2,262, взятое из таблицы):

$$\Delta\overline{L} = t_{0.95,9} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}\left(L_i - \overline{L}\right)^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 2{,}26 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\dfrac{(10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2 + (12-10{,}8)^2 + (13-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 0{,}7$$

Запишем результат:

L =10,8±0,7$_{0.95}$ *мм*

4. Расчет погрешностей косвенных измерений

Предположим, что в ходе эксперимента измеряются величины $K_1, K_2, K_3 \ldots K_p$, а затем с использованием полученных значений вычисляется величина D по формуле $D = f\left(K_1, K_2, K_3\right)$. При этом погрешности непосредственно измеряемых величин рассчитываются так, как это было описано в пункте 3.

Расчет среднего значения величины D производится по зависимости $D = f\left(K_1, K_2, K_3\right)$ с использованием средних значений аргументов K_p.

Погрешность величины D рассчитывается по следующей формуле:

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta\overline{D}}{\overline{D}} \cdot 100\% = \sqrt{\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial K_p} \cdot \frac{\Delta\overline{K}_p}{\overline{K}_p}\right)^2} \cdot 100\%, \tag{3}$$

где m - количество аргументов K_p, $\dfrac{\partial f}{\partial K_p}$ - частные производные функции f по аргументам K_p, $\Delta\overline{K}_p$ - абсолютная погрешность среднего значения аргумента K_p.

Абсолютная погрешность, как и в случае с прямыми измерениями, рассчитывается по формуле $\Delta\overline{D} = \dfrac{\varepsilon_D \cdot \overline{D}}{100\%}$.

4.1. Пример расчета погрешностей непосредственных измерений:

Задача.

Было проведено 5 непосредственных измерений величин Q и R. Для величины Q получены значения: 50, 51, 52, 50, 47; для величины R получены значения: 500, 510, 476, 354, 520. Требуется рассчитать значение величины S, определяемой по формуле $S = \ln(Q \cdot R)$ и найти погрешность полученного значения.

Решение.

По формуле (1) найдем средние значения величин Q и R:

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{5} Q_i}{5} = \frac{50+51+52+50+47}{5} = 50$$

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{5} R_i}{5} = \frac{500+510+476+354+520}{5} = 472$$

Вычисляем S:

$$\overline{S} = \ln\left(\overline{Q} \cdot \overline{R}\right) = \ln(50 \cdot 472) = 10{,}07$$

Находим в таблице при доверительной вероятности 0,95 и числе степеней свободы $f = n - 1 = 5 - 1 = 4$ значение $t_{0.95,\,4} = 2{,}776$. По формуле (2) рассчитываем погрешности средних значений величин Q и R:

$$\Delta Q = t_{\gamma,\,n-1} \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \overline{Q}\right)^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = 2{,}78 \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(50-50)^2 + (51-50)^2 + (52-50)^2 + (50-50)^2 + (47-50)^2 +}{4}}}{\sqrt{5}} = 2{,}32$$

$$\Delta R = t_{\gamma,n-1} \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = 2{,}78 \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(500-472)^2 + (510-472)^2 + (476-472)^2 + (354-472)^2 + (520-472)^2 +}{4}}}{\sqrt{5}} = 84{,}5$$

С использованием формулы (3) находим относительную погрешность среднего значения величины S:

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta\overline{S}}{\overline{S}} \cdot 100\% = \sqrt{\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial K_p} \cdot \frac{\Delta\overline{K}_p}{\overline{K}_p}\right)^2} \cdot 100\% = \sqrt{\left(\overline{R} \cdot \frac{1}{\overline{Q}} \cdot \frac{\Delta\overline{Q}}{\overline{Q}}\right)^2 + \left(\overline{Q} \cdot \frac{1}{\overline{R}} \cdot \frac{\Delta\overline{R}}{\overline{R}}\right)^2} \cdot 100\% =$$

$$= \sqrt{\left(472 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2{,}32}{50}\right)^2 + \left(50 \cdot \frac{1}{472} \cdot \frac{84{,}5}{472}\right)^2} \cdot 100\% = 44\%$$

Найдем абсолютную погрешность среднего значения величины S:

$$\Delta\overline{S} = \frac{\varepsilon_S}{100\%} \cdot \overline{S} = \frac{44\%}{100\%} \cdot 10{,}07 = 4{,}43$$

Запишем результат:

$$S = 10{,}07 \pm 4{,}43_{0{,}95}$$