Вопрос 1. Кинематика материальной точки (МТ). Основные понятия. Линейные и угловые характеристики движения.

Основные понятия:

Механическое движение – это перемещение тел или их частей относительно друг друга.

Механическая система – это совокупность тел, выделенных для рассмотрения (частный случай: одно-единственное тело).

Система отсчета – это совокупность неподвижных относительно друг друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, а также отсчет времени (часы).

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело - это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Траектория – это линия, по которой движется материальная точка.

В зависимости от траектории движение бывает: прямолинейное, криволинейное, по окружности и др.

Путь(s) – это расстояние между точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории.

Перемещение ($\vec{r}$ ***)*** – это прямолинейный отрезок, проведенный из точки 1 в точку 2.

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23}$$

Равномерное движение – это тип движения, при котором за равные, сколь угодно малые промежутки времени тело проходит одинаковые пути, т.е.:

$\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$ - скорость движения тела при равномерном движении.

Скорость – это векторная физическая величина, характеризующая не только быстроту перемещения частицы, но и направление, в котором движется частица в каждый момент времени.

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - ***мгновенная скорость*** в данной точке траектории.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}} \qquad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} = \frac{ds}{dt} \qquad \vec{v} = \upsilon \vec{e}_{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r$$

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i$$

$\Delta s_i \approx \upsilon_i \Delta t_i$, отсюда следует, что $s \approx \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i$

Также $s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt$ $\qquad \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r} = \vec{r}_{12}$

Равноускоренное движение – это тип движения, при котором за равные, сколь угодно малые промежутки времени тело изменяет свою скорость на одинаковую величину.

Ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости тела.

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$ $\qquad \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$

$\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{\tau} + \upsilon\dot{\vec{\tau}} = a_\tau + a_n$, a_τ - тангенциальное ускорение, a_n - нормальное ускорение.

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории, нормальное – по нормали к касательной.

$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$ - ***кривизна*** (характеризует степень искривленности плоской кривой).

$R = \frac{1}{C}$ - ***радиус кривизны*** (радиус окружности с центром в точке О – центром кривизны).

$\vec{a}_n = \frac{\vec{\upsilon}^2}{R}\vec{n}$, значит, $\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$

Вопрос 2. **Движение по окружности. Связь линейной и угловой скорости (формула Эйлера). Ускорение при криволинейном движении.**

$\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ - ***угловая скорость тела***.

Угловая скорость направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело (по правилу правого винта) и представляет собой псевдовектор.

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (если движение равномерное, то $\omega = \frac{\varphi}{t}$).

За $\Delta t = T$ тело проходит $\Delta\varphi = 2\pi$, следовательно, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период обращения.

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ - ***угловая частота*** (число оборотов в единицу времени).

$\omega = 2\pi\nu$

$\vec{\beta} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - ***угловое ускорение*** (также псевдовектор).

<u>Вывод формулы Эйлера</u>: $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$, т.е.:

$\upsilon = R\omega$ - ***формула Эйлера*** (связь линейной и угловой скорости), υ - линейная скорость точки.

$\left|\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right| = \omega r \cdot \sin\alpha = \omega R$, значит, $\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$

$\left|\vec{a}_n\right| = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R \qquad \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$

$\left|\vec{a}_\tau\right| = \left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right| = \left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = R\left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\beta$, т.е., $\left|\vec{a}_\tau\right| = \beta R$ (связь линейного и углового ускорения).

Вопрос 3. Кинематика абсолютно твердого тела (ТТ). Поступательное и вращательное движение. Плоское движение ТТ. Мгновенная ось вращения.

Твердое тело – система материальных точек, жестко связанных друг с другом.

Поступательное движение: любая прямая, связанная с телом, остается параллельной самой себе.

При равномерном движении за малое время dt радиус-вектор всех точек изменяется на одно и то же $d\vec{r}$, следовательно, скорость всех точек тела одинакова (т.е., изучение поступательного движения ТТ сводится к изучению поступательного движения любой его материальной точки, обычно – центра масс).

Вращательное движение: все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой – ***оси вращения***. При этом ось вращения может находиться вне тела.

Вращательное движение неприменимо к материальной точке!

<u>Движение вокруг неподвижной точки</u> (одна из точек тела остается неподвижной):

Обычно эту точку принимают за начало координат неподвижной системы отсчета (НСО). При вращении вокруг неподвижной точки все точки тела движутся по поверхности концентрических сфер, центры которых находятся в неподвижной точке. В каждый момент времени это движение можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку – ***мгновенной оси вращения***.

Всякое сложное движение можно представить как комбинацию поступательного движения материальной точки А со скоростью $\vec{v}_A$ и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}\left(\vec{r} - \vec{r}_A\right)\right]$$

Плоское (плоскопараллельное) движение – это движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. При плоском движении направление мгновенной оси вращения тела вокруг точки А не меняется, а вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ перпендикулярен вектору скорости точки А.

Вопрос 4. Динамика материальной точки. Сила. Первый закон Ньютона. Второй закон Ньютона. Инертная масса тела. Третий закон Ньютона.

Силой называется векторная величина, являющая мерой механического действия на рассматриваемое тело со стороны других тел. Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при трении, при давлении тел друг на друга), так и между удаленными телами.

Первый закон Ньютона: всякое тело сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют тела или действие этих тел скомпенсировано.

Оба названных состояния отличаются тем, что ускорение тела равно 0, поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: скорость любого тела остается постоянной (в частности равной 0) пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.

Инертность – это физическая величина, характеризующая способность тела сохранять свою скорость при действии на него определенных сил. В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая ***массой тела***.

Произведение массы тела на его скорость называется ***импульсом тела***. Обозначив импульс буквой $\bar{p}$, получим $\bar{p} = m\bar{v}$.

Определение справедливо для материальных точек (частиц) и протяженных тел, движущихся поступательно. В случае протяженного тела, движущегося не поступательно, нужно представить тело как совокупность материальных точек с массами Δm_i, определить импульсы $\Delta m_i \bar{v_i}$ этих точек и затем сложить эти импульсы векторно. В результате получится полный импульс тела: $\bar{p} = \sum_i \Delta m_i \bar{v_i}$. При поступательном движении тела все $\bar{v_i}$ одинаковые и эта формула сводится к формуле импульса материальной точки.

Второй закон Ньютона: скорость изменения импульса $\bar{p}$ материальной точки равна действующей на нее силе $\bar{F}$, т.е.:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$$

.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то под силой $\bar{F}$во втором законе Ньютона нужно понимать геометрическую сумму всех действующих сил, т.е. равнодействующую всех сил.

Поскольку в ньютоновской механике масса m материальной точки не зависит от состояния движение точки, то:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

. Поэтому математическое выражение второго закона Ньютона можно также представить в форме:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

. Соответствующая формулировка второго закон Ньютона гласит: ускорение материальной точки совпадает по направлению с действующей на нее силой и равно отношению этой силы к массе материальной точки.

Второй закон Ньютона выполняется:

1) Для материальной точки.
2) В случае, когда скорость, с которой движется материальная точка, значительно меньше скорости света.
3) В инерциальной системе отсчета.
4) НЕ работает в микромире.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\overline{F_{12}} = -\overline{F_{21}}$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным телом.

Третий закон Ньютона:

1) Силы взаимодействия равны по величине
2) Силы противоположно направлены
3) Силы приложены к разным телам
4) Эти силы действуют вдоль одной оси
5) Силы имеют одинаковую природу

Третий закон Ньютона справедлив не всегда. Он выполняется строго в случае контактных взаимодействий, а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга покоящихся тел.

Вопрос 5. Силы в механике. Принцип относительности Галилея.

В современной физике различают 4 типа взаимодействий:

1) *Гравитационное* (обусловлено всемирным тяготением).
2) *Электромагнитное* (осуществляется через электрические и магнитные поля).
3) *Сильные* или *ядерные* (обеспечивает связь частиц в атомном ядре).
4) *Слабое* (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения (которые по своей природе являются электромагнитными, т.к. определяются характером взаимодействия между молекулами вещества).

Гравитационные и электромагнитные силы являются фундаментальными – их нельзя свести к другим, более простым силам. Упругие же силы и силы трения не являются фундаментальными.

***Закон всемирного тяготения*: **между всякими двумя материальными точками действуют силы взаимного притяжения, которые прямо пропорциональны массам точек и обратно пропорциональны квадрату расстояний между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

, где G – гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$

Или в векторном виде:

$$\overline{F_{ij}} = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\ \overline{r_{ij}}$$

- уравнение для системы материальных точек (гравитационные силы удовлетворяют принципу суперпозиции).

В данном случае взаимодействие осуществляется через гравитационное поле.

<u>*Вывод ускорения свободного падения:*</u>

$F = mg$, где g – напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения).

Приравняв правые части обоих выражение для силы тяготение, получаем:

$$G\frac{mM_з}{r^2} = mg$$

, где $M_з -$ масса Земли,

Откуда

$$g = G\frac{M_з}{r^2}$$

- ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли.

$$\bar{g} = -G\frac{M_з}{r^3}\bar{r}$$

Электромагнитные взаимодействия.

$$\bar{F}_Л = q(\bar{E} + [\bar{v}, \bar{B}])$$

- обобщенная сила Лоренца

Если $\bar{E}$ = const и $\bar{B}$ = const, то частица движется с постоянным ускорением.

Упругие силы.

Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется ***упругой***. Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого конкретного тела, предел (***предел упругости***).

При растяжении пружины возникает сила:

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$

- сила упругости, где k –коэффициент жесткости пружины, x – абсолютное удлинение (закон Гука).

При сжатии пружины также возникают упругие натяжения, но другого знака.

Сила трения.

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется ***внешним;*** трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название ***внутреннего*** трения. Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки между ними, называется ***сухим***. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется ***вязким*** (или ***жидким***).

Применительно к сухому трению различают трение ***скольжения*** и трение ***качения***.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев).

Сила трения покоя – это сила трения, возникающая при попытке вызвать скольжение. Она варьируется в пределах от 0 до F_0 – минимального значения силы, при котором тело удается сдвинуть с места. Таким образом, по второму закону Ньютона, сила трения покоя уравновешивается силой, действующей на покоящееся тело; величина же F_0 представляет собой наибольшее значение силы трения покоя. Если внешняя сила F превзойдет по модулю F_0, то тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней F и силой трения скольжения $F_{тр}$, величина которой в той или иной мере зависит от скорости скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n$$

- где F_n – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу, μ - коэффициент трения (зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности, от их шероховатостей).

Трение качения возникает между цилиндрическим или шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньше.

<u>Вязкое трение и сопротивление среды.</u>

В отличие от сухого трения вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в 0 одновременно со скоростью. При небольших скоростях сила растет линейно со скоростью:

$$\overline{F_{\text{тр}}} = -k_1\bar{v}$$

Величина коэффициента k_1 зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от свойства среды, называемого ***вязкостью***. При больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, т.е. сила начинает расти пропорционально квадрату скорости: $\overline{F_{\text{тр}}} = -k_2v^2\overline{e_v}$, где $\overline{e_v}$ - орт скорости. Величина k_2 зависит от размеров и формы тела.

Принцип относительности Галилея: движение любого тела в различных системах отсчета, движущихся одна относительно другой прямолинейно и равномерно, протекает одинаково, а это значит, что во всех этих системах отсчета действуют одни и те же законы механики.

Преобразования Галилея: при переходе от одной инерциальной системы отсчета $K\ (x, y, z, t)$ к другой $K'\ (x', y', z', t)$, которая движется относительно k поступательно с постоянной скоростью $\bar{v}$:

$x' = x - v_xt;\ y' = y - v_yt;\ z' = z - v_zt;\ \ t' = t$ или $\overline{r'} = \bar{r} - \bar{v}t$ и t’=t (сходные оси декартовых координат инерциальных систем отсчета K и K' проведены попарно параллельно друг другу, а также в начальный момент времени $t = t' = 0$, начала координат О и О’ совпадают друг с другом).

Вопрос 6. Центр масс системы материальных точек и твёрдого тела. Теорема о центре масс.

Центром масс системы материальных точек называется точка С, радиус-вектор $\overline{r_c}$ которой равен

$$\bar{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

Где m_i и r_i – масса и радиус-вектор i-ой материальной точки, n – общее число материальных точек в системе, а m – масса всей системы.

<u>Вывод теоремы о центре масс:</u>

Для каждой элементарной массы запишем уравнение второго закона Ньютона:

$m_i\bar{a}_i = \bar{f}_i + \bar{F}_i$, где $\bar{f}_i$ – результирующая всех внутренних сил, а $\bar{F}_i$ - результирующая всех внешних сил, приложенных к данной элементарной массе.

Сложив данные уравнения для всех элементарных масс, получим: $\sum m_i\bar{a}_i = \sum \bar{F}_i$, т.к. сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна 0.

Сумму, стоящую в левой части формулы, можно заменить произведением массы тела m на ускорение его центра масс a_c, т.к. $\ddot{\bar{r}}_i = \bar{a}_i$, а $\ddot{\bar{r}}_C = \bar{a}_C$, таким образом:

$$ma_c = \sum F_{\text{внешн}}$$

Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.

Вопрос 7. Момент силы. Момент импульса МТ, системы МТ и твёрдого тела относительно точки и относительно оси. Уравнения динамики движения твёрдого тела.

Псевдовектор $\bar{N} = [\bar{r}\bar{F}]$ называется ***моментом силы*** $\bar{F}$ относительно точки O, из которой проводится радиус-вектор $\bar{r}$ точки приложения силы. Модуль момента сил можно представить в виде: $N = rF\ sin\alpha = l$F, где $l = r\ sin\alpha$ – ***плечо силы*** относительно точки O (т.е., длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила).

Проекция вектора $\bar{N}$ на некоторую ось z, проходящую через точку O, относительно которой определен $\bar{N}$, называется моментом силы относительно этой оси:

$$N_z = [\bar{r}\bar{F}]_{np\ z}$$

Для отдельно взятой частицы моментом импульса относительно точки O называется псевдовектор $\bar{M} = [\bar{r}\bar{p}]$.

Моментом импульса системы относительно точки O называется векторная сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему: $\bar{M} = \sum_i \bar{M}_i = \sum_i [\bar{r}_i \bar{p}_i]$.

Проекция вектора $\bar{M}$ на некоторую ось z называется моментом импульса частицы относительно этой оси:

$$M_z = [\bar{r}\bar{p}]_{np\ z}$$

Аналогично моментам импульса системы относительно оси z называется величина :

$$M_z = \sum_i [\bar{r_i}\bar{p_i}]_{np\ z}$$

Модуль вектора момента импульса частицы равен $M = rp\ sin\alpha = lp$, где $l = r\ sin\alpha$ - длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы. Эта длина называется ***плечом импульса*** относительно точки O.

Рассмотрим два характерных примера:

1) Пусть частица движется вдоль прямой, находящейся на расстоянии l от оси, относительно которой рассматривается движение. В этом случае момент импульса частицы может изменяться только по величине. Модуль момента равен $M = mvl$, причем плечо l остается неизменным.
2) Частица массой m движется по окружности радиусом r. Момент импульса частицы относительно центра окружности O равен по модулю $M = mvr$. Вектор $\bar{M}$ перпендикулярен к плоскости окружности, причем направление движения частицы вектор $\bar{M}$ образует правовинтовую систему. Поскольку плечо, равное r, остается постоянным, момент импульса может изменяться только за счет изменения модуля скорости. При равномерном движении частицы по окружности момент импульса остается постоянным и по величине, и по направлению.

Уравнение динамики движения твёрдого тела:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum N_z^{внеш}$$

Таким образом, производная по времени от момента импульса системы относительно оси z равна сумме моментов внешних сил относительно этой оси. При этом момент импульса остается постоянным для незамкнутой системы при условии, что суммарный момент внешних сил равен нулю.

Вопрос 8. Уравнение моментов для системы материальных точек и твёрдого тела. Уравнение моментов в системе центра масс. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

Уравнение моментов для системы материальных точек и твердого тела:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum N_z^{внеш}$$

Уравнение моментов в системе центра масс.

Главный момент $\overline{N}_C$ относительно центра масс *C* механической системы всех действующей на нее сил связан с главным моментом $\overline{N}$ этой же системы сил относительно неподвижной точки *O* соотношением:

$$\overline{N} = \overline{N_C} + [\overline{\mathrm{r}}_{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{F}}]$$

, где $\overline{\mathrm{r}}_{\mathrm{C}}$ - радиус-вектор, проведенный из начала *O* в точку *C*, а $\overline{\mathrm{F}}$- главный вектор системы сил.

Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

$$I\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{N}$$

Также этой формуле соответствуют формулы: $M = I\omega$ и $N = I\beta$, где I – момент инерции для системы материальных точек (либо для твердого тела).

Вопрос 9. **Момент инерции твёрдого тела. Момент импульса твёрдого тела относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Примеры расчёта моментов инерции твёрдых тел.**

Момент инерции твердого тела:

1) Мера инертности материальной точки при движении по окружности либо твердого тела при вращательном движении.
2) Физическая величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси вокруг которой они вращаются.

$I = mr^2$ - момент инерции материальной точки.

$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ – момент инерции системы материальных точек (твердого тела), где m_i – масса i-го элемента, r_i - расстояние от i-го элемента до оси вращения z.

Момент импульса системы материальных точек относительно оси z называется величина

$$M_z = \sum_i [\overline{r_i}\overline{p_i}]_{пр\, z}$$

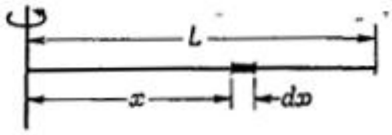
Теорема Гюйгенса-Штейнера (теорема о параллельных осях): момент инерции тела *I* относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела *m* на квадрат расстояния *d* между осями: $\mathrm{I} = \mathrm{I_C} + \mathrm{md}^2$.

<u>Доказательство теоремы Гюйгенса-Штейнера</u>

Пусть выделены две параллельные оси, жестко связанные с телом, причем одна из них проходит через центр масс. Обозначим через *dm* физически малую частицу рассматриваемого тела. Пусть $\bar{r}$ и $\overline{r'}$ радиус-векторы, проведенные от соответствующих осей к dm, $\bar{d}$ - вектор, определяющий расстояние между осями. Легко видеть, что $\overline{r'} = \bar{r} - \bar{d}$. Возведем правую и левую части в квадрат и проинтегрируем почленно полученное выражение по объему тела. Интеграл $\int r'^2 dm = \int r^2 dm + d^2 \int dm - 2(\bar{d} \int \bar{r} dm)$. По определению $\int r'^2 dm = I$, $\int r^2 dm = I_c$, $\int \bar{r} dm = m\overline{r_c}$, где $\overline{r_c}$ определяет положение проекции центра масс на плоскость, перпендикулярную рассматриваемым осям. Ось проходит через центр масс, значит, вектор $\overline{r_c} = 0$. Таким образом имеем формулу: $\mathrm{I} = \mathrm{I_C} + \mathrm{md}^2$

<u>**Примеры расчета моментов инерции твердых тел:**</u>

<u>Для стержня:</u>



$$dm = \frac{M\,dx}{L}$$

и

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M\,dx}{L} = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \qquad (19.5)$$

Если ось проходит через середину стержня:

$$I = \frac{2\,(M/2)\,(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \qquad (19.6)$$

Для диска (цилиндра):

$$I = \int dI = \int dm r^2$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi r^2}$$

, где $\sigma -$ ***поверхностная плотность диска***

$$dm = \sigma\pi r \cdot dr$$

$$I = \int dm r^2 = \sigma \int 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi\sigma \int_0^r r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} \Big|_0^r = \frac{mr^2}{2}$$

Для обруча (полого цилиндра):

Поскольку все точки обруча равноудалены от оси и находятся на расстоянии *r* от нее, то момент инерции обруча вычисляется по формуле:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = mr^2$$

Для произвольного тела вращения (вокруг оси z):

$$I_z = \int dI = \int_0^h \frac{dm r^2(z)}{2} = \int_0^h \frac{\pi\rho}{2} \cdot r^4(z) dz$$

, т.к.

$$dm = \rho\pi r^2(z) dz$$

$$I_z = \frac{\pi\rho}{2} \cdot \int_0^h r^4(z) dz$$

, где *r(z)* – уравнение образующей.

Для шара:

Пусть точка *O* – центр шара, через который проходит ось вращения от –*h* до *h*.

R=*h*, т.к. поверхность шара представляет собой множество равноудаленных от точки *O* материальных точек.

$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-h}^{h} R^4(z)dz = \pi\rho\int_0^h R^4(z)dz = \pi\rho\int_0^h r^4(h)dh = \pi\rho\int_0^h (R^2 - h^2)^2 dh$$
$$= \pi\rho\int_0^h (R^4 - 2R^2h^2 + h^4)dh = \pi\rho\left(R^4h - \frac{2}{3}R^2h^3 + \frac{h^5}{5}\right)$$
$$= \pi\rho\cdot\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, значит

$$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

$$I = \frac{8}{15}\pi R^5 \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{2}{5}mR^2$$

<u>Для конуса:</u>

$$R(z) = \frac{R}{h}\cdot z$$

- уравнение образующей конуса.

$$\mathrm{I} = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h \mathrm{R}^4(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \frac{\pi\rho}{2}\cdot\frac{\mathrm{R}^4}{\mathrm{h}^4}\int_0^h \mathrm{z}^4\,\mathrm{dz} = \frac{\pi\rho}{2}\cdot\frac{\mathrm{R}^4}{\mathrm{h}^4}\cdot\frac{\mathrm{z}^5}{5} = \frac{\pi\rho\mathrm{R}^4\mathrm{h}}{10}$$

$m = \frac{1}{3}\pi\rho\mathrm{R}^2\mathrm{h}$, значит

$$\rho = \frac{3\mathrm{m}}{\pi\mathrm{R}^2\mathrm{h}}$$

$$I = \frac{\pi\mathrm{R}^4\mathrm{h}}{10}\cdot\frac{3\mathrm{m}}{\pi\mathrm{R}^2\mathrm{h}} = \frac{3}{10}\mathrm{mR}^2$$

Вопрос 10. Плоское движение твёрдого тела – динамико-кинематическое описание. Примеры описания плоского движения твёрдых тел.

Плоское движение ТТ – это движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения может служить качение цилиндра по плоскости.

Элементарное перемещение какой-либо точки тела $d\bar{s}$ можно разложить на два перемещения – «поступательное $d\overline{s_{\text{п}}}$» и «вращательное $d\bar{s}_{\text{в}}$»: $d\bar{s} = d\overline{s_{\text{п}}} + d\bar{s}_{\text{в}}$, причем $d\overline{s_{\text{п}}}$ для всех точек тела одно и то же.

Разделив $d\bar{s}$ на соответствующий промежуток времени dt получим скорость точки $\bar{v} = \overline{v_0} + \overline{v'}$, где $\overline{v_0}$ – одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения, $\overline{v'}$ - различная для разных точек тела скорость, обусловленная вращением.

Таким образом, плоское движение ТТ можно представить как сумму двух движений – поступательного со скоростью $\overline{v_0}$ и вращательного с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Линейная скорость $\overline{v'}$ точки с радиус-вектором $\bar{r}$, обусловленная вращением твердого тела, равна $\overline{v'} = [\bar{\omega}\bar{r}]$. Следовательно скорость этой точки при сложном движении может быть представлена в виде $\bar{v} = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}\bar{r}]$. Элементарное перемещение ТТ при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси, называемой мгновенной осью вращения, эта ось может лежать в пределах тела или вне него. Положение мгновенной оси вращения относительно неподвижной системы отсчета и относительно самого тела меняется со временем.

Динамика плоского движения может описываться следующими тремя уравнениями:

$$\begin{cases} m\bar{a}_C = \overline{F^{\text{внеш}}} \\ I_z\beta_z = N_z^{\text{внеш}} \\ a_c = \beta_z R \end{cases}$$

<u>Пример 1:</u>

Цилиндр либо шар, скатывающийся с наклонной плоскости.

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} \\ I_z\beta_z = F_{\text{тр}}R \\ a = \beta_z R \end{cases}$$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

<u>Пример 2 («послушная катушка»):</u>

Радиус катушки - R, радиус шкива, на который натянута нить - r, α – угол между плоскостью и линией действия силы. F –сила, с которой тянут нить.

$$\begin{cases} ma_x = F\cos\alpha - F_{\text{тр}} \\ I_z\beta_z = F_{\text{тр}}R - Fr \\ a = \beta_z R \end{cases}$$

$$a_x = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

Как видно из формулы, катушка движется равномерно при $\cos\alpha = \frac{r}{R}$

Вопрос 11. **Закон сохранения импульса. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Закон сохранения момента импульса.**

Закон сохранения импульса: если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы не изменяется, т.е., $\vec{p} = \vec{p}'$

Доказательство:

Рассмотрим систему *n* материальных точек. На *i*-ю точку с массой Δm_i действует внутренняя сила $\vec{f}_{ij}$ и внешняя сила $\vec{F}_i$. Таким образом можно записать систему уравнений:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_1$$

…

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \ldots + \vec{f}_{n,n-1} + \vec{F}_n$$

Суммируя записанные уравнения, получим: $\frac{d\overline{p^{\text{сист}}}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^{\text{внеш}}$, поскольку внутренние силы системы попарно равны по модулю и сокращаются при сложении уравнений системы. Таким образом, получает, что $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ или $p = const$ при $\sum_i \bar{F}_i^{\text{внеш}} = 0$.

Реактивное движение. Уравнение Мещерского.

В ньютоновской механике масса тела может изменяться только в результате отделения от тела или присоединения к нему частиц вещества. Примером такого тела является ракета. В процессе полета масса ракеты постепенно уменьшается, так как газообразные продукты сгорания топлива в двигателе ракеты выбрасываются через сопло.

Уравнение поступательного движения тела переменной массы (уравнение Мещерского):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{u}$$

Вывод формулы:

$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} - d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u})$, где $\vec{v}$ - скорость движения тела (например, ракеты), $\vec{u}$ - скорость движения отделяющейся массы (например, топлива), dm - изменение массы тела.

$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{v}dm - dmd\vec{v} + \vec{v}dm + \vec{u}dm$

При сокращении получается: $md\vec{v} = -\vec{u}dm$

$\frac{dm}{dt} = \mu$ - скорость потери массы, значит (при делении выражения на dt) получаем:

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{u}$ - уравнение Мещерского, где $\mu\vec{u}$ - реактивная сила.

***Закон сохранения момента импульса*:** момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = \sum \overline{N}_{\text{внеш}}$$

При отсутствии внешних сил

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = 0$$

Следовательно, для замкнутой системы $\overline{M}$ постоянен.

Доказательство закона сохранения момента импульса аналогично доказательству закона сохранения импульса с той разницей, что вместо импульса в формуле фигурирует момент импульса, а вместо силы момент силы.

Вопрос 12. Механическая работа. Мощность. Работа силы при движении МТ по окружности и при вращательном движении ТТ. Кинетическая энергия при поступательном, вращательном и плоском движении ТТ.

Величина $dA = (\bar{F}d\bar{s})$ называется ***работой***, совершаемой силой $\bar{F}$ на пути ds (ds – модуль перемещения $d\bar{s}$).

$$dA = Fds\cos\alpha$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения точки приложения силы.

Таким образом, если сила и направление перемещения образуют острый угол, то работа считается положительной, если угол α – тупой, то отрицательной. При α=π/2 работа равна 0. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе.

$dA = (\bar{F}\bar{v})dt$, тогда работа, совершаемая за промежуток времени от t_1 до t_2, может быть вычислена по формуле: $A = \int_{t_1}^{t_2}(\bar{F}\bar{v})dt$.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется ***мощностью***: $P = \frac{dA}{dt}$ или $P = (\bar{F}\bar{v})$.

$$dA = N_\omega d\varphi = \omega N_\omega dt$$

- работа внешних сил при вращении тела или при его движении по окружности, где N_ω - суммарный момент всех сил, действующих на тело.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно: $T = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси z: $T = \frac{I_z\omega^2}{2}$

Поскольку плоское движение есть комбинация поступательного и вращательного движения, то ***при плоском движении кинетическая энергия движущегося тела равна***: $T = \frac{mv^2}{2}+\frac{I_z\omega^2}{2}$, где z – мгновенная ось вращения.

Вопрос 13. Механическая энергия – кинетическая и потенциальная. Кинетическая энергия МТ, системы МТ и твёрдого тела. Теорема о кинетической энергии.

Полная механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной:

$$E = T + U$$

Кинетическая энергия – это энергия механического движения тела**.**

Кинетическая энергия материальной точки: $T = \frac{mv^2}{2}$

Кинетическая энергия системы материальных точек и твердого тела: $T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2}$

По ***теореме о кинетической энергии***, изменение кинетической энергии материальной точки под действием силы F равно работе, совершаемой этой силой**:**

$$T_2 - T_1 = A$$

Доказательство теоремы:

Напишем уравнение движения частицы: $m\bar{a} = \bar{F}$, где $\bar{F}$ - результирующая сил, действующих на частицу. Умножив это уравнение на перемещение частицы $d\bar{s} = \bar{v}dt$, получим: $m\bar{a}\bar{v}dt = \bar{F}d\bar{s}$.

Произведение $\bar{a}dt$ представляет собой приращение скорости частицы $d\bar{v}$ за время *dt*. Соответственно: $m\bar{a}\bar{v}dt = m\bar{v}d\bar{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$.

Произведя такую замену, придем к соотношению: $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{s}$ или $T_2 - T_1 = A$.

Вопрос 14. Потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Нормировка потенциальной энергии. Связь силы и потенциальной энергии.

Потенциальной энергией называется часть энергии механической системы, зависящая только от ее конфигурации, т.е. от взаимного расположения всех частиц (материальных точек) системы и от их положения во внешнем потенциальном поле.

Убыль потенциальной энергии при перемещении системы из произвольного положения 1 в другое произвольное положение 2 измеряется той работой A_{12}, которую совершают при этом все потенциальные силы (внутренние и внешние, действующие на систему):

$$U_1 - U_2 = A$$

Консервативные (потенциальные) силы – это силы, работа которых зависит лишь от начального и конечного положения частицы и не зависит от пути, по которому двигалась частица. Все остальные силы называются ***неконсервативными***.

К неконсервативным силам относятся диссипативные и гироскопические силы.

Диссипативные силы – это силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна (силы трения скольжения, силы сопротивления движения тел в жидкостях и газах). Диссипативные силы, в отличие от потенциальных, зависят не только от взаимного расположения взаимодействующих тел, но также и от их относительных скоростей.

Гироскопическими силами называются силы, зависящие от скорости материальной точки, на которую они действуют, и направлены перпендикулярно к этой скорости. Примером гироскопической силы является сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу. Работа гироскопических сил всегда равна 0 независимо от того, как перемещается материальная точка.

Нормировка потенциальной энергии:

Для потенциальной силы достаточно задать одну скалярную функцию $U(x, y, z)$, полностью определяющую вектор $\bar{F}$ в любой точке пространства.

Измеряемые в опытах физические величины – сила и работа силы – находятся через производные и разность значений потенциальной энергии. Следовательно, функция $U(x, y, z)$ определена с точностью до константы. Поэтому говорят, что само значение потенциальной энергии не имеет физического смысла, но количественный смысл имеет только разность значений потенциальной энергии. Однако, если приравнять значения функции $U(x, y, z)$ нулю в некоторой точке с координатами $x_0, y_0, z_0,$ то работа, совершаемая силовым полем по перемещению материальной точки в указанное положение:

$$A_{10} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U\,(x, y, z),$$

будет целиком определяться введенной таким образом функцией $U(x, y, z)$. При этом говорят, что потенциальная энергия нормирована в точке $U(x_0, y_0, z_0)$.

Пример:

Планета Земля имеет массу $M_З$. На расстоянии r от ее поверхности находится тело массой m. За нулевой уровень энергии принимается поверхность Земли.

$$U(r) = \int_r^\infty F_r dr = -GmM_З \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = G\frac{mM_З}{r}\Big|_r^\infty = -G\frac{mM_З}{r}$$

Если система представляет собой материальную точку, находящуюся в потенциальном поле***, связь между силой F***, действующей на точку, ***и потенциальной энергией U*** этой точки в поле имеет вид:

$$\bar{F} = -gradU$$

Вопрос 15. Центральные силы. Работа в поле центральных сил. Выражения для потенциальной энергии при гравитационном, электростатическом и упругом взаимодействиях.

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил. К примеру, частица вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести – в каждой точке пространства на нее действует сила

$$\bar{F}_{\text{тяж}} = m\bar{g}$$

Поле центральных сил – это поле, характерное тем, что направление силы, действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через неподвижный центр (масса m, заряд q и др.), а величина силы зависит только от расстояния от этого центра: *F=F(r).*

Элементарная работа центральной силы $\bar{F}$:

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = F_r(r)dr$$

Потенциальная энергия материальной точки: $U(r) = \int_r^\infty F_r(r)dr + U(\infty)$

Обычно за начало отсчета потенциальной энергии принимают энергию материальной точки, находящейся бесконечно далеко от центра сил, т.е. полагают *U(∞)=0*: $U(r) = \int_r^\infty F_r(r)dr$

Потенциальная энергия при гравитационных взаимодействиях: $U = G\frac{m_1 m_2}{r}$

Потенциальная энергия при электростатических взаимодействиях: $U = k\frac{|q_1||q_2|}{r}$

Потенциальная энергия при упругих взаимодействиях (упругих деформациях): $U = \frac{kx^2}{2}$

Вопрос 16. Закон сохранения механической энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Пусть частицы взаимодействуют друг с другом с силами $\overline{F_{ik}}$, модули которых зависят только от расстояния R_{ik} между частицами. Ранее мы установили, что такие силы называются консервативными. Это означает, что работа, совершаемая этими силами над частицами, определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Предположим, что, кроме внутренних сил, на i-ую частицу действует внешняя консервативная сила $\overline{F_i}$ и внешняя неконсервативная сила $\bar{F}_i^*$. Тогда уравнение движения i-ой частицы будет иметь вид:

$$m_i\bar{a}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \overline{F_{ik}} + \bar{F}_i + \bar{F}_i^*$$

.

Умножив i-ое уравнение на $d\overline{s_i} = d\bar{r}_i = \bar{v}_i dt$ и сложив вместе все N уравнений, получим:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\bar{v}_i d\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{N} \bar{F}_{ik}\right\} d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i d\bar{s}_i + \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i^*\, d\bar{s}_i$$

Левая часть представляет собой приращение кинетической энергии системы:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\bar{v}_i d\bar{v}_i = d\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = dT$$

Первый член правой части равен убыли потенциальной энергии взаимодействия частиц:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{N} \bar{F}_{ik}\right\} d\bar{r}_i = -\sum_{(i<k)} \bar{F}_{ik} d\bar{R}_{ik} = -d\sum_{(i<k)} U_{ik}(R_{ik}) = -dU_{\text{вз}}$$

Второй член правой части равен убыли потенциальной энергии системы во внешнем поле консервативных сил:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i d\bar{s}_i = -d\sum_{i=1}^{N} U_i(\bar{r}_i) = -dU_{\text{внеш}}$$

.

Третий член правой части представляет собой работу неконсервативных внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i^*\, d\bar{s}_i = \sum_{i=1}^{N} dA_i^* = dA_{\text{внеш}}^*$$

.

Таким образом, представим соотношение следующим образом:

$$d(T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}}) = dA_{\text{внеш}}^*$$

Величина $E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}}$ есть полная механическая энергия системы. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют правая часть формулы будет равна нулю и, следовательно, полная энергия системы остается постоянной:

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}} = const$$

Закон сохранения энергии (формулировки):

1) Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна 0, и сумма внутренних неконсервативных сил равна 0, то полная механическая энергия системы сохраняется.
2) Если работа внешних сил равна 0, и работа внутренних неконсервативных сил равна 0, то полная механическая энергия системы сохраняется.
3) Если неконсервативные силы не совершают работу над телами в системе, то полная механическая энергия системы сохраняется.

В случае незамкнутой системы полное изменение ее механической энергии ΔE равно сумме работ: внешних сил и неконсервативных сил, действующих в этой системе.

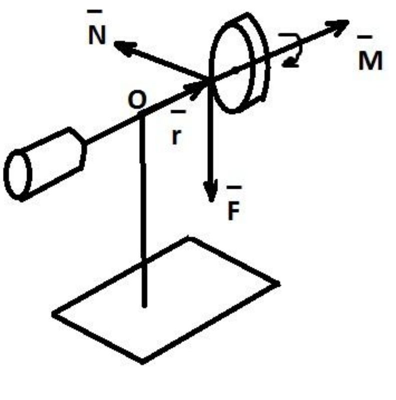
В общем случае: $\Delta E = \Delta T + \Delta U = A_{внеш} + A_{нк}$

Вопрос 17. Гироскоп. Свободный гироскоп. Прецессия гироскопа. Применение гироскопов.

Гироскоп – это аксиально симметричное тело, приведенное в очень быстрое вращение вокруг своей оси симметрии. ***Гироскоп*** можно рассматривать как ***практически свободный***, если он закреплен так называемым карданным шарниром. Последний позволяет ему вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, причем все они пересекаются в центре масс тела. В пренебрежении трением во всех шарнирах и аэродинамическими потерями можно считать, что сумма внешних сил, действующих на гироскоп, равна 0. Следовательно, его момент импульса относительно неподвижной точки в инерциальной системе отсчета постоянен во времени. Ось симметрии гироскопа является центральной главной осью, т.е. свободной осью вращения. С учетом того, что любой гироскоп конструируется так, что этой оси соответствует наибольший момент инерции, становится очевидным, что положение оси вращения гироскопа устойчиво по отношению к системе отсчета, связанной с неподвижными звездами. Даже при наличии кратковременных воздействий на гироскоп он сохраняет свою ориентацию в пространстве: $\overline{\Delta M} = \int_0^{\tau} \overline{N}\,(t)dt \ll \overline{M},$ где $\overline{M}$ – момент импульса гироскопа, $\overline{N}$ - момент внешних сил, τ – время воздействия (принимает достаточно малые значения).

В устойчивом положении оси гироскопа в пространстве легко убедиться, взяв за основание карданный шарнир и перемещая его в различных направлениях. Это свойство гироскопа широко используется в навигации – гирокомпасах, гирогоризонтах. Также они применяются для придания устойчивости самодвижущимся экипажам (пример: монорельс). Также принцип гироскопа используется в нарезном оружии для придания вращательного момента пули в стволе. Применяются в детских игрушках (юла, волчок).

Весьма неожиданно гироскоп реагирует на длительное действие внешней силы, момент которой относительно его центра масс отличен от 0. В отсутствие вращения перемещение гироскопа, а, следовательно, и его оси симметрии, проходило бы в направлении действия силы. Ситуация принципиально меняется, если гироскоп приведен в быстрое вращение. Пусть направление внешней силы соответствует схематическому рисунку:



$$d\overline{M} = [\bar{r}\overline{F}]dt = \overline{N}dt$$

Под действием внешней силы происходит поворот вектора $\overline{M}$ в направлении вектора момента силы $\overline{F}$, т.е. в направлении, перпендикулярном этой силе. Такое движение называется ***прецессией*** гироскопа, и угловая скорсть прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dM}{Mdt} = \frac{N}{M}$$

Ситуация заметно усложнилась по сравнению со свободным гироскопом. Для последнего векторы $\overline{M}$ и $\overline{\omega}$ сонаправлены: $\overline{M} = I_z\overline{\omega}$, где I_z – момент инерции относительно оси вращения. Теперь же вращение происходит с угловой скоростью $\overline{\omega} + \overline{\Omega}$, и, следовательно, векторы $\overline{M}$ и $\overline{\omega}$ не параллельны, т.е. поворот вектора $\overline{M}$ уже не описывает поворот оси гироскопа. В приближенной теории гироскопа рассматривается случай, когда угловая скорость прецессии, много меньше угловой скорости вращения гироскопа: $\Omega \ll \omega$. При этом можно опять положить: $\overline{M} \approx I_z\overline{\omega}$ - и отождествить поворот вектора $\overline{M}$ с вращением оси гироскопа. Из этих соотношений легко получить критерий «быстрого вращения» гироскопа: $\omega \gg \sqrt{\frac{N}{I_z}}$.

Еще одной особенностью прецессионного движения гироскопа является его безынерционность: поворот оси вращающегося тела мгновенно прекращается, как только перестает действовать внешняя сила.

Вопрос 18. Уравнение Бернулли. Движение идеальных жидкости и газа. Формула Торричелли.

Поток величины – это количество какой-либо величины, проходящей в единицу времени через некоторую поверхность.

Стационарный поток – это поток, в котором каждая частица, оказавшаяся в данный момент в некой точке потока, имеет в этой точке такую же скорость, какую имели в этой точке и все ранее попадавшие в нее частицы.

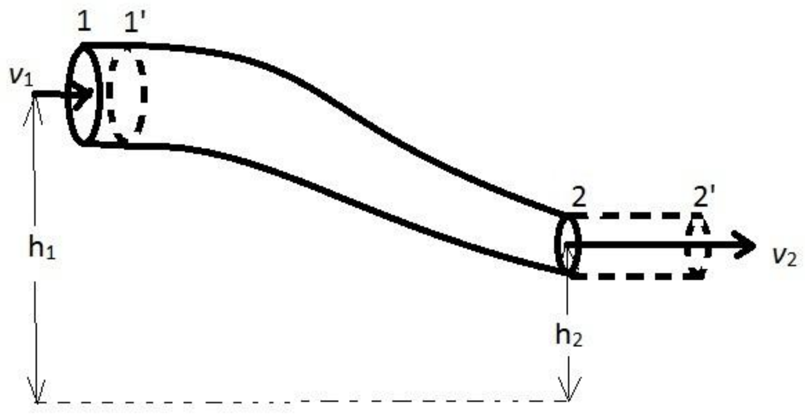
Идеальная жидкость (газ):

1) плотность постоянна в любой точке пространства
2) нет внутреннего трения
3) течение ламинарно (без перемешивания жидкости или газа)

Линии тока – линии, касательные к которым совпадают с вектором скорости.

Уравнение Бернулли(уравнение неразрывности струи):

Выделим в стационарном потоке участок трубки тока, ограниченный сечениями *1* и *2*.



Выделим в стационарном потоке участок трубки тока, ограниченные сечениями *1* и *2*. Обозначим для этих сечений через S_1 и S_2 площади, v_1 и v_2 - скорости, p_1 и p_2 – давления жидкости, и через h_1 и h_2 – высоты, на которых находятся центры сечений. Поскольку силы трения отсутствуют вместо законов Ньютона можно сразу применить закон сохранения энергии. Изменение энергии рассматриваемого элемента жидкости должно быть равно работе внешних сил. Внешними силами для рассматриваемого элемента являются, во-первых, сила тяжести и, во-вторых, силы давления, действующие на объем через сечения *1* и *2*. Силы давления, действующие на боковые стенки трубки, нормальны к стенкам и работы не совершают, т.к. давление жидкости в направлении, нормальном к поверхности трубки, не происходит. За малое время Δt рассматриваемый элемент жидкости переместится по трубке. Его границы займут положение *1'* и *2'*. Левая граница переместится на $v_1\Delta t$. Энергия элемента жидкости при этом измениться, но так как поток стационарный, то энергия части элемента, ограниченной сечениями *1* и *2*, останется неизменной. Все изменение энергии элементов жидкости будет таким же, как если бы левый слой, заключенный между *1* и *1'*, занял место правого слоя, заключенного между *2* и *2*'. При достаточно малом Δt эти слои можно считать цилиндрическими. Их объемы

$\Delta Q_1 = S_1 v_1 \Delta t$ и $\Delta Q_2 = S_2 v_2 \Delta t$ должны быть равны, т.к. жидкость несжимаема и поток стационарный. Поэтому $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Объем ΔQ_1 обладает массой $\Delta m_1 = \rho \Delta Q_1$. Его потенциальная энергия $\Delta U_1 = \Delta m_1 g h_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t g h_1$ и кинетическая энергия $\Delta T_1 = \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 = \frac{\rho}{2} S_1 v_1^3 \Delta t$. Аналогично выводятся потенциальная и кинетическая энергии объема ΔQ_2: $\Delta U_2 = \Delta m_2 g h_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t g h_2$ и $\Delta T_2 = \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 = \frac{\rho}{2} S_2 v_2^3 \Delta t$.

Изменение полной энергии всего рассматриваемого объема есть $\Delta E = (\Delta T_2 - \Delta T_1) + (\Delta U_2 - \Delta U_1) = \rho g (S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1) \Delta t + \frac{\rho}{2} (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) \Delta t$.

Внешние силы (силы давления), действующие на рассматриваемый объем через сечение *1*, направленных в сторону перемещения жидкости и совершают положительную работу. Наоборот, внешние силы, действующие через сечение 2, направлены против перемещения жидкости и совершают отрицательную работу. Поэтому вся работа внешних сил $p_1 S_1$ и $p_2 S_2$ при перемещениях $v_1 \Delta t$ и $v_2 \Delta t$ будет равна: $\Delta A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$.

По закону сохранения энергии $\Delta E = \Delta A$. Подставляя их в выражение и сокращая их на $S_1 v_1 \Delta t$ или $S_2 v_2 \Delta t$, получим: $\rho g (h_2 - h_1) + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2$ или $\rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 = \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2$.

Так как сечения S_1 и S_2 выбраны произвольно, то для любых сечений данной трубки тока

$$\rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 + p = const$$ – ***уравнение Бернулли.***

При помощи уравнения Бернулли легко подсчитать скорость истечения жидкости из отверстия. Если сосуд широкий, а отверстие мало, то скорости жидкости в сосуде вдали от отверстия малы. Поэтому можно применить уравнение Бернулли ко всему потому в целом и рассматривать его как одну токовую трубку. В верхнем сечении этой «трубки» - у поверхности жидкости – давление p_0 равно атмосферному, а скорость v равна 0. В нижнем сечении «трубки» - в отверстии – давление также равно атмосферному. Если скорость отверстия обозначить через v, то из уравнения Бернулли для этих двух сечений получим: $\frac{\rho v^2}{2} + p_0 = \rho g h + p_0$ или $v = \sqrt{2\mathrm{gh}}$, где h – высота уровня жидкости в сосуде (***формула Торричелли***).

Таким образом, истечение происходит с той же скоростью, какую имело бы всякое тело при свободном падении с высоты h. Этот результат становится совершенно очевидным, если вспомнить, что мы пренебрегаем силами вязкости в жидкости.

Если площадь отверстия равна S, то масса вытекающей за единицу времени жидкости $m = \rho S v \Delta \tau = \rho S \sqrt{2gh} \Delta \tau$. Уносимый жидкостью за единицу времени импульс $p = mv = 2\rho S g h \Delta \tau$.

Вопрос 19. Формула Пуазейля. Течение вязкой жидкости по круглой трубе. Число Рейнольдса.

Вязкая жидкость отличается от идеальной тем, что в ней присутствует вязкое трение.

$Q = \frac{dV}{dt}$ - поток жидкости (скорость изменения объема).

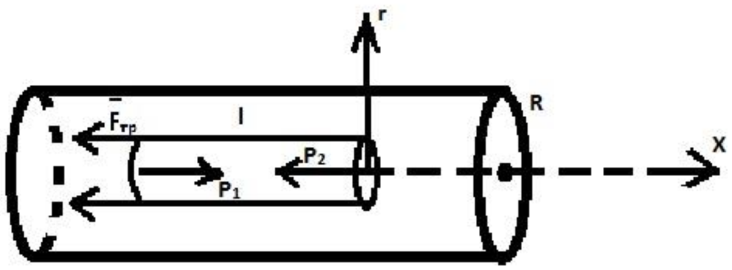
$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

- ***число Рейнольдса,*** где ***l*** – характерный размер (сторона квадрата при квадратных сечениях, радиус или диаметр при круглом сечении и т.д.), v - средняя скорость потока, η – коэффициент вязкого трения.

Для круглой трубы, если Re меньше 1000, то течение считается ламинарным, и можно использовать формулу Пуазейля, если больше 1000 – турбулентным, при $Re \gg 1$ можно пренебрегать силами вязкого трения и пользоваться уравнением Бернулли.

$F_{\text{тр}}^{\text{вязк}} = \eta \left|\frac{dv}{dz}\right| S$ - ***закон вязкого трения***, где $\left|\frac{dv}{dz}\right|$ - модуль градиента скорости.

<u>Распределение скоростей по сечению:</u>



Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиуса r и длины R. При стационарном движении в трубе постоянного сечения скорости всех частиц жидкости остаются неизменными. Следовательно, сумма внешних сил, приложенных к любому объем жидкости, равна 0. На основания рассматриваемого цилиндрического объема действуют силы давления, сумма которых равна $(p_1 - p_2)\pi r^2$. Эта сила действует в направлении движения жидкости. Кроме того, на боковую поверхность цилиндра действует сила трения, равная $\eta \left|\frac{dv}{dr}\right| 2\pi r l$. Условие стационарности имеет вид: $(p_1 - p_2)\pi r^2 = \eta \left|\frac{dv}{dr}\right| 2\pi r l$. Скорость убывает с расстоянием от оси трубы. Следовательно, $\frac{dv}{dr}$ отрицательна. Учтя это, преобразуем соотношение следующим образом:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2) \cdot r}{2\eta l}$$

Разделив переменные, получим уравнения:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr$$

Интегрирование дает: $v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$.

Постоянную интегрирования нужно выбирать так, чтобы скорость обращалась в 0 на стенках трубы, т.е. при $r = R$ (R – радиус трубы). Из этого условия: $C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$.

Подстановка значения С приводит к формуле: $v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$.

Значение скорости на оси трубы равно: $v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$

С учетом этого формуле можно придать вид:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

− *Закон распределения скоростей по сечению*

$$dQ = vdS$$

$$Q = \int_{\Sigma} v(r) dS = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr = 2\pi v_0 (\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}) = 2\pi v_0 \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{v_0 \pi R^2}{2}$$

$\pi R^2 = S_{\text{сеч}}$, значит $Q = < v >$ S, где $< v > = \frac{v_0}{2}$ - средняя скорость.

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dl}$$

- ***формула Пуазейля***, где R – радиус сечения, $\frac{dp}{dl} = grad\, p$ – градиент перепада давления по трубе.

Расчет средней скорости для турбулентного течения:

$$< v > = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R}{k\rho}}$$

, где k – динамический параметр.

Билет 20. Закон Кулона. Электрический заряд. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиций. Линии напряженности электрического поля.

1. ***Электрический заряд*** – мера способности к электрическим и магнитным взаимодействиям.

Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами.

Рассмотрим свойства электрического заряда.

1) Имеется два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Заряды одного знака отталкиваются друг от друга, разного - притягиваются.
2) Электрический заряд- неотъемлемое свойство некоторых элементарных частиц. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. этот заряд можно назвать ***элементарным зарядом***. Положительный элементарный заряд далее будет обозначен как *e*.
3) Поскольку каждый заряд q образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным e (электрический заряд меняется дискретно):
$$q = \pm Ne \qquad (20.1)$$
где N –натуральное число
4) Электрический заряд является релятивистски инвариантным. Т.к. величина заряда, измеряемая в различных инерциальных системах отсчета, одинакова. Отсюда вытекает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится.
5) Суммарный заряд электрически изолированной системы[2)] не может изменяться. Это утверждение носит название ***закона сохранения электрического заряда***.

2. Закон Кулона

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов, был установлен экспериментально в 1785 г. Кулоном. В результате своих опытов, заключавшихся в измерении силы взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и от расстояния между ними, Кулон пришел к выводу, что ***сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними***. Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой.

Отметим, что направление силы взаимодействия вдоль прямой, соединяющей точечные заряды, вытекает из соображения симметрии. Пустое пространство предполагается однородным и изотропным. Следовательно, единственным направлением, выделяемым в пространстве внесенным в него неподвижными точечными зарядами, является направление от одного заряда к другому. Допустим, что сила F, действующая на заряд q_1 (рис.20.1), образует с направлением от q_1 к q_2 угол α, отличный от 0 или π. Но в силу осевой симметрии нет никаких оснований выделить F из множества сил других направлений, образующих с осью $q_1 - q_2$ такой же угол α (направления этих сил образуют конус с углом раствора 2α). Возникающее вследствие этого затруднение исчезает при α, равном 0 или π.

1) Под элементарными частицами понимают такие микрочастицы, внутреннюю структуру которых нельзя представить как объединение других частиц.
2) Система электрически изолирована, если через ограничивающую ее поверхность не могут проникать заряженные частицы.

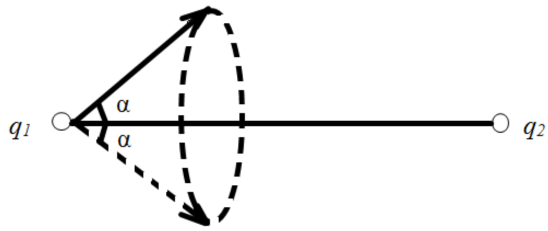


Рис.20.1.

Закон Кулона может быть выражен формулой:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^3}\vec{r} \qquad (20.2)$$

где ε-диэлектрическая проницаемость среды

ε_0-электрическая постоянная $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м

q_1 и q_2 - величины взаимодействующих зарядов

r – расстояние между зарядами

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \qquad (20.3)$$

Сила взаимодействия двух данных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить ещё какие-либо заряды. Пусть имеется заряд q_α и, кроме того, N-ое количество зарядов. Из сказанного выше следует, что результирующая сила F, с которой действуют на q_α все N зарядов q_i, определяется формулой:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_{\alpha i} \qquad (20.4)$$

где $F_{\alpha i}$ −сила, с которой действует на q_α заряд q_i в отсутствии остальных N-1 зарядов.

3.Напряженность электрического поля

Всякий электрический заряд создает электрическое поле. Помещенный в это поле электрический заряд оказывается под действием силы. По величине силы, действующей на данный заряд, можно судить об «интенсивности» поля.

Итак, для обнаружения и исследования электрического поля нужно воспользоваться некоторым «пробным» зарядом. Заряд должен быть точечным, иначе сила, действующая на заряд, будет характеризовать свойства поля, усредненные по объему, занимаемому телом, которое несет на себе заряд.

Исследуем с помощью точечного пробного заряда $q_{\text{пр}}$ поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. Поместив пробный заряд в точку, положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором r (рис.20.1), мы обнаружим, что на пробный заряд действует сила:

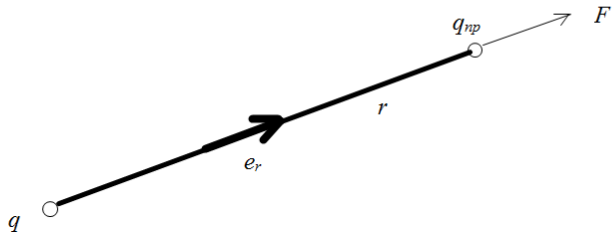


Рис.20.2.

$$F = q_{np}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r\right) \qquad (20.5)$$

где e_r – орт радиус-вектора r .

Из формулы (20.5) следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит также от величины пробного заряда. Если брать разные по величине пробные заряды, то и силы, действующие на них, будут различными. Однако из этой же формулы видно, что отношение $F/q_{\text{пр}}$ для всех пробных зарядов будет одним и тем же и зависит лишь от величин q и r, определяющих поле в данной точке. Поэтому естественно принять это отношение в качестве величины, характеризующей электрическое поле:

$$E = \frac{F}{q_{np}} \qquad (20.6)$$

Эту векторную величину называют ***напряженностью электрического поля*** **([*E*]=В/м)**в данной точке (т.е. в точке, в которой пробный заряд $q_{\text{пр}}$ испытывает действие силы F). Напряженность – количественная силовая характеристика электрического поля.

В соответствие с формулой (20.6) напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление вектора E совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Отметим, что формула (20.6) остается справедливой и в том случае, когда в качестве пробного заряда взят отрицательный заряд ($q_{\text{пр}}$<0). В этом случае векторы E и F имеют противоположные направления.

Из формул (20.5) и (20.6) следует, что напряженность поля точечного заряда пропорциональна величине заряда q и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от заряда до данной точки поля:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r \qquad (20.7)$$

Направлен вектор E вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Согласно (20.6) сила, действующая на пробный заряд, равна:

$$F = q_{пр}E \qquad (20.8)$$

Очевидно, что на всякий точечный заряд q в точке поля с напряженностью E будет действовать сила:

$$F = qE \qquad (20.9)$$

Если заряд q положителен, направление силы совпадает с направлением вектора E. В случае отрицательного q направления векторов F и E противоположны.

В пункте 2 было указано, что сила, с которой система зарядов действует на некоторый не входящий в систему заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности (см. формулу 20.4). Отсюда вытекает , что ***напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженности полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы по отдельности:***

$$E = \sum E_i \qquad (20.10)$$

Последнее утверждение носит название ***принципа суперпозиции (наложения) электрических полей.***

4.Линии напряженности электрического поля

Линии напряженности всегда перпендикулярны заряженной поверхности.

Описать электрическое поле можно с помощью линий напряженности (сокращ. - линии E). Линии напряженности проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора E. густота линий выбирается так, чтобы количество линий пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно числовому значению вектора E.

Линии E поля точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен. Линии. начавшиеся на заряде, уходят в бесконечность (заряд положителен), либо, приходя из бесконечности, заканчиваются на заряде (заряд отрицателен). Это свойство полей, т.е. полей, создаваемых любой системой неподвижных зарядов: линии напряженности могу начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

Билет 21.Теорема Гаусса. Поток вектора напряженности. Доказательство теоремы Гаусса. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности электрического поля протяженных заряженных тел.

1.Поток вектора напряженности

Потоком любого векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ через бесконечно малую площадку dS называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора на dS и на косинус угла α между $\vec{A}$ и нормалью к площадке dS (рис.21.1)

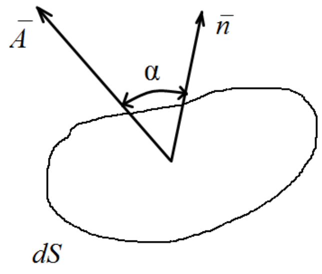


Рис.21.1

$$d\Phi_A = AdScos\alpha \qquad (21.1)$$

используя вектор элементарной площадки:

$$d\vec{S} = \vec{n}dS \quad (21.2)$$

Получим:

$$d\Phi_A = \vec{A}d\vec{S} \quad (21.3)$$

Если поверхность имеет конечные размеры, то поток вектора $\vec{A}$ через нее находится интегрированием (21.1) или (21.3) по этой поверхности:

$$\Phi_A = \int_S AcosαdS = \int_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_S A_n dS \qquad (21.4)$$

где A_n - проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль к участку поверхности в данной точке. Знак величин $d\Phi_A$ и Φ_A определяется выбором направления нормали $\vec{n}$.

Итак, потоком вектора напряженности *электрического поля* через некоторую поверхность назовем скалярную величину:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\,d\vec{S} \qquad (21.5)$$

Пусть поле создается системой заряженных тел, причем каждое тело по отдельность создает поле с напряженностью $\overrightarrow{E_1}(x, y, z), \overrightarrow{E_2}(x, y, z), \dots, \overrightarrow{E_N}(x, y, z)$. Если выполняется принцип суперпозиции для этих полей (см. п. 20.3), то результирующая напряженность равна:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{E_\iota}(x, y, z) \qquad (21.6)$$

Умножив (21.6) на $d\vec{S}$ и проинтегрировав по данной поверхности S, мы приходим к выражению для потока вектора $\vec{E}$:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{Ei} \qquad (21.7)$$

где $\Phi_{Ei} = \int_S \vec{E_i}\, d\vec{S}$ - поток через поверхность S, обусловленный наличием только поля $E_i(x, y, z)$. Таким образом, из (21.7) видно, что поток вектора напряженности электрического поля через поверхность S, созданного системой зарядов, при выполнении условия (21.6), равен ***алгебраической*** сумме потоков векторов $\vec{E_i}$ через ту же поверхность.

2.Теорема Гаусса:

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0:

$$\Phi_E = \oint_S EdS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \qquad (21.3)$$

Доказательство:

Начнем с простейшего случая, когда поверхность S является сферой, в центре которой расположен один точечный заряд q – рис.21.2.

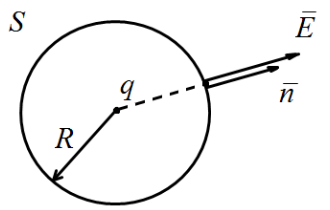


Рис.21.2

в каждой точке этой поверхности проекция E на внешнюю нормаль одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (21.4)$$

(если заряд положителен , в случае отрицательного отрицательна). Величина потока получается умножением р на поверхность сферы, которая равна р. Следовательно, поток вектора E через сферическую поверхность, окружающую точечный заряд, равен:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (21.5)$$

Покажем теперь, что результат не зависит от формы поверхности. Выделим на произвольной поверхности малую площадку dS (рис21.3). Изобразим на рисунке проекцию элемента поверхности dS на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору r, проведенному от заряда q в точку расположения малой площадки dS. Легко показать, что:

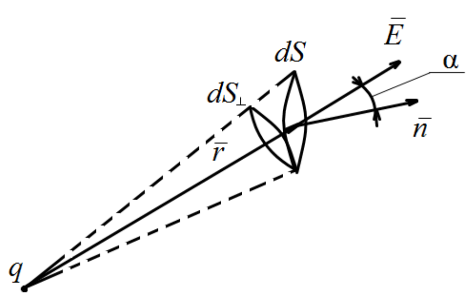


Рис.21.3

$$\pm dS_\perp = dS\cos\alpha \qquad (21.6)$$

Причем знак «+» соответствует cosα>0. Тогда поток $\vec{E}$ через dS:

$$d\Phi_E = E\cos\alpha dS = \pm EdS_\perp = \pm\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dS_\perp}{r^2} \qquad (21.7)$$

Множитель $\pm\frac{dS_{\perp}}{r^2}$ в (21.7) по определению является телесным углом $d\Omega$, под которым видна площадка $dS_{\perp}$, а, следовательно, и dS, из точки расположения заряда q. Величина $d\Omega$ является алгебраической и положительна, когда cosα<0, то есть она автоматически учитывает знаки в формуле (21.7):

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}d\Omega \qquad (21.8)$$

Просуммировав (21.8) по всей замкнутой поверхности S, получаем:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (21.9)$$

(полный телесный угол равен 4π). Если поверхность имеет складки (рис.21.4), каждая из площадок dS, dS'' и dS''' внесет в общий поток одинаковый по абсолютной величине вклад, равный $(q/4\pi\varepsilon\varepsilon_0)\ d\Omega$, причем для площадок dS и dS''' этот вклад войдет с одинаковым знаком, совпадающим со знаком q ($cos\alpha>0$), а для площадки dS'' – с противоположным ($cos\alpha<0$). Поэтому отвечающий телесному углу $d\Omega$ вклад всех трех площадок будет таким же, как и в случае поверхности без складок.

Итак, какова бы ни была форма поверхности, окружающей точечный заряд q, поток вектора E через эту поверхность определяется формулой (21.9).

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находятся N точечных зарядов q_1, q_2, …,q_N. В силу принципа суперпозиции напряженности E поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E_i, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $E = \sum E_i$. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S EdS = \oint_S \left(\sum_i E_i\right) dS = \sum_i \oint_S E_i dS$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, равен $(q_i/\varepsilon\varepsilon_0)$. Следовательно,:

$$\Phi_E = \oint_S EdS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \qquad (21.10)$$

Что и требовалось доказать.

3. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности электрического поля протяженных заряженных тел

!<u>При использовании теоремы Гаусса наличие плоской, цилиндрической и сферической симметрии обязательно!</u>

При решении задач рекомендуется:

1) Сделать внятный рисунок
2) Проанализировать структуру электрического поля
3) Выбрать замкнутую поверхность исходя из структуры поля

Разберем задачу с нахождением напряженности электрического поля вне и внутри цилиндра и шара.

Пример 1. Цилиндр (рис.21.4).

Определить напряженность электрического поля *а)* внутри и *б)* вне бесконечного цилиндра. Заряд распределен внутри цилиндра равномерно с объемной плотностью ρ; *R* - радиус цилиндра, *r* – расстояние от оси цилиндра, ε - диэлектрическая проницаемость материала цилиндра.

Решение:

а) Задача обладает цилиндрической симметрией. Линии электрического поля имеют радиальное направление, если смотреть на цилиндр сверху (см.рис.21.5). Далее, выберем замкнутую поверхность интегрирования, чтобы на ее отдельных участках вектор *E* был перпендикулярен нормали к поверхности, а на других – параллелен ей и постоянен по модулю. Таким свойством обладает цилиндр, коаксиальный с рассматриваемым цилиндром, который сверху и снизу закрыт круговыми основаниями. Поток вектора *E* через такую замкнутую поверхность:

$$\varPhi_E = \oint\limits_{\Sigma} E_n\,dS = \int\limits_{\Sigma_{бок}} E_n\,dS + 2\int\limits_{\Sigma_{осн}} E_n\,dS \qquad (1)$$

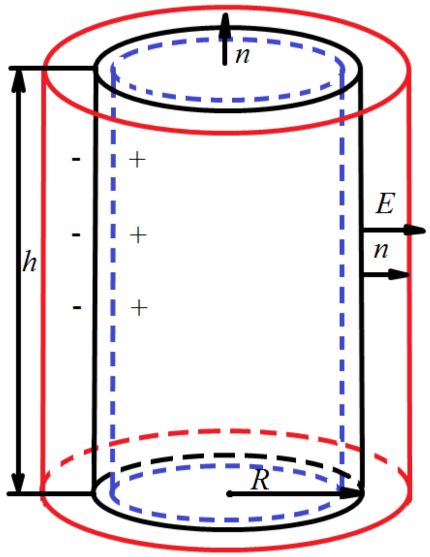


Рис.21.4

На боковой поверхности цилиндра $E \| \mathrm{n}$ и $E_n dS = EdS$. Кроме того, из соображений цилиндрической симметрии модуль *E* постоянен на боковой поверхности. Следовательно,

$$\oint_{\Sigma_{бок}} E_n\,dS = E(r)\int_{\Sigma\,бок} dS = E(r)\cdot S_{бок} = E(r)\cdot 2\pi r h$$

На основаниях цилиндра $E \perp \mathrm{n}$ и $E_n dS = 0$.

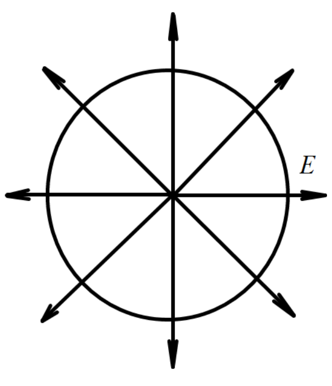


Рис.21.5

Таким образом, поверхностный интеграл удалось представить в виде произведения скалярных величин:

$$\varPhi_E = E(r)\cdot 2\pi r h \qquad (2)$$

Согласно теореме Гаусса: $\varPhi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho V = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho\pi r^2 h.$

Отсюда: $E(r) = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}\rho r.$

б) Ход решения для нахождения напряженности вне цилиндра аналогичен, с одним лишь различием – поток вектора напряженности для заряженного цилиндра равен:

$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho V = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho\pi R^2 h$

Отсюда:

$$E(r) = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0 r}\rho R^2$$

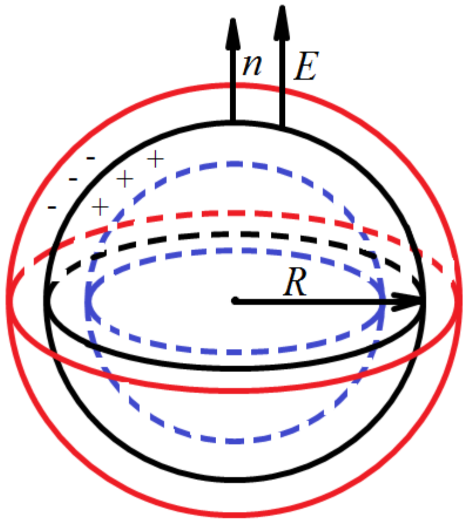


Рис.21.6

Пример 2.Сфера (рис.21.6).

Определить напряженность электрического поля *а)* внутри и *б)* вне шара. Заряд распределен внутри шара равномерно с объемной плотностью ρ; *R* –радиус шара, r – расстояние от оси шара, ε - диэлектрическая проницаемость материала шара.

Решение:

Ход решения аналогичен решению примера 1. За замкнутую поверхность принимается сфера с центром, совпадающим с центром шара.

а) Поток вектора напряженности на поверхности: $\Phi_E = E(r)\cdot 4\pi r^2$

Согласно теореме Гаусса: $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho V = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$

Отсюда: $E(r) = \frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\rho r$.

б) Поток вектора напряженности на поверхности: $\Phi_E = E(r)\cdot 4\pi r^2$

Согласно теореме Гаусса: $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho V = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3$

Отсюда: $E(r) = \frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\rho R^3}{r}$

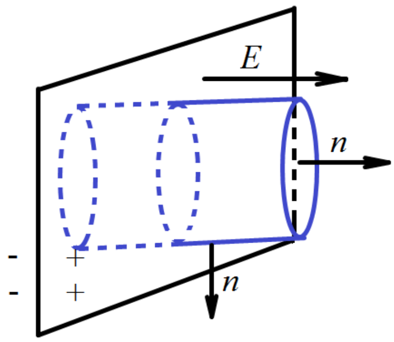


Рис.21.7

Разберем задачу на нахождение напряженности бесконечной плоскости.

Пример 3. Бесконечная плоскость (рис.21.7)

Определить напряженность электрического поля *E* бесконечной плоскости. Заряд по плоскости распределен равномерно с поверхностной плотностью σ.

Решение:

Аналогично предыдущим задачам выберем замкнутую плоскость – цилиндр. Поток вектора через такую замкнутую поверхность:

$$\Phi_E = \oint\limits_{\Sigma} E_n\, dS = \int\limits_{\Sigma_{бок}} E_n\, dS + 2 \int\limits_{\Sigma_{осн}} E_n\, dS$$

На основаниях цилиндра E||n и $E_n dS = E dS$. Следовательно

$$2 \oint\limits_{\Sigma_{осн}} E_n\, dS = 2E(r) \int\limits_{\Sigma_{осн}} dS = 2E(r) S_{осн}$$

На боковой поверхности цилиндра E⊥n и $E_n dS = 0$.

Согласно теореме Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma S_{осн}$$

Отсюда :

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Вопрос 22. Разность потенциалов, потенциал. Работа сил электростатического поля. Принцип суперпозиции для потенциалов. Связь напряжённости и потенциала электрического поля. Примеры расчёта потенциала электрического поля распределённой системы зарядов.

Поле сил неподвижного точечного заряда q является центральным. Ранее было доказано, что любое центральное поле сил потенциально.

Потенциал – отношение потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в данную точку электрического поля, к значению этого заряда.

$$\varphi(r) = \frac{W_p(r)}{q_{\text{пр}}}$$

Из этого следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке единичный положительный заряд. Подставив в предыдущее выражение значение потенциальной энергии $W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$, получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$.

Рассмотрим поле, создаваемое системой N точечных зарядов $q_1, q_2 \dots q_n$. Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим $r_1, r_2 \dots r_n$. Работа, совершаемая силами этого поля над зарядом q', будет равна алгебраической сумме работ сил, , обусловленной каждым зарядом в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

Каждая из работ A_i равна

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}}\right)$$

Где r_{i1} - расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q', r_{i2} – расстояние от q_i до конечного положения заряда q'. Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Так как $A = W_1 - W_2$, получим для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов выражение

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_i},$$

из которого следует, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}.$$

Из этого следует, что ***потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности***. Это выражение называется ***принципом суперпозиции для потенциалов***.

Поскольку $W_p = q\varphi$, значит, работа сил поля над зарядом может быть выражено через разность потенциалов: $A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = (\varphi_1 - \varphi_2)$.

Таким образом, работа, совершаемая силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках (т.е. на убыль потенциала).

Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется не бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил будет равна$A_\infty = \varphi q$.

Отсюда следует, ***что потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность***.

Связь напряженности и потенциала электрического поля.

Сила $\bar{F}$ связана с потенциальной энергией соотношением $\bar{F} = -\nabla W_p$. Для заряженной частицы, находящейся в электростатическом поле, $\bar{F} = q\bar{E}$, $W_p = q\varphi$. Подставив эти значения, получим, что $q\bar{E} = -\nabla(\mathrm{q}\varphi)$. Константу q можно вынести за знак градиента. Осуществив это и сократив затем на q, придем к формуле:

$$\bar{E} = -\nabla\varphi$$

Данная формула позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по заданным значениям $\bar{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = \int_1^2 qEdl$$

Вместе с тем, та же работа может быть представлена в виде $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Приравняв друг другу эти выражения и сократив на q придем к соотношению

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 \bar{E}dl$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ формула переходит в соотношение

$$\oint \bar{E} dl = 0$$

Интегрирование ведется по замкнутому пути. Заметим, что это соотношение справедливо только для электростатического поля.

Вопрос23. Проводники в электрическом поле. Связь поверхностной плотности заряда и напряжённости электрического поля у поверхности заряженного проводника. Замкнутые проводящие оболочки. Теоремы Фарадея.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд q, то он распределится так, чтобы соблюдать условия равновесия. Представим себе произвольную цилиндрическую поверхность, образованную нормалями к поверхности проводниками основаниями величины dS.Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть поверхности равен нулю, так как внутри проводника $\bar{E}$, а значит и $\bar{D}$ равно нулю. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля $\bar{E}$ направлена по нормали к поверхности. Поэтому для выступающей наружу боковой поверхности цилиндра $D_n = 0$, а для внешнего основания $D_n = D$ (внешнее основание предполагается расположенным очень близко к поверхности проводника). Следовательно, поток смещения через рассматриваемую поверхность равен DdS, где D - величина смещения в непосредственной близости к поверхности проводника. Внутри цилиндра содержится сторонний заряд σdS (σ - плотность заряда в данном месте поверхности проводника). Применив теорему Гаусса, получим: $DdS = \sigma dS$, т.е. $D = \sigma$. Отсюда следует, что напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Где ε_0 - диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Электроемкость.

Сообщенный проводнику заряд распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Такое распределение является единственным. Поэтому, если проводнику, уже несущему некий заряд, сообщить еще заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый. В противном случае он создаст в проводнике поле, отличное от нуля. Следует оговорить, что это справедливо только для уединенного проводника. Если вблизи данного проводника находятся другие тела, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов на этих телах. Таким образом, потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду. Действительно, увеличение в несколько раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно в такое же число раз возрастает работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т.е. потенциал проводника. Таким образом, для уединенного проводника

$$q = C\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности C между потенциалом и зарядом называется ***электроемкостью*** проводника. В соответствии с приведенным уравнением емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Вычислим потенциал заряженного шара радиуса R. Между разностью потенциалов и напряженностью поля существует соотношение

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 Edl.$$

Поэтому потенциал шара φ можно найти следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{+\infty} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R}$$

Сопоставив полученные выражения, найдем, что емкость уединенного шара радиуса R, погруженного в однородный безграничный диэлектрик, с проницаемостью ε равна $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.

Вопрос 24. Конденсаторы. Электроёмкость конденсаторов. Энергия электрического поля. Объёмная плотность энергии электрического поля.

Конденсаторы – устройства, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливают на себе заметные по величине заряды.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, помещенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют его обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора.

Основной характеристикой конденсатора является его емкость, под которой понимают величину, пропорциональную заряду q и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Разность потенциалов называют напряжением между соответствующими точками. Мы будем обозначать его буквой U.

Воспользовавшись этим обозначением, можно придать приведенной выше формуле следующий вид:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Найдем формулу для емкости плоского конденсатора. Если площадь обкладки S, а заряд на ней q, то напряженность поля между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Отсюда для емкости плоского конденсатора получается формула:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где s - площадь обкладки, d - величина зазора между обкладками.

Энергия электрического поля.

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками. Сделаем это для плоского конденсатора. Подстановка в формулу $W_p = \frac{CU^2}{2}$ выражения для емкости дает

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} (\frac{U}{d})^2 Sd$$

Носителем энергии является поле, и если оно однородно, заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью ω, равной энергии поля, деленной на занимаемый ею объем. Плотность энергии поля напряженности E, созданного в среде с проницаемостью ε, равна

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V. Для этого нужно вычислит интеграл

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV$$

В качестве примера вычислим энергию поля заряженного проводящего шара радиуса R, помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в данном случае является функцией только от r:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщины dr. Объем слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. В нем заключена энергия

$$dW = \omega dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} (\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2})^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{dr}{r^2}$$

Энергия поля равна.

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R} = \frac{q^2}{2C}.$$

Вопрос 25. Электрический диполь. Силы, действующие на диполь во внешнем однородном и неоднородном электрическом поле. Поле диполя.

Два точечных одинаковых по модулю и разноименных по знаку заряда, жестко связанных между собой и смещенных друг по отношению к другу на расстояние l ,называют ***электрическим диполем***.

Электрическим дипольным моментом называют вектор $\overline{p_E} = q\bar{l}$, где вектор $\bar{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному. Измеряется в Кл·м. Если величина l существенно меньше расстояния до точки, в которой наблюдают электрическое поле диполя, то такой диполь называют точечным.

Поле точечного диполя:

Найдем потенциал и напряженность электрического поля точечного диполя. Задача обладает симметрией относительно оси, проходящей через оба заряда. Посчитаем потенциал в точке А через расстояния от точки до каждого из зарядов:

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

Пусть вектор $\bar{r}$ проведен из центра диполя в точку А, причем угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{l}$ равен θ. В соответствии с теоремой косинусов:

$$r_2^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 + rl\cos\theta$$

$$r_1^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - rl\cos\theta$$

После вычитания правых и левых частей этих равенств получаем: $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2rl\cos\theta$

Выразим отсюда разность $r_2 - r_1$ и получим после подстановки:

$$\varphi_A = \frac{q2rl\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

Воспользуемся условием, что диполь – точечный, т.е. тем, что $r_1 r_2 \approx r^2,$ и $r_1 + r_2 \approx 2r$. Тогда уравнение существенно упрощается:

$$\varphi_A = \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p_E\cos\theta}{r^2}$$

Таким образом, потенциал точечного диполя выражается через полярные координаты точки наблюдения r и θ.

Выражение для градиента функции в полярных координатах имеет вид:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{d\theta}\bar{e}_\theta$$

Где $\bar{e}_r$ и $\bar{e}_\theta$ – единичные векторы. Отсюда компоненты вектора $\bar{E}$:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p_E \cos\theta}{r^3}$$

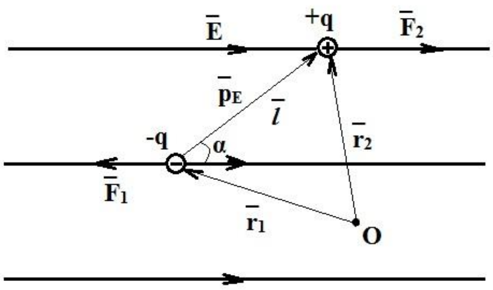
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p_E \sin\theta}{r^3}$$

И модуль вектора $\bar{E}$:

$$E = \frac{p_E}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Из полученных выражений для потенциала и напряженности поля точечного диполя видно, что эти характеристики убывают с расстоянием r быстрее, чем в случае точечного заряда. Очевидно, что это связано с компенсацией вкладов разноименных зарядов на больших расстояниях.

Пользуясь понятием дипольного момента можно написать выражение для момента пары сил, действующих на диполь в однородном электрическом поле: $\bar{N} = [\overline{p_E}\bar{E}]$.



В однородном поле на диполь действует только пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы векторы $\bar{p}$ и $\bar{E}$ были параллельны.

Для того, чтобы повернуть диполь в электрическом поле, нужно совершить работу по увеличению потенциальной энергии диполя. Примем за 0 энергию диполя, перпендикулярного к направлению поля. Тогда энергия диполя, момент которого составляет угол α с направлением поля, равна :$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} pE \sin\alpha \, d\alpha = -pE\cos\alpha$.

<u>Диполь в неоднородном поле.</u>

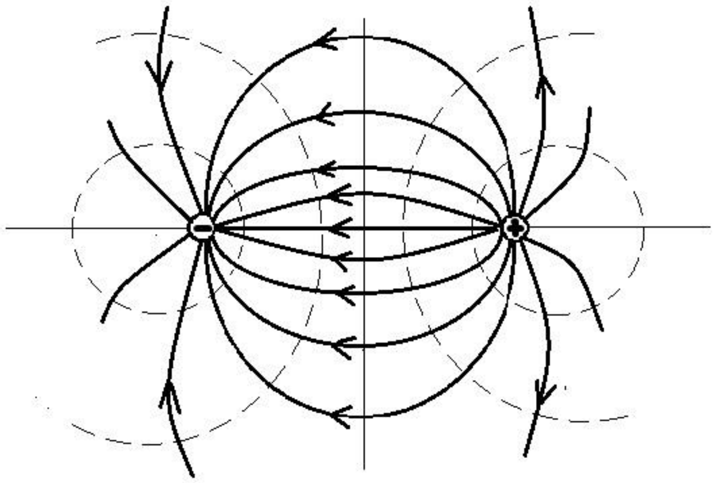
Положим, что момент диполя параллелен направлению поля, но из-за неоднородности электрического поля силы, действующие на конце диполя, уже неодинаковы. На диполь действует сила, стремящаяся передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью. Сила, действующая на отрицательный конец диполя, есть $-qE_0$, а на положительный конец диполя - $+q(E_0 + \frac{dE}{dx} l)$, откуда полная сила $ql\frac{dE}{dx} = p\frac{dE}{dx}$. (В однородном поле $\frac{dE}{dx}$ равно 0, и поэтому результирующая силы равна 0). В неоднородном поле на диполь действует как пара сил, стремящаяся повернуть диполь параллельно полу, так и сила, втягивающая диполь в область более сильного поля.

Приращение поля может быть представлено как дифференциал векторной функции $\bar{E}(x, y, z)$:

$$d\bar{E} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} dz$$

В качестве приращения возьмем проекции вектора l. Так как $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{q}\mathrm{d}\bar{\mathrm{E}}$, то $\bar{F} = \bar{p} \cdot grad\bar{E}$.

<u>Поле диполя:</u>



Билет 26. Электрическое поле в диэлектриках. Механизмы поляризации однородных изотопных диэлектриков. Вектор поляризации. Сторонние и связанные заряды. Диэлектрическая проницаемость.

1.Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Идеальных изоляторов природе не существует. Все вещества хотя бы в ничтожной степени проводят электрический ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят ток в 10^{15}-10^{20} раз хуже, чем вещества, называемые проводниками.

В электростатике источниками электрических полей могут быть только заряженные частицы. Разделим их на две группы. К первой относятся заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, так называемые ***связанные заряды.*** Во вторую группу включены заряды, не являющиеся составными частями молекул диэлектрика. Они могут располагаться на диэлектрике или вне его. Такие заряды называют свободными или, следуя Ландау и Лифшицу, ***сторонними.***

Электрическое поле в веществе на микроскопическом масштабе, называемое микроскопическим полем, обусловлено вкладами полей от сторонних и связанных зарядов:

$$\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{связ}} + \vec{E}_{\text{стор}} \quad (26.1)$$

На указанном масштабе величина $\vec{E}_{\text{микро}}$ изменяется в огромных пределах, сильно возрастая вблизи электронов и ядер атомов. Точно задать расположение заряженных частиц не представляется возможным, что делает микроскопический подход весьма затруднительным. Поэтому в основном используют только макроскопический подход, при котором электрическое поле в веществе усредняется по физически малому объему. Этот объем должен быть достаточно большим, чтобы сгладить изменения поля на микроскопических расстояниях. Для этого рассматриваемый объем должен содержать тысячи атомов. С другой стороны, в пределах этого объема макроскопически усредненные значения электрического поля должны быть практически постоянными.

Таким образом, напряженность макроскопического электрического поля:

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle \quad (26.2)$$

Обычно поле сторонних зарядов по отношению к диэлектрику бывает внешним и обозначается:

$$\vec{E}_0 = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle \quad (26.3)$$

Усредненное поле связанных зарядов обозначим:

$$\overrightarrow{E'} = \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle \quad (26.4)$$

Тогда:

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E}_0 + \overrightarrow{E'} \quad (26.5)$$

В дальнейшем будет рассматриваться только макроскопическое поле.

2.Механизмы поляризации диэлектриков

При помещении диэлектрика во внешнее поле происходит упорядочение расположения связанных зарядов. Это явление называется ***поляризацией диэлектрика.*** Молекулы, составляющие вещество, могут не иметь в исходном состоянии дипольного момента *(неполярные молекулы)* или обладать определенным электрическим моментом *(полярные молекулы).* В связи с этим определяют ***упругий*** и ***ориентационный механизмы поляризации.*** Во всех случаях будем считать, что электрическое поле, в котором находятся молекулы вещества, много меньше внутриатомного (~10^{11} В/м).

1) *Упругая поляризация*

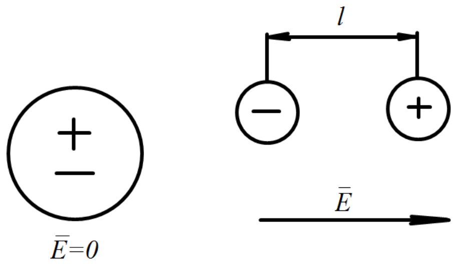


Рис.26.1

В одноатомных молекулах и симметричных многоатомных молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов при отсутствии электрического поля совпадают (рис.26.1), и, как следствие, их дипольные моменты электрические моменты равны нулю. При помещении такой молекулы в электрическое поле $\vec{E}$ указанные центры тяжести зарядов смещаются на некоторое расстояние *l* (см.рис.26.1). если поле достаточно мало, то это расстояние пропорционально силам, приложенным к зарядам.

Это означает, что центры тяжести зарядов различного знака связаны так называемой квазиупругой силой, то есть силой, для которой выполняется закон Гука. (отсюда «упругая поляризация» и «модель упругого диполя»). Т.к. сила, действующая на заряды со стороны электрического поля, пропорциональна его напряженности, то и возникающий у молекулы дипольный момент:

$$\vec{p}_E^M = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{лок}} \quad (26.6)$$

где α – не зависящий от поля коэффициент пропорциональности, $\vec{E}_{\text{лок}}$ - напряженность так называемого локального поля в точке расположения молекулы.

Коэффициент α называют ***поляризуемостью молекулы.*** Он является характеристикой вещества и практически не зависит от температуры. В результате упругой поляризации наведенные электрические дипольные моменты ориентированы вдоль электрического поля.

2) *Ориентационная поляризация.*

Этот вид поляризации наблюдается в веществах, состоящих из полярных молекул, обладающих собственным дипольным моментом $\vec{p}_0$. Полярными являются несимметричные молекулы. В отсутствие электрического поля эти диполи ориентированы в веществе хаотично из-за теплового движения, и поляризация не возникает. При наложении поля диполи ориентируются преимущественно вдоль вектора $\vec{E}$. Однако полному упорядочиванию полей препятствует тепловое движение и среднее значение компоненты дипольного момента, ориентированной по полю, может быть рассчитано методами статистической физики:

$$\langle \vec{p}_E^M \rangle = \frac{p_0^2}{3kT} \vec{E}_{\text{лок}} \quad (26.7)$$

Из (26.7) видно, что с повышением температуры величина указанной компоненты уменьшается.

Очевидно, что в электрическом поле будет происходить и определенная упругая поляризация молекулы. Однако, как правило, наведенный дипольный момент оказывается существенно меньшим величины p_0. Следовательно, вклад ориентационной компоненты в статистическую поляризацию среды можно считать превалирующим. Такое представление называют моделью жесткого диполя.

3. Вектор поляризации. Диэлектрическая проницаемость

Макроскопической характеристикой среды, помещенной в электрическое поле, является ***вектор поляризации*** **($[\vec{P}]$=Кл/м^2),** определяемый как электрический момент единицы объема вещества:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{Ei}^M}{\Delta V} \quad (26.8)$$

В электродинамике вектор поляризации связывают с напряженностью макроскопического поля в веществе (см.26.5):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (26.9)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость среды (безразмерная величина).

Представляет интерес выяснить, как соотносятся параметр χ и микроскопические характеристики вещества α и p_0. Пусть n_1 и n_2 – концентрации, соответственно, неполярных и полярных молекул в среде. Тогда вектор поляризации:

$$\vec{P} = \left(n_1 \alpha \varepsilon_0 + n_2 \frac{p_0^2}{3kT} \right) \vec{E}_{\text{лок}} \quad (26.10)$$

Сравнивая (26.9) и (26.10) получаем:

$$\chi = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(n_1 \alpha \varepsilon_0 + n_2 \frac{p_0^2}{3kT} \right) \quad (26.11)$$

Помимо χ часто удобно использовать величину ε, называемую ***диэлектрической проницаемостью среды:***

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (26.12)$$

Тогда:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(n_1\alpha\varepsilon_0 + n_2\frac{p_0^2}{3kT}\right) \quad (26.13)$$

При анализе электрических явлений в жидкостях и сжатых газах уже нельзя полагать, что напряженности локального и макроскопического полей близки:

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad (26.14)$$

Эта формула также верна для газов и жидкостей, состоящих из неполярных молекул. Согласно (26.14), локальные поля в месте расположения данной молекулы всегда больше макроскопического значения, однако вне этой точки $E_{лок}<E$.

Так как $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$, то

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{(\varepsilon - 1)}{3}\vec{E}, \text{и}$$

$$\frac{E_{\text{лок}}}{E} = \frac{2 + \varepsilon}{3} \quad (26.15)$$

Подставляя $E_{лок}$ из (26.15) в выражение (26.10), получаем:

$$E(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 = n_1\alpha\varepsilon_0\frac{2 + \varepsilon}{3}E$$

Отсюда:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}n_1\alpha \quad (26.16)$$

Приведенная формула носит название уравнения Клаузиуса-Мосотти. Как уже отмечалось, она строго применима к веществам из неполярных молекул. Для жидкостей и газов, состоящих из полярных молекул, формула (26.14) выполняется весьма приближенно, однако и для этого случая ею часто пользуются, чтобы связать микроскопические и макроскопические характеристики диэлектрика:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n_2 p_0^2}{9\varepsilon_0 kT} \quad (26.17)$$

Замечания:

1) По мере усиления электрического поля выражение (26.9), отражающее связь векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$, становится менее точным.
2) В твердых телах, являющихся кристаллами, свойства не одинаковы по всем направлениям (в отличие от газообразных и жидких диэлектриков). Для малых полей вектор поляризации будет иметь следующие проекции:

$$P_x = \varepsilon_0\left(\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z\right)$$

$$P_y = \varepsilon_0\left(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z\right)$$

$$P_z = \varepsilon_0 \left(\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z \right)$$

4.Связанные заряды

При любом механизме поляризации на поверхностях диэлектрика появляются связанные заряды с поверхностной плотностью σ’. Будем считать, что вещество и электрическое поле однородны. При этом в объеме заряды диполей скомпенсированы и объемная плотность связанных зарядов ρ’=0.

Рассмотрим косой параллелепипед (рис.26.2), помещенный в однородное электрическое поле. Дипольный момент единицы объема будет равен:

$$P = \frac{p_E}{V} = \frac{ql}{V} = \frac{\sigma' Sl}{Slcos\alpha} = \frac{\sigma'}{cos\alpha}$$

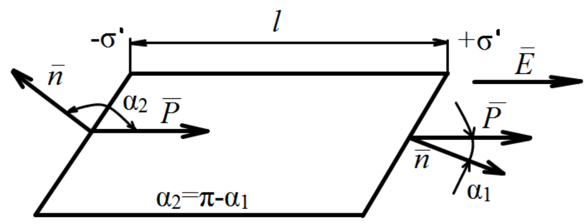


Рис.26.2

Где p_E – электрический дипольный момент всего параллелепипеда.

Отсюда:

$$\sigma' = Pcos\alpha = P_n = \varepsilon_0 \chi E_n$$

Таким образом, поверхностная плотность заряда равна нормальной проекции вектора поляризации, причем положительной нормалью считаем внешнюю.

Вопрос 27. Постоянный электрический ток. Сила тока и плотность тока. Закон Ома для однородного участка цепи (в интегральной форме).

Если через некоторую воображаемую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, говорят, что через эту поверхность течет **электрический ток**. Для протекания тока необходимо наличие в данном теле заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела. Такие частицы называют **носителями заряда.**

Количественной характеристикой электрического тока служит величина заряда, переносимого через данную поверхность в единицу времени. Ее называют **силой тока.** Если за время dt через поверхность переносится заряд dq, то сила тока равна

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока j. Этот вектор численно равен силе тока dI через расположенную в данной точке перпендикулярно к направлению движения носителей площадку $dS_\perp$, отнесенной к величине этой площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}$$

За направление $\bar{j}$ принимается направление вектора скорости упорядоченного движения положительных носителей.

Зная вектор плотности тока в каждой точке пространства, можно найти силу тока через любую поверхность S:

$$I = \int_S \bar{j} d\bar{S}.$$

И чего следует, что сила тока есть поток вектора плотности тока через поверхность.

Закон Ома.

Ом экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения на проводнике:*

$$I = \frac{1}{R}U.$$

Напомним, что в случае однородного проводника напряжение совпадает с разностью потенциалов. Обозначенная в формуле буквой R величина называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей сопротивления служит ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряженности в 1 В течет ток силой 1 А. Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

Где l - длина проводника, S - площадь его поперечного сечения, ρ - зависящий от свойств материала коэффициент, называемый **удельным электрическим сопротивлением**.

Вопрос 28. Законы Ома и Джоуля-Ленца для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

Закон Ома в дифференциальной форме

Найдем связь между векторами $\bar{j}$ и $\bar{E}$ в одной той же точке проводника. В изотропном проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора E. Поэтому направления векторов j и E совпадают. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторами j и E. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой jdS. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно Edl, где e - напряженность поля в данном месте. Наконец, сопротивление цилиндра равно $\rho(dl/dS)$. Имея данные значения приходим к соотношению:

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl}Edl, \text{или } j = \frac{1}{\rho}E.$$

Воспользовавшись тем, что векторы j и E имеют одинаковое направление, можно написать

$$\bar{j} = \frac{1}{\rho}\bar{E} = \sigma\bar{E}$$

Эта формула выражает **закон Ома в дифференциальной форме.**

Фигурирующая в нем обратная ρ величина σ называется **удельной электрической проводимостью материала.** Единица, обратная Ому, называется Сименсом..

Закон Джоуля-Ленца.

В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не совершается, работа тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. Принято говорить, что при протекании тока в проводнике выделяется тепло

$$Q = UIt$$

Заменив в соответствии с законом Ома U через RI, получим формулу:

$$Q = RI^2t$$

Соотношение носит название закона Джоуля-Ленца. Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты, выделяющееся за время t, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_0^t RI^2dt$$

От формулы, определяющей тепло, выделяющееся во всем проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника.

Выделим в проводнике таким же образом, как это было сделано при выводе закона Ома в дифференциальной форме, элементарный объем в виде цилиндра. Согласно закону Джоуля-Ленца за время dt в этом объеме выделится тепло:

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$$

Разделив полученное выражение на dV и dt, найдем количество теплоты, выделяющееся в единице объема в единицу времени:

$$Q_{\text{уд}} = \rho \bar{j}^2$$

По аналогии, величину $Q_{\text{уд}}$ можно назвать **удельной тепловой мощностью тока**. Эта формула представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля-Ленца.

Вопрос 29. **ЭДС источника тока. Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.**

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится. Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом (носители заряда предполагаются положительными) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их приводить, т.е., необходимо совершить круговорот зарядом, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока замкнуты.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители движутся в сторону убывания потенциала φ должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, то есть против сил электростатического поля. Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых **сторонними силами**. Эти силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями и т.д.

Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **электродвижущей силой (ЭДС)** ξ, действующей в цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна A, то

$$\xi = \frac{A}{q}$$

Стороннюю силу $\boldsymbol{F}_{\text{ст}}$, действующую на заряд q, можно представить в виде $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ст}} = \overline{\boldsymbol{E}}^{*} q$.

Векторную величину $\overline{\boldsymbol{E}^{*}}$ называют **напряженностью поля сторонних сил**. Работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1-2 равна

$$A_{12} = \int_{1}^{2} \overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ст}} d\bar{l} = q \int_{1}^{2} \overline{\boldsymbol{E}}^{*}\, d\bar{l}$$

Разделив эту работу на q получим ЭДС, действующую на данном участке.:

$$\xi_{12} = \int_{1}^{2} \overline{\boldsymbol{E}}^{*} d\bar{l}$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\xi = \oint \overline{\boldsymbol{E}}^{*} d\bar{l}.$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\bar{F}_E = q\bar{E}$. Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q. равна $\bar{F} = \bar{F}_E + \bar{F}_{\text{ст}} = q(\bar{E} + \bar{E}^*)$.

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1-2, определяется выражением:

$$A_{12} = q\int_1^2 \bar{E}dl + q\int_1^2 \bar{E}^*dl = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\xi_{12}$$

Величина, равная работе совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **падением напряжения** или просто **напряжением** U на данном участке цепи**.** В соответствии с предыдущей формулой $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}$.

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется **однородным**. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется **неоднородном**. Для однородного участка цепи $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, т.е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на его концах.

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.

В предыдущем Вопросе были выведены выражения

$$Q = UIt,$$

$$Q = RI^2t$$

названые законом Джоуля-Ленца.

Закон Ома для неоднородного участка цепи.

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электростатических сил $e\bar{E}$, сторонние силы $e\bar{E}^*$. Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, как и силы электростатические. Ранее было выяснено, что в однородном проводнике средняя скорость упорядоченного движения носители тока пропорциональна электростатической силе $e\bar{E}$. Очевидно, что там, где, кроме электростатической силы, средняя скорость упорядоченного движения носителей будет пропорциональна суммарной силе $e\bar{E} + e\bar{E}^*$. . Соответственно плотность тока в этих точках оказывается пропорциональной сумме напряженностей $\bar{E} + \bar{E}^*$:

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}^*)$$

Данная формула выражает закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме.

От закона в дифференциальной форме можно перейти к интегральной форме закона Ома. Рассмотрим неоднородный участок цепи. Выберем произвольно направление движения по контуру. Пусть выбранное направление соответствует перемещению от конца 1 к концу 2 участка цепи. Спроектируем используемые ранее векторы на элемент контура $d\bar{l}$. В результате получим $j_l = \sigma(E_l + E_l^*$.

Заменим в полученном соотношении j_l отношением I/S, а проводимость σ – удельным сопротивлением ρ. В итоге получится соотношение:

$$I\frac{\rho}{S} = E_1 + E_1^*$$

Умножим это соотношение на dl и проинтегрируем вдоль контура:

$$I\int_1^2 \rho - \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_1 dl + \int_1^2 E_1^* dl$$

Выражение $\rho\ \frac{dl}{S}$ представляет собой сопротивление участка контура длины dl., а интеграл этого выражения – сопротивление R участка цепи. Первый интеграл в правой части дает V, а второй интеграл – ЭДС ξ_{12}, действующей на участке. Таким образом, мы приходим к формуле

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}$$

ЭДС ξ_{12}, как и сила тока I, есть величина алгебраическая. В случае, когда ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении $\xi_{12} > 0$. Если ЭДС препятствует движению положительных носителей в данном направлении $\xi_{12} < 0$.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}}{R}$$

Эта формула выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. Положив $\varphi_1 = \varphi_2$, получим выражение закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\xi}{R}$$

Здесь ξ - ЭДС. Действующая в цепи, R - суммарное сопротивление.

Правила Кирхгофа.

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом. Первое из этих правил относится к узлам цепи. **Узлом** называется точка, в которой сходятся более, чем два проводника. Ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак, текущий от узла – другой знак.

Первое правило Кирхгофа гласит, что *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

$$\sum I_k = 0$$

Это правило вытекает из уравнения непрерывности, т.е. из закона сохранения заряда. Для постоянного тока $\overline{\nabla}\jmath$всюду равна нулю. Следовательно, поток вектора $\bar{\jmath}$ (т.е. алгебраическая сумма токов. Текущих через замкнутую поверхность) должен быть равен нулю.

Второе правило относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Зададимся направлением обхода(например, по часовой стрелке) и применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_1$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \xi_2$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \xi_3$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \xi_4$$

При сложении этих выражений потенциалы сокращаются и получается уравнение:

$$\sum I_k R_k = \sum \xi_k$$

которое выражает **второе правило Кирхгофа.**

Подобное уравнение может быть составлено для всех замкнутых контуров, которые можно выделить в данной разветвленной цепи. Однако независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

Вопрос 25. Электрический диполь. Силы, действующие на диполь во внешнем однородном и неоднородном электрическом поле. Поле диполя.

Два точечных одинаковых по модулю и разноименных по знаку заряда, жестко связанных между собой и смещенных друг по отношению к другу на расстояние l ,называют ***электрическим диполем***.

Электрическим дипольным моментом называют вектор $\overline{p_E} = q\bar{l}$, где вектор $\bar{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному. Измеряется в Кл·м. Если величина l существенно меньше расстояния до точки, в которой наблюдают электрическое поле диполя, то такой диполь называют точечным.

<u>Поле точечного диполя:</u>

Найдем потенциал и напряженность электрического поля точечного диполя. Задача обладает симметрией относительно оси, проходящей через оба заряда. Посчитаем потенциал в точке А через расстояния от точки до каждого из зарядов:

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

Пусть вектор $\bar{r}$ проведен из центра диполя в точку А, причем угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{l}$ равен θ. В соответствии с теоремой косинусов:

$$r_2^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 + rl\cos\theta$$

$$r_1^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - rl\cos\theta$$

После вычитания правых и левых частей этих равенств получаем: $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2rl\cos\theta$

Выразим отсюда разность $r_2 - r_1$ и получим после подстановки:

$$\varphi_A = \frac{q2rl\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

Воспользуемся условием, что диполь – точечный, т.е. тем, что $r_1 r_2 \approx r^2$, и $r_1 + r_2 \approx 2r$. Тогда уравнение существенно упрощается:

$$\varphi_A = \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p_E\cos\theta}{r^2}$$

Таким образом, потенциал точечного диполя выражается через полярные координаты точки наблюдения r и θ.

Выражение для градиента функции в полярных координатах имеет вид:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{d\theta}\bar{e}_\theta$$

Где $\bar{e}_r$ и $\bar{e}_\theta$ – единичные векторы. Отсюда компоненты вектора $\bar{E}$:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p_E \cos\theta}{r^3}$$

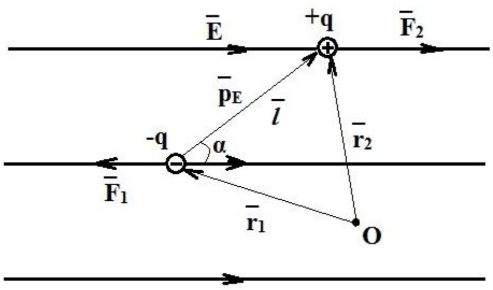
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p_E \sin\theta}{r^3}$$

И модуль вектора $\bar{E}$:

$$E = \frac{p_E}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Из полученных выражений для потенциала и напряженности поля точечного диполя видно, что эти характеристики убывают с расстоянием r быстрее, чем в случае точечного заряда. Очевидно, что это связано с компенсацией вкладов разноименных зарядов на больших расстояниях.

Пользуясь понятием дипольного момента можно написать выражение для момента пары сил, действующих на диполь в однородном электрическом поле: $\bar{N} = [\overline{p_E}\bar{E}]$.



В однородном поле на диполь действует только пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы векторы $\bar{p}$ и $\bar{E}$ были параллельны.

Для того, чтобы повернуть диполь в электрическом поле, нужно совершить работу по увеличению потенциальной энергии диполя. Примем за 0 энергию диполя, перпендикулярного к направлению поля. Тогда энергия диполя, момент которого составляет угол α с направлением поля, равна :$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} pE\sin\alpha\, d\alpha = -pE\cos\alpha$.

Диполь в неоднородном поле.

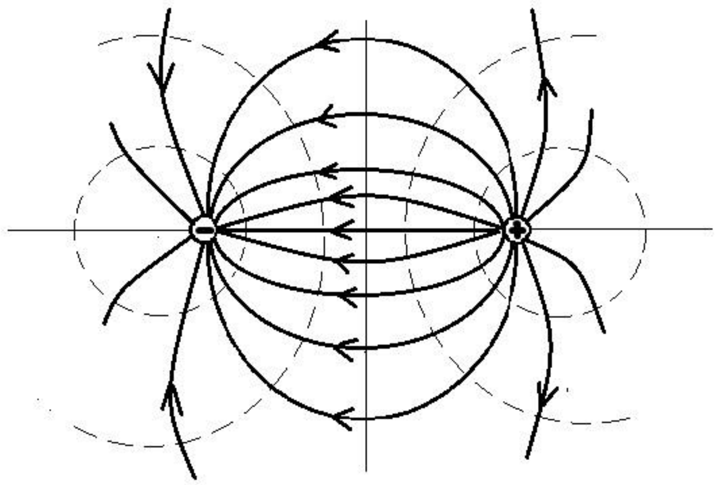
Положим, что момент диполя параллелен направлению поля, но из-за неоднородности электрического поля силы, действующие на конце диполя, уже неодинаковы. На диполь действует сила, стремящаяся передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью. Сила, действующая на отрицательный конец диполя, есть $-qE_0$, а на положительный конец диполя - $+q(E_0 + \frac{dE}{dx}l)$, откуда полная сила $ql\frac{dE}{dx} = p\frac{dE}{dx}$. (В однородном поле $\frac{dE}{dx}$ равно 0, и поэтому результирующая силы равна 0). В неоднородном поле на диполь действует как пара сил, стремящаяся повернуть диполь параллельно полу, так и сила, втягивающая диполь в область более сильного поля.

Приращение поля может быть представлено как дифференциал векторной функции $\bar{E}(x, y, z)$:

$$d\bar{E} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{E}}{\partial y}dy + \frac{\partial \bar{E}}{\partial z}dz$$

В качестве приращения возьмем проекции вектора l. Так как $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{q}d\bar{\mathrm{E}}$, то $\bar{F} = \bar{p} \cdot grad\bar{E}$.

<u>Поле диполя:</u>



Вопрос 30. Закон Био-Савара-Лапласа (Б.-С.-Л.). Магнитное поле, вектор магнитной индукции. Принцип суперпозиции. Примеры расчёта на основе закона Б.-С.-Л. индукции магнитного поля для проводников с током различной формы.

Взаимодействие токов осуществляется через поле, называемое ***магнитным***.

Магнитная индукция – это основная силовая характеристика магнитного поля. Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.

Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака движутся в противоположную сторону либо покоятся. Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив ***принцип суперпозиции***: поле $\bar{B}$, порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей $\bar{B_i}$, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности: $\bar{B} = \sum_i \bar{B}_i$.

Выясним характер магнитного поля, создаваемого произвольным тонким проводом, по которому течет ток. Рассмотрим малый элемент провода длины dl. В этом элементе содержится $nSdl$ носителей тока, где n – число носителей в единице объема, S – площадь поперечного сечения провода в том месте, где взят элемент dl. В точке, положение которой относительно элемента dl определяется радиус-вектором $\bar{r}$, отдельный носитель тока e создает поле с индукцией:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e[(\bar{v} + \bar{u})\bar{r}]}{r^3}$$

Где $\bar{v}$ - скорость хаотического движения, а $\bar{u}$ - скорость упорядоченного движения носителя.

Значение магнитной индукции, усредненной по носителям тока, заключенном в элементе dl, равно:

$$< \bar{B} > = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e[< \bar{u} > \bar{r}]}{r^3}$$

т.к. $< \bar{v} > = 0$.

Умножив это выражение на число носителей в элементе провода, получим вклад в поле, вносимый элементом dl.

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{S[(ne < \bar{u} >)\bar{r}]dl}{r^3}$$

Приняв во внимание, что $ne < \bar{u} > = \bar{j}$, можно написать, что

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{S[\bar{j}\bar{r}]dl}{r^3}$$

Введем вектор $d\bar{l}$, направленный по оси элемента тока dl в сторону, в которую течет ток. Модуль этого вектора равен dl. Поскольку направление векторов $\bar{j}$ и $d\bar{l}$ совпадают, имеет место равенство: $\bar{j}dl = jd\bar{l}$. Произведя такую замену в формуле, получим

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Sj[d\bar{l}\bar{r}]}{r^3}$$

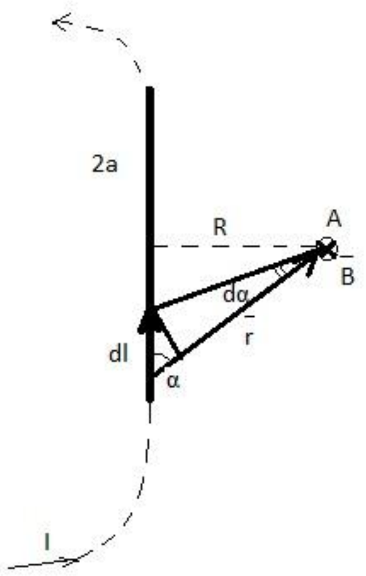
Поскольку формула $I = jS$, то

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\bar{l}\bar{r}]}{r^3}$$

- ***Закон Био-Савара-Лапласа***

<u>Примеры применения закона Био-Савара-Лапласа:</u>

1) Расчет индукции магнитного поля на расстоянии R от проводника с током I.



Разобьем проводник на малые элементы и определим индукцию магнитного поля в точке A для каждого из них в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа. Направление векторов определим по «правилу буравчика» (правого винта). Очевидно, все векторы $d\bar{B}$ направлены одинаково – перпендикулярно плоскости, в которой располагается проводник и точка A. Поэтому результирующий вектор $\bar{B}$ направлен так же, и остается найти его модуль. Чтобы просуммировать модули $|d\bar{B}|$ (операция интегрирования), даваемые соотношением $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$, выразим входящие в него величины r и dl через одну переменную α и ее дифференциал $d\alpha$: $r = \frac{R}{\sin\alpha}$, $dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$. Подстановка дает $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\sin\alpha}{r} d\alpha$.

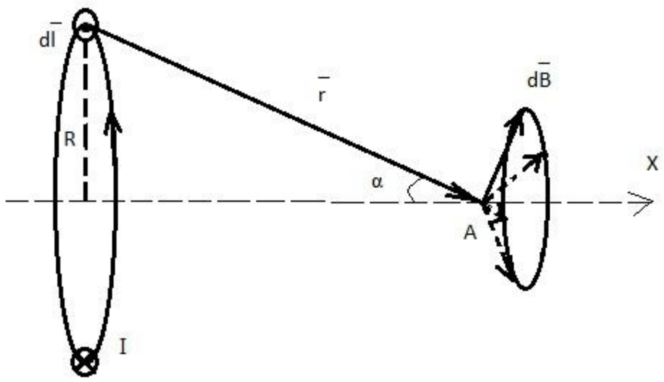
Остается выполнить интегрирование в пределах изменения угла α для данного участка проводника: $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} sin\alpha d\alpha$, где α_0 – угол, под которым направлен вектор, соединяющий нижний конец участка с точкой A. Очевидно, $\cos\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$. В итоге получаем модуль вектора магнитной индукции в точке A:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} \cdot \frac{I}{\sqrt{1 + (\frac{R}{a})^2}}$$

Если длина прямолинейного проводника с током много больше расстояния до точки A (т.е. проводник «бесконечный»), то:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

2) Расчет индукции магнитного поля на расстоянии x от его центра, а также в центре витка. Определим, прежде всего, направление векторов $d\bar{B}$ от элементов тока $Id\bar{l}$ в рассматриваемом случае.



По закону Био-Савара-Лапласа оно определяется векторным произведением [$d\bar{l}\bar{r}$], т.е. векторы $d\bar{B}$ перпендикулярны как вектору $d\bar{l}$, так и $\bar{r}$ (располагаются «веером» вокруг оси симметрии кольца с вершиной в точке A). Угол раствора «веера» равен $2(\frac{\pi}{2}-\alpha)$, где α – угол, под которым элемент тока виден из точки A, одинаковый для всех элементов тока. Из симметрии расположения векторов $d\bar{B}$ относительно оси OX очевидно, что суммирование даст результирующий вектор, направленный вдоль оси OX. Остается найти лишь сумму проекций векторов $d\bar{B}$ на это направление:

$$B=\int dB_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{IR}{r^3}\cdot\int dl=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\pi R^2 I}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Окончательно получаем:

$$B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Если выразить вектор $\bar{B}$ через магнитный момент кругового витка с током $\bar{p}_m$, где $p_m=SI=\pi R^2 I$, то получим: $\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\bar{p}_m}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

На большом расстоянии от витка (x>>R): $B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$ или $\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\bar{p}_m}{x^3}$

В центре витка x=0, поэтому

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вопрос 31. Закон Ампера. Взаимодействие между проводниками с током. Сила Лоренца.

$F_л = kq[\bar{v}\bar{B}]$ – ***сила Лоренца (магнитная сила)***, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц фигурирующих в формуле величин.

Сила Лоренца – это сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле.

Закон установлен экспериментально.

Модуль магнитной силе равен $F = qvB\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\bar{v}$ и $\bar{B}$. Отсюда следует, что заряд, движущийся вдоль линии магнитного поля не испытывает действия магнитной силы.

Магнитная сила направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат вектора $\bar{v}$ и $\bar{B}$. Если заряд q положителен, направление силы совпадает с направлением вектора $[\bar{v}\bar{B}]$, в случае отрицательного q эти направления противоположны.

Магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, следовательно, она не совершает работы над частицей, что говорит о невозможности изменения энергии заряженной частицы действием на нее магнитного поля.

Сила, действующая на частицу одновременно со стороны электрического и магнитного поля: $\bar{F} = q\bar{E} + q[\bar{v}\bar{B}]$ – ***обобщенная сила Лоренца.***

Если заряд q движется со скоростью $\bar{v}$ параллельно прямому бесконечному проводу, по которому течет ток силы I, то на него действует магнитная сила, равная по модулю: $F = qvB = qv\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I}{b}$, где b – расстояние от заряда до провода. В случае положительного заряда сила направлена к проводу, если направления тока и движения заряда одинаковы, и от провода, если направления тока и движения заряда противоположны. В случае отрицательного заряда направление силы меняется на обратное.

Рассмотрим два одноименных точечных заряда q_1 и q_2, движущихся вдоль параллельных прямых с одинаковой скоростью v, много меньшей c. При $v \ll c$ электрическое поле практически не отличается от поля неподвижных зарядов, поэтому величину электрической силы $F_э$, действующей на заряды, можно считать равной: $F_{э1} = F_{э2} = F_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}$.

Согласно формулам, соответствующим магнитной силе, получается выражение: $F_{м1} = F_{м2} = F_м = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}v^2$.

Найдем отношение магнитной силы к электрической:

$$\frac{F_м}{F_э} = \varepsilon_0\mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

Это соотношение оказывается справедливым для любых v. Из полученного соотношения следует, что магнитная сила слабее кулоновской на множитель, равный квадрату отношения скорости заряда к скорости света.

Если провод, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей тока действует сила $\bar{F} = e[(\bar{v} + \bar{u})\bar{B}]$, где $\bar{v}$ - скорость хаотического движения носителя, $\bar{u}$ - скорость упорядоченного движения. От носителя тока действие этой силы передается проводнику, по которому он перемещается. В результате на провод с током, находящийся в магнитном поле, действует сила. Найдем величину силы $d\bar{F}$, действующей на элемент провода длины dl. Усредним выражение по носителям тока, содержащимся в элементе dl: $< \bar{F} >= e[< \bar{u} > \bar{B}]$, где $\bar{B}$ - магнитная индукция в том месте, где помещается элемент dl.

В этом элементе содержится *nSdl* носителей тока, где *n* – число носителей в единице объема, S – площадь поперечного сечения провода в том месте, где взят элемент dl. Умножив полученное выражение на число носителей, найдем интересующую нас силу:
$d\bar{F} = [(ne < \bar{u} >)\bar{B}]Sdl.$
$\bar{J} = ne < \bar{u} >$, а $dV = Sdl$, значит $d\bar{F} = [\bar{J}\bar{B}]dV$.
Отсюда можно получить выражение для плотности силы, т.е. для силы, действующей на единицу объема проводника: $\bar{F}_{\text{ед.об.}} = [\bar{J}\bar{B}]$.
Поскольку $dV = Sdl$, то $d\bar{F} = [\bar{J}\bar{B}]Sdl$ и, поскольку $\bar{J}Sdl = jSd\bar{l} = Id\bar{l}$, то:

$$d\bar{F} = I[d\bar{l}\bar{B}]$$

- ***Закон Ампера***

Модуль силы вычисляется по формуле: $dF = IBdl\sin\alpha$, где α – угол между векторами $d\bar{l}$ и $\bar{B}$. Сила направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат эти вектора.

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами b, то каждый элемент тока I_2 будет находиться в магнитном поле, индукция которого равна

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{b}$$

Угол α между элементами тока I_2 и вектором $\overline{B_1}$ прямой. Следовательно, согласно полученным соотношениям на единицу длины тока I_2 действует сила:

$$F_{21} = I_2B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1I_2}{b}$$

Для силы F_{12}, действующей на единицу длины тока I_1 получается аналогичное выражение. Легко убедиться в том, что при одинаковом направлении токов они притягивают друг друга, а при различном – отталкивают.

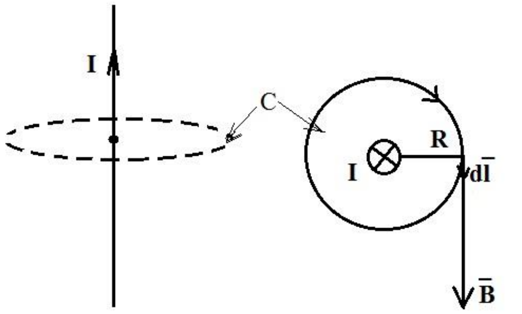
Вопрос 32. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Доказательство теоремы о циркуляции. Примеры применения теоремы для расчета индукции магнитного поля.

$$\oint_{"C"} B_l dl = \mu_0 \sum_i I_i = \int_\Sigma j_n dS$$

Для любого замкнутого контура в постоянном магнитном поле в вакууме циркуляция пропорциональна алгебраической сумме сил токов, охватываемых контуром.

<u>Доказательство:</u>

1) <u>Прямолинейный проводник с постоянным током:</u>

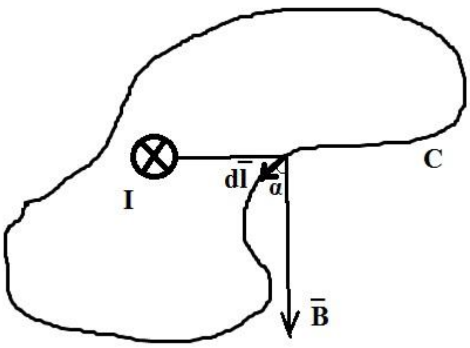


$$\oint_C B_l dl = \oint B(R)dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_C dl = \mu_0 I$$

Т.к.

$$dl = 2\pi R$$

2) <u>Прямолинейный и длинный проводник с постоянным током:</u>



$$B_l dl = B dl_B = BRd\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\alpha$$

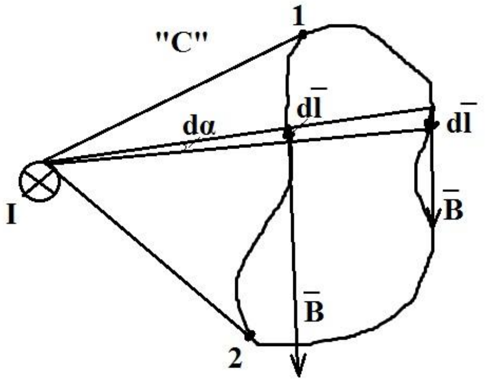
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

Т.к.

$$B dl_B \equiv dl_\perp = R d\alpha$$

$$\oint B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_0^{2\pi} dl = \mu_0 I$$

3) <u>Контур, находящийся вне проводника:</u>



$B dl_B = \pm \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$

«+» - если угол острый.

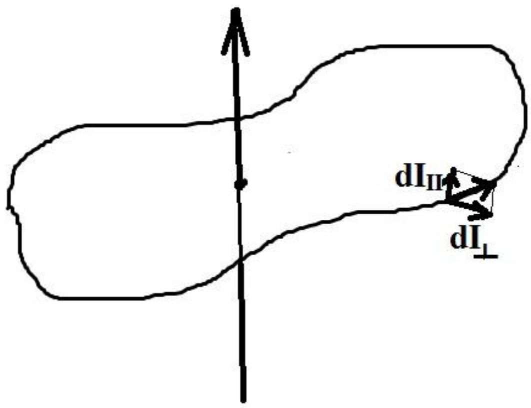
«-» - если угол тупой.

$$\oint_C B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_1^2 d\alpha - \int_2^1 d\alpha\right) = 0$$

Проводники с током, не входящие в

контур, дают нулевой вклад.

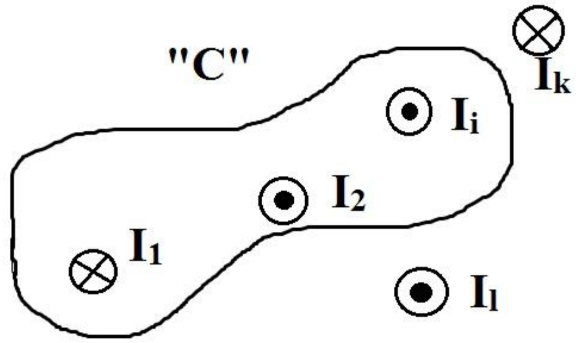
4) Неплоский случай:



$dI_{\parallel}$ $\parallel$ проводнику.
$dI_{\perp}$ - в плоскости, $\perp$ проводнику.

$$\left(\bar{B}d\bar{l}_{\parallel}\right) + (\bar{B}d\bar{l}_{\perp}) = 0$$

5) Несколько проводников с током:



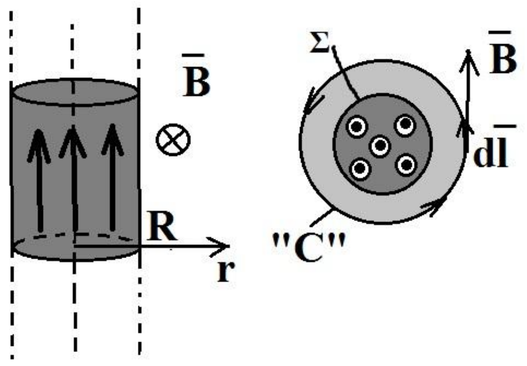
$$(\oint_C B_l dl)_i = \mu_0 I_i$$

$$\bar{B} = \sum_i \bar{B}_i$$

$$\oint B_l dl = \mu_0 \sum I_i$$

Примеры применения:

а)



0) Рисунок

1) Проанализировать структуру поля; $\bar{B}(r)$

2) Выбрать поверхность (замкнутый контур «С»)
Пусть «С» совпадает с линиями индукции

3) «Рассчитаем» $\oint B_l dl = \{\bar{B} \upuparrows d\bar{l}\} = \oint_C B(r)dl = \{r = const =>$

$$B(r) = const\} = B(r)\oint_C dl = B(r)\cdot 2\pi r$$

Т.к. $\oint_C dl = 2\pi r$.

Справедливо и для $r < R$ и для $r > R$.

4) Определим ток, охваченный контуром «С».

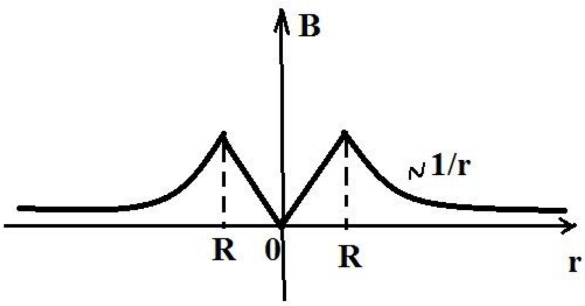
Два случая: «вне» $r > R$:

$$I = \int_{\Sigma_0} j_n dS = \int_{\Sigma} j dS = \{\bar{j} \upuparrows dS; j = const\} = j \cdot \pi R^2$$

5) $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2$

$$B^{\text{вне}} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \sim \frac{1}{r}$$

6) «Внутри»: $0 \leq r \leq R$



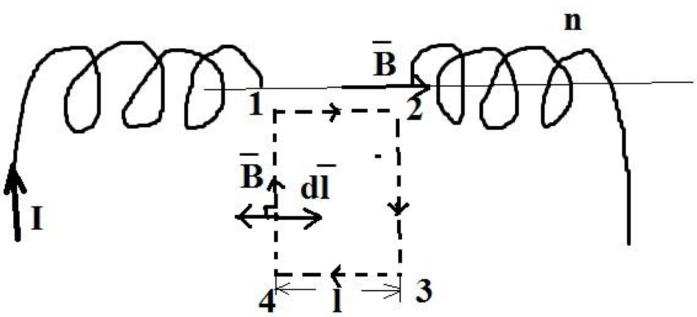
$$B(r) 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j r}{r} \sim r$$

б)$\oint_C B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl +$

Так как $\int_2^3 B_l dl = \int_3^4 B_l dl = \int_4^{21} B_l dl = 0$, то $\oint_C B_l dl = Bl$

$Bl = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 n l I$, значит
$B = \mu_0 n I$



Вопрос 33. Электромагнитная индукция. Открытие Фарадеем явления электромагнитной индукции («опыты Фарадея»). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции.

В 1831 году М. Фарадей установил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление ***называют электромагнитной индукцией***, а возникающий ток – ***индукционным.***

Это явление свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции ξ_i. Величина ξ_i не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока Φ, и определяется лишь скоростью изменения магнитного потока $\frac{d\Phi}{dt}$. При изменении знака скорости изменения направление ЭДС индукции также меняется.

Рассмотрим следующий пример. На рисунке изображен контур 1, силу тока в котором I_1 можно изменять с помощью реостата Этот ток создает магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток I_1, поток магнитной индукции Ф через конутр 2 будет расти.Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока I_2, регистрируемого гальванометре. Уменьшение тока I_1 обусловит убывание магнитного потока через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток I_2 можно вызвать также приближая контур 2 к контуру 1 или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока противоположны. Наконец, электромагнитную индукцию можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы изменялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Пример. При увеличении тока возрастает магнитная индукция поля первого контура, что вызывает увеличение магнитного потока через него. По правилу Ленца это вызывает индукционный ток, направленный противоположно току в первом контуре.

$\Phi = \int_{\Sigma} B_n dS$

$I = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\xi_i}{R}$

$\Delta\Phi = q_i R$, значит, подставляя предыдущее выражение можно получить: $\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt}$. Знак «-» в формуле говорит о направлении индукционного тока.

<u>ЭДС индукции в движущихся проводниках</u>

Рассмотрим проводник длиной l, движущийся в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно движению проводника и перпендикулярно самому проводнику. При этом сам проводник движется со скоростью v.

По определению, $\xi_i = \frac{A^{\text{ст}}}{q}$, где $A^{\text{ст}}$ - работа сторонних сил по перемещению заряда. В качестве сторонней силы можно рассмотреть силу Лоренца, действующую на заряды в проводнике. Таким образом, $A^{\text{ст}} = F_{Л} l = Bvql$

Подставляя полученное выражение для работы сторонних сил, можно получить:

$\xi_i = Bvl$ - ЭДС индукции, возникающая в движущемся со скоростью v проводнике длиной l в магнитом поле с индукцией B.

Вопрос 34. Самоиндукция. Индуктивность. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.

Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Ψ. При изменениях I изменяется также и Ψ, вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС Это явление называется ***самоиндукцией***.

В соответствии с законом Био-Савара-Лапласа магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что ток I в контуре и создаваемый им полный магнитный поток Ψ через контур пропорциональны друг другу: $\Psi = LI$.

Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется ***индуктивностью*** контура. Если магнитная проницаемость среды $\mu = \frac{L}{L_0}$, которой окружен контур, не зависит от напряженности магнтного поля H, то L=*const*. Помимо магнитных свойств среды индуктивность контура зависит от его геометрии (т.е., от размеров и форм).

Индуктивность контура также называют ***коэффициентом самоиндукции***.

ЭДС самоиндукции: $\xi_{is} = -L\frac{dI}{dt}$ (т.к., $d\Phi = -LdI$ - по определению.

Энергия магнитного поля.

Рассмотрим цепь, состоящую из источника тока ξ, катушки L и резистора R, соединенных последовательно, а также ключа K, соединенного параллельно источнику тока. Если пренебречь сопротивлением источника тока, то $I = \frac{\xi}{R}$.

В момент времени t=0 отключаем источник тока, замкнув одновременно цепь ключом K. Как только сила тока в цепи начнет убывать, возникнет ЭДС самоиндукии, противодействующая этому убыванию. Сила тока в цепи будет удолетворять уравнению: $IR = -L\frac{dI}{dt}$ или $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$

Полученное уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка, решающееся методой разделения переменных:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

Отсюда $\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln const$, где $\ln const$ - постоянная интегрирования. При потенцировании данного соотношения получаем:

$$I = const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Полученное выражение является общим решением уравнения. Значение константы найдем из начальных условий. В момент времени t=0 сила тока имела значение $I = \frac{\xi}{R}$, следовательно $const = I_0$.

Подставив это выражение в значение силы тока, получим:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Таким образом, после отключения источника ЭДС сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону, приведенному выше.

Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной: $\tau = \frac{L}{R}$, которую называют ***постоянной времени*** цепи. То есть:

$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Работа сторонних сил по перемещению заряда равна: $dA^{\text{ст}} = dq \cdot \xi = Idt \cdot \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = -LIdI$. Отсюда:

$A^{\text{ст}} = \int_{I_0}^{0} -LIdI = \frac{LI^2}{2}$, а,поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа. Таким образом:

$$W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2}$$

$w = \frac{dW_{\text{магн}}}{dV}$ - ***объемная плотность энергии магнитного поля***.

Вопрос 35. Магнитное поле в веществе. Магнитный диполь. Поле диполя. Магнитный диполь во внешнем поле. Намагничивание среды. Магнитная проницаемость вещества. Типы магнетиков.

Магнитный диполь. Поле диполя.

Магнитный момент: $\overline{p_m} = IS\bar{n}$, где I – сила тока в магнитном диполе, S – площадь магнитного диполя, $\bar{n}$ - нормаль к площади. Таким образом, магнитный диполь представляет собой круговой ток.

По закону Био-Савара-Лапласа можно рассчитать, что магнитная индукция поля диполя по оси OX, проходящей через центр кругового тока, равна:

$$\bar{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\bar{p}_m}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Элементарный магнитный диполь: $x>>R$ (расстояние от диполя до точки намного больше размеров диполя):

$$\bar{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\bar{p}_m}{x^3}$$

Магнитный диполь во внешнем поле.

Если рассмотрет рамку с током, находящуюся в магнитном поле с индукцией $\bar{B}$, то ее вращательный момент будет равен: $\bar{N} = [\bar{p}_m\bar{B}]$. При α=0 вращательный момент рамки равен нулю. При $d\alpha$>0 $dA^{\text{пот}} = -p_m B \sin\alpha \, d\alpha$. Принятно считать, что потенциальная энергия диполя во внешнем поле равна нулю (U=0 при α=π/2).

$$U = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = -p_m B \cos\alpha = (\bar{p}_m \bar{B})$$

Когда диполь ориентировался в магнитном поле относительно линий $\bar{B}$, он может втягиваться в большее магнитное поле.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha$$

Магнитные свойства среды.

Замечание: разговор далее пойдет об однородной изотропной среде (газе или жидкости), случаи твердых и кристаллических тел требуют отдельного рассмотрения.

Всякое вещество является ***магнетиком***, т.е., способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле $\bar{B}'$, которое накладывается на обусловленное токами поле $\overline{B_0}$. Оба этих поля в сумме дают результирующее поле: $\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'$. Для объяснения намагничения тел Ампер предложил, что в молекулах вещества циркулируют круговые (молекулярные) токи (***гипотеза Ампера***). Каждый такой ток обладает магнитным диполем и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствии внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равн нулю. Под действием поля магнитные моменты приобретают преимущественно ориентацию в одном направлении, вследствие чего магнетик намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных токов уже не компенсируют друг друга и возникает поле $\bar{B}'$.

Намагничене магнетика естестенно характеризовать магнитным моментом ебиницы ообъема. Эту величину называют ***намагниченностью*** и обозначают буквой $\bar{J}$. Если магнетик намагничен неоднородно, то намагниченность в данной точе определяется следующим выражением: $\bar{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\bar{p}_m$, где ΔV - физичеки бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки, $\bar{p}_m$ - магнитный момент отдельной молекулы. Таким образом, намагниченность – функция координат: $\bar{J} = \bar{J}(x, y, z)$.

$\bar{B}' = \mu_0\bar{J}$ и $\bar{J} = \chi\frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$, где χ - ***магнитная восприимчивость*** среды.

По определению, $B = \mu B_0 = \bar{B}_0 + \bar{B}' = \bar{B}_0\left(1 + \frac{\bar{J}\mu_0}{\bar{B}_0}\right) = \bar{B}_0(1+\chi)$.

В итоге получаем, что $\mu = 1 + \chi$.

Типы магнетиков:

1) ***Парамагнетики*** (Al, Pt, $FeCl_3$). Их магнитная восприимчивость незначительно превышает единицу ($\mu(FeCl_3)$=1,0025), магнитный момент НЕ равен нулю – наличие неспаренных электронов обеспечивает спиновый магнетизм. Причина: $\bar{J} \upuparrows \bar{B}_0$, а значит $\bar{B}' \upuparrows \bar{B}_0$ и μ>1.
2) ***Диамагнетики*** (Cu, H_2O, Bi) Их магнитная восприимчивость незначительно меньше единицы (μ(Bi)=0,99983), магнитный момент равен нулю вследствие отсутствия неспаренных электронов (спиновый магнетизм скомпенсирован). Причина: $\bar{p}_m \uparrow\downarrow \bar{B}_0$, $\bar{J} \uparrow\downarrow \bar{B}_0$, а значит $\bar{B}' \uparrow\downarrow \bar{B}_0$ и μ<1 (***ларморова прецессия***).
3) ***Ферромагнетики*** (Fe, Co, Ni, Gd и некоторые другие).μ>>1($\sim 10^6$). Природа ферромагнетизма также заключаетя в спиновом магнетизме. Ферромагнетики обладают доменной структурой. ***Домены*** – это области спонтанной намагниченности, имеют размеры порядка 10^{-6}-10^{-5} м. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. В магнитном поле идет перестройка доменной структуры и магнитные моменты, направленные изначально хаотично, становятся сонаправленными (поворачиваются в направлении поля). При определенной температуре (***точке Кюри***) области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает свои ферромагнитные свойства.

Вопрос 36. Уравнения Максвелла в интегральной форме. Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции. «Ток смещения». Система уравнений Максвелла.
<u>Электромагнитная индукция.</u>
Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда проволочный контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения магнитного поток обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока.Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процесами в природе, они также не могут быть магнитными силами, потому что такие силы не совершают работу над зарядами. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим проводе электрическим полем с напряженностью $\bar{E}_B$. ЭДС равна циркуляции вектора напряженности по данному контуру:

$$\xi_i = \oint \bar{E}_B d\bar{l}$$

Подстановка в формулу закона электромагнитной индукции полученного выражения и выражения для магнитного потока приводит к соотношению:

$$\oint_C \bar{E}_B \, d\bar{l} = -\int_\Sigma \frac{d\bar{B}}{dt} dS$$

Таким образом, переменное по времени магнитное поле порождает электрическое поле.
<u>«Ток смещения».</u>
Максвелл обобщил закон полного тока, предположив, что переменное электрическое поле, так же как и электрический ток, является источником магнитного поля. Количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля служит ***ток смещения***.

$$\oint_C B_l \, dl = \mu_0 I \int_\Sigma j_n dS$$

или

$\oint_C B_l \, dl = \mu_0 I \int_\Sigma j_n dS + \mu_0 I$, где $I = \varepsilon_0 \int_\Sigma \frac{dE_n}{dt} dS$ - ток смещения ($\frac{dE_n}{dt}$ - плотность тока смещения).
<u>Система уравнений Максвелла.</u>
Обобщенная сила Лоренца и система уравнений Максвелла представляют собой фундаментальные знания об электромагнетизме на конец XIX века

$$\begin{cases} \oint_\Sigma E_n dS = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \int_\Omega \rho dV \\ \oint_\Sigma B_n dS = 0 \\ \oint_C E_l dl = -\int_\Sigma \dfrac{dB_n}{dt} dS \\ \oint_C B_l dl = \mu_0 (\int j_n dS + \varepsilon_0 \int_\Sigma \dfrac{dE_n}{dt} dS) \end{cases}$$

Примечание: второе уравнение представляет собой теорему Гаусса для магнитного поля (магнитных зарядов нет!)