МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

М.М.МУСИН, С.Г.КОБЕЛЬКОВ,
А.А.ГОЛДАЕВА
(под редакцией А.В.Лебедева)

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ХИМИКОВ

М о с к в а
2013

Мусин М.М., Кобельков С.Г., Голдаева А.А.
Сборник задач по теории вероятностей для химиков (под редакцией Лебедева А.В.). Учебное пособие. — Москва, 2013. — 128 с.

Настоящий сборник включает в себя более 240 задач по теории вероятностей вместе с теоретическим материалом, необходимым для их решения. Учитывается специфика преподавания предмета на химическом факультете МГУ.
Для студентов химического факультета МГУ, а также всех интересующихся теорией вероятностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие. Как читать этот задачник

Дорогие студенты!

Мы в общем-то собрали здесь наш опыт семинарской работы на химфаке для того, чтобы несколько упростить работу семинарских групп следующих поколений, поэтому у книги есть некоторая специфика.

1. Неформальность языка – иногда понятия, необходимые для решения задач, излагаются вскользь, только чтобы читатель успел "схватить" идею и дальше применить её на практике, не теряя времени.

   Если вы потерялись и запутались в определении – в конце есть Приложение 2 с кратким теоретическим обзором. Там все необходимое изложено абсолютно четко с точки зрения математики, что безусловно греет душу нам, но не всегда удобно для восприятия студентом нематематиком, особенно посередине семестра.

2. Решение задач – задачи, которые приведены по ходу изложения, предлагаются к решению по ходу изложения. В них часто заключены идеи, на которые дальнейшее изложение будет опираться. Не рекомендуется читать задачник, игнорируя задачи – лучше делать это с ручкой и бумагой. Можете рассматривать это как off-line семинар.

   Если решение задачи расположено рядом с задачей, значит, исходя из набранной нами статистики, там есть идеи, которые ускользают или неправильно понимаются большей частью студентов. Рекомендуется подумать немного над тем, как бы вы стали решать задачу, после чего сравнить свое решение с нашим. Если решение задачи вынесено в "Ответы и решения" (находятся в конце каждого параграфа), значит, мы считаем, что у вас есть хороший шанс решить её самостоятельно.

3. Замечания – по ходу текста имеются поясняющие замечания, их можно игнорировать, если они вам кажутся излишне занудными или непонятными; позже, когда вы уже немного освоитесь с предметом обсуждения, эти замечания станут полезными.

Надеемся, вы успешно освоите теорию вероятностей. Удачи.
P.S. Не приносите этот задачник на экзамен и контрольные, получите двойку за пронос запрещенной шпаргалки.
P.P.S. Обо всех замеченных ошибках, опечатках и недочетах просьба сообщать А.В.Лебедеву по e-mail: avlebed@yandex.ru
Мы надеемся с вашей помощью сделать наш задачник еще лучше.

1. Основы комбинаторики.

Классическая теория вероятностей опирается на комбинаторику. Речь идет об описании ситуаций, когда события могут развиваться множеством способов (вариантов), которые нам надо просчитать, определить их общее количество и понять, какие из них благоприятны для нас, а какие нет.

Поэтому прежде чем приступать к изучению теории вероятностей, нам потребуется некоторый запас техник по подсчету количества вариантов.

Замечание. В комбинаторике изучается подсчет числа элементов в различных множествах, часто достаточно сложного вида. Формальное описание этих множеств зачастую мешает начинающему собственно решать задачу, поэтому первое время мы будем называть эти элементы вариантами или какими-то другими подходящими словами.

В задачах речь может идти о вариантах выбора каких-то действий или развития каких-то событий.

Отметим также, что в химии комбинаторика активно используется для расчета числа изомеров (химических веществ, имеющих одинаковый состав, но разное строение молекул).

Утверждение 1. (Правило умножения). Если имеется n вариантов первого выбора, m вариантов второго выбора, и любая пара вариантов (первого и второго выбора) возможна, тогда число вариантов совместного выбора равно mn.

Пример. У Алексея имеется пакет с 7 яблоками, а у Максима с 6 яблоками.

1. Пусть каждый из них вынимает по яблоку из своего пакета. Тогда у Алексея имеется 7 вариантов выбора, у Максима 6 вариантов выбора, а вариантов совместного выбора у них 7*6=42.

2. Пусть Алексей вынимает из своего пакета одно яблоко и берет себе, затем берет второе и отдает Максиму. Вариантов выбрать первое яблоко у него 7, а выбрать второе — 6 (из числа оставшихся), так что вариантов выбора получается тоже 7*6=42.

Задача 1.1. *Доказать, пользуясь правилом умножения, что если имеется n выборов и есть m_1 вариантов первого выбора, m_2 — второго, $\ldots$, m_n вариантов n-го выбора, то всего возможных вариантов $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$.*

▶ Докажем по индукции. Пусть для k уже доказано. Рассмотрим пару выборов, первый выбор – любая возможная комбинация первых k выборов, второй – выбор номер $k+1$ исходной модели. Тогда число вариантов первого выбора равно $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$, а число вариантов второго m_{k+1}. Таким образом общее число возможных вариантов $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$. Шаг индукции доказан. База индукции при $k = 1$ при $m_1 \cdot m_2$ – это само правило умножения. ◀

Утверждение 2. (Правило сложения). Если имеются n вариантов некоторого выбора и еще m вариантов того же выбора, не пересекающихся с первыми n (ни одна пара вариантов не возможна одновременно), то общее количество возможных вариантов равно $n + m$.

Замечание. Правило сложения несколько менее содержательно, чем правило умножения, но оно позволяет ориентироваться в сложных ситуация, основываясь на разбиении вариантов на непересекающиеся множества.

Пример. В группе студентов 16 юношей и 14 девушек. Одного студента из группы можно выбрать 16+14=30 способами.

Задача 1.2.

а) У Маши есть 3 разных вида чая, 5 разных чашек, 10 разных блюдец. Сколькими способами она может попить чай?

б) У Маши есть 3 вида чая и 2 вида кофе. Сколькими способами она может выпить чай или кофе?

в) У Маши есть 4 вида чая, 3 вида кофе, 5 чашек, 10 блюдец и 5 разных ложек для помешивания. Сколькими способами она может выпить чай или кофе?

Задача 1.3. [1] *Доказать, что количество последовательностей, в которые можно поставить n различных объектов (например, n человек), равно* $n!$

▶

На первое место можно поставить n человек, на второе – одного из $n - 1$ оставшихся и т.д.

[1] Напомним, что через $n!$ (читается “эн факториал”) обозначается произведение $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Кстати, то же самое количество вариантов получится, если раздавать данным n людям майки с номерами от 1 до n (проверьте это).
Здесь применяется правило умножения: n вариантов выбора 1-го человека множится на $n-1$ вариант второго и т.д.

◀

Другие задачи, где может быть использована данная формула – число способов наклеить на n пробирок бирки с номерами от 1 до n, либо число способов переставить n пробирок с различными веществами.

Задача 1.4. *Каково количество различных слов длины k из алфавита размера n?*

Замечание. Данная задача является иллюстрацией урновой схемы, когда у нас имеется n различных (пронумерованных) шаров в урне, мы вытаскиваем шар, записываем номер и кладем шар обратно. Это *схема упорядоченного выбора с возвращением.*
Примеры ситуаций, где может применена данная формула: любые последовательности длины k с n возможными значениями на каждой позиции. Например: последовательность опытов, когда есть n различных образцов, выбирается один из образцов, от него откалывается (отсыпается, отливается) несущественная часть, эта часть помещается в очередную пробирку, после этого операция повторяется.

Задача 1.5. *Вывести формулу для числа упорядоченных подмножеств размера k в множестве размера n (размещений).*
Ответ: $A_n^k = n!/(n-k)!$.

Хорошей иллюстрацией данной задачи является число способов раздать k маек с номерами n людям. Другая задача, решаемая с помощью данной формулы: число способов расклеить k бирок с номерами $1..k$ по n пробиркам с различными веществами.
Число A_n^k описывает следующую урновую схему. Пусть у нас имеется n различных шаров в урне, мы вытаскиваем из неё по очереди k шаров и записываем последовательно их номера. Описанная схема называется *схемой упорядоченного выбора без возвращения.*

Задача 1.6. *Вывести формулу для числа неупорядоченных подмножеств размера k в множестве размера n (сочетаний).*

Ответ: $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$.
Указание: Использовать правило умножения, чтобы прийти к соотношению $k! \cdot C_n^k = A_n^k$.
В данном случае задача описывает число способов раздать n людям k маек без номеров или, например, число способов наклеить k бирок синего цвета на n пробирок с различными веществами. Пример двух разных способов раздать майки: майки есть у Алексея, Бориса, Василия, у Григория – нет майки, либо майки есть у Бориса, Василия, Григория, Алексей без майки.
Задача описывает следующую урновую схему: мы из урны вываливаем сразу k шаров и смотрим, какие номера на этих шарах оказались (без учета порядка). Это *схема неупорядоченного выбора без возвращения.*
Замечание. Числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами*, поскольку они участвуют в формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Составим таблицу количества возможных вариантов для различных урновых схем. Данные урновые схемы по сути покрывают все наиболее распространенные ситуации, возникающие в прикладном курсе комбинаторики и теории вероятностей. Кроме того, урновая схема является простым примером вероятностного эксперимента – если производить выбор из урны вслепую, все варианты оказываются равновероятными, и естественным образом получается классическое вероятностное пространство, которое будет подробнее изучаться в следующих параграфах.
Примерами ситуаций, описываемых урновыми схемами, могут служить, например, такие: есть n различных шаров (веществ), вынимается k шаров и анализируется либо по порядку (удосужились расставить образцы по порядку/наклеить бирки), либо как одна куча (не удосужились упорядочить образцы).

	упорядоченный	неупорядоченный
без возвращения	A_n^k	C_n^k
с возвращенияем	n^k	C_{n+k-1}^k

Неупорядоченый выбор с возвращением (формула числа вариантов $C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$) — урновая схема, когда есть n шаров (образцов), шары выбираются k раз, и при этом записывается только, сколько раз появился шар с номером $1, 2 \ldots, n$. В частности, когда шаров 2, число возможных вариантов $n+1$ (может быть $0, 1, 2, \ldots, n$ шаров с номером 1, тогда все остальные – с номером 2).

Здесь k — число доставаний шара с возвращением (например, взятия незначительного количества материала из случайного образца), а n — число шаров в урне (типов образцов).

Замечание. Возможно, более понятным примером неупорядоченного выбора с возвращением является число способов разбить заданное число k на n последовательных слагаемых. (например 4 можно разбить на 2 слагаемых 5 способами: 0+4, 1+3, 2+2, 3+1, 4+0; тогда как на три слагаемых $C^2_{3+4-1} = 15$ способами: 0+0+4,…, 4+0+0.)

Задача 1.7. *Доказать формулу для числа возможных вариантов при неупорядоченном выборе с возвращением.*

Задача 1.8. *У лаборанта есть 3 разных кислоты и 4 разных основания, сколькими способами он может провести реакцию? Есть еще 5 различных индикаторов, сколько способов провести реакцию и проверить полноту прохождения реакции?*

Задача 1.9. *Есть 10 пробирок с кислотами и 20 пробирок с различными основаниями,*

а) *сколькими способами можно выбрать 5 кислот и 7 оснований?*

б) *сколькими способами можно выбрать 10 кислот и 5 оснований?*

в) *сколькими способами можно выбрать разные наборы кислот и оснований так, чтобы кислот было меньше пяти, а всего веществ было 10?*

Задача 1.10. *У лаборанта есть 20 пробирок с различными веществами, а также 20 бирок с номерами. Каково число способов:*

а) *наклеить все бирки?*

б) *наклеить 15 бирок?*

в) *наклеить не менее 15 бирок?*

Задача 1.11. *Найти число способов наклеить 6 бирок с надписью "Яд" на 10 пробирок с различными веществами.*

Задача 1.12. *Найти число способов переставить 17 пробирок с различными веществами.*

Задача 1.13. *Есть набор из 20 различных емкостей с жидкостью для протирки оптики,*

а) *скольkими способами можно выбрать среди них жидкости для протирки микроскопов в 1-й, 2-й и 3-й лабораториях, если для лаборатории емкость изымается целиком?*

б) *скольkими способами можно выбрать среди них жидкости для протирки микроскопов в 1-й, 2-й и 3-й лабораториях, если для лаборатории требуется 100 мл жидкости, а емкости бесконечны (заполнены более чем на 300 мл каждая)?*

в) *скольkими способами лаборант может сделать себе коктейль объемом 500 мл из различных жидкостей, если он сливает по 100 мл жидкости за раз, а объем емкостей бесконечен (более 500 мл)?*

Задача 1.14. *В органической молекуле 6 различных мест, к которым могут присоединиться (путем реакции замещения) атомы галогенов (хлора, брома и йода), независимо друг от друга. Определить, скольkими способами могут присоединиться к молекуле:*

а) *2 атома хлора;*

б) *атом хлора и атом брома;*

в) *2 атома хлора и атом брома;*

г) *2 атома хлора и 2 атома йода;*

д) *3 атома хлора, 2 атома брома и атом йода;*

е) *4 атома хлора, атом брома и атом йода.*

Ответы и решения

1.2 а)Число способов 3*5*10, 3 варианта первого выбора (чай), 5 вариантов второго (чашка), 10 вариантов третьего (блюдце). б) 3+2 в) $(4+3)\cdot 5\cdot 10\cdot 5$.

1.4 Вариантов 1-й буквы n, 2-й – тоже n, значит, вариантов первых двух букв $n \cdot n$ и т.д. Всего вариантов n^k.

1.5 Выбрать упорядоченное подмножество – это то же самое, что присвоить k элементам множества $\{1, \ldots, n\}$ номера от 1 до k. Способов присвоить первый номер n, второй номер – $n-1$ способ (так как одному элементу уже присвоен номер), третий номер – $n-2$ и так далее k раз. Получаем формулу

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{\text{k раз}}.$$

1.6 Кратко решение можно сформулировать так:

$$\begin{aligned}&[\text{число способов наклеить } k \text{ синих бирок}]\cdot\\ &\qquad\cdot[\text{число способов упорядочить } k \text{ объектов}] =\\ &\qquad= [\text{число способов наклеить } k \text{ табличек с номерами}]\end{aligned}$$

Проведем теперь вывод более аккуратно. Пусть нам уже известно количество способов выбрать k-элементное подмножество (сочетание) из n-элементного множества, обозначим это количество способов за M. Каждом такому подмножеству соответствует $k!$ различных порядков, в которых можно выстроить его элементы. Причем для различных подмножеств последовательности упорядоченных элементов, очевидно, не пересекаются.

Таким образом, количество возможных упорядоченных подмножеств размера k равно $M \cdot k!$. С другой стороны, это же количество способов равно A_n^k. Следовательно, имеем $A_n^k = M \cdot k!$ т.е. $M = A_n^k / k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.7 Представим число k в виде суммы последовательных единиц, разделенных на n групп перегородками (каждая группа в сумме образует очередное слагаемое), причем перегородки могут стоять и в начале или конце, а также рядом (тогда соответствующие слагаемые равны нулю). Понятно, что таких перегородок понадобится $n-1$. Обозначим их нулями. Например, разбиение 4=3+1 запишется так: 11101. Теперь у нас есть всего $n+k-1$ объектов (единиц и нулей), и надо расставить их произвольным образом. Достаточно выбрать k мест для единиц из общего числа $n+k-1$ мест (на остальные места однозначно ставятся нули). Это можно сделать C_{n-k+1}^k способами.

1.8 а) $3 \cdot 4 = 12$, б) $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
1.9 а) C_{10}^{5} б) $C_{20}^{5}(= C_{10}^{10} \cdot C_{20}^{5})$ в) $\sum_{k=0}^{4} C_{10}^{k} C_{20}^{10-k}$
1.10 а) $20!$ б) A_{20}^{15} в) $\sum_{k=15}^{20} A_{20}^{k}$
1.11 C_{10}^{6}
1.12 $17!$
1.13 а) A_{20}^{3} б)20^{3} в) C_{20+3-1}^{20}
1.14 а) C_{6}^{2} б) $6 \cdot 5$ в) $C_{6}^{2} \cdot 4$ г) $C_{6}^{2} \cdot C_{6}^{2}$ д) $C_{6}^{3} \cdot C_{3}^{2} \cdot 1$ е) $C_{6}^{4} \cdot 2 \cdot 1$

2. Комбинаторика

В этом параграфе мы займемся решением задач комбинаторики более высокого уровня. В данных задачах уже нужно найти возможность для применения той или иной базовой комбинаторной техники (например, аналогию с урновой схемой), а также правильно применить правило сложения и умножения, чтобы разбить подсчитываемое количество вариантов на подмножества таким образом, чтобы каждое из подмножеств поддавалось комбинаторному подсчету.

Замечание. Основная сложность в комбинаторных задачах часто находится в самом начале: нужно понять, какую именно модель здесь применить. При решении задач, если сомневаетесь, выберете то решение, в котором уверены "на все 100". Возможно, стоит его записать, и только после этого сверяться с ответом. Если вы решите задачу в виде "может быть так, но может быть и так" и один из ответов совпадет, это будет абсолютно бесполезной тратой задачи.

Задача 2.1. *Каково число последовательностей из 0 и 1 длины n?*

Задача 2.2. *Чему равно число таких последовательностей, в которых k единиц?*

Задача 2.3. *Докажите формулу $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.*

Указание: Произвольное подмножество может быть некоторым образом записано как последовательность из нулей и единиц.

Задача 2.4. *Для экспериментов с динамитом требуется как минимум 5 лаборантов, сколько способов выбрать группу экспериментаторов из коллектива в 10 лаборантов?*

Задача 2.5. *Есть 50 различных веществ. Сколькими способами можно выбрать набор из 10 веществ для первой лаборатории, 15 веществ для второй и 20 веществ для третьей, если вещества забираются полностью?*

Полиномиальным коэффициентом (мы будем обозначать его $Poly_n(m_1, \ldots, m_k)$) называется число способов разобрать n элементов по k классам таким образом, чтобы количество элементов i-го класса равнялось m_i, для $i = 1, ..., k$.

Задача 2.6. *Вывести формулу полиномиального коэффициента.*

Указание: Следует последовательно воспользоваться биномиальными коэффициентами.

Задача 2.7. *Решить задачу 2.5 в условии, что каждая лаборатория берет незначительное количество материала на анализ.*

Задача 2.8. *Имеются 30 сотрудников, сколькими способами из них можно выбрать:*

- *а) генерального директора, старшего бухгалтера и трех уборщиц?*
- *б) футбольную команду в 11 человек и вратаря этой футбольной команды?*
- *в) три отдела по 5 человек каждый?*
- *г) три отдела по 10 человек каждый и начальников отделов?*
- *д) генерального директора, 10 заместителей по разным направлениям и 7 уборщиц?*

Задача 2.9. *Среди 50 сотрудников 30 программисты, 20 менеджеры, сколькими способами из них можно выбрать:*

- *а) отдел с двумя менеджерами и 10 программистами?*
- *б) два отдела по два менеджера и 10 программистов на каждый?*
- *в) пять отделов по 4 менеджеров и 6 программистов на каждый?*
- *г) две футбольных команды, если на воротах обязательно должны стоять менеджеры?*
- *д) разделить программистов по двум отделам, чтобы в каждом отделе было не меньше 13 программистов и не больше двух менеджеров, а свободных программистов не было.*

В следующих задачах полезным будет подсчитать не количество возможных вариантов, а количество возможных вариантов в дополнении к данному множеству вариантов. Проиллюстрируем этот принцип на примере следующей задачи.

Задача 2.10. *Сколько существует 10-значных телефонных номеров, имеющих хотя бы 2 различные цифры (считаем, что номер может начинаться с нуля)?*

► Вычислим, сколько существует номеров, не имеющих двух различных цифр. Таких номеров, очевидно, 10: $0\dots0$, $1\dots1$, $\dots$, $9\dots9$. Всего возможных номеров 10^{10}, то есть ответ задачи $10^{10}-10$. ◄

Задача 2.11. *Требуется расставить 10 томов химической энциклопедии по полке в произвольном порядке, но так, чтобы первый и последний тома не стояли подряд. Сколькими способами это можно сделать?*

Задача 2.12. *Пусть есть набор различимых кубиков различных веществ, объемом по 1 см^3.*

а) *Сколько способов разложить в ряд 5 кубиков вещества А и 10 кубиков гранита в линию, если вещество А в объеме 2 см^3 кубических взрывоопасно?*

б) *Имеется 4 кубика вещества B и 5 кубиков вещества C, вещество B в объеме 3 см^3 взрывоопасно, сколько способов выбрать кучку из 5 кубиков и не взорваться?*

Задача 2.13. *Пусть теперь кубики не различаются между собой. Имеется 7 кубиков вещества A, 8 кубиков вещества B, и 5 кубиков вещества C. Сколько существует вариантов набрать:*

а) *5 кубиков?*

б) *6 кубиков?*

в) *7 кубиков?*

Задача 2.14. *Лаборант готовит 20 образцов, 5 из них он готовит неправильно, найти:*

а) *число способов выбрать 2 неправильных и 3 правильных образца;*

б) *число способов взять 7 образцов, чтобы число неправильных не превышало 3.*

Задача 2.15. *Найти число различных матриц размера $m \times n$, если каждая матрица заполняется 0 и 1.*

Задача 2.16. *Сколькими способами можно рассадить 15 различных человек в 5 вагонов?*

Задача 2.17. *Сколькими способами ревизор может выбрать 3 фирмы из 20, если порядок посещения не важен?*

Задача 2.18. *Сколькими способами ревизор может выбрать 3 фирмы из 20, если порядок посещения важен?*

Задача 2.19. *Сколько существует 5-значных чисел, которые одинаково читаются справа налево и слева направо?*

Задача 2.20. *Определить степень, в которую нужно возвести $1 + x$, чтобы в получившейся формуле коэффициенты для x^7 и x^{12} совпадали. (Использовать формулу бинома Ньютона)*

Ответы и решения

2.1 2^n – число слов алфавита длины n из двух букв (0 и 1).

2.2 C_n^k – это число способов выбрать подмножество размера k и на выбранные места поставить единицы.

2.3 Посчитаем еще раз число последовательностей из 0 и 1 длины n. Разобьем общее количество вариантов последовательностей на те группы, где в последовательности k единиц $k = 0, \ldots, n$. Варианты, очевидно, не пересекаются и в сумме дают все возможные 2^n вариантов, но тогда по задаче (2.2) $\sum_{i=0}^n C_n^k = 2^n$.

2.4 C_{10}^5 – число подмножеств размера 5 множества из 10 элементов.

2.5 $C_{50}^{10} C_{40}^{15} C_{25}^{20}$. Сначала выбирается 10 веществ для первой лаборатории, потом из оставшихся 40 веществ выбираются 15 для второй лаборатории, и из оставшихся 25 выбираются 20 для третьей.

2.6 По аналогии с задачей 2.5, выберем m_1 элементов для первого подмножества, из оставшихся $n - m_1$ элементов выберем m_2 элемента и т.д. Получается количество вариантов

$$
\begin{aligned}
C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}^{m_k} = \\
= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!} \cdot \frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!} \times \ldots \\
\ldots \times \cdot \frac{(n-m_1-\cdots-m_{k-1})!}{m_k!(n-m_1-\ldots-m_{k-1}-m_k)!} = \\
\frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!(n-m_1-\ldots-m_k)!}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Это и есть формула полиномиального коэффициента. Заметим, что обычно полагают, что $m_1 + \ldots + m_k = n$, тогда $(n - m_1 - \ldots - m_k)! = 1$ и справедливо равенство

$$Poly_n(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!} \tag{2}$$

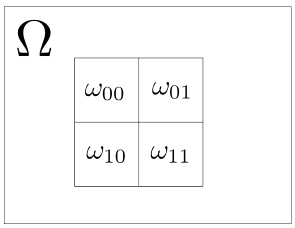
2.7 $C_{50}^{10} C_{50}^{15} C_{50}^{20}$
2.8 а) $30 \cdot 29 \cdot C_{28}^{3}$ б) $C_{30}^{11} \cdot 11 = C_{30}^{10} \cdot 20$ в) $C_{30}^{3} \cdot C_{25}^{5} C_{15}^{5}$ г) $C_{30}^{10} \cdot 10 \cdot C_{20}^{10} \cdot 10$ д) $30 \cdot A_{29}^{10} \cdot C_{19}^{7}$
2.9 а) $C_{20}^{2} \cdot C_{30}^{10}$ б) $C_{20}^{2} C_{30}^{10} C_{18}^{2} C_{20}^{10}$
в) $Poly(4,4,4,4,4) Poly(6,6,6,6,6) = \frac{20!}{(4!)^5} \frac{30!}{(6!)^5} = C_{20}^{4} C_{16}^{4} \cdots C_{4}^{4} C_{30}^{6} C_{24}^{6} \cdots C_{6}^{6}$.
2.11 $10! - 2 \cdot 9!$. Чтобы решить эту задачу, сначала посчитаем общее количество возможных вариантов расставить тома энциклопедии (10!), после этого вычтем из этого количества количество вариантов, когда первый и последний тома стоят рядом. Последнее количество равно $2 \cdot 9!$ (пара томов ставится рядом, формируя единый артефакт, и в дальнейшем переставляется вместе с остальными 8 томами 9! способами как один объект, кроме того, имеется два варианта самого артефакт: "первый, последний" и "последний, первый").
2.12 а) $A_{11}^{5} \cdot 10!$ – сначала раскладываем 10 кубиков гранита с промежутками, остается 9 промежутков между кубиками и 2 вакантных места по краям. Всего 11 мест. По ним нужно разложить 5 различных кубиков вещества А.
б)$C_4^2 C_5^3$
2.13 а) C_{3+5-1}^{5}
б) $C_{3+6-1}^{5} - 1$ — число вариантов выбора с возвращениями без различения кубиков минус 1 вариант когда все 6 кубиков вещества С.
в) $C_{3+7-1}^{5} - 1 - 2$ — число вариантов выбора с возвращениями без различения кубиков минус 1 случай когда все 7 кубиков вещества С, минус два случая когда 6 кубиков вещества С.
2.14 а) $C_5^2 \cdot C_{15}^3$ б) $\sum_{i=0}^{3} C_5^i C_1 5^{7-i}$
2.15 2^{m-n}
2.16 5^{15}
2.17 C_{20}^{3}
2.18 A_{20}^{3}

2.19 $9 \cdot 10 \cdot 10$ – столько же, сколько последовательностей из трех цифр, начинающихся не с нуля. В качестве четвертой и пятой цифры берем вторую и первую соответственно.
2.20 19

3. Классическое определение вероятности.

Опр. Вероятностным пространством называется множество из всех элементарных исходов случайного эксперимента.

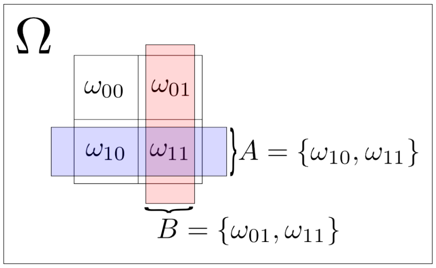
Поясняющий пример. Изучается подбрасывание двух монеток. Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega_1 = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$, состоящее из четырех элементарных исходов: решка-решка, решка-орел и т.д. (первая цифра в нижнем индексе ω относится к первой монете, вторая — ко второй, нулем обозначается решка, единицей орел).



Теперь рассмотрим вероятностное пространство $\Omega_2 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, где ω_0 – выпало 0 орлов, ω_1 – выпал 1 орел, ω_2 – выпало 2 орла. Оба этих пространства являются адекватной моделью для описания ситуации с двумя монетками. Однако пространство Ω_1 удобнее, так как в нем исходы естественным образом равновероятны (в случае идеальных монет). Поэтому мы можем рассчитать вероятности любого из исходов из Ω_1 – она равна $1/4$. То же самое с исходами второго пространства мы сделать не можем – если мы будем считать, что все исходы равновероятны, это пространство не будет адекватно описывать нашу модель, так как очевидно, что получить пару орлов менее вероятно чем одного орла. Таким образом, для каждого случайного эксперимента наша задача — построить вероятностное пространство так, чтобы, с одной стороны, оно адекватно описывало ситуацию, а с другой – позволяло рассчитывать вероятности.

Опр. Случайным событием называется любое подмножество вероятностного пространства (если пространство конечно или счетно).

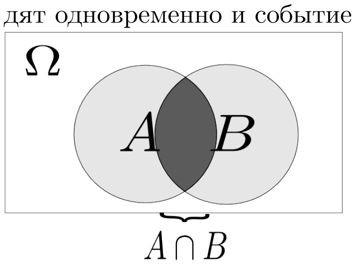
Пример. Рассмотрим введенное выше пространство Ω для подбрасывания двух монеток. Требуется описать событие – первая монетка выпала орлом. Решение: это событие, состоящее из двух элементарных исходов $A = \{\omega_{10}, \omega_{11}\}$. Соответственно, событием, заключающимся в том, что вторая монета выпала орлом, будет $B = \{\omega_{01}, \omega_{11}\}$.



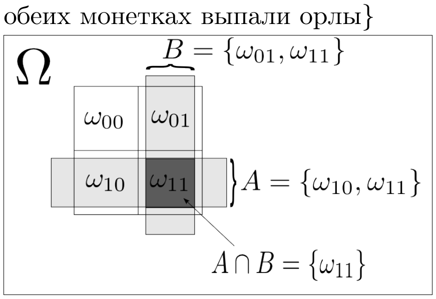
Со случайными событиями как с множествами можно производить теоретико-множественные операции, каждая из этих операций имеет естественную интерпретацию в бытовых терминах.

Операции с событиями.

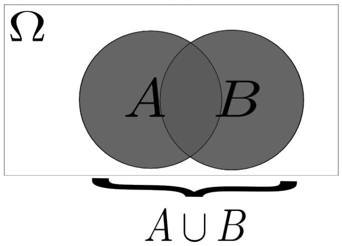
Пересечение событий. Событие состоит в том, что происходят одновременно и событие А, и событие В.



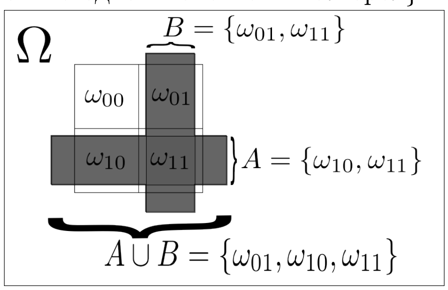
Пример: событие {на первой монетке выпал орел}, и событие {на второй монетке выпал орел} пересекаются по событию {на обеих монетках выпали орлы}



Объединение событий. Событие состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий A, или B.

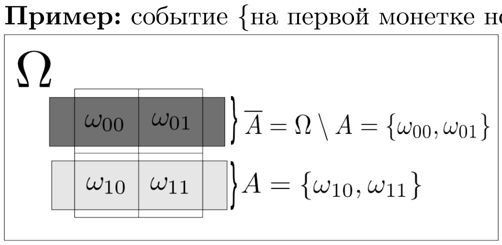


Пример: объединением событий A и B является событие {хотя бы на одной монетке выпал орел}



Отрицание события. Событие состоит в том, что событие A не происходит.

Пример: событие {на первой монетке не выпал орел}.



Задача 3.1. *Построить вероятностное пространство для*

подбрасывания трех монеток. Выразить через него события A={первая монетка выпала орлом}, B={вторая монетка выпала орлом}, C={выпало 2 орла}.

См. ответы и решения.

Задача 3.2. *В предыдущей задаче найти пересечение событий A,B и C. Как на бытовом языке выражается получившееся событие?*

Опр. Вероятностное пространство называется классическим, если оно содержит конечное число исходов и все исходы равновероятны.

Пример. Вероятностное пространство для эксперимента с двумя монетками является классическим, если присвоить каждому элементарному исходу вероятность $1/4$.

Опр. Вероятностное пространство называется дискретным, если оно содержит конечное или счетное число элементарных исходов, и сумма вероятностей, присвоенных элементарным исходам, равна единице. Другими словами, выполняется соотношение $\sum_{\omega_i \in \Omega} \mathrm{P}(\omega_i) = 1$.

Пример. Рассмотрим следующий эксперимент: монетка подбрасывается до появления первого орла. Обозначим исход ω_k, если орел первый раз выпал при k-ом бросании монеты, $k = 1, 2, \ldots$. В данном эксперименте может быть бесконечное число исходов, пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ является адекватной моделью. Имеем $\mathrm{P}(\omega_i) = 1/2^i$, так что сумма вероятностей равна единице. Построенное пространство является дискретным, но не классическим.

Замечание. Классическое вероятностное пространство является частным случаем дискретного.

Опр. Вероятностью события в дискретном вероятностном пространстве называется сумма вероятностей, присвоенных элементарным исходам, из которых оно состоит: $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\})$. В частности, для классического вероятностного пространства $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{|\Omega|} = |A|/|\Omega|$.

Замечание. Запись $\mathrm{P}(\{\omega_i\})$, строго говоря, является более правильной, чем запись $\mathrm{P}(\omega_i)$, так как вероятность определена не на элементарных исходах, а на событиях. Однако для упрощения обозначений мы иногда будем пользоваться второй записью без дополнительных оговорок.

Теорема (сложения вероятностей)

$$\mathrm{P}\,(A \cup B) = \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B) - \mathrm{P}\,(AB)\,,$$

а в частном случае, когда события A и B не пересекаются,

$$\mathrm{P}\,(A \cup B) = \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B)\,.$$

Последняя формула легко следует из того, что для непересекающихся событий вероятность их пересечения равна нулю.

Задача 3.3. *Доказать теорему сложения в случае классического и дискретного вероятностных пространств.*

Докажем это сначала в случае классического вероятностного пространства:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,(A \cup B) &= \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \\ &= \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \\ &= \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B) - \mathrm{P}\,(A \cap B)\,. \qquad (3)\end{aligned}$$

где переход ко второй строчке очевиден с точки зрения теории множеств да и просто здравого смысла. Аналогично данная формула доказывается для дискретного вероятностного пространства:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,(A \cup B) &= \sum_{\omega_i \in A \cup B} \mathrm{P}\,(\{\omega_i\}) = \\ &= \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}\,(\{\omega_i\}) + \sum_{\omega_i \in B} \mathrm{P}\,(\{\omega_i\}) - \sum_{\omega_i \in A \cap B} \mathrm{P}\,(\{\omega_i\}) = \\ &= \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B) - \mathrm{P}\,(A \cap B)\,. \qquad (4)\end{aligned}$$

В более общем случае формула может быть доказана, основываясь на аксиоме аддитивности вероятностной меры. Данное доказательство является отличным упражнением в применении абстрактной теории множеств. $\triangle$

Задача 3.4. *Найти вероятности событий A, B и C из задачи 3.1.*

Задача 3.5. *Имеется 40 вопросов, на экзамене студент тянет два из них. Построить вероятностное пространство и найти вероятность того, что:*

а) оба вопроса будут из первой половины.

б) ни один вопрос не будет из первой половины.

в) хотя бы один вопрос будет из первой половины.

г) студент, который знает вопросы 1-15, 31-40, ответит на оба вопроса.

д) тот же студент ответит хотя бы на один вопрос.

е) первым ему попадется вопрос от 16 до 25, а вторым от 21 до 30.

Замечание. Здесь есть два способа построения вероятностного пространства. Для одного из них мы считаем последовательности вытянутых билетов 1:2 и 2:1 разными, для другой – одинаковыми. Оба эти пространства подходят для решения всех вариантов задачи, где не существенен порядок вытаскивания билетов. Рекомендуется использовать для решения задачи оба варианта пространства и удостовериться, что получающиеся в результате вероятности совпадают.

Задача 3.6. *Из урны с 3 черными и 6 белыми шарами вытаскиваются 2 шара. Найти вероятность того, что оба они белые.*

Задача 3.7. *Имеются 50 рабочих, из которых 30 умеют укладывать асфальт, а остальные только носить его ведрами. Случайно выбирается бригада из 20 человек, найти вероятность того, что:*

а) в бригаде все умеют укладывать асфальт;

б) в бригаде есть 15 человек, умеющих укладывать асфальт, и 5 умеющих носить асфальт;

в) в бригаде не менее 16 человек умеют укладывать асфальт;

г) в бригаде умеют укладывать асфальт больше 5 человек.

Задача 3.8. *Монетка подбрасывается (а) 3 раза (б) 5 раз. Используя запись через события, найти вероятность того, что монетка выпадет орлом больше чем в половине случаев.*

Задача 3.9. *В ящике средств для прочистки сантехники стоит 3 едких щелочи и 2 кислоты. Случайно выбираются два средства для прочистки и выливаются в трубу целиком. Найти:*

а) *вероятность того, что в трубу попало две кислоты;*

б) *вероятность того, что в трубу попала кислота и щелочь и теперь там отличный камень из химически пассивной соли;*

в) *вероятности в (а), если средства выбираются последовательно двумя мастерами прочистки трубы, выливаются в трубу наполовину и возвращаются в ящик;*

г) *вероятность в (б) для этого случая.*

Задача 3.10. *В лифт 11-этажного дома на первом этаже заходит 10 человек, какова вероятность того, что (а) все они выйдут на разных этажах? (б) на трех этажах выйдут по 3 человека?*

Задача 3.11. *В урне 20 шаров, из них 6 белых, 8 черных, остальные красные. Из урны достается 4 шара. Какова вероятность того, что*

а) *все они белые;*

б) *есть 2 белых, черный и красный;*

в) *есть шары всех цветов;*

г) *второй вынутый шар черный;*

д) *есть шары только белого и черного цветов.*

Задача 3.12. *Рассчитать вероятность, что зная 25 вопросов из 50, студент сможет ответить хотя бы на один из двух вопросов билета.*

Задача 3.13. *Подкидываются 3 монетки, рассчитать вероятность того, что (а) все 3 выпадут орлами; (б) 2 из них выпадут орлами, а 1 решкой.*

Задача 3.14. *Имеется 100 образцов, из которых 30 соли, 40 щелочи и 30 кислоты. Найти вероятность того, что в выборке из 10 образцов 3 соли, 4 щелочи и 3 кислоты.*

Задача 3.15. *Имеется 22 образца, 8 из которых — с высоким содержанием некоторого вещества. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 11 образцов окажется более 3 таких образцов.*

Задача 3.16. *В слове "колокол" переставили буквы случайным образом, найти вероятность того, что слово при этом не изменится.*

Задача 3.17. *У человека N ключей и только один из них открывает дверь, найти вероятность того, что потребуется ровно k попыток, чтобы открыть дверь (неподходящие ключи откладываются).*

Задача 3.18. *Игральный кубик бросается 10 раз, найти вероятность того, что тройка выпадет 3 раза, а четверка — 4.*

Задача 3.19. *Имеется 20 образцов, 5 из которых – с высоким содержанием некоторого вещества. Один образец был утерян. Найти вероятность того, что в выборке из 10 образцов окажется 2 с высоким содержанием вещества.*

Задача 3.20. *Лаборант готовит 20 образцов, 5 из них он готовит неправильно, найти вероятность*

- а) *что из произвольно взятых 5 образцов все будут хорошие*
- б) *что из произвольно взятых 6 образцов будет не более половины хороших*

Задача 3.21.

- а) *Есть 7 проб вещества, каждое равновероятно попадает в одну из 7 лабораторий, какова вероятность, что все пробы попадут в разные лаборатории?*
- б) *Решить задачу, если есть 5 проб вещества.*
- в) *Найти вероятность, что в одну лабораторию не попадет проб, но во все остальные попадет.*

Ответы и решения

3.1 Подходящим для данного эксперимента является $\Omega = \{000, 001, \ldots, 110, 111\}$, где элементарный исход 000 обозначает, что все монетки выпали решками, 001 – что только 3-я монетка выпала орлом и так далее.

События A,B,C выражаются через это пространство следующим образом: $A = \{100, 101, 110, 111\}$, $B = \{010, 011, 110, 111\}$, $C = \{011, 101, 110\}$.

3.2 $A \cap B = \{110, 111\}$, $(A \cap B) \cap C = \{110\}$. Как легко видеть, событие $A \cap B \cap C$ оставляет только один вариант для исхода эксперимента – первая орлом, 2-я орлом, 3-я решкой. На бытовом языке можно сказать, что ровно две монетки выпали орлами – первая и вторая.

3.4 Присвоим каждому элементарному исходу из Ω одинаковую вероятность 1/8, чтобы получить классическое вероятностное пространство. Тогда $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$.

3.5 Возможные пространства для этой задачи:

$$\Omega_1 = \{1:2, 1:3, \ldots, 1:40 \\ 2:3, \ldots, 2:40 \\ \ldots \\ 39:40\}$$

$$\Omega_2 = \{1:2, 1:3, \ldots, 1:40 \\ 2:1, 2:3, \ldots, 2:40 \\ \ldots \\ 39:1, \ldots, 39:38, 39:40 \\ 40:1, \ldots 40:39\}$$

$|\Omega_1| = C_{40}^2$,$|\Omega_2| = A_{40}^2 = 40 \cdot 39 = 40^2 - 40$

Рассчитаем теперь вероятность событий.

а) $A_1 = \{\text{оба билета из первой половины}\} = \{1:2, \ldots, 1:20, \ldots, 19:20\}$, $|A_1| = C_{20}^2$, $\mathrm{P}(A_1) = \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2} = \frac{\frac{20!}{2!(18)!}}{\frac{40!}{2!(38)!}}$

Выразим событие через вероятностное пространство Ω_2. $A_2 = \{1:2, 2:1, \ldots, 19:20, 20:19\}$. $|A_2| = A_{20}^2 = 20!/18!$.

$$\mathrm{P}(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{A_{20}^2}{A_{40}^2} = \frac{\frac{20!}{18!}}{\frac{40!}{38!}}$$

Легко видеть, что получающиеся ответы совпадают.
б) $\mathrm{P}(B_1) = \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2}$

$$B_1 = \{\text{ни один из первой половины}\} = \\ = \overline{\{\text{оба из второй половины}\}} = \\ = \{21 : 22, \ldots, 39 : 40\}, \quad |B_1| = C_{20}^2,$$

точно также можно по аналогии с пунктом а) получить вероятность B_2 через второе вероятностное пространство.
в) $C_1 = \overline{B_1}$, т.е. $|C_1| = |\Omega_1| - |B_1|$,

$$\mathrm{P}(C_1) = \frac{|\Omega_1| - |B_1|}{|\Omega_1|} = 1 - \frac{|B_1|}{|\Omega_1|} = \\ = 1 - \mathrm{P}(B_1) = 1 - \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2} = 1 - \frac{20 \cdot 19}{40 \cdot 39}.$$

для вероятностного пространства Ω_2, очевидно, верно аналогичное равенство.
г) $\mathrm{P}(D_1) = \frac{C_{25}^2}{C_{10}^2}$

$$D_1 = \{1 : 2, \cdots, 14 : 15, 1 : 31, 1 : 32, \ldots, 1 : 40, \ldots \\ \ldots, 15 : 40, 31 : 32, \ldots, 39 : 40\}.$$

Как видно, событие D_1 имеет более сложную структуру, чем, например, событие A_1, но с точки зрения подсчета количества исходов все проще: $|D_1| = C_{25}^2$ – число способов выбрать 2 элемента из множества в 25 элементов (1..15, 31..40). То же самое можно проделать в упорядоченном случае $|D_2| = A_{25}^2$.
д)

$$E_1 = \{\text{хотя бы один вопрос из 1..15, 31..30}\} = \\ = \overline{\{\text{об вопроса из 16..30}\}} = \overline{F_1}$$

$|F_1| = C_{15}^2$, где 15 – это количество элементов в 16..30. т.е.

$$\mathrm{P}(E_1) = 1 - \mathrm{P}(F_1) = 1 - \frac{C_{15}^2}{C_{40}^2} = 1 - \frac{15 \cdot 14}{40 \cdot 39}$$

е) Событие данного пункта нельзя выразить через пространство Ω_1, так как оно зависит от порядка получаемых вопросов. Выразим его через Ω_2. $G_2 = \{16:17, \ldots, 25:30\}$. Чтобы подсчитать количество элементарных исходов в данном событии, разобьем его на три непересекающихся:

$$G_2 = \left\{\begin{matrix}\text{первый билет от 16 до 20} \\ \text{второй – от 21 до 30}\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}\text{первый от 21 до 25} \\ \text{второй от 21 до 25}\end{matrix}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\begin{matrix}\text{первый от 21 до 25} \\ \text{второй от 26 до 30}\end{matrix}\right\} = G_{21} \cup G_{22} \cup G_{23}$$

$|G_{21}| = 5 \cdot 10$, $|G_{22}| = A_5^2$, $|G_{23}| = 5 \cdot 5$, итого $|G_2| = 5 \cdot 10 + A_5^2 + 5 \cdot 5$,

$$\mathrm{P}(G_2) = \frac{5 \cdot 10 + A_5^2 + 5 \cdot 5}{A_{40}^2} =$$
$$= \frac{5 \cdot 15 + 15 \cdot 4}{40 \cdot 39} = \frac{5 \cdot 19}{40 \cdot 39} = \frac{19}{8 \cdot 39}. \quad (5)$$

3.6 $\frac{C_6^2}{C_9^2}$. Пронумеруем шары. Пусть шары 1..3 – черные, 4..9 – белые. Элементарный исход – это пара номеров шаров (здесь, как и в 3.5, можно использовать также пространство с различаемым порядком), событие $A = \{\text{оба шара белые}\} = \{4:5, \ldots, 8:9\}$.

3.7 Один элементарный исход – подмножество размера 20 из множества из 50 рабочих. а) $\frac{C_{30}^{20}}{C_{50}^{20}}$ б) $\frac{C_{30}^{15} C_{20}^5}{C_{50}^{20}}$ в) $\frac{\sum_{k=16}^{20} C_{30}^k C_{20}^{20-k}}{C_{50}^{20}}$ г)$1 - \frac{\sum_{k=0}^{4} C_{30}^k C_{20}^{20-k}}{C_{50}^{20}}$

3.8 а)$C_3^2 \cdot 1/8$. События $A_{011}, A_{101}, A_{110}$ (единички обозначают монетки, выпавшие орлами) не пересекаются, значит, вероятность их объединения равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность отдельного события $\mathrm{P}(A_{011}) = 1/|\Omega| = 1/8$. Всего событий столько же, сколько способов выбрать подмножество размера 2 из множества из 3-х элементов – $C_3^2 = 3$. б) $C_5^2/2^5$.

3.9 а) $\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{C_5^2}$ б) $\frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \cdot 3}{C_5^2}$ в) $\frac{3^2}{5^2}$ г) $\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{5^2}$.

3.10 а) 10! б) $10 C_{10}^3 Poly_{10}(1,3,3,3)/10^{10}$. Выбрать три множества этажей (где выходят по 0, 1 и 3 человека), потом посчитать число вариантов для каждого множества, если людей различаем.

3.11 а) $\frac{C_6^4}{C_{20}^4}$ б) $\frac{C_6^2 \cdot 8 \cdot 6}{C_{20}^4}$ в) $\frac{C_6^2 C_8^1 C_6^1 + C_6^1 C_8^2 C_6^1 + C_6^1 C_8^1 C_6^2}{C_{20}^4} = 1 - \frac{C_{14}^4 + C_{12}^4 + C_{14}^4}{C_{20}^4}$ г) $\frac{8 \cdot A_{20}^3}{A_{20}^4}$ д) $\frac{C_{14}^4}{C_{20}^4}$

3.12 $1 - \frac{C_{25}^2}{C_{50}^2} = \frac{C_{50}^2 - C_{25}^2}{C_{50}^2}$

3.13 а) $\frac{1}{2^3}$ б) $\frac{C_3^2}{2^3}$

3.14 $\frac{C_{30}^3 C_{40}^4 C_{30}^3}{C_{100}^{10}}$

3.15 $1 - \frac{\sum_{k=0}^3 C_8^k C_{14}^{11-k}}{C_{22}^{11}} = \frac{C_{22}^{11} - \sum_{k=0}^3 C_8^k C_{14}^{11-k}}{C_{22}^{11}}$

3.16 $\frac{3!2!2!}{7!}$

3.17 $\frac{A_{N-1}^k \cdot 1}{A_N^k}$

3.18 $\frac{C_{10}^3 C_{10}^4 4^{10-3-4}}{6^{10}}$

3.19 $\frac{15 \cdot C_5^2 \cdot C_{15}^8 + 5 \cdot C_4^2 \cdot C_{15}^8}{20 \cdot C_{10}^{19}}$

3.20 а) $\frac{C_{15}^5}{C_{20}^5}$ б) $\frac{\sum_{k=0}^3 C_{15}^k \cdot C_5^{6-k}}{C_{20}^6} = \frac{\sum_{k=1}^3 C_{15}^k \cdot C_5^{6-k}}{C_{20}^6}$

3.21 а) $\frac{7!}{7^7}$ б) $\frac{A_7^5}{7^5}$ в) $\frac{C_7^1 \cdot 6^7}{7^7}$

4. Геометрическая вероятность.

Отметим, что вероятностные пространства, в которых число элементарных исходов конечно – не единственный тип вероятностных пространств. Примером пространства с бесконечным числом элементарных исходов является геометрическое вероятностное пространство. Можно отметить также, что число исходов здесь очень неприятным образом бесконечно – то есть континуально, на пальцах это значит, что их нельзя пересчитать, если считать последовательно, даже если считать бесконечное число дней.

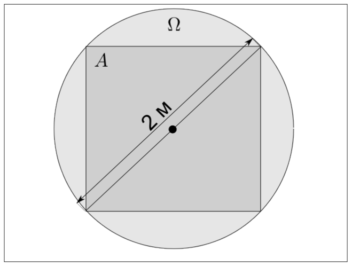
В модели геометрической вероятности рассматривается самый простой вид континуальных вероятностных пространств. Обычно множеством элементарных исходов здесь является некоторая фигура на плоскости. Событием – подмножество этой фигуры, а вероятность определяется следующим образом.

Опр. Вероятностью события называется отношение площади множества, описывающего данное событие, к площади всего вероятностного пространства.

Замечание. Вероятностным пространством для геометрической вероятности вовсе не обязательно является фигура на плоскости – это может быть также фигура в пространства (тогда вместо площади рассматривается объем), либо фигура на прямой (тогда вместо площади рассматривается длина). Теоретически геометрическую вероятность можно рассматривать и в пространствах большей размерности чем 3, но преимущества такого подхода невелики – многомерные пространства неудобны для восприятия и все равно требуют аналитических методов работы.

Задача 4.1. *Стрелок производит выстрел в центр квадратной мишени с диагональю 2 м. Какова вероятность попасть в мишень, если отклонение пули от заданного направления может быть произвольным, но не превосходящим 1 м?*

► Пространством элементарных исходов здесь является круг радиуса 1 м вокруг центра квадрата. Попадание пули в каждую точку круга равновероятно. Выберем среди этих элементарных исходов подходящие под событие $A = \{\text{пуля попала в мишень}\}$. Очевидно A – это квадрат с диагональю 2 м в центре круга Ω.



Вероятность рассчитывается следующим образом

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{\pi}. \qquad (6)$$

◄

Задача 4.2. *Задача о встрече: два человека решили встретиться с полуночи до часа. Каждый приходит на место в случайный момент времени, ждет* 1/4 *часа и уходит. С какой вероятностью они встретятся?*

Указание: предположить, что элементарный исход – это точка с координатами (Время прихода 1-го, Время прихода 2-го).

Задача 4.3. *В ходе технологической обработки концентрация вещества A случайна и равномерно распределена от 0.5 до 1, концентрация вещества B — от 0 до 1. Реакция проходит, когда концентрация вещества A больше чем вдвое превышает концентрацию вещества B, найти вероятность прохождения реакции.*

Задача 4.4. *Решить задачу 4.3 при условии, что реакция проходит, когда квадрат концентрации A превосходит концентрацию B.*

Задача 4.5. *Два химика синтезируют случайное количество вещества в сосудах размера 2 и 1 литр соответственно. После этого второй химик сливает вещество в сосуд первого. Если у него осталось больше половины вещества в сосуде, или не осталось вообще, он выиграл. Каковы вероятности выигрыша для первого и второго химика?*

Задача 4.6. *Первый поезд метро в центр отходит в 6:00, первый поезд от центра отходит в 6:01, какова вероятность,* *спустившись в метро в случайный момент и сев в первый пришедший поезд, поехать от центра, если поезда ходят с промежутком в 5 минут.*

Задача 4.7. *(Парадокс Бертрана): в круг вписан равнобедренный треугольник. Какова вероятность того, что длина случайной хорды, проведенной в круге, меньше, чем сторона треугольника.*

Замечание. Парадокс Бертрана является классическим примером "Вероятности эпохи Ренессанса", эта кажущаяся простой задача может быть решена тремя интуитивно обоснованными способами, дающими различные ответы. Разгадку парадокса см. в ответах и решениях.

Задача 4.8. *(Задача Бюффона) Иголка длины 1 случайно бросается на плоскость, разлинованную на полосы ширины 1. Какова вероятность того, что игла пересечет край полосы?*

Замечание. В этой задаче вероятность выражается через π, что дает возможность оценивать π экспериментально с помощью бросания иглы достаточно большое число раз. В наше время подобные эксперименты легко смоделировать на компьютере. Собственно, есть много более простых способов вычислить π с нужной точностью, однако в отношении многих других величин, которые не вычисляются явно, но могут быть выражены через площади некоторых фигур, такие методы применяются и называются *методами Монте-Карло.*

Задача 4.9. *Гном встречает на ярмарке двух хоббитов. У первого хоббита изначально было 100 монет, а у второго — 200 монет, и они тратили деньги независимо друг от друга. Встреча происходит в случайный момент времени, поэтому неизвестно, сколько денег к этому моменту осталось у хоббитов. Если у первого хоббита осталось больше денег, чем у второго, то он выигрывает. Если у второго хоббита вдвое больше, чем у первого, то выигрывает он. В противном случае выигрывает гном. Какова вероятность выигрыша гнома?*

Указание: для простоты считать капиталы хоббитов непрерывными переменными.

Задача 4.10. *Навстречу друг другу идут 2 пешехода со скоростями, независимыми по отношению друг к другу и взятыми* *наугад из отрезка* $[0, 4]$ *км/ч. Найти вероятность того, что они встретятся в течение 2 часов, если сначала между ними 6 км.*

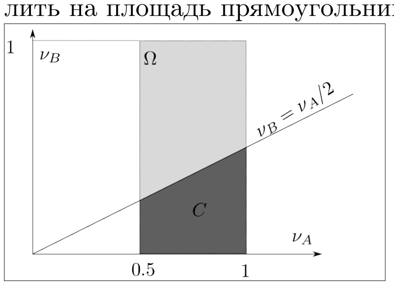
Задача 4.11. *На лист в клетку со стороной 5 см бросается монета с радиусом 2 см. Найти вероятность того, что монета пересечет одну из линий.*

Задача 4.12. *На квадратном поле площадью 1 км*^{2} *закопан кусок урана. Обнаружить уран можно, только оказавшись на расстоянии менее 100 м от него. Охотник за ураном стартует от случайной точки на одной стороне поля и пересекает поле параллельно одной из сторон, какова вероятность того, что он найдет кусок урана?*

Ответы и решения

4.2 $7/16$

4.3 $3/8$. Использовать равномерное распределение на прямоугольнике $[0.5, 1] \times [0, 1]$, посчитать площадь под прямой, разделить на площадь прямоугольника.



4.4 $7/12$

4.5 Вероятностное пространство: прямоугольник $[0, 2] \times [0, 1]$, событие A=выигрыш первого химика=$\{(x, y) : x + y < 1\} \cup \{(x, y) : x + y > 3/2\}$, $\mathrm{P}(A) = 3/4$.

4.6 $1/5$

4.7 Есть три вероятностных пространства, поясняющие “случайность” проведения хорды.

1. Фиксируем некоторое направление, и проводим хорду параллельно ему (или берем случайную точку на фиксированном диаметре и проводим хорду перпендикулярно ему). Ответ: $1/2$.

2. Фиксируем точку окружности, проводим хорду под случайным углом. Ответ: $1/3$.

3. Бросаем на круг случайным образом точку и проводим хорду так, чтобы ее центр был в этой точке. Ответ: $1/4$.

Парадокс возникает из-за того, что не определено понятие "случайная хорда". Каждый из описанных методов по сути задает вероятностное распределение на множестве хорд, однако этот объект сложнее, чем "очевидные" геометрические соображения. В нашем курсе мы будем лишь немного изучать современный подход к таким объектам, в ходе рассмотрения случайных величин и случайных векторов.

4.8 $2/\pi$.

4.9 Вероятностное пространство: прямоугольник $[0,100] \times [0,200]$, $A = \{$ выигрывает первый хоббит$\} = \{x > y\}$, $\mathrm{P}(A) = (100 * 100/2)/(100 * 200) = 1/4$, $B = \{$ выигрывает второй хоббит$\} = \{2 * x < y\}$, $\mathrm{P}(B) = 1/2$, $C = \{$ выигрывает гном$\}$, $\mathrm{P}(C) = 1 - 1/2 - 1/4 = 1/4$.

4.10 $23/32$

4.11 $24/25$

4.12 0.19. Допустим, что охотник начинает идти от западной стороны поля и движется на восток. Тогда результат зависит только от соотношения между расстояниями до охотника и до куска урана от южной (или северной) стороны поля.

5. Независимость и условные вероятности

Опр. Условной вероятностью события А при условии события В ($\mathrm{P}(B) > 0$) называется величина

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}, \mathrm{P}(B) > 0$$

Замечание 1. В случае классического вероятностного пространства имеет место соотношение

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Другими словами условная вероятность – это вероятность события A в том случае, когда за вероятностное пространство принято событие B. Исходное определение условной вероятности позволяет определять то же самое для случая произвольного пространства, вне зависимости от сложности события B и распределения вероятности. Кроме того, иногда проще построить интуитивно понятную модель больших размеров и брать в ней подмножества-события, чем пытаться строить модель уже из новых исходов.

Замечание 2. Для условной вероятности выполняются все те же интуитивно очевидные аксиомы, что и для обычной, в частности, выполнена теорема сложения вероятностей: $\mathrm{P}(A \cup B|C) = \mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(B|C) - \mathrm{P}(AB|C)$.

Замечание 3. Необходимо пояснить отличие интерпретации условной вероятности $\mathrm{P}(A|B)$ от $\mathrm{P}(AB)$: в первом случае известно, что событие B уже произошло (B – точно произошло, A – неизвестно); во втором же события A и B происходят одновременно (в одинаковой степени неизвестны).

Задача 5.1. ** Доказать утверждение в замечании 2.*

Понятие условной вероятности можно показать на следующем примере:

Задача 5.2. *Бросили игральный кубик, оказалось, что выпало нечетное число. Требуется вычислить вероятность того, что выпала 1 или 2.*

Задача 5.3. *Какова вероятность выпадения орла на первой монетке при условии выпадения хотя бы одного орла из двух монеток.*

Задача 5.4. *Есть случайный номер телефона из 5 цифр (считаем, что номер может начинаться с нуля). Найти* $\mathrm{P}\,(\{$*в номере есть цифры 1 и 2 / все цифры различные*$\})$.

Опр. Два события называются независимыми, если выполнено соотношение $\mathrm{P}\,(AB) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B)$.

Задача 5.5. *События A и B независимы. Чему равна условная вероятность A при условии B?*

На практике независимыми считаются события, которые обусловлены не связанными между собой факторами, и между которыми нет причинно-следственной связи (или по крайней мере, она никак не прослеживается статистически). Однако могут быть события, обусловленные общими причинами, но тем не менее оказывающиеся независимыми в математическом смысле. Это иллюстрирует следующая задача.

Задача 5.6. *Бросаются две игральные кости. Пусть на них выпадает K_1 и K_2 очков соответственно. Найти, какие пары из следующих событий являются независимыми: $A = \{K_1 = 3\}$, $B = \{K_2 \leq 2\}$, $C = \{K_1 + K_2 = 7\}$, $D = \{K_1 - K_2 = 1\}$.*

Опр. События $A_1, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если для любой пары i, j верно $\mathrm{P}\,(A_i A_j) = \mathrm{P}\,(A_i)\,\mathrm{P}\,(A_j)$; независимыми по трое, если для любой тройки i, j, k верно $\mathrm{P}\,(A_i A_j A_k) = \mathrm{P}\,(A_i)\,\mathrm{P}\,(A_j)\,\mathrm{P}\,(A_k)$ и т.д.

Опр. События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\}$ выполняется $\mathrm{P}\,(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \mathrm{P}\,(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}\,(A_{i_k})$.

Такие сложности в определении независимости группы событий объясняется возможностью решения следующих двух задач.

Задача 5.7. *Привести пример трех попарно независимых событий, не являющихся независимыми в совокупности.*

► Рассмотрим пример с тетраэдром: есть тетраэдр, в нем три стороны покрашены в синий, зеленый и красный цвета, а одна – во все три цвета сразу. Тогда события типа “выпала грань, на которой есть данный цвет” имеют вероятность по 1/2, в попарном пересечении дают вероятность $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$, но пересеченные все вместе дают $1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$, поэтому совместной независимости нет.

Отметим, что тот же самый пример можно построить из набора равновероятных исходов $\{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, выбрав из них события $A_1 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $A_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$ (проверьте это). ◄

Задача 5.8. *Привести пример трех независимых по трое событий, не являющихся попарно независимыми (а тем более независимыми в совокупности).*

► Две игральные кости и три события, показанные на вероятностном пространстве: A={на первой кости 1,2,5}, B={на второй кости 4,5,6}, C={сумма костей 9}. Прямым подсчетом видно, что есть независимость по трое, нет попарной.

	1	2	3	4	5	6
1	A	A			A	
2	A	A			A	
3	A	A			A	C
4	AB	AB	B	B	ABC	B
5	AB	AB	B	BC	AB	B
6	AB	AB	BC	B	AB	B

◄

Задача 5.9. *Шесть шаров случайно раскладывают по 3-м ящикам. Найти вероятность того, что во всех ящиках оказалось различное число шаров, при условии, что в первый ящик попало ровно 2 шара.*

Задача 5.10. *Из урны, в которой лежит 4 черных и 6 белых шаров достают 3 шара. Найти вероятность того, что хотя бы два шара белые, если известно, что из урны вытащен хотя бы один белый шар.*

Задача 5.11. *В партии товара из 10 единиц 3 бракованные. Контролер случайным образом выбирает товар для проверки до тех пор, пока не обнаружит брак. Найти вероятность, что он сделает всего 2 попытки.*

Задача 5.12. *Два шахматиста одинаковой силы играют 4 партии (без ничьих), победа в результате присуждается по очкам (тут возможна ничья), найти* P ({*победил первый* | *оба выиграли хотя бы раз*}).

Задача 5.13. *Трейдер Лу покупает акцию с вероятностью 0.3. Кроме того, известно, что если трейдер Чен покупает акцию, трейдер Лу покупает акцию с вероятностью 0.4, а если трейдер Лу покупает акцию, то трейдер Чен покупает акцию с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что трейдер Чен покупает акцию.*

Ответы и решения

5.2 Вероятностное пространство $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, событие $B = \{1, 3, 5\}$, событие $A = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$. $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{\Omega} = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

5.3 Пространство $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, событие $B = \{01, 10, 11\}$, $A = \{10, 11\}$ $A \cap B = \{10, 11\}$, $\mathrm{P}(A|B) = \frac{2/4}{3/4} = 2/3$. Эта задача называется “парадокс мальчика или девочки” (Boy or Girl paradox) и обычно формулируется про двух детей в семье.

5.4 Воспользуемся замечанием 2. Пусть вероятностное пространство Ω_B состоит из номеров с различными цифрами $|\Omega_B| = A_{10}^5$. Событие A_B в таком пространстве может быть представлено следующим образом $A_B = \{$есть цифры 1 и 2$\} = \overline{\{\text{номер состоит из цифр 3..9,0}\}} = \overline{C_B}$, $|C_B| = A_8^5$. т.е. $\mathrm{P}(A|B) = \frac{|A_B|}{|\Omega_B|} = 1 - \frac{A_8^5}{A_{10}^5}$.

Заметим, что тот же результат может быть получен, если посчитать количество элементарных исходов A,B и $A \cap B$ в вероятностном пространстве $\Omega = \{00000, \ldots, 99999\}$.

5.5 $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$.

5.6

K_1 K_2 ->	1	2	3	4	5	6
1	B	B				C
2	BD	B			C	
3	AB	ABD	A	AC	A	A
4	B	B	CD			
5	B	BC		D		
6	BC	B			D	

По этой таблице легко рассчитать вероятности каждого отдельного события и каждой пары событий. Независимыми оказываются пары: A и B, A и C, B и C. То, что A и B независимы,

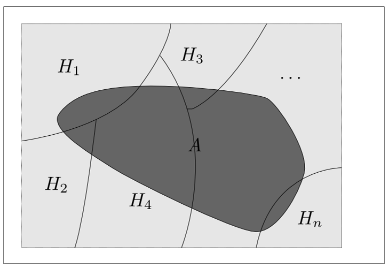
сразу понятно, поскольку они относятся к разным костям. Но событие C относится к обеим костям.
5.9 $5/8$
5.10 $20/29$
5.11 $7/30$. Используем вероятность вытащить на первом шаге не бракованный товар и условную вероятность вытащить на втором шаге бракованный товар при условии, что на первом шаге вытащен не бракованный. Здесь даже множество элементарных исходов выписывать не нужно.
5.12 $2/7$
5.13 0.45

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Формула полной вероятности.

Пусть имеется разбиение множества Ω на непересекающиеся события $H_1, \ldots, H_n$, тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$



Задача 6.1. *Доказать формулу полной вероятности.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} P(H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) =$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A \cap H_1\right) = \mathrm{P}\,(A)$$

Задача 6.2. *Лаборант забывает бросить кипелку в емкость для проведения реакции с вероятностью 0.4. Вероятность растрескивания емкости без кипелки составляет 80%, с кипелкой — 10%. Найти вероятность появления трещин.*

Задача 6.3. *Имеется прибор, состоящий из двух независимых деталей с вероятностями отказа 0.1 и 0.2. Прибор работает в течение года с вероятностью 0.99 если обе детали исправны, в случае отказа первой детали прибор работает с вероятностью 0.7, второй — с вероятностью 0.8, обоих — с вероятностью 0.1. Какова вероятность прибору проработать в течение года?*

Задача 6.4. *Имеет 4 независимых проекта, каждый заканчивается полным провалом с вероятностью 0.1. В случае полного провала одного проекта вероятность закрытия лаборатории 20%, двух — 50%, трех — 70%, четырех — 90%, найти вероятность закрытия лаборатории.*

Формула Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k)}$$

Замечание. Если формула полной вероятности – это по сути просто взвешенная сумма, то формула Байеса уже гораздо сложнее без механизма условной вероятности. Следует отметить, что (а) успех обеих этих формул связан с правильным построением разбиения (б) не следует пренебрегать вероятностным формализмом при использовании формулы полной вероятности – прямой подсчет вероятностей через события помогает в простых задачах, но вызывает путаницу в сложных.

Задача 6.5. *Доказать формулу Байеса.*

Задача 6.6. *Как показывает практика, условия на производстве вредны для здоровья с вероятностью 0.25, датчик обнаруживает это с вероятностью 0.75. Датчик не выявил вред для здоровья, найти вероятность, что он есть.*

Задача 6.7. *Имеется аналогичная ситуация в Африке. Вероятность вреда 0.90, прибор выявляет вред, если он есть с вероятностью 0.25 и если его нет — с вероятностью 0.1. Известно, что датчик обнаружил вред. Найти условную вероятность того, что условия труда нормальные.*

Задача 6.8. *Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0.2. В течение года выходит из строя 75% изделий со скрытыми дефектами и 15% без них. Найти вероятность, что дефекты были, если оно вышло из строя.*

Задача 6.9. *Производственный брак составляет 4%. Каждое изделие равновероятно попадает к одному из двух контролеров, первый обнаруживает брак с вероятностью 0.92, второй — с вероятностью 0.98. Какова вероятность, что признанное годным изделие бракованное?*

Задача 6.10. *В условиях задачи 6.2 — у вас в руках потрескавшаяся после эксперимента посуда, с какой вероятностью лаборант забыл кипелку?*

Задача 6.11. *При условиях задачи 6.3 прибор сломался, найти условную вероятность выхода из строя только первой детали.*

Задача 6.12. *Электроэнергия поступает в город через три электролинии, каждая из которых может быть отключена с вероятностью 0.1. Кроме того, в городе имеются свои источники энергии. Если отключена одна электролиния, город испытывает недостаток энергии с вероятностью 0.1, если две — с вероятностью 0.2, если три — с вероятностью 0.5. У вас в этом городе стоит сервер, нужно знать вероятность, что он будет работать.*

Задача 6.13. *Стрелок А поражает мишень с вероятность 0.6, стрелок Б — с вероятностью 0.5, стрелок В — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель, что вероятнее: попал стрелок В в цель или нет?*

Задача 6.14. *В первой урне лежат 1 белый и 3 черных шара, во второй урне 2 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую перекладывается не глядя один шар, потом из второй в первую. Вынимаем шар из первой. Какова вероятность, что он белый?*

Задача 6.15. *Три завода производят детали, первый производит 20 % от всех деталей, второй 30%, третий 50%. Доля брака на первом заводе равна 2%, на втором 3%, на третьем 5%. Берется произвольная деталь, какова вероятность, что она бракованная?*

Задача 6.16. *Три завода производят детали, первый производит 20 % от всех деталей, второй 30%, третий 50%. Доля брака на первом заводе равна 2%, на втором 3%, на третьем 5%. Берется произвольная деталь, и она оказывается не бракованной, найти вероятность, что ее изготовили на третьем заводе.*

Задача 6.17. *В продукции химического завода брак составляет в среднем 2%. Отдел технического контроля (ОТК) обнаруживает брак в 90% случаев. Изделие было пропущено ОТК как годное. Найти вероятность, что оно бракованное.*

Задача 6.18. *Вероятность попадания в цель одной крылатой ракетой составляет 0.4, по цели выпущено две ракеты. Какова вероятность того, что цель будет поражена?*

Задача 6.19. *Три стрелка одновременно стреляют по мишени, вероятности поразить мишень для них составляют 0.2, 0.3 и 0.4. Вычислить вероятность, что мишень поражена ровно двумя выстрелами.*

Ответы и решения

6.2 $\mathrm{P}(A) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.38$, $H_1 = \{\text{кипелка забыта}\}$,$H_2 = \{\text{кипелка брошена}\}$.

6.3 $\mathrm{P}(A) = 0.99 \cdot 0.9 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.9148$, $H_{00} = \{\text{обе детали работают}\}$, $H_{01} = \{\text{1-я работает, 2-я сломалась}\}$, $H_{10} = \{\text{1-я сломалась, 2-я работает}\}$, $H_{11} = \{\text{обе сломались}\}$.

6.4 $\mathrm{P}(A) = 0 \cdot C_4^0(0.9)^4 + 0.2 \cdot C_4^1(0.9)^3(0.1) + 0.5 \cdot C_4^2(0.9)^2(0.1)^2 + 0.7 \cdot C_4^3(0.9)(0.1)^3 + 0.9 \cdot C_4^3(0.9)^4 = 0.085$. $H_1 = \{\text{i проектов завершились неудачей}\}$, $i = 0..4$.

6.5

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(H_iA)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(AH_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_k)\,\mathrm{P}(H_k)} = \\ = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_k)\,\mathrm{P}(H_k)} \quad (7)$$

6.6 $H_1 = \{\text{условия вредны}\}$, $H_2 = \{\text{не вредны}\}$, $A = \{\text{датчик не сработал}\}$

$\mathrm{P}(H_1) = 0.25$, $\mathrm{P}(H_2) = 0.75$, $\mathrm{P}\left(\overline{A}|H_1\right) = 0.75$, $\mathrm{P}(A|H_1) = 0.25$, $\mathrm{P}\left(\overline{A}|H_2\right) = 0$, $\mathrm{P}(A|H_2) = 1$.

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)} = \\ = \frac{0.25 \cdot 0.25}{0.25 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.75} = \frac{0.0625}{0.8125} = 0.0769.$$

6.7 $B = \{\text{датчик сработал}\}$

$$\mathrm{P}\left(H_2|B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(B|H_2\right)\mathrm{P}\left(H_2\right)}{\mathrm{P}\left(A|H_1\right)\mathrm{P}\left(H_1\right) + \mathrm{P}\left(A|H_2\right)\mathrm{P}\left(H_2\right)} =$$
$$= \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.25 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.1} = 0.0425.$$

6.8 5/9. Использовать разбиение: были дефекты/не было дефектов.
6.9 0.00207. Есть два способа решать задачу: либо разбиение на 4 множества (брак/не брак) $\cdot$ (первый/второй контролеры), считать условную вероятность через формулу Байеса в таком виде, потом складывать, либо посчитать условные вероятности обнаружить брак спаркой контролеров и применить разбиение брак/не брак.
6.10 16/19
6.11 0.2817
6.12 0.9698
6.13 10/19. Вероятнее, что попал.
6.14 21/64
6.15 0.038
6.16 0.49
6.17 0.00204
6.18 0.64
6.19 0.264

7. Биномиальная схема.

Биномиальная схема предполагает n независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $1-p$. Это одна из наиболее простых моделей, применяемых в огромном количестве народно-хозяйственных задач: кроме простой схемы с успехами и неудачами (посевов, экспериментов, реакций, отказов приборов, банкротства) в биномиальную схему также укладываются игральные автоматы, количество страховых случаев, симметричный выбор из двух вариантов и др. В следующих задачах требуется понять, как в данном случае может быть применена биномиальная схема, после этого решение задачи не составляет труда. Рассмотрим задачу, на примере которой ясно, что из себя представляет биномиальная схема.

Задача 7.1. *Есть несимметричная монетка с вероятностью выпадения орла 0.8. Какова вероятность за 4 бросания выкинуть 2 орла? Не менее двух орлов?*

► Рассмотрим события такого вида: $A_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \xi_3 = i_3, \xi_4 = i_4\}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_4$ – обозначают выпадение орла (1) или решки (0) в 1, 2, 3 или 4-ом испытании соответственно. Ясно, что мы можем преобразовать событие следующим образом

$$\{\text{выпало 2 орла}\} = \{\xi_1 + \ldots + \xi_4 = 2\} = \bigcup_{i_1 i_2 i_3 i_4 \in \{0,1\}^4 : |i| = 2} A_{i_1 i_2 i_3 i_4}. \quad (8)$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{P}\,(\text{выпало 2 орла}) = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 \in \{0,1\}^4 : |i| = 2} P(A_{i_1 i_2 i_3 i_4}), \quad (9)$$

где $|i| = 2$ обозначает, что количество единиц в векторе $(i_1, \ldots, i_4)$ равно двум. Вероятность каждого отдельного $A_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ можно найти следующим образом:

$$\mathrm{P}\,(A_{i_1 i_2 i_3 i_4}) = \mathrm{P}\,(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \xi_3 = i_3, \xi_4 = i_4) =$$

$$= \mathrm{P}(\xi_1 = i_1)\,\mathrm{P}(\xi_2 = i_2)\,\mathrm{P}(\xi_3 = i_3)\,\mathrm{P}(\xi_4 = i_4) =$$
$$= (0.8)^{|i|} \cdot (0.2)^{4-|i|} = (0.8)^2 \cdot (0.2)^2. \quad (10)$$

Осталось посчитать количество элементов в сумме в (9), оно равно количеству последовательностей из нулей и единиц длины 4, содержащих 2 единицы. Таких последовательностей C_4^2. В результате получаем:

$$\mathrm{P}\,(\text{выпало 2 орла}) = C_4^2(0.8)^2(0.2)^2. \quad (11)$$

Рассчитаем теперь вероятность того, что выпало не менее двух орлов. Понятно, что

$$\mathrm{P}\,(\text{не менее 2 орлов}) =$$
$$= \mathrm{P}\,(\text{выпало 2 орла}) + \mathrm{P}\,(\text{выпало 3 орла}) + \mathrm{P}\,(\text{выпало 4 орла}) =$$
$$= C_4^2(0.8)^2(0.2)^2 + C_4^3(0.8)^3(0.2)^1 + C_4^4(0.8)^4(0.2)^0, \quad (12)$$

где последнее равенство можно получить аналогично первой части решения.

◀

Введем формальное определение.

Опр. Биномиальной случайной величиной (обозначается $S_n \sim Bi(n, p)$ или $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$) называется величина, равная количеству успехов в последовательности n независимых экспериментов, вероятность успеха в каждом из которых равна p.

Последовательность таких независимых испытаний часто называется схемой Бернулли, а сами испытания — *испытаниями Бернулли*. Биномиальная случайная величина равна количеству успехов в испытаниях Бернулли.

Замечание. Словосочетание "биномиальная случайная величина" следует пока воспринимать формально (на интуитивном уровне ясно, что это такое). Понятие "случайная величина" будет подробнее рассмотрено далее, в главах 10 и 11.

Бернуллиевской случайной величиной называется индикатор успеха в испытании, принимающий значение 1 (успех) с вероятностью p и 0 (неудача) с вероятностью q. Бернуллиевскую случайную величину можно рассматривать как частный случай биномиальной при $n = 1$.

Теорема Бернулли. Вероятность того, что биномиальная случайная величина равна числу k, выражается следующей формулой:

$$\mathrm{P}\,(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Задача 7.2. *Доказать теорему.*

Замечание. Без предварительных оговорок в биномиальной схеме часто используется обозначение $q = 1 - p$ – вероятность неудачи.

Задача 7.3. *Есть 10 лабораторных мышей, при облучении мышь погибает с вероятностью 0.1. Какова вероятность, что погибло 2 мыши после обработки облучением? Что погибло не более 2 мышей?*

Задача 7.4. *Вывести общую формулу для вероятности того, что биномиальная случайная величина с параметрами n и p принимает значение, не превосходящее m.*

►

$$\mathrm{P}\,(S_n \le m) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P}\,(S_n = i) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i p^i q^{n-i} \qquad (13)$$

◄

Замечание. Суммирование ведется с 0, так как может произойти и 0 успехов.

Число m, при котором биномиальные вероятности $\mathrm{P}\,(S_n = m)$ достигают своего максимального значения (при фиксированном числе испытаний n) называют обычно наиболее вероятным (наивероятнейшим) числом успехов.

Утверждение. Наивероятнейшее число успехов m^* в серии из n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании определяется неравенством $np - q \le m^* \le np + p$, причем:

1) если число $np - q$ — дробное, то существует одно наивероятнейшее число m^*;

2) если число $np - q$ — целое, то существует два наивероятнейших числа: $m^* = np - q$, $m^* = np + p$;

3) если np — целое число, то наивероятнейшее число $m^* = np$.

Рассмотрим несколько задач, где требуется увидеть биномиальную схему и применить её.

Задача 7.5. *При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10. Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков:*

а) не будет искажено;

б) содержит ровно 3 искажения;

в) содержит не более трех искажений.

Задача 7.6. *По каналу связи передаются сообщения из нулей и единиц. Из-за помех вероятность правильной передачи знака составляет 0.55. Для повышения вероятности правильной передачи каждый знак сообщения повторяют n раз. Полагают, что последовательности из n принятых знаков соответствует знак, имеющий в ней большинство. Найти вероятность правильной передачи знака, если $n = 5$.*

Задача 7.7. *Из множества $S = \{1, \ldots, N\}$ случайно и независимо выбирается два подмножества A_1 и A_2. Вероятность каждого элемента S попасть в A_i равна p. Найти вероятность того, что*

а) множества A_1 и A_2 не пересекаются;

б) содержат ровно два общих элемента.

Задача 7.8. *Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых надо выбрать один правильный. Какова вероятность, что совершенно не готовясь к тесту, студенту удастся угадать правильные ответы по крайней мере на 6 вопросов?*

Задача 7.9. *Известно, что вероятность зависания компьютера в интернет-кафе равна 10%. Какова вероятность того, что из 20 компьютеров зависнут:*

а) ровно 6 компьютеров?

б) не менее 5 компьютеров?

Задача 7.10. *Мастер и ученик играют в шахматный матч. Мастер выигрывает матч, если он выиграл все партии в матче, ученик выигрывает матч, если он выиграл хотя бы одну партию в матче. Из скольких партий должен состоять* *матч, чтобы шансы на победу у мастера и ученика были равны, если вероятность победы мастера в одной партии равна 0.9, а ученика — 0.1?*

Задача 7.11. *Испытание состоит в подбрасывании трех кубиков. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью не менее 0.95 хотя бы один раз появились «три единицы»?*

Задача 7.12. *Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0.96. Найти вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.*

Задача 7.13. *На отрезок [0,10] брошено 6 точек. Найти вероятность того, что ровно 2 из них попали на отрезок [0,3].*

Задача 7.14. *Найти наиболее вероятное количество успехов в схеме Бернулли с* 6 *испытаниями при* $p = 1/2$.

Задача 7.15. *Найти наиболее вероятное количество успехов в схеме Бернулли с* 6 *испытаниями при* $p = 1/\pi$.

Ответы и решения

7.2 Теорема может быть легко доказана аналогично задаче 7.1

7.3 Биномиальная схема: одно испытание – облучение одной мыши, "успех" — смерть мыши, "неудача" — выживание мыши. Имеем $p = 0.1$, $n = 10$.

$$\mathrm{P}\left(S_n = 2\right) = C_{10}^{2}(0.1)^2(0.9)^{10-2} \approx 0.194.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(S_n \le 2\right) = \mathrm{P}\left(S_n = 0\right) + \mathrm{P}\left(S_n = 1\right) + \mathrm{P}\left(S_n = 2\right) = \\ = C_{10}^{0}(0.1)^0(0.9)^{10} + C_{10}^{1}(0.1)^1(0.9)^9 + C_{10}^{2}(0.1)^2(0.9)^8 \approx \\ \approx 0.93. \quad (14)\end{aligned}$$

7.5 $\mathrm{Bin}(10, 9/10)$, успех – правильная передача знака, неудача – неправильная

а) $\mathrm{P}\left(\{\text{не будет искажено}\}\right) = \mathrm{P}\left(S_n = 10\right) = C_{10}^{10}(0.9)^{10} \approx 0.349$

б) $\mathrm{P}\left(\{\text{будет иметь ровно 3 искажения}\}\right) = \mathrm{P}\left(S_n = 7\right) = C_{10}^{7}(0.9)^7(0.3)^3 \approx 0.057$

в) $\mathrm{P}\left(\{\text{содержит не более 3 искажений}\}\right) = \mathrm{P}\left(S_n \ge 7\right) = C_{10}^{7}(0.9)^7(0.3)^3 + \ldots + C_{10}^{10}(0.9)^{10}(0.3)^0 \approx 0.987$

7.6 $\mathrm{Bin}(5, 0.55)$.

$$\mathrm{P}\left(\{\text{правильная передача}\}\right) = \mathrm{P}\left(S_n > n/2\right) = \mathrm{P}\left(S_n > 5/2\right) = \\ = C_5^3(0.55)^3(0.45)^2 + C_5^4(0.55)^4(0.45) + C_5^5(0.55)^5 \approx 0.592 \quad (15)$$

7.7 Биномиальная схема: для каждого элемента множества S проводится независимое испытание, которое заканчивается успехом если, либо $x \notin A_1, x \notin A_2$, либо $x \notin A_1$, $x \in A_2$, либо $x \notin A_1$, $x \notin A_2$, в противном случае $x \in A_1$, $x \in A_2$ элемент принадлежит обоим множествам, что считается неудачей. $p_1 = 1 - p^2$, $n = N$, требуемые вероятности: (а) $P(S_n = N) = p_1^N$, (б) $P(S_n = N - 1) = Np_1^{N-1}q_1$.

7.8 0.0197. Биномиальная схема: успех – правильный ответ на вопрос наобум, $p = 1/4$, $n = 10$.

7.9 а) 0.0089; б) 0.0432

7.10 7. Приравнять вероятность того, что мастер выиграет во всех партиях матча, к $1/2$. Использовать логарифмы.

7.11 646

7.12 0.4096. Используя биномиальные вероятности, можно легко получить вероятность попадания при одном выстреле, после чего рассчитать вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

7.13 0.324

7.14 3

7.15 2

8. Полиномиальная схема.

Полиномиальная схема является обобщением биномиальной схемы и описывает последовательность независимых испытаний, каждое из которых имеет $k \geq 2$ вариантов исхода. Вероятности исходов равны соответственно $p_1, \ldots, p_k$. Тогда в результате получим набор $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(k)}$, где $S_n^{(i)}$ – количество испытаний, закончившихся исходом i. Пользуясь техникой, аналогичной биномиальной схеме, можно показать, что

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(1)} = m_1, \ldots, S_n^{(k)=m_k}\right) = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_k^{m_k} = \\ = Poly_n(m_1, \ldots, m_n) p_1^{m_1} \cdot p_k^{m_k}. \quad (16)$$

Задача 8.1. *Известно, что от некоторой дозы химического вещества 60% лабораторных мышей умирают, 30% заболевают и 10% остаются здоровыми. Найти вероятность того, что среди 10 подопытных мышей после воздействия дозы 7 умрут, 2 заболеют и 1 останется здорова.*

Задача 8.2. *Известно, что в пробах наблюдается высокое содержание вещества с вероятностью 10%, среднее с вероятностью 70%, низкое с вероятностью 20%. Найти вероятность того, что в 10 независимых пробах окажется 2 пробы с высоким содержанием вещества, 5 — со средним и 3 — с низким.*

Задача 8.3. *Для проверки навыков химического анализа студентам роздано по пробирке с раствором неизвестного вещества. Известно, что каждому с вероятностью 50% выдается соль, с вероятностью 30% — кислота, и с вероятностью 20% — основание, независимо от других. Найти вероятность того, что в группе из 12 студентов пятеро получат на анализ соль, четверо — кислоту и трое — основание.*

Задача 8.4. *При проведении химического опыта студент с вероятностью 10% разбивает колбу и с вероятностью 5% — пробирку, а с вероятностью 85% все остается в целости. Найти вероятность того, что в результате 10 опытов будут разбиты 2 колбы и 1 пробирка.*

Задача 8.5. *На складе имеются колбы, пробирки и другая химическая посуда. Посетителям требуются колбы с вероятностью 50%, пробирки с вероятностью 40%, другая посуда — с* *вероятностью 10%. Найти вероятность того, что из десяти посетителей пятерым потребуются колбы, трем — пробирки и двоим — другая посуда.*

Задача 8.6. *Химический элемент содержится в веществе в виде трех стабильных изотопов A, B и C в относительных долях: A — 70%, B — 20%, C — 10%. Найти вероятность, что из 10 случайно взятых атомов элемента окажется 6 атомов A, 3 атома B и 1 атом C.*

Задача 8.7. *Два шахматиста, A и B, встречались за доской 50 раз, причем 15 раз выиграл A, 10 раз выиграл B и 25 партий закончились вничью. Найти вероятность того, что в матче из 10 партий между этими шахматистами 3 партии выиграет A, 2 партии выиграет B, а 5 партий закончатся вничью. Использовать результаты предыдущих матчей для оценки вероятностей выигрыша каждого.*

Задача 8.8. *В магазине имеются в продаже: один костюм первого роста, два костюма второго роста, три костюма третьего роста. Костюм первого роста спрашивается с вероятностью 0.2, костюм второго роста — с вероятностью 0.3, костюм третьего роста — с вероятностью 0.5. В магазин обратилось три покупателя. Найти вероятность того, что хотя бы один из них ушел без покупки.*

Задача 8.9. *Курс акции за день торгов может подняться или опуститься на 1 пункт либо остаться неизменным (все три случая равновероятны). Найти вероятность того, что за 5 дней торгов курс поднимется на 2 пункта.*

Задача 8.10. *Курс акции за день торгов может подняться на 1 пункт с вероятностью 50%, опуститься на 1 пункт с вероятностью 30% и остаться неизменным с вероятностью 20%. Найти вероятность того, что за 5 дней торгов курс: а) поднимется на 3 пункта; б) упадет на 2 пункта.*

Ответы и решения

8.1 0.091
8.2 0.034
8.3 0.08
8.4 0.058

8.5 0.05
8.6 0.079
8.7 0.085
8.8 0.131
8.9 10/81
8.10 а) 0.14375; б) 0.0612

9. Предельные теоремы.

При больших значениях n (порядка сотен и более) использование непосредственных формул для биномиальных вероятностей является затруднительным как для людей, так и для компьютеров (370! не умещается в число с плавающей точкой, например). Поэтому для приближенного расчета используют предельные теоремы в биномиальной схеме.

Теорема Пуассона. Пусть p_n — вероятность успеха в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний; $\lambda_n = np_n \to \lambda > 0$, $n \to \infty$; тогда для фиксированного числа m вероятность $\mathrm{P}(S_n = m) \to \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $n \to \infty$.

Теорема Пуассона применяется в случае, когда n велико, p близко к нулю, а произведение np невелико (например, при $n \geq 100$, $np < 20$). Тогда np принимают за λ.

Верхняя оценка точности теоремы Пуассона дается следующей формулой: для любого множества $A \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ верно неравенство

$$\left| \mathrm{P}(S_n \in A) - \sum_{m \in A} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right| \leq np^2.$$

Рассмотрим пример применения теоремы Пуассона.

Задача 9.1. *По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0.005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.*

► Биномиальную вероятность приближаем пуассоновской с параметром $\lambda = np = 1000 \cdot 0.005 = 5$.

$$\mathrm{P}(S_n \leq 3) \approx \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} \approx 0.265$$

◄

Замечание 1. На случай, если нам нужно приблизить с помощью теоремы Пуассона не $\mathrm{P}(S_n = m)$, а $\mathrm{P}(S_n \leq m)$, такие вероятности $\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ для некоторых значений λ приведены в таблице в Приложении 4.

Замечание 2. Теорему Пуассона также следует применять, если n велико, p близко к единице, а q близко у нулю, так что небольшим числом оказывается не np, а nq. В этом случае надо просто переименовать "успехи" и "неудачи", при этом от величины S_n переходим к $T_n = n - S_n$.

В случае, когда n велико, а np не мало (например, при $n \geq 100$, $np > 20$) для аппроксимации применяются теоремы Муавра-Лапласа.

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа: Для любых чисел a, b $(a < b)$ выполняется

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \quad n \to \infty$$

Рассмотрим пример применения интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Задача 9.2. *Имеется 100 мышей, каждая погибает от химического воздействия с вероятностью 0.2. Какова вероятность того, что погибнет от 10 до 30 мышей?*

► $S_n \sim \mathrm{Bin}(100, 0.2)$

$$\mathrm{P}\left(10 \leq S_n \leq 30\right) = \mathrm{P}\left(\frac{10 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{30 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} \mathrm{d}u, \quad (17)$$

где $a = \frac{10-np}{\sqrt{npq}} = \frac{10-20}{\sqrt{20 \cdot 0.8}} = \frac{-10}{4} = -2.5$, $b = \frac{30-20}{\sqrt{20 \cdot 0.8}} = \frac{10}{4} = 2.5$.

Для расчета значений интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} \mathrm{d}u$ существует несколько методов (напрямую интеграл не берется):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2} \mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2} \mathrm{d}u = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (18)$$

где $\Phi(x)$ – это так называемая функция стандартного нормального распределения, для неё существуют таблицы, и кроме того, $\Phi(x)$=НОРМСТРАСП(x) в Excel, $\Phi(x)$=NORMSDIST(x) в OpenOffice и GoogleDocs.

Аналогично можно получить значения данного интеграла, имея лишь функцию Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} \mathrm{d}u$, тогда $\Phi(x) = \Phi_0 9x) + 1/2$.

В нашем случае по таблице в Приложении 4 находим вероятность $\Phi(2.5) - \Phi(-2.5) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$. ◄

Замечание 1. Функция Φ обладает полезным свойством: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(-x)$, поэтому $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$. Так что в подобных случаях достаточно заглянуть в таблицу только один раз.

Замечание 2. В табличном представлении часто прибегают к различным ухищрениями для представления большого объема информации на листе, например, значение для $x = 1.23$ размещается в строчке, помеченной 1.2, и столбце, помеченном 0.03. При значениях аргумента, меньших или больших имеющихся в таблице Приложения 4, можно считать функцию близкой к нулю или единице соответственно, либо пользоваться более подробными таблицами в других источниках (или компьютером).

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа: Пусть $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, тогда

$$\mathrm{P}\left(S_n = m\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}. \tag{19}$$

Замечание. Все три теоремы дают аппроксимацию для истинных значений биномиальных вероятностей в форме, которую значительно проще вычислять, причем точность этой аппроксимации зависит от того, какую из теорем в данном случае уместнее применить.

Задача 9.3. *Известно, что вероятность ошибки при измерении равна 0.1. Какова вероятность того, что при случайном измерении 300 величин, произойдут ошибки*

а) ровно в 27 случаях;

б) не менее чем в 20 случаях?

Задача 9.4. *В опыте Пирсона по проверке закона больших чисел монета подбрасывалась 12000 раз, и относительная частота орлов*[1] *оказалась равной 0.5016. Вычислить вероятность того, что при повторном опыте относительная частота окажется ближе к 1/2, чем в первый раз.*

Задача 9.5. *Монету бросают 200 раз. Найти вероятность того, что выпадет орел:*

а) ровно в 105 случаях;

б) от 90 до 110 раз.

Задача 9.6. *Вероятность попадания в цель одним китайским бойцом 0.55. По гигантскому человекоподобному роботу стреляют 1000 китайских бойцов. Требуется найти вероятность, что робот будет уничтожен, если для этого необходимо не менее 500 попаданий.*

Задача 9.7. *Известно, что вероятность рождения одного мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 5000 новорожденных мальчиков будет не больше чем девочек?*

Задача 9.8. *На лекции по теории вероятностей присутствуют 200 человек. Найти вероятность того, что ровно 3 человека родились 1 апреля.*

Задача 9.9. *Игла длины 1 см бросается на разлинованную плоскость с расстоянием между полосками 1 см. Пользуясь задачей 4.8, определить, сколько раз надо бросить иглу, чтобы оценить число π с точностью 0.01 с вероятностью 95%.*

Задача 9.10. *Среди семян пшеницы 0.4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить*

а) не менее 3 семян сорняков

б) не более 6 семян сорняков?

Задача 9.11. *Процентное содержание цементита на металлографическом шлифе определяли с помощью острия, которым прикасались к шлифу случайным образом и отмечали число попаданий острия на изучаемую структуру. Каким должно было быть процентное содержание цементита для того, чтобы*

[1] Относительная частота орлов – это доля случаев, когда монета выпала орлом, от общего количества бросаний.

с вероятностью большей 0.95 при 500 наблюдениях острие более 100 раз попало на цементит?

Задача 9.12. *Книга в 500 страниц содержит 100 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3 опечаток.*

Задача 9.13. *Известно, что вероятность выпуска бракованного сверла равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в коробке*

а) не окажется бракованных сверл;

б) число бракованных сверл окажется не более 2.

Задача 9.14. *Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность найти в булке хотя бы одну изюминку была не менее 0.99?*

Задача 9.15. *Счетчик Гейгера и источник радиоактивных частиц расположены по отношению друг к другу так, что вероятность частице, вылетевшей из радиоактивного источника, быть зарегистрированной счетчиком равна 1/100. Предположим, за время наблюдения из источника вылетело 400 частиц. Какова вероятность того, что счетчик зарегистрировал от 3 до 5 частиц?*

Задача 9.16. *В бассейне 1000 литров воды. В бассейн бросают бочки с нефтью, объемом 1 л каждая. Вероятность разрушения оболочки одной бочки равна 25%. Какое количество бочек можно кинуть в бассейн, чтобы концентрация нефти в воде не превысила 10% с вероятностью 95%?*

Задача 9.17. *В условиях предыдущей задачи найти количество бочек, которые можно кинуть в бассейн, чтобы концентрация не превысила 5% с вероятностью 99%.*

Задача 9.18. *Имеется нефтяное пятно площади 5 км^2. По пятну разбрасывается 5000 гранул, каждая из них с вероятностью 0.999 нейтрализует 1000 м^2 нефтяного пятна. Какова вероятность того, что останется более 5000 м^2 загрязнения? Возможностью пересечения для зон нейтрализации пренебречь.*

Задача 9.19. *Площадь водоема 100 м^2, по водоему разбрасываются 200 капсул, каждая из которых в случае разрыва дает* *пятно размера 0.5 м^2. Какова должна быть вероятность разрыва капсулы, чтобы площадь получившегося пятна была не более 25 м^2 с вероятность 0.99?*

Задача 9.20. *Бой посуды при перевозке с завода составляет в среднем 1%. Найти вероятность того, что при перевозке 2000 единиц продукции пострадает не более 25 единиц.*

Задача 9.21. *Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность попадания в цель двумя или тремя выстрелами, если всего их произведено 5000.*

Задача 9.22. *Игральная кость бросается 6000 раз. Найти вероятность того, что количество выпадений четных чисел будет лежать между 2900 и 3050.*

Задача 9.23. *При наборе книги существует постоянная вероятность $p = 0.0001$ того, что любая буква будет набрана неправильно. После набора текст прочитывает корректор, который обнаруживает каждую опечатку с вероятностью 0.9. После корректора – автор, обнаруживающий каждую из оставшихся опечаток с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что в книге со 100 тыс. печатных знаков останется 10 опечаток.*

Задача 9.24. *Театр, вмещающий 1000 человек, имеет 2 разных входа. Около каждого их входов имеется гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли?*

- а) *Предполагается, что зрители приходят в театр по одному.*
- б) *Предполагается, что зрители приходят в театр парами.*

Задача 9.25. *Для проверки влияния нового лекарства на кровяное давление у 100 пациентов было измерено давление до и после приема лекарства. При этом оказалось, что в 35 случаях давление после приема лекарства повысилось, а в 65 случаях понизилось. Можно ли считать установленным, что это лекарство влияет на кровяное давление? Какова вероятность, что чисто случайные колебания давления вызовут не меньшее отклонение от 50?*

Задача 9.26. *Наноробот состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью 0.32. Машина не работает, если в ней неисправны более трети деталей. Найти вероятность того, что машина не будет работать.*

Задача 9.27. *Другой наноробот состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0004$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0,0002$ и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0,0001$. Машина не работает, если в ней не исправны хотя бы 5 деталей. Найти вероятность того, что машина не будет работать.*

Задача 9.28. *В среднем 80% всей клади составляют чемоданы, которые вперемешку с другими вещами хранятся на стеллажах камеры хранения. Через окно выдачи были получены все вещи с одного из стеллажей в количестве 500 мест. Найти вероятность того, что среди выданных вещей было 380-400 чемоданов.*

Задача 9.29. *Если в среднем левши составляют 1%, каковы шансы на то, что среди 200 человек*

а) окажется ровно четверо левшей;

б) найдется не менее четверых левшей.

Задача 9.30. *В некоторой местности имеются 5% больных малярией. Производится обследование 500 человек. С какой вероятностью среди обследованных окажется от 20 до 30 больных малярией?*

Задача 9.31. *Для космического корабля вероятность столкновения в течение часа полета с метеоритом, масса которого не меньше m_0, равна 0.001. Найти практически достоверную верхнюю границу числа столкновений с такими метеоритами в течение 2000 часов полета, если вероятность практической достоверности принимается в данном случае равной 0.9995.*

Ответы и решения

Здесь везде сначала кратко указана биномиальная схема и предельная теорема, которую нужно использовать для приближения в данном случае.

9.3 $\text{Bin}(100, 0.1)$. Муавра-Лапласа.
а)

$$\mathrm{P}\left(S_n = 27\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{54\pi}} e^{-\frac{(27-30)^2}{54}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{54\pi}} e^{-\frac{1}{6}} \approx 0.065 \quad (20)$$

б)

$$\mathrm{P}\left(S_n \geq 20\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20-np}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20-30}{\sqrt{27}}\right) = \\ = \Phi(1.92) = 0.9726. \quad (21)$$

9.4 $\text{Bin}(12000, 1/2)$. Муавра-Лапласа.

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.5016 - 0.5\right) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n - n\cdot\frac{1}{2}}{n}\right| < 0.0016\right) = \\ = \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < 0.0016\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \\ = \Phi\left(0.0016\frac{\sqrt{12000}}{1/2}\right) - \Phi\left(-0.0016\frac{\sqrt{12000}}{1/2}\right) = 0.274. \quad (22)$$

9.5 $\text{Bin}(200, 1/2)$. Муавра-Лапласа. а) 0.048; б) 0.9544
9.6 $\text{Bin}(1000, 0.55)$. Муавра-Лапласа. 0.9993
9.7 $\text{Bin}(5000, 0.515)$. Муавра-Лапласа.

$$\mathrm{P}\left(S_n \leq 500 - S_n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq \frac{5000}{2}\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq 2500\right) = \\ = \Phi\left(\leq \frac{2500-2575}{\sqrt{1248.875}}\right) = \Phi(-2.12) = 0.017 \quad (23)$$

9.8 $\text{Bin}(200, 1/365)$. Пуассона.

$$\mathrm{P}\left(S_n = 3\right) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{1}{3!}\left(\frac{200}{365}\right)^3 e^{-200/365} \approx 0.016$$

9.9 $\mathrm{Bin}(n, 2/\pi)$. Муавра-Лапласа. 51381.
9.10 $\mathrm{Bin}(1000, 0.004)$. Пуассона.
а) $\mathrm{P}\left(S_n \geq 3\right) = 1 - \left(1 + \lambda/1! + \lambda^2/2!\right) e^{-\lambda} \approx 0.7619$,
б) $\mathrm{P}\left(S_n \leq 6\right) = \left(1 + \lambda/1! + \lambda/2! + \ldots + \lambda^6/6!\right) \approx 0.8893$,
где $\lambda = 4$.
9.11 $\mathrm{Bin}(500, p)$. Муавра-Лапласа. 0.231.

$$\mathrm{P}\left(S_n \geq 100\right) = 0.95$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{100 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.95$$

$$1 - \Phi\left(\frac{100 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.95$$

$$\frac{100 - 500p}{\sqrt{500p(1-p)}} = -1.65,$$

где число 1.65 можно найти при помощи таблицы функции Φ в Приложении 4 или вычислительных средств.

$$(100 - 500p)^2 = 1.65^2 \cdot 500p(1-p)$$

Далее требуется решить это квадратное уравнение. Из двух корней выбираем удовлетворяющий условию $100 - 500p < 0$ (т.е. $p > 0.2$).
9.12 $\mathrm{Bin}(100, 1/500)$. Пуассона. 0.0011
9.13 $\mathrm{Bin}(100, 0.02)$
а) $\mathrm{P}\left(S_n = 0\right) \simeq e^{-\lambda} = e^{-2} = 0.1353$
б) $\mathrm{P}\left(S_n \leq 2\right) \simeq \left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!}\right) e^{-\lambda} = 0.6767$
9.14 Используя пуассоновское приближение, получаем: не менее 4.6 изюмины на булочку.
9.15 $\mathrm{Bin}(400, 1/100)$. Пуассона.

$$\mathrm{P}\left(3 \leq S_n \leq 5\right) \simeq \left(\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!}\right) e^{-\lambda} \approx 0.547,$$

где $\lambda = 40000 \cdot \frac{1}{10000} = 4$.
9.16 $\mathrm{Bin}(n, 0.25)$. Муавра-Лапласа. 347
9.17 $\mathrm{Bin}(n, 0.25)$. Муавра-Лапласа. 150

9.18 $\mathrm{Bin}(5000, 0.001)$. Пуассона. 0.384
9.19 $\mathrm{Bin}(200, p)$. Муавра-Лапласа. 0.186
9.20 $\mathrm{Bin}(2000, 0.01)$. Вообще говоря, непонятно, какая аппроксимация лучше, но Муавра-Лапласа удобнее считать. 0.8686
9.21 $\mathrm{Bin}(5000, 0.001)$. Пуассона. 0.2246.
9.22 $\mathrm{Bin}(6000, 1/2)$. Муавра-Лапласа. 0.8966
9.23 $\mathrm{Bin}(100000, 0.0001 \cdot 0.1 \cdot 0.5)$. Пуассона. 0.018
9.24 а) $\mathrm{Bin}(1000, 1/2)$. Муавра-Лапласа. 537; б) $\mathrm{Bin}(500, 1/2)$. Муавра-Лаплса. 554
9.25 $\mathrm{Bin}(100, 1/2)$. Муавра-Лапласа. Вероятность не меньшего отклонения (в ту или другую сторону) 0.0026 очень мала, влияние лекарства на кровяное давление можно считать установленным.
9.26 $\mathrm{Bin}(10000, 0.32)$. Муавра-Лапласа. 0.0022
9.27 $\mathrm{Bin}(1000, 0.0004) + \mathrm{Bin}(2000, 0.0002) + \mathrm{Bin}(7000, 0.0001) \approx \mathrm{Pois}(0.4) + \mathrm{Pois}(0.4) + \mathrm{Pois}(0.7) = \mathrm{Pois}(1.5)$. 0.0186.
9.28 $\mathrm{Bin}(500, 0.8)$. Муавра-Лапласа. 0.4875
9.29 $\mathrm{Bin}(200, 0.01)$. Пуассона. а) 0.09; б) 0.143.
9.30 $\mathrm{Bin}(500, 0.05)$. Муавра-Лапласа. 0.6826
9.31 $\mathrm{Bin}(2000, 0.001)$. Пуассона. 8. По таблице пуассоновских вероятностей из Приложения 4 при $\lambda = 2$ находим наименьшее m, для которого $\mathrm{P}(S_n \leq m)$ становится не меньше 0.9995.

10. Случайные величины I.

Замечание. Случайные величины традиционно обозначаются греческими буквами[1], чтобы отличать их от обычных величин и векторов. Правильное правописание и произношение греческих букв можно найти в Приложении 1.

Опр. Случайной величиной называется отображение ξ из Ω в $\mathbb{R}$, обладающее "хорошими" свойствами[2].

Проще говоря, случайная величина — это функция на вероятностном пространстве.

Пример случайной величины.

Представьте, что вы попали в сказочную страну, где процветают азартные игры. Вы играете с гномом в такую игру: подбрасывется кубик, если выпало 6, то гном отдает вам 100 монет, если 4 или 5, вы отдаете гному 40 монет, 2 или 3 – отдаете 20 монет, и если выпало 1, то гном отдает вам 5 монет в виде утешительного приза.

Случайная величина вашего выигрыша описывается следующим образом: вероятностное пространство $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$,

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 100, & \omega = 6 \\ -40, & \omega = 4, 5 \\ -20, & \omega = 2, 3 \\ 5, & \omega = 1 \end{cases} \tag{24}$$

Случайные величины – это удобный формализм работы со случайными объектами. Для краткости часто используется короткая запись

$$\mathrm{P}\left(\xi \in B\right) = \mathrm{P}\left(\{\omega : \xi(\omega) \in B\}\right).$$

Например, событие, заключающееся в том, что ваш выигрыш в игре с гномом из последнего примера положителен, можно записать так:

$$\{\xi > 0\} = \{\omega : \xi(\omega) > 0\} = \{1, 6\}.$$

[1] А также большими латинскими.

[2] Более подробно и теоретически строго случайные величины описаны в Приложении 2. Пока достаточно понимать, что здесь есть некоторый более глубокий теоретический бэкграунд.

Случайные величины, принимающие только конечное или счетное число значений называются *дискретными* случайными величинами.

Опр. Распределением случайной величины называется набор всех вероятностей всевозможных событий, связанных с данной случайной величиной.

Для дискретных случайных величин распределение задается таблицей (возможно, бесконечной) значений, принимаемых случайной величиной и вероятностей, с которыми эти значения принимаются. Соответственно, и распределение называется *дискретным*.

Для случайной величины из примера с гномом распределение может быть задано следующим образом:

x_i	-40	-20	5	100
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Опр. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется следующая сумма:

$$\mathrm{M}\xi = \sum_i x_i \mathrm{P}\left(\xi = x_i\right), \tag{25}$$

где x_i, $i = 1, 2, \dots$ — все возможные значения случайной величины. При этом сумма может иметь как конечное, так и бесконечное число слагаемых (ряд). В последнем случае ряд должен сходиться абсолютно.

Найдем, например, математическое ожидание выигрыша в игре с гномом. Имеем

$$\mathrm{M}\xi = (-40) \cdot \frac{1}{3} + (-20) \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 100 \cdot \frac{1}{6} = -2.5.$$

Это означает, что если вы будете играть много раз, то в среднем будете проигрывать по 2.5 монеты за каждую партию. Поэтому игра вам невыгодна, и лучше от нее отказаться.

Другим простым примером дискретной случайной величины является число очков, выпадающее при бросании игрального кубика: эта величина равновероятно принимает целые значения от 1 до 6. Далее, случайную величину, принимающую равновероятно N различных значений, для любого $N \geq 2$, можно реализовать с помощью “колеса Фортуны”, расчерченного на N

одинаковых секторов с записанными в них числами очков. Если же можно делать сектора разными, так реализуема любая случайная величина с конечным числом значений. В наше время, конечно, больше применяют компьютерное моделирование, и не с целью обеспечения азартных игр, а в серьезных научно-технических целях.

Задача 10.1. *Найти распределение и математическое ожидание случайной величины:*

а) принимающей значения 1, 2, 3 равновероятно

б) принимающей значения -1, 0, 1 равновероятно

в) квадрата последней величины.

► Обозначим через ξ_1 случайную величину из а).

x_i	1	2	3
$\mathrm{P}(\xi_1 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathrm{M}\xi_1 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad (26)$$

Теперь рассмотрим случайную величину ξ_2 из б).

x_i	-1	0	1
$\mathrm{P}(\xi_2 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathrm{M}\xi_1 = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \qquad (27)$$

Рассмотрим $\xi_3 = \xi_2^2$, из в).

x_i	0	1
$\mathrm{P}(\xi_3 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Заметим, что при возведении в квадрат для исходов $\omega : \xi_2(\omega) = 1$, и для исходов $\omega : \xi_2(\omega) = -1$ выполняется $\xi_3(\omega) = 1$, поэтому $\mathrm{P}(\xi_3 = 1) = 2/3 = 1/3 + 1/3$.

$$\mathrm{M}\xi_3 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \qquad (28)$$

◄

Опр. Дисперсией случайной величины ξ называется величина $\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$.

Замечание. Дисперсия является мерой отклонения случайной величины от своего среднего значения. Величина $\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$ рассматривается вместо величины $\mathrm{M}|\xi - \mathrm{M}\xi|$ исключительно для удобства (в противном случае пришлось бы возиться с модулями).

Средним квадратическим отклонением называется корень из дисперсии случайной величины. Среднее квадратическое отклонение является более осмысленной характеристикой для случайных величин с размерностью (массы, времени, расстояния и т.п.), поскольку имеет ту же размерность, в отличие от дисперсии (которая имеет эту размерность в квадрате).

Задача 10.2. *Найти дисперсию случайной величины, равновероятно принимающей целые значения от 1 до 5.*

►

Случайная величина ξ имеет следующее распределение.

x_i	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Прежде всего очевидно из симметрии, что математическое ожидание ξ равно 3. Впрочем, это можно посчитать и непосредственно:

$$\mathrm{M}\xi = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{(1+5)5/2}{5} = 3 \tag{29}$$

Преобразуем последовательно данную случайную величину ξ. Рассмотрим $\eta_1 = \xi - \mathrm{M}\xi = \xi - 3$

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(\eta_1 = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Далее $\eta_2 = \eta_1^2$.

x_i	4	1	0
$\mathrm{P}(\eta_2 = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Очевидно, математическое ожидание η_2 будет равно дисперсии ξ. Найдем его.

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}\eta_2 = \\ = 4 * \frac{2}{5} + 1 * \frac{2}{5} + 0 * \frac{2}{5} = \frac{8+2}{5} = 2. \tag{30}$$

◄

Свойства $\mathrm{M}\,\xi$.

1. $\mathrm{M}\,a\xi = a\,\mathrm{M}\,\xi$

2. $\mathrm{M}(\xi+\eta) = \mathrm{M}\,\xi + \mathrm{M}\,\eta$
   Кроме того, если ξ и η независимы, то
3. $\mathrm{M}\,\xi\eta = \mathrm{M}\,\xi\,\mathrm{M}\,\eta$.

Также нужно отметить, что для ускорения расчетов имеется формула:

$$\mathrm{M}\,g(\xi) = \sum_{x_i} g(x_i)\mathrm{P}\,(\xi = x_i)$$

Свойства $\mathrm{D}\,\xi$.

1. $\mathrm{D}\,(a\xi) = a^2\,\mathrm{D}\,\xi$
2. $\mathrm{D}(\xi + a) = \mathrm{D}\,\xi$
3. $\mathrm{D}\,(\xi+\eta) = \mathrm{D}\,\xi + \mathrm{D}\,\eta + 2\,\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\,\xi)(\eta - \mathrm{M}\,\eta)$
   Кроме того, в случае, если ξ и η независимы
4. $\mathrm{D}\,(\xi+\eta) = \mathrm{D}\,\xi + \mathrm{D}\,\eta$

Задача 10.3. ** Доказать свойства дисперсии 3 и 4.*

Сокращенная формула для расчета дисперсии.

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}\,\xi^2 - (\mathrm{M}\,\xi)^2. \tag{31}$$

Задача 10.4. ** Доказать формулу (31).*

▶

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi^2 - 2\xi\mathrm{M}\xi + (\mathrm{M}\xi)^2) =$$
$$\mathrm{M}\xi^2 - 2\mathrm{M}(\xi\mathrm{M}\xi) + \mathrm{M}(\mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}\xi^2 - 2\mathrm{M}\xi\mathrm{M}(\xi) + (\mathrm{M}\xi)^2 =$$
$$= \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2. \tag{32}$$

◀

Составим список основных дискретных распределений.
1. Биномиальное.
Распределение: $\mathrm{P}\,(S_n = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $0 \le m \le n$.
Обозначение: $\mathrm{Bin}(n,p)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = np$, $\mathrm{D}\xi = np(1-p)$.
Наглядный смысл: число успехов в испытаниях Бернулли.

Примеры: воздействие на группу лабораторных мышей (исход – мышь сдохла/не сдохла), проведение серии одинаковых экспериментов, мутация в последовательности ДНК (нуклеотид мутировал/нет). Биномиальная схема – это удобный прикладной формализм, см. главы 7, 9 для большего набора примеров.

2. Геометрическое.

Распределение: $\mathrm{P}(\xi = m) = (1-p)^{m-1}p$, $m \geq 1$.

Обозначение: $\mathrm{Geom}(p)$.

Характеристики: $\mathrm{M}\xi = 1/p$, $\mathrm{D}\xi = (1-p)/p^2$.

Наглядный смысл: число испытаний Бернулли до наступления первого успеха.

Примеры: число бросаний монетки до первого выпадения орла, число экспериментов до первого удачного, число проверяемых деталей до первой бракованной.

3. Пуассоновское.

Распределение: $\mathrm{P}(\xi = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m \geq 0$.

Обозначение: $\mathrm{Pois}(\lambda)$.

Характеристики: $\mathrm{M}\xi = \lambda$, $\mathrm{D}\xi = \lambda$.

Наглядный смысл: предельное распределение для биномиальной схемы при больших n и близких к нулю p (так называемый “закон редких событий”).

Примеры: число радиоактивных распадов в единицу времени, число телефонных звонков в единицу времени, число бактерий в поле зрения микроскопа, число изюминок в булке и т.п. Является хорошим примером дискретной случайной величины, принимающей бесконечное число значений. Обладает удобными вероятностными свойствами (при сложении независимых снова получается пуассоновская случайная величина).

4. Равномерное.

Распределение: $\mathrm{P}(\xi = m) = 1/(b-a+1)$, $a \leq m \leq b$, где a, b — целые.

Обозначение: $R(a : b)$.

Характеристики: $\mathrm{M}\xi = (a+b)/2$, $\mathrm{D}\xi = (b-a)(b-a+2)/12$.

Наглядный смысл: равновероятно принимаются значения от a до b.

Пример: число очков при бросании игрального кубика.

5. Полиномиальное.

Распределение: $\mathrm{P}(X_1 = m_1, \dots, X_k = m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_k^{m_k}$, $0 \le m_i \le n$, $m_1 + \cdots + m_k = n$, $k \ge 2$.

Обозначение: $\mathrm{Poly}(n; p_1, \dots, p_k)$.

Характеристики: как у биномиального для каждого X_i, $1 \le i \le k$.

Наглядный смысл: производится n экспериментов, каждый из которых может приводить к одному из k исходов (вероятности исходов $p_1, \dots, p_k$), получается вектор, состоящий из количеств исходов первого типа, второго типа, ... k-го типа.

Примеры: см. главу 8.

6. Гипергеометрическое.

Распределение: $\mathrm{P}(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $\max\{0, n-N+M\} \le m \le \min\{n, M\}$.

Обозначение: $\mathrm{HGeom}(N, M, n)$.

Характеристики: $\mathrm{M}\xi = np$, $\mathrm{D}\xi = (N-n)np(1-p)/(N-1)$, где $p = M/N$.

Наглядный смысл, пример: имеется N деталей, среди них M бракованных, выбирается n деталей, тогда ξ — число бракованных деталей в выборке. При $N \to \infty$ сходится к $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Задача 10.5. *Найти математическое ожидание и дисперсию биномиальной случайное величины с параметрами n, p.*

Задача 10.6. *Подбрасываются 10 кубиков, сумму очков возводят в квадрат, найти математическое ожидание.*

Задача 10.7. *Найти математическое ожидание и дисперсию пуассоновской случайной величины.*

Задача 10.8. *Найти математическое ожидание и дисперсию геометрической случайной величины.*

Задача 10.9. *Монетки подбрасываются случайно и раскладываются по кругу. Найти математическое ожидание количества монеток, среди соседей которых есть выпавшие орлом. (а) всего монеток 3 (б) всего монеток n.*

Задача 10.10. *Найти математическое ожидание гипергеометрической случайной величины.*

Задача 10.11. *Найти $\mathrm{M}\left(\frac{1}{p}\right)^{\xi}$, где ξ — геометрическая случайная величина с параметром p.*

Указание: математическое ожидание существует не для всех p, укажите те из них, для которых есть сходимость ряда.
В случае произвольной (не обязательно дискретной) случайной величины для описания её распределения может оказаться недостаточно таблицы, тогда используется следующий объект:
Опр Функцией распределения случайной величины ξ называется $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Функция распределения задает распределение случайной величины. Грубо говоря, можно сказать так: $F_\xi(x)$ задает вероятность попадания в луч $(-\infty, x)$, разность $F_\xi(b) - F_\xi(a)$ задает вероятность попадания в промежуток $[a, b)$, из таких промежутков можно набрать любые множества, в том числе интервалы (c, d), если рассмотреть бесконечное объединения данных множеств.

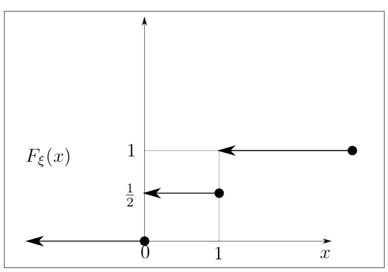
Свойства функции распределения:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $F_\xi(-\infty) = 0$
3. $F_\xi(+\infty) = 1$
4. $F_\xi(x)$ неубывает.
5. $F_\xi(x)$ непрерывна слева и имеет предел справа.

Задача 10.12. *Построить функцию распределения числа орлов при одном бросании симметричной монетки.*

►

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1/2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



◄

Задача 10.13. *Построить функцию распределения биномиальной случайной величины с параметрами 3 и 0.3.*

Задача 10.14. *Случайная величина X имеет распределение*

1	*2*	*3*	*5*	*7*
0.25	*0.25*	*0.25*	*0.125*	*0.125*

Найти распределение случайных величин $X+3$, X^2.

Задача 10.15. *Распределение случайной величины Y задано таблицей*

-2	*-1*	*0*	*1*	*2*
0.25	*0.25*	*0.25*	*0.125*	*0.125*

Найти распределение случайной величины $X = Y^2$, построить функцию распределения X, найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

Задача 10.16. *Известно, что $\mathrm{M}\xi = a$, $\mathrm{D}\,\xi = \sigma^2$, найти математическое ожидание и дисперсию для $b\xi + d$.*

Ответы и решения

10.3 Рассмотрим сначала ξ_1, η_1 такие, что $\mathrm{M}\xi_1 = 0$,$\mathrm{M}\eta_1 = 0$.

$$\mathrm{D}(\xi_1+\eta_1) = \mathrm{M}(\xi_1+\eta_1)^2 = \mathrm{M}(\xi_1^2 + 2\xi_1\eta_1 + \eta_1^2) = \\ = \mathrm{M}\xi_1^2 + 2\mathrm{M}(\xi_1\eta_1) + \mathrm{M}\eta_1^2 = \mathrm{D}\xi_1 + 2\mathrm{M}(\xi_1\eta_1) + \mathrm{D}\eta_1 \quad (33)$$

Теперь рассмотрим $\xi_1 = \xi - \mathrm{M}\xi$, $\eta_1 = \eta - \mathrm{M}\eta$. По свойству 2 $\mathrm{D}\xi_1 = \mathrm{D}(\xi - \mathrm{M}\xi) = \mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta_1 = \mathrm{D}\eta$, $\mathrm{D}(\xi_1+\eta_1) = \mathrm{D}(\xi+\eta)$. Тогда по формуле (33)

$$\mathrm{D}(\xi+\eta) = \mathrm{D}(\xi_1+\eta_1) = \mathrm{D}\xi_1 + 2\mathrm{M}(\xi_1\eta_1) + \mathrm{D}\eta_1 = \\ = \mathrm{D}\xi + 2\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta) + \mathrm{D}\eta. \quad (34)$$

Свойство 3 доказано.

В случае, если ξ, η независимы, то по свойствам математического ожидания

$$\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta) = \mathrm{M}(\xi\eta - (\mathrm{M}\xi)\eta - \xi\mathrm{M}\eta + \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta) = \\ = \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta - \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta - \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta - \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta + \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta = 0 \quad (35)$$

Свойство 4 доказано.

10.5 Заметим, что $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где ξ – независимые случайные величины, $\mathrm{P}\,(\xi_i = 1) = p$, $\mathrm{P}\,(\xi_i = 0) = 1 - p = q$. Посчитаем $\mathrm{M}\xi_i$, $\mathrm{D}\xi_i$.
$\mathrm{M}\xi_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $\mathrm{D}\xi_i = \mathrm{M}\xi_i^2 - (\mathrm{M}\xi_i)^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q - p^2 = p(1-p) = pq$.
Пользуясь свойствами аддитивности математического ожидания и дисперсии (последнее работает только в случае независимости), легко получить: $\mathrm{M}S_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{M}\xi_i = np$, $\mathrm{D}S_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}\xi_i = npq$.
10.6 $8435/12$
10.9 а) $9/4$; б) $3n/4$.
10.11 $p/(2p-1)$, $p > 1/2$.
10.13

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.343, & 0 < x \le 1 \\ 0.784, & 1 < x \le 2 \\ 0.973, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

10.14
$X + 3$:

4	5	6	8	10
0.25	0.25	0.25	0.125	0.125

X^2:

1	4	9	25	49
0.25	0.25	0.25	0.125	0.125

Обратите внимание, что при строго монотонном преобразовании дискретной случайной величины меняются только ее значения, а вероятности остаются неизменными.
10.15

0	1	4
0.25	0.375	0.375

10.16 $\mathrm{M}\xi = a + d$, $\mathrm{D}\xi = b^2\sigma^2$.

11. Случайные величины II

Опр Распределением случайной величины ξ называется набор чисел $\mathrm{P}(\xi \in B)$ для всех "хороших" множеств[1] $B \subseteq \mathbb{R}$.

Такой набор чисел для всевозможных множеств, это ужасно неудобный объект, к тому же в нем есть избыточная информация: если вы знаете $\mathrm{P}(\xi \in [0,17])$ и $\mathrm{P}(\xi \in [17,19])$, то у вас есть некие подозрения касательно того, чему равна $\mathrm{P}(\xi \in [0,19])(=\mathrm{P}(\xi \in [0,17]) + \mathrm{P}(\xi \in [17,19]))$, поэтому чтобы задать распределение достаточно задать следующий объект (определение было в предыдущем параграфе, напомним его).

Опр Функцией распределения случайной величины ξ называется $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Функция распределения может быть задана для любых случайных величин, однако следующий важный класс случайных величин интересен с точки зрения аналитической работы с ними методами математического анализа.

Опр Случайная величина называется абсолютно непрерывной если существует такая функция $f_\xi(x)$ (плотность), что $\mathrm{P}(\xi \in B) = \int_B f_\xi(t)\mathrm{d}t$. В частности, выполняется $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t)\mathrm{d}t$. Соответственно, и распределение называется абсолютно непрерывным.

Замечание 1. Для того, чтобы случайная величина ξ была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно выполнение условия

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

для некоторой функции f_ξ.

Замечание 2. Плотность – это производная функции распределения[2]. Таким образом, можно сказать, для того чтобы функция распределения была абсолютно непрерывной, достаточно непрерывности и кусочной дифференцируемости функции $F_\xi(x)$.

---

[1] Строго говоря, $B \in \mathfrak{B}(R)$ – это σ-алгебра борелевских множеств на прямой. Что это такое и как этим пользоваться, можно подробно прочитать в Приложении 2.

[2] в тех точках, где эта производная существует (в других точках она может быть определена любым удобным нам образом)

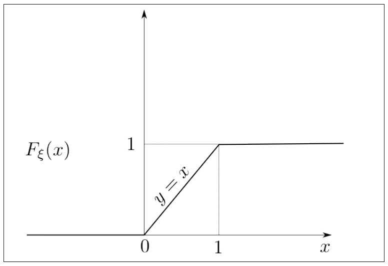
Для абсолютно непрерывных распределений имеют место следующие свойства:
1. $f_\xi(x) \geq 0$.
2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\mathrm{d}t = 1.$$
3.
$$\mathrm{P}\left(\xi \in [a, b)\right) = \mathrm{P}\left(a \leq \xi < b\right) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\mathrm{d}t.$$
4. Для любого x верно $\mathrm{P}\left(\xi = x\right) = 0$, поэтому
$$\mathrm{P}\left(a \leq \xi < b\right) = \mathrm{P}\left(a \leq \xi \leq b\right) = \mathrm{P}\left(a < \xi \leq b\right) = \mathrm{P}\left(a < \xi < b\right).$$
Назовем равномерной случайной величиной на множестве A величину ξ такую, что для любого $B \subseteq A$
$$\mathrm{P}\left(\xi \in B\right) = \frac{|B|}{|A|},$$
кроме того $\mathrm{P}\left(\xi \in \mathbb{R} \setminus A\right) = 0$. Такие случайные величины обозначаются $\xi \sim R(A)$, от слова Random.

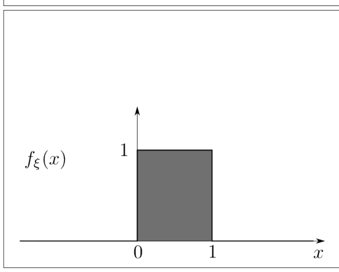
Задача 11.1. *Найти плотность равномерного распределения на отрезке* $[0, 1]$. *Построить график плотности и функции распределения. Найти вероятность попадания случайной величины на отрезок* $[0.5, 1.5]$.

▶

Пусть $\xi \sim R([0, 1])$, следовательно, как и в модели геометрической вероятности, вероятность попадания в любое $B \subseteq [0, 1]$ пропорциональна суммарной длине B: $\mathrm{P}\left(\xi \in B\right) = \frac{|B|}{|[0,1]|}$. В частности для любого $x \in (0, 1)$ выполняется
$$\mathrm{P}\left(\xi < x\right) = \mathrm{P}\left(\xi \in [0, x)\right) = \frac{|[0, x)|}{|[0, 1]|} = \frac{x}{1} = x \qquad (36)$$
т.е. функция распределения имеет вид
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad (37)$$

Продифференцируем $F(x)$, чтобы получить плотность $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$, легко видеть, что $f_\xi(x) = 1 \cdot \mathrm{I}\,(x \in [0,1])$. Заметим, что в точках $x=0$ и $x=1$ производная не существует, и мы положили там $f_\xi(x) = 1$ для удобства.





Найдем теперь вероятность попадания в $[0.5, 1.5]$.

$$\mathrm{P}\,(\xi \in [0.5, 1.5]) \;=\; F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) \;=\; 1 - 0.5 \;=\; 0.5.$$

◀

Вместо обозначения $R([a,b])$ обычно используют $R(a,b)$ для краткости.

Для расчета математического ожидания случайной величины имеют место следующие формулы, аналогичные дискретному случаю:

$$\mathrm{M}\xi = \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\mathrm{d}x, \tag{38}$$

$$\mathrm{M}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x)\mathrm{d}x, \tag{39}$$

где $g(x)$ – произвольная борелевская функция[1)] (в частности – любая кусочно-непрерывная).

Задача 11.2. *Случайная величина* $\xi \sim R(0,1)$. *Найти* $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$.

► Применим формулу (38)

$$\mathrm{M}\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot 1 \cdot \mathrm{I}\left(x \in [0,1]\right) \mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Применим формулу (31)

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \quad (41)$$

◄

Задача 11.3. *Найти*

а) функцию распределения,

б) математическое ожидание,

в) дисперсию,

г) вероятность попадания случайной величины на отрезок $[0.5, 1.5]$,

если известна плотность:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (42)$$

Задача 11.4. *Найти*

а) плотность,

б) математическое ожидание,

в) дисперсию,

---

1) См. Приложение 2.

г) вероятность попадания на отрезок $[0.5, 1.5]$
случайной величины с функцией распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{x}{2}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases} \tag{43}$$

Задача 11.5. *Случайная величина* ξ *— равномерная на* $[0, 1]$, $\eta = \xi^2$, *найти* $\mathrm{M}\eta$ *и* $\mathrm{D}\eta$.

Задача 11.6. *Для экспоненциальной случайной величины известно, что* $\mathrm{P}\,(\xi > x) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$, *и* 1 *при* $x \leq 0$. *Найти*

а) *функцию распределения,*

б) *плотность,*

в) *математическое ожидание,*

г) *дисперсию*

д) *вероятность попадания случайной величины на отрезок* $[0.5, 1.5]$.

Прежде чем переходить к тренировочным задачам, перечислим основные непрерывные распределения.

1. Равномерное.
Распределение: $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}\mathrm{I}\,(a \leq x \leq b)$.
Обозначение: $R(a, b)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = (a + b)/2$, $\mathrm{D}\xi = (b - a)^2/12$.
Наглядный смысл и применение: попадание в каждую точку отрезка равновероятно (строго говоря, вероятность попадания в любое подмножество отрезка пропорциональна его длине).

2. Экспоненциальное (показательное).
Распределение: $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{I}\,(x > 0)$, $\lambda > 0$.
Обозначение: $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = 1/\lambda$, $\mathrm{D}\xi = 1/\lambda^2$.
Наглядный смысл и применение: часто описывает величины типа времени до наступления некоторого события, например, время до радиоактивного распада атома, время безотказной работы прибора и т.п. Обладает тем свойством, что уже прошедшее время ожидания не влияет на дальнейшее время, если событие еще не произошло.

3. Гамма-распределение.
Распределение: $f_\xi(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\alpha, \lambda > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.
Обозначение: $\gamma(\alpha, \lambda)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = \alpha/\lambda$, $\mathrm{D}\xi = \alpha/\lambda^2$.
Наглядный смысл и применение: обобщение экспоненциального распределения (которое получается при $\alpha = 1$). Полезное распределение на положительной полупрямой с подстраиваемым под ситуацию параметром формы α. Получается как сумма α независимых случайных величин с распределением $\mathrm{Exp}(\lambda)$, если α целое. Может использоваться для описания времени до наступления нескольких событий последовательно.
4. Нормальное распределение.
Распределение: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.
Обозначение: $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = a$, $\mathrm{D}\xi = \sigma^2$.
Наглядный смысл и применение: очень широко используемое распределение, имеет много ценных свойств, в частности, сумма двух независимых нормальных – тоже нормальная. Подробнее см. главу 13. В химии часто используется для описания концентраций химических веществ.
5. Логнормальное распределение.
Распределение: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$.
Обозначение: $\mathcal{LN}(a, \sigma^2)$.
Характеристики: $\mathrm{M}\xi = e^{a+\sigma^2/2}$, $\mathrm{D}\xi = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.
Наглядный смысл и применение: распределение случайной величины $\xi = e^\eta$, $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Взятием логарифма сводится к нормальной величине. Произведение независимых логнормальных случайных величин также логнормально. В химии иногда используется для описания концентраций химических веществ, в биологии — для описания параметров живых существ (рост, вес и т.п.).

Задача 11.7. ** Функция распределения случайной величины равна $F_\xi(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$ при $x > 0$, найти:*

а) плотность,

б) математическое ожидание,

в) дисперсию,

г) вероятность попадания случайной величины на отрезок $[0.5, 1.5]$.

Задача 11.8. *Существует ли* $\mathrm{M}e^{\xi}$*, где* ξ *— экспоненциальная величина с параметром* λ*?*

Задача 11.9. *Найти математическое ожидание и дисперсию равномерной на* $[a, b]$ *случайной величины.*

Задача 11.10. *Непрерывная случайная величина* X *равномерно распределена на отрезке* $[-11, 20]$. *Найти вероятность* $\mathrm{P}(X < 0)$

Задача 11.11. *Пусть случайная величина* X *распределена экспоненциально с параметром* λ. *Найти* $\mathrm{P}(X < y)$.

Задача 11.12. *Пусть* $f(x) = \cos x$ *при* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *и ноль иначе. Является ли эта функция плотностью?*

Задача 11.13. *Пусть* $F(x) = \sqrt{x}$ *при* $x \in [0, 1]$, *ноль при отрицательных* x, *1 при* $x > 1$. *Является ли эта функция функцией распределения?*

Задача 11.14. *Пусть заданы независимые случайные величины* ξ_1 *и* ξ_2 *с функциями распределения* $F_1(x) = x^2$ *и* $F_2(x) = x^3$ *при* $x \in [0, 1]$. *Найти* $\mathrm{M}(\xi_1 - \xi_2)$ *и* $\mathrm{D}(\xi_1 - \xi_2)$.

Задача 11.15. *Пусть случайная величина* ξ *имеет плотность* $f(x) = e^{-2|x|}$. *Найти математическое ожидание и дисперсию.*

Задача 11.16. *Дана плотность распределения* ξ*:*

$$f_\xi(x) = B(1 - x^2)I(x^2 < 1).$$

Определить значение константы B, *вычислить* $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$.

Задача 11.17. *Пусть* ξ *— экспоненциально распределенная случайная величина с параметром* λ. *Найти* $\mathrm{M}(\mathrm{I}(\xi < 2) - \mathrm{I}(\xi > 2))$.

Задача 11.18. *Высота частиц эмульсии в жидкости имеет показательное распределение. Найти:*

а) долю частиц эмульсии ниже 120 мкм, если средняя высота 40 мкм;

б) долю частиц выше 90 мкм, если половина находится ниже 30 мкм.

Задача 11.19. *Радиоактивный распад происходит по экспоненциальному закону. Определить связь между средним временем распада μ и периодом полураспада τ (это время, за которое распадается половина атомов). Какая доля атомов распадется за 4 часа, если среднее время распада — 2 часа?*

Задача 11.20. *В химической лаборатории есть прибор со средним сроком службы* 2500 *дней. В предположении, что его распределение показательное, найти вероятность того, что он прослужит не менее* 5000 *дней.*

Задача 11.21. *Известно, что содержание вещества А составляет в среднем 2% со средним квадратическим отклонением 0,4%, а вещества Б оставляет в среднем 5% со средним квадратическим отклонением 0,3%. Найти среднее и среднее квадратическое отклонение суммарного содержания веществ А и Б.*

Задача 11.22. *Скорости молекул в газе описываются распределением Максвелла:*

$$f_\xi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad x \geq 0.$$

Найти его математическое ожидание и дисперсию.

Ответы и решения

11.3 $F(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$; $\mathrm{M}\xi = 2/3$, $\mathrm{D}\xi = 1/18$, $\mathrm{P}(\xi \in [0.5, 1.5]) = 0.75$.

11.4

а) Так как плотность есть производная от функции распределения, имеем

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

б)

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_0^1 x^2 dx + \int\limits_1^2 \frac{1}{2} x dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

в)

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \left(\frac{13}{12}\right)^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx - \left(\frac{13}{12}\right)^2 =$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^2 - \left(\frac{13}{12}\right)^2 == \frac{1}{4} - 0 + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} - \frac{169}{144} = \frac{17}{12} - \frac{169}{144} = \frac{35}{144}.$$

г) Через плотность:

$$\mathrm{P}\left(\xi \in [0.5, 1.5]\right) = \int\limits_{0.5}^{1.5} f_\xi(x)dx = \int\limits_{0.5}^{1} xdx + \int\limits_1^{1.5} \frac{1}{2}dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.5}^1 + \left.\frac{x}{2}\right|_1^{1.5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Через функцию распределения:

$$\mathrm{P}\left(\xi \in [0.5, 1.5]\right) = F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

11.5

$$\mathrm{M}\eta = \mathrm{M}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot I_{[0,1]}(x)dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{D}\,\eta = \mathrm{M}\eta^2 - (\mathrm{M}\eta)^2 = \mathrm{M}\xi^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot I_{[0,1]}(x)dx - \frac{1}{9} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^4 dx - \frac{1}{9} = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

11.6
а) $F_\xi(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot I_{[0,\infty)}(x)$.
б) Так как плотность есть производная функции распределения, имеем:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

в)

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int\limits_0^\infty x e^{-\lambda x} d(-\lambda x) =$$
$$= -\int\limits_0^\infty x de^{-\lambda x} = -\left. x e^{-\lambda x}\right|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

г)

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \int\limits_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 =$$
$$= -\int\limits_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} d(-\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2} = -\int\limits_0^\infty x^2 de^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} = -\left. x^2 e^{-\lambda x}\right|_0^\infty +$$
$$+ \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dx^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}\int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

д) $\mathrm{P}\left(\xi \in [0.5, 1.5]\right) = F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) = e^{-0.5\lambda} - e^{-1.5\lambda}$.
11.7
а) $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = xe^{-x} \cdot I_{[0,\infty)}(x)$.
б)

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx = -\int\limits_0^\infty x^2 de^{-x} = -\left. x^2 e^{-x}\right|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x} dx^2 = 2\int\limits_0^\infty xe^{-x} dx = 2.$$

в)

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \int\limits_0^\infty x^3 e^{-x} dx - 2^2 = -\int\limits_0^\infty x^3 de^{-x} - 4 =$$

$$= -\left. x^3 e^{-x}\right|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x} dx^3 - 4 = 3\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx - 4 = 6 - 4 = 2.$$

д) $\mathrm{P}\left((\xi \in [0.5, 1.5]\right) = F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) = 1.5\, e^{-0.5} - 2.5\, e^{-1.5}$.
11.8 $\mathrm{M}e^\xi$ существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int\limits_0^\infty \lambda e^{(1-\lambda)x} dx.$$

При $\lambda > 1$ интеграл сходится, при $\lambda \leqslant 1$ — расходится.
11.9

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{b-a} \cdot I_{[a,b]}(x) dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

11.10 $\dfrac{11}{31}$

11.11

$$\mathrm{P}\left((X < y\right) = F_X(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & y \geqslant 0. \end{cases}$$

11.12 Нет. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq 1$.

11.13 Да. $F(x)$ — неубывающая, непрерывная функция с $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$.
11.14 $-1/12$

11.15 $\mathrm{M}\xi = 0$, $\mathrm{D}\xi = 2$.
11.16 $1 - 2e^{-2\lambda}$.
11.17 $B = 3/4$, $\mathrm{M}\xi = 0$, $\mathrm{D}\xi = 1/5$.
11.18 а) 0.95; б) 1/8
11.19 $\tau = \mu \ln 2$. 0.864
11.20 0.135
11.21 7
11.22 $\mathrm{M}\xi = \sqrt{8/\pi}\sigma$, $\mathrm{D}\xi = (3\pi - 8)\sigma^2/\pi$.

12. Случайные величины III

Потренируемся преобразовывать непрерывные случайные величины. Наиболее простой способ преобразования – манипуляции с функцией распределения.

Задача 12.1. *Пусть* $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\eta = e^{\xi}$. *Найти* $F_\eta(x)$, $f_\eta(x)$.

▶

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\left(\eta \le x\right) = \mathrm{P}\left(e^{\xi} \le x\right) = \\ = \mathrm{P}\left(\xi \le ln(x)\right) = F_\xi(\ln x) = (1 - e^{-\lambda \ln x})\mathrm{I}\left(\ln x > 0\right) = \\ = (1 - \frac{1}{x^\lambda})\mathrm{I}\left(x > 1\right). \quad (44)$$

Продифференцируем функцию распределения, чтобы получить плотность

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}\mathrm{I}\left(x > 1\right). \quad (45)$$

◀

Задача 12.2. *Найти функцию распределения и математическое ожидание* $\xi^2 + \xi$, *где* ξ *— равномерно распределенная случайная величина на* $[0, 1]$.

Задача 12.3. *Реагента B тратится столько же, сколько реагента A, если A потрачено меньше литра и как квадрат объема A (в литрах), если больше. Известно что затраты реагента A равномерно распределены на отрезке* $[0, 2]$ *л. Найти функцию распределения и среднее значение затрат реагента B.*

Полезным аналитическим методом для преобразования непрерывных случайных величин является следующая формула плотности $\eta = g(\xi)$ (в случае, когда g строго монотонна в области возможных значений ξ):

$$f_\eta(y) = f_\xi(h(y))|h'(y)|,$$

где $h(y) = g^{-1}(y)$ — обратная функция (т.е. если $y = g(x)$, то $h(y) = x$). При этом область возможных значений η получается отображением соответствующей области ξ под действием функции g.

Задача 12.4. *Найти плотность логарифма показательной случайной величины с параметром* λ.

Задача 12.5. *Случайная величина* ξ *имеет показательное распределение с параметром* $\lambda = 2$. *Найти плотность случайной величины* η, *если:*

а) $\eta = \xi^2 - 1$;

б) $\eta = \xi^3 - 1$;

в) $\eta = 1 + 3/\xi$;

г) $\eta = e^{\xi} - 1$;

д) $\eta = \ln(\xi + 1)$.

Задача 12.6. η *— равномерно распределенная случайная величина на* $[0, 1]$, $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})I(x > 0)$, *найти распределение* $F^{-1}(\eta)$.

Задача 12.7. *Найти плотность квадрата равномерно распределенной случайной величины на отрезке* $[-1, 2]$.

Задача 12.8. ξ *— случайная величина, найти распределение* $F_{\xi}(\xi)$, *если* $F_{\xi}(\xi)$ *непрерывна и строго монотонна.*

Задача 12.9. *Пусть* ξ *имеет функцию распределения* $F(x)$. *Найти функцию распределения: а)* ξ^3; *б)* ξ^4.

Задача 12.10. *Пусть* ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ *имеют функции распределения* $F_i(x)$ *и* ξ_i *независимы. Найти функцию распределения* $\max \xi_i$.

Задача 12.11. *Пусть* ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ *имеют функции распределения* $F_i(x)$ *и* ξ_i *независимы. Найти функцию распределения* $\min \xi_i$.

Задача 12.12. *Пусть задана плотность* $f_{\xi}(x)$, *найти плотность* $f_{|\xi|}(x)$.

Задача 12.13. *Скорость реакции при увеличении температуры растет показательно. Известно, что при температуре в* 10° *реакция проходит за 16 минут, а при температуре в* 20° *– за 8 минут. Пусть температура равномерно распределена* 10° *от* 20°. *Найти:*

а) среднее время реакции

б) вероятность, что реакция пройдет не более чем за 10 мин

Задача 12.14. *Скорость реакции при* 20° *принята за единицу. При повышении температуры до* 30° *она вырастает вдвое. Пусть температура равномерно распределена* 20° *от* 30°*. Найти:*

- *а) вероятность того, что скорость реакции составит менее 1.5 единиц;*
- *б) среднюю скорость реакции;*
- *в) среднее квадратическое отклонение скорости реакции.*

Ответы и решения

12.2 $F_\eta(x) = (\sqrt{1+4x}-1)/2$, $x \in [0,2]$; $\mathrm{M}\eta = 5/6$.

12.3 Принять расход реагента А за ξ, а расход В — за η.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x}, & 1 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} \qquad \mathrm{M}\eta = 17/12$$

12.6

а)

$$f_\eta(y) = \frac{e^{-2(y+1)}}{y+1}, \quad y > -1$$

б)

$$f_\eta(y) = \frac{2e^{-2(y-1)^{1/3}}}{3(y-1)^{2/3}}, \quad y > 1$$

в)

$$f_\eta(y) = \frac{6e^{-6/(y-1)}}{(y-1)^2}, \quad y > 1$$

г) $f_\eta(y) = 2/(y+1)^3$, $y \ge 0$.

д) $f_\eta(y) = 2e^{-2(e^y-1)+y}$, $y \ge 0$.

12.5 $f_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda e^y + y}$.

12.6 $\mathrm{Exp}(\lambda)$

12.7

$$f_\xi(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0,4] \\ 1/(3\sqrt{y}), & 0 \le y \le 1 \\ 1/(6\sqrt{y}), & 1 < y \le 4 \end{cases}$$

12.8 $R(0,1)$.
12.9 а) $F(x^{1/3})$; б) $F(x^{1/4}) - F(-x^{1/4})$, $x > 0$.
12.10 $F_1(x) \dots F_n(x)$.
12.11 $1 - (1 - F_1(x)) \dots (1 - F_n(x))$.
12.12 $f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x)$, $x \geq 0$.
12.13 а) 11.54 мин; б) 0.32
12.14 а) 0.415; б) 1.14; в) 0.29

13. Нормальное распределение. ЦПТ.

Напомним определение нормального распределения, ранее введенного в главе 11, с. 80.

Опр. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (обозначается $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$), если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

При этом ее функция распределения выражается формулой

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения, ранее введенная в главе 9 (таблица значений - в Приложении 4).

Задача 13.1. *Найти* $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\,\xi$ *для* $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

► При решении этой задачи следует учесть, что интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ не берется в явном виде. Однако мы можем опираться на свойства плотности (полный интеграл от плотности всегда равна единице). Произведем вычисления.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x + a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y + a \cdot 1 = 0 + a, \quad (46) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве использована нечетность функции $y\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$, а в предпоследнем – тот факт, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ является плотностью.

Вычислим теперь дисперсию.

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi - a)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}} \mathrm{d}\frac{x-a}{2} =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} \sqrt{2}\mathrm{d}\frac{y}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}e^{-z^2} =$$

$$= \sigma^2 \left(z \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-z^2} \mathrm{d}z \right) =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y = \sigma^2, \quad (47)$$

где в последнем равенстве вновь был использован тот факт, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ — это плотность. ◀

Задача 13.2. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, *найти распределение* $\eta = \sigma\xi + a$.

Задача 13.3. $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, *найти* $\mathrm{M}(\xi - a)^3$.

Задача 13.4. $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, *найти* $\mathrm{M}\xi^3$.

Задача 13.5. $\xi \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, *найти плотность* $\eta = \xi^2$.

Задача 13.6. $\eta = (\xi - a)/\sigma$, $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, *найти распределение* η.

Задача 13.7. *Пусть ξ распределена по закону $\mathcal{N}(3,9)$. Найти вероятность того, что*

а) $2 < \xi < 6$;

б) $\xi < 4$;

в) $\xi > 2$.

Опр. Случайная величина $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ называется стандартной нормальной случайной величиной.

Стандартное нормальное распределение имеет плотность $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Внимательный читатель может заметить, что именно эта функция стоит под знаком интеграла в интегральной теореме Муавра-Лапласа. Это совпадение не случайно. Дело в том, что теорема Муавра-Лапласа на самом деле является частным случаем следующей теоремы.

Центральная Предельная Теорема (ЦПТ) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ независимые, одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathrm{D}X_1 < \infty$. Пусть $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\sqrt{n\mathrm{D}X_1}} < x\right) \to \mathrm{P}\left(\xi < x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Замечание 1. ЦПТ работает для любых независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих дисперсию. Таким образом это дает мощный аналитический метод для работы с суммами распределений, для которых можно рассчитать $\mathrm{M}X_1$, $\mathrm{D}X_1$.

Замечание 2. $\mathrm{P}\left(\xi < x\right) = F_\xi(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$

Замечание 3. ЦПТ означает, что распределение S_n при больших n можно приблизить распределением $\mathcal{N}(n\mathrm{M}x_1, n\mathrm{D}x_1)$.

Задача 13.8. *1000 раз бросается игральная кость. Найти пределы, в которых с вероятностью большей 0.99 будет лежать число выпавших очков.*

Задача 13.9. *Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0.5; в девятку — 0.3; в восьмерку — 0.1; в семерку — 0.05; в шестерку — 0.05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал: а) более 930 очков; б) более 950 очков?*

Задача 13.10. *При составлении статистического отчета надо было сложить* 10^4 *чисел, каждое из которых было округлено с точностью до* 10^{-m}. *Предполагая, что ошибки, возникшие от округления чисел, взаимно независимы и равномерно распределены на* $(-0.5 \cdot 10^{-m}, 0.5 \cdot 10^{-m})$, *найти пределы, в которых с вероятностью большей 0.997 будет лежать суммарная ошибка.*

Задача 13.11. *Мера длины фут, как видно из названия, имеет прямое отношение к ноге. Это — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения следующим способом. В воскресный день ставили рядом шестнадцать первых вышедших из церкви мужчин. Сумма длин их левых ступней делилась на шестнадцать.*

Средняя длина и была "правильным и законным футом". Известно, что размер стопы взрослого мужчины случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением 262.5 мм и средним квадратическим отклонением 12 мм. а) Найти вероятность того, что два "правильных и законных" значения фута, определенных по двум различным группам мужчин, отличаются более чем на 5 мм. б) Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью большей 0.99 средний размер их ступней отличался от 262.5 мм менее чем на 0.5 мм?

Задача 13.12. *Контролер проверяет одно за другим изделия некоторого производства. На первом этапе проверки, который длится 10 сек, он либо сразу оценивает изделие, либо принимает решение, что проверку надо повторить. Предполагается, что каждое изделие независимо от других изделий с вероятностью 1/2 подвергается повторной проверке.Повторная проверка длится 10 сек, в результате ее обязательно принимается решение о качестве продукции. Найти вероятность того, что за 7-часовой рабочий день контролер проверит: а) более 1700 изделий; б) более 1650 изделий;*

Задача 13.13. *На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью 1/3. Пусть ξ означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. Каким распределением можно приблизить распределение ξ?*

Задача 13.14. *Наноробот состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.3$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0,2$ и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0,1$. Машина не работает, если в ней неисправны более 1500 деталей. Найти вероятность того, что машина не будет работать.*

Задача 13.15. *В случае химической атаки с вероятностью 0.5 используется 1 кг реагента против первого типа веществ, с вероятностью 0.3 1 кг реагента B против второго типа веществ. Известно, что в среднем реагента A тратится 50 кг за месяц.*

а) *Сколько химических атак происходит за месяц?*

б) *Каким количеством реагента В нужно запастись, чтобы быть уверенным на 99%, что он не кончится в ходе следующего месяца?*

Задача 13.16. *Лаборант проводит 10 реакций в день, с вероятностью 40% реакция не проходит. Из тех, что прошли успешно, лаборант каждый результат с вероятностью 1/2 забирает домой, чтобы показать своим родителям-химикам, какой он молодец. Оценить сверху количество унесенных за 100 дней результатов с вероятностью 99%.*

Задача 13.17. *Известно, что содержание некоторого элемента имеет нормальное распределение и составляет в среднем* 10 *единиц, а в* 20% *случаев превосходит* 12 *единиц. Найти вероятность, с которой содержание элемента превосходит* 13 *единиц.*

Задача 13.18. *Известно, что содержание некоторого элемента имеет нормальное распределение и составляет в среднем* 15 *единиц, а в* 20% *случаев превосходит* 16 *единиц. Найти вероятность, с которой содержание элемента превосходит* 13 *единиц.*

Задача 13.19. *Концентрация химического вещества имеет логнормальное распределение с математическим ожиданием 50 единиц и среднее квадратическое отклонение 3 единицы. Найти вероятность, что она окажется от 45 до 55 единиц.*

Ответы и решения

13.2 $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

13.3 0

13.4 $3\sigma^2 a + a^3$

13.5

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-y/(2\sigma^2)}, \quad y > 0$$

13.6 $\mathcal{N}(0, 1)$

13.7 а) 0.4706; б) 0.6293; в) 0.3707

13.8 От 3446 до 3554.

13.9 а) 0.0885; б) 0.008. Сначала вычислить математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном выстреле, потом использовать ЦПТ.

13.10 $\pm 85.45 \cdot 10^{-m}$. Использовать характеристики равномерного распределения и ЦПТ, см. с. 80.
13.11 а) 0.238; б) 3834
13.12 а) 0.0735; б) 0.9868
13.13 $\mathcal{N}(300, 600)$
13.14 0.0016
13.15 а) 100; б) 40.68 кг
13.16 334
13.17 0.1038
13.18 0.9535
13.19 0.92. Использовать определение и свойства логнормального распределения (см. список распределений в главе 11, с. 80). Найти параметры a и σ^2. Логарифмированием перейти к неравенству для нормальной случайной величины с этими параметрами.

14. Суммы случайных величин. Случайные векторы.

Опр. Отображение $\vec{X}$ из Ω в $\mathbb{R}^n$ обладающее некоторыми "хорошими" свойствами[1)] называется случайным вектором.
Проще говоря, случайный вектор — это набор n случайных величин $\vec{X} = (X_1, \dots X_n)$, заданных на одном вероятностном пространстве Ω.
Опр. Функцией распределения случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ называется $F_{\vec{X}}(\vec{t}) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathrm{P}\left(X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n\right)$.
Опр. Набор случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называют независимым в совокупности, если $F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{\xi_1}(t_1) \cdots F_{\xi_n}(t_n)$.

Утверждение 1. Дискретные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности тогда и только тогда, когда $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathrm{P}\left(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\right) = \mathrm{P}\left(\xi_1 = x_1\right) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}\left(\xi_n = x_n\right)$.
Совместной плотностью случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется функция $f_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = f_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(t_1, \dots, t_n)$ такая, что выполняется

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1, \dots, t_n)\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n.$$

Утверждение 2. Абсолютно непрерывные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности тогда и только тогда, когда $f_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$.
В многомерном случае продолжают работать формулы для математического ожидания функции от случайной величины:
1) дискретный случай:

$$\mathrm{M}g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i_1 \in \mathbb{N}} \dots \sum_{i_n \in \mathbb{N}} g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \mathrm{P}\left(\xi_1 = x_{i_1}, \dots, \xi_n = x_{i_n}\right). \tag{49}$$

[1)] $\vec{X}^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ для любых $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Подробнее см. Приложение 2.

$$\mathrm{M}g(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i_1\in\mathbb{N}}\ldots\sum_{i_n\in\mathbb{N}} g(i_1,\ldots,i_n)\mathrm{P}\left(\xi_1 = i_1,\ldots,\xi_n = i_n\right)$$

2) абсолютно непрерывный случай

$$\mathrm{M}g(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\ldots,x_n)f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \tag{50}$$

Задача 14.1. *ξ, η – независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха p_1, p_2 соответственно. $\zeta = \xi\cdot\eta$. Найти* $\mathrm{M}\zeta$.

Задача 14.2. *Пусть ξ, η независимые, с распределением* $\mathrm{Exp}(\lambda)$, *найти* $\mathrm{M}\xi\eta$, *пользуясь формулой (50).*

Многомерные вектора часто используются для получения распределений сумм случайных величин. Рассмотрим на примере следующей задачи, как можно получить распределение суммы, зная распределение независимых компонент.

Задача 14.3. $\xi\sim\mathrm{Pois}(\lambda_1)$, $\eta\sim\mathrm{Pois}(\lambda_2)$, *найти распределение* $\xi+\eta$.

► Вычислим

$$\mathrm{P}\left(\xi+\eta = n\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left(\xi = k, \eta = n-k\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left(\xi = k\right)\mathrm{P}\left(\eta = m-k\right) == \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2} =$$
$$= e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} =$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n. \tag{51}$$

Очевидно, что получившееся распределение пуассоновское с параметром $\lambda_1+\lambda_2$. ◄

Утверждение 3. (Формула свертки) Пусть ξ, η – независимые, абсолютно непрерывные случайные величины, f_ξ, f_η – их плотности. Тогда плотность их суммы может быть найдена следующим образом

$$f_{\xi+\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(y-x) \mathrm{d}x$$

Доказательство формулы свертки приведено в Приложении 3.

Задача 14.4. $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$, $\eta \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *найти распределение* $\xi + \eta$.

Задача 14.5. *Случайные величины* ξ, η *независимы,* $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\eta \sim \gamma(m, \lambda)$, $m \geq 1$, *найти распределение их суммы.*

Другое применение многомерных векторов, важное, в частности, для статистики, это описание зависимостей между случайными величинами.

Опр. Ковариацией между случайными величинами ξ и η называется величина $cov(\xi, \eta) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta)$.

Опр. Корреляцией между случайными величинами ξ и η называется величина $cor(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}\sqrt{\mathrm{D}\eta}}$.

Свойства ковариации.

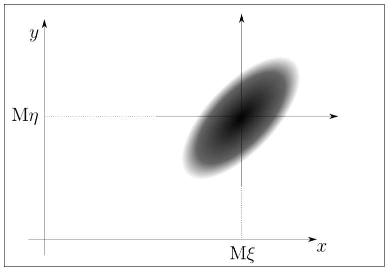
1) $cov(\xi, a) = 0$, где a – любая константа.
2) $cov(\xi + \eta, \zeta) = cov(\xi, \zeta) + cov(\eta, \zeta)$
3) $cov(C\xi, \eta) = C \cdot cov(\xi, \eta)$
4) $cov(\xi, \xi) = \mathrm{D}\xi$
5) Если ξ, η независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$.

Утверждение. (Сокращенная формула расчета ковариации) Имеет место формула $cov(\xi, \eta) = \mathrm{M}\xi\eta - \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta$.

Замечание 1. Корреляция — это по сути ковариация нормированных случайных величин $\xi' = \frac{\xi - \mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}$, $\eta' = \frac{\eta - \mathrm{M}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\eta}}$. Действительно, в силу свойств ковариации имеем:

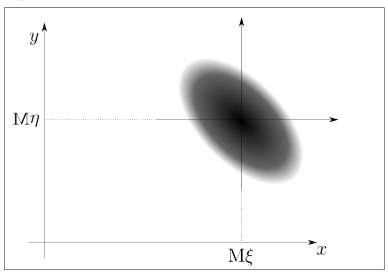
$$cov(\xi', \eta') = cov\left(\frac{\xi - \mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}, \frac{\eta - \mathrm{M}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\eta}}\right) = \\ = \frac{cov(\xi - \mathrm{M}\xi, \eta - \mathrm{M}\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}\sqrt{\mathrm{D}\eta}} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}\sqrt{\mathrm{D}\eta}}. \quad (52)$$

Замечание 2. Наглядный смысл ковариации:



$\xi'\eta'\mathrm{I}\,(\xi'\eta' \geq 0)$

Случайные величины ξ' и η' одновременно большие или одновременно маленькие.



$\xi'\eta'\mathrm{I}\,(\xi'\eta' \leq 0)$

Случайные величины ξ' и η' большие и маленькие в противофазе.

Если перевешивает первый случай, то $\mathrm{M}\xi'\eta' = cov(\xi', \eta') > 0$, если второй, то $\mathrm{M}\xi'\eta' < 0$.

Свойства корреляции.

1) $cor(\xi, \eta) \in [-1, 1]$

2) $cor(\xi, \eta) > 0 \Rightarrow \xi$, η положительно связаны (более вероятно, что одновременно $\xi > \mathrm{M}\xi$, $\eta > \mathrm{M}\eta$, либо $\xi < \mathrm{M}\xi$, $\eta < \mathrm{M}\eta$, чем $\xi > \mathrm{M}\xi$, $\eta < \mathrm{M}\eta$, либо $\xi < \mathrm{M}\xi$, $\eta > \mathrm{M}\eta$).

3) $cor(\xi, \eta) = 1 \Leftrightarrow \xi = A\eta + B$, где $A > 0$, B – константы.

4) $cor(\xi, \eta) < 0 \Rightarrow \xi, \eta$ отрицательно связаны

5) $cor(\xi, \eta) = -1 \Leftrightarrow \xi = -A\eta + B$, где $A > 0$, B константы.

Задача 14.6. *Совместное распределение величин ξ, η задано таблицей.*

η / ξ	*0*	*1*
0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{3}$

Найти $cov(\xi, \eta)$, $cor(\xi, \eta)$.

Задача 14.7. *Даны независимые случайные величины* $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0;1)$. *Найти* $cov(\xi + 2\eta, 3\xi + 5\eta)$.

Задача 14.8. *Пусть* ξ *распределена нормально с параметрами 0 и 1. Найти ковариацию величин* ξ *и* ξ^2.

Задача 14.9. $\xi \sim \mathcal{N}(a_1, 1)$, $\eta \sim \mathcal{N}(a_2, 1)$, *найти распределение* $\xi + \eta$.

Задача 14.10. $\xi \sim \mathcal{N}(a_1; \sigma_1^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ *найти распределение* $\xi + \eta$.

Задача 14.11. $\xi \sim \mathrm{Bin}(p, n_1)$, $\eta \sim \mathrm{Bin}(p, n_2)$, *найти распределение* $\xi + \eta$.

Задача 14.12. $\xi \sim R(0, 1)$, $\eta \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *найти плотность распределения* $\xi + \eta$.

Задача 14.13. *Пусть* ξ_1 *распределена равномерно на* $[0; 1]$, ξ_2 *распределена равномерно на* $[0; 1]$. *Найти плотность распределения* $\xi_1 + \xi_2$.

Задача 14.14. *Пусть* ξ_1 *распределена равномерно на* $[3; 4]$, ξ_2 *распределена равномерно на* $[0; 1]$. *Найти плотность распределения* $\xi_1 + \xi_2$.

Задача 14.15. *Пусть* ξ_1 *распределена равномерно на* $[0; 2]$, ξ_2 *распределена равномерно на* $[0; 1]$. *Найти плотность распределения* $\xi_1 + \xi_2$.

Задача 14.16. *Пусть заданы независимые случайные величины* ξ_1 *и* ξ_2 *с функциями распределения* $F_1(x) = x^2$ *и* $F_2(x) = x^3$ *при* $x \in [0, 1]$. *Найти плотность их суммы.*

Задача 14.17. *В химической лаборатории есть основной и запасной прибор со средним сроком службы 2000 дней и средним квадратическим отклонением 500 дней. В случае отказа основного пользуются дополнительным. В предположении, что их распределение нормальное, найти вероятность того, что этих приборов хватит на использование в течение 5000 дней.*

Задача 14.18. *Радиоактивный распад происходит по экспоненциальному закону. Изотоп A превращается в изотоп B в среднем за 1 час, изотоп B в изотоп C — за 2 часа. Найти долю изотопа A, которая превратится в C за 4 часа.*

Задача 14.19. *Изотоп A превращается в изотоп B в среднем за 2 час, изотоп B в изотоп C — за 3 часа. Найти долю изотопа A, которая превратится в C за 6 часов.*

Задача 14.20. *Работа состоит из двух частей, которые выполняются независимо и последовательно. Время выполнения первой части работы распределено равномерно от 1 до 3 часов, второй - от 2 до 4 часов. Найти вероятность того, что работа будет выполнена за 5 часов.*

Ответы и решения

14.1 $p_1 p_2$

14.2 $1/\lambda^2$

14.4

$$f_{\xi+\eta}(x) = \lambda_1\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad x \geq 0$$

14.5 $\gamma(m+1, \lambda)$

14.6 $cov(\xi, \eta) = 1/3$, $cor(\xi, \eta) = \sqrt{2}/3$

14.7 13

14.8. 0

14.9 $\mathcal{N}(a_1 + a_2, 2)$

14.10 $\mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

14.11 $\mathrm{Bin}(p, n_1 + n_2)$

14.12

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & 0 < x < 1 \\ (e-1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

14.13

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

14.14

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [3,5] \\ x - 3, & 3 < x < 4 \\ 5 - x, & 4 < x < 5 \end{cases}$$

14.15

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,3] \\ x/2, & 0 < x < 1 \\ 1/2, & 1 < x < 2 \\ (3-x)/2, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

14.16

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ x^4/2, & 0 < x < 1 \\ (4x(1-(1-x)^3) - 3(1-(1-x)^4)/2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

14.17 0.0793
14.18 0.748
14.19 0.694
14.20 $1/2$

15. Приложение 1. Греческий алфавит

Далее приведено правописание греческих букв, их название и примечание касательно их употребления в вероятностном курсе. Стрелками показаны направления движения ручки при письме.

	α	альфа	чаще используется для обозначения чисел
	β	бета	чаще числа
	γ	гамма	чаще числа
	δ	дельта	чаще числа
	ϵ	эпсилон	чаще числа
	ζ	дзета	чаще случайные величины
	η	эта	чаще случайные величины
	θ	тета	чаще числа
	ι	йота	редко используется – похожа на i
	κ	каппа	редко используется
	λ	лямбда	чаще числа

μ	мю	чаще числа
ν	ню	чаще числа
ξ	кси	чаще случайные величины
o	омикрон	редко используется – похожа на о
π	пи	редко используется из-за одноименной константы
ρ	ро	чаще числа
σ	сигма	обычно среднее квадратическое отклонение
τ	тау	используется редко, часто для обозначения случайных моментов
υ	ипсилон	редко используется – плохо отличима от ню
ϕ	фи	чаще числа
χ	хи	чаще числа
ψ	пси	чаще числа
ω	омега	обычно обозначает элементарный исход

16. Приложение 2. Краткий теоретический обзор.

Для получения начальных знаний о вероятностной парадигме, см. главу 3 (Классическое определение вероятности).
Когда множества становятся более 5 элементов, восприятие их систем подмножеств становится неудобно для человека. Когда больше 100 – неудобно для компьютера. Для счетных множеств обработка компьютером невозможна. Для континуальных – множество подмножеств плохо описывается элементарной математикой, возникают парадоксы, разрешаемые только при определенных ухищрениях современной теории множеств.
Таким образом, в случае более или менее общего множества элементарных исходов требуется формально определять систему подмножеств. Нужны типы таких систем. Первый тип таких систем подмножеств, это алгебра.
Опр. Алгеброй $\mathfrak{A}$ называется система подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$,
2. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$,
3. $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow C = A \cap B \in \mathfrak{A}$.

Если мы хотим работать с бесконечными наборами событий (например, монетка подбрасывается до появления первого орла), то кроме обычных операций нужно "прописать" еще бесконечные объединения и пересечения. Система, удовлетворяющая этому условию, называется σ-алгебра.
Опр. σ-алгеброй $\mathfrak{F}$ называется система подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1. $\mathfrak{F}$ – алгебра, (т.е. $\Omega \in \mathfrak{F}$,$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \overline{A} =\in \mathfrak{F}$, $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$.)
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B \in \mathfrak{F}$.

Замечание 1. Система может быть алгеброй, но не быть σ-алгеброй. Пример – набор всех ограниченных подмножеств.
Замечание 2. Слово "вероятность" в отношении произвольных систем множеств до сих пор произнесено не было. Дело в том, что главная штука в теории вероятностей — это не собственно вероятность, а событие (т.е. подмножество Ω), вероятность

которого нужно рассчитать.

Замечание 3. Множество всех подмножеств является σ-алгеброй. Не смотря на то, что это было бы логично, в сложных ситуациях его стараются не использовать, т.к. возникают сложности в теории меры.

Опр. Вероятностным распределением называется такая функция от подмножеств, что для любых подмножеств A, B выполняется $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$; $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

Замечание. Если вдуматься, то вообще-то не очевидно (а) что набор таких чисел для каждого B вообще существует (б) если существовало распределение на системе $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$, то обязано существовать распределение на $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, совпадающее на $\mathfrak{A}$ с исходным (Пример: $\mathfrak{A}$ – все подмножества целых чисел, $\mathfrak{B}$ – все подмножества действительных чисел)

Теорема Каратеодори. Если распределение задано на системе множеств $\mathfrak{A}$ (обладающим некоторыми техническими свойствами), тогда это распределение может быть однозначно продолжено на минимальную σ-алгебру, объемлющую систему $\mathfrak{A}$. Данная теорема дает множество важных следствий, в частности, следующее.

Следствие 1. Если есть распределение на системе множеств $\{(-\infty, t), t \in \mathbb{R}\}$, то оно однозначно определяет распределение на системе множеств $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, где $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma((-\infty, t), t \in \mathbb{R})$. Система $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ называется *борелевской σ-алгеброй*, а входящие в нее множества *борелевскими*.

Опр. Борелевской функцией называется функция, у которой прообраз любого борелевского множества тоже борелевское множество.

К борелевским функциям относятся, в частности, кусочно-непрерывные функции, и этого достаточно для практического применения.

Следствие 2. Если $\mathrm{P}([a, b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ задает меру на системе всех отрезков $[a, b]$, то она может быть продолжена на систему $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{P}(B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x$.

Приведем еще пару высоконаучных утверждений:

Утверждение 1. Имеет место единственность σ-алгебры, порожденной данной системой.

Утверждение 2. Имеют место несколько эквивалентных определений борелевской σ-алгебры: $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(G, G - \text{открытое}) = \sigma(F, F - \text{замкнутое}) = \sigma((-\infty, t), t \in \mathbb{R}) = \sigma([a, b], a, b \in \mathbb{R})$

Случайные величины.

Мотивация: хотим работать со случайными величинами (например, с концентрацией вещества, которая известна только с некоторой случайной погрешностью) как с обычными величинами – складывать, умножать, решать уравнения, и при этом следить за тем, как преобразуются случайная компонента этой величины.

Механизм работы случайной величины "на пальцах" удобно описывается на примере с гномом из главы 10 (Случайные величины I).

В более сложной ситуации требуется более строгое определение случайной величины.

Опр. Случайная величина – это отображение ξ из Ω в $\mathbb{R}$, такое, что полный прообраз любого множества $(-\infty, t)$ лежит в σ-алгебре $\mathfrak{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ (т.е. множество $\{\omega : \xi(\omega) \in (-\infty, t) \subseteq \mathfrak{F}\}$).

Опр. Функцией распределения случайной ξ называется $F_\xi(x) = \mathrm{P}\,(\xi < x)$.

Замечание 1. Функция распределения определена на $(-\infty, +\infty)$ и принимает значения в $[0, 1]$.

Замечание 2. По теореме Каратеодори $F_\xi(x)(= \mathrm{P}\,(\xi \in (-\infty, x)))$ задает распределение на всей борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Два важных частных случая распределений случайных величин.

1) Дискретные величины – существует не более чем счетное множество возможных значений A (пример $A = \mathbb{N}$), тогда $\mathrm{P}\,(\xi \in B) = \sum_{x_i \in AB} \mathrm{P}\,(\xi = x_i)$.

2) Абсолютно непрерывные величины – существует такая функция $f_\xi(t)$, что $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\mathrm{d}t$.

Для этих величин может быть легко рассчитано математическое ожидание:

(1) $\mathrm{M}\xi = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{P}\,(\xi = x_i)$, если ξ – дискретно;

(2) $\mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\mathrm{d}x$, если ξ абсолютно непрерывна и имеет плотность $f_\xi(x)$.

Замечание 1. Данные формулы полностью аналогичны, следует помнить, что определенный интеграл – это просто континуальная сумма и был в свое время изобретен именно для удобства расчета таких бесконечных сумм, а вовсе не для издевательства над студентами.
Замечание 2. В формуле (1) N может равняться бесконечности (пример – математическое ожидание пуассоновского распределения), в этом случае суммируется числовой ряд (он должен сходиться абсолютно).
Замечание 3. Общее определение математического ожидания для произвольной случайной величины достаточно сложно и базируется на понятии интеграла Лебега, однако рассмотрение двух указанных частных случаев дает все необходимое многообразие прикладных моделей.
Опр. Для дискретного вероятностного пространства $\mathrm{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathrm{P}\left(\{\omega\}\right)$.
Утверждение. Для дискретных вероятностных пространств данное определение эквивалентно формуле (1)
► Покажем равенство величин в правых частях данных формул:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{P}\left(\xi = x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathrm{P}\left(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i} \mathrm{P}\left(\omega\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i} x_i \mathrm{P}\left(\omega\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i} \xi(\omega)\mathrm{P}\left(\omega\right) = \sum_{\Omega} \xi(\omega)\mathrm{P}\left(\omega\right), \quad (53)$$

где в последнем равенстве был использован тот факт, что события $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i)\}$ образуют разбиение Ω на непересекающиеся подмножества. ◄

Замечание. Для пространств с несчетным числом элементарных исходов показать аналогичные утверждения технически сложнее, так как вместо сумм требуется использовать интеграл,

причем возможностей интеграла Римана не хватает для описания всех возможных ситуаций и требуется интеграл Лебега. Данные конструкции выходят за границы нашего курса, читатель может посмотреть, как это работает, например, в классическом учебнике “Вероятность” А.Н. Ширяева.
Аналогично в дискретном случае легко вывести формулу

$$\mathrm{M}g(\xi) = \sum g(x_i)\mathrm{P}\left(\xi = x_i\right)$$

Для абсолютно непрерывных величин имеет место аналогичная формула

$$\mathrm{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\mathrm{d}x.$$

Свойства математического ожидания приведены в главе 10, с. 69 .
Опр. Дисперсией случайной величины ξ называется величина $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$.
Дисперсия характеризует отклонение случайной величины от своего среднего значения (математического ожидания).
Свойства дисперсии приведены в главе 10, с. 70.
Примеры вычисления математического ожидания и дисперсии дискретных распределений можно найти в главе 10, непрерывных — в главе 11.
Основные дискретные распределения с их характеристиками приведены в главе 10, с. 70, непрерывные — в главе 11, с. 80.

Независимые случайные величины.
Опр. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если независимы события $\{\xi \in A\}$, $\{\eta \in B\}$ для любых $A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
Опр. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми в совокупности, если выполняется $\mathrm{P}\left(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\right) = \mathrm{P}\left(\xi_1 \in B_1\right) \cdots \mathrm{P}\left(\xi_n \in B_n\right)$, для любых $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
Утверждение 1. (Эквивалентные определения независимости случайных величин)
1) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности;
2) $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n)$;

3) $f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1,\dots,t_n) = f_{\xi_1}(t_1)\cdots f_{\xi_n}(t_n)$, если $\xi_1,\dots,\xi_n$ абсолютно непрерывны;
4) $\sigma(\xi_1),\dots,\sigma(\xi_n)$ независимы как системы множеств.

Утверждение 2. (Сохранение независимости при борелевских преобразованиях) Если ξ, η независимы, f, g – борелевские функции, то $f(\xi)$, $g(\xi)$ тоже независимы.

Сходимость случайных величин.

Продолжая аналогию между случайными величинами и обычными числами, хотелось бы иметь возможность не только складывать и умножать эти величины, но и переходить к пределу.

Небольшое осложнение заключается в том, что есть несколько возможных видов сходимости для случайных величин. Приведем два наиболее существенных для данного курса вида сходимости.

Опр. Последовательность случайных величин ξ_n называется сходящейся по вероятности к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$, при $n \to \infty$.

Опр. Последовательность случайных величин ξ_n называется сходящейся по распределению к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$), если для любого x такого, что $\mathrm{P}\left(\xi = x\right) = 0$ выполняется $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$.

Замечание. Определение сходимости по распределению немного сложно технически, однако оно имет вполне простой эмпирический смысл: распределение случайной величины ξ_n становится все больше и больше похожим на распределение случайной величины ξ. В примерах 3 и 4 будет пояснено, чем это отличается от сходимости по вероятности и зачем нужно такое сложное определение.

В примерах 1, 2, 3 вероятностным пространством является $\Omega = [0,1]$ с вероятностной мерой $\mathrm{P}\left(A\right) = |A|$.

Пример 1. (последовательность, сходящаяся по вероятности)
$\xi_n(\omega) = (-1/n)\mathrm{I}\left(\omega \in [0,1/3]\right) + 0 \cdot \mathrm{I}\left(\omega \in (1/3,2/3)\right) + (1/n)\mathrm{I}\left(\omega \in [2/3,1]\right)$
$\xi(\omega) = 0$

ξ_n	$-1/n$	0	$1/n$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ξ	0
	1

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, действительно, $\mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = \frac{2}{3}\mathrm{I}\left(\varepsilon \le \frac{1}{n}\right) \to 0$, при $n \to \infty$.

Пример 2. (последовательность, сходящаяся по вероятности)
$\xi_n(\omega) = (-1)\mathrm{I}\left(\omega \in [0, 1/2n]\right) + 0 \cdot \mathrm{I}\left(\omega \in (1/2n, 1 - 1/2n)\right) + (1/n)\mathrm{I}\left(\omega \in [1 - 1/2n, 1]\right)$;
$\xi(\omega) = 0$.

ξ_n	-1	0	1
	$\frac{1}{2n}$	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

ξ	0
	1

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, действительно, для $\varepsilon \ge 1$ все очевидно, пусть $\varepsilon < 1$, тогда $\mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\xi_n = -1\right) + \mathrm{P}\left(\xi_n = 1\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$.

Пример 3. (последовательность, сходящаяся по распределению, но не сходящаяся по вероятности)
$\xi_n(\omega) = (-1)^n \mathrm{I}\left(\omega \in [0, 1/2]\right) + (-1)^{n+1}\mathrm{I}\left(\omega \in (1/2, 1]\right)$;
$\xi(\omega) = -1 \cdot \mathrm{I}\left(\omega \in [0, 1/2]\right) + 1 \cdot \mathrm{I}\left(\omega \in (1/2, 1]\right)$.

ξ_n	-1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ξ	-1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ξ_n не сходится к ξ по вероятности, действительно, для $\varepsilon = 1$ и четных n получаем

$$\mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\xi_n \ne \xi\right) = 1;$$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, действительно, их распределения совпадают.

Замечание. Из примера видно, что основную роль в сходимости по распределению играют именно распределения, а не собственно случайные величины. В частности, очевидная зависимость между случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ оказалась несущественной для сходимости по распределению.

Пример 4. (последовательность, сходящаяся по распределению)

ξ_n	$17 + 1/n$
	1

ξ	17
	1

$F_{\xi_n}(x) = 1 \cdot \mathrm{I}\left(x > 17 + 1/n\right)$, $F_\xi(x) = 1 \cdot \mathrm{I}\left(x > 17\right)$

$\xi_n \overset{d}{\to} \xi$, действительно, для любого x: $\mathrm{P}\left(\xi = x\right) = 0$, т.е. для $x \neq 17$, $F_{\xi_n}(x) = 1 \cdot \mathrm{I}\left(x \geq 17 + 1/n\right) \to F_\xi(x) = 1 \cdot \mathrm{I}\left(x \geq 17\right)$.

Заметим, что для $x = 17$ верно $F_{\xi_n}(x) = 0$ для любого n, тогда как $F_\xi(x) = 1$, тем не менее сходимость по распределению этой последовательности имеет место.

Следующие утверждения описывают свойства сходимостей более подробно.

Утверждение 1. $\xi_n \overset{P}{\to} \xi \Rightarrow \xi_n \overset{d}{\to} \xi$.

▶

$$\begin{aligned} F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x) = \mathrm{P}\left(\xi_n < x\right) - \mathrm{P}\left(\xi < x\right) = \\ = \mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon, \xi_n < x\right) + \mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon, \xi_n < x\right) - \mathrm{P}\left(\xi < x\right) \leq \\ \leq \mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(\xi < x + \varepsilon\right) - \mathrm{P}\left(\xi < x\right) = \\ = \mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(\xi \in [x, x + \varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Для x такого, что $\mathrm{P}\left(\xi = x\right) = 0$ и произвольного $\delta > 0$ всегда можно найти $\varepsilon > 0$ столь маленькое, что $\mathrm{P}\left(\xi \in [x, x + \varepsilon)\right) \leq \frac{\delta}{2}$, после чего из сходимости по вероятности для этого ε получаем $\mathrm{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) < \frac{\delta}{2}$ для достаточно больших n. Другими словами, показано, что для любого δ существует такое n_0, что для любого $n < n_0$ $F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x) < \delta$. Строго говоря, чтобы утверждать, что $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$, нужно написать еще одно аналогичное неравенство, но оно абсолютно аналогично и неинтересно. Читатель может тем не менее его выполнить в виде упражнения. ◀

Утверждение 2. $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{P}{\to} \eta \Rightarrow$

1) $\xi_n + \eta_n \overset{P}{\to} \xi + \eta$;

2) $\xi_n \cdot \eta_n \overset{P}{\to} \xi \cdot \eta$;

3) в частности, $c\xi_n \overset{P}{\to} c\xi$, $c + \xi_n \overset{P}{\to} c + \xi$.

Доказательство также является отличным упражнением на умение пользоваться формализмом вероятностных событий.

Следует заметить, что

$$\{|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta| > \varepsilon\} \Rightarrow \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2\} \cup \{|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2\}$$

Доказательства следующих утверждений немного сложны в рамках этого курса, поэтому мы их не приводим, но тем не менее желающие могут попытаться освоить их, используя открытые источники и учебник.

Утверждение 3. $\xi_n \overset{P}{\to} \Leftrightarrow \xi_n \overset{d}{\to} c$, где $c \in \mathbb{R}$, ξ, ξ_n – случайные величины.

Утверждение 4. $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{d}{\to} \eta \Rightarrow$

1) $\xi_n + \eta_n \overset{d}{\to} \xi + \eta$

2) $\xi_n \cdot \eta_n \overset{d}{\to} \xi \cdot \eta$

Следующие три утверждения являются полезными и дают возможность удобной проверки сходимости по вероятности.

Теорема 1. (Неравенство Маркова)

Пусть случайная величина $\xi \geq 0$. Тогда $\mathrm{P}(\xi > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon}$.

►

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\xi = \mathrm{MI}(\xi > \varepsilon) + \mathrm{M}\xi\mathrm{I}(\xi \leq \varepsilon) \geq \\ \mathrm{M}\xi\mathrm{I}(\xi > \varepsilon) \geq \mathrm{M}\varepsilon\mathrm{I}(\xi > \varepsilon) = \\ = \varepsilon\mathrm{MI}(\xi > \varepsilon) = \varepsilon\mathrm{P}(\xi > \varepsilon).\end{aligned} \quad (55)$$

Другими словами

$$\frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon} \geq \mathrm{P}(\xi > \varepsilon),$$

что и требовалось доказать. ◄

Теорема 2. (Неравенство Чебышёва)

Для произвольной случайной величины выполняется $\mathrm{P}(|\xi - \mathrm{M}\xi| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

► Рассмотрим случайную величину $\eta = (\xi - \mathrm{M}\xi)^2$ и применим для неё неравенство Маркова.

$$\mathrm{P}(|\xi - \mathrm{M}\xi| > \varepsilon) = \mathrm{P}\left((\xi - \mathrm{M}\xi)^2 > \varepsilon^2\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\eta > \varepsilon^2\right) \le \frac{\mathrm{M}\eta}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}.\triangle \quad (56)$$

◄

Теорема 3. Для того чтобы последовательность случайных величин ξ_n сходилась по вероятности к нулю, достаточно, чтобы выполнялись условия: $\mathrm{M}\xi_n = 0$, $\mathrm{D}\xi_n \to 0$, при $n \to \infty$.

►

$$\mathrm{P}\left(|\xi_n| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(|\xi_n - \mathrm{M}\xi_n| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{D}\xi_n}{\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

◄

Предельные теоремы.

Следующие два утверждения являются полезными с прикладной точки зрения.

Теорема 1. (Закон больших чисел)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание. Тогда имеет место сходимость случайных величин:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mathrm{M}X_1.$$

Замечание 1. Закон больших чисел утверждает достаточно нетривиальное утверждение – если взять сумму случайных объектов и поделить её на количество этих объектов, то результат будет близок к неслучайному при достаточно больших n. Конечно для этого требуются дополнительные условия такие, как независимость, одинаковая распределенность и наличие конечного момента (среднего). Более нетривиальными с точки зрения природы случайного является следующее утверждение, в котором внимательный читатель легко обнаружить просто следующий уровень точности после ЗБЧ.

Теорема 2. (Центральная Предельная Теорема)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Пусть также $S_n =$

$X_1 + \ldots + X_n$. Тогда имеет место сходимость

$$\frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \xi, \quad \text{где } \xi \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{D}X_1)$$

Замечание 2. ЦПТ является одним из важнейших фактов теории вероятностей. Дело в том, что в теореме 2 утверждается, что, рассмотрев сумму величин неизвестной природы, мы при помощи необходимых нормировок можем получить случайную величину известной природы ($\mathcal{N}(0, \mathrm{D}X_1)$). Это дает нам широкие возможности по аналитической работе с суммами случайных величин, а также подсказывает нам, что нормальное распределение, вероятно, встречается в природе достаточно часто – везде, где можно предполагать работу суммы независимых однородных агентов (факторов).

Замечание 3. ЗБЧ и ЦПТ имеют множество различных формулировок, это связано с балансом между мощностью условий и сложностью доказательств. Кроме того, нужно отметить, что условия независимости и одинаковой распределенности не являются абсолютно необходимыми и могут быть ослаблены, т.е. ЦПТ и ЗБЧ продолжают работать и в “шумных”, далеких от математической прозрачности условиях.

По большому счету, предельные теоремы Муавра-Лапласа являются следствием из ЦПТ для бернуллиевских X_i. Кроме того, существуют другие виды предельных теорем, в частности, теорема Пуассона для серий биномиальных величин.

Многомерные распределения.

С точки зрения анализа закономерностей вида связи между двумя наблюдаемыми параметрами, важным понятием являются зависимые случайные величины. Для исследования таких величин используется понятие случайного вектора.

Опр. Случайным вектором называется отображение $\vec{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ из Ω в $\mathbb{R}^n$, обладающее техническим свойством измеримости: $\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$, $\forall\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma((-\infty, a))$, $a \in \mathbb{R}^n$,$(-\infty, a) = (-\infty, a_1) \times \cdots \times (-\infty, a_n)$.

Приведем примеры случайных векторов с зависимыми и независимыми компонентами.

Пример 1. (Случайный вектор с зависимыми компонентами)

$\xi_2 \quad \xi_1$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

т.е.

$$\mathrm{P}\left((\xi_1,\xi_2)=(0,0)\right)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}\left((\xi_1,\xi_2)=(0,1)\right)=\frac{2}{6}$$

$$\mathrm{P}\left((\xi_1,\xi_2)=(1,0)\right)=\frac{2}{6},\quad \mathrm{P}\left((\xi_1,\xi_2)=(1,1)\right)=\frac{1}{6}$$

Легко вычислить распределение отдельных компонент вектора $\vec{\xi}$.

ξ_1	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ξ_2	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Свойство независимости, очевидно, не выполняется.

$$\mathrm{P}\left(\xi_1=0,\xi_2=0\right)=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{4}=\mathrm{P}\left(\xi_1=0\right)\mathrm{P}\left(\xi_2=0\right),$$

то есть компоненты вектора (ξ_1,ξ_2) являются зависимыми.

Пример 2. (Случайный вектор с независимыми компонентами)

$\xi_2 \quad \xi_1$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

ξ_1	0	1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

ξ_2	0	1
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Легко видеть, что $\forall m_1,m_2$ выполняется

$$\mathrm{P}\left(\xi_1=m_1,\xi_2=m_2\right)=\mathrm{P}\left(\xi_1=m_1\right)\mathrm{P}\left(\xi_2=m_2\right),$$

т.е. компоненты вектора являются независимыми.

Случай абсолютно непрерывных случайных векторов более подробно рассмотрен в Приложении 3.

17. Приложение 3. Основы кратных интегралов и доказательство формулы свертки.

Для описания многомерных случайных величин требуется механизм многомерных (кратных) интегралов. Рассмотрим кратко основные моменты.
Известно, что обычный определенный интеграл может зависеть от параметра, т.е. возможно задание функции

$$f(y) = \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x \tag{57}$$

Пример 1.

$$f(y) = \int_0^1 (x-y)^2\mathrm{d}x = \frac{(x-y)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{(1-y)^3}{3} - \frac{y^3}{3} \tag{58}$$

Заметим, что в формуле (57) a и(или) b могут быть равны бесконечности.
Пример 2.

$$f(y) = \int_1^\infty e^{-xy}\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_1^\infty ye^{-yx}\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{y}(-e^{-yx})\Big|_1^\infty = \frac{1}{y}(-0 + e^{-y}) = \frac{e^{-y}}{y}. \tag{59}$$

Возможность подстановки в границы интегрирования бесконечных значений будет в дальнейшем предполагаться всюду. С теоретической точки зрения здесь могут быть некоторые осложнения, но для всех величин, связанных с теорией вероятностей, переход от конечного интеграла к бесконечному аналогичен переходу от конечной суммы к бесконечному ряду.
Определим теперь повторный интеграл. Повторным интегралом назовем величину:

$$\int_c^d \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d f(y)\mathrm{d}y, \text{ где } f(y) = \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x. \tag{60}$$

Пример 3.

$$\int_2^3\int_0^1 12(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^3 4(x+y)^3\big|_{x=0}^1\mathrm{d}y =$$
$$= \int_2^3 4(y+1)^3 - 4y^3\mathrm{d}y = ((y+1)^4 - y^4)\big|_2^3 = (3+1)^4 - 3^4 - (2+1)^4 + 2^4 =$$
$$= 4^4 + 2^4 = 256 + 16 = 272. \quad (61)$$

Из теории интегрирования, которая будет рассмотрена в следующем семестре, следует утверждение:

$$\int_c^d\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \quad (62)$$

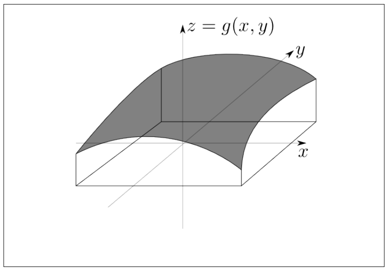
Примем его без доказательства и проиллюстрируем на примере, переставив последовательность интегрирования в интеграле (61):

$$\int_2^3\int_0^1 12(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_2^3 12(x+y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 4(x+y)^3\big|_{y=2}^3\mathrm{d}x = \int_0^1 4(x+3)^3 - 4(x+2)^3\mathrm{d}x =$$
$$= (x+3)^4\big|_0^1 - (x+2)^4\big|_0^1 =$$
$$= (1+3)^4 - (0+3)^4 - (1+2)^4 + (0+2)^4 = 4^4 + 2^4 = 272. \quad (63)$$

Нечувствительность значения данного интеграла к перестановке порядка интегрирования приводит нас к понятию двумерного интеграла по прямоугольнику $[a,b]\times[c,d]$.

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \quad (64)$$

Наглядный смысл такого интеграла – объем под поверхностью $z = g(x,y)$ над множеством $[a,b]\times[c,d]$, при $g(x,y) \geq 0$. В случае, когда $g(x,y) < 0$, объем над поверхностью $z = g(x,y)$ берется с обратным знаком.



Двумерный интеграл называется двойным или кратным интегралом.

Заметим, что множество, над которым рассматривается объем, может быть произвольным, например, пусть $B = \{(x, y), x \in [0, 1], y \in [0, 2], y \le 2x\}$ – треугольник.

Чтобы посчитать двойной интеграл по данному треугольнику, нужно сначала посчитать $f(x) = \int_0^{2x} g(x, y)\mathrm{d}y$ для каждого x, а потом проинтегрировать f по отрезку $[0, 1]$.

Двойной интеграл – это как раз тот объект, который нужен нам для описания распределений двумерных абсолютно непрерывных случайных векторов.

Напомним, плотностью двумерного случайного вектора (ξ, η) называется функция $f(x, y)$ такая, что $\mathrm{P}\left((\xi, \eta) \in B\right) = \int\int_B f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, для любого $B \subset \mathbb{R}^2$ (строго говоря, для любого борелевского множества B), или, что то же самое

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \mathrm{P}\left(\xi < x, \eta < y\right) = \mathrm{P}\left((\xi, \eta) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y)\right) = \\ = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \quad (65)$$

Докажем теперь, пользуясь имеющимися у нас знаниями о кратных интегралах и многомерных плотностях, формулу свертки случайных величин:

Утверждение. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с плотностями f_ξ, f_η соответственно. Тогда $f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x)\mathrm{d}x$.

► По свойству независимости случайных величин, совместная плотность равна произведению одномерных плотностей:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \tag{66}$$

Запишем функцию распределения $\xi + \eta$:

$$\begin{gathered}
F_{\xi+\eta}(z) \overset{1}{=} \mathrm{P}\left(\xi+\eta<z\right) \overset{2}{=} \mathrm{P}\left((\xi,\eta)\in B=\{(x,y): x+y<z\}\right) \overset{3}{=} \\
\overset{3}{=} \int\int_{\{(x,y):x+y<z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{4}{=} \int\int_{x+y<z} f_\xi(x) f_\eta(y\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \overset{5}{=} \\
\overset{5}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_\xi(x) f_\eta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_\xi(x) f_\eta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \overset{6}{=} \\
\overset{6}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\int_{-\infty}^{z-x} f_\eta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \overset{7}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\int_{-\infty}^{z} f_\eta(u-x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x.
\end{gathered} \tag{67}$$

Продифференцируем функцию распределения по z:

$$\begin{gathered}
f_{\xi+\eta}(z) \overset{8}{=} \left(F_{\xi+\eta}(z)\right)' \overset{9}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_\xi(x)\int_{-\infty}^{z} f_\eta(u-x)\mathrm{d}u\right)'_z \mathrm{d}x \overset{10}{=} \\
\overset{10}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\left(\int_{-\infty}^{z} f_\eta(u-x)\mathrm{d}u\right)'_z \mathrm{d}x \overset{11}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\mathrm{d}x.
\end{gathered} \tag{68}$$

Формула свертки доказана.

Пояснения к переходам:

1: Определение функции распределения случайной величины.

2: Представление события $\xi + \eta < z$ через попадание вектора (ξ, η) в соответствующее множество $B \subset \mathbb{R}^2$.

3: Свойство двумерной плотности вектора (ξ, η).

4: Свойство совместной плотности независимых случайных величин ($f_{(\xi,\eta)}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$). Множество, по которому производится, интегрирование записано в более краткой форме.

5: Переход от двойного интеграла по бесконечному "треугольнику" ($\xi + \eta < z$) к повторному интегралу.

6: В интеграле $\int_{-\infty}^{z-x} f_\xi(x) f_\eta(y)\mathrm{d}y$, $f_\xi(x)$ не зависит от y и может быть вынесено за знак интеграла.

7: Сделана замена переменных $u = y + x$ в интеграле $\int_{-\infty}^{z-x} f_\eta(y)\mathrm{d}y$.
8: Определение плотности случайной величины $\xi + \eta$.
9: Дифференцирование интеграла по параметру z.
10: Множитель $f_\xi(x)$ не зависит от параметра z.
11: Производная от интеграла $\left(\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$. ◀

Заметим, что многомерные плотности позволяют исследовать множество задач, связанных с многомерными распределениями, однако в нашем курсе внимание на них не акцентируется.

18. Приложение 4. Таблицы

Функция стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

$\Phi(x)$	0	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.001	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.001	0.001
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.002	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.004	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.006	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.008	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.011
-2.1	0.0179	0.0174	0.017	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.015	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.025	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.063	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.102	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.123	0.121	0.119	0.117
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.166	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.209	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.242	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.305	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.281	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.33	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.352	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.409	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0	0.5	0.496	0.492	0.488	0.484	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Продолжение таблицы

$\Phi(x)$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

Таблица пуассоновских вероятностей $\sum_{k=0}^{m} \lambda^k e^{-\lambda}/k!$
для некоторых значений λ (ноль и единица в таблице имеются
в виду с точностью до 4 знаков).

λ/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.5	0.6065	0.9098	0.9856	0.9982	0.9998	1	1	1	1	1
1	0.3679	0.7358	0.9197	0.981	0.9963	0.9994	0.9999	1	1	1
1.5	0.2231	0.5578	0.8088	0.9344	0.9814	0.9955	0.9991	0.9998	1	1
2	0.1353	0.406	0.6767	0.8571	0.9473	0.9834	0.9955	0.9989	0.9998	1
2.5	0.0821	0.2873	0.5438	0.7576	0.8912	0.958	0.9858	0.9958	0.9989	0.9997
3	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472	0.8153	0.9161	0.9665	0.9881	0.9962	0.9989
3.5	0.0302	0.1359	0.3208	0.5366	0.7254	0.8576	0.9347	0.9733	0.9901	0.9967
4	0.0183	0.0916	0.2381	0.4335	0.6288	0.7851	0.8893	0.9489	0.9786	0.9919
4.5	0.0111	0.0611	0.1736	0.3423	0.5321	0.7029	0.8311	0.9134	0.9597	0.9829
5	0.0067	0.0404	0.1247	0.265	0.4405	0.616	0.7622	0.8666	0.9319	0.9682
5.5	0.0041	0.0266	0.0884	0.2017	0.3575	0.5289	0.686	0.8095	0.8944	0.9462
6	0.0025	0.0174	0.062	0.1512	0.2851	0.4457	0.6063	0.744	0.8472	0.9161
6.5	0.0015	0.0113	0.043	0.1118	0.2237	0.369	0.5265	0.6728	0.7916	0.8774
7	0.0009	0.0073	0.0296	0.0818	0.173	0.3007	0.4497	0.5987	0.7291	0.8305
7.5	0.0006	0.0047	0.0203	0.0591	0.1321	0.2414	0.3782	0.5246	0.662	0.7764
8	0.0003	0.003	0.0138	0.0424	0.0996	0.1912	0.3134	0.453	0.5925	0.7166
8.5	0.0002	0.0019	0.0093	0.0301	0.0744	0.1496	0.2562	0.3856	0.5231	0.653
9	0.0001	0.0012	0.0062	0.0212	0.055	0.1157	0.2068	0.3239	0.4557	0.5874
9.5	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0403	0.0885	0.1649	0.2687	0.3918	0.5218
10	0	0.0005	0.0028	0.0103	0.0293	0.0671	0.1301	0.2202	0.3328	0.4579
10.5	0	0.0003	0.0018	0.0071	0.0211	0.0504	0.1016	0.1785	0.2794	0.3971
11	0	0.0002	0.0012	0.0049	0.0151	0.0375	0.0786	0.1432	0.232	0.3405
11.5	0	0.0001	0.0008	0.0034	0.0107	0.0277	0.0603	0.1137	0.1906	0.2888
12	0	0.0001	0.0005	0.0023	0.0076	0.0203	0.0458	0.0895	0.155	0.2424
12.5	0	0.0001	0.0003	0.0016	0.0053	0.0148	0.0346	0.0698	0.1249	0.2014
13	0	0	0.0002	0.0011	0.0037	0.0107	0.0259	0.054	0.0998	0.1658
13.5	0	0	0.0001	0.0007	0.0026	0.0077	0.0193	0.0415	0.079	0.1353
14	0	0	0.0001	0.0005	0.0018	0.0055	0.0142	0.0316	0.0621	0.1094
14.5	0	0	0.0001	0.0003	0.0012	0.0039	0.0105	0.0239	0.0484	0.0878
15	0	0	0	0.0002	0.0009	0.0028	0.0076	0.018	0.0374	0.0699
15.5	0	0	0	0.0001	0.0006	0.002	0.0055	0.0135	0.0288	0.0552
16	0	0	0	0.0001	0.0004	0.0014	0.004	0.01	0.022	0.0433
16.5	0	0	0	0.0001	0.0003	0.001	0.0029	0.0074	0.0167	0.0337

Продолжение таблицы

λ/m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	0.0001	0.0005	0.0014	0.0034	0.0072	0.0135	0.023	0.0355	0.0504	0.0658
17.5	0.0001	0.0003	0.001	0.0025	0.0055	0.0107	0.0186	0.0297	0.0432	0.0582
18	0.0001	0.0002	0.0007	0.0019	0.0042	0.0083	0.015	0.0245	0.0368	0.0509
18.5	0	0.0002	0.0005	0.0014	0.0031	0.0065	0.012	0.0201	0.031	0.0441
19	0	0.0001	0.0004	0.001	0.0024	0.005	0.0095	0.0164	0.0259	0.0378
19.5	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0018	0.0038	0.0074	0.0132	0.0214	0.0322
20	0	0.0001	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0058	0.0106	0.0176	0.0271
20.5	0	0	0.0001	0.0004	0.001	0.0022	0.0045	0.0084	0.0144	0.0227
21	0	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0017	0.0035	0.0067	0.0116	0.0188
21.5	0	0	0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0027	0.0052	0.0094	0.0155
22	0	0	0	0.0001	0.0004	0.0009	0.002	0.0041	0.0075	0.0127
22.5	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0032	0.0059	0.0103
23	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0024	0.0047	0.0083
23.5	0	0	0	0	0.0001	0.0004	0.0009	0.0019	0.0037	0.0067
24	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0014	0.0029	0.0053
24.5	0	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0022	0.0042
25	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0004	0.0008	0.0017	0.0033
25.5	0	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0006	0.0013	0.0026
26	0	0	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002
26.5	0	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0004	0.0008	0.0016
27	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0006	0.0012
27.5	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0004	0.0009
28	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0003	0.0007
28.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0006
29	0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0004
29.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0003
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0002
30.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0002

МУСИН Максим Маратович,
КОБЕЛЬКОВ Сергей Георгиевич,
ГОЛДАЕВА Анна Алексеевна
(под ред. ЛЕБЕДЕВА Алексея Викторовича)

Сборник задач по теории вероятностей для химиков

Учебное пособие
Электронная версия (23.08.2013)

Оригинал-макет подготовлен А.В.Лебедевым.