Погрешности измерений

Никакие измерения не могут быть абсолютно точными. Измеряя какую-либо величину, мы всегда получаем результат с некоторой погрешностью (ошибкой). Другими словами, измеренное значение величины всегда отличается от истинного ее значения. Задачей экспериментатора является не только нахождение самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности. В зависимости от свойств и причин возникновения различают систематические и случайные погрешности и промахи.

Систематическими называются погрешности, которые при многократных измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов, остаются постоянными.

Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Они соответствуют отклонению измеренного значения от истинного всегда в одну сторону - либо в большую, либо в меньшую.

Систематические погрешности могут быть обусловлены, во-первых, неисправностью или неправильной работе на используемых приборах (например, неправильной установкой “нуля”). Во-вторых, их причиной может быть несовершенство используемой методики измерения или неучет постоянных факторов, влияющих на исследуемое явление. Например, можно получать завышенные значения температуры плавления кристалла, если проводить измерения при повышенном внешнем давлении.

Помимо погрешностей, возникающих в процессе измерений, систематическими являются погрешности, связанные с применением приближенных (“упрощенных”) формул, и ошибки, обусловленные отличием реального объекта от принятой модели. Так, например, при определении плотности может возникнуть большая систематическая ошибка, если исследуемый образец не является однородным и содержит внутри пустоты.

После выявления причин систематическую погрешность можно устранить, вводя соответствующую поправку. Обнаружить же систематическую погрешность и установить ее причину бывает не всегда просто, и экспериментатору часто приходится проводить дополнительные исследования. Предполагается, что в задачах физического практикума систематические погрешности сведены к минимуму при постановке задачи, и их можно не учитывать.

Случайными называются погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом.

Случайные ошибки обусловлены множеством неконтролируемых причин, действие которых неодинаково в каждом опыте. В результате этого при измерении одной и той же величины несколько раз подряд в одинаковых условиях получается целый ряд значений этой величины, отличающихся от истинного значения случайным образом как в сторону увеличения, так и уменьшения.

Природа случайных погрешностей может быть различной: флуктуации нулевого положения указателя измерительного прибора; несовершенство органов чувств экспериментатора (например, невозможность включить секундомер точно в нужный момент); случайные неконтролируемые изменения внешних воздействий - температуры, влажности, давления; наводки в электрической цепи и т.д., которые практически невозможно учесть.

Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте.

Поведение случайных величин описывают статистические закономерности, которые являются предметом теории вероятностей. Статистическим определением вероятности w_i события i является отношение

$$w_i = \frac{n_i}{n} ,$$

где n - общее число опытов, n_i - число опытов, в которых событие i произошло. При этом общее число опытов должно быть очень велико ($n \to \infty$). При большом числе измерений случайные ошибки подчиняются нормальному распределению (распределение Гаусса), основными признаками которого являются следующие:

1. Чем больше отклонение значения измеренной величины от истинного, тем меньше вероятность такого результата.

2. Отклонения в обе стороны от истинного значения равновероятны.

Приводимые ниже рецепты **расчетов случайных ошибок** базируются на математическом аппарате теории вероятностей с распределением Гаусса для случайных величин. Следует отдавать себе отчет, что **в условиях практикума при небольшом (n = 3÷10) числе измерений** эти расчеты **всегда носят оценочный характер.***

Приборной погрешностью называется разность между показаниями любого прибора и истинным значением измеряемой величины. Она может содержать случайную и систематическую составляющие.

Промахи (или грубые погрешности) проявляются обычно в резком отклонении результата отдельного измерения от остальных. Промахи обусловлены главным образом недостаточным вниманием экспериментатора или неисправностями средств измерения. Результаты таких измерений отбрасываются.

Оценка погрешностей величин, измеряемых непосредственно (при прямых измерениях)

а) Случайные погрешности. Основные понятия.

Пусть некоторая случайная величина a измеряется n раз в одинаковых условиях. Результаты измерений дали набор n различных чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n \ .$$

За наиболее вероятное значение величины a обычно принимают среднее арифметическое значение результатов измерений

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Чем больше число измерений, тем ближе среднее значение к истинному.

Абсолютной погрешностью i-го измерения называется величина

$$\Delta a_i = a_i - \langle a \rangle \ .$$

Абсолютная погрешность - величина размерная. Среди n значений абсолютных погрешностей обязательно встречаются как положительные, так и отрицательные.

---

* Элементы строгой теории погрешностей приведены в последнем параграфе.

Относительной погрешностью *i*-го измерения называется величина

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta a_i}{\langle a \rangle} .$$

Относительная погрешность - величина безразмерная. Обычно относительная погрешность выражается в процентах, для этого ε_i домножают на 100%. Величина относительной погрешности характеризует точность измерения.

Средняя абсолютная погрешность определяется так:

$$\langle \Delta a \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i| .$$

Подчеркнем необходимость суммирования абсолютных значений (модулей) величин Δa_i. В противном случае получится тождественный нулевой результат.

Средней относительной погрешностью называется величина

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| .$$

При большом числе измерений $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{\langle \Delta a \rangle}{\langle a \rangle}$.

б) **Доверительный интервал и доверительная вероятность.**

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы интервала, в котором заключено истинное значение измеряемой величины. Этот интервал определяется относительно ее среднего арифметического значения, принимаемого за наилучшую оценку истинного.

Принята следующая форма записи результата измерений какой-либо величины a:

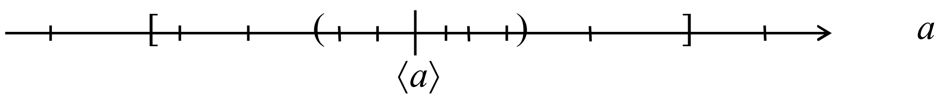
$$\boldsymbol{a = (\langle a \rangle \pm \Delta a)} \textbf{ ед. измерения } \boldsymbol{(\varepsilon\%)},$$

где Δa - определяемая тем или иным способом граница этого интервала.

Теория вероятностей позволяет определить величину интервала, в котором с известной вероятностью w находятся результаты отдельных измерений. Эта вероятность называется доверительной вероятностью, а соответствующий интервал называется доверительным интервалом.

Если число измерений n достаточно велико, то доверительная вероятность выражает долю из общего числа n тех измерений, в которых измеренная величина оказалась в пределах доверительного интервала. Каждой доверительной вероятности w соответствует свой доверительный интервал.

Для примера обозначим на числовой оси точками результаты n = 10 условных измерений. Они группируются вокруг средней величины $\langle a \rangle$.



Круглыми скобками обозначим доверительный интервал, внутри которого находятся 5 экспериментальных значений из 10, т.е. доверительная вероятность $w_1 \approx 50\%$. Квадратным скобкам соответствует доверительный интервал для вероятности $w_2 \approx 80\%$. Чем шире доверительный интервал, тем больше вероятность получить результат внутри этого интервала. В теории вероятностей устанавливается количественная связь между величиной доверительного интервала, доверительной вероятностью и числом измерений.

Если в качестве доверительного интервала выбрать интервал, соответствующий средней погрешности, то есть $\Delta a = \langle \Delta a \rangle$, то при достаточно большом числе измерений он соответствует доверительной вероятности $w \approx 60\%$. При уменьшении числа измерений доверительная вероятность, соответствующая такому доверительному интервалу $(\langle a \rangle \pm \langle \Delta a \rangle)$, уменьшается.

Таким образом, для оценки доверительного интервала случайной величины можно пользоваться величиной средней погрешности $\langle \Delta a \rangle$. Строгая теория доверительных интервалов дана в последнем параграфе.

в) Приборная погрешность.

Приборная погрешность является паспортной характеристикой прибора. Она определяется для всей совокупности приборов данного вида путем сравнения показаний приборов исследуемой партии с показаниями эталонного прибора (путем градуировки). За значение приборной погрешности принимается наибольшее из полученных значений.

При работе с отдельным прибором конкретная величина приборной погрешности неизвестна, но заключена в известных пределах, которые указываются в паспортных данных прибора.

Для стрелочных электроизмерительных приборов погрешность определяется классом точности. **Класс точности** большинства приборов равен максимально возможной относительной погрешности прибора, выраженной в процентах от величины верхнего предела шкалы. Значение класса точности такого прибора маркируется рядом с его шкалой в виде числа (не обведенного в кружок или звездочку!).

Обозначим класс точности ε_{max}. Исходя из определения,

$$\varepsilon_{max} = \frac{\Delta x_i^{приб}}{x_{max}} \cdot 100\%,$$

где $\Delta x_i^{приб}$ - максимально возможная абсолютная приборная погрешность i-го измерения, x_{max} - величина верхнего предела шкалы измерительного прибора.

Отсюда следует, что

$$\Delta x_i^{\boldsymbol{приб}} = \frac{\varepsilon_{max} \cdot x_{max}}{100},$$

а максимальная относительная приборная погрешность i-го измерения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i^{приб} = \frac{\varepsilon_{max} \cdot x_{max}}{x_i^{приб}} \quad (\%).$$

Так, например, у вольтметра класса точности 0,2, предназначенного для измерения напряжения до V_{max} = 300 В, максимальная относительная приборная погрешность у верхнего предела измерений равна 0,2%. А при измерении напряжения V = 50 В максимальная относительная погрешность возрастает до величины 1,2%. Следовательно, при измерении вблизи нуля (в первой половине шкалы) значительно уменьшается точность измерения. Измерения в начальной части шкалы нежелательны.

Приборные погрешности, определяемые по приведенным формулам, представляют максимально возможную ошибку прибора. Ошибка конкретного измерения может быть меньше.

Если класс точности не указан, то за приборную погрешность можно принять половину цены наименьшего деления на шкале. Обычно эта величина находится в согласии с классом точности. [*)]

Погрешность цифровых электроизмерительных приборов обычно указывается в паспорте прибора.

г) Доверительный интервал с учетом случайной и приборной погрешностей.

При однократном измерении некоторой величины случайную ошибку определить невозможно, и граница доверительного интервала определяется величиной приборной погрешности

$$\Delta a = \Delta a^{приб} \ .$$

В таком случае погрешность называют <u>погрешностью метода</u>.

При многократных измерениях граница доверительного интервала определяется путем учета случайной погрешности и погрешности, вносимой приборами. Такая погрешность называется <u>погрешностью эксперимента</u>.

Для оценки погрешности эксперимента можно пользоваться формулой

$$\Delta a = \langle \Delta a \rangle + \Delta a^{приб}$$

(см. также стр. 22).

Естественно, если одно из слагаемых значительно больше другого, то оно и будет определяющим в оценке. Если при большом количестве измерений приборная погрешность много больше случайной погрешности измерений, необходимо заменить используемый прибор на более точный. Если же приборная ошибка много меньше случайной ошибки, можно увеличить число измерений для повышения точности результата. Если приборная погрешность сравнима со случайной погрешностью измерений, то, очевидно, не имеет смысла увеличивать

[*)] Как правило, точность прибора ниже точности отсчета, который можно сделать по шкале прибора. Например, если мы измеряем длину миллиметровым масштабом, то легко отсчитать на глаз десятые доли миллиметра, но обычная линейка может и не обеспечивать такой точности. Сколько бы раз мы ни повторяли измерения, точность полученного нами результата не превысит точности, обеспеченной при изготовлении линейки.

число измерений. Следовательно, целесообразно оценивать приборную погрешность перед проведением измерений.

Оценка погрешности при косвенных измерениях

В большинстве случаев величина, интересующая экспериментатора, не может быть измерена непосредственно, а получается путем вычислений с использованием нескольких непосредственно измеряемых величин. Такие измерения называются косвенными.

Пусть интересующая нас величина a вычисляется по некоторой формуле, требующей знания ряда непосредственно измеряемых величин $x, y, z, ...$:

$$a = f(x, y, z, ...).$$

Здесь $f(x, y, z, ...)$ - некоторая (пока не конкретизируемая) функция, определяемая расчетной формулой.

В измерениях могут встретиться две ситуации.

а) Косвенные измерения с постоянными параметрами.

В большинстве задач физического практикума многократно измеряются величины $x, y, z, ...$, истинные значения которых в процессе измерений остаются постоянными (постоянными параметрами). Например, плотность вещества определяется через многократные измерения массы и линейных размеров одного и того же образца.

В этом случае среднее значение величины a получается подстановкой в формулу средних значений $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, ...$ измеренных величин:

$$\langle a\rangle = f\big(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, ...\big) ,$$

а **при расчете погрешностей величины *a* начинают с вычисления абсолютной или относительной погрешностей в зависимости от вида функции** $f(x, y, z, ...)$.

В общем виде задача ставится так. Пусть известен набор величин $x\pm\Delta x$, $y\pm\Delta y$, $z\pm\Delta z...$, где Δx, Δy, Δz - погрешности непосредственных измерений, определенные так, как это описано в предыдущем параграфе. Как определить абсолютную погрешность величины a? Учтем, что чаще всего погрешности непосредственных измерений значительно меньше измеряемых величин, составляя несколько процентов и менее от них. Т.е. $|\Delta x| \ll |x|$, $|\Delta y| \ll |y|$, $|\Delta z| \ll |z|$ ... Тогда формально можно погрешность считать малым приращением измеряемой величины, заменить символы: $\Delta x \approx dx$, $\Delta y \approx dy$, $\Delta z \approx dz$, ... $\Delta a \approx da$ - и для нахождения величины Δa использовать математический аппарат дифференциального исчисления

$$\Delta a = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| + \ldots$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ - частная производная, которая вычисляется по обычным правилам дифференцирования. При ее определении все остальные аргументы функции f (кроме x) следует считать постоянными и равными их средним значениям. Слагаемое $\Delta a_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ соответствует погрешности, вносимой в полную погрешность Δa неточностью измерения только величины x (в предположении, что все остальные величины: $y, z, \ldots$. - измерены без ошибок). Аналогичный смысл имеют все остальные слагаемые. Таким образом, оценить абсолютную погрешность величины a при косвенных измерениях можно по формуле

$$\Delta a = |\Delta a_x| + |\Delta a_y| + |\Delta a_z| + \ldots.$$

где

$$\Delta a_x = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x, \quad \Delta a_y = \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \quad \Delta a_z = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z, \ldots.$$

Для того чтобы сразу определить относительную погрешность величины a, разделим Δa на a и примем во внимание, что выражение $\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ удобно преобразовать в $\dfrac{\partial \ln f}{\partial x}$.

Тогда

$$\frac{\Delta a}{a} = \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta x\right| + \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y\right| + \ldots = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right| + \ldots$$

Если в расчетную формулу входят, наряду с измеренными величинами, еще и табличные данные или справочные константы, то при вычислении погрешности величины *a* следует учитывать и их погрешности. Если их погрешность не указана специально, то обычно считается, что она не превышает пяти единиц в первом отсутствующем разряде. Например, для ускорения свободного падения

$g = 9{,}8$ м/с^2 $\Delta g = 0{,}05$ м/с^2,

а для

$g = 9{,}81$ м/с^2 $\Delta g = 0{,}005$ м/с^2.

После вычисления абсолютной погрешности определяется относительная погрешность результата.

Приведем таблицу для оценки погрешности некоторых часто встречающихся при вычислениях комбинаций измеряемых величин.

Таблица 1.

	$a = f(x, y)$	$\Delta a = \left\|\Delta a_x\right\| + \left\|\Delta a_y\right\|$	$\varepsilon = \dfrac{\Delta a}{a}$
1	$x + y$	$\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta y\right\|$	$\dfrac{\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta y\right\|}{x + y}$
2	$x - y$	$\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta y\right\|$	$\dfrac{\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta y\right\|}{x - y}$
3	$x \cdot y$	$\left\|x \cdot \Delta y\right\| + \left\|y \cdot \Delta x\right\|$	$\left\|\dfrac{\Delta x}{x}\right\| + \left\|\dfrac{\Delta y}{y}\right\|$
4	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\left\|x \cdot \Delta y\right\| + \left\|y \cdot \Delta x\right\|}{y^2}$	$\left\|\dfrac{\Delta x}{x}\right\| + \left\|\dfrac{\Delta y}{y}\right\|$
5	x^n	$\left\|n x^{n-1} \Delta x\right\|$	$n\left\|\dfrac{\Delta x}{x}\right\|$
6	$\sqrt[n]{x}$	$\left\|\dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x\right\|$	$\dfrac{1}{n}\left\|\dfrac{\Delta x}{x}\right\|$

Обратим внимание читателя на некоторые важные моменты в таблице.

1. Учтем, что случайные погрешности измерений могут равновероятно быть положительными и отрицательными. Поэтому и при сложении, и при вычитании измеренных величин абсолютные погрешности складываются.

2. При вычитании двух величин относительная погрешность содержит в знаменателе разность двух величин. Если эти величины близки, то относительная погрешность разности может значительно превышать относительную погрешность каждой величины в отдельности. Во избежание потери точности следует избегать таких измерений и вычислений, когда приходится вычитать близкие по значению величины.

3. При умножении и делении величин складываются относительные погрешности.

То есть когда расчетная формула является одночленом, а суммы и разности если и присутствуют, то в виде отдельных множителей, проще сначала вычислить не абсолютную, а относительную погрешность величины a. Если же расчетная формула имеет вид многочлена, целесообразно начинать с расчета абсолютной погрешности.

4. При возведении в степень n, такую что $|n| > 1$, относительная погрешность увеличивается в $|n|$ раз.

Для примера рассмотрим вычисление погрешности при расчете по формуле

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} .$$

Удобнее всего провести его по следующей схеме.

Обозначим

$$s_1 = v_0 t \qquad \text{и} \qquad s_2 = \frac{at^2}{2} ,$$

где s_1, s_2, v_0, t, a - средние значения измеренных величин.

Тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta s_1}{s_1} = \left|\frac{\Delta v_0}{v_0}\right| + \left|\frac{\Delta t}{t}\right| ; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta s_2}{s_2} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{2\Delta t}{t}\right| ;$$

$$\Delta s_1 = \varepsilon_1 s_1 = v_0 t\left(\left|\frac{\Delta v_0}{v_0}\right| + \left|\frac{\Delta t}{t}\right|\right) \quad ;$$

$$\Delta s_2 = \varepsilon_2 s_2 = \frac{at^2}{2}\left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{2\Delta t}{t}\right|\right)$$

и, наконец,

$$\Delta s = |\Delta s_1| + |\Delta s_2|$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{|\Delta s_1| + |\Delta s_2|}{s_1 + s_2} \ .$$

б) Косвенные измерения с переменными параметрами.

В некоторых задачах при определении одной и той же величины $a = f(x, y, z, ...)$ вместо того, чтобы измерять n раз одни и те же параметры $x, y, z, ...$, проводят n измерений принципиально различных значений (переменных параметров) $x_1, x_2, ... , x_n$ величины x, и, соответствующих им значений величин $y, z, ...$. Например, плотность вещества определяется через однократные измерения массы и линейных размеров нескольких образцов.

В таком случае расчеты проводятся следующим образом. Величина a вычисляется для каждого опыта в отдельности: $a_1 = a(x_1, y_1, z_1...)$, $a_2 = (x_2, y_2, z_2 ...) ... a_n = a(x_n, y_n, z_n ...)$, - и обрабатывается как при прямых измерениях. В результате определяется среднее значение a:

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

и соответствующая ему средняя случайная погрешность $\langle \Delta a \rangle$.

Приборная погрешность $\Delta a^{приб}$ рассчитывается дополнительно. Для ее определения рассмотренным в пункте а) способом выводят формулу для абсолютной или относительной погрешности величины a. В эту формулу в качестве Δx, Δy, Δz, ... подставляют приборные погрешности $\Delta x^{приб}$, $\Delta y^{приб}$, $\Delta z^{приб}$, ... , а в качестве x, y, z, ... подставляют значения x_i, y_i, z_i, ... какого-либо одного из опытов. Для того, чтобы не получить сильно завышенное или заниженное значение приборной погрешности, выбирается опыт с промежуточными (не минимальными и не максимальными) значениями параметров x_i, y_i, z_i, ...

Полная погрешность эксперимента определяется как при непосредственных измерениях:

$$\Delta a = \langle \Delta a \rangle + \Delta a^{приб} \quad .$$

Окончательная запись результата. Точность вычислений при обработке измерений

В результате обработки измерений всегда получается приближенное значение измеряемой величины, точность которого определяется только погрешностью, допущенной в процессе измерения, и никакими расчетами нельзя повысить эту точность. Поэтому окончательный результат обработки измерения с точки зрения количества значащих цифр*) должен соответствовать точности, полученной в процессе измерения.

При численной записи окончательного результата условимся придерживаться следующих правил (см. также стр. 21).

1. В погрешности оставляют только первую значащую цифру. Если же первая значащая цифра - единица, то допускается записывать две значащие цифры, а остальные отбрасываются с округлением в большую сторону.

2. Среднее значение измеренной величины округляется в соответствии со значением погрешности. Правила округления - обычные.

Так, число c = 4,862452±0,12465 должно быть записано:

$$\boldsymbol{c = 4,86 \pm 0,12},$$

а число d = 242,87546±0,0094265 должно быть записано:

$$\boldsymbol{d = 242,875 \pm 0,009}.$$

Примеры записи результата:

v = (210±8) м/с **(ε = 4%)**

или **v = (2,10±0,08)·10^2 м/с** **(ε = 4%)** - стандартная форма.

R = (49,8±0,3)·10^3 Ом **(ε = 0,6%)**

R = (49,8±0,3) кОм **(ε = 0,6%)**

R = (4,98 ±0,03)·10^4 Ом **(ε = 0,6%)** - стандартная форма.

Следует помнить, что нули, стоящие в последних разрядах, есть значащие цифры. Так, числа 2,86 и 2, 86000 не равнозначны по своей точности.

---

*) Значащими цифрами являются все цифры в десятичном изображении, кроме нулей, стоящих в начале числа.

Отметим, что при проведении косвенных измерений в расчетах выполняются математические операции над приближенными числами, определяемыми с различной точностью. При этом руководствуются следующими правилами округлений и вычислений.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохраняют столько разрядов, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством разрядов.

2. При умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. Результат расчета значений функций $x^n, \sqrt[n]{x}, lg\,x$ некоторо-го приближенного числа *x* должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе *x*.

4. В промежуточных расчетах допускается использовать на одну-две значащие цифры больше (“с запасом”).

Графическое представление результатов измерений

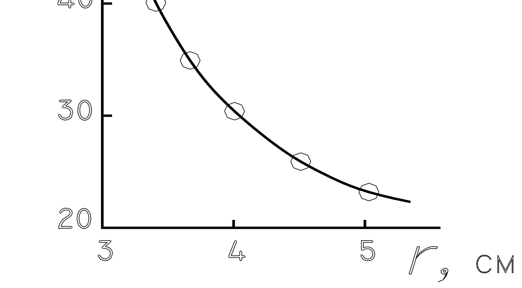
При оформлении графиков необходимо выполнять следующие правила.

1. График должен содержать надпись, из которой было бы ясно физическое содержание представленной закономерности.

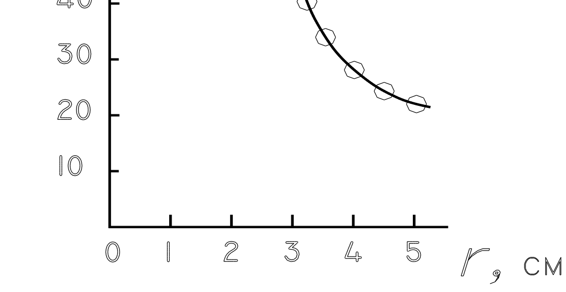
2. Масштабы и начала отсчета по координатным осям выбираются так, чтобы график изображения зависимости занимал большую часть поля чертежа. При этом на пересечении осей не обязательно должны находиться нулевые значения величин.

При выборе масштаба необходимо помнить, что точность построения графика должна быть не ниже точности измерений.

Правильно

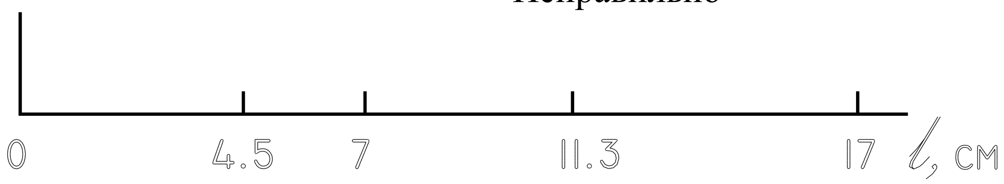


Неправильно

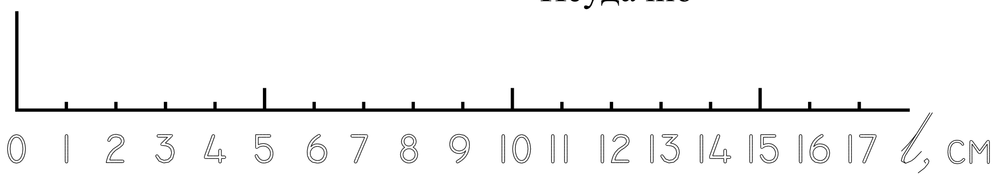


3. На осях координат откладываются равноотстоящие друг от друга деления масштаба так, чтобы было удобно работать с графиком. Значения, полученные в эксперименте, не указываются.

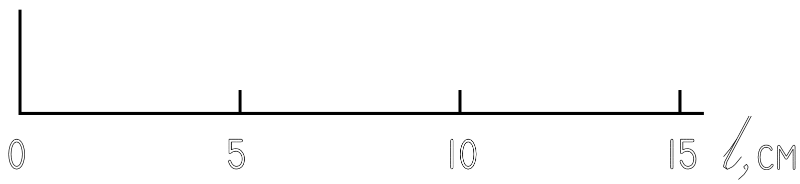
Неправильно



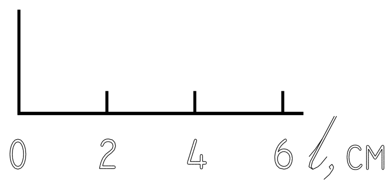
Неудачно



Правильно

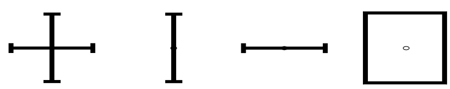


или



4. В конце координатных осей обязательно указываются условные обозначения откладываемых величин и, через запятую, их единицы измерения.

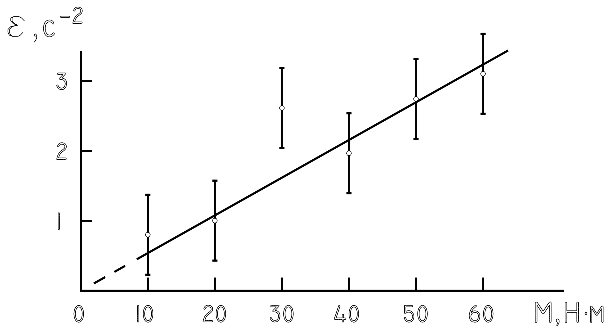
5. Экспериментальные значения величин (точки) отчетливо наносятся вместе с погрешностями - отрезками длиной в доверительный интервал, расположенными параллельно соответствующей оси, в виде:



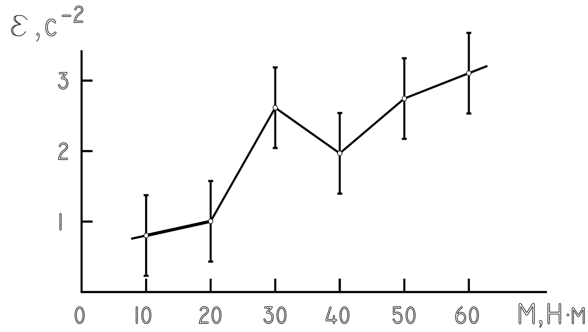
Если при построении кривой в выбранном масштабе доверительные интервалы не видны <u>вдоль обеих осей координат</u>, экспериментальные точки проставляются в виде маленьких кружочков (треугольников и т.д.) с центром в точке, соответствующей экспериментальным данным.

6. Экспериментальная кривая проводится плавно через доверительные интервалы всех или большинства экспериментальных точек так, чтобы экспериментальные точки наиболее близко и равномерно располагались с разных сторон кривой.

Правильно



Неправильно



7. Если на графике изображается теоретическая кривая, то указывается формула, по которой она рассчитывается.

8. При изображении нескольких кривых на одном поле графика каждая из них нумеруется или выделяется каким-то другим способом. В свободной части поля даются соответствующие пояснения.

Рекомендации по оформлению отчета к лабораторной работе

Отчет по лабораторной работе должен иметь следующее содержание:

1. Название работы.
2. Краткое изложение цели работы.
3. Перечень приборов и оборудования.
4. Схема установки.
5. Краткое изложение теории метода с выводами рабочих формул.
6. Запись экспериментальных результатов с указанием единиц измерения и приборной погрешности. Запись параметров установки, необходимых для последующих расчетов (также с указанием единиц и погрешностей).
7. Обработанные результаты измерений, представленные в виде таблиц, чисел, графиков - в соответствии с заданием, определенном в методической разработке к лабораторной работе.
8. Вычисление погрешностей.
9. Анализ результатов: сравнение с табличными данными, с теорией, с данными других экспериментов - также с учетом погрешностей.
10. Выводы.

Элементы теории ошибок. Средние квадратические погрешности

а) Функция распределения. Распределение Гаусса и его характеристики.

Допустим, что произведено n измерений некоторой случайной величины x: x_1, x_2, ... x_n - одним и тем же методом и с одинаковой тщательностью. Можно ожидать, что число dn полученных результатов, которые лежат в некотором достаточно узком интервале от x до $x + dx$, должно быть пропорционально:

- величине взятого интервала dx;

- общему числу измерений n.

Таким образом, можно записать, что

$$dn = f(x)\, n\, dx,$$

где $f(x)$ - функция, характеризующая распределение значений случайных величин по разным интервалам.

Вероятность $dw(x)$ того, что некоторое значение x лежит в интервале от x до $x + dx$, определяется следующим образом:

$$dw(x) = \frac{dn}{n} = f(x)dx \qquad \text{(при числе измерений } n \to \infty\text{).}$$

Функция $f(x)$ называется функцией распределения или плотностью вероятности.

В качестве постулата теории ошибок принимается, что результаты прямых измерений и их случайные погрешности при большом их количестве подчиняются закону нормального распределения.

Найденная Гауссом функция распределения непрерывной случайной величины x имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$, где μ и σ – параметры распределения.

Параметр μ нормального распределения равен среднему значению $\langle x \rangle$ случайной величины, которое при произвольной известной функции распределения определяется интегралом

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \mu .$$

Таким образом величина μ является наиболее вероятным значением измеряемой величины *x,* т.е. ее наилучшей оценкой.

Параметр σ^2 нормального распределения равен <u>дисперсии *D* случайной величины</u>, которая в общем случае определяется следующим интегралом

$$D = \int_0^\infty (x - \mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2 .$$

Квадратный корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ называется <u>средним квадратическим отклонением случайной величины.</u>

<u>Среднее отклонение</u> (погрешность) <u>случайной величины</u> <u>$\langle\sigma\rangle$</u> определяется с помощью функции распределения следующим образом

$$\langle \sigma \rangle = \int_0^\infty |x - \mu| f(x)\,dx$$

Средняя погрешность измерений $\langle\sigma\rangle$, вычисленная по функции распределения Гаусса, соотносится с величиной среднего квадратического отклонения σ следующим образом:

$<\sigma> = 0{,}8\ \sigma$.

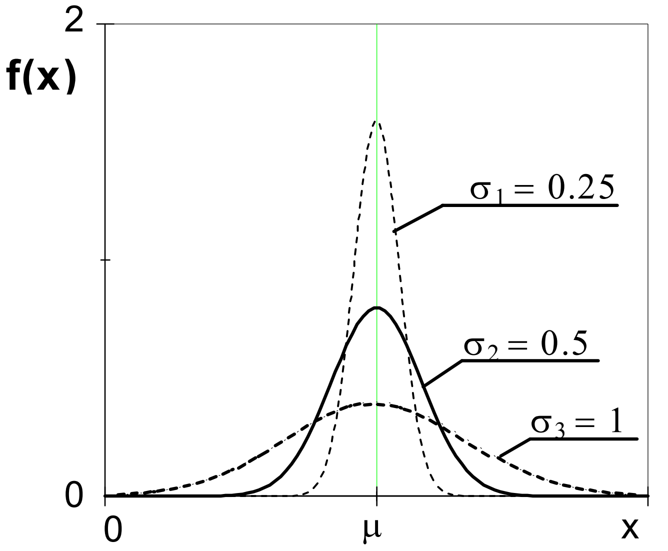
Параметры σ и μ связаны между собой следующим образом:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi} f(\mu)} .$$

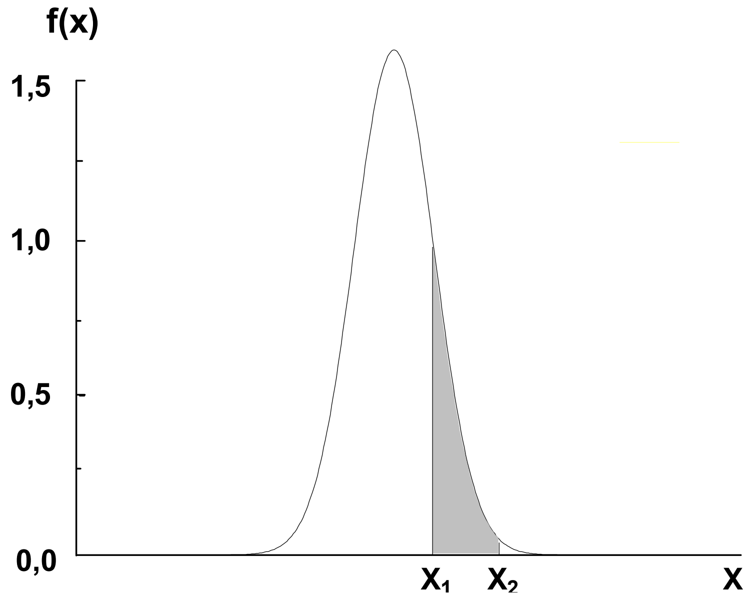
Это выражение позволяет находить среднее квадратическое отклонение σ, если имеется кривая нормального распределения.

График функции Гаусса представлен на рисунках. Функция $f(x)$ симметрична относительно ординаты, проведенной в точке $x = \mu$; проходит через максимум в точке $x = \mu$ и имеет перегиб в точках $\mu \pm \sigma$. Таким образом, дисперсия характеризует ширину функции распределения, или показывает, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно ее истинного значения. Чем точнее измерения, тем ближе к истинному значению результаты отдельных измерений, т.е. величина σ - меньше. На рисунке А изображена функция $f(x)$ для трех значений σ.

А



Б



Площадь фигуры, ограниченной кривой $f\,(x)$ и вертикальными прямыми, проведенными из точек x_1 и x_2 (рис.Б), численно равна вероятности попадания результата измерения в интервал $\Delta x = x_1 - x_2$, которая называется доверительной вероятностью. Площадь под всей кривой $f\,(x)$ равна вероятности попадания случайной величины в интервал от 0 до ∞, т.е.

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1 \; ,$$

так как вероятность достоверного события равна единице.

Используя нормальное распределение, теория ошибок ставит и решает две основные задачи. Первая - оценка точности проведенных измерений. Вторая - оценка точности среднего арифметического значения результатов измерений.

б) Точность результатов измерений.

Точность измерений в теории ошибок характеризуется доверительным интервалом $(\langle x\rangle \pm \Delta x)_w$, таким что с доверительной вероятностью, равной w, результат отдельного измерения находится внутри интервала. Эта вероятность также равна относительной доле результатов, оказавшихся внутри доверительного интервала (см. стр. 4-5).

Таким образом, для характеристики величины случайной погрешности необходимо задать два числа, а именно, величину доверительного интервала и величину доверительной вероятности. Указание одной только величины погрешности без соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла. [*)]

Если известна средняя погрешность измерения $\langle\sigma\rangle$, доверительный интервал, записанный в виде $(\langle x\rangle \pm \langle\sigma\rangle)_w$, определен с доверительной вероятностью $w = 0{,}57$.

Если известно среднее квадратическое отклонение σ распределения результатов измерений, указанный интервал имеет вид $(\langle x\rangle \pm t_w\sigma)_w$, где t_w - коэффициент, зависящий от величины доверительной вероятности и рассчитывающийся по распределению Гаусса.

Наиболее часто используемые величины $\Delta x = t_w\sigma$ приведены в таблице 2.

[*)] Исторически сложилось так, что в разных областях знаний используют различные значения доверительной вероятности, равные 0,5; 0,8; 0,9; 0,95. Так, в высокоответственной области расчета артиллерийской стрельбы общепринятой является так называемая срединная ошибка, т.е. погрешность с вероятностью $w = 0{,}5$. Доверительная вероятность $w = 0{,}8$ является общепринятой в теории и практике оценки надежности средств автоматики, электронной и измерительной техники. В физическом практикуме обычно принято значение доверительной вероятности $w = 0{,}9$.

Таблица 2.

w	0,68	0,9	0,95
Δx	σ	$1{,}7\sigma$	2σ

На практике **при проведении ограниченного числа измерений мы не знаем точного значения дисперсии, а можем лишь оценить ее величину**. Наилучшей оценкой среднего квадратического отклонения σ является средняя квадратическая погрешность n измерений ^nS:

$$\sigma \approx {}^nS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2}{n-1}}$$

Эта величина статистически стремится к σ при $n \to \infty$.

Таким образом, мы неизбежно заменяем величину σ в доверительном интервале на ее приближенное значение ^nS. При этом необходимо помнить, что чем меньше число измерений, тем хуже это приближение. Так, теория показывает, что для корректного определения доверительного интервала с доверительной вероятностью $w = 0{,}9$ требуется не менее 40 измерений.*)

в) Точность среднего арифметического результатов измерений.

Выше рассматривалась вероятность отклонения результата отдельного измерения от истинного значения величины x. Не менее важно знать, насколько может отклоняться от истинного значения среднее арифметическое результатов измерений. Это отклонение также характеризуется доверительным интервалом $(\langle x\rangle \pm \Delta x)_w$ но таким, в котором с доверительной вероятностью w находится среднеарифметическое значение измеренной величины.

Строго говоря, если величина x имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то и ее среднее значение $\langle x\rangle$ имеет нормальное распределение с математическим

*) При 10 измерениях ^{10}S определяется с погрешностью около 30%. Именно отсюда следует принятое на практике правило: при небольшом числе измерений в погрешности следует оставлять одну значащую цифру, если она больше 2, и две значащие цифры, если первая из них - двойка или единица.

ожиданием μ и дисперсией σ^2/n. Т.е. случайная погрешность среднего арифметического меньше, чем погрешность единичного измерения.

Если в качестве оценки σ используется средняя квадратическая погрешность ${}^nS$, то для оценки отклонения среднего значения применяется средняя квадратическая погрешность среднего арифметического ${}^nS_{<x>}$:

$${}^nS_{\langle x\rangle} = \frac{{}^nS}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2}{n(n-1)}}$$

Величина ${}^nS_{<x>}$ статистически стремится к нулю при $n\to\infty$.

В теории ошибок доказывается, что при небольшом числе измерений (n < 30), которое реально имеет место в работах физического практикума, в доверительный интервал необходимо ввести коэффициент $t_{w,n}$, называемый коэффициентом Стьюдента. Тогда доверительный интервал принимает вид $(<x> \pm t_{w,n}\ {}^nS_{<x>})_w$.

Чем меньше число n проведенных измерений, тем больше среднее значение может отклониться от истинного. Значит, при одной и той же доверительной вероятности w коэффициент Стьюдента должен расти с уменьшением n, см. таблицу 3.

Таблица 3.

w \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	100	∞
0.9	6.3	2.9	2.4	2.1	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
0.95	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.4	2.4	2.3	2.3	2.1	2.1	2.0	2.0

г) Полная погрешность. Погрешность косвенных измерений.

Согласно теории при совершенно независимых случайной и приборной погрешностях полная погрешность эксперимента вычисляется

следующим образом: $$\Delta x^{exp} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x^{приб})^2}\ .$$

При этом обе погрешности должны задавать доверительные интервалы с одинаковой доверительной вероятностью. Приборная погрешность задает свой интервал с доверительной вероятностью w = 0,9. Существуют и другие способы учета результирующей погрешности эксперимента.

В косвенных измерениях вычисляют среднюю квадратическую абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + ...}$$

где Δx, Δy, Δz, ... - полные среднеквадратические ошибки эксперимента.

Формула для вычисления относительной погрешности косвенной величины *a* включает в себя квадраты относительных погрешностей. Например, для величины *a*, которая задается расчетной формулой

$$a = \frac{kx^n y^{\frac{1}{m}}}{z^p} ,$$

где *k* - численный коэффициент, относительная погрешность, определяемая теорией ошибок, равна:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(n\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\frac{\Delta y}{\langle y\rangle}\right)^2 + \left(p\frac{\Delta z}{\langle z\rangle}\right)^2} ,$$

что следует из

$$\varepsilon_a = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln a}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln a}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln a}{\partial z}\cdot\Delta z\right)^2}$$

Литература.

1. А.Н.Зайдель. Погрешности измерений физических величин. Л., Наука, 1985.

2. Л.Г.Деденко. В.В.Керженцев. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М., Изд-во МГУ, 1977.

3. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под редакцией В.И.Ивероновой. М., Наука, 1967.

4. П.В.Новицкий, И.А.Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. Л., Энергоатомиздат, 1991.

5. Лабораторные работы по курсу физики для естественных факультетов МГУ. Механика. М., Моск. ун-т. 1997.

6. Методическая разработка по общему физическому практикуму. Погрешности измерений. Сост. Д.В.Белов. М., МГУ, 1993.