Задачи с зачётов по теории вероятностей

Преподаватель — Александр Евгеньевич Кондратенко

4 семестр, архив за 2004–2008 г

Издание 2-е, исправленное и дополненное

Предисловие ко второму изданию

В прошлом семестре (весна 2008) я был в группе, в которой теорию вероятностей преподавал А. Е. Кондратенко и мне и моим товарищам очень помогли задачи, выложенные у вас на сайте. Походив на зачеты, мы поняли, что в них надо многое исправить. И тут мы, главным образом я, жутко ступили. Надо было выслать вам несколько новых задач и замечания, или хотя бы попросить исходники, чтобы их исправить. Но мы решили полностью перенабрать эти 60 задач (из которых, как оказалось, 2 можно было выкинуть). Как бы то ни было, сейчас у меня наконец дошли руки до того, чтобы причесать и доделать наше художество. Мы добавили несколько новых задач и написали решения там, где их знали.

Андрей (`avolk07@mail.ru`)

Размещено на сайте `http://dmvn.mexmat.net`

Предисловие к первому изданию

Посвящается всем, безвременно погибшим
на зачётах от теории вероятностей

Решения: Д. Вельтищев, М. Вельтищев, А. Климаков
В. Клепцын, Ю. Кудряшов, В. Степанов, Т. Архангельский

Свёрстано Д. Вельтищевым, Ю. Кудряшовым или Т. Архангельским с вероятностью $\frac{1}{3}$

Задача 1. *Есть n палок, каждую из которых разломали на 2 части. После этого получившиеся части соединили в пары произвольным образом. Какова вероятность того, что получились в точности исходные палки?*

Решение. Точно исходные палки получатся в единственном из всех случаев сборки. Посчитаем количество вариантов собрать n пар из $2n$ частей. Представим, что мы положили части в определенном порядке и потом соединяем 1 и 2, 3 и 4 и так далее. Тогда способов разложить части будет $(2n)!$ Нам неважно, в каком порядке будут лежать части «внутри палки» — палка получится одинаковая. То есть из одного упорядоченного разложения просто перекладывая части «внутри палки» мы можем получить 2^n эквивалентных сборок. Поэтому делим на 2^n. Кроме того, нас не интересует, в каком порядке будут в итоге лежать получившиеся палки. Способов их переложить $n!$. Значит, искомая вероятность $\frac{n!2^n}{(2n)!}$ ■

Задача 2. *У страховой компании 10^4 клиентов, вероятность смерти каждого равна $6 \cdot 10^{-3}$, страховой взнос 12 у.е., выплата в случае смерти* - 10^3\$. *Найти вероятность того, что доход компании превысит $4 \cdot 10^4$ и вероятность разорения.*

Решение. Подробно рассмотрим случай небывалого дохода, разорение - аналогично. Годовой доход равен $12 \cdot 10^4$, значит, должно произойти не более 80 смертей. Применим теорему Муавра-Лапласа:

$$P\big(a \leqslant \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\big) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Подгоним под формулу:

$$\mu_n \leqslant 80 \Leftrightarrow \frac{\mu_n - 10000 \cdot 0.006}{\sqrt{10000 \cdot 0.006(1-0.006)}} \leqslant \frac{80 - 10000 \cdot 0.006}{\sqrt{10000 \cdot 0.006(1-0.006)}} = b.$$

В нашем случае $a = -\infty$, поэтому искомая вероятность равна

$$P(\mu_n \leqslant 80) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi_0(b).$$

■

Задача 3. *Вероятность попадания одной пули в бочку с бензином равна p. При одном попадании бочка взрывается с вероятностью p_1, при двух и более - взрывается наверняка. Найти вероятность того, что бочка рванет при n выстрелах.*

Решение. Рассмотрим три случая: не попали ни разу, одно попадание и больше двух попаданий. Обозначим эти события $A_0,\ A_1$ и A_2 соответственно. Обозначим событие A - бочка взорвалась. Тогда $P(A) = P(A|A_0)P(A_0) + P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2)$.
Имеем $P(A_0) = (1-p)^n, P(A_1) = C_n^1 p(1-p)^{n-1}, P(A_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1)$.
Из условия $P(A|A_0) = 0, P(A|A_1) = p_1, P(A|A_2) = 1$
Подставляем, $P(A) = npp_1(1-p)^{n-1} + 1 - np(1-p)^{n-1} - (1-p)^n = 1 + (1-p)^{n-1}(np(p_1-1)) - (1-p)^n = 1 + (1-p)^{n-1}(np(p_1-1) - (1-p))$ ■

Задача 4. *Завод выпускает изделия с вероятностью брака* 0.04. *Первый контролер находит брак из брака с вероятностью* 0.92, *второй -* 0.98. *Найти вероятность, с которой признанное годным изделие будет бракованным*

Решение. Пусть события A_1 - деталь изготовлена с браком, $P(A_1) = 0.04$, A_2 - без брака, $P(A_2) = 0.96$, B - деталь признана годной. Тогда искомая вероятность

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{0.04 \cdot P(B|A_1)}{0.04 \cdot P(B|A_1) + 0.96 \cdot 1} = \frac{1}{481}$$

так как $P(B|A_1) = \frac{0.08+0.02}{2} = 0.05$ ■

Задача 5. *Вероятность прихода в бюро k человек равна $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Вероятность получения отказа p. Найти вероятность ровно m отказов.*

Решение. Введем дополнительное обозначение: η - количество деталей.

$$P(\xi = m) = P(\xi = m, (\eta = m) + (\eta = s+1) + \cdots) = \sum_{k=m}^{\infty} P(\xi = m|\eta = k)P(\eta = k) =$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} p^m q^{k-m} C_k^m = \sum_{k=m}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} p^m q^{k-m} \frac{k!}{m!(k-m)!} = e^{-\lambda}\frac{p^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-m)!} q^{k-m} =$$

$$e^{-\lambda}\lambda^m\frac{p^m}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^{k-m}}{(k-m)!}q^{k-m}=e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}\frac{p^m\lambda^m}{m!}=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^m}{m!}.$$

■

Задача 6. *На отрезок $[0,L]$ бросают три точки. Найти вероятность того, что третья окажется между первыми двумя*

Решение. По сути требуется найти объем множества $\{(x,y,z)|(x<z<y)\vee(y<z<x)\}$. Так как все множества вида $\{(x,y,z)|(x<y<z)\}$ (x,y,z идут в определенном порядке) получаются друг из друга движениями, не пересекаются и в сумме покрывают весь куб кроме множества нулевой меры, а всего их 6, то объем каждого из них $1/6$. Значит, объем нашего множества $1/3$. ■

Задача 7. *Найти мат.ожидание и дисперсию случайной величины:*

$$p(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Ответ: $M\xi=\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}, M\xi^2=\frac{3}{8}\alpha^2$ ■

Задача 8. *На отрезок бросаются две точки. Найти мат. ожидание и дисперсию расстояния между ними.*

Решение. Мат. ожидание:

$$M|\xi-\eta|=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}}|x-y|dxdy=2\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}(y-x)dxdy=2\Big(\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}y\,dx\,dy-\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}x\,dx\,dy\Big)=\frac{1}{3}$$

Дисперсия:

$$D|\xi-\eta|=M(\xi-\eta)^2-\frac{1}{9}=$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}}(x-y)^2dxdy-\frac{1}{9}=\int\limits_0^1\Big(\frac{1}{3}-y+y^2\Big)dy-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

■

Задача 9. *Найти мат. ожидание и дисперсию величины ξ с плотностью $p(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$*

Решение. Плотность симметрична относительно точки $x=a$, поэтому $M\xi=a$. Найдем дисперсию:

$$D\xi=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}dx=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2e^{|x|}\alpha dx=\frac{\alpha^3}{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=$$

$$\frac{\alpha}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=\alpha^2\int\limits_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=\alpha^2\Gamma(3)=2\alpha^2$$

■

Задача 10. *Найти мат. ожидание и дисперсию гипергеометрического распределения.*

Решение. Гипергеометрическое распределение задается $p_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
Его смысл: в урне находится N шаров, из них M белых. Из урны достают без возвращения n шаров, выписана вероятность того, что m из них будут белыми.
Решаем через индикаторы: наша с.в. - количество вынутых белых шаров $\xi = I_1 + \ldots + I_n$, где I_i - с.в. равная 1, если i-тый вытащенный шар белый, 0 иначе. Индикаторы зависимы, $P(I_i = 1) = \frac{M}{N}$, $P(I_i I_j = 1) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$ при $i \neq j$. $MI_i = MI_i^2 = \frac{M}{N}$. Поэтому

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} MI_i = \frac{nM}{N}$$

$$M\xi^2 = M(I_1 + \ldots + I_n)^2 = MI_1^2 + \ldots + MI_n^2 + 2\sum_{1\leqslant i \leqslant j \leqslant n} MI_i I_j =$$

$$= M\xi + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} = \frac{nM}{N}\left(\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right)$$

Отсюда

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \ldots = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$$

■

Задача 11. *Найти мат. ожидание и дисперсию числа смен успеха на неуспех и неуспеха на успех в схеме Бернулли.*

Решение. Решим задачу для смен успеха на неуспех. Вероятность смены успеха на неуспех при переходе с i-той позиции на j-тую равна pq. Следовательно, мат. ожидание числа смен успеха на неуспех при этом переходе равно pq. Но мат. ожидание суммы равно сумме мат. ожиданий. Следовательно, $M\xi = (n-1)pq$. Дисперсию сами. ■

Задача 12. *Пусть ξ_1, ξ_2 - случайные пуассоновские величины с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, причём $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Доказать, что $\forall t > 0$ выполняется $P(\xi_1 \leqslant t) \geqslant P(\xi_2 \leqslant t)$.*

Решение. Заметим, что

$$P(\xi \leqslant t) = \sum_{k=0}^{[t]} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} Q_{[t]}(\lambda)$$

Найдём производную этой вероятности по λ:

$$P'_\lambda(\xi_\lambda \leqslant t) = (e^{-\lambda}Q_{[t]}(\lambda))'_\lambda = -e^{-\lambda}Q_{[t]}(\lambda) + e^{-\lambda}Q'_{[t]}(\lambda) = -e^{-\lambda}(Q_{[t]}(\lambda) - Q_{[t]-1}(\lambda)) = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^{[t]}}{[t]!} < 0$$

Из чего следует утверждение задачи. ■

Задача 13. *Даны ξ_1, ξ_2 - независимые, имеют геометрическое распределение. Найти вероятность того, что $\xi_1 = k$ при условии что $\xi_1 + \xi_2 = n$*

Решение. По определению, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
Найдем вероятность того, что $\xi_1 = k$ и $\xi_1 + \xi_2 = n$:

$$P(\xi_1 = k, \xi_1 + \xi_2 = n) = P(\xi_1 = k, \xi 2 = n - k) = p_1 q_1^k p_2 q_2^{n-k}$$

Теперь найдем вероятность того, что $\xi_1+\xi_2=n$:

$$P(\xi_1+\xi_2=n)=\sum_{k=0}^{n}P(\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n)=\sum_{k=0}^{n}p_1q_1^kp_2q_2^{n-k}=p_1p_2\frac{q_1^{n+1}-q_2^{n+1}}{q_1-q_2}$$

Осталось поделить одно на другое. ■

Задача 14. *Пусть ξ - геометрически распределенная случайная величина. Найти распределение величины $\eta=\xi\frac{1+(-1)^\xi}{2}$.*

Решение. Заметим, что $\eta=\xi$, если ξ принимает четное значение и $\eta=0$ в противном случае. Значит, $P(\eta=0)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(\xi=2k+1)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}pq^{2k+1}=\frac{pq}{1-q^2}$, $P(\eta=2k+1)=0$, $P(\eta=2k)=pq^{2k}$ ■

Задача 15. *ξ,η - независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Найти распределение (или плотность) величины $\chi=\xi^2+\eta^2$*

Решение. Найдем функцию распределения. $F_\chi(t)=0$ при $t\leqslant 0$, так как $\chi\geqslant 0$. При $t>0$:

$$F_\chi(t)=P(\chi\leqslant t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t}p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t}p_\xi(x)p_\eta(y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

Перейдем к полярным координатам, получим:

$$F_\chi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\int\limits_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}d\frac{r^2}{2}=\int\limits_0^{t/2}e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_0^{t/2}=1-e^{-\frac{t}{2}}$$

Плотность будет

$$p_\chi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}},\ t\geqslant 0\\ 0,\ t<0\end{cases}$$

■

Задача 16. *Пусть ξ,η - нормальные распределения с параметрами $(0,1)$ Найти распределение $\frac{\xi}{\eta}$*

Решение. Зная, что $p_\xi(x)=p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, найдем распределение

$$F_{\frac{\xi}{\eta}}(t)=\iint\limits_{\frac{y}{x}\leqslant t}\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}dx\,dy=\iint\limits_{\operatorname{tg}\varphi\leqslant t}\frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi}r\,dr\,d\varphi=2\Big(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}t\Big)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-u}du=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg}t}{\pi}$$

Получили распределение Коши. ■

Задача 17. *Даны ξ,η - независимые нормально распределенные величины с параметрами $(0,1)$. Найти $F_{\frac{\xi}{\eta},\xi^2+\eta^2}$*

Задача 18. *Пусть η - распределение Коши, $\xi=b\eta+a$, где $b\neq 0$. Найти $p_{\frac{1}{\xi}}(x)$*

Задача 19. *Выполняется ли ЗБЧ для такой последовательности случайных величин:*

$$P(\xi_n=2^n)=P(\xi_n=-2^n)=2^{-2n+1},\ P(\xi_n=0)=1-2^{-2n}?$$

Решение. Да, так как дисперсии $D_{\xi_n}=M\xi_n^2=1$ ограничены в совокупности. ■

Задача 20. *Пусть $M\xi=0$. Доказать, что $M|\xi|\leqslant\frac{1}{2}(D\xi+1)$*

Решение. $M\xi = 0$, значит, $D\xi = M\xi^2$. Надо доказать, что $2M|\xi| \leqslant M(\xi^2+1)$, то есть $M(\xi^2 - 2|\xi|+1) \geqslant 0$ - правда, так как мат. ожидание неотрицательной величины неотрицательно. ■

Задача 21. *Дана* $\{\xi_n\}_{i=1}^{\infty}$ *- последовательность независимых случайных величин,* $M\xi_i = 0, D\xi_i < K \quad \forall i \in \mathbb{N}$ *Доказать, что* $\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} M\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\Big|$ *ограничены в совокупности.*

Решение. Обозначим $\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}$ Так как $M\eta_n = 0$, то $M|\eta_n| \leqslant \frac{D\eta_n+1}{2}$. Кроме того, $D\eta_n = \frac{D\xi_1+\ldots+D\xi_n}{n} \leqslant \frac{Kn}{n} = K$. Значит, $\mathrm{A}_n = M|\eta_n| \leqslant \frac{K+1}{2}$ ■

Задача 22. *Пусть* $\xi_1,\ldots,\xi_n$ *- независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\eta_n = \xi_1+\ldots+\xi_n$. *При этом* $M\xi_i = 0$ *и* $\exists D\xi_i$. *Также дано, что* $\lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n > \sqrt{n}) = \frac{1}{3}$. *Найти* $D\xi_i$ *и доказать, что* $\forall a, b < \infty \lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n \in [a,b]) = 0$

Решение. Обозначим $\sigma^2 = D\xi_i$. Применим ЦПТ:

$\frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n > \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{1}{\sigma}) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{1}{\sigma}) =$

$= 1 - \int\limits_{-\infty}^{1/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2} - \int\limits_{0}^{1/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2} - \Phi_0(1/\sigma).$

Таким образом, $D\xi_i = \sigma^2 = \left(\frac{1}{\Phi_0^{-1}(1/6)}\right)^2$. Посмотрим на второе утверждение:

$$a \leqslant \eta_n \leqslant b \Leftrightarrow \frac{a}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{\eta_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{b}{\sigma\sqrt{n}}$$

Применим ЦПТ:

$$P(\frac{a}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{\eta_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{b}{\sigma\sqrt{n}}) \to \int\limits_{a/(\sigma\sqrt{n})}^{b/(\sigma\sqrt{n})} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \to 0,\ n\to\infty.$$

Задача 23. *Дана производящая функция* Φ. *Найти характеристическую.*

Решение. По определению,

$$f(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{it}\right)^k = \Phi(e^{it})$$

■

Задача 24. *Доказать, что* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$

Решение. Рассмотрим независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 с плотностью p. Тогда характеристическая функция их разности будет в точности $f_{\xi_1-\xi_2}(t) = |f_\xi(t)|^2$.

По формуле свёртки $p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t-x)p(t)dt$, так как $p_{-\xi}(x) = p_\xi(-x)$

Запишем формулу обращения:

$$p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}|f(t)|^2dt.$$

Приравниваем правые части из обоих формул, подставляем $x = 0$, получаем требуемое утверждение.
■

Задача 25. *Пусть* $(\xi_n-\xi)^2 \xrightarrow{P} 0$. *Доказать*[1] , *что* $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$

Решение. Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Действительно, $P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=P((\xi_n-\xi)^2>\varepsilon^2)\to 0$ при $n\to\infty$. Теперь докажем, что из $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ следует $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$:

$P(|\xi_n^2-\xi^2|>\varepsilon)=$
$P(|\xi_n^2-\xi^2|>\varepsilon,|\xi|>C-1)+P(|\xi_n^2-\xi^2|>\varepsilon,|\xi|\leqslant C-1,|\xi_n|\leqslant C)+$
$P(|\xi_n^2-\xi^2|>\varepsilon,|\xi|\leqslant C-1,|\xi_n|>C)\leqslant P(|\xi|>C-1)+P(|\xi-\xi_n|>\frac{\varepsilon}{2C})+P(|\xi-\xi_n|>1)$

Сначала выберем C так, чтобы первое слагаемое стало маленьким. Потом выберем N так, что при $n>N$ второе и третье слагаемое тоже стали малы. ■

Задача 26. *Пусть* $b>a>0,\Phi$ *- производящая функция. Доказать, что*

$$M\frac{1}{(\xi+a)(\xi+b)}=\int\limits_0^1 z^{b-a-1}\int\limits_0^z u^{a-1}\Phi(u)dudz$$

Решение. По определению,

$$\int\limits_0^1 z^{b-a-1}\int\limits_0^z u^{a-1}\Phi(u)dudz=\int\limits_0^1 z^{b-a-1}\int\limits_0^z u^{a-1}\sum_{k=0}^{\infty}p_k u^k dudz=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k\int\limits_0^1 z^{b-a-1}\int\limits_0^z u^{k+a-1}dudz=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\int\limits_0^1 z^{b-a-1}\tfrac{z^{k+a}}{k+a}dz=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k\int\limits_0^1 \tfrac{z^{b+k-1}}{k+a}dz=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\tfrac{1}{(k+a)(k+b)}=M\tfrac{1}{(k+a)(k+b)}$$

■

Задача 27. *Пусть* ξ_i *- независимые одинаково распределенные случайные величины,* $M\xi_i=a,D\xi_i=\sigma^2$. *Доказать, что последовательность* $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$ *сходится и найти к чему.*

Решение. Эта последовательность сходится к $\frac{a}{a^2+\sigma^2}$ Действительно,

$M\xi_i^2=M^2\xi_i+D\xi_i=a^2+\sigma^2$. Еще заметим, что $\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}=\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\cdot\dfrac{n}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$.

Но первая из дробей, согласно ЗБЧ, сходится к a, а последовательность, обратная второй - к $a^2+\sigma^2$. Осталось доказать, что предел частного есть частное пределов для сходимости по вероятности. ■

Задача 28. *Пусть* ξ_i *- н.о.р.с.в., у которых* $M\xi_i=0,D\xi_i=1$. *Доказать, что величина* $\eta_n=\frac{\sqrt{n}(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$ *асимптотически нормально распределенная*

Решение. Заметим, что по ЦПТ $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}$ сходится к нормальному распределению, а $\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}$ по ЗБЧ сходится к своему мат. ожиданию, в нашем случае к 1. Теперь надо правильно сказать, что частное последовательностей сходится к частному пределов. ■

Задача 29. *Доказать, что* ξ *- геометрически распределенная случайная величина тогда и только тогда когда* $P(\xi=n+k|\xi\geqslant k)=P(\xi=n)$.

---

[1] Верен и более общий факт, который, кстати, и доказывается более изящно. Именно, если $\xi_i \xrightarrow{P} \xi$, а f непрерывна, то $f(\xi_i)\xrightarrow{P} f(\xi)$. Доказательство смотри М.И.Дьяченко, П.Л.Ульянов. *Мера и интеграл, стр. 52-53.*

Решение. Посчитаем для геометрического распределения $P(\xi = n+k|\xi \geqslant k)$:

$$P(\xi = n+k|\xi \geqslant k) = \frac{P(\xi = n+k, \xi \geqslant k)}{P(\xi \geqslant k)}$$

Если ξ геометрически распределена, то $P(\xi = k) = (1-q)q^k$, отсюда

$$P(\xi \geqslant k) = \sum_{i=k}^{\infty} P(\xi = i) = (1-q)q^k(1+q+q^2+\ldots) = (1-q)\frac{q^k}{1-q} = q^k$$

Числитель:

$$P(\xi = n+k, \xi \geqslant k) = P(\xi = n+k, n+k \geqslant k) = P(\xi = n+k, n \geqslant 0) = P(\xi = n+k) = (1-q)q^{n+k}$$

Значит,

$$P(\xi = n+k|\xi \geqslant k) = \frac{(1-q)q^{n+k}}{q^k} = (1-q)q^n = P(\xi = n)$$

Заметим, что для $n < 0$ числитель будет 0, как и $P(\xi = n)$.
В одну сторону доказали. Теперь докажем, что это свойство и число $p = 1-q = P(\xi = 0)$ однозначно Задает распределение ξ. Действительно, при $n < 0$ числитель нулевой, значит, $P(\xi < 0) = 0$. Подставляя $n = 0$ в свойство, получим:

$$p = P(\xi = 0) = P(\xi = k|\xi \geqslant k) = \frac{P(\xi = k, \xi \geqslant k)}{P(\xi \geqslant k)} = \frac{P(\xi = k)}{P(\xi \geqslant k)}$$

значит,

$$P(\xi = k) = p \cdot P(\xi \geqslant k) = p(1 - P(\xi < k))$$

Зная, что $P(\xi < 0) = 0, P(\xi = 0) = p$ и подставляя в это соотношение $k = 1, 2, \ldots$ можно найти все вероятности, то есть распределение определено однозначно. Одно такое мы знаем - геометрическое, значит, это оно и есть. $\blacksquare$

Задача 30. *Найти свёртку двух нормальных распределений с параметрами* (a_1, σ_1^2) *и* (a_2, σ_2^2)

Решение. Нормальное распределение с произвольными параметрами $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ может быть представлено в виде $\eta = \sigma\xi + a, \xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Характеристическая функция нормального распределения $f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Кроме того, $f_{b\xi+a} = e^{ita}f_\xi(bt)$ Значит, $f_\eta = f_{\sigma\xi+a} = e^{ita}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Нашли характеристическую функцию нормального распределения с параметрами (a, σ^2).

Теперь задача. Пусть $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$. Тогда

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t)f_{\xi_2}(t) = e^{ita_1}e^{-\frac{\sigma_1 t^2}{2}}e^{ita_2}e^{-\frac{\sigma_2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2)}e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

Значит, $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ $\blacksquare$

Задача 31. *Найти свёртку двух равномерно распределённых на отрезках* $[A, B]$ *и* $[C, D]$ *случайных величин.*

Решение. Надо найти распределение суммы. Другими словами, надо найти, какую часть площади прямоугольника с углами (A, C) и (B, D) лежит в полуплоскости $x + y \leqslant \alpha$. Из геометрии очевидно, что при $\alpha < A + C$ эта площадь равна нулю, при $\alpha \in (A+C, A+D)$ происходит квадратичный рост, при $\alpha \in (A+D, C+B)$ - линейный рост, при $\alpha \in (C+B, B+D)$ - опять квадратичный рост, а при $\alpha > B+D$ доля площади равна единице. Таким образом, плотность сначала равна нулю, потом линейно растёт, потом константа, потом линейно убывает, потом опять ноль. ■

Задача 32. *Являются ли* $\sin x, \cos x$ *и* $|\cos x|$ *характеристическими функциями?*

Решение. $\sin x$ не является, так как $\sin 0 = 0 \neq 1$.
$\cos x$ выражается через e^{ix} и e^{-ix} через формулы Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{ix} & = & \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} & = & \cos x - i\sin x \end{array} \right.$$

То есть, $\cos t = 1/2(e^{it} + e^{-it})$, что соответствует характеристической функции дискретного распределения $\xi : P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = 1/2$

$|\cos x|$ в окрестности нуля совпадает с просто косинусом и имеет в нуле вторую производную, а значит, если это характеристическая функция какой-то случайной величины, то у этой с.в. должен быть момент второго порядка, но если есть момент k-того порядка, то у характеристической функции всюду существует k-тая производная, но у $|\cos x|$ нет производных в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$. Противоречие. ■

Задача 33. *Является ли функция*

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{r} 1 - t^2 \ , |t| \leqslant 1; \\ 0 \ , \textit{иначе}. \end{array} \right.$$

характеристической, если да, то для какого распределения?

Решение. Не является, так как имеет вторую производную в нуле, но не имеет производной в точках ± 1 ■

Задача 34. *Является ли* e^{-t^4} *характеристической функцией?*

Решение. Не является.
Кратко - по теореме Марцинкевича (если х.ф. представляется в виде экспонента в степени многочлен, то такой многочлен не может быть степени больше 2).
Строго:
При разложении в ряд e^{-t^4} первый член, содержащий t будет иметь степень 4. Это значит, что в нуле у нашей функции первая и вторая (и третья) производные равны 0. Но мы знаем, что $f^{(k)}(0) = i^k \alpha_k$, то есть, у нашей предполагаемой с.в. первый и второй моменты нулевые. Это значит, что мат. ожидание $M\xi = \alpha_1$ и дисперсия $D\xi = \alpha_2 - \alpha_1^2$ равны 0. Значит, $P(\xi = const) = 1$, но у константы х.ф. e^{itc}, противоречие. ■

Задача 35. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$, *будет ли* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kt$ *характеристической функцией?*

Решение. Рассмотрим ξ:

$$\begin{pmatrix} -n & -n+1 & \dots & -1 & 1 & \dots & n \\ \frac{a_n}{2} & \frac{a_{n-1}}{2} & \dots & \frac{a_1}{2} & \frac{a_1}{2} & \dots & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда $f_\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \frac{e^{itk}+e^{-itk}}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kt$. ■

Задача 36. *Пусть* $f(t)$ *- характеристическая функция. Является ли* $Re\ f(t)$ *характеристической функцией (а если да, то какого распределения)?*

Ответ: Да, является. (Указание: $Re\ f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$).

Задача 37. *Найти распределение суммы пуассоновских случайных величин через производящие функции*

Решение. Производящая функция для пуассоновского распределения с параметром λ:

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \Phi_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{x^k \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}$$

Таким образом, если $\xi_1 \sim \Pi(\lambda_1), \xi_2 \sim \Pi(\lambda_2)$, то

$$\Phi_{\xi_1+\xi_2}(x) = \Phi_{\xi_1}(x)\Phi_{\xi_2}(x) = e^{\lambda_1(x-1)} e^{\lambda_2(x-1)} = e^{(x-1)(\lambda_1+\lambda_2)} = \Phi_{\Pi(\lambda_1+\lambda_2)}$$

То есть $\Pi(\lambda_1) + \Pi(\lambda_2) \sim \Pi(\lambda_1 + \lambda_2)$ ■

Задача 38. *Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} 0$. Доказать, что $\forall \xi$, такого, что ξ независимо с любым ξ_n, выполнено $\xi\xi_n \xrightarrow{P} 0$.*

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $P(|\xi_n \xi| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\xi|})P(|\xi| > 0) + P(0 \geqslant \varepsilon)P(|\xi| = 0) = P(|\xi_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{C})P(0 \leqslant |\xi| < C) + P(|\xi_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{C})P(|\xi| \geqslant C)$. Тогда $\forall \delta > 0 \ \exists C > 0 : P(|\xi_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\xi|})P(|\xi| \geqslant C) < 1 \cdot \delta = \delta$, тогда $\exists N > 0 : \forall n > N$ выполнено $P(|\xi_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{C})P(0 \leqslant |\xi| < C) < \delta \cdot 1 = \delta$. Значит, $\xi_n \xrightarrow{P} 0$. ■

Задача 39. *Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, верно ли, что $\xi_n - \xi \xrightarrow{d} 0$?*

Ответ: Не верно.

Задача 40. *Пусть xi_n - н.о.р.с.в., $\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ и $p_{\xi_n} = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$ $\quad \xi_n \xrightarrow{d}$?*

Задача 41. *Пусть xi_n - н.о.р.с.в. Доказать, что $\forall k \leqslant n : M\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = \frac{k}{n}\right)$*

Задача 42. *Доказать формулу Байеса.*

Задача 43. *Доказать интегральную теорему Муавра-Лапласа (без использования ЦПТ).*

Задача 44. *Доказать эквивалентность сходимости $\xi_i \xrightarrow{d} \xi$ и сходимости их производящих функций.*

Задача 45. *Доказать ЗБЧ (в простой форме).*

Задача 46. *Доказать ЦПТ (в простой форме).*

Решения смотри учебник Севастьянова.

Задача 47. *Доказать,что мощность σ-алгебры не может равняться 130.*

Решение. У всякой конечной σ-алгебры есть порождающее множество,т.е. множество таких элементов a_i, что $\forall \omega$ из σ-алгебры пересечение a_i и ω равно либо a_i, либо $\varnothing$, и при этом $\bigcup a_i = \Omega$. Такое множество можно построить: взять элемент A из σ-алгебры, потом взять B и, если A и B пересекаются, то оставить вместо них $A \setminus B, B \setminus A$ и $A \bigcap B$. Затем берём элемент C и продолжаем данную процедуру. Она оборвётся на некотором шаге в силу конечности алгебры. В итоге получится порождающее множество мощности n. Но тогда можно установить биекцию между n- битными словами и элементами σ-алгебры по следующему принципу: на i-ая буква есть 1, если $a_i \in \omega$, и 0 в противном случае. Так как таких слов 2^n, то и мощность σ-алгебры есть 2^n. ■

Задача 48. *Доказать,что мощность σ-алгебры не может быть счётной.*

Решение. Пусть σ-алгебра счётна, тогда можно построить счётную последовательность непустых непересекающихся её элементов таким образом: возьмём $A \neq \Omega$ за первый элемент и $\bar{A}$ за второй. Очевидно, что они не пересекаются, и хотя бы один из них можно опять поделить (иначе σ-алгебра была бы конечной). Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не получим $\aleph_0$ непустых непересекающихся элементов. Но любое счётное объединение элементов из неё будет принадлежать σ-алгебре а если брать объединения различных элементов, то получать будем так же разные. Т.о. в σ-алгебре присутствуют как минимум $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ элементов. ■

Задача 49. $\xi > 0, \exists M\xi$. *Доказать,что* $1 \leqslant M\xi M\frac{1}{\xi}$.

Решение. Нужно доказать, что $1 - M\xi M\frac{1}{\xi} \leqslant 0$.Посмотрим на это выражение, как на дискриминант некоторого квадратного уравнения:

$$D \leqslant 0 \Leftrightarrow M\xi x^2 - x + \frac{1}{4}M\frac{1}{\xi} \geqslant 0 \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{\xi}(4x^2\xi^2 - 4x\xi + 1)\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow M\frac{(2x\xi+1)^2}{\xi} \geqslant 0,$$

что верно при любых x, так как это математическое ожидание неотрицательной функции. ■

Задача 50. *ξ_i— последовательность независимых неотрицательных целочисленных одинаково распределённых случайных величин, ν— независимая с ними неотрицательная целочисленная случайная величина. Найти $\Phi_{\xi_1+\ldots+\xi_\nu}$.*

Решение. $\Phi_{\xi_1+\ldots+\xi_\nu} = Mx^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k P(\xi_1+\ldots+\xi_\nu = k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} x^k P(\xi_1+\ldots+\xi_m = k \mid \nu = m) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k P(\xi_1+\ldots+\xi_m = k)P(\nu = m) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(\Phi_{\xi_1(x)})^m P(\nu = m) = \Phi_\nu(\Phi_{\xi_1}(x))$ ■

Задача 51. *Доказать, что если ξ и η независимы, то ρ (коэффициент корреляции) равен нулю, но обратное не всегда верно.*

Решение. $\Rightarrow$ Если ξ и η независимы, то $cov(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = 0$,а значит и ρ=0.
$\Leftarrow$ Рассмотрим величину ξ, принимающие значения 0,$\frac{\pi}{2}$ и π с равными вероятностями, и величины $\sin\xi$ и $\cos\xi$. $0 = P(\cos\xi = 1, \sin\xi = 1) \neq P(\cos\xi = 1)P(\sin\xi = 1) = \frac{1}{9}$, значит величины зависимы.При этом $cov(\cos\xi, \sin\xi) = M\cos\xi\sin\xi - M\cos\xi M\sin\xi = \frac{1}{2}M\sin 2\xi = 0$. ■

Задача 52. *Доказать, что $|\rho(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$.*

Решение. То, что $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$ следует из неравенства Коши-Буняковского $M^2\xi\eta \leqslant M\xi^2 M\eta^2$. Вспомним, как мы его доказывали: $M(\xi+\lambda\eta)^2$ неотрицательно как мат. ожидание неотрицательной случайной величины, притом равенство нулю достигается тогда, когда эта случайная величина с вероятностью 1 является константой 0. С другой стороны,

$$M(\xi+\lambda\eta)^2 = M\xi^2 + 2\lambda M\xi\eta + \lambda^2 M\eta^2 \geqslant 0$$

Это означает, что дискриминант квадратного уравнения на λ меньше либо равен нулю, что и даёт нам неравенство Коши-Буняковского. Пусть он равен нулю (как раз в этом случае $|\rho(\xi,\eta)| = 1$), это значит, что существует такое λ, что $M(\xi+\lambda\eta)^2 = 0$, откуда заключаем, что с вероятностью 1 выполнено $\xi = -\lambda\eta$ ■

Задача 53. *Про производящую функцию $\Phi_\xi(x)$ известно, что $\forall n \geqslant 0$ $\Phi_\xi(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n}$. Найти распределение ξ.*

Решение. $\Phi_\xi(0) = \Phi_\xi\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_\xi(\frac{1}{2^n}) = 0$, значит $p_0 = 0$.Выпишем два равенства:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}p_k = p_0 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}p_k = p_0 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{16}p_2 + \ldots = \frac{1}{4}$$

Домножим второе равенство на 2 и вычтем из первого, помня, что $p_0 = 0$:

$$0 + 0 + \frac{1}{8}p_2 + \ldots = 0$$

Все p_i и коэффициенты перед ними неотрицательны, значит все p_i, кроме p_1, равны 0. Отсюда $p_1 = 1$. ■

Задача 54. *Является ли функция $\Phi(x) = \frac{2e}{e^2+1}\operatorname{ch} x$ производящей, и если да, то какого распределения?*

Решение. Нужно проверить, чтобы в точке $x = 1$ функция равнялась единице и чтобы все её производные в нуле были неотрицательны. Первое условие выполнено.

$$\Phi^{2n+1}(x) = -\frac{2e}{e^2+1}\operatorname{sh} x,$$

$$\Phi^{2n}(x) = \Phi(x).$$

В нуле чётные производные равны $\frac{2e}{e^2+1}$, а нечётные равны 0. Таким образом,

$$p_{2n+1} = 0, p_{2n} = \frac{2e}{(e^2+1)(2n)!}.$$

■

Задача 55. *Верно ли, что сходимость почти всюду равносильна сходимости по вероятности?*

Решение. Из сходимости почти всюду следует сходимость по вероятности, обратное неверно. ■

Задача 56. *Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$. Доказать, что $P(\xi = \eta) = 1$.*

Задача 57. *Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$,$\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Доказать, что $\xi_n\eta_n \xrightarrow{P} 0$.*

Задача 58. *Пусть ξ_i - независимые одинаково распределённые случайные величины, с характеристической функцией*

$$f_{\xi_i}(t) = \begin{cases} 1-|t| \ , |t| < 1; \\ \quad 0 \ , |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

найти $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow{d}$?

Решение. Обозначим $\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$. Найдём $f_{\eta_n}(t)$:

$$f_{\eta_n}(t) = (f_{\frac{\xi_1}{n}}(t))^n = (f_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n = (1-\frac{|t|}{n})^n$$

отсюда получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f_{\eta_n}(t) = e^{-|t|}$$

■

Задача 59. *Про события A и B известно, что $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Доказать, что $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$*

Решение. Напомню обозначения для событий-множеств: $A \cup B = A + B$, $A \cap B = AB$.
Теперь, имея на руках тождество $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ и правило де Моргана $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, подгоним искомое равенство:

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 1 - P\left(\overline{\overline{A+B}}\right) = 1 - P\left(\overline{\bar{A}\bar{B}}\right) = 1 - (1 - P(\bar{A}\bar{B})) = P(\bar{A}\bar{B}).$$

■

Задача 60. *Известно, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.*
Верно ли:
а) $\forall i \ \exists M\xi_i \Rightarrow \exists M\xi$
б) $\exists M\xi \Rightarrow \exists M\xi_i$, начиная с некоторого номера
в) $\exists M\xi_i, \exists M\xi \Rightarrow M\xi_i \to M\xi$

Решение. Ничего не верно. Приводим контрпримеры:
а) Возьмем η - последовательность Коши, а

$$\xi_n = \begin{cases} \eta, \ \eta \in [-n, n] \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Вроде это называется обрезкой. Получаем $\xi_i \xrightarrow{d} \eta = \xi$. Из-за того, что плотность у распределения Коши симметрична относительно 0, а интеграл по конечной области можно взять, то $\forall i \ M\xi_i = 0$, но, как мы знаем, $\nexists M\xi$
б) Опять с Коши. Возьмем

$$\xi_n = \begin{cases} 0, \ \eta \in [-n, n] \\ \eta \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда предельная последовательность будет всюду 0 и мат. ожидание у нее 0, но у любой ξ_i мат. ожидания нет, так как у нее остались от Коши «хвосты» на бесконечности, которые, домноженные на x, дают расходящийся интеграл.
в) Было на лекции скорее всего. Возьмем дискретную с.в.:

$$\xi_n \begin{pmatrix} 0 & n \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Она опять же стремится к константе 0 с мат. ожиданием 0. Но $M\xi_n = 0 \cdot \frac{n-1}{n} + n \cdot \frac{1}{n} = 1$ ■

Задача 61. *Найти коэффициент корреляции между числом выпадения единиц и числом выпадения шестёрок при бросании кубика n раз*

Решение. Рассмотрим случайные величины ξ_i=числу выпадения грани i. Очевидно, что они распределены одинаковы и по сути нет разницы между ξ_1 и ξ_6. Так же ясно,что при бросании кубика n раз выпадет n граней (n-константа). Таким образом получаем:

$$0 = D(n) = D(\xi_1 + \cdots + \xi_6) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_6 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} cov(\xi_i, \xi_j) = 6D\xi_1 + 2C_6^2 cov(\xi_1, \xi_6),$$

отсюда следует,что $\rho(\xi_1, \xi_6) = \frac{cov(\xi_1,\xi_6)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_6}} = \frac{cov(\xi_1,\xi_6)}{D\xi_1} = -\frac{1}{5}$. ■

Задача 62. *Доказать, что если ξ, η имеют совместное нормальное распределение (вектор $(\xi, \eta)^T$ нормально распределен) и их ковариация равна нулю, то ξ и η независимы.*

Задача 63. *Двумерная случайная величина (ξ, η) равномерно распределена на прямоугольнике. Что можно сказать о зависимости ξ и η?*

Ответ: Независимы.

Задача 64. *Двумерная случайная величина (ξ, η) равномерно распределена на круге. Что можно сказать о зависимости ξ и η?*

Ответ: Зависимы.