МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

А.И. Ефимова, А.В. Зотеев, А.А. Склянкин

ОБЩИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

ПОГРЕШНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Москва - 2012

Ефимова А.И., Зотеев А.В., Склянкин А.А.
Общий физический практикум физического факультета МГУ. Погрешности эксперимента: Учебно-методическое пособие. – М.: МГУ, Физический факультет, 2012. – 39 с., илл.

Настоящее учебное пособие содержит изложение методических указаний по обработке результатов измерений и оформлению задач в физическом практикуме, способы оценки погрешностей эксперимента и элементы теории погрешностей.

Пособие состоит их двух частей. Основная часть предназначена для студентов младших курсов, впервые знакомящихся с физическим экспериментом. Ее цель – привить навыки обработки экспериментальных данных при малом ($n = 3 \div 10$) числе измерений.

Вторая часть – Приложение В – содержит элементы теории вероятностей и базирующейся на ней теории погрешностей и будет полезна студентам старших курсов при обработке большого массива экспериментальных данных.

Мы надеемся, что данное пособие пригодится широкому кругу студентов естественных факультетов ВУЗов, выполняющих лабораторные работы физического практикума.

Возможно, читатели найдут опечатки и неточности. Авторы будут признательны за отзывы, замечания и пожелания, которые можно присылать по адресам электронной почты:

zoteyev@inbox.ru, **efimova@vega.phys.msu.ru**

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОГРЕШНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Физика – наука экспериментальная. Поэтому вопрос о точности измерений имеет первостепенное значение. Никакие измерения не могут быть абсолютно точными. Измеряя какую-либо физическую величину, мы всегда получаем результат с некоторой погрешностью (ошибкой). Другими словами, полученное в результате измерений значение физической величины всегда отличается от её истинного значения.

Цель данного пособия – предложить студентам наиболее простой, но вместе с тем достаточно корректный, способ обработки результатов экспериментальных работ, проводимых в рамках физического практикума.

Прежде всего необходимо научиться оценивать погрешности проводимых экспериментов. **Различают систематические, случайные погрешности и промахи**.

Промахи (или грубые ошибки) обусловлены главным образом недостаточным вниманием экспериментатора, резкими неучтёнными изменениями условий эксперимента или неисправностями средств измерения. Промахи проявляются в значительном отклонении результата отдельного измерения от остальных. Результаты таких измерений отбрасываются (строго говоря, на основании определённых критериев). Их мы обсуждать не будем.

1.1. Систематические погрешности

Систематические погрешности обусловлены факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Они вызывают отклонение измеренного значения от истинного всегда в одну и ту же сторону – либо в большую, либо в меньшую.

Систематические погрешности могут быть обусловлены многими причинами, например:

– неисправностью приборов или их неправильным использованием (например, неправильной установкой «нуля»);

– несовершенством методики измерения или неучётом постоянно действующих факторов, влияющих на исследуемое явление. Например, можно получать завышенные значения температуры плавления кристалла, если проводить измерения при повышенном внешнем давлении;

– применением приближённых («упрощённых») формул в случае косвенных измерений. Отличием реального объекта от принятой модели (например, при определении плотности может возникнуть большая систематическая ошибка, если исследуемый образец содержит внутри пустоты).

После выявления причин систематические погрешности можно устранить или свести к минимуму, вводя соответствующую поправку. Обнаружить же систематические погрешности и установить их причину бывает не всегда просто, и экспериментатору часто приходится проводить дополнительные исследования. Большую помощь в этом случае может оказать проведение контрольных измерений на стандартных объектах.

При выполнении задач физического практикума указанные систематические погрешности не обсуждаются, так как предполагается, что они сведены к минимуму при постановке каждой задачи.

1.2. Случайные погрешности

Случайными называются погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом.

Случайные погрешности обусловлены множеством неконтролируемых факторов, действие которых различно при повторении измерений. В результате этого при измерении одной и той же величины несколько раз подряд в одинаковых условиях получается ряд различных значений этой величины, отличающихся от истинного значения случайным образом как в большую, так и в меньшую сторону.

Случайные погрешности могут быть вызваны такими причинами, как, например:

– несовершенство органов чувств экспериментатора (например, невозможность включить секундомер точно в нужный момент);

– несовершенство измерительного прибора (например, флуктуация нулевого положения);

– случайные неконтролируемые изменения внешних воздействий – температуры, влажности, давления; флуктуации в электрической цепи и т.д., – которые практически невозможно учесть.

Алгоритмы расчётов случайных ошибок базируются на математическом аппарате теории вероятности и теории погрешностей, основные положения которых кратко рассматриваются в **Приложении**.

> Следует отдавать себе отчёт, что **в условиях практикума при небольшом (n = 3 ÷ 10) числе измерений вычисления погрешностей всегда носят оценочный характер**. При этом чем меньше число измерений, тем грубее эта оценка.

Случайные погрешности всегда присутствуют в эксперименте.

1.3. Приборные погрешности

Приборными называются погрешности, обусловленные принципиальным несовершенством и ограниченной точностью изготовления и градуировки технических устройств, используемых для измерений.

Приборная погрешность определяется для всей совокупности конкретного типа приборов путём сравнения показаний приборов исследуемой партии с показаниями эталонного прибора. За значение приборной погрешности принимается **предельно допустимая для данного класса приборов погрешность**, которая **указывается в паспортных данных прибора**.

2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Доверительный интервал

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы, в которых заключено истинное значение измеряемой величины – **доверительный интервал**[1)].

Принята следующая форма записи результата измерений какой-либо величины:

$$\xi = (\langle\xi\rangle \pm \Delta\xi)\ \textit{ед. измерения}, \tag{1}$$

где $\langle\xi\rangle$ – наиболее вероятное значение измеряемой величины ξ, а $\Delta\xi$ – рассчитанная тем или иным способом **погрешность эксперимента**.

2.2. Типы измерений

Прямое измерение. Измерение называется прямым, если значение физической величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора (считывается со шкалы).

Косвенное измерение. Измерение называется косвенным, если физическая величина находится путем вычислений с использованием нескольких прямо (непосредственно) измеренных величин.

[1)] Вычисляемый по приведенному далее алгоритму доверительный интервал соответствует диапазону, в который при большом числе измерений попадает 57% результатов. Более подробно об этом см. в Приложении В.

2.3. Оценка погрешности при прямых измерениях

2.3.1. Оценка погрешности измерений

Пусть в результате проведённых в одинаковых условиях прямых измерений физической величины x был получен набор из n значений

$$x_1, x_2, \dots, x_n .$$

Истинное значение измеряемой величины узнать невозможно!

Цель обработки результатов измерений заключается в том, чтобы **дать оценку истинного значения измеряемой величины с указанием допущенной в эксперименте погрешности.**

За **наилучшую оценку истинного значения** (наиболее вероятное значение) величины x принимается среднее арифметическое значение результатов измерений:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (2)$$

Чем больше число измерений, тем ближе среднее арифметическое значение к истинному.

Погрешность измерений $\Delta x^{\text{изм}}$ оценивается следующим образом.

1. Вычисляются **частные отклонения отдельных измерений** Δx_i:

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle . \qquad (3)$$

Иногда эту величину также называют абсолютной погрешностью отдельного измерения. Частное отклонение – величина размерная. Среди n значений частных отклонений отдельных измерений обязательно встречаются как положительные, так и отрицательные.

2. Оценивается **абсолютная погрешность измерений** $\Delta x^{\text{изм}}$:

$$\Delta x^{\text{изм}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \Delta x_i \right| . \qquad (4)$$

Стоит подчеркнуть, что усредняются именно модули частных отклонений – среднее арифметическое от самих частных отклонений, конечно же, равно нулю.

3. Полезно также определить **относительную погрешность измерений** $\varepsilon_x^{\text{изм}}$:

$$\varepsilon_x^{\text{изм}} = \frac{\Delta x^{\text{изм}}}{\langle x \rangle} . \qquad (5)$$

Относительная погрешность ε_x – величина безразмерная. Обычно относительная погрешность выражается в процентах.

Относительная погрешность наглядно характеризует точность проведённых измерений.

<u>Пример</u>

Допустим, в результате многократных измерений длины некоторого предмета получено среднее арифметическое значение $\langle l \rangle = 23{,}4$ см и погрешность измерения $\Delta l^{\text{изм}} = 1{,}4$ см. Знания одной только величины $\Delta l^{\text{изм}} = 1{,}4$ см не достаточно для понимания, большой или маленькой является погрешность. Для такого понимания мы сравниваем абсолютную погрешность измерения со средним арифметическим значением результатов измерения. Величина относительной погрешности $\varepsilon_l = 6\%$ даёт нам информацию о качестве измерения без непосредственного указания на значение искомой величины.

2.3.2. Оценка приборной погрешности

Правила расчёта приборных погрешностей средств измерений приводятся в технических паспортах.

Приборная **погрешность стрелочных электроизмерительных приборов определяется классом точности**.

Класс точности $\varepsilon^{\text{пр}}_{\text{кл.т.}}$ большинства приборов равен отношению максимально возможной погрешности прибора к величине верхнего предела шкалы, выраженному в процентах. На таком приборе **значение класса точности символически указывается на лицевой панели** рядом с его шкалой **в виде числа**, **не обведенного в кружок или звездочку,** без знака «%». Классы точности $\varepsilon^{\text{пр}}_{\text{кл.т.}}$ приборов, используемых в физическом практикуме, равны 0,05%; 0,1%; 0,2%; 0,5%; 1,0%; 1,5%; 2,5%; 4,0%. Абсолютная приборная погрешность в этом случае одинакова при измерениях во всем диапазоне шкалы и равна

$$\Delta x^{\text{пр}} = \frac{\varepsilon^{\text{пр}}_{\text{кл.т.}}}{100\%} \cdot x_{\max}. \qquad (6)$$

Поскольку относительная приборная погрешность равна

$$\varepsilon^{\text{пр}}_x = \frac{\Delta x^{\text{пр}}}{\langle x \rangle}, \qquad (7)$$

то она возрастает при уменьшении измеряемой величины $\langle x \rangle$. Следовательно, при измерении вблизи нуля значительно уменьшается точность измерения. Измерения в начальной части шкалы на таких приборах нежелательны.

Пример

Допустим, вольтметр имеет класс точности 0,2%, а используемая шкала имеет предел $V_{\max} = 300$ В. У верхнего предела измерений приборная погрешность $\Delta V^{\text{пр}} = 300\,\text{В} \cdot \dfrac{0,2\%}{100\%} = 0,6$ В, относительная приборная погрешность равна 0,2%. При измерении напряжения $V = 50$ В относительная приборная погрешность, равная $\varepsilon_V^{\text{пр}} = \dfrac{0,6\,\text{В}}{50\,\text{В}} \cdot 100\%$, возрастает в 6 раз до величины 1,2%.

При определении приборной погрешности некоторых «простейших» приборов, не имеющих паспорта, можно ориентироваться на цену наименьшего деления шкалы: она обычно согласована с классом точности прибора. Так, например, при измерениях длины отрезков линейкой с «миллиметровой шкалой» приборную погрешность принимают равной 1 мм.

В таблице 1 приведены приборные погрешности, которые необходимо учитывать при использовании часто встречающихся в лабораториях физического практикума средств измерения.

Таблица 1. Приборная погрешность

1.	Миллиметровые линейки	1 мм
2.	Штангенциркули (с числом делений нониуса – 10)	0,1 мм
3.	Штангенциркули (с числом делений нониуса – 20)	0,05 мм
4.	Микрометры	0,01 мм
5.	Технические весы с нагрузкой до 5 кг	0,1 г
6.	Лабораторные ртутные термометры	1°C
7.	Секундомеры механические	0,1 с

Как правило, точность прибора ниже точности «отсчёта на глаз» по шкале прибора. Например, если мы измеряем длину линейкой с миллиметровой шкалой, **легко отсчитать на глаз десятые доли миллиметра, но линейка не обеспечивает такую точность**. Сколько бы раз мы ни повторяли измерения, точность полученного нами результата не превысит точности линейки.

2.3.3. Оценка полной погрешности эксперимента

При многократных измерениях для определения доверительного интервала необходимо учесть как случайную погрешность измерения, так и погрешность, вносимую приборами. Результирующую погрешность будем называть **полной погрешностью эксперимента** $\Delta x^{\text{эксп}}$. Будем обозначать её для краткости так: $\Delta x \equiv \Delta x^{\text{эксп}}$, а результат измерения записывать (как было уже сказано) в виде доверительного интервала:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x) \ \textit{ед. измерения}. \tag{8}$$

Для оценки полной погрешности эксперимента при прямых измерениях складывают погрешности измерений и приборные погрешности[2)]**:**

$$\Delta x = \Delta x^{\text{изм}} + \Delta x^{\text{пр}}. \tag{9}$$

При однократном измерении некоторой физической величины для определения границ доверительного интервала приходится учитывать только приборную погрешность.

2.4. Оценка погрешности при косвенных измерениях

Пусть интересующая нас величина ξ (кси) вычисляется по некоторой расчётной формуле, требующей знания ряда непосредственно (прямо) измеряемых величин $x, y, z, \ldots$:

$$\xi = f(x, y, z, \ldots). \tag{10}$$

Чтобы найти погрешность косвенно измеряемой величины $\xi = f(x, y, z, \ldots)$, учтём, что чаще всего погрешности прямых измерений значительно меньше измеряемых величин, составляя несколько процентов и менее от них, то есть $\Delta x << |x|$, $\Delta y << |y|$, $\Delta z << |z|$ ... Тогда формально погрешность можно считать малым приращением измеряемой величины, заменить символы: $\Delta x \approx dx$, $\Delta y \approx dy$, $\Delta z \approx dz$, ..., $\Delta\xi \approx d\xi$ – и для нахождения погрешности $\Delta\xi$ использовать математический аппарат дифференциального исчисления:

$$\Delta\xi = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z\right| + \ldots \tag{11}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \ldots$ – частные производные функции $\xi = f(x, y, z, \ldots)$ по соответствующим переменным. Они вычисляются по обычным правилам дифференцирования при условии, однако, что **все остальные аргументы функции** $f(x, y, z, \ldots)$ (кроме той переменной, по которой

---

2) Подробнее о сложении погрешностей см. Приложение В.

выполняется дифференцирование) **следует считать постоянными и равными их средним арифметическим значениям**.

Слагаемое $\left|\Delta\xi_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x\right|$ соответствует погрешности, вносимой в полную погрешность $\Delta\xi$ неточностью измерения только величины x. Аналогичный смысл имеют все остальные слагаемые.

В таблице 2 приведены выражения для оценки погрешности косвенно измеряемых величин, вычисляемых по некоторым простым расчётным формулам.

Таблица 2

Расчётная формула для величины ξ $\xi = f(x,y)$	Абсолютная погрешность величины ξ $\Delta\xi$	Относительная погрешность величины ξ $\varepsilon_\xi = \dfrac{\Delta\xi}{\langle\xi\rangle}$
$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{\langle x\rangle + \langle y\rangle}$
$x-y$	$\Delta x + \Delta y$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{\left|\langle x\rangle - \langle y\rangle\right|}$
$x\cdot y$	$\langle x\rangle\cdot\Delta y + \langle y\rangle\cdot\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\langle x\rangle} + \dfrac{\Delta y}{\langle y\rangle} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\langle x\rangle\cdot\Delta y + \langle y\rangle\cdot\Delta x}{\langle y\rangle^2}$	$\dfrac{\Delta x}{\langle x\rangle} + \dfrac{\Delta y}{\langle y\rangle} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
x^n	$\lvert n\rvert\cdot\langle x\rangle^{n-1}\Delta x$	$\lvert n\rvert\cdot\dfrac{\Delta x}{\langle x\rangle} = n\cdot\varepsilon_x$
$\sqrt[n]{x}$	$\left\lvert\dfrac{1}{n}\right\rvert\cdot\langle x\rangle^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$	$\left\lvert\dfrac{1}{n}\right\rvert\cdot\dfrac{\Delta x}{\langle x\rangle} = \left\lvert\dfrac{1}{n}\right\rvert\cdot\varepsilon_x$

Замечания

Обратим внимание читателя на некоторые важные моменты в таблице:

1) Величины Δx и Δy в таблице – это величины погрешностей, которые всегда положительны.

2) При сложении и при вычитании измеренных величин их погрешности складываются.

3) При вычитании двух величин относительная погрешность содержит в знаменателе разность двух величин. Если эти величины близки, то относительная погрешность разности может значительно превышать относительную погрешность каждой величины в отдельности. Во избежание потери точности **по возможности следует избегать таких измерений**.

4) При умножении и делении величин складываются относительные погрешности. При возведении в любую степень n относительная погрешность изменяется в $|n|$ раз.

5) Во всех случаях, когда расчетная формула (10) имеет вид

$$\xi = x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}\cdot ...,$$

где α, β, γ – показатели степени, проще и полезнее сначала вычислить не абсолютную, а относительную погрешность величины ξ. Нетрудно показать, что она равна

$$\varepsilon_{\xi} = |\alpha|\cdot\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\cdot\frac{\Delta y}{y} + |\gamma|\cdot\frac{\Delta z}{z} + ... = |\alpha|\cdot\varepsilon_x + |\beta|\cdot\varepsilon_y + |\gamma|\cdot\varepsilon_z + ... \qquad (12)$$

Абсолютная погрешность $\Delta\xi$ вычисляется затем простым домножением ε_{ξ} на значение косвенно измеренной величины $\langle\xi\rangle$:

$$\Delta\xi = \varepsilon_{\xi}\cdot\langle\xi\rangle. \qquad (13)$$

Такая последовательность вычислений позволяет оценить, какая из измеренных величин даёт наибольший вклад в погрешность, а также снижает вероятность арифметических ошибок, так как уменьшает количество вычислений при оценке величины $\Delta\xi$.

Пример

Рассмотрим пример вычисления погрешности величины, заданной несколько более сложной расчётной формулой, нежели рассмотренные выше. Допустим, что было произведено косвенное измерение перемещения S при равноускоренном движении по прямо измеренным значениям начальной скорости, ускорения и времени движения:

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Обозначим $\qquad S_1 = \upsilon_0 t$ и $S_2 = \dfrac{at^2}{2}$.

Найдём вначале относительные погрешности составляющих S_1 и S_2:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta S_1}{\langle S_1 \rangle} = \frac{\Delta \upsilon_0}{\langle \upsilon_0 \rangle} + \frac{\Delta t}{\langle t \rangle}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta S_2}{\langle S_2 \rangle} = \frac{\Delta a}{\langle a \rangle} + 2\frac{\Delta t}{\langle t \rangle},$$

где $\langle \upsilon_0 \rangle$, $\langle t \rangle$, $\langle a \rangle$ – средние значения измеренных величин.

Затем определим абсолютные погрешности составляющих $\Delta S_1 = \varepsilon_1 \cdot S_1$ и $\Delta S_2 = \varepsilon_2 \cdot S_2$. Сложив их, получим искомую погрешность величины S:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 .$$

2.4.1. Оценка погрешности косвенно измеренной величины при однократных измерениях

Если в формулы для расчёта погрешностей косвенных измерений (11–12) подставить погрешности $\Delta x^{\text{пр}}$, $\Delta y^{\text{пр}}$, $\Delta z^{\text{пр}}$, ... приборов, использованных при измерениях величин x, y, z, ..., то мы получим оценку погрешности, вносимою в результат косвенного измерения приборами.

<u>Пример</u>

Пусть для определения плотности вещества однократно измеряются масса и размеры некоторого однородного параллелепипеда. Проведённые прямые измерения дали результаты, представленные в таблице 3.

Таблица 3

m, г	*a, мм*	*b, мм*	*c, мм*	ρ*, г/см*^{3}
4,3	12,1	14,3	16,6	1,497

В этом случае можно определить только погрешность, вносимую приборами.

Приборные погрешности весов и штангенциркуля, которыми были проведены эти измерения, приведены таблице 1: $\Delta m^{\text{пр}} = 0{,}1$ г, $\Delta l^{\text{пр}} = 0{,}1$ мм. Расчётная формула для плотности, очевидно, имеет вид

$$\rho = \frac{m}{abc}, \quad \text{или} \quad \rho = m^1 \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}.$$

В данном случае удобнее сначала найти относительную погрешность, вносимую приборами, используя формулу (12):

$$\varepsilon_\rho^{\text{пр}} = \frac{\Delta m^{\text{пр}}}{m} + \frac{\Delta a^{\text{пр}}}{a} + \frac{\Delta b^{\text{пр}}}{b} + \frac{\Delta c^{\text{пр}}}{c}.$$

Подставим численные данные:

$$\varepsilon_\rho^{\text{пр}} = \frac{0{,}1\,г}{4{,}3\,г} + \frac{0{,}1\,мм}{12{,}1\,мм} + \frac{0{,}1\,мм}{14{,}3\,мм} + \frac{0{,}1\,мм}{16{,}6\,мм} = 0{,}023 + 0{,}008 + 0{,}007 + 0{,}006 = 0{,}044$$

Теперь легко найти и абсолютную погрешность, вносимую приборами:

$$\Delta\rho^{\text{пр}} = \varepsilon_\rho \cdot \langle\rho\rangle = 0{,}044 \cdot 1{,}497\ г/см^3 = 0{,}0657\ г/см^3.$$

Результат записывается в виде

$$\rho = (1{,}50 \pm 0{,}07)\ г/см^3 \quad (5\%).$$

Правила округления приведены в разделе 2.5.1.

2.4.2. Оценка погрешности косвенно измеренной величины при многократных измерениях

Измерения, проведённые многократно, позволяют оценить вклад в погрешность косвенно измеренной величины не только погрешности приборов, но и влияния случайных факторов процесса измерений.

Обычно в первую очередь вычисляется **погрешность** величины ξ, **вносимая приборами**, во вторую – **случайная погрешность измерений**, в третью – полная погрешность величины ξ (**погрешность эксперимента**).

Провести оценку погрешности измерений можно двумя способами. Чтобы их проиллюстрировать, приведём пример конкретного эксперимента, сопряжённого с косвенными измерениями.

***<u>ПРИМЕР 1.</u>* (Применимы оба способа оценки погрешности измерений)**

Пусть для определения плотности вещества **несколько раз измеряются масса и объём одного и того же однородного тела**. Проведённые прямые измерения дали результаты, представленные в таблице 4.

Таблица 4

I	m_i, *г*	Δm_i, *мм*	V_i, *см*^{3}	ΔV_i, *см*^{3}	ρ_i, *г/см*^{3}	$\Delta\rho_i$, *г/см*^{3}
1	2,745	0,000	2,4	– 0,03	1,144	0,013
2	2,746	– 0,001	2,3	– 0,10	1,194	0,063
3	2,744	0,001	2,6	0,17	1,055	– 0,076
Средние значения	2,745	0,0007	2,43	0,11	1,131	0,051

Способ А

1. Вычисляется значение косвенно измеряемой величины ξ для каждого опыта в отдельности:

$$\xi_1 = f(x, y, z, ...),\ \xi_2 = f(x_2, y_2, z_2, ...),\ ...,\ \xi_n = f(x_n, y_n, z_n, ...).$$

2. Вычисляется среднее арифметическое значение величины ξ:

$$\langle\xi\rangle = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}.$$

Такое усреднение имеет смысл, поскольку проводится для результатов измерений одной и той же величины, различающихся лишь из-за погрешностей, допущенных при измерениях.

3. Проводится оценка **погрешности** величины ξ, **вносимой приборами**.

Для оценки погрешности величины $\xi = f(x, y, z, ...)$, вносимой приборами, выводится расчётная формула на основании общего выражения (11) или выражения (12) (или таблицы 2). В качестве погрешностей Δx, Δy, Δz, ... подставляются значения приборных погрешностей $\Delta x^{\text{пр}}$, $\Delta y^{\text{пр}}$, $\Delta z^{\text{пр}}$, … , а в качестве величин x, y, z, ... – любые промежуточные (не минимальные и не максимальные) значения непосредственно измеренных величин.

4. Оценивается **погрешность измерений** величины ξ .

$$\Delta\xi^{\text{изм}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta\xi_i\right|.$$

Замечание

В **способе А** погрешность измерений косвенно измеренной величины ξ оценивается по такому же алгоритму, как и в случае прямых измерений (п. 2.3.1).

5. Вычисляется **полная погрешность эксперимента**:

$$\Delta\xi = \Delta\xi^{\text{изм}} + \Delta\xi^{\text{пр}}.$$

6. Проводится оценка относительной погрешности эксперимента для величины ξ:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\Delta\xi}{\langle\xi\rangle}.$$

7. Окончательно результат записывается в стандартной форме:

$$\xi = (\langle\xi\rangle \pm \Delta\xi) \ \textit{ед. измерения} \quad (\varepsilon_\xi, \%).$$

В рассматриваемом примере

1. $\rho_1 = 1{,}144 \ г/см^3$; $\rho_2 = 1{,}194 \ г/см^3$; $\rho_3 = 1{,}055 \ г/см^3$.

2. $\langle\rho\rangle = 1{,}131 \ г/см^3$.

3. $\rho = \dfrac{m}{V}$; $\varepsilon_\rho^{\text{пр}} = \dfrac{\Delta m^{\text{пр}}}{m} + \dfrac{\Delta V^{\text{пр}}}{V}$; $\Delta m^{\text{пр}} = 0{,}001 \ г$, $\Delta V^{\text{пр}} = 0{,}1 \ см^3$.

$$\varepsilon_\rho^{\text{пр}} = \frac{0{,}001 \ г}{2{,}745 \ г} + \frac{0{,}1 \ см^3}{2{,}43 \ см^3} = 0{,}0004 + 0{,}041 = 0{,}041.$$

$$\Delta\rho^{\text{пр}} = \varepsilon_\rho \cdot \langle\rho\rangle = 0{,}041 \cdot 1{,}131 \ г/см^3 = 0{,}046 \ г/см^3.$$

4. $\Delta\rho^{\text{изм}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|\Delta\rho_i| = \dfrac{0{,}013 \ г/см^3 + 0{,}063 \ г/см^3 + 0{,}076 \ г/см^3}{3} = 0{,}051 \ г/см^3$.

5. $\Delta\rho = \Delta\rho^{\text{пр}} + \Delta\rho^{\text{изм}} = 0{,}046 \ г/см^3 + 0{,}051 \ г/см^3 = 0{,}097 \ г/см^3$.

6–7. $\rho = (1{,}13 \pm 0{,}10) \ г/см^3 \qquad (9\%)$.

Способ Б

1. Вычисляются для каждой прямо измеренной величины x, y, z, ... среднее арифметическое значение $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, \ldots$, погрешность измерений $\Delta x^{\text{изм}}$, $\Delta y^{\text{изм}}$, $\Delta z^{\text{изм}}$, ... и определяется приборная погрешность $\Delta x^{\text{пр}}$, $y^{\text{пр}}$, $\Delta z^{\text{пр}}$, ...

2. Вычисляется среднее значение косвенно измеряемой величины ξ подстановкой в расчётную формулу $\xi = f(x, y, z, ...)$ средних арифметических значений $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, \ldots$ прямо измеренных величин:

$$\langle \xi\rangle = f(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, \ldots).$$

3. Для оценки **погрешности, вносимой приборами** выводится расчётная формула на основании общего выражения (11) или выражения (12) (или таблицы 2). В полученное выражение в качестве величин Δx, Δy, Δz, ... подставляются значения приборных погрешностей $\Delta x^{\text{пр}}$, $\Delta y^{\text{пр}}$, $\Delta z^{\text{пр}}$, ..., а в качестве величин $x, y, z, \ldots$ – средние значения непосредственно измеренных величин.

4. Для оценки случайной **погрешности измерений** величины $\xi = f(x, y, z, \ldots)$ используется полученное в п. 3 выражение, в которое в качестве величин Δx, Δy, Δz, ... подставляются значения погрешностей измерений $\Delta x^{\text{изм}}$, $\Delta y^{\text{изм}}$, $\Delta z^{\text{изм}}$, ..., а в качестве величин $x, y, z, \ldots$ также подставляются средние значения непосредственно измеренных величин.

> ***<u>Замечание</u>***
>
> **Способ Б** оценки погрешности измерений величины ξ применим тогда, когда каждая из физически одинаковых величин x, y, z (например, масса или размеры тела в рассматриваемом примере) измеряется многократно в одинаковых условиях. Тогда экспериментатор имеет наборы измеренных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2 \ldots, y_n$, $z_1, z_2 \ldots, z_n$, каждое из которых отличается от своего неизменного истинного значения только в силу наличия случайных ошибок.

5. Вычисляется **полная погрешность эксперимента**:

$$\Delta\xi = \Delta\xi^{\text{изм}} + \Delta\xi^{\text{пр}}.$$

6. Проводится оценка относительной погрешности эксперимента:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\Delta\xi}{\langle\xi\rangle}.$$

7. Окончательно результат записывается в стандартной форме:

$$\xi = (\langle\xi\rangle \pm \Delta\xi) \ \textit{ед. измерения} \ \ (\varepsilon_\xi, \%).$$

В рассматриваемом примере

1. $\langle m\rangle = 2{,}745\ г$, $\quad \Delta m^{изм} = 0{,}0007\,г$, $\quad \Delta m^{пр} = 0{,}001\,г$.

$\langle V\rangle = 2{,}43\ см^3$, $\quad \Delta V^{изм} = 0{,}11\ см^3$, $\quad \Delta V^{пр} = 0{,}1\ см^3$.

2. $\langle \rho\rangle = 1{,}13\ г/см^3$.

3. $\varepsilon_{\rho}^{пр} = \dfrac{0{,}001\,г}{2{,}745\,г} + \dfrac{0{,}1\,см^3}{2{,}43\,см^3} = 0{,}041$. (4 %)

$\Delta\rho^{пр} = 0{,}041\cdot 1{,}13\,г/см^3 = 0{,}046\,г/см^3$.

4. $\varepsilon_{\rho}^{изм} = \dfrac{0{,}0007\,г}{2{,}745\,г} + \dfrac{0{,}11\,см^3}{2{,}43\,см^3} = 0{,}00026 + 0{,}0453 = 0{,}0415$ (4 %).

$\Delta\rho^{изм} = 0{,}0415\cdot 1{,}13 = 0{,}047\,г/см^3$.

5. $\Delta\rho = \Delta\rho^{пр} + \Delta\rho^{изм} = 0{,}046\,г/см^3 + 0{,}047\,г/см^3 = 0{,}093\,г/см^3$.

6–7. $\rho = (1{,}13 \pm 0{,}09)\,г/см^3$ (8%).

Замечания

1) В рассматриваемом примере как случайная погрешность измерения массы, так и приборная, гораздо меньше погрешностей при измерении объема. Поэтому имеет смысл повышать точность измерения объема – провести больше измерений («набрать статистику»), выбрать другой прибор, а вот массы – не стоит.

2) Хорошего совпадения значений $\Delta\rho^{изм}$, полученных первым и вторым способами, можно ожидать лишь при достаточно большом количестве измерений и малых ошибках округления. Однако и в рассматриваемом примере оценочные значения погрешности измерений отличаются незначительно.

ПРИМЕР 2. (***Применим только один способ оценки погрешности измерений***)

Пусть для определения плотности вещества **проведены однократные измерения массы и объёма различных тел, сделанных из одного и того же материала**. Проведённые прямые измерения дали результаты, представленные в таблице 5.

Таблица 5

i	m_i, *г*	V_i, *см*^{3}	ρ_i, *г/см*^{3}	$\Delta\rho_i$, *г/см*^{3}
1	2,745	2,4	1,144	– 0,021
2	8,803	15,7	1,194	0,029
3	5,137	4,4	1,157	– 0,008
Средние значения	*нет*	*нет*	1,165	0,019

В рассматриваемом примере при оценке погрешности косвенно измеренной величины плотности ρ, вносимой приборами, в полученное выражение в качестве величин Δx, Δy, Δz, ... подставляются значения приборных погрешностей $\Delta x^{\text{пр}}$, $\Delta y^{\text{пр}}$, $\Delta z^{\text{пр}}$, ..., а в качестве величин x, y, z, ... подставляются любые промежуточные (не минимальные и не максимальные) значения непосредственно измеренных величин x_i, y_i, z_i,…

Единственно правильным способом оценить погрешность измерений в этом примере является способ А.

Оценка погрешности измерений начинается с усреднения трёх значений плотности – косвенно измеренной величины, – которые отличаются в силу наличия случайных погрешностей при измерениях.

Усреднять значения массы или объёма в данном случае нельзя, такое усреднение не имеет никакого физического смысла, так как значения массы и объёма в таблице 5 относятся к **принципиально разным измеряемым величинам**.

В рассматриваемом примере

1. $\rho_1 = 1{,}144$ *г/см*^{3}; $\rho_2 = 1{,}194$ *г/см*^{3}; $\rho_3 = 1{,}157$ *г/см*^{3}.

2. $\langle\rho\rangle = 1{,}165$ *г/см*^{3}.

3. $\rho = \dfrac{m}{V}$; $\varepsilon_\rho^{\text{пр}} = \dfrac{\Delta m^{\text{пр}}}{m} + \dfrac{\Delta V^{\text{пр}}}{V}$; $\Delta m^{\text{пр}} = 0{,}001$ *г*, $\Delta V^{\text{пр}} = 0{,}1$ *см*^{3}.

$$\varepsilon_{\rho}^{\text{пр}} = \frac{0,001\,г}{5\,г} + \frac{0,1\,см^3}{10\,см^3} = 0,010.$$

$$\Delta\rho^{\text{пр}} = \varepsilon_{\rho}^{\text{пр}} \cdot \langle\rho\rangle = 0,012\ г/см^3.$$

4. $\Delta\rho^{\text{пр}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta\rho_i\right| = \frac{0,021\,г/см^3 + 0,029\,г/см^3 + 0,008\,г/см^3}{3} = 0,019\,г/см^3$.

5. $\Delta\rho = \Delta\rho^{\text{пр}} + \Delta\rho^{\text{изм}} = 0,012\,г/см^3 + 0,019\,г/см^3 = 0,031\,г/см^3$.

6–7. $\rho = (1,16 \pm 0,03)\,г/см^3 \qquad (3\%)$.

2.5. Окончательное представление результата

Оценочное значение полной погрешности эксперимента как при прямых, так и при косвенных измерениях равна

$$\Delta\xi = \Delta\xi^{\text{изм}} + \Delta\xi^{\text{пр}}.$$

Естественно, если одно из слагаемых значительно больше другого, то оно и будет определяющим в оценке. Если при большом количестве измерений погрешность, вносимая приборами, много больше погрешности измерений, необходимо заменить используемые приборы на более точные. Если же ошибка, вносимая приборами, много меньше ошибки измерений, можно увеличить число измерений для повышения точности результата. Если погрешность, вносимая приборами, сравнима с погрешностью измерений, то, очевидно, не имеет смысла значительно увеличивать число измерений или пользоваться другими приборами. Следовательно, **целесообразно оценивать погрешность, вносимую приборами, перед проведением измерений**.

2.5.1. Правила округления погрешности и результата

После завершения вычислений при окончательной записи результата в виде доверительного интервала руководствуются следующими правилами округления.

1. При округлении погрешности $\Delta\xi$ оставляют только **одну «значащую» цифру**[3)].

2. Результат $\langle\xi\rangle$ измерений округляется **до того разряда, в кото-**

[3)] Это **округление лучше проводить** всегда **в большую сторону**. Таким образом косвенно учитывается небольшая статистика проведённых измерений в условиях физического практикума.

ром содержится погрешность.

Замечания

1) **При записи погрешности** «значащими» будем **условно** называть все цифры кроме «0».

2) В промежуточных расчётах следует использовать на одну значащую цифру больше («с запасом»).

Примеры

Пусть при измерениях величины υ получено среднее значение

$$\langle \upsilon \rangle = \mathbf{341{,}862452}\ \textit{м/с}$$

и проведена оценка погрешности измерений:

$$\Delta\upsilon = \mathbf{14{,}2465}\ \textit{м/с.}$$

Окончательная запись результата должна иметь вид:

$$\upsilon = \mathbf{(340 \pm 20)}\ \textit{м/с.}$$ [4)]

Допустимо (но вряд ли целесообразно) в данном случае вынести за скобки порядок измеренной величины:

$$\upsilon = \mathbf{(3{,}4 \pm 0{,}2) \cdot 10^2}\ \textit{м/с.}$$

В случаях, когда полученные результаты измерений имеют вид

$\boldsymbol{c} = \mathbf{299836241}\ \textit{м/с}$, $\Delta \boldsymbol{c} = \mathbf{26465}\ \textit{м/с}$;

$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0{,}00000062452}\ \textit{м}$, $\Delta\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0{,}0000000004465}$,

вынести за скобки порядок величин **необходимо:**

$\boldsymbol{c} = \mathbf{(2{,}998 \pm 0{,}003) \cdot 10^8}\ \textit{м/с.}$ (скорость света)

$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{(6{,}24 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-7}}\ \textit{м.}$ (длина волны света)

В последнем случае ещё лучше использовать соответствующие «дольные» единицы измерения:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{(624 \pm 5)}\ \textit{нм.}$$

Замечание

Если задачей работы является проверка равенства двух величин, для которых могут быть оценены доверительные интервалы, то соответствием теории будем считать пересечение, хотя бы частичное, доверительных интервалов.

[4)] Нетрудно догадаться, что речь идёт об измерениях скорости звука в воздухе.

2.5.2. Графическое представление результатов измерений

Графики строятся вручную на отдельном листе рабочей тетради или на миллиметровой бумаге либо с использованием компьютерных программ и выводом на печать формата А4. В двух последних случаях графики вклеиваются в рабочую тетрадь.

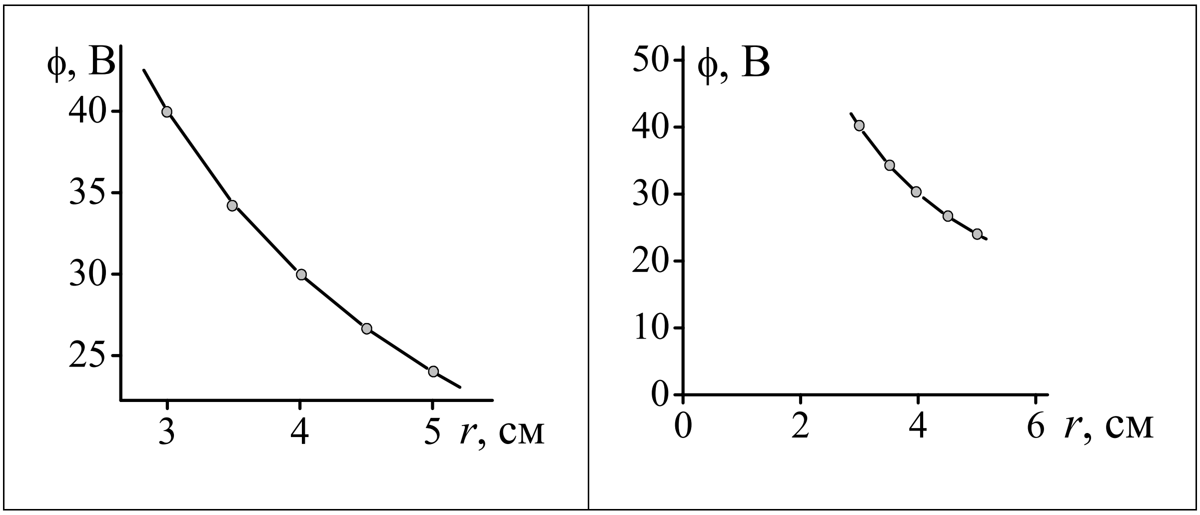
Желательно, чтобы каждый лист с графиками практически полностью занимал один лист рабочей тетради.

При оформлении графиков необходимо выполнять правила, предъявляемые к представлению результатов в научных работах.

1. **График должен содержать надпись**, из которой было бы ясно физическое содержание представленной закономерности.

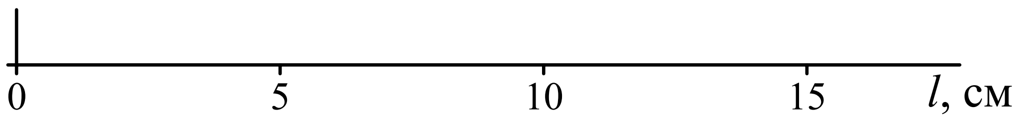
2. Масштабы и начала отсчёта по координатным осям выбираются так, чтобы собственно график занимал большую часть поля чертежа. При этом на пересечении осей не обязательно должны находиться нулевые значения величин.

Правильно ***Неправильно***



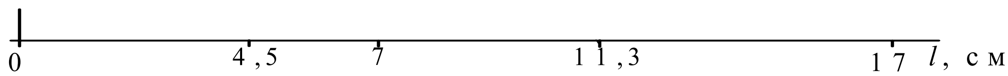
3. На осях координат крупно отмечаются равноотстоящие друг от друга деления масштаба (метки) так, чтобы было удобно работать с графиком (не слишком часто и не слишком редко). **Значения, полученные в эксперименте, на координатных осях не отмечаются**.

<u>Правильно</u>



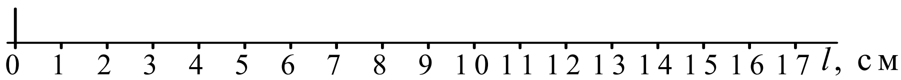
Неправильно

(отмечены значения, полученные в эксперименте, а сам масштаб не задан; цифры указаны очень мелко)



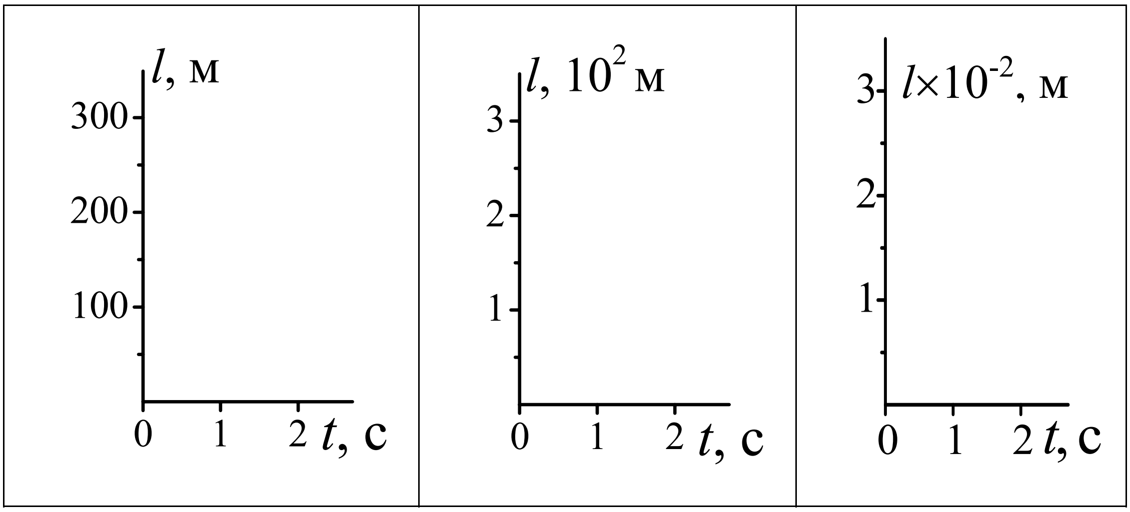
Неправильно

(обозначения масштаба – деления на координатной оси – указаны слишком часто и мелко)



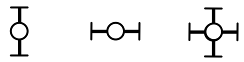
4. На координатных осях (в конце, снизу, сбоку) обязательно указываются «заголовки» – обозначения откладываемых величин – и, через запятую, их единицы измерения. Допускается указывать полное название откладываемой величины.

Для очень больших либо очень малых значений отложенных по осям величин следует выносить их порядок в «заголовок оси». Ниже приведены три возможных варианта оформления.



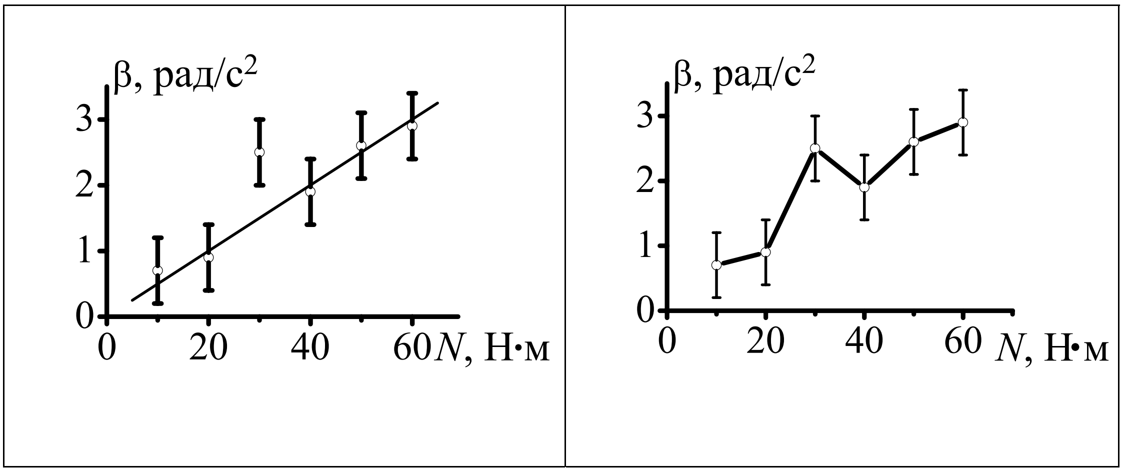
5. **Экспериментальные точки отчетливо наносятся** в виде любых символов (кружочков, треугольников и т.д.), например:

▲ ◊ ■ □ ⊗.

Кроме самих экспериментальных значений **на графике указываются погрешности измеренных величин**. Они указываются в виде отрезков длиной в доверительный интервал, расположенных параллельно соответствующей оси: 

6. **Экспериментальная кривая**, отвечающая ранее установленным законам или каким-либо модельным представлениям, использующимся в задаче, **проводится в виде плавной линии**. Линия должна проходить через доверительные интервалы всех или большинства экспериментальных точек так, чтобы экспериментальные точки по возможности близко и равномерно располагались с разных сторон кривой.

Правильно ***Неправильно***



Приведенный график соответствует зависимости углового ускорения от момента действующих на тело сил.

7. Если на графике приводится теоретическая кривая, то указывается закономерность, на основании которой она построена.

8. При наличии нескольких кривых на одном поле графика каждая из них нумеруется или выделяется каким-то другим способом. В свободной части поля даются соответствующие пояснения.

Ниже приведены примеры оформления графиков в научных статьях, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах.

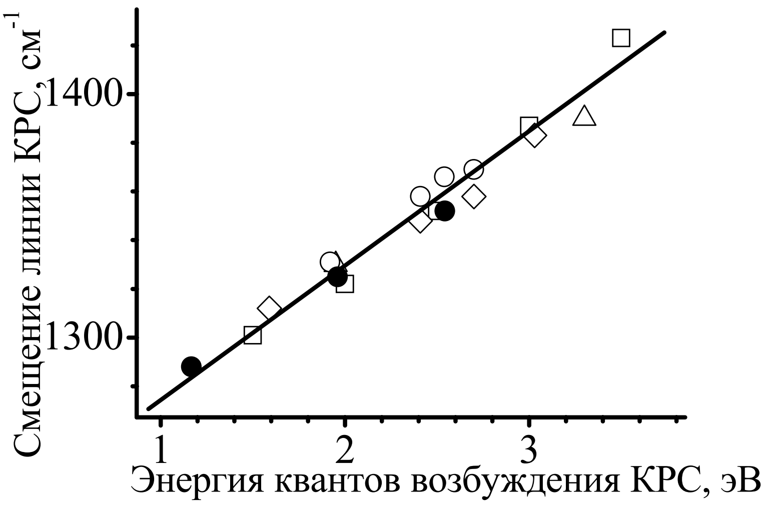


Рис. 17. Зависимость положения D-линии КРС спектра графита от длины волны лазера: ● – данная работа; ◊ – [41]; Δ – [42]; ○ – [43]; □ – [44].

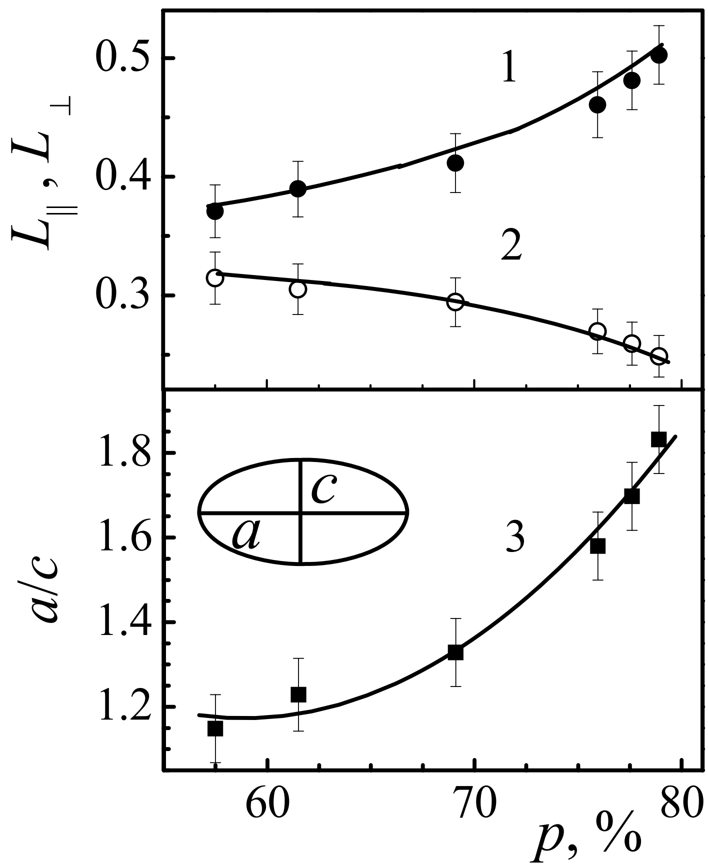


Рис. 3. Расчетные зависимости факторов деполяризации $L_\parallel$(1), $L_\perp$ (2) и отношений полуосей эллипсоидов a/c (3) плёнок por-Si($\bar{1}10$) (получены на подложке p^{++}-Si) от пористости p. Врезка на нижней панели схематично показывает расположение осей эллипсоида.

2.5.3. Рекомендации по оформлению отчёта к задаче практикума

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1. Название работы.

2. Краткое изложение цели работы.

3. Перечень приборов и оборудования.

4. Схему установки.

5. Краткое **изложение-конспект теории по теме проводимой работы** (определение физических величин, формулировки); выводы рабочих формул.

Конспект составляется с использованием учебной литературы, рекомендованной по данному курсу

6. Запись экспериментальных результатов с указанием единиц измерения и приборной погрешности (класса точности). Запись параметров установки, необходимых для последующих расчётов (также с указанием единиц измерения и погрешностей).

Результаты всех прямых измерений заносятся в журнал без использования черновиков, ручкой, а не карандашом. При многократных измерениях (≥ 3) результаты заносятся в таблицы.

7. Обработанные результаты измерений, представленные в виде таблиц, чисел, графиков – в соответствии с заданием, определенном в методической разработке к лабораторной работе.

8. Вычисление погрешностей.

Все формулы, по которым производились вычисления погрешностей, а также сами расчёты погрешностей должны находиться в рабочей тетради.

9. Окончательный результат экспериментальной работы, записанный в стандартной форме вне таблицы с исходными данными.

10. Анализ результатов, а при возможности – сравнение с табличными значениями или с теорией с учётом погрешностей.

11. Выводы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПОЛНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ПРАКТИКУМА №31

В задаче проводится определение коэффициента внутреннего трения (коэффициента вязкости) глицерина по методу Стокса. В её практической части изучается движение десяти разных маленьких шариков из сплава Вуда в глицерине, для каждого из шариков измеряются диаметр d и время t движения между соответствующими горизонтальными метками сосуда цилиндрической формы. Расстояние l между метками измеряется однократно линейкой. Значения плотности глицерина и сплава Вуда, внутренний радиус сосуда и расстояние между метками представлены в таблице.

Цена малого деления микроскопа	$k = 1{,}564 \cdot 10^{-3}$ *см*
Плотность глицерина при 20°С	$\rho_{ж} = 1{,}25$ *г/см*^{3}
Плотность материала шарика	$\rho_{ш} = 9{,}70$ *г/см*^{3}
Внутренний радиус сосуда	$R = 1{,}75$ *см*
Расстояние между метками на сосуде	$l = 23{,}8$ *см*

Результаты измерений диаметра шариков и времени падения, полученные в эксперименте, представлены в таблице (выделены жирным шрифтом).

Таблица

i	Диаметр шарика в делениях микроскопа d, *дел*	Время падения шарика t, *с*	Коэффициент вязкости η_i, *Пуаз*	Частное отклонение $\Delta\eta_i$, *Пуаз*
1	**67**	**63,5**	13,48	– 1,72
2	**65**	**70,0**	13,98	– 1,22
3	**64**	**69,7**	13,50	– 1,70
4	**50**	**167,5**	19,80	4,60
5	**59**	**117,9**	19,41	4,21
6	**49**	**157,2**	17,85	2,65
7	**60**	**75,8**	12,90	– 2,30
8	**64**	**68,2**	13,21	– 1,99
9	**67**	**64,2**	13,63	– 1,57
10	**69**	**63,4**	14,27	– 0,93

1) Проанализировав характер косвенных измерений, делаем вывод, что эксперимент аналогичен примеру 6 раздела 2.4.2: для определения коэффициента вязкости жидкости берутся различные шарики, их диаметры являются принципиально разными величинами и не могут усредняться для оценки погрешностей прямых измерений диаметра. То же самое можно сказать об измерении времени движения шариков.

В этом случае единственно правильным способом оценки погрешности измерений является способ А.

2) Вычислим значения величины η для каждого отдельного опыта (каждого брошенного шарика) и запишем в четвертый столбец.

$$\eta_i = \frac{2}{9}\cdot\frac{\rho_{ш}-\rho_{ж}}{1/t_i}\cdot g\cdot(r_i)^2 = \frac{2}{9}\cdot\frac{9,70-1,25}{23,8}\cdot 980\cdot t_i\left(\frac{d_i k}{2}\right)^2 =$$

$$= 77,32\cdot t_i\cdot\left(\frac{1,564\cdot 10^{-3}}{2}\right)^2\cdot d_i^2 .$$

3) Найдем среднее арифметическое значение коэффициента вязкости $\langle\eta\rangle$:

$$\langle\eta\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i = 15{,}20\ \textit{Пуаз}.$$

4) Найдём частные отклонения отдельных измерений коэффициента вязкости $\Delta\eta_i = \eta_i - \langle\eta\rangle$ и запишем их в пятый столбец.

5) Оценим погрешность измерения коэффициента вязкости $\Delta\eta^{изм}$:

$$\Delta\eta^{изм} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta\eta_i\right| = 2,29\ \textit{Пуаз}.$$

6) Выведем расчётную формулу для оценки погрешности, вносимой приборами при измерении коэффициента вязкости.

Удобно найти сначала относительную погрешность метода, воспользовавшись выражением (12):

$$\varepsilon_\eta^{пр} = \frac{\Delta l^{пр}}{l} + \frac{\Delta t^{пр}}{t} + 2\cdot\frac{\Delta d^{пр}}{d} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta\rho_ш^{табл}+\Delta\rho_ж^{табл}}{\rho_ш-\rho_ж}\ldots$$

В первое слагаемое подставим приборную погрешность измерения линейкой, равную $\Delta l^{пр}$ = 0,1 *см*, и табличное значение величины l = = 23,8 *см*.

Во второе слагаемое подставим приборную погрешность секундомера, равную $\Delta t^{пр}$ = 0,1 *с*, и любое из промежуточных значений измерения времени, например, t = 100 *с*.

В третье слагаемое подставим приборную погрешность определения диаметра микроскопом, равную $\Delta d^{\text{пр}} = 1$ *дел*, и промежуточное значение измерения диаметров, равное $d = 60$ *делениям*.

В два последних слагаемых подставим табличные величины с соответствующими погрешностями табличных величин (см. таблицу 1).

$$\varepsilon_{\eta}^{\text{пр}} = \frac{0{,}1\,см}{23{,}8\,см} + \frac{0{,}1\,с}{100\,с} + 2\frac{1\,дел}{60\,дел} + \frac{5\,см/с^2}{980\,см/с^2} + \frac{0{,}005 + 0{,}005}{9{,}700 - 1{,}250} =$$

$$= 0{,}0042 + 0{,}001 + 0{,}033 + 0{,}0051 + 0{,}0012 \approx 0{,}0445$$

7) Вычислим абсолютную погрешность коэффициента вязкости, вносимую приборами, умножив относительную на найденное среднее значение этой величины:

$$\Delta\eta^{\text{пр}} = \varepsilon_{\eta}^{\text{пр}} \cdot \langle \eta \rangle = 0{,}68\ \textit{Пуаз}.$$

8) Найдём общую погрешность эксперимента:

$$\Delta\eta = \Delta\eta^{\text{изм}} + \Delta\eta^{\text{пр}} = 2{,}97\ \textit{Пуаз}\mathbf{.}$$

9) Запишем результат проведенного эксперимента в стандартной форме (т.е. с указанием доверительного интервала). Учтём, что при округлении погрешности нужно оставить только одну значащую цифру, т.е. в данном случае округлить до «3». После этого среднее значение вязкости следует округлить до того разряда, в котором содержится погрешность, т.е. до единиц (см. раздел 2.4.1).

$$\boxed{\eta = (15 \pm 3)\,\text{Пуаз} \qquad (\varepsilon = 20\%)}$$

В скобках указано примерное значение относительной погрешности.

10) Запишем вывод к работе.

Вывод. Из справочных данных известно, что при температуре $t = 20°C$ коэффициент вязкости глицерина равен $\eta = 14{,}9$ *Пуаз*. Это значение принадлежит полученному доверительному интервалу результата эксперимента. Поэтому можно считать, что в пределах точности проведённых измерений эксперимент демонстрирует корректность теоретических представлений о явлении. Сравнительно большое значение относительной погрешности эксперимента обусловлено значительной погрешностью измерений.

ПРИЛОЖЕНИЕ **Б**

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

При выполнении математических операций над величинами, которые выражаются приближенными числами, заданными с различной точностью, руководствуются следующими правилами.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохраняют столько разрядов, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством разрядов.

2. При умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. Результат расчета значений функций x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\lg x$ некоторого приближенного числа x должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе x.

4. В промежуточных расчетах допускается использовать на одну-две значащие цифры больше («с запасом»).

Незначащими цифрами приближенного числа называются нули, стоящие слева в начале десятичных дробей, и нули, поставленные в конце числа вместо цифр, отброшенных при округлении. Остальные цифры называются значащими.

Например, в числе 0,0123 значащие цифры – 1, 2, 3; в числе 508000, полученном при округлении числа 507893, три последних нуля – незначащие. Для того чтобы не приводить дополнительный комментарий о том, получены ли последние нули в результате округления или нет, можно записать число 508000 как $508 \cdot 10^3$ или $5{,}08 \cdot 10^5$. Такая запись более однозначна.

Нули, стоящие в последних разрядах и не являющиеся результатом округления, есть значащие цифры. Так, числа 2,86 и 2,86000 не равнозначны по своей точности.

ПРИЛОЖЕНИЕ **В**

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В1. Функция распределения. Нормальное распределение и его характеристики

Допустим, что произведено n измерений некоторой случайной величины x: x_1, x_2, ... x_n – одним и тем же методом и с одинаковой тщательностью. Число dn полученных результатов, которые лежат в некотором достаточно узком интервале от x до $x + dx$, должно быть пропорционально:

– величине интервала dx;
– общему числу измерений n.

Таким образом,

$$dn = f(x) \cdot n \cdot dx \tag{14}$$

где $f(x)$ – функция, характеризующая распределение значений случайной величины по разным интервалам.

Вероятность $dw(x)$ того, что некоторое значение x лежит в интервале от x до $x + dx$, определяется следующим образом:

$$dw(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{dn}{n} = f(x)dx. \tag{15}$$

Функция $f(x)$ называется функцией распределения случайной величины или плотностью вероятности.

В качестве постулата теории ошибок принимается, что результаты прямых измерений, а также их случайные погрешности при $n \to \infty$ подчиняются закону **нормального распределения** (распределения Гаусса).

Функция нормального распределения непрерывной случайной величины x имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{16}$$

где σ и μ – параметры распределения.

Параметр μ нормального распределения равен среднему значению $\langle x \rangle$ случайной величины, которое при известной функции распределения определяется следующим образом:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xf(x) = \mu\,. \tag{17}$$

Величина μ является наиболее вероятным значением измеряемой величины x, т.е. её наилучшей оценкой.

Параметр σ^2 нормального распределения равен дисперсии D случайной величины, которая в общем случае определяется следующим образом:

$$D = \int_0^\infty (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2. \qquad (18)$$

Квадратный корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{D}$ называется среднеквадратичным (или средним квадратическим) отклонением случайной величины (или стандартным отклонением измерения).

Среднее отклонение случайной величины $\langle\sigma\rangle$ определяется с помощью функции распределения следующим образом:

$$\langle\sigma\rangle = \int_0^\infty |x-\mu| f(x)dx. \qquad (19)$$

Среднее отклонение измерений $\langle\sigma\rangle$, вычисленное по функции распределения Гаусса, соотносится с величиной среднеквадратичного отклонения σ следующим образом:

$$\langle\sigma\rangle = 0{,}8\cdot\sigma. \qquad (20)$$

Параметры σ и μ связаны между собой через функцию распределения:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi} f(\mu)}. \qquad (21)$$

Последнее выражение позволяет находить среднеквадратичное отклонение σ, если имеется кривая нормального распределения. Однако в реальных условиях эксперимента функция распределения, как правило, не известна. Либо распределение предполагается нормальным, но сами параметры распределения не известны.

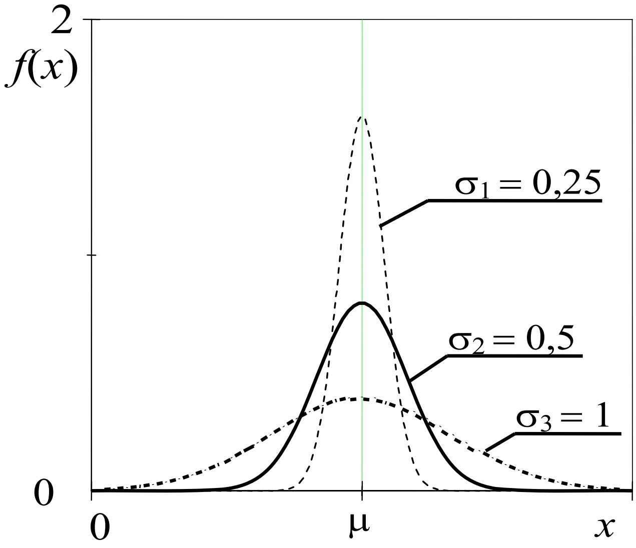
График функции Гаусса представлен на рисунках А и Б. Функция $f(x)$ симметрична относительно вертикальной прямой $x=\mu$, имеет максимум в точке $x=\mu$ и перегибы при $x=\mu\pm\sigma$. Таким образом, дисперсия характеризует ширину функции распределения, то есть показывает, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно её истинного значения. Чем точнее измерения, тем ближе к истинному значению результаты отдельных измерений, т.е. величина σ – меньше. На рисунке А изображена функция $f(x)$ для трех значений σ.

Площадь фигуры, ограниченной кривой $f(x)$ и вертикальными прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$ (рис. Б), численно равна вероятности попадания результата измерения в интервал $\Delta x = x_1 - x_2$, которая называется доверительной вероятностью. Площадь под всей кривой $f(x)$ равна вероятности попадания случайной величины в интервал от 0 до ∞, т.е.

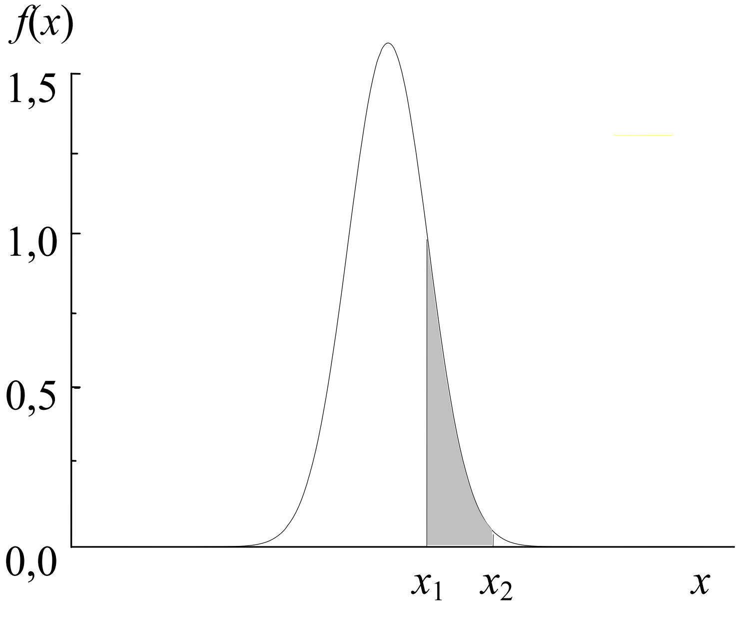
$$\int_0^\infty f(x)dx = 1, \qquad (22)$$

так как вероятность достоверного события равна единице.

А



Б



Используя нормальное распределение, теория ошибок (погрешностей) ставит и решает две основные задачи. Первая – оценка точности проведенных измерений. Вторая – оценка точности среднего арифметического значения результатов измерений.

В2. Точность результатов измерений

Точность результатов измерений в теории погрешностей характеризуется доверительным интервалом $(\langle x\rangle \pm \Delta x)_w$, таким что **с доверительной вероятностью, равной *w*, результат отдельного измерения находится внутри этого интервала**.

Если известно среднее отклонение измерения $\langle\sigma\rangle$, доверительный интервал, записанный в виде $(\langle x\rangle \pm \langle\sigma\rangle)_w$, определен с доверительной вероятностью $w = 0{,}57$.

Если известно среднеквадратичное отклонение σ распределения результатов измерений, указанный интервал можно записать в виде $(\langle x\rangle \pm t_w\sigma)_w$ где t_w – коэффициент, зависящий от величины доверительной вероятности и рассчитываемый по распределению Гаусса.

Наиболее часто используемые величины $\Delta x = t_w\sigma$ приведены в таблице 6.

Таблица 6

w	0,68	0,9	0,95
Δx	σ	$1{,}7\sigma$	2σ

Подчеркнем еще раз, что на практике **при проведении ограниченного числа измерений мы не знаем точного значения среднеквадратичного или среднего отклонения, а можем лишь оценить их величину**.

Наилучшей оценкой среднего отклонения измерения $\langle\sigma\rangle$ является **средняя погрешность измерений**

$$\langle\sigma\rangle \approx \langle\Delta x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \langle x\rangle\right|. \quad (23)$$

Наилучшей оценкой среднеквадратичного отклонения измерения σ является **среднеквадратичная погрешность измерений** $\boldsymbol{S}$ (в литературе также называется выборочной среднеквадратичной погрешностью для результата отдельного (единичного) измерения, так как зависит от числа измерений или, как принято говорить, объёма выборки):

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2}{n-1}}\ . \quad (24)$$

Эта величина стремится к σ при $n \to \infty$.

Приведённое выражение можно преобразовать к виду

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1}}, \tag{25}$$

который обычно указан и используется в программах в стандартных компьютерных приложениях, а также в некоторых моделях калькуляторов.

Таким образом, мы неизбежно заменяем величину σ в доверительном интервале на её приближенное значение *S*. При этом необходимо помнить, что чем меньше число измерений, тем хуже это приближение. Так, теория показывает, например, что **для корректного определения доверительного интервала с доверительной вероятностью *w* = 0,9 требуется не менее 40 измерений.**

Например, при 10 измерениях *S* определяется с погрешностью около 40% по отношению к среднеквадратичному отклонению результатов отдельных измерений.

При числе измерений $n \le 10$ ошибка в вычислении погрешностей становится настолько велика, что указывать доверительную вероятность не имеет смысла. В связи с этим **при малом числе измерений при оценке доверительного интервала можно пользоваться любым способом оценки погрешности измерения**.

Из оценочного характера вычисляемых величин следует также принятое на практике правило: при небольшом числе измерений в погрешности следует оставлять одну значащую цифру, если она больше 2, и две значащие цифры, если первая из них – двойка или единица. Последнее правило позволяет снизить погрешность округления.

В косвенных измерениях при полностью независимых погрешностях отдельных прямых измерений среднеквадратичную погрешность вычисляют по формуле

$$S_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} S_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} S_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} S_z\right)^2 + \ldots} \tag{26}$$

где S_x, S_y, S_z, ... – среднеквадратичные погрешности прямо измеренных величин x, y, z, ….

В3. Точность среднего арифметического результатов измерений

Выше рассматривалась функция распределения результатов отдельных измерений величины x. Особый интерес представляет распределение среднего арифметического результатов измерений и соответствующие отклонения. Разброс средних арифметических значений измерений также можно охарактеризовать доверительным интервалом $(\langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle)_w$, но в этом интервале с доверительной вероятностью w будут находиться средние арифметические значения измеренной величины, полученные в различных сериях измерений, проведенных при одинаковых условиях. **Можно утверждать, что в этом же интервале с доверительной вероятностью w находится истинное значение физической величины.**

Если величина x имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то и её среднее значение $\langle x \rangle$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 / n. Значит, случайная погрешность среднего арифметического меньше, чем погрешность единичного измерения.

Для оценки погрешности среднего арифметического значения применяется **среднеквадратичная погрешность среднего арифметического** $S_{\langle x \rangle}$ (в литературе также называется выборочной среднеквадратичной погрешностью среднего арифметического):

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}. \qquad (27)$$

Величина $S_{\langle x \rangle}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

В теории ошибок доказывается, что при конечной величине n распределение случайной величины перестает быть нормальным[5)] и переходит в несколько более широкое распределение Стьюдента, вид которого зависит от числа измерений. Соответственно, в данный доверительный интервал необходимо ввести коэффициент $t_{w,n}$, называемый коэффициентом Стьюдента. Тогда доверительный интервал принимает вид $(\langle x \rangle \pm t_{w,n} \cdot S_{\langle x \rangle})_w$.

[5)] Строго говоря, после проведения измерений необходимо проводить проверку их принадлежности нормальному распределению по установленным критериям. Согласно ГОСТу при числе измерений $n < 15$ принадлежность их к нормальному распределению уже не проверяют по причине бессмысленности проведения этой операции при малом n.

Чем меньше число n проведенных измерений, тем больше среднее значение может отклониться от истинного. Таким образом, при одной и той же доверительной вероятности w коэффициент Стьюдента должен расти с уменьшением n, как видно из таблицы 7.

Таблица 7

w \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	100	∞
0,9	6,3	2,9	2,4	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6
0,95	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	2,0

Если функция распределения и дисперсия случайной величины неизвестны, можно вычислить только ориентировочный доверительный интервал, при этом не следует использовать значения доверительной вероятности близкие к единице, при которых ошибка в оценке резко возрастает. При числе измерений $n \le 10$ ошибка вычисления средне-квадратичной погрешности среднего арифметического по отношению к его среднеквадратичному отклонению превышает 40%, что делает не-целесообразной запись доверительного интервала. В данном случае корректнее приводить в качестве результата отдельно среднее значение, среднеквадратичную погрешность среднего и число измерений.

В4. Погрешность эксперимента

При необходимости провести оценку погрешности эксперимента с большой точностью необходимо анализировать характер различных погрешностей. Допустим, в эксперименте присутствуют погрешности Δx_{I} и Δx_{II}. Если погрешности вызываются полностью независимыми друг от друга случайными причинами, суммарная погрешность эксперимента равна квадратному корню из суммы квадратов соответствующих погрешностей, или квадратичной сумме:

$$\Delta x^{\text{сумм}} = \sqrt{\Delta x_{\mathrm{I}}^2 + \Delta x_{\mathrm{II}}^2}\,. \qquad (28)$$

Независимо от того, являются ли погрешности независимыми и случайными или не являются таковыми, их общий «суммарный» вклад не больше, чем их арифметическая сумма:

$$\Delta x^{\text{сумм}} \le \Delta x_{\mathrm{I}} + \Delta x_{\mathrm{II}}\,. \qquad (29)$$

Таким образом, применяющийся при оценке погрешности эксперимента в физическом практикуме принцип обычного суммирования погрешностей дает верхний предел оценки полной погрешности.

При оценке вклада погрешностей, вносимых приборами, возникает проблема суммирования систематических погрешностей, так как по своим свойствам приборная ошибка является систематической. Систематические погрешности должны также суммироваться методами теории вероятностей, что предполагает, что они должны рассматриваться как случайные величины, функции распределения которых известны. Однако закон распределения неисключенных систематических погрешностей, в том числе приборных, как правило, неизвестен. Поэтому при их суммировании обычно руководствуются практическим правилом, основанном на здравом смысле и интуиции:

– если известна оценка границ погрешности, то ее распределение следует считать равномерным (например, при работе с отдельным прибором, имеющим определенный класс точности, конкретная величина приборной погрешности которого заключена в известных пределах, но неизвестна);
– если же известна оценка среднеквадратичной погрешности, распределение следует считать нормальным.

Применение этого правила позволяет статистически суммировать составляющие систематической погрешности, в том числе приборные погрешности. В соответствии с ним при отсутствии дополнительной информации неисключенные остатки систематической погрешности рассматриваются как случайные величины, имеющие равномерное распределение. При числе слагаемых меньшем или равном трем значения погрешностей суммируются арифметически. При числе слагаемых от четырех и более производят квадратичное суммирование, чтобы избежать завышенной оценки.

При определении суммарной погрешности эксперимента в общем случае пользуются эмпирическими формулами для построения композиции распределения случайных и неисключенных систематических погрешностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лабораторные работы по курсу физики для естественных факультетов МГУ. Механика. М., Моск. ун-т. 1997.

2. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. М.: Физический факультет МГУ, 2004 и 2006 г.г.

3. Л.Г. Деденко. В.В. Керженцев. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М., Изд-во МГУ, 1977.

4. Дж. Тейлор. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

5. А.Н. Зайдель. Погрешности измерений физических величин. Л., Наука, 1985.

6. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. Л., Энергоатомиздат, 1991.