

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО  
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики, экономики и информатики  
Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

Е.А.Головко

**ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА**

Методические указания

Иркутск 2008

## Оглавление

Ведение.....	3
<b>§1 Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными</b> .....	4
1.1. Необходимый теоретический материал.....	4
1.2. Пример выполнения задачи 1 (приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа) ...	6
1.3. Пример выполнения задачи 2 (приведение к каноническому виду уравнений параболического типа)	7
1.4. Пример выполнения задачи 3 (приведение к каноническому виду уравнений эллиптического типа) ..	9
1.5. Задачи для самостоятельного решения .....	11
<b>§2 Упрощение группы младших производных для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами</b>	13
2.1. Необходимый теоретический материал .....	13
2.2. Пример выполнения задачи 4	14
2.3. Задачи для самостоятельного решения .....	17

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящих методических указаниях изложен теоретический материал и на конкретных примерах разобрано приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными для уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов.

Методические указания предназначены для студентов математических специальностей очной и заочной формы обучения.

# §1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

**Задача.** *Определить тип уравнения*

$$(1) \quad A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y)$$

*и привести его к каноническому виду.*

## 1.1. Необходимый теоретический материал.

I. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения  $B^2 - AC$ :

- если  $B^2 - AC > 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;
- если  $B^2 - AC < 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;
- если  $B^2 - AC = 0$  в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Уравнение (1) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области  $D$ , если оно гиперболично, эллиплично, параболично в каждой точке этой области.

Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение  $yU_{xx} + U_{yy} = 0$  является уравнением эллиптического типа в точках  $(x, y)$ ,  $y > 0$ ; параболического типа в точках  $(x, 0)$ ; и гиперболического типа в точках  $(x, y)$ ,  $y < 0$ .

II. Чтобы привести уравнение к каноническому виду, необходимо:

1. Определить коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ ;
2. Вычислить выражение  $B^2 - AC$ ;
3. Сделать вывод о типе уравнения (1) (в зависимости от знака выражения  $B^2 - AC$ );
4. Записать уравнение характеристик:

$$A(x, y)dy^2 - 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0; \quad (2)$$

5. Решить уравнение (2). Для этого:

а) разрешить уравнение (2) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \frac{B(x, y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x, y)} dx; \quad (3)$$

- б) найти общие интегралы уравнений (3) (характеристики уравнения (1)):

- $\varphi_1(x, y) = C_1,$   
 $\psi_1(x, y) = C_2,$   
(4)

в случае уравнения гиперболического типа;

- $\varphi_2(x, y) = C,$   
(5)

в случае уравнения параболического типа;

- $\varphi_3(x, y) \pm i\psi_3(x, y) = C,$   
(6)

в случае уравнения эллиптического типа.

6. Ввести новые (характеристические) переменные  $\xi$  и  $\eta$  :

- в случае уравнения гиперболического типа в качестве  $\xi$  и  $\eta$  берут общие интегралы (4) уравнений (3), т.е.

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$

$$\eta = \psi_1(x, y);$$

- в случае уравнения параболического типа в качестве  $\xi$  берут общий интеграл (5) уравнения (3), т.е.  $\xi = \varphi_2(x, y)$ , в качестве  $\eta$  берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию  $\psi_2$ , не выражающуюся через  $\varphi_2(x, y)$ , т.е.  $\eta = \psi_2(x, y)$ ;

- в случае уравнения эллиптического типа в качестве  $\xi$  и  $\eta$  берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов (6) уравнений (3):

$$\xi = \operatorname{Re}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \varphi_3(x, y),$$

$$\eta = \operatorname{Im}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \psi_3(x, y).$$

7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции:

$$U(\xi(x, y); \eta(x, y))$$

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x,$$

$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx},$$

(7)

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy},$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}.$$

8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (1) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (1) примет один из следующих видов:

- в случае уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0.$$

## 1.2. Пример выполнения задачи 1.

Определить тип уравнения

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2 \quad (8)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ :

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=-21.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$$

3.  $B^2 - AC = 25 > 0 \Rightarrow$  уравнение гиперболического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0. \quad (9)$$

5. Решим уравнение (9). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5)dx;$$

$$dy = -7dx, \quad dy = 3dx, \quad (10)$$

б) найдём общие интегралы уравнений (10) (характеристики уравнения (9)):

$$y = -7x + C_1, \quad y = 3x + C_2,$$

$$y + 7x = C_1, \quad y - 3x = C_2.$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 7x,$$

$$\eta = y - 3x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ -21 \end{array} \left| \begin{array}{l} U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\ U_y = U_\xi + U_\eta, \\ U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\ U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\ U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{array} \right.$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (8) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi} \{49 - 28 - 21\} + U_{\xi\eta} \{-42 - 16 - 42\} + U_{\eta\eta} \{9 + 12 - 21\} +$$

$$+ U_\xi \{14 - 3\} + U_\eta \{-6 - 3\} + 5U = \frac{(\xi - \eta)^2}{16}.$$

Или после деления на  $-100$  (коэффициент при  $U_{\xi\eta}$ ):

$$U_{\xi\eta} - 0,11U_\xi + 0,09U_\eta - 0,05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600}.$$

**Ответ.** Уравнение (8) является уравнением гиперболического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\xi\eta} - 0,11U_\xi + 0,09U_\eta - 0,05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600},$$

где  $\xi = y + 7x$ ,  $\eta = y - 3x$ .

### 1.3. Пример выполнения задачи 2.

Определить тип уравнения

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_y + 2U = 5y + 2x \quad (11)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ . В нашем примере они постоянны:

$$A=25, \quad B=-5, \quad C=1.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3.  $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$  уравнение параболического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0. \quad (12)$$

5. Решим уравнение (12). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно  $dy$ . Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом:

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx; \quad (13)$$

б) имеем только одно уравнение характеристик (13). Найдём его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$5y = -x + C,$$

$$5y + x = C.$$

6. Введём характеристические переменные: одну из переменных ( $\xi$ ) вводим как и ранее

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве  $\eta$  берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через  $\xi$ , пусть

$$\eta = x;$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдём сначала

$$\xi_x = 1, \xi_y = 5, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l|l} 0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = 5U_\xi, \\ 25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\ 1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (11) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} & U_{\xi\xi} \{25 - 50 + 25\} + U_{\xi\eta} \{50 - 50\} + U_{\eta\eta} \{25\} + \\ & + U_\xi \{5\} + 2U = \xi + \eta. \end{aligned}$$



Функцию, стоящую в правой части уравнения (11) необходимо также выразить через характеристические переменные.

После деления на 25 (коэффициент при  $U_{\eta\eta}$ ):

$$U_{\eta\eta} + 0,2U_{\xi} + 0,08U = 0,4(\xi + \eta).$$

**Ответ.** Уравнение (11) является уравнением параболического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\eta\eta} + 0,2U_{\xi} + 0,08U = 0,4(\xi + \eta).$$

где  $\xi = 5y + x$ ,  $\eta = x$ .

### 1.4. Пример выполнения задачи 3.

Определить тип уравнения

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_x - 3U_y + U = x^2 \quad (14)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$ :

$$A=1, \quad B=0, \quad C=4.$$

2. Вычислим выражение  $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3.  $B^2 - AC = -4 < 0 \Rightarrow$  уравнение эллиптического типа во всей плоскости  $XOY$ .

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dx^2 = 0. \quad (15)$$

5. Решим уравнение (15). Для этого:

а) разрешаем уравнение (15) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$dy = \pm 2idx; \quad (16)$$

б) уравнения (16) – это пара комплексно-сопряженных уравнений. Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов. (Уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик)

$$\begin{aligned} y &= \pm 2xi + C, \\ y \mp 2xi &= C. \end{aligned} \quad (17)$$

6. Введём характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов (17):

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{Re}(y + 2xi) = y, \\ \eta &= \operatorname{Im}(y + 2xi) = 2x. \end{aligned}$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l|l} 1 & U_x = 2U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ 4 & U_{yy} = U_{\xi\xi} \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (14) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi} \{4\} + U_{\eta\eta} \{4\} +$$

$$+ U_\xi \{-3\} + U_\eta \{2\} + U = \xi.$$

Или после деления на 4 (коэффициент при  $U_{\xi\xi}$  и  $U_{\eta\eta}$ ):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0,75U_\xi + 0,5U_\eta + 0,25U = \xi.$$

**Ответ.** Уравнение (14) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости  $XOY$ . Канонический вид

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0,75U_\xi + 0,5U_\eta + 0,25U = \xi.$$

где  $\xi = y, \eta = 2x$ .

## 1.5. Задачи для самостоятельного решения.

### Задача 1.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

- 1.1.  $U_{xx} - 8U_{xy} - 9U_{yy} + 21U_x + 3U_y - U = 0.$
- 1.2.  $2U_{xx} - 4U_{xy} - 6U_{yy} - U_x + 7U_y + 3U = 0.$
- 1.3.  $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_x - 3U_y + U = 0.$
- 1.4.  $-7U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - U_y + 4U = 0.$
- 1.5.  $U_{xx} - 2U_{xy} - 8U_{yy} + 3U_y - U = 0.$
- 1.6.  $U_{xx} - U_{xy} - 6U_{yy} + 2U_x - U = x.$
- 1.7.  $4U_{xx} - 2U_{xy} - 6U_{yy} + 8U_x + U_y - U = y.$
- 1.8.  $U_{xx} - 16U_{yy} + U_x + 3U_y - 6U = 0.$
- 1.9.  $U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_x - U_y - 5U = x + y.$
- 1.10.  $6U_{xx} - U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y - U = 0.$

### Задача 2.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

- 2.1.  $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x - U_y + U = x$
- 2.2.  $2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + U_x - 3U_y + U = y^2$
- 2.3.  $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_x - 3U_y + 5U = 0$
- 2.4.  $3U_{xx} - 6U_{xy} + 3U_{yy} + 5U_x - 3U_y + 2U = y - x$
- 2.5.  $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$
- 2.6.  $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U = x + y$
- 2.7.  $9U_{xx} - 6U_{xy} + U_{yy} + 7U_x - 2U_y - U = 0$
- 2.8.  $2U_{xx} - 8U_{xy} + 8U_{yy} + U_x - U_y + U = 0$
- 2.9.  $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 5U_x + U_y - 3U = y$
- 2.10.  $9U_{xx} - 12U_{xy} + 4U_{yy} - 3U_x - 2U_y + U = 0$

### Задача 3.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

$$3.1. \quad -U_{xx} - 2U_{xy} - 5U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = 0$$

$$3.2. \quad U_{xx} - 2U_{xy} + 10U_{yy} + U_x + 3U_y - 5U = 0$$

$$3.3. \quad 2U_{xx} + 4U_{xy} + 10U_{yy} + 8U_x - 3U_y + U = \sin x$$

$$3.4. \quad U_{xx} - 4U_{xy} + 13U_{yy} + 7U_x + 6U_y = 0$$

$$3.5. \quad 2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = y - \frac{3x}{2}$$

$$3.6. \quad 3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0$$

$$3.7. \quad 3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2 = \frac{\sqrt{2}x}{3}$$

$$3.8. \quad U_{xx} - 6U_{xy} + 13U_{yy} + 3U_x - U_y + 4U = 0$$

$$3.9. \quad 13U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_x + 6U_y - U = 0$$

$$3.10. \quad 10U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + U_x + 3U_y = 0$$

## §2. Упрощение группы младших производных для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

### 2. 1. Необходимый теоретический материал

В самом общем виде линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y) \quad (1)$$

Преобразованием независимых переменных группа старших производных уравнения может быть упрощена. Уравнение (1) приводится к одному из следующих видов

- в случае уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta} + a_1U_\xi + b_1U_\eta + c_1U = f_1(\xi, \eta); \quad (11)$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} + a_2U_\xi + b_2U_\eta + c_2U = f_2(\xi, \eta); \quad (12)$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + a_3U_\xi + b_3U_\eta + c_3U = f_3(\xi, \eta). \quad (13)$$

Если коэффициенты исходного уравнения постоянны, то для дальнейшего упрощения уравнения любого типа нужно сделать замену неизвестной функции

$$U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}V(\xi, \eta), \quad (14)$$

где  $V(\xi, \eta)$  - новая неизвестная функция,  $\lambda, \mu$  - параметры, подлежащие определению. Такая замена не «испортит» канонического вида, но при этом позволит подобрать параметры  $\lambda, \mu$  так, чтобы из трех слагаемых группы младших производных в уравнении осталось только одно. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов соответственно примут вид

$$\begin{aligned} U_{\xi\eta} + \tilde{c}_1U &= \tilde{f}_1(\xi, \eta); \\ U_{\eta\eta} + \tilde{a}_2U_\xi &= \tilde{f}_2(\xi, \eta); \\ U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \tilde{c}_3U &= \tilde{f}_3(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Чтобы реализовать замену (14) в уравнениях (11), (12), (13), необходимо пересчитать все производные, входящие в эти уравнения по формулам

$$\begin{aligned}
U(\xi, \eta) &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} V(\xi, \eta), \\
U_\xi &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda V + V_\xi), \\
U_\eta &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\mu V + V_\eta), \\
U_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda^2 V + 2\lambda V_\xi + V_{\xi\xi}), \\
U_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda\mu V + \mu V_\xi + \lambda V_\eta + V_{\xi\eta}), \\
U_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\mu^2 V + 2\mu V_\eta + V_{\eta\eta}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Подробно рассмотрим этот процесс на примере уравнения гиперболического типа, т.е. уравнения (11). Пересчитаем производные, входящие в это уравнение, используя формулы (15).

$$\begin{array}{l|l}
c_1 & U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} V(\xi, \eta), \\
a_1 & U_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda V + V_\xi), \\
b_1 & U_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\mu V + V_\eta), \\
1 & U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda\mu V + \mu V_\xi + \lambda V_\eta + V_{\xi\eta})
\end{array}$$

Здесь слева расставлены соответствующие коэффициенты уравнения (11). Собирая подобные слагаемые, получим

$$e^{\lambda\xi + \mu\eta} \{V_{\xi\eta} + V_\xi (a_1 + \mu) + V_\eta (b_1 + \lambda) + V(a_1\lambda + b_1\mu + \lambda\mu + c_1)\} = f_1(\xi, \eta). \tag{16}$$

В уравнении (16) приравняем к нулю коэффициенты при  $V_\xi$  и  $V_\eta$

$$a_1 + \mu = 0,$$

$$b_1 + \lambda = 0.$$

Откуда  $\mu = -a_1, \lambda = -b_1$ . Подставив эти значения параметров в уравнение (16) и разделив его на  $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ , придем к уравнению

$$U_{\xi\eta} + \tilde{c}_1 U = \tilde{f}_1(\xi, \eta),$$

где  $\tilde{c}_1 = -2a_1b_1 + a_1b_1 + c_1$ ,  $\tilde{f}_1(\xi, \eta) = f_1 e^{-b_1\xi - a_1\eta}$ .

## 2.2. Пример выполнения задачи 4

*Привести уравнение*

$$U_{xx} - 4U_{xy} + 5U_{yy} - 3U_x + U_y + U = 0 \tag{17}$$

*к каноническому виду и упростить группу младших производных.*

Решение:

9. Определим коэффициенты  $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ :

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=5.$$

10. Вычислим выражение  $B^2 - AC$  :

$$B^2 - AC = 4 - 5 = -1.$$

11.  $B^2 - AC = -1 < 0 \Rightarrow$  уравнение эллиптического типа во всей плоскости  $XOY$ .

12. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0. \quad (18)$$

5. Решим уравнение (18). Для этого:

а) разрешаем уравнение (18) как квадратное уравнение относительно  $dy$ :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{1} dx; \\ dy &= (-2 \pm i) dx; \end{aligned} \quad (19)$$

б) найдём общие интегралы уравнений (19) (характеристики уравнения (17)):

$$y = (-2 \pm i)x + C,$$

$$y + 2x \pm xi = C,$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 2x,$$

$$\eta = x.$$

13. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдём сначала

$$\xi_x = 2, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{l} -3 \left| U_x = 2U_\xi + U_\eta, \right. \\ 1 \left| U_y = U_\xi, \right. \\ 1 \left| U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \right. \\ -4 \left| U_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, \right. \\ 5 \left| U_{yy} = U_{\xi\xi}. \right. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (17) при соответствующих производных.

14. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} \{4 - 8 + 5\} + U_{\xi\eta} \{4 - 4\} + U_{\eta\eta} \{1\} + \\ + U_\xi \{-6 + 1\} + U_\eta \{-3\} + U = 0. \end{aligned}$$

Или

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 5U_\xi - 3U_\eta + U = 0. \quad (20)$$

Теперь с помощью замены неизвестной функции (14)

$$U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} V(\xi, \eta)$$

упростим группу младших производных.

Пересчитаем производные, входящие в уравнение (20), используя формулы (15).

$$\begin{array}{l|l} 1 & U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} V(\xi, \eta), \\ -5 & U_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda V + V_\xi), \\ -3 & U_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\mu V + V_\eta), \\ 1 & U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\lambda^2 V + 2\lambda V_\xi + V_{\xi\xi}), \\ 1 & U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\mu^2 V + 2\mu V_\eta + V_{\eta\eta}). \end{array}$$

Здесь слева расставлены соответствующие коэффициенты уравнения (20). Собирая подобные слагаемые, получим

$$e^{\lambda\xi + \mu\eta} \{V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_\xi(-5 + 2\lambda) + V_\eta(-3 + 2\mu) + V(-5\lambda - 3\mu + \lambda^2 + \mu^2 + 1)\} = 0. \quad (21)$$

В уравнении (21) приравняем к нулю коэффициенты при  $V_\xi$  и  $V_\eta$

$$-5 + 2\lambda = 0,$$

$$-3 + 2\mu = 0.$$

Откуда  $\mu = \frac{3}{2}, \lambda = \frac{5}{2}$ . Подставив эти значения параметров в уравнение (21) и разделив его на  $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ , придем к уравнению

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{15}{2}V = 0.$$

**Ответ.** Уравнение (20) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости  $XOY$ . Его канонический вид

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{15}{2}V = 0,$$

где  $\xi = y + 2x, \eta = x, \quad U(\xi, \eta) = e^{\frac{5\xi + 3\eta}{2}} V(\xi, \eta).$



### 2.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.** Привести уравнения к каноническому виду и упростить группу младших производных.

4.1.	$3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2U = 0.$
4.2.	$3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0.$
4.3.	$2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = 0.$
4.4.	$U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 4U_x - 9U_y - 3U = 0.$
4.5.	$U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0.$
4.6.	$2U_{xx} + 8U_{xy} + 8U_{yy} - U_x - 2U_y - 5U = 0.$
4.7.	$U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + 2U_y - 5U = 0.$
4.8.	$8U_{xx} - 6U_{xy} - U_{yy} - U_x - 3U_y - U = 0.$
4.9.	$4U_{xx} - 8U_{xy} + U_{yy} - 2U_x + 2U_y - 3U = 0.$
4.10.	$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 7U_y - 3U = 0.$