Линейная алгебра

Глава 1. Системы линейных уравнений. Векторные пространства.

§1 Напоминание о системах

Изучение курса аналитической геометрии в первом семестре началось с рассмотрения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Оно естественным образом потребовало введения понятий вектора, матрицы и определенных удобных операций с этими объектами. В частности, саму систему (1) переписали в виде уравнения

$$A\bar{x} = \bar{b}, \tag{1.2}$$

в котором

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

При m=n=2 и m=n=3 было введено понятие определителя матрицы $|A|$ и, если $|A| \neq 0$, понятие обратной матрицы A^{-1}.

Система (2) при этом получим решение в виде

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \tag{1.3}$$

В ряде задач, имеющих отношение к химии, математическая модель приводит к линейной системе общего вида (1.1).

Пример (Расчет смесей), [1]. Пусть требуется приготовить смесь из m веществ в количествах $b_i, i = 1, \ldots, m$ каждого из этих веществ. Для приготовления смеси имеется n компонент, каждая из которых содержит n_{ij} i-ого вещества, (j-номер компонента). Обозначим x_j-количество j-ого вещества. Тогда сформулированная задача примет вид системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Пример ([1], Определение состава смеси спектрофотометрическими измерениями).

Оптическая плотность раствора химического вещества определяется равенством

$$D = \log_{10}(\frac{I_0}{I})$$

Где I_0, I-интенсивности светового потока до и после прохождения через раствор. Оптическая плотность связана с концентрацией с поглощающего вещества и толщиной слоя l формулой

$$D(\lambda) = \varepsilon\,(\lambda)cl\,,$$

Где ε (λ)-молекулярный коэффициент поглощения, являющийся индивидуальный характеристикой вещества, зависящей от λ-длинны волны. Если смесь состоит из n невзаимодействующих веществ, то её оптическая плотность равна сумме оптических плотностей, составляющих её веществ,

$$D(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)c_1 l + \ldots + \varepsilon_n(\lambda)c_n l$$

Если произвести измерения при $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то получили систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\lambda_1)\mathrm{c}_1 l + \cdots + \varepsilon_n(\lambda_1)c_n l = D(\lambda_1) \\ \ldots \\ \varepsilon_1(\lambda_n)c_1 l + \cdots + \varepsilon_n(\lambda_n)c_n l = D(\lambda_n) \end{cases}$$

Относительно концентраций $\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n$ с матрицей системы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda_1) \ldots \varepsilon_n(\lambda_1) \\ \ldots \\ \varepsilon_1(\lambda_n) \ldots \varepsilon_n(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Если определитель этой матрицы не равен 0, то система позволяет определить искомые величины $\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n$.

Пример ([1], исследование состава смеси при помощи сенсоров).

Сенсорами называют приборы, выходной сигнал которых зависит от концентрации определенного вещества в газовой среде или в растворе, причем эти чувствительности известны и обозначаются a_{ij} (j-номер вещества, i-номер сенсора).

Предполагается, что сигналы, обусловленные присутствием в смеси каждого из веществ, складываются и что величина сигнала от определенного вещества пропорциональна по концентрации, т.е. x_j для j-ого вещества, а коэффициентом пропорциональности является число a_{ij} (для i-ого сенсора).

Таким образом,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

При m=n и $|A| \neq 0$ эта система позволяет однозначно определить числа $x_1, \ldots, x_n$.

Приведенные примеры (далеко не исчерпывающие запас этих примеров) показывают, что изучение свойств систем линейных уравнений не является праздной задачей.

Можно сказать: «Подумаешь, линейная система! Еще в школе нас учили последовательно исключать неизвестные и получать ответ»

Однако далеко не всякая система имеет решение и далеко не всякая система имеет единственное решение. Поэтому без изучения вопросов о разрешимости системы и о свойствах её решений не обойтись.

Сделаем начальные шаги в этом направлении. Рассмотрим снова систему (1), у которой все числа $b_i = 0, i = 1, \ldots, m$. Очевидно, что числа $x_1 = \ldots = x_m = 0$ дают решения этой системы. Есть ли у нее другие решения , и если есть, то каковы их свойства? Запишем рассматриваемую систему в виде уравнения

$$A\bar{x} = \bar{0} \qquad (1.4)$$

(здесь $\bar{0}$ обозначает столбец с m координатами, равными 0)

Пусть $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$- решения этого уравнения. Вспоминаем свойства умножения матрицы на вектор и получаем важное равенство

$$A(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = A\overline{x_1} + A\overline{x_2} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

Таким образом, если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – решения (1.4), то $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ – также решение этого уравнения. Аналогично, если $\lambda \in R$ и $\overline{x}$ - решение (1.4), то

$$A(\overline{\lambda x}) = \lambda A\overline{x} = \lambda\bar{0} = \bar{0}$$

Таким образом, $\lambda\bar{x}$-тоже решение (1.4).

Эти свойства позволяют сказать, что множество решений уравнения (1.4) является векторным (синоним: линейным) пространством над R. Точное определение этого понятия будет дано в следующем пункте.

§2.Векторные пространства.

Перейдем к рассмотрению важного общего понятия, линейного или векторного пространства (Эти слова-синонимы). Многочисленные примеры векторных пространств будут приведены ниже.

Определение: Непустое множество V элементов $\bar{x}$, называемых векторами, в котором введены операции суммы векторов, сопоставляющей каждой паре $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in V$ вектор $\bar{x} \in V$, $\bar{x} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$ и произведения числа $\lambda \in R$ на вектор $\bar{x} \in V$, дающая вектор $\lambda\bar{x} \in V$ называется векторным пространством, если эти операции подчиняются следующим законам (аксиомам) :

1. Для любых $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in V$

$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_2} + \overline{x_1}$, т.е. сложение векторов – коммутативно.

2. Для любых $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \in V$

$\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) + \overline{x_3} = \overline{x_1} + \left(\overline{x_2} + \overline{x_3}\right)$, т.е. сложение векторов – ассоциативно.

3. Существует нейтральный элемент по сложению, обозначаемый $\bar{0}$ такой, что для любого $\bar{x} \in V$:

$\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$

Легко доказать, что такой элемент ровно 1: Если есть два элемента с таким свойством, скажем, $\overline{0_1}$ и $\overline{0_2}$, то $\overline{0_1} + \overline{0_2} = \overline{0_1}$ и $\overline{0_1} + \overline{0_2} = \overline{0_2}$, откуда $\overline{0_1} = \overline{0_2}$

4. Для любого $\bar{x} \in V$ существует обратный элемент по сложению.

Обозначаемый $-\bar{x}$ такой, что :

$\bar{x} + \left(-\bar{x}\right) = \bar{0}$

(Легко доказать единственность обратного элемента)

Первые 4 аксиомы означают, что по отношению к операции сложения векторное пространство представляет собой коммутативную (или, что то же самое, абелеву) группу. Понятие группы и его приложения будет подробнее изучено далее.

5. Для любых $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in V$ и любого $\lambda \in R$: $\lambda\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) = \lambda\overline{x_1} + \lambda\overline{x_2}$

Это свойство называется дистрибутивностью относительно сложения векторов

6. Для любых $\lambda, \mu \in R$ и любого $\overline{x \in V}$:

$$(\lambda + \mu)\overline{x} = \lambda\overline{x} + \mu\overline{x}$$

$$(\lambda \cdot \mu)\overline{x} = \lambda(\mu\overline{x})$$

7. Для любого $\lambda \in R$:

$$\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$$

8. Для любого $\overline{x} \in V$

$$0 \cdot \overline{x} = \overline{0}, \ 1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$$

Рассмотрим примеры векторных пространств:

1. Само множество R действительных чисел с обычными операциями умножения и сложения – векторное пространство.
2. Множество векторов на плоскости и в пространстве с обычными операциями суммы векторов и умножения векторов на число – векторные пространства.
3. Множество наборов чисел $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), x_1 \in R, i = 1, \ldots, n$ в котором введены операции сложения векторов:

   $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ (т.е. сложение покоординатное)

   И умножения вектора на число:

   $$\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, \ldots \lambda x_n)$$

   Образует векторное пространство R^n, называемое n-мерным арифметическим пространством. Термин n-мерное, хотя и очевиден в данном примере, будет подробно изучен ниже.

   Отметим, что при введении координат на плоскости или в пространстве геометрические векторы обладали теми же свойствами операций, что и их

изображения наборами координат, что позволяло нам отождествлять плоскость с R^2 и пространство с R^3

4. Рассмотрим множество функций, например, непрерывных на отрезке $[a,b]$

Так как сумма непрерывных функций – непрерывная функция, а произведение непрерывной функции на число – непрерывная функция, множество $C[a,b]$ на отрезке $[a,b]$ функций образует векторное пространство.

5. Рассмотрим множество многочленов с обычными операциями. Оно тоже представляет собой векторное пространство.
6. Рассмотрим в предыдущем примере только многочлены степени $\leq n$. Тогда мы вновь имеем векторное пространство, поскольку при суммировании многочленов их степень не возрастает (равно как и при умножении на число).Отметим, что многочлены, имеющие степень равную *1,* векторное пространство не образуют, так как, например, сумме многочленов x^n+1 и $-x^n+1$ степени и равна многочлену нулевой степени.
7. Вернемся к предыдущему пункту – там мы отметили, что множество решений системы:

$$A\overline{x}=\overline{0}$$

Образует векторное пространство.

§3 Линейная зависимость и линейная независимость

Пусть $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}\in V, c_1,\ldots,c_n\in R$

Выражение

$$c_1\overline{x_1}+\ldots+c_n\overline{x_n} \tag{1.5}$$

Называется <u>линейной комбинацией</u> векторов $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}$ с коэффициентами $c_1,\ldots,c_n$

Ясно, что $c_1\overline{x_1}+\ldots+c_n\overline{x_n}$ тоже является элементом V, т.е. вектором.

Если $c_1=\ldots=c_n=0$, то линейная комбинация

$0\cdot\overline{x_1}+\ldots+0\cdot\overline{x_n}=\overline{0}$ называется тривиальной.

Если среди чисел $c_1,\ldots,c_n$ имеются отличные от 0 (что для $c_1,\ldots,c_n \in R$ равносильно условию $c_1^2,\ldots,c_n^2 \neq 0$), то линейная комбинация (1.5) называется <u>нетривиальной.</u>

<u>Определение</u>: Векторы $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}$ называются <u>линейно зависимыми</u>, если существуют их нетривиальная линейная комбинация (1.5) , равная нулевому вектору, т.е. если существуют $c_1,\ldots,c_n$, $c_1^2,\ldots,c_n^2 \neq 0$) такие, что:

$$c_1\overline{x_1} + \ldots + c_n\overline{x_n} = 0 \qquad (1.6)$$

<u>Определение</u>: Если из равенства (1.6) вытекает, что $c_1 = \ldots = c_n = 0$, то векторы $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}$ называются <u>линейно независимыми</u>.

Другими словами, любая нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов отличных от нулевого вектора/

Рассмотрим примеры.

1. Пусть $\overline{x_1} = (1,0,0), \overline{x_2} = (-1,0,0) \in R^3$. Тогда $1\cdot\overline{x_1} + 1\cdot\overline{x_2} = 0$и, следовательно, $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ линейно зависимы.
2. Пусть $\overline{x_1} = (1,0,0), \overline{x_2} = (0,1,0), \overline{x_3} = (0,0,1)$. Линейная комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ являются векторами с координатами (c_1,c_2,c_3).

Этот вектор равен нулевому вектору тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.Поэтому векторы $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}$ линейно независимы.

3. В пространстве функций, определенных, например, на отрезке $[0,2\pi]$ функции $1,\sin^2 x,\cos^2 x$ являются линейно независимыми, так как:

$$1\cdot 1 - 1\cdot\sin^2 x - 1\cdot\cos^2 x = 1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

В этом же пространстве функции *sinx* и *cosx* линейно независимы.

Действительно, если:

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0 \qquad (1.7)$$

Для них *x* (ноль в пространстве функций, определенных на $[0,2\pi]$ представляет собой функцию, тождественно равную нулю). Подставляя *x=0* , получаем:

$$c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0, c_2 = 0$$

Тогда из (1.7) получаем:

$$c_1 \sin x = 0$$

И подстановка $x = \frac{\pi}{2}$ дает $c_1 = 0$. Таким образом, из (1.7) следует, что $c_1 = c_2 = 0$

Докажем несколько простых, но важных утверждений.

Теорема 1.1

Если $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \in U$ линейно зависимы, то существует i, $1 \le i \le u$ такое что, $\bar{u}_i$ представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

Доказательство.

Пусть $\bar{c}_1 x_1 + \ldots + \bar{c}_n x_n = 0$.(1.8)

Среди чисел $c_1 \cdots c_n$ есть отличные от нуля по определению.

Пусть $c_i \neq 0$. Тогда из (1.8) получим:

$$c_i \bar{x}_i = -c_1 \bar{x}_1 - \ldots - c_{i-1} \bar{x}_{i-1} - c_{i+1} \bar{x}_{i+1} - \ldots - c_n \bar{x}_n$$

и, так как $c_i \neq 0$:

$$\bar{x}_i = -\frac{c_1}{c_i} \bar{x}_1 - \ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i} \bar{x}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} \bar{x}_{i+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_i} \bar{x}_n.$$

Теорема 1.2

Если среди n векторов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ есть k, $k < n$ линейно зависимых векторов, то и векторы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

Без ограничения общности пусть $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ линейно зависимы (нумерация векторов в нашем распоряжении). Тогда $\bar{o} = c_1 \bar{x}_1 + \ldots + c_k \bar{x}_k$ (1.9), и среди $c_1, \ldots, c_k$ есть отличные от 0. Полагая $c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$, получим, ввиду (1.9), что $\bar{o} = c_1 \bar{x}_1 + \ldots + c_k \bar{x}_k + 0 \cdot \bar{x}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \bar{x}_n$ (1.10) и линейная комбинация в правой части (1.10) нетривиальная, так среди $c_1, \ldots, c_k$ есть отличные от 0.

Чтобы не забывать о системах уравнений, представим себе, что строки матрицы А однородной системы $A\bar{x} = \bar{o}$ (1.11) линейно зависимы.

Это означает, согласно предыдущей теореме, что среди этих строк есть строка, например, с номером i, представляющая собой линейную комбинацию остальных, т.е. обозначая $\bar{a}_i = (a_{i_1},\dots,a_{i_n})$, мы получаем :

$\bar{a}_i = c_1\bar{a}_i + \dots + c_{i-1}\bar{a}_i + c_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \dots + c_n\bar{a}_n$.

Это означает, что i-ое уравнение системы (1.11) есть линейная комбинация остальных, т.е. это уравнение — лишнее в системе, оно следует из остальных.

Значит, нашей задачей (которую мы подробней рассмотрим позже), является избавление от лишних уравнений в (1.11) что означает получение матрицы системы, строки которой линейно независимы.

§4.Размерность пространств. Базис

Конечномерные пространства.

<u>Определение.</u> Будем говорить, что <u>размерность</u> пространства V равна числу n (что обозначается так: $\dim V = n$), если в нем существуют линейно независимые векторы $\bar{l}_1,\dots,\bar{l}_n$ такие, что для любого вектора $\bar{x}\in V$ существуют числа $x_1,\dots,x_n \in R$ такие, что $\bar{x} = x_1\bar{l}_1 + \dots + x_n\bar{l}_n$.

При этом вектора $\bar{l}_1,\dots,\bar{l}_n$ называются <u>базисом</u> пространства V, а числа $x_1,\dots,x_n$-<u>координатами</u> $\bar{x}$ в базисе $\bar{l}_1,\dots,\bar{l}_n$.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется <u>конечномерным</u>.

<u>Пример</u>: 1) Размерность R^3 равна 3, т.к. $\bar{l}_1 = (1,0,0)$, $\bar{l}_2 = (0,1,0)$, $\bar{l}_3 = (0,0,1)$ линейно независимы и для любого $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)$ имеет место равенство: $\bar{x} = x_1\bar{l}_1 + x_2\bar{l}_2 + x_3\bar{l}_3$

2) Вполне аналогично размерность R^n равна n.

3) Пространство многочленов степени $\le n$ имеет размерность $n+1$. Его базис составляют многочлены $1, x^1, x^2, \dots, x^n$.И любой многочлен степени $\le n$ $P(x) = c_n \cdot x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot x + c_0 \cdot 1$, очевидным образом представлен в виде линейной комбинации $1, x^1, x^2, \dots, x^n$.

Не всякое линейное пространство обладает конечной размерностью.

Например, пространство всех многочленов не конечномерное. Действительно, для любого n многочлен $1, x^1, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы.

С ростом n получаем сколь угодно длинные наборы линейно независимых векторов.

Также не является конечномерным множество функций, непрерывных на отрезке $[a.b]$.

Вместе с тем, важный для нас пример пространства решений систем линейных уравнений вновь дает конечномерное пространство, в чем мы скоро убедимся.

Осталось убедиться в том, что понятие размерности определено корректно, т.е. если в пространстве V имеются два базиса $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n$ и $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$, то $m = n$.

Для этого достаточно установить следующую полезную <u>лемму</u>:

Лемма 1.1

Если линейно независимые векторы $g_1, \ldots, g_i$ являются линейными комбинациями векторов $f_1, \ldots, f_k$, то $k \geq l$.

Доказательство леммы будет приведено позднее.

<u>Теорема 1.3</u>

Размерность пространства определена корректно, т.е. любые два его базиса имеют одно и тоже число векторов.

<u>Док-во.</u> Из леммы (1.1) следует, что если $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n$ и $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$ – два базиса V, то, поскольку, например, любой $\bar{g}_i$ есть линейная комбинация $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n$, то $n \geq m$ и обратно, рассматривая аналогию, $n \leq m$. Значит $n = m$. Таким образом, размерность пространства определена корректно.

<u>Теорема 1.4</u>

Любому элементу $\bar{x} \in V$ отвечает, притом единственный, набор координат $x_1, \ldots, x_n$ в базисе $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n$.

<u>Док-во.</u> Действительно, если бы было
$x_1\bar{l}_1 + \cdots + x_n\bar{l}_n = x_1'\bar{l}_1 + \cdots + x_n'\bar{l}_n$, то
$(x_1 - x_1')\,\bar{l}_1 + \cdots. + (x_n - x_n')\bar{l}_n = \bar{0}$,

откуда $x_1 = x_1', \dots, x_n = x_n'$ ввиду линейной независимости $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n$.
При этом сумма векторов $\bar{x}, \bar{y}$ с координатами $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ есть вектор $\bar{x} + \bar{y}$ с координатами $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, так как
$\bar{x} + \bar{y} = x_1\bar{l}_1 + \dots + x_n\bar{l}_n + y_1\bar{l}_1 + \dots + y_n\bar{l}_n = (x_1 + y_1)\bar{l}_1 + \dots + (x_n + y_n)\bar{l}_n$.

Отметим также, что любому элементу $\bar{x} \in V$ соответствует единственный набор координат $(x_1, \dots, x_n)$.

Вектор $\lambda\bar{x} = \lambda(x_1\bar{l}_1 + \dots + x_n\bar{l}_n) = \lambda x_1\bar{l}_1 + \dots + \lambda x_n\bar{l}_n$, имеет координаты $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Это означает, что операциям с векторами соответствуют операции со строками их координат.

Таким образом, мы установили, что для любого векторного пространства V размерности $\dot{n}$ существует взаимообратное отображение этого пространства в пространстве R^n, при котором сумма векторов из V сопоставляется сумма соответствующих им векторов из R^n, а вектору $\lambda\bar{x} \in V$ соответствует произведение на λ соответствующего $\bar{x}$ вектора из R^n.

Это обстоятельство именуется изоморфизмом V и R^n.

Таким образом, доказана теорема (Теорема 1.5). любое n-мерное пространство V изоморфно R^n.

§5. Обобщения понятия линейного пространства.

В предыдущих рассмотрениях мы говорили «векторное пространство», имея в виду, что в качестве числовых множителей рассматриваются действительные числа. Можно сказать – векторное «пространство над R». Можно рассматривать векторные пространства, в которых коэффициентами векторов являются, например, рациональные числа $\mathbb{Q}$ (или комплексные $\mathbb{C}$, о которых тоже будет сказано ниже). В алгебре принято рассматривать векторное пространство над полем. Не надо придавать слову «поле» сельскохозяйственный смысл. Это – всего лишь математический термин, который обозначает непустое множество с введенными в нем операциями, называемыми сложением и умножением, для которых выполняются перечисленные ниже свойства.

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ для всех a, b, c.

2) $a + b = b + a$ для всех a, b,

3) Существует нейтральный элемент по сложению, обозначаемый 0 такой, что $a + 0 = 0 + a = a$ для всех a.

4) Для каждого a существует обратный по сложению элемент, называемый $-a$ такой, что $a + (-a) = 0$

5) $a * (bc) = (ab) * c$

6) $ab = ba$

7) Существует нейтральный элемент относительно умножения, обозначаемый 1, такой, что $a * 1 = 1 * a = a$ для всех a

8) Для любого $a \neq 0$ существует обратный по умножению элемент, обозначаемый a^{-1}, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$

9) Для любого a
$a * 0 = 0.$

10) Для всех a, b, c
$(a + b)c = ac + bc$

(Для закрепления в памяти алгебраического термина «группа» отметим, что поле образует коммутативную группу по сложению, а его отличные от 0 элементы образуют коммутативную группу по умножению)

Подведем итог. Общее определение векторного пространства дается для произвольного поля коэффициентов. Поскольку поле, вкратце, есть множество, над элементами которого можно проводить операции, аналогичные обычным операциям над числами и эти операции обладают аналогичными свойствами, определение векторного пространства над произвольным полем ничем не отличается от данного выше для конкретного поля R.

Другое важное для дальнейших приложений замечание. В ряде задач коэффициентами векторов могут быть не произвольные действительные числа и даже не рациональные числа, а только целые числа.

Чем отличаются целые числа от рациональных чисел (которые образуют поле)? Тем, что во множестве целых чисел не верно удаётся произвести деление. Например, 3 не делится на 2.

Целые числа, с известными свойствами операций над ними образуют, так называемое, кольцо.

Если рассматривать векторы с коэффициентами – целыми числами, то мы получим не векторное пространство, а, так называемый, модуль над кольцом целых чисел. Аксиомы модуля те же, что и у векторного

пространства. Аналогично можно рассматривать модули над произвольным кольцом

Чтобы оправдать предпринятое нами «путешествие в глубины алгебры», приведем пример

Пусть дано конечное множество n атомов a_j , $j = 1, \dots, n$ из которых построены молекулы V_i , $i = 1, \dots, l$. Тогда состав молекулы можно изобразить условным равенством
$V_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_j$
где a_{ij} число атомов a_j в молекуле V_i

Если сопоставить атомам векторы
$a_1 \leftrightarrow (1,0, \dots ,0)$
$a_2 \leftrightarrow (0,1,0, \dots ,0)$
$\dots$
$a_n \leftrightarrow (0,0, \dots ,0,1)$
то молекуле V_i сопоставляется вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Введем следующие правила операций над составом молекул

1) $V_i + V_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{kj}\, a_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + a_{kj}) a_j$
2) $\alpha V_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_j = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ij})\, a_j$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

Если рассматривать векторы с коэффициентами-целыми числами, то мы получим не векторные пространства, а так называемый модуль над кольцом целых чисел. Аксиомы ??? те же, что и у векторного пространства.

Аналогично можно рассматривать модули над произвольным кольцом.

Чтобы оправдать предпринятое нами «путешествие в глубины алгебры», приведем пример

Пусть дано конечное множество n атомов a_j , $1, \dots, n$ из которых построены молекулы V_i, $i = 1, \dots, l$. Тогда состав молекулы можно изобразить условным равенством

$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j$

где a_{ij}-число атомов a_j в молекуле V_i

Если сопоставить атомам векторы

$$a_1 \leftrightarrow (1,0,\dots,0)$$

$$a_2 \leftrightarrow (0,1,0,\dots,0)$$

$$\dots$$

$$a_n \leftrightarrow (0,0,..,0,1)$$

То молекуле V_i сопоставляется вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Введем следующие правила операций над составом молекул

1) $V_i + V_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} a_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a_{xj}) a_j$

2) $\alpha V_i = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) a_j, \alpha \in Z$

Для того, чтобы говорить о наличии обратного элемента ..., мы должны, допустив, рассмотрение векторов и с отрицательными компонентами. Но это не должно Вас пугать, тем более что ниже будет приписан некоторый смысл и этой ситуации.

Если составы молекул изображены равенствами:

$$V_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, a_j$$

... (1.12)

$$V_l = \sum_{j=1}^{n} a_{l\,j}\, a_j$$

То можно вывести в рассмотрение векторы

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_l \end{pmatrix},$$

То, что координаты этих векторов - сами по себе векторы, снова Вас не пугает.

Обозначим A матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Тогда, в соответствии с определением умножения матриц, равенство (1) принимает вид

$$\bar{V} = A\,\bar{a}$$

или

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Матрицу А назовем <u>атомной матрицей</u>

<u>Пример.</u>

Найдем атомную матрицу трех веществ H_2 , O_2 , H_2O , состоящую из атомов H . O

$H \longleftrightarrow a_1$

$O \longleftrightarrow a_2$

$V_1 = 2a_1 + 0 * a_2$

$V_2 = 0 * a_1 + 2 * a_2$

$V_3 = 2a_1 + 1 * a_2$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, некоторая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Еще <u>пример.</u>

Вещество H_2 , O_2 , B_2O_3,

Атомы H, O, B

Тогда $H \longleftrightarrow a_1$

$O \longleftrightarrow a_2$

$B \longleftrightarrow a_3$

$V_1 = 2a_1 + 0 * a_2 + 0 * a_3$

$V_2 = 0 * a_1 + 2a_2 + 0 * a_3$

$V_3 = 0 * a_1 + 3 * a_2 + 2a_3$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Исходные матрицы равны

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Продолжим тему о системах уравнений веществ и векторах, рассмотрим множество

$\{V_i\}, i = 1, \dots, l$, которые могут вступать в реакции.

Запишем <u>стехиометрические уравнения</u> возможных реакций

$$S_{11}V_1 + \cdots + I_{1,\text{рн}}V_{\text{рн}} + \cdots + I_{1,\ l}V_l \qquad (1.14)$$

$$S_{k1}V_1 + \cdots + S_{\text{кр}}V_{\text{р}} = I_{\text{к},\ \text{рн}}V_{\text{рн}} + \cdots + I_{\text{к},\ l}V_l$$

<u>Здесь</u>

$V_1, \dots, V_p$ - реагенты

$V_{\text{рн}}, \dots, V_l$ - продукты

Перенося правые части уравнений в систему:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{l} I_{ij}V_j = 0 \\ i = 1, \dots, k, \end{array}\right\} \qquad (1.15)$$

В которой I_{ij} так называемые стехиометрические коэффициенты, причем:

$I_{ij} \geq 0$ для реагентов

$I_{ij} < 0$ для продуктов, $j =$ рн, … , l .

Запишем систему (1.15)

$S\,\bar{V} = 0$,

где

$$S = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdots & I_{1l} \\ \dots & & \\ I_{k1} & \cdots & I_{kl} \end{pmatrix}$$

так называемая стехиометрическая матрица

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_l \end{pmatrix} \quad .$$

§1. Матрицы.

Уже в курсе аналитической геометрии мы столкнулись с тем, что при решении многих задач очень удобным аппаратом являлись матрицы, их определители, их миноры.

Вкратце напомним эти понятия, поскольку изложенные в курсах линейной алгебры без них невозможно.

К тому же - "Repeticium est mater studiorum"

Итак, матрица A размером $m \times n$ - это прямоугольная таблица

То, что $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{1m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Матрица A равна матрице B по определению означает, что их размеры совпадают, и что для их i, j элемента a_{ij} Матрицы A равен элементу b_{ij} матрицы B.

Для матриц одинакового размера определено сложение

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & & \\ a_{1m} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

Определено умножение

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \dots & & \\ \lambda a_{1m} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Мы не будем подробно перечислять свойства сложения и умножения матриц на число.

отметим только, что матрицы размера $m \times n$ образуют векторное пространство. Нулевой элемент в нем

Матрица, все элементы которой равны 0.

Матрица –A равна $\begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$.

Размерность этого пространства равна m*n? А является, например, матрица

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(В этой матрице 1 стоит на пересечении i-ой строки и j-ого столбца, остальные элементы равны 0).

Очень важной операцией (Мы уже убедились в этом в 1 семестре) является умножение матриц A размерностью m*l и B размерностью l*n.

Матрица A*B по определению представляет собой матрицу C размерности m*n, элементы которой C_{ij} вычисляются по правилу

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \qquad (2.1)$$

(Напомним, что такое правило (2.1), примененное к матрице размерности l*1

(т.е. к вектор-столбцу) позволило нам записать систему уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l = b_1 \\ \dots \\ a_{m1x1} + \dots + a_{ml}x_l = b_m \end{cases}$$

В виде $A\overline{x} = \overline{b}$.

Для умножения матриц

A размерности m*l, B размерности l*k, C размерности k*n выполнено правило: A(BC)=(AB)C (т.е. ассоциативность умножения).

Кроме того, если A имеет размер m*l, B и C имеет размерность l*n, то A(B+C)=AB+AC (Дистрибутивность)

Эти свойства можно проверить непосредственным вычислением, мы не будем этого делать для экономии времени.

Вопрос о коммутативности умножения имеет, как правило, отрицательный ответ. Даже если определены оба умножения A*B и B*A (т.е. если матрица A имеет размерность, например, m*n, то B должна иметь размерность n*m) и даже если результаты умножения при этом имеют одинаковые размерности (Заметьте! Если A имеет размер 2*3, B

имеет размер 3*2, то AB имеет размерность 2*2, а BA имеет размер 3*3!), равенство AB=BA выполняется далеко не всегда. Если AB=BA, то говорят, что матрицы коммутирующие.

Существование нейтрального элемента по умножению – единичной матрицы E требует, чтобы для любой рассматриваемой матрицы A выполнялось равенство AE=EA=A.

Согласно сделанному выше замечания, матрицы A и E должны быть квадратными, причем одинаковой размерности.

Вопрос о существовании A^{-1} обратной матрицы для A, т.е. такой матрицы, что $A*A^{-1}= A^{-1}*A=E$ подробно будет рассмотрен ниже.

Напомним, что в случае матрицы 2*2 и 3*3 для решения вопроса о существовании обратной матрицы рассматривался так называемый определитель матрицы A и критерием существования обратной матрицы было неравенство нулю определителя матрицы A.

В следующем пункте мы напомним определение определителя второго и третьего порядка, введем определение определителя порядка n и опишем основные свойства определителей.

§2. Определители

Напомним, что определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Представляет собой число $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, (2.3)

А определитель матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Представляет собой число

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \quad (2.4)$$

Для описания законов образования формул (2.3) и (2.4) введем понятие перестановки чисел 1,2,…..,n. Перестановка представляет собой те же

числа, но взятые в некотором другом порядке (возможно, и в том же самом). Очевидно, что существует n! Различных перестановок чисел 1,2,.., n. (Действительно, на первое можно подставить любое из n чисел, т.е. имеем n возможностей. При выбранном первом числе, на второе место можно выбрать одно из n-1 оставшихся чисел, т.е. имеем n (n-1) возможностей выбора первых двух чисел. Продолжим эти рассуждения, получаем n(n-1)….*2*1 возможных перестановок, что и утверждалось) .

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ какая-то перестановка чисел 1,2,…, n. Назовем пару чисел (a_i, a_j) <u>инверсией</u>, если $a_i > a_j$, но i<j.

Перестановку назовем <u>четной</u>, если число инверсий в ней четное, и <u>нечетной</u> в противном случае.

Например, 1,3,2,4,6,5 – четная перестановка (инверсии (3,2) и (6,5)), 1,4,5,2,6,3 – нечетная, (инверсии (4,2), (5,2) и (6,3))

Каждую перестановку $a_1,\ldots,a_n$ можно рассматривать, как отображение в множеств σ чисел 1,2,…, k на множество чисел 1,2,…, n, определенное равенством

$$\partial\,\mathbf{(i)}=a_i \quad (2.5)$$

Отображение (2.5) удобно задавать матрицей 2*n вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \acute{o}(1) & \acute{o}(2) & \ldots & \acute{o}(n) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Обозначим $(-1)^{\text{четность } \sigma}$ число 1, если σ – четная подстановка и –1, если σ – нечетная подстановка.

Выражение (1) есть сумма двух слагаемых.

Эти слагаемые – произведение чисел вида a_{ij} , i,j=1,2.

Рассмотрим первое слагаемое $a_{11}a_{22}$ у него вторые индексы сомножителей совпадают с первыми, если расположить первые индексы в первой строке матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

А вторые ее индексы – во второй строке, то получим матрицу вида (2.6), соответствующую перестановке, оставляющей все числа на своих местах. Т.к. перестановка четная (нет инверсий)

Второму слагаемому - $a_{12}a_{21}$ сопоставим матрицу перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

(еще раз напомним, что в первой строке стоят первые индексы сомножителей, во второй строке – вторые)

Перестановка (2.7) – нечетная (в ней 1 инверсия). Таким образом, величина (2.3) представляет собой сумму слагаемых вида

$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}$

Взятую по всевозможным перестановка чисел 1,2 (Этих перестановок ровно 2)

Аналогично, выражение (2.4) есть сумма слагаемых вида

$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$

Например, слагаемому $a_{13}a_{21}a_{32}$

Соответствует перестановка вида (2.6): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Это – четная перестановка (2 инверсии: (3,1) и (3,2))

Слагаемому - $a_{11}a_{21}a_{33}$ соответствует перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Это – нечетная перестановка (1 инверсия : (2,1))

Проверка остальных слагаемых труда не составит и вы сделаете ее самостоятельно в качестве полезного упражнения.

Остальные наблюдения позволяют нам дать общее определение определителя матрицы размерности (n*n)

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum (-1)^{\text{четность}\sigma} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}, \quad (2.8)$$

где суммирование в правой части (2.8) произведено во всем перестановкам чисел 1,…,n (Так что правая часть содержит n! Слагаемых)

§ 3. Свойства определителя.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

то <u>транспонированной</u> <u>матрицей</u> A^T называется матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что транспонирование квадратной матрицы можно состоит в замене ее строк столбцами (и, разумеется, наоборот). Можно сказать, также, что транспонированная матрица получается ее поворотом относительно главной диагонали.

<u>Свойство 1</u>. $|A| = |A^T|$ (2.9)

 По определению,

$$|A| = \sum (-1)^{\text{четность}\cdot\partial} a_{1\partial(1)} \dots a_{n\partial(n)} \qquad (2.10)$$

где суммирование в правой части этого равенств (2.10) производится по всем перестановкам δ чисел 1,2,..,n, т.е вторые индексы всех членов произведения.

$$a_{1\partial(1)} \dots a_{n\partial(n)} \qquad (2.11)$$

также пробегают все числа 1,2,…,n, т.е все заместители в произведении (2.11) находятся в разных строках и разных столбцах.

То же верно и для определителя матрицы A^T. Его члены также будут числами вида (2.11), умноженными на +1 или на –1. Для доказательства равенства (2.9) достаточно проверить , что оба числа входят в оба определителя с одним и тем же знаком. Но члену вида (2.11) соответствует перестановка

$$\begin{pmatrix} \partial(1) & \dots & \partial(n) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

имеющая, очевидно, ту же четность, что и перестановка δ:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial 1 & \dots & \partial n \end{pmatrix}$$

Поэтому оба определителя A^T и A состоят из одних и тех же слагаемых вида (3.11) состоят из одних и тех же слагаемых вида (3.11), взятых с одинаковыми знаками. Равенство (2.9) доказано. □

<u>Замечание</u>: Свойство 1 позволяет нам утверждать, что все свойства определителя, доказанные для его строк окажутся верными и для его столбцов, и наоборот. Поэтому дальнейшие свойства формулируются для строк.

<u>Свойство 2.</u>

Если определитель имеет строку, состоящую из 0, то он равен 0.

□По формуле (2.4), все члены определителя равны 0.□

<u>Свойство 3.</u>

Если один определитель получается из другого перестановкой двух строк, то она равен исходному определителю, взятому с противоположным знаком.

□При упомянутом выше действии происходит смена знака при всех слагаемых вида (2.11), значит, сменит знак и весь определитель.□

<u>Свойство 4.</u>

Если определитель содержит две одинаковые строки, что он равен 0.

□Действительно, при перестановке одинаковых строк , определитель с одной стороны, не изменится, так как стороны одинаковые. С другой стороны он сменит знак по свойству 3. Таким образом, $|A| = -|A|$, откуда $A = 0$ □

<u>Свойство 5.</u>

При умножении всех элементов одной и той же строки на число $\alpha \in \Re$ определитель матрицы умножится на число α

Все члены вида (2.11) будут иметь общий множитель α.

<u>Свойство 6.</u>

Определитель с двумя пропорциональными строками равен 0.

Достаточно выписать общий множитель. α - коэффициент пропорциональности и использовать свойство 4.

<u>Свойство 7.</u>

Если элементы i-ой строки определитель представлены в виде

$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, j = 1,\ldots,m,$ то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{i1} & \ldots & a'_{in} \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a''_{i1} & \ldots & a''_{in} \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Член определителя (3.11) принимает вид

$$a_{1\partial(1)}\ldots a_{i\partial(i)}\ldots a_{n\partial(n)} = a_{1\partial(1)}\ldots a'_{i\partial(i)}\ldots a_{n\partial(n)} + a_{1\partial(1)}\ldots a''_{i\partial(i)}\ldots a_{n\partial(n)}$$

И доказываемой равенство справедливо ввиду равенства (2.10), примененного ко всем определителям, содержащимся в доказываемом равенстве.

<u>Свойство 8.</u>

Если одна из сторон определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен 0.

<u>Замечание:</u> Позже мы установим, что это утверждение представляет собой необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю.

Если, например, $i-\alpha$ строка есть линейная комбинация остальных строк, то по свойству 7 исходный определить равен сумме определителей, имеющих пропорциональные строки и он равен нуля по свойству 6.

<u>Свойство 9.</u>

Определитель не меняется, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.
Применим свойство 7 и 8.

§4. Разложение определителя по строке (столбцу)

Сопоставим элементу a_{ij} квадратной матрицы А определитель матрицы полученной из матрицы А вычеркиванием всей строки с номером i и всего столбца с номером j.

Полученный определитель ((n-1)-го порядка) назовем <u>минором</u> M_{ij}. Величину $(-1)^{i+j}M_{ij}$ назовем <u>алгебраическим</u> <u>дополнением</u> элемента a_{ij} и обозначим A_{ij}.

Имеет место важная теорема Лапласа о разложении определителя по строке.

<u>Теорема 2.1 (Лапласа).</u>

Для любого $i, i = 1,\ldots,k$ <u>выполняется</u> <u>равенство</u>

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (2.12)$$

<u>Замечание.</u> Разумеется, верна и теорема о разложении определителя по столбцу, утверждающая, что для любого $j, j = 1,\ldots,n$ <u>выполняется</u> <u>равенство</u>

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (2.13)$$

В курсе аналитической геометрии мы доказали эту теорему для $n = 3$. В общем случае ограничимся схемой. В равенстве (2.10) можно сгруппировать все слагаемые, содержащие a_{ij} при фиксированных i, j. Остается заметить, что коэффициентом при a_{ij} будет сумма слагаемых, представляющих собой как раз определитель A_{ij}. Зафиксировав i и рассматривая все $j = 1, \ldots n$ мы представим правую часть равенства (2.10) как раз в виде

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Т.е. равенство (2.12) (а вместе с ним и (2.13)) установлено.

Эта теорема имеет важное дополнение

<u>Теорема 2.2</u>

Если $i \neq k$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \qquad (2.14)$$

Аналогично, если $j \neq l$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = 0 \qquad (2.15)$$

Снова дадим схему доказательства. Выражение, стоящее в левой части доказываемого равенства представляет собой разложение по строке с номером k определителя, полученного из исходного определителя заменой k-ой строки на строку с номером i. Этот определитель содержит две одинаковые строки, он равен 0.

§4 Определитель произведения матриц. Обратная матрица

<u>Теорема 2.3</u>

Для любых квадратных матриц A, B размера $n \times n$ справедливо равенство:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Мы проверяли это равенство для матриц размера 2×2. Оставим эту теорему без доказательства общего случая.

<u>Следствие.</u> Если у матрицы A есть обратная матрица, то $|A| \neq 0$.

Действительно, если $AA^{-1} = E$, то $|AA^{-1}| = 1$, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, откуда $|A| \neq 0$ и $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Имеет место важная обратная этому следствию теорема.

<u>Теорема 2.4</u>

Если $|A| \neq 0$ то существует A^{-1} и

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

Рассмотрим элемент c_{ij} произведения матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.17)$$

По определению равен

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

Если $i = j$, то, согласно (2.12),

$c_{ij} = |A|$

Если $i \neq j$, то, согласно (2.14),

$c_{ij} = 0$

Поэтому произведение матриц (2.17) равно

$$\begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix},$$

Откуда

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично проверяется, что ввиду (2.13) и (2.15)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

§5. Правило Крамера.

В случае $|A| \neq 0$ решение системы

$A\overline{x} = \overline{b}$

Имеет вид

$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$

Или, в координатах,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Согласно (2.16) произведя в правой части (2.18) умножение, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & \dots & +A_{n1}b_n \\ \dots & & \dots \\ A_{1n}b_1 + & \dots & +A_{nn}b_n \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Координата с номером k вектора, стоящего в правой части (2.19) представляет собой разложение по k-му столбцу определителя

$$\Delta k = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

Определитель (2.20) получен из определителя $|A|$ исходной матрицы заменой его k-ого столбца столбцом свободных членов системы.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема (правило Крамера). Если $|A| \neq 0$, то

$$x_k = \frac{\Delta k}{|A|} \; k = 1, \dots, n$$

§1 Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Вернемся к рассмотрению системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad A\bar{e} = \bar{b}, \tag{3.1}$$

И изложим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Если А – нулевая матрица, то для $\bar{b} = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$ решением системы является любой вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, а для $\bar{b} \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^m$, решений нет.

Итак, среди чисел a_{ij} есть отличные от 0. Можно считать, что $a_{11} \neq \bar{0}$ поскольку нумерация переменных и нумерация уравнений в нашем распоряжении.

(Пояснение: если, например, в исходной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

$a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq \bar{0}$, то введем в рассмотрение переменные $y_1 = x_2$, $y_2 = x_3$ $y_3 = x_3$

И получим систему в новых переменных

$$\begin{cases} a_{11}y_2 + a_{12}y_1 + a_{13}y_3 = b_1 \\ a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + a_{23}y_3 = b_2 \end{cases}$$

Или, поменяв местами уравнения:

$$\begin{cases} a_{22}y_1 + a_{21}y_2 + a_{23}y_3 = b_2 \\ a_{12}y_1 + a_{11}y_2 + a_{13}y_3 = b_1 \end{cases}$$

Вводя обозначения $a_{22} = \widetilde{a_{11}}$, $a_{21} = \widetilde{a_{12}}$, $a_{23} = \widetilde{a_{13}}$, $b_2 = \widetilde{b_1}$, $a_{12} = \widetilde{a_{21}}$, $a_{11} = \widetilde{a_{22}}$, $a_{13} = \widetilde{a_{23}}$, $b_1 = \widetilde{b_2}$

$$\begin{cases} \widetilde{a_{11}}y_1 + \tilde{a}_{12}y_2 + \widetilde{a_{13}}y_3 = b_1 \\ \widetilde{a_{21}}y_1 + \widetilde{a_{22}}y_2 + \widetilde{a_{23}}y_3 = b_2 \end{cases}$$

Если найти её решение y_1, y_2, y_3 то мы, тем самым, найдем a_1, a_2, a_3 компоненты решения исходной системы.

Затем теперь у второго уравнения системы первые её уравнения,

умноженные на $\frac{a_{22}}{a_{11}}$. При этом получаем систему, равносильную исходной, второе уравнение которой не содержит переменной $x1$

Проделав аналогичные процедуры с остальными уравнениями (т.е. вычитая из каждого первые уравнения, умноженные на$\frac{a_{k1}}{a_{11}}$), получим систему, равносильную исходной, у которой все уравнения , начиная со второго, не содержат переменной x1

Оставляя без изменений первое уравнение системы, рассмотрим остальные её $m-1$

уравнения, которые образуют систему вида

$$a`_{22}x_2 + \cdots + \quad a_{2n}`x_n = \quad b`_2$$
$$\cdots$$
$$a`_{m2}x_2 + \cdots + \quad a_{mn}`x_n = \quad b`_m$$

Снова можно считать, что $a_{22} \neq 0$, т.к. перестановка уравнений не меняет системы, а перенумерация неизвестных $x_2, .., x_n$ в этой системе приведет к перенумерации этих же переменных в первом (оставшемся) уравнении. Сделаем с этой системой аналогичные, описанные выше преобразования и приведем в результате к системе вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2` + \cdots + a_{1n}`x_n = b_2`$$

$$a``_{33}x_3 + \cdots + \quad a``_{3n}x_n \quad = b_3``$$
$$\cdots$$
$$a``_{m3}x_3 + \cdots + \quad a``_{mn}x_n \quad = b_m``$$

В которой все уравнения, начиная со второго, не содержат переменных x_1и x_2.

Полученную систему подвергнем тем же преобразованиям и т.д.

Если в процессе преобразований получено уравнение у которого все коэффициенты и свободный член, равны 0 то мы убираем его из системы.

Когда остановится процесс, и к каким результатам он может привести?

Если мы пришли к системе одно из уравнений, которой имеет отличный от 0 свободный член, а остальные коэффициенты равны 0 , то

полученная система, а вместе с ней и равносильная ей исходная система, несовместна.

В противном случае, получится система из $l, l \leq m$

$$a_{11}x_1 + a_{1,l}x_l = a_{1,l+1}x_{l+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\tilde{a}_{22}x_2` + \cdots + \tilde{a}_{2l}`x_l + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \qquad (3.2)$$

$$\ldots$$

$$\tilde{a}_{1l}x_l + \cdots + \tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} + \cdots + \quad \tilde{a}_{l,n}x_n \quad = \tilde{b}_l$$

У которой $a_{11} \neq 0, \tilde{a}_{22} \neq 0, \tilde{a}_{ll} \neq 0$.

Если $l = n$, то полученная система имеет единственное решение.

Действительно её последнего уравнения находим $\quad a_n = \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}}$

и затем, подставляя это значение в предпоследнее уравнение, найдем x_{n-1},

после чего, подставляем a_n и x_{n-1}в предыдущее уравнение,

найдем x_{n-2} и так далее.

Если же $l < n$,то эту систему можно переписать в виде

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,l}x_l = b_1 - a_{1,l+1}x_{l+1} - \cdots - a_{1n}x_n$$

$$\tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2l}x_l = \tilde{b}_2 - \ \tilde{a}_{2,l+1}\tilde{x}_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n \qquad (3.3)$$

$$\tilde{a}_{1,l}x_l \quad = \tilde{b}_l - \tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{l,n}\tilde{x}_n$$

Придавая переменным $x_{l+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения, получаем из этой системы соответствующие, однозначно определяющие, значения частных переменных.

Отметим важное для дальнейшего изложения следствие полученных результатов.

Лемма 3.1

При $m < n$, однородная система

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

Имеет отличные от $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ решения, и таких решений может быть бесконечно много. В самом деле, применяя к системе (3.4) метод Гаусса, получим равносильную ей систему вида (3.3) с $b_1 = \tilde{b}_2 = \cdots = \tilde{b}_l = 0$

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,l}x_l = -\,a_{1,l+1}x_{l+1} - \cdots - a_{1n}x_n$$

$$\tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2l}x_l = -\,\tilde{a}_{2,l+1}x_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{2,n}x_n \qquad (3.5)$$

$$\tilde{a}_{1,l}x_l \quad = -\tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{l,n}x_n$$

Так как $m < n$ то и $l < n$.

Как отмечено выше, при произвольном выборе чисел $x_{l+1}, \dots, x_l$ мы получим соответствующие числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $x_1, \dots, x_n$ - это решение системы (3.4)

Выбирая $x_{l+1}, \dots, x_l$ так, чтобы хотя бы одно из них не равнялось 0, получим такое утверждение.

Эта лемма позволяет дать доказательство леммы&&&

Действительно, пусть

$\bar{g}_1 = c_{11}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,1}\bar{f}_k$

...

$\bar{g}_l = c_{1l}\bar{f}_1 + \cdots + l_{k,l}\bar{f}_k$

Если $x_1, \dots, x_l$ такие, что

$x_1\bar{g}_1, \dots, x_l\bar{g}_l = \bar{0}$ (3.6)

$x_1(c_{11}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,1}\bar{f}_k) + \dots + x_l(c_{1l}\bar{f}_1 + \cdots + l_{k,l}\bar{f}_k) = \bar{0}$

или

$$(c_{11}x_1 + \cdots + c_{1l}x_l)\bar{f}_1 + \cdots + (c_{k,1}x_1 + \cdots + c_{k,l}x_{l)}\bar{f}_k = \bar{0}$$

При этом, разумеется, это равенство выполняется, если

$$\begin{cases} (c_{11}x_1 + \cdots + c_{1l}x_l = \bar{0} \\ \quad \cdots \\ (c_{k,1}x_1 + \cdots + c_{k,l}x_l) = \bar{0} \end{cases} \qquad (3.7)$$

Таким образом, для любого решения системы (3.7) выполняется равенство (3.6) . При $k < l$ система (3.7), по лемме 3.1 имеет отличные от

$x_1 = 0, \dots, x_l > 0$

решения, что делает противоречие с условием линейной независимости векторов

$g_1, \dots, g_l$.

Напомним, что из леммы (1.1) следовало, что любые два базиса конечномерного пространства имеют одинаковое число элементов. Это означает, что размерность пространства определено корректно.

Теорема 3.1.

Пусть векторы $\overline{a_1},\dots,\overline{a_m} \in V$ линейно независимые векторы n-мерного пространства V и $m < n$. Тогда векторы $\overline{a_1},\dots,\overline{a_m}$ можно дополнить до базиса пространства V.

►Требуется доказать, что в пространстве V есть n-m векторов, которые мы обозначим $\overline{a_{m+1}},\dots,\overline{a_n}$ такие, что векторы $\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}$ линейно независимы (и, следовательно, образуют базис n-мерного пространства) . Докажем сначала, что есть хотя бы один вектор $\overline{a_1}$ такой, что $\overline{a_1},..\overline{a_{m+1}}$ линейно независимы. Предположим противное : для любого $\bar{a} \in V$ существуют не все равные нулю числа $c_1,\dots,c_{m+1}$ такие, что

$$c_1\overline{a_1} + \dots + c_m\overline{a_m} + c_{m+1}\bar{a} = \bar{0}$$

Число $c_{m+1} \neq 0$ иначе мы получили бы, что векторы $\overline{a_1},\dots,\overline{a_m}$ зависимы, вопреки условию.

Тогда любой вектор $\bar{a} \in V$ есть линейная комбинация $\overline{a_1},\dots,\overline{a_m}$. Значит, $\overline{a_1},\dots,\overline{a_m}$ является базисом V. Но любой базис V, как доказано, имеет n

векторов. Полученное противоречие доказывает существование вектора $\overline{a_{m+1}}$ линейно независимого с $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$. Далее доказываем, что существует $\overline{a_{m+2}} \in V$ такой, что $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_{m+2}}$ линейно независимы и т.д.◄

§2.Линейная оболочка векторов. Подпространство.

Ранее мы часто встречались с линейными комбинациями уравнений и ,соответственно, с линейными комбинациями векторов – строк матрицы системы.

Рассмотрим в общем виде вопрос о том, что представляют собой всевозможные линейный комбинации векторов $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m} \in V$

Определение: множество $L(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}) = \{c_1\overline{a_1} + \ldots + c_m\overline{a_m} \mid c_1,\ldots,c_m \in R\}$ всевозможных линейных комбинаций векторов $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$ называется линейной оболочкой векторов $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$.

<u>Теорема 3.2.</u>

Линейная оболочка $L = L(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m})$ *представляют собой линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число, что были введены в пространстве V.*

►Требуется проверить, что если $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x} \in L$ и $\alpha \in R$, то $\overline{x_1} + \overline{x_2} \in L, \alpha\overline{x} \in L$. Действительно, пусть $\overline{x_1} = c_1\overline{a_1} + \ldots + c_m\overline{a_m}, \overline{x_2} = \alpha_1\overline{a_1} + \ldots + \alpha_m\overline{a_m}, \overline{x} = x_1\overline{a_1} + \ldots x_m\overline{a_m}$. Тогда $\overline{x_1} + \overline{x_2} = c_1\overline{a_1} + \ldots + c_m\overline{a_m} + \alpha_1\overline{a_1} + \ldots + \alpha_m\overline{a_m} = (c_1 + \alpha_1)\overline{a_1} + \ldots + (c_m + \alpha_m)\overline{a_m}$.

Итак, вектор $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ тоже имеет вид линейной комбинации векторов $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$ и ,следовательно, принадлежит L. Аналогично, для aX принадлежит L◄

Определение: подмножество линейного пространства V которое само является линейным пространством относительно операций пространства V,называют <u>подпространством пространства V</u>.

Теорема 3.2. допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 3.2 : Линейная оболочка $L = L(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m})$ является подпространством V.

В этом случае говорят, что L порождаемо? векторами $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$ (или натянуто на векторы $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$).

Пример. Пусть $V = R^3, \overline{a_1} = (1,0,0), \overline{a_2} = (0,1,0)$. Тогда
$L = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}) = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in R\}$

Исследуем вопрос о размерности и базисе подпространства $L(\overline{a_1},..,\overline{a_m})$

<u>Теорема 3.3</u>. Если $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$ линейно независимые, то размерность подпространства $L(\overline{a_1},..,\overline{a_m})$ равна m, а векторы $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$ образуют его базис.

Замечание. Напомним, что размерность пространства V обозначается $\dim V$, поэтому первое утверждение теоремы 3.3 можно записать в виде: если $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$ линейно независимы, то $\dim L(\overline{a_1},..,\overline{a_m}) = m$

Поскольку, по определению $L = L(\overline{a_1},..,\overline{a_m})$ состоит из линейных комбинаций векторов $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$, для любого $\overline{a} \in L$ существуют $c_1,...,c_m \in R$ такие ,что

$$\overline{a} = c_1\overline{a_1} + ... + c_m\overline{a_m}$$

И теорема доказана. ◄

<u>Теорема 3.4</u>.

Любое подпространство L пространства V является линейной оболочкой некоторых векторов $\overline{a_1},...,\overline{a_m} \in V$

►Если L состоит только из $\overline{0}$,то утверждение теоремы очевидно. Если же в L есть $\overline{a_1} \neq 0$ то, используя теорему 3.1 можно дополнить $\overline{a_1}$ до базиса $\overline{a_1},...,\overline{a_n}$ пространства L. Так как, по определению базиса, любой вектор $\overline{a} \in L$ является линейной комбинацией $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$ по определению линейной оболочки имеет место равенство:

$L = L(\overline{a_1},..,\overline{a_m})$ ◄

Примечание. Разумеется, само векторное пространство V является линейной оболочкой любого своего базиса $\overline{e}_1,...\overline{e}_n$.

Какова же размерность $L(\overline{a_1},..,\overline{a_m})$ в случае, когда $\overline{a_1},...,\overline{a_m}$ линейно зависимы?

Теорема 3.5. *Если* $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$ *линейно зависимы и если максимальное число линейно независимых среди низ равно l, то:*

$$l = \dim L\left(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}\right)$$

►Пусть, например, $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_l}$ линейно независимы, тогда любой вектор $\overline{a_{l+1}},\ldots,\overline{a_m}$ линейно выражается через $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_l}$. Например, векторы $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_l},\overline{a_{l+1}}$ линейно зависимы, так как их больше, чем l. Поскольку существуют числа $c_1,\ldots,c_{l+1}$, не все равные 0 такие, что:

$$c_1\overline{a_1}+\ldots+c_1\overline{a_l}+c_{l+1}\overline{a_{l+1}}=\overline{0}$$

Число $c_{l+1}\neq 0$, иначе $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_l}$ оказались бы линейно зависимыми вопреки условию. Следовательно:

$$\overline{a_{l+1}}=-\frac{c_1}{c_{l+1}}\overline{a_1}-\ldots-\frac{c_l}{c_{l+1}}\overline{a_l}=\overline{\overline{c_1}}\,\overline{a_1}+\ldots+\overline{\overline{c_l}}\,\overline{a_l} \qquad (3.8.)$$

Что и утверждалось. Аналогично доказываем, что

$$\overline{a_{l+2}}=d_1\overline{a_1}+\ldots+d_l\overline{a_l},\ldots,\overline{a_m}=g_1\overline{a_1}+\ldots+g_l\overline{a_l} \qquad (3.9.)$$

Так как любой элемент $x\in L\left(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}\right)$ имеет вид $\overline{x}=x_1\overline{a_1}+\ldots+x_m\overline{a_m}$

Из равенств (3.8.) и (3.9.) следует, что:

$$\overline{x}=\left(x_1+x_{l+1}\overline{\overline{c_1}}+x_{l+2}d_1+\ldots+\overline{x_m}g_1\right)\overline{a_1}+\ldots+\left(x_1+x_{l+1}\overline{\overline{c_l}}+x_{l+2}d_l+\ldots+x_m g_l\right)\overline{a_l}$$

Это означает, что любой вектор $\overline{x}\in L$ есть линейная комбинация линейно независимых векторов $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_l}$. Значит, $\dim L=l$ ◄

В теореме 3.4 доказано, что любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ образует базис пространства $L(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m)$. По теореме 1.3 любые два базиса линейного пространства L имеют одинаковое количество векторов.

Определение. Рангом системы векторов $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ называется максимальное количество линейно независимых среди них.

Согласно сказанному выше, это определение корректное.

Теорема 3.6.

Если векторы $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$ *являются линейными комбинациями векторов* $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$, *то* $L(\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r)\subset L(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m)$.

Доказательство.

Действительно, проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.5 , получаем, что любая линейная комбинация векторов $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$ является линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$.

Следствие: Если векторы $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$ являются линейными комбинациями векторов $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ и наоборот, векторы $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$ являются линейными комбинациями $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$, то $L(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m)\subset L(\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r)$

Системы векторов, удовлетворяющих условиям следствия, называют эквивалентными.

§3. Решение линейной однородной системы уравнений.

Мы ранее установили, что множество решений линейной однородной системы уравнений

$A\overline{x}=\overline{o}$ (3.10) образует линейное пространство, представляющее собой некоторое подпространство $\Im\Re^4$.

Решая систему (3.10) методом Гаусса, придем к системе вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\ldots+a_{11}x_1=-a_{1,l+1}x_{l+1}-\ldots-a_{1,n}x_n \\ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.11) \\ &a_{ll}x_l=-a_{l,l+1}x_{l+1}-\ldots-a_{l,n}x_n \end{aligned}$$

в которой, $l\le n, a_{11}\ne 0,\ldots,a_{ll}\ne 0$ и в случае $l=n$ правые части уравнения (3.11) равны 0.

Матрица системы (3.11) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1l}a_{1l+1}\ldots a_{1n} \\ \ldots \\ 0\ldots a_{ll}a_{ll+1}\ldots a_{\ln} \end{pmatrix} (3.12)$$

Определение. Рангом матрицы A называется ранг системы векторов- её строк.

Теорема 3.7

Ранг матрицы (3.12) равен l

Доказательство. Теорема означает, что строки (3.12) линейно независимы. Для доказательства предположим противное, что

$c_1\overline{a}_1 + \ldots + c_l\overline{a}_l = \overline{o}$ (3.13), где

$$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
$$\overline{a}_2 = (0, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$$
$$\overline{a}_3 = (0, 0, a_{33}, \ldots, a_{3n})$$
$$\ldots$$
$$\overline{a}_l = (0, \ldots, 0, a_{ll}, a_{l,l+1}, \ldots, a_{\mathrm{ln}})$$

Первая координата левой части равенства (3.13) равна c_2a_{22}, а первая координата правой части равна o. Т.к. $a_{22} \neq 0, c_2 = 0$ и так далее. В итоге приходим к равенству $c_l\overline{a}_{ll} = 0$, из которого следует, что $c_l = 0$, т.к. $a_{ll} \neq 0$ Таким образом, из (3.13)вытекает, что $c_1 = \ldots = c_l = 0$, т.е. что $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_l$ линейно независимы.

Теорема 3.8

Размерность пространства решений системы (3.11) равна $n - l$.

Доказательство. Так как $a_{ll} \neq 0$, последнее из равенств (3.11) при делении обоих его частей на a_{ll} дает $x_l = -\frac{a_{l,l+1}}{a_{ll}}x_{l+1} - \ldots - \frac{a_{l,n}}{a_{ll}}x_n$ (3.15) Вводя очевидные обозначения для сокращения записи , перепишем (3.15) в виде:

$x_l = \gamma_{l,l+1}x_{l+1} + \ldots + \gamma_{l,n}x_n$ (3.16)

Подставим это значение в предпоследнее из уравнений (3.11), перенесем все его члены с $x_{l+1}, \ldots, x_n$ в его правую часть и разделим обе части полученного уравнения на $a_{l-1,l-1} \neq 0$. Получим :

$x_{l-1} = \gamma_{l-1,l+1}x_{l+1} + \ldots + \gamma_{l,n}x_n$ (3.17)

Подставим выражения (3.16) и (3.17) для x_l и x_{l+1} в следующее уравнение (3.11), перенесем все члены с $x_{l+1}, \ldots, x_n$ в его правую часть и разделим обе

части на $a_{l-2,l-2} \neq 0$ и так далее. В итоге получим , что для всех $k, k = 1,\dots,l$ $x_k = \gamma_{k,l+1}x_{l+1} + \dots + \gamma_{k,n}x_n$ (3.18).

Положим $x_{1,l+1} = 1, x_{1,l+2} = 0,\dots,x_{1,n} = 0$ и вычислим по формуле (3.18) остальные значения $x_{1,k}, k = 1,\dots,l$.При этом получится решение системы (3.11): $\bar{x}_1 = (x_{1,1},\dots,x_{1,l},1,0,\dots,0)$

Аналогично, полагая $x_{2,l+1} = 0, x_{2,l+2} = 1,\dots,x_{2,n} = 0$ получим решение системы: $\bar{x}_2 = (x_{2,1},\dots,x_{2,l},0,1,0,\dots,0)$.

Продолжим этот процесс и получим решения системы:
$\bar{x}_k = (x_{k,1},\dots,x_{k,l},0,..,0,1,\dots,0), k = 1,\dots,n-l$ (3.19) (1стоит на $l+k$ -ом месте)

Докажем, что $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n-l}$ линейно независимы. Предположим, что $c_1\bar{x}_1 + \dots + c_{n-l}\bar{x}_{n-l} = \bar{o}$ (3.20). Последние $n-l$ координат вектора, стоящего в левой части равенства (3.20) равны, в соответствии с (3.19), числам $c_1,\dots,c_{n-l}$. Но последние $n-l$ координат правой части равенства (3.20) равны 0. Поэтому $c_1 = \dots = c_{n-l} = 0$ и векторы (3.19) линейно независимы.

Покажем, что любое решение $\bar{x}$ системы (3.11) есть линейная комбинация векторов (3.19). Действительно, пусть $\bar{x}$ - решение системы –имеет координаты :

$\bar{x} = (x_1,\dots,x_l,x_{l+1},\dots,x_n)$. (3.21)

Линейная комбинация векторов (3.19) вида $x_{l+1}\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_{n-l}$ (3.22) имеет тот же набор последних $n-l$ координат, т.е. те же числа $x_{l+1},\dots,x_n$. Но формулы (3.18) показывают, что если совпали координаты $x_{l+1},\dots,x_n$,то обязаны совпасть и координаты $x_1,\dots,x_l$, т.е. $\bar{x} = x_{l+1}\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_{n-l}$

<u>Примечание.</u> Мы получили, что векторы $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n-l}$ образуют базис пространства решений системы (3.11)

<u>Определение.</u> Любой базис пространства решений системы (3.11) называется ее <u>фундаментальной системой решений</u>.

<u>Теорема 3.9</u>

Пусть l- ранг матрицы A системы (3.10).Тогда размерность пространства ее решений равна $n-l$.

Доказательство.

Уравнения (3.11) являются линейными комбинациями уравнений системы (3.10). В свою очередь, проделывая над уравнениями (3.11) обратные преобразования ,мы получим систему (3.10), причем уравнения (3.10) являются линейными комбинациями уравнений (3.11). По следствию теоремы 3.5 ранги матриц систем (3.10) и (3.11) совпадают и равны l по теореме 3.6 . Системы (3.10) и (3.11) равносильны, т.к. систему (3.11) получена из (3.10) в результате применения метода Гаусса. Поэтому размерность пространства решений (3.10) равна $n-l$ и теорема доказана.

§4. Подпространства

Поставим перед собой вопрос: как для заданного линейного подпространства $L(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m)$ найти систему линейных уравнений, множеством решений которой является в точности подпространство $L(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m)$?

Рассмотрим систему линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ (3.23)

строками матрицы которой как раз являются векторы $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m$.

Пусть $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$ - базис пространства решений системы (3.23) .

Рассмотрим систему $\begin{cases} b_{11}y_1+\ldots+b_{1n}y_n=0 \\ \ldots \\ b_{m1}y_1+\ldots+b_{mn}y_n=0 \end{cases}$ (3.24)

То, что векторы $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_r$ являются решениями (3.23) , означает, что для их координат $(b_{11},\ldots,b_{1n}),\ldots,(b_{r1},\ldots,b_{rn})$ выполняются равенства

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{1n}=0 \\ \ldots \\ a_{m1}b_{11}+\ldots+a_{mn}b_{1n}=0 \\ \ldots \\ a_{11}b_{r1}+\ldots+a_{1n}b_{rn}=0 \\ \ldots \\ a_{m1}b_{r1}+\ldots+a_{mn}b_{rn}=0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Перегруппируем равенства (3.25):

$$\begin{cases} b_{11}a_{11} + \ldots + b_{1n}a_{1n} = 0 \\ \ldots \\ b_{r1}a_{11} + \ldots + b_{rn}a_{1n} = 0 \\ \ldots \\ b_{11}a_{m1} + \ldots + b_{1n}a_{mn} = 0 \\ \ldots \\ b_{r1}a_{m1} + \ldots + b_{rn}a_{mn} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

И убедимся в том, система (3.26) означает, что все векторы $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ являются решениями системы (3.24).

Если ранг системы векторов $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ равнялся l, то размерность r пространства решений (3.23) равна $r = n - l$.Так как $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_r$, по построению, линейно независимы, размерность пространства решений (3.24) равна $l = n - r$. Таким образом, $L(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m)$ не только входит в пространство решений системы (3.24), но и совпадает с ним.

<u>Определение. Пересечение</u> подпространств $L_1 è L_2$ векторного пространства V представляет собой множество векторов, входящих одновременно в L_1 и L_2. Оно обозначается $L_1 \cap L_2$.

<u>Теорема 3.10</u>

Пересечение $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 есть подпространство.

<u>Доказательство.</u>

Действительно, если $\bar{x}_1 \in L_1 \cap L_2$ и $\bar{x}_2 \in L_1 \cap L_2$, то $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in L_1$ и $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in L_2$, так как L_1 и L_2- подпространства. Поэтому $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in L_1 \cap L_2$.

Аналогично проверяется, что если $\bar{x} \in L_1 \cap L_2$, то для любого $\alpha \in \Re$ вектор $\alpha\bar{x} \in L_1 \cap L_2$.

<u>Примечание.</u> Для нахождения пересечения подпространств $L_1 = L(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m)$ и $L_2 = L(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_r)$ можно сначала найти системы уравнений, множествами решений которых являются L_1 и L_2 соответственно, и объединить уравнения этих систем в одну общую систему. Решения этой системы будут образовывать $L_1 \cap L_2$.

Определение. Суммой подпространств L_1 и L_2 пространства V называется множество векторов $\bar{v} \in V$, которых можно представить в виде суммы $\bar{x} + \bar{y}$, где $\bar{x} \in L_1$, $\bar{y} \in L_2$.

Теорема 3.11.

Сумма подпространств L_1 и L_2 пространства V является подпространством пространства V. Размерность этого подпространства равна $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$ *(3.27)*

Доказательство.

Если $\bar{v} \in L_1 + L_2$, то $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} \in L_1$, $\bar{y} \in L_2$.

Если $\bar{w} \in L_1 + L_2$, то $\bar{w} = \bar{z} + \bar{t}$, $\bar{z} \in L_1$, $\bar{t} \in L_2$.

Тогда $\bar{v} + \bar{w} = (\bar{x} + \bar{z}) + (\bar{y} + \bar{t}), \in L_1 + L_2$, т.к. $\bar{x} + \bar{z} \in L_1$, $\bar{y} + \bar{t} \in L_2$.

Аналогично, $\alpha\bar{v} = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} \in L_1 + L_2$.

Ограничимся схемой вывода равенства (3.27). Рассмотрим базис подпространства $L_1 \cap L_2$. Его можно дополнить до базиса L_1 и до базиса L_2. Можно доказать, что совокупность полученных векторов образует базис $L_1 + L_2$. Это и служит объяснением равенства (3.27).

Примечание. Для нахождения размерности и базиса суммы подпространств $L_1 = L(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ и $L_2 = L(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r)$ достаточно соединить вместе векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$ и выбрать среди них максимальную линейно независимую подсистему.

§5. Неоднородная система уравнений

Рассмотри неоднородную систему уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad (3.28)$$

Теорема 3.12

Если система (3.28) имеет решение $\bar{x}_0$, то для любого другого ее решения $\bar{x}$ существует решение $\bar{X}$ однородной системы

$$A\bar{x} = 0 \qquad (3.29)$$

такое, что $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{X}$

Если $A\bar{x}_0 = \bar{b}$ и $A\bar{x} = \bar{b}$, то $A(\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$, т.е. $\bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{X}$.

Удовлетворяет системе 3.29, что и утверждалось.

Назовем расширенной матрицей системы уравнение 3.28 матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}, \qquad (3.30)$$

которую будем обозначать $(A|\bar{b})$.

При решении системы (3.28) методом Гаусса использовались преобразования уравнений этой системы, при которых происходили следующие преобразования матрицы (3.30) :

- Перестановка двух строк местами
- Умножение всех элементов строки на отличное от 0 нуля число
- Прибавление ко всем элементам строки элементов другой строки, умноженное на одно и тоже число.
-

В результате использования метода Гаусса исходная система уравнений (3.28) либо придет к системе вида (3.2), либо к несовместной системе, содержащей уравнение

$$0 * x_{l+1} + \dots + 0 * x_n = \bar{b}_{l+1} \neq 0$$

В первом случае расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2l} & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{ll} & \dots & \bar{a}_{\ln} & \bar{b}_b \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Во втором случае получится матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{2l} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{ll} & \bar{a}_{\ln} & \bar{b}_l \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_{l+1} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Обе эти матрицы имеют вид (3.12) и поэтому по теореме (3.6) их стороны линейно независимы. При этом ранг матрицы (3.31) равен l, ранг матрица (3.32) равен l+1.

Вывод, сделанный нами относительно размерности системы (3.28) можно формулировать в виде теоремы.

<u>Теорема 3.13.</u> (Кронекер, Капелли)

Система $A\bar{x} = \bar{b}$ *разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы* $(A|\bar{b})$.

Действительно, ранг расширенной матрицы (3.31) расширенной системы равен числу l как и ранг матрицы A. Ранг расширенной матрицы неразрешимой системы (3.32) на 1 больше, чем ранг A.

§6. Ранг матрицы

Пусть в матрице A размера m*n зафиксированы k номеров строк и k номеров столбцов, элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют квадратную матрицу,

Определитель которой назовем минором матрицы, соответствующим выбранным строкам и столбцам.

Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

минор, соответствующий первой и третьей строкам и второму и пятому столбцу равен

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$$

Среди всех миноров матрицы рассмотри отличные от 0.

<u>Теорема 3.14</u>.

Ранг матрицы A равен наивысшему из порядков ее отличных от 0 миноров.

Для простоты считаем, что отличен от 0 минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.33)$$

матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

и что любой ее минор порядка l+1 равен 0.

Во-первых первые l строк матрицы A линейно независимы. Действительно, если бы эти строки были линейно зависимы, то какая-то из них была бы линейной комбинацией других. Но тогда минор (3.33) был бы равен 0 по свойству 8 определителя.

Докажем, что любая другая строка с номером k, k = l+1,...,m является линейной комбинацией первых l строк. Для этого рассмотри все возможные определители вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} & a_{lj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} & a_{kj} \end{vmatrix}, \; j = 1,\dots,n \quad (3.34)$$

Все эти определители равны 0, т.к. при j = 1,...,l они содержат одинаковый столбец, а при j = l+1,....,n определитель (3.34) представляет собой минор l+1-го порядка исходной матрицы. □

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов *j*-го столбца определителя (3.34). Дополнения элемента a_{ij} будет $(-1)^{i+l+1} A_i$, где

$$A_i = \qquad\qquad , i = 1,\dots,k-1$$

И

$$A_k = \qquad\qquad \neq 0$$

По теореме Лапласа о разложении определителя по столбцу имеем:

$$a_{1j}A_1 + \ldots + a_{lj}A_l + a_{kj}A = 0,$$

Или

$$a_{kj} = -\frac{A_1}{A}a_{1j} - \ldots - \frac{A_l}{A}a_{lj}, j = 1,\ldots,n.$$

Это означает, что строка $(a_{1,1},\ldots,a_{1,n}),\ldots,(a_{l,n},\ldots,a_{l,n})$с коэффициентами $-\frac{A_1}{A},\ldots,-\frac{A_l}{A}$, что и утверждалось.◄

Важным следствием доказанной теоремы является такое утверждение.

Теорема 3.15.

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов этой матрицы.

►Транспонируем матрицу, то есть сделаем её строки столбцами, сохраняя изменения. При транспонировании максимальный порядок отличных от нуля миноров не может изменится, так как транспонирование не меняет определителя, а для всякого минора исходной матрицы минор, полученный транспонированием, содержится в транспонированной матрице, и обратно.

Таким образом, ранг исходной матрицы совпадает с рангом матрицы транспонированной, т.е. максимальное количество линейно независимых строк матрицы совпадает с максимальным количеством линейно независимых столбцов этой матрицы. ◄

Дополним свойство 8 определителя утверждением.

Определитель порядка n равен 0 тогда и только тогда, когда все строки линейно зависимы.

►Мы уже доказали, что из линейной зависимости строк следует равенство нулю определителя. Обратно, если определитель равен нулю, то максимальным порядком отличного от нуля минора может быть число, не превосходящее $n-1$. Значит, ранг матрицы не превосходит числа $n-1$ и , следовательно, её строки линейно зависимы.◄

§7. Преобразование координат.

Рассмотрим вопрос о переходе от одного базиса пространства V к другому его базису.

Пусть заданы два произвольных базиса пространства V, $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ и $\bar{e}_1',\ldots,\bar{e}_n'$. Каждый вектор $\bar{e}_1',\ldots,\bar{e}_n'$ может быть разложен по базису $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$.

Пусть

$$\begin{aligned} &\bar{e}_1' = c_{11}\bar{e}_1 + \ldots + c_{n1}\bar{e}_n \\ &\ldots \\ &\bar{e}_n' = c_{1n}\bar{e}_1 + \ldots + c_{nn}\bar{e}_n \end{aligned} \qquad (3.35)$$

Рассмотрим матрицу С:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \tilde{n}_{11}\ldots c_{1n} \\ \ldots \\ c_{n1}\ldots c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.36)$$

(столбцы этой матрицы состоят из координат (3.35) векторов $\bar{e}_1',\ldots,\bar{e}_n'$).

Предположим, что вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x_1,\ldots,x_n$в базисе $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ и координаты $x_1',\ldots,x_n'$ в базисе $\bar{e}_1',\ldots,\bar{e}_n'$.

Тогда, ввиду (3.35)

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + \ldots + x_n'\bar{e}_n' = x_1'(c_{11}\bar{e}_1 + \ldots + c_{n1}\bar{e}_n) + \ldots + x_n'(c_{1n}\bar{e}_1 + \ldots + c_{nn}\bar{e}_n) = \\ &(c_{11}x_1' + \ldots + c_{1n}x_n')\bar{e}_1 + \ldots + (c_{n1}x_1' + \ldots + c_{nn}x_n')\bar{e}_n \end{aligned} \qquad (3.37)$$

Так как, по предположению, $\bar{x} = x_1'\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n$ из единственности разложения вектора по базису получаем, ввиду (3.37)

$$\begin{cases} c_{11}x_1' + \ldots + c_{1n}x_n' = x_1 \\ \ldots \\ c_{n1}x_1' + \ldots + c_{nn}x_n' = xn \end{cases} \qquad (3.38)$$

Равенство (3.38) можно, используя (3.36), записать в матричной форме

$c\bar{x}' = \bar{x}$ (3.39),

где $\bar{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ обозначают столбцы из координат вектора $\bar{x}$ в базисах $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ и $\bar{e}_1',\ldots,\bar{e}_n'$.

Определитель матрицы $\tilde{N}$ не равен 0 (говорят также, что $\tilde{N}$ невырождена) так как, в противном случае, по дополнению к свойству 8 определителей, установленному в конце предыдущего параграфа, были бы линейно зависимы строки матрицы $\tilde{N}$, что означает линейную зависимость векторов $\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n$.

Поэтому у матрицы $\tilde{N}$ имеется обратная матрица $\tilde{N}^{-1}$ и из (3.39) получаем, умножая обе его части слева на матрицу $\tilde{N}^{-1}$,

$\bar{x}' = \tilde{N}^{-1}\bar{x}$ (3.40)

Отметим, что и равенства (3.35) можно записать в матричном виде: $(\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n) = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)\tilde{N}$.(3.41)

Это равенство несколько необычное: в нем координаты векторов $(\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n)$ и $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)$- не числа, а векторы. Но поскольку определены произведения вектора на число и сумма векторов, запись (3.35) в виде (3.41) окажется не только осмысленной, но и весьма удобной. Отметим, что нам еще много раз придется встретиться с векторами и матрицами, элементы которых- не обязательно числа.

Рассмотрим важную задачу.

Пусть

$(\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n) = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)\tilde{N}'$ и вектор $\bar{x}$ имеет координаты $(x'_1,\ldots,x'_n)$ в базисе $(\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n)$.

Пусть

$(\bar{e}''_1,\ldots,\bar{e}''_n) = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)\tilde{N}''$ и тот же вектор $\bar{x}$ имеет координаты $(x''_1,\ldots,x''_n)$ в базисе $(\bar{e}''_1,\ldots,\bar{e}''_n)$.

Как связаны между собой координаты $(x'_1,\ldots,x'_n)$ и $(x''_1,\ldots,x''_n)$?

Для ответа на этот вопрос заметим, что согласно (3.39) и:

$C'x' = \bar{x}$ (3.42)

$C''x'' = \bar{x}$ (3.43)

И, согласно, (3.40), (3.42)

$\bar{x}' = (C')^{-1}\bar{x}$

И из (3.43) найдем:

$C''x'' = (\tilde{N})^{-1}\bar{x}'$,

откуда

$\bar{x}'' = (\tilde{N}'')^{-1}(\tilde{N}')^{-1}\bar{x}'$

И, так как, $(\tilde{N}'\tilde{N}'')^{-1} = (\tilde{N}'')^{-1}(\tilde{N}')^{-1}$ (3.44)

$\bar{x}' = C'C''\bar{x}''$

(Для доказательства 3.44 установим, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, т.к. $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$, $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B \cdot B^{-1} = E$.

Рассмотрим еще одну важную задачу.

Предположим, что мы решаем систему

$$B\bar{x} = \bar{b} \quad (3.45)$$

и произведем в ней замену переменных по формуле (3.39), т.е. $\bar{x} = c\bar{x}'$. Какой вид будет иметь матрица системы b, в переменных $x_1', \ldots, x_n'$?

Ответ прост: в равенство $B\bar{x} = \bar{b}$ подставляем $\bar{x} = c\bar{x}'$, получим $B(c\bar{x}') = \bar{b}$ используя ассоциативность умножения матриц, окончательно находим $(Bc)\bar{x}' = \bar{b}$, т.е. матрицы системы (3.35) при замене примет вид $B\tilde{N}$.

Согласно (3.44) при этом $\bar{x}' = (BC)^{-1}\bar{b} = C^{-1}B^{-1}\bar{b}$

§1. Вещественное (действительное) евклидово пространство.

Рассмотрим векторное пространство V над R.

Определение. Говорят, что в V введено **скалярное произведение**, если указано правило, сопоставляющее любой паре $\bar{x}, \bar{y} \in V$ число , обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ и это правило подчиняется следующим законам:

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
2) $(\overline{x_1} + \overline{x_2}, \bar{y}) = (\overline{x_1}, \bar{y}) + (\overline{x_2}, \bar{y})$;
3) $(\lambda\bar{x}, \bar{y})$=$\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ для любого $\lambda \in R$;
4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ для все $\bar{x}$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \leftrightarrow x = \bar{0}$.

Определение. Пространство V со скалярным произведением называется **евклидовым пространством.**

Приведем примеры евклидовых пространств.

1. Плоскость R^2-евклидово пространство, в нем скалярное произведение определено равенством $(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}||\bar{y}|cos\varphi$, где $|\bar{x}|, |\bar{y}|$-длины векторов, -угол между ними.

Свойства 1-4 скалярного произведения выполняются.

2. Пространство R^3 с тем же определением скалярного произведения - евклидово пространство.
3. Рассмотрим пространство (бесконечномерное) $C[a, b], a < b$ и введем на нем скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ равенством:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Свойства 1-3 очевидны (это простые следствия свойств интерграла), также очевидно, что $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Проверить требуется лишь то, что если $f(x) \in C[a, b]$ и $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то для всех x из $[a, b]$ $f(x) = 0$. Действительно, если бы существовала точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) \neq 0$, то $|f^2(c)| > 0$, обозначим это число K.

Ввиду непрерывности функции $f(x)$, непрерывна функция f^2(x), следовательно существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$, что

$|x-c|<\delta$ выполняется неравенство $|f^2(\mathrm{x})|>K/2$. Для простоты ??? считаем, что $c\in(a,b)$ и что $a<c-\delta<c+\delta<b$

Тогда

$$0=\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^{c-\delta} f^2(x)dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^2(x)dx+\int_{c+\delta}^{b} f^2(x)dx\geq 0$$
$$+2\delta\cdot\frac{K}{2}+0=\delta K>0$$

Полученное противоречие (т.е. неравенства $0\geq\delta K>0$) доказывают наше утверждение.

<u>Примечание 1</u>

Пример 3 доказал, что скалярное произведение векторов, как, впрочем, и сами векторы, могут иметь различную природу и что не стоит сводить это понятие только к геометрически наглядным образам.

<u>Примечание 2.</u>

В курсе аналитической геометрии скалярное произведение (см. примеры 1 и 2) определялось через длины векторов и угол между ними. Затем были получены формулы, выражающие длины векторов и угол между ними через скалярное произведение. Это позволяет нам ввести понятие длины вектора и угла между векторами в пространствах, элементы которых не имеют наглядных геометрических образов.

4. Рассмотрим пространство R^4 и введем в нем скалярное произведение векторов $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ и $\bar{y}=(y_1,\dots,y_n)$ по формуле
$(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+\cdots+\ x_ny_n$ **(4.1)**
Свойство 1 скалярного произведения, определенного формулой (4.1), очевидно. Пусть $\bar{x}^{(1)}=(\mathrm{x}_1^{(1)},\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(1)})$, $\bar{x}^{(2)}=(\mathrm{x}_1^{(2)},\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(2)})$
Тогда
$(\bar{x}^{(1)}+\bar{x}^{(2)},\bar{\mathrm{y}})=(\mathrm{x}_1^{(1)}+\mathrm{x}_2^{(1)})y_1+\cdots+(\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(1)}+\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(2)})y_n=\mathrm{x}_1^{(1)}\mathrm{y}_1+\cdots+\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(1)}\mathrm{y}_\mathrm{n}+\mathrm{x}_1^{(2)}\mathrm{y}_1+\cdots+\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(2)}y_n=(\bar{x}^{(1)},\bar{y})+(\bar{x}^{(2)},\bar{y})$
И
$$(\lambda\bar{x},\bar{y})=\lambda x_1y_1+\cdots+\lambda x_ny_n=\lambda(\bar{x},\bar{y}).$$
Наконец, $(\bar{x},\bar{y})=x_1^2+\cdots+x_n^2$ **(4.2)**

И очевидно, что правая часть (4.2) всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1=\cdots=\mathrm{x}_\mathrm{n}=0$

§2. Неравенство Коши-Буняковского и его следствия.

Следующая теорема справедлива в любом евклидовом пространстве.

<u>Теорема 4.1.</u>

Для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$, где -любое евклидово пространство выполнено неравенство

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \qquad \textbf{(4.3)}$$

называемое неравенством Коши-Буняковского.

Для любого $t \in R$ и любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$, по свойству 4 скалярного произведения, имеет

$(t\bar{x} - \bar{y}, t\bar{x} - \bar{y}) \geq 0$

Раскрывая левую часть этого неравенства по свойствам 1-3, получаем:

$$t^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2t(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \geq 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

причем неравенство (4.4) выполняется для любого t. В ??? $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ имеем $\bar{x} = \bar{0}$, поэтому неравенство (4.3) переходит в очевидное неравенство $0 \leq 0$.

Если же $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, то неотрицательный при всех t квадратного трехчлена в левой части (4.4) равносильна тому, что дискриминант этого трехчлена меньше или равен 0, т.е.

$$4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4(\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leq 0$$

что и утверждается в (4.3).

<u>Определение.</u> Если каждому вектору $\bar{x} \in V$ сопоставлено число, называемое **нормой вектора $\bar{x}$,** обозначаемое $\|x\|$ и обладающее свойствами:

1. $\|x\| \geq 0$ для любого $\bar{x} \in V, \bar{x} \neq \bar{0}$; $\|\bar{0}\| = \bar{0}$
2. Для любого $\bar{x} \in V$ и любого $\lambda \in R$
   $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\|\bar{x}\|$;
3. Для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$
   $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$; **(4.5)**
   то V называется **линейным нормированным пространством.**

Примечание 1. Слова **норма вектора** имеют тот же смысл, что и слова **длина вектора.** В книгах встречается оба варианта.

Примечание 2. Неравенство (4.5) называют неравенством треугольника (или неравенством Минковского)

Теорема 4.2.

Если евклидово пространство, то в нем можно определить норму вектора, как

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Свойство 1 нормы сразу из свойства 4 скалярного произведения.

Свойство 2 получается из определения (4.6):

$$\|\lambda\bar{x}\| = \sqrt{(\lambda\bar{\mathrm{x}}, \lambda\bar{\mathrm{x}})} = \sqrt{\lambda^2(\bar{x}, \bar{x})} = |\lambda|\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = |\lambda|\|\bar{\mathrm{x}}\|$$

Для проверки свойства 3 воспользуемся теоремой 4.1:

По определению,

$$\|\bar{x} + \bar{\mathbf{y}}\| = \sqrt{(\bar{x} + \bar{\mathbf{y}}, \bar{x} + \bar{\mathbf{y}})} = \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) + 2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) + (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})} \qquad (4.7)$$

Неравенство (4.3) перепишем в виде

$$|\bar{x}, \bar{\mathbf{y}}| \le \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})}\sqrt{(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})} = \|\bar{\mathbf{x}}\|\|\bar{\mathbf{y}}\| \qquad (4.8)$$

Тогда из (4.7) получаем

$$\|\bar{x} + \bar{\mathbf{y}}\| \le \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) + 2\sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})}\sqrt{(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})} + (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})} = \sqrt{\left(\sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})} + \sqrt{(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})}\right)^2} = \sqrt{\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}\right)} + \sqrt{(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})} = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

Следствие.

В любом вещественном евклидовом пространстве V можно ввести понятие угла между векторами $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

ΔПо аналогии с R^2 и R^3 определим угол φ между $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$, как угол, лежащий между 0 и π, ? которого равен

$$cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

(4.9)

Ввиду неравенства (4.8) модуль правой части этого равенства не превосходит 1.

<u>Определение.</u>

Назовем векторы $\bar{x},\bar{y} \in V$ ортогональными (т.е. перпендикулярными), если $(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

В ? отличных от векторов $\bar{x},\bar{y}$ формула (4.9) при этом дает:

$$cos\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

<u>Теорема 4.3. (Теорема Пифагора)</u>

Если $\bar{x}, \dots, \overline{x_n} \in V$ *попарно ортогональны, т.е. если* $(\overline{x_i},\overline{x_j})$*=0 при* $i \neq j$ *, то*

$$\|\overline{x_1} + \dots + \overline{x_n}\|^2 = \|\overline{x_1}\|^2 + \dots + \|\overline{x_n}\|^2 \qquad (4.9)$$

Δ Действительно,

$$\|(x_1)^- + \dots + (x_n)^-\|^2 = ((x_1)^- + \dots + (x_n)^-, (x_1)^- + \dots + (x_n)^-) = ((x_1)^-, (x_1)^-) + ($$

Т.к. все $(\overline{x_i},\overline{x_j})$=0 при i$\neq$ j Δ

<u>Следствие.</u> Если $(\bar{x},\bar{y}) = 0$, то (4.9) принимает вид $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(При этом естественно называть $\bar{x},\bar{y}$ –катетами прямоугольного треугольника, а $\bar{x} + \bar{y}$-его гипотенузой)

Полезно записать неравенства Коши-Буняковского и неравенство треугольника в разных конкретных евклидовых пространствах.

В R^2 и R^3 они принимают вид

$$(\bar{a},\bar{\mathbf{b}})^2 \le |\bar{\mathbf{a}}|^2 |\bar{\mathbf{b}}|^2 ,$$

$$|\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}| \le |\bar{\mathbf{a}}| + |\bar{\mathbf{b}}|$$

В этом случае норма-это обычная длина вектора.

В пространстве $C[a,b]$ неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt,$$

А неравенство треугольника-вид

$$\sqrt{\int_a^b (x(t)+y(t))^2 dt} \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}$$

В пространстве R^n неравенство Коши-Буняковского выглядит так:

$$(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

Или, используя знак суммы:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Неравенство треугольника, соответственно, имеет вид

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

Или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

§3. Ортонормированный базис евклидова пространства.

Когда мы рассматриваем векторное пространство, не наделенное структурой евклидова пространства, все базисы V равноправны. Другое дело-евклидово пространство. Вспомним особую роль прямоугольной декартовой системы в R^2 и R^3 и, например базис $\bar{\mathbf{i}},\bar{\mathbf{j}},\bar{\mathbf{k}}$ пространства R^3. В этом базисе формулы для вычисления скалярного произведения и, следовательно, длин векторов и углов между ними выглядели особенно

просто. В n-мерном евклидовом пространстве тоже можно ? базис, обладающий подобными свойствами.

<u>Определение.</u> Базис $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ пространства V называется ортонормированным, если $\|\overline{e_i}\| = 1, i = 1, \dots, n$ и $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$ при $i \neq j$.

<u>Теорема 4.4.</u>

Векторы $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ *, для которых* $\|\overline{e_i}\| \neq 0, i = 1, \dots, n$ *и* $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$ *при* $i \neq j$ *обязательно линейно независимы.*

$\triangle$ Если $c_1\overline{e_1}, \dots, c_n\overline{e_n} = \overline{0}$, то для любого $i, i = 1, \dots, n$

$$(c_1\overline{e_1}, \dots, c_n\overline{e_n}, \overline{e_i}) = c_1(\overline{e_1}, \overline{e_i}) + \dots + c_i(\overline{e_i}, \overline{e_i}) + \dots + c_n(\overline{e_n}, \overline{e_i}) = 0 + \dots + c_i(\overline{e_i}, \overline{e_i}) + \dots + 0 = 0$$

$c_i(\overline{e_i}, \overline{e_i}) = 0$ и, так как $(\overline{e_i}, \overline{e_i}) \neq 0$, $c_i = 0,\ i = 1, \dots, n$ $\triangle$

<u>Теорема 4.5</u>.

Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

$\triangle$ Пусть $f_1, \dots, f_n$ -базис V, $\overline{f_1} \neq 0$, так как $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы

Положим $\overline{e_1} = \dfrac{\overline{f_1}}{\|\overline{f_1}\|}$. Тогда $\|\overline{e_1}\| = 1$.

Выберем число α так, чтобы вектор $\overline{f_2} - \alpha_1\overline{e_1}$ был ортогонален $\overline{e_1}$, т.е.
$(\overline{f_2} - \alpha_1\overline{e_1}, \overline{e_1}) = (\overline{f_2}, \overline{e_1}) - \alpha_{1,1}(\overline{e_1}, \overline{e_1}) = (\overline{f_2}, \overline{e_1}) - \alpha_{1,1} = 0$

Таким образом, $(\overline{f_2}, \overline{e_1}) = \alpha_{1,1}$. При этом $\overline{f_2} - \alpha_{1,1}\overline{e_1} \neq \overline{0}$, иначе $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2}$ были бы линейно зависимы.

$$\overline{e_2} = \frac{\overline{f_2} - \alpha_{1,1}\overline{e_1}}{\|\overline{f_2} - \alpha_1\overline{e_1}\|}.$$

При всех этих преобразованиях набор векторов-строк матрицы () переходил в эквивалентный набор векторов.

Выберем числа α_{21}, α_{22} так, чтобы вектор $\overline{f_3} - \alpha_{2,1}\overline{e_1} - \alpha_{2,2}\overline{e_2}$ был ортогонален $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$. Это означает, что :

$$\left(\overline{f_3}-\alpha_{2,1}\overline{e_1}-\alpha_{2,2}\overline{e_2},\overline{e_1}\right)=\left(\overline{f_3},\overline{e_1}\right)-\alpha_{2,1}\left(\overline{e_1},\overline{e_1}\right)-\alpha_{2,2}\left(\overline{e_2},\overline{e_1}\right)=\left(\overline{f_3},\overline{e_1}\right)-\alpha_{2,1}-0=0,$$

$$\alpha_{2,1}=\left(\overline{f_3},\overline{e_1}\right)$$

$$\left(\overline{f_3}-\alpha_{2,1}\overline{e_1}-\alpha_{2,2}\overline{e_2},\overline{e_2}\right)=\left(\overline{f_3},\overline{e_2}\right)-\alpha_{2,1}\left(\overline{e_1},\overline{e_2}\right)-\alpha_{2,2}\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)=\left(\overline{f_3},\overline{e_2}\right)-\alpha_{2,2}=0,$$

$\alpha_{2,2}=\left(\overline{f_3},\overline{e_2}\right)$. Если $3<n$, то $\overline{f_3}-\alpha_{2,1}\overline{e_1}-\alpha_{2,2}\overline{e_2}\neq\overline{0}$, иначе $\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3}$ были бы линейно зависимы.

Полагаем :

$$\overline{e_3}=\frac{\overline{f_3}-\alpha_{2,1}\overline{e_1}-\alpha_{2,2}\overline{e_2}}{\|\overline{f_3}-\alpha_{2,1}\overline{e_1}-\alpha_{2,2}\overline{e_2}\|}$$

Продолжаем этот процесс, на k-том шаге ищем $\alpha_{k,1},\ldots,\alpha_{k,k}$ так, что вектор $\overline{f_{k+1}}-\alpha_{k,1}\overline{e}-\ldots-\alpha_{k,k}\overline{e_k}$ ортогонален $\overline{e_1},\ldots,\overline{e_k}$, при этом $\alpha_{k,i}=\left(\overline{f_{k+1}},\overline{e_1}\right), i=1,\ldots,k$

Полагаем, при $k\leq n-1$,

$$\overline{e_{k+1}}=\frac{\overline{f_{k+1}}-\alpha_{k,1}\overline{e_1}-\alpha_{k,k}\overline{e_k}}{\|\overline{f_{k+1}}-\alpha_{k,1}\overline{e_1}-\alpha_{k,k}\overline{e_k}\|} \qquad (4.10)$$

(снова при $k\leq n-1$ вектор $\overline{f_{k+1}}-\alpha_{k,1}\overline{e}-\ldots-\alpha_{k,k}\overline{e_k}\neq\overline{0}$)

В результате, при $k=n-1$ по формуле 4.10 будет построен последний вектор $\overline{e_n}$. По предыдущей теореме, $\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n}$ линейно независимы. Искомый ортонормированный базис построен. ◄

<u>Замечание</u>. Процесс, использованный в предыдущей теореме, называется процессом Гильберта-Шмидта. Его можно применять не только к базису пространства, но и к любой системе векторов.

<u>Теорема 4.6.</u>

Если $\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n}$ *-ортонормированный базис,* $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+,\ldots+x_n\overline{e_n}, \overline{y}=y_1\overline{e_1}+\ldots+y_n\overline{e_n}$, *то* $\left(\overline{x},\overline{y}\right)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$

►

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=x_1\overline{e_1}+\ldots x_n\overline{e_n}, y_1\overline{e_1}+\ldots+y_n\overline{e_n}=$$
$$x_1\left(\overline{e_1},y_1\overline{e_1}+\ldots+y_n\overline{e_n}\right)+x_2\left(\overline{e_2},y_1\overline{e_1}+\ldots+y_n\overline{e_n}\right)+\ldots+x_n\left(\overline{e_1},y_1\overline{e_1}+\ldots+y_n\overline{e_n}\right)$$

$$=x_1y_1+x_1\left(\overline{e_1},y_2\overline{e_2}+\ldots+y_n\overline{e_n}\right)+x_2y_2+x_2\left(\overline{e_2},y_1\overline{e_1}+y_3\overline{e_3}\ldots+y_n\overline{e_n}\right)+\ldots+x_n\left(\overline{e_n},y_1\overline{e_1}+\ldots y_{n-1}\overline{e_{n-1}}\right)$$
$$+x_ny_n=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

Мы воспользовались тем, что $(\overline{e_i},\overline{e_i})=1, i=1,\dots,n$ и тем, что $(\overline{e_i},\overline{e_j})=0, j\neq i$ и свойствами скалярного произведения. ◄

<u>Следствие.</u> Если . Если $\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}$-ортонормированный базис и $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+\dots+x_n\overline{e_n}$, то для любого $k, k=1,\dots,n$ $x_k=(\overline{x},\overline{e_k})$

<u>Глава V. Линейные Отображения</u>

§1 Линейные отображения

Пусть V и W линейные пространства над $\mathbb{R}$ (вообще говоря, над произвольным полем).

<u>Определение</u>. Отображение $A: V \to W$ называется линейным, если для всех $x_1, x_2 \in V$ $A(\overline{x}_1+\overline{x}_2)=A(\overline{x}_1)+A(\overline{x}_2)$ и для всех $\alpha\in\mathbb{R}$ и всех $\overline{x}\in V$ $A(\alpha\overline{x})=\alpha A(\overline{x})$.

Отображения $A: V\to W$ и $B: V\to W$ считается равным, если для любого $\overline{x}\in V$ $A(\overline{x})=B(\overline{x})$

Операции сложения отображения и умножения отображения на число задаются равенствами

$$(A+B)(\overline{x})=A(\overline{x})=B(\overline{x}) \qquad (5.1)$$

$$(A\alpha)(\overline{x})=\alpha A(\overline{x}) \qquad (5.2)$$

И ???????? мест для любого $\overline{x}\in V$

Нулевой оператор Θ определим равенством

$\Theta(\overline{x})=\overline{0}$ для любого $\overline{x}\in V$

Противоположно к A по сложению отображение $-A$ определимо равенством

$(-A)(\overline{x})=-A(\overline{x})$

<u>Определение.</u> Образом $Im\,A$ линейного отображения называется множество всех $\overline{y}\in W$ таких, что существует $\overline{x}\in V$ с условием $A(\overline{x})=\overline{y}$

??????? доказать следущую теорему

Теорема 5.1

Множество линейных отображений $A: V \to W$ образует векторное пространство.

Сумма линейных отображений $A + B$ и отображение αA линейное. Например,

$(A + B)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) + B(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2) + B(\overline{x}_1) +$
$+B(\overline{x}_2) = A(\overline{x}_1) + B(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2) + B(\overline{x}_2) = (A + B)(\overline{x}_1) + (A + B)(\overline{x}_2)$

$(A + B)(\alpha\overline{x}) = A(\alpha\overline{x}) + B(\alpha\overline{x}) = \alpha A(\overline{x}) + \alpha B(\overline{x}) = \alpha(A + B)(\overline{x})$

Проверка линейности αA вполне аналогична

Это линейное пространство обозначается

$$L(V, W)$$

<u>Определение.</u> Ядром $KerA$ линейного отображение называется множество $\overline{x} \in V$ такое, что $A(\overline{x}) = \overline{0} \in W$

Теорема 5.2

Образ линейного отображения $A: V \to W$ есть подпространство W, ядро этого отображения подпространство V.

Пусть $\overline{y}_1 \in ImA$, $\overline{y}_2 \in ImA$.

Это означает, что $\overline{y}_1 = A(\overline{x}_1), \overline{y}_2 = A(\overline{x}_2)$.

Значит, $\overline{y}_1 + \overline{y}_2 = A(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2) = A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \in ImA$.

Аналогично, если $\overline{y} \in ImA$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$\alpha\overline{y} = \alpha A(\overline{x}) = A(\alpha\overline{x}) \in ImA$.

Аналогично, если $A(\overline{x}_1)=\overline{0}, A(\overline{x}_2) = \overline{0}$ т.е. если

$\overline{x}_1 \in KerA$, $\overline{x}_2 \in KerA$, то $A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$

т.е. $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 \in KerA$

если $\overline{x} \in KerA$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A(\overline{x}) = \alpha\overline{0} = \overline{0}$

т.е. $\alpha\overline{x} \in KerA$

<u>Определение</u>. Размерность ImA называется рангом отображения A,размерность $KerA$ называется дефектом отображения A

§2 Линейные операторы

<u>Определение.</u> В случае $V = W$, т.е. в случае отображения $A: V \to V$ будем называть A линейным оператором в пространстве V или линейным преобразованием V.

Соответствующее векторное пространство линейных преобразований обозначается $L(V, V)/$

<u>Определение.</u> Единичный (или тождественный) оператор I определен равенством.

$I\overline{x} = \overline{x}$

Для любого $\overline{x} \in V$

<u>Теорема 5.3</u>

Произведение AB линейных операторов – линейный оператор &&&&

$\lambda(AB) = (\lambda A)B$

$(A + B)C = AC + BC$ *(5.4)*

$A(B + C) = AB + AC$

$(AB)C = A(BC)$

Докажем линейность оператора AB, используя (5.3), (5.1) и (5.2):

$$AB(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A\big(B(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)\big) = A(B\overline{x}_1 + B\overline{x}_2) = AB(\overline{x}_1) + AB(\overline{x}_2)$$

$$AB(\alpha\overline{x}) = A\big(B(\alpha\overline{x})\big) = A\big(\alpha(B\overline{x})\big) = \alpha A(B\overline{x}) = \alpha(AB)(\overline{x})$$

Свойства (5.4) проверяются вполне аналогично.

§3 Матричная запись линейных операторов.

Фиксируем в V базис $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ и пусть для $\overline{x} \in V$

$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \dots + x_n\overline{e}_n$

Тогда ввиду (5.1) и (5.2)

$A(\overline{x}) = A\big(x_1\overline{e}_1 + \dots + x_n\overline{e}_n\big) = A\big(x_1\overline{e}_1\big) + \dots + A\big(x_n\overline{e}_n\big) = x_1A(\overline{e}_1) + x_nA(\overline{e}_n)$ *(5.5)*

Разложим вектор $A(\overline{e}_1), \dots, A(\overline{e}_n)$ по базису $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$

$$A(\overline{e}_k) = a_{1k}\overline{e}_1 + \dots + a_{nk}\overline{e}_n, k = 1, \dots, n \tag{5.6}$$

И подставим равенства (5.6) в (5.5):

$$A(\overline{x}) = x_1 A(a_{11}\overline{e}_1 + \dots + a_{n1}\overline{e}_n) + x_n A(a_{1n}\overline{e}_1 + \dots + a_{nn}\overline{e}_n) = \overline{e}_1(a_{11}\overline{x}_1 + \dots + a_{1n}\overline{x}_n) + \dots + (a_{n1}\overline{x}_1 + \dots + a_{nn}\overline{x}_n)\,\overline{e}_n \tag{5.7}$$

Если обозначить $\overline{y} = A\overline{x}$ и считать, что $\overline{y}$ имеет координаты $y_1, \dots, y_n$, то равенство (5.7) можно переписать в матричном виде

$$\overline{y} = A\overline{x} \tag{5.8}$$

$$\text{Где } \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

<u>Определение</u>. Матрица A,определенная в равенствах (5.6) и (5.9), называется матрицей линейного оператора A в базисе $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$. В ее столбце с номером k стоят координаты вектора $A(\overline{e}_k)$ в базисе $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$

Итак, мы выяснили, что каждому линейному оператору A при фиксированном базисе $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ пространства V соответствует матрица A этого оператора.

Осталось выяснить два вопроса. Первый состоит в том, каждой ли матрице A соответствует линейный оператор A? Второй - является ли соответствие операторов и матриц взаимооднозначным? Положительный ответ на оба вопроса дает следующая теорема.

<u>Теорема 5.4.</u>

Пусть в линейном пространстве V задан базис $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ и пусть - квадратная n×n матрица. Существует, притом единственный, линейный оператор A, матрицей которого в данном базисе является A.

Δ Докажем сначала существование линейного оператора A с заданной матрицей A в базисе $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$. Для этого определим образы базисных векторов $\overline{e_k}, k = 1, \dots, n$ равенством (5.6). Для любого $\bar{x} = \mathrm{x}_1\overline{\mathrm{e}_1} + \dots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\overline{\mathrm{e}_\mathrm{n}}$ определим $A(\bar{n})$ равенством (5.5).

Поскольку разложение $\bar{x}$ по базису единственное, это определение корректное. Докажем линейность построенного отображения, используя (5.5).

Для любых $\overline{x_1}, \overline{\mathrm{x}_2} \in \mathrm{V}$

$\overline{x_1} = x_1^1\overline{e_1} + \cdots + x_n^1\overline{e_n}$, $\overline{x_2} = x_1^2\overline{e_1} + \cdots + x_n^2\overline{e_n}$

$$A(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = (x_1^1 + x_1^2)A(\overline{e_1}) + \cdots + (x_n^1 + x_n^2)A(\overline{e_n})$$
$$= x_1^1 A(\overline{e_1}) + \cdots + x_n^1 A(\overline{e_n}) + x_1^2 A(\overline{e_1}) + \cdots + x_n^2 A(\overline{e_n}) =?$$

Для любого $\bar{x} \in$ V и любого $\alpha \in R$ согласно (5.5)

$$A(\alpha\bar{x}) = (\alpha x_1)A(\overline{e_1}) + \cdots + (\alpha x_n)A(\overline{e_n}) = \alpha(x_1 A(\overline{e_1}) + \cdots + x_n A(\overline{e_n}) = \alpha A(\bar{x}).$$

Итак, любой матрице A соответствует линейный оператор A. Однозначность этого соответствия вытекает из того, что разложения векторов $A(\overline{e_n})$ по базису $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ определены однозначно.Δ

Укажем на связь введенных в этой главе понятий с системами линейных уравнений.

Теорема 5.5.

Пусть в пространстве V зафиксирован базис $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ и рассматривается линейный оператор A, матрицы которого в заданном базисе равна A. Тогда образ I_m A представляет множество векторов $\bar{b} \in V$, для которых имеет решение система уравнений.

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

и ранг A равен рангу матрицы A, а ядро KerA представляет собой множество решений системы.

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

И ? A равен n ранг A

△Согласно (5.8) координаты вектора A который является образом некоторого $\bar{x} \in$ V при отображении A вычисляется по формуле

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Принадлежность $\bar{x}$ ядру KerA , где $A\bar{x} = \bar{0}$

Образ I_m A состоит из векторов (5.5), представляющих собой ??? линейные комбинации векторов $A(\overline{e_n})$, т.е. линейную оболочку $A(\overline{e_1}), \dots, A(\overline{e_n})$.

Размерность этой линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат векторов $A(\overline{e_1}), \dots, A(\overline{e_n})$ согласно теореме 3.4, т.е. рангу A.

Размерность ядра KerA, т.е. ?? A равна размерности пространства решений системы

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

Которая равна n-ранг A по теореме 3.7. $\triangle$

<u>Следствие.</u> Из доказательства предыдущей теоремы вытекает, что если в фиксированном базисе $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ операторы A и B заданы матрицами A и B, то операторам $A + B$, αA, где $\alpha \in R$ и AB соответствует матрице A+B, αA и AB.

§4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Пусть -линейное пространство, $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$-базис V, $\overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'$-другой базис V, C-матрица (3.36) перехода от $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ к $\overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'$.

Пусть -линейный оператор, A-его матрица в базисе $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$, A'-его матрица в базисе $\overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'$.

<u>Теорема 5.6</u>.

$$A' = C^{-1}AC \qquad \textbf{(5.10)}$$

$\triangle$Пусть $\bar{x} \in V$ и пусть $A(\bar{x}) = \bar{y}$? ? $\in V$. Рассматривая разложение векторов по базису $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$, получаем

$$\bar{y} = A\bar{x} \qquad (5.11)$$

Согласно (3.39) получаем

$$C\bar{x}' = \bar{x},\ C\bar{y}' = \bar{y} \qquad (5.13)$$

Так как C, очевидно, имеет обратную матрицу C^{-1}, это-матрица перехода от базиса $\overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'$ к базису $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$, из (5.13) находим $\bar{x}' = C^{-1}\bar{x}$ и, используя (5.11), (5.12), (5.13) получаем

$$\bar{y} = C\bar{y}' = CA'^{\bar{x}'} = CA'^{C^{-1}\bar{x}} = A\bar{x}$$

Из последнего равенства, ввиду единственности матрицы линейного оператора, получаем

$$CA'C^{-1} = A$$

Или, умножая обе части этого равенства слева на C^{-1}, ???

$$A' = C^{-1}AC \quad \triangle$$

Следствие.

Определитель матрицы A оператор A в базисе $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ равен определителю матрицы A' оператор A в любом другом базисе $\overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'$.

$\triangle$Из равенства $A' = C^{-1}AC$ и свойств определителя:

$$|AB| = |A||B|, |\mathrm{C}^{-1}| = \frac{1}{|\mathrm{C}|}$$

Следует, что

$$|\mathrm{A}'| = |C^{-1}AC| = |\mathrm{C}^{-1}||\mathrm{A}||\mathrm{C}| = \frac{1}{|\mathrm{C}|}|\mathrm{A}||\mathrm{C}| = |\mathrm{A}|. \triangle$$

Определение.

Матрицы A и B называются подобными, если существует ???? матриц? C так, что $A = C^{-1}BC$.

Теорема 5.6. означает, что матрицы линейного отображения в разных матрицах подобны.

§5. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования.

Пусть -векторное пространство над R, A-оператор ? $L(V, V)$

Определение.

Отличный от $\overline{0}$ вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором линейного оператора A, если существует такое число $\lambda \in R$, что $A(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$ (5.14)

Это число λ называется собственным значением (или собственным числом) оператор A.

Пусть задан некоторый базис $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$, в котором преобразование A имеет матрицу A. Тогда (5.14) принимает вид

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

Или

$$A\bar{x} = \lambda \mathrm{E}\bar{x}$$

Где E-единичная матрица или

$$(A - \lambda\mathrm{E})\bar{x} = \overline{0} \qquad (5.15)$$

Получена система линейных уравнений с матрицей $A - \lambda$E. По условию, система имеет ненулевое решение $\bar{x}$. Это означает, что

$$|A - \lambda \mathrm{E}| = 0 \qquad (5.16)$$

Или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.17)$$

<u>Определение.</u>

Уравнение (5.16) называется характеристическим. Любое собственное значение A должно ему удовлетворять.

<u>Теорема 5.7</u>

Собственному вектору $\bar{x}$ соответствует единственное значение λ. Собственному значению λ соответствует множество собственных векторов и эти векторы определяют пространство.

Рассмотрим некоторый базис $\overline{e_1} \dots \overline{e_n}$ и пусть у вектора $\bar{x}$ есть собственное значение λ_1 и λ_2. Тогда $A\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}$, $A\bar{x} = \lambda_2 \bar{x}$, откуда $\bar{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x}$. Так как по условию, $\bar{x} \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ следовательно $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ - собственные векторы с собственными значениями λ. Тогда $A(\overline{x_1}) = \lambda \bar{x}_1$, $A(\overline{x_2}) = \lambda \bar{x}_2$ $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A(\bar{x}_1) + A(\bar{x}_{2)} = \lambda \bar{x}_1 + \lambda \bar{x}_2 = \lambda(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, т.е. вместе с $\bar{x}$ и $\lambda \bar{x}$ - собственный вектор А с собственным значением λ.

Кроме того, для любого $\alpha + \mathbb{R}$

$A(\alpha \bar{x}) = \alpha A \bar{a} = \alpha \lambda \bar{x} = \lambda(\alpha \bar{x})$, т.е. вместе с $\bar{x}$ и $\alpha \bar{x}$ - собственный вектор с собственным значением λ.

Рассмотрим пример нахождения собственных чисел и соответствующих им собственных векторов.

<u>Пример.</u>

Пусть оператор А имеет в некотором базисе матрицу $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Уравнение (5.17) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

отсюда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ - собственные числа одного оператора.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих этим значениям, рассмотрим соответствующую систему (5.15) при $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + 0 * x_2 = 0 \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 * x_1 + 0 * x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

отсюда $x_1 + 2x_2 = 0$ любой собственный вектор с этим значением имеет вид

$$\bar{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 3$ получим

$$\begin{cases} \{-2x_1 + 0 * \lambda_2 = 0 \\ x_1 + 0 * \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 1$ λ_2 - любое и любой собственный вектор, отвечающий этому собственному значению имеет вид

$$\bar{x} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Не всякий линейный оператор !!! имеет собственные векторы и собственные значения. Рассмотрим, например, в $\mathbb{R}^2$ оператор А, представляющий собой поворот относительно начала координат на угол φ. ? Из геометрических соображений сразу ясно, что при повороте на один ненулевой вектор $\bar{x}$ не перейдет в пропорциональной вектор $\lambda\,\bar{x}$, так как образ $\lambda(\bar{x})$ вектора представляет собой вектор, повернутый на угол φ.

Кстати, при повороте на угол φ базис $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ переходит в базис

$$\bar{e}_1` = \cos\varphi \bar{e}_1 + \sin\varphi \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2` = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\bar{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\bar{e}_2 = - \sin\varphi \bar{e}_1 + \cos\varphi \bar{e}_2$$

В этом базисе матрица А имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi^{-} \\ -\sin\varphi^{-} & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

При этом $|A| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \overline{= 1}$

$$A^{-1} = A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi^{-} \\ -\sin\varphi^{-} & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi^{-} \\ -\sin\varphi^{-} & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

У параметрического уравнения

$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi^{-} \\ -\sin\varphi^{-} & \cos\varphi \end{bmatrix} = 0$, $\quad (\cos\ \varphi - \lambda) + \sin^2\varphi = 0$

очевидно, нет действительных корней при $\varphi \neq$ КП, К$\in \mathbb{Z}$.

Вернемся к рассмотрению уравнения (5.16).

Может возникнуть вопрос, не зависят ли его корни от того, в каком базисе проводится рассмотрение?

Теорема 5.8

Характеристические уравнения (5.16)найденные в любых базисах, совпадают.

Пусть в базисе $\overline{e_1}$` … $\overline{e_n}$` матрица A = A` . Тогда характеристическое уравнение (5.16) в этом базисе запишется в виде:

$$|A` - \lambda\epsilon| = 0 \quad (5.18)$$

Рассмотрим задачу в базисе $\overline{e_1}$ … $\overline{e_n}$ и воспользуемся теоремой, согласно которой

$$A` = C^{-1}AC$$

Уравнение (5.18) принимает вид

$$|C^{-1}AC - \lambda\epsilon| = 0 \quad (5.19)$$

Так как $C^{-1}\epsilon$C $= \epsilon * C^{-1}$C $= \epsilon * \epsilon = \epsilon$ уравнение (5.19) перепишем в виде

$$|C^{-1}AC - \lambda C^{-1}\epsilon\text{C}| = 0$$

Обозначим характеристический многочлен $\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$

Сформулируем без доказательства теорему.

Теорема 5.11. (Гамильтон- Кэли)

При подстановке в характеристический многочлен вместо λ самой матрицы A получается нулевая матрица.

Проиллюстрируем теорему примером:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

Рассмотрим соответствующую матрицу из формулировки теоремы

$A^2 - 5A - 6E$ (5.23)

Далее,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix}$$

И выражение (5.23) примет вид:

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Что и утверждалось.

§1. Линейная форма

Пусть V-векторное пространство. Отображение $F:V\to R$, сопоставляющее вектору $\bar{x}$ число F, называется функционалом, если для всех $\bar{x},\bar{y}\in V$

$$F(\bar{x}+\bar{y})=F(\bar{x})+F(\bar{y}) \tag{6.1}$$

И для всех $\bar{x}\in R$ и всех $\lambda\in R$

$$F(\lambda\bar{x})=\lambda F(\bar{x}) \tag{6.2}$$

То функционал называется линейным.

Примеры линейных функционалов:

1. Если $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$, то значение $F(\bar{x})$ положим по определению, равным x_1
2. Если $V=C[a,b]$, то для $f(x)\in C[a,b]$ определим $F(f)=\int_a^b f(x)dx$

Линейность этих функционалов очевидна.

Рассмотрим пример нелинейного функционала. Для $\bar{x}\in R^2$ положим $F(\bar{x})=|\bar{x}|$. Тогда $F(\bar{x}+\bar{y})\le F(\bar{x})+F(\bar{y})$ и, например, для $\bar{x}=(1,0),\bar{y}=(0,1)$ получаем $\bar{x}+\bar{y}=(1,1),|\bar{x}+\bar{y}|=\sqrt{2},|\bar{x}|=1,|\bar{y}|=1$ и $|\bar{x}+\bar{y}|<|\bar{x}|+|\bar{y}|$

Если V – n-мерное пространство, $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$ - некоторый базис V и F –линейный функционал, то для любого $\bar{x}\in V, x=x_1\bar{e}_1+\dots+x_n\bar{e}_n$ согласно (6.1) и (6.2) имеем:

$$F(\bar{x})=F(x_1\bar{e}_1+\dots+x_n\bar{e}_n)=F(x_1\bar{e}_1)+\dots+F(x_n\bar{e})=x_1F(\bar{e}_1)+\dots+x_nF(\bar{e}_n) \tag{6.3}$$

Обозначим $a_x=F(\bar{e}_x)$ (6.4). Тогда уравнение 6.3 принимает вид:

$$F(\bar{x})=a_1x_1+\dots+a_nx_n \tag{6.5}$$

Правая часть уравнения (6.5) называется линейной формой от переменных $x_1,\dots,x_n$.

Пример. В курсе математического анализа при изучении функций нескольких переменных дифференциал функции:

$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ является линейной формой переменных $dx_1,\dots,dx_n$.

Равенство (6.3) показывает, что все значения линейного функционала являются линейными комбинациями его значений на векторах базиса $\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n}$ и вполне определенным набором значений (6.4).

Как изменяется ??? линейной формы (6.5) при переходе к другому базису?

Пусть рассматривается новый базис:

$$\overline{e_1}' = c_{11}\overline{e_1}. + \ldots + c_{n1}\overline{e_n},$$

…

$$\overline{e_n}' = c_{1n}\overline{e_1} + \ldots + c_{nn}\overline{e_n},$$

Т.е в обозначениях (3.36),

$$\left(\overline{e_1}',\ldots,\overline{e_n}'\right) = \left(\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n}\right)C$$

Тогда:

$$\overline{a_1}' = F\left(\overline{e_1}'\right) = F\left(c_{11}\overline{e_1} + \ldots + c_{n1}\overline{e_n}\right) = F\left(c_1,\overline{e_1}\right) + \ldots + F\left(c_{n1}\overline{e_n}\right) = c_{11}F\left(\overline{e_1}\right) + \ldots + c_{n1}F\left(\overline{e_n}\right) = c_{11}a_1 + \ldots + c_{n1}a_n$$

…

$$\overline{a_n}' = F\left(\overline{e_n}'\right) = F(c_{11}\overline{e_1} + .. + c_{nn}\overline{e_n}) = c_{1n} + \ldots + c_{nn}a_n$$

Равенства (6.7) можно записать в матричном виде:

$$\left(\overline{a_1}',\ldots,\overline{a_n}'\right) = \left(a_1,\ldots,a_n\right)C \qquad (6.8)$$

Из (6.6) и (6.8) вытекает, что при переходе к новому базису координаты линейной формы изменяются так же, как и вектора базиса.

Как отмечалось в теореме 5.1, множество линейных отображений, в частности, множество линейных форм, сами образуют векторное пространство. Это пространство называется сопряженным пространству V.

Если V- евклидово пространство и $\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n}$ - ортонормированный базис в нем, то правую часть (6.5) можно рассматривать, как скалярное произведение $\left(\overline{a},\overline{x}\right)$ векторов с координатами $\overline{a} = \left(a_1,\ldots,a_n\right)$ и $\overline{x} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)$

§2. Билинейные символы.

Пусть V- векторное пространство над R. Определение: отображение $\alpha : V \times V \to R$ сопоставляющее каждой паре векторов $\overline{x}, \overline{y} \in V$ число $\alpha(\overline{x}, \overline{y})$ называется билинейной функцией, если:

1. Для любого $\overline{y} \in V$

$$\alpha(\overline{x_1} + \overline{x_2}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x_1}, \overline{y}) + \alpha(\overline{x_2}, \overline{y}) \tag{6.9}$$

Для всех $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in V$ и для любого $x \in V$ и любого $\lambda \in R$:

$$\alpha(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda \cdot \alpha(\overline{x}, \overline{y}) \tag{6.10}$$

(т.е при любом фиксированном $\overline{y}$ функция $\alpha(\overline{x}, \overline{y})$- линейная по $\overline{x}$)

2. Для любого $\overline{x} \in V$

$$\alpha(\overline{x}, \overline{y_1} + \overline{y_2}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y_1}) + \alpha(\overline{x}, \overline{y_2}) \tag{6.11}$$

Для всех $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in V$ и для любого $y \in V$ и любого $\mu \in R$:

$$\alpha(\overline{x}, \mu\overline{y}) = \mu\alpha(\overline{x}, \overline{y}), \tag{6.12}$$

(т.е при любом фиксированном $\overline{x}$ функция $\alpha(\overline{x}, \overline{y})$- линейная по $\overline{y}$)

Пример билинейной функции дает изученное в главе 4 скалярное произведение. Пусть в n-мерном пространстве V задан базис $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$.

Обозначим $a_{ik} = \alpha(\overline{e_i}, \overline{e_k}), i = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, n$ (6.13)

<u>Теорема 6.1.</u>

Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда

$$\alpha(\overline{x}, \overline{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_2 + \ldots + a_{ik}x_ky_k + \ldots + a_{nn}x_ny_n$$

►Последовательно используем (6.9)-(6.13):

$$\alpha(\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(x_1\overline{e_1} + \ldots + x_n\overline{e_n}, y_1\overline{e_1} + \ldots + y_n\overline{e_n}) = x_1\alpha(\overline{e_1}, y_1\overline{e_1} + \ldots + y_n\overline{e_n}) + \ldots + x_n\alpha(\overline{e_n}, y_1\overline{e_1} + \ldots + y_n\overline{e_n})$$

$$= x_1y_1\alpha(\overline{e_1}, \overline{e_1}) + \ldots + x_1y_n\alpha(\overline{e_1}, \overline{e_n}) + \ldots + x_ny_1\alpha(\overline{e_n}, \overline{e_1}) + \ldots + x_ny_n\alpha(\overline{e_n}, \overline{e_n}) =$$

$$a_{11}x_1y_1 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \ldots + a_{n1}x_ny_1 + a_{nn}x_ny_n$$ ◄

Определение: *матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6.14)$$

Называется матрицей билинейной функции в базисе $\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}$

Теорема 6.2.

Если базис $\overline{e_1}',\dots,\overline{e_n}'$ *связан с базисом* $\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}$ *формулой (6.6), то*

матрица A' связана с матрицей A (6.14) равенством:

$$A' = C^T A C \qquad (6.15)$$

(Напоминание: C^T*- транспонированная матрица к матрице C)*

►Вычислим:

$$a_{ij}' = \alpha\left(\overline{e_j}',\overline{e_i}'\right) = \alpha\left(c_{11}\overline{e_1} + \dots + c_{n1}\overline{e_n}, c_{1j}\overline{e_1} + \dots + c_{nj}\overline{e_n}\right) = c_{1i}\cdot\alpha\left(\overline{e_1}, c_{1j}\overline{e_1} + \dots + c_{nj}\overline{e_n}\right) + \dots + c_{ni}\cdot\alpha\left(\overline{e_n}, c_{1j}\overline{e_1} + \dots\right.$$

$$\left. + c_{nj}\overline{e_n}\right) = c_{1i}c_{1j}\alpha\left(\overline{e_1},\overline{e_1}\right) + \dots + c_{1i}c_{nj}\alpha\left(\overline{e_1},\overline{e_n}\right) + \dots + c_{ni}c_{1j}\alpha\left(\overline{e_n},\overline{e_1}\right) + \dots + c_{ni}c_{nj}\alpha\left(\overline{e_n},\overline{e_n}\right) =$$

$$c_{1i}a_{11}c_{1j} + \dots + c_{1i}a_{1n}c_{nj} + \dots + c_{ni}a_{n1}c_{1j} + \dots + c_{ni}a_{nn}c_{nj} \qquad (6.16)$$

Для элементов c_{ij} матрицы C и элементов c_{ij}^T матрицы C^T справедливо равенство:

$$c_{ij} = c_{ji}^T, i, j = 1,\dots,n$$

Поэтому (6.11) принимает вид:

$$a_{ij}' = c_{i1}^T a_{11}c_{1j} + \dots + c_{l1}^T a_{1n}c_{nj} + \dots + c_{in}^T a_{n1}c_{1j} + \dots + c_{in}^T a_{nn}c_{nj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{il}^T a_{lk}c_{kj} \qquad (6.17)$$

Равенство (6.15) равносильно доказанному равенству (6.17)◄

§3. Квадратичные формы

Определение: Билинейная функция $\alpha(\overline{y},\overline{x})$ называется симметричной, если для всех $\overline{x},\overline{y}\in V$

$$\alpha(\overline{y},\overline{x}) = \alpha(\overline{x},\overline{y})$$

Это означает, что для ее матрицы А в любом базисе

$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad (6.18)$$

т.е. А – симметричная матрица.

Значения $\alpha(\bar{x},\bar{x})$ симметрично билинейной функции при $\bar{y} = \bar{x} \in V$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ выражаются , согласно теореме 6.1 и равенству (6.18), формулой

$$\alpha(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2 =$$
$$= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$
(6.19)

<u>Определение</u>: Правая часть равенства (6.19) называется <u>квадратичной формой</u> от переменных $x_1,\ldots,x_n$ с матрицей A.

Примеры квадратичных форм.

1. n=1, $\alpha(\bar{x},\bar{x}) = ax^2$
2. n=2 $\alpha(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
3. Важный для математического анализа пример второго дифференциала функции $f(x_1,\ldots,x_n)$:

   $$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1dx_n + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}dx_{n-1}dx_n$$

Выражения (6.19) для значения квадратичной формы выглядит весьма громоздко.

Следующая стоящая перед нами задача: подобрать базис n-мерного пространства V так, чтобы значительно упростить его выражение.

<u>Теорема 6.3</u> (Приведение квадратичной формы по Лагранжу).

Пусть $\alpha(\bar{x},\bar{x})$ - произвольная квадратичная форма в n-мерном пространстве V. Тогда существует базис, котором она имеет вид:

$$\alpha(\bar{x},\bar{x}) = M_1x_1^2 + \ldots + M_nx_n^2 \qquad (6.20)$$

суммы квадратов переменных с коэффициентами перед ними.

Используется метод математической индукции по n.

При $n=1$ выражение (6.19) уже имеет требуемый вид.

Сделали индуктивное предположение, состоящее в том, что для любой квадратичной формы от $n-1$ переменной существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет вид суммы квадратов переменных с коэффициентами перед ними.

Если форма нулевая, то она имеет нулевую матрицу в любом базисе и все коэффициенты в представлении (6.19) равны 0 и теорема, тем самым, верна.

Пусть форма ненулевая и пусть существует i такое, что $a_{i,i} \neq 0$. Без ограничения общности распределение считаем, что $a_{11} \neq 0$ (нумерация переменных в нашем распоряжении. Смена нумерации переменных означает просто перестановку элементов базиса).

Преобразуем (6.19) так:

$\alpha(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$, где (6.21)

$B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ - квадратичная форма от переменной $x_2,x_3,\ldots,x_n$. Далее, так как $a_{11}=0$,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 \quad (6.22)$$

!!!! (6.22) правая часть (6.21) преобразуется так:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 + B(x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + \\ + D(x_2,\ldots,x_n) \quad (6.23)$$

где $D(x_2,\ldots,x_n)$ - квадратичная форма от переменных $x_2,\ldots,x_n$.

Пусть

$$x_1' = a_{11}x_1 + .. + a_{1n}x_n$$

$$x_2' = x_2, \qquad (6.24)$$

$$x_n' = x_n$$

т.е. $$\begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0$$

поэтому матрица, стоящая в правой части равенства (6.25) имеет обратную, обозначим эту обратную матрицу C.

Согласно (3.40), C - матрица перехода от базиса $\bar{e}_1,..,\bar{e}_n$ к базису $\bar{e}_1^{'},...,\bar{e}_n^{'}$.

Осталось применить предположение индукции к $D(x_2^{'},...,x_n^{'})$. В итоге из (6.23) получится выражение вида (6.20):

$$\mu_1\tilde{x}_1^2 + ... + \mu_n\tilde{x}_n^2$$

в новых координатах $\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n$. Переход к координатам $\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n$ происходит в результате изменения базиса, что следует из того, что по предположению индукции существует преобразование базиса $\bar{e}_2^{'},...,\bar{e}_n^{'}$ в базисе $\tilde{e}_2,..,\tilde{e}_n$, при котором $D(x_2^{'},...,x_n^{'})$пере??? в $\mu_1\tilde{x}_1^2 + ... + \mu_n\tilde{x}_n^2$, а базис $\tilde{e}_1 = \bar{e}_1^{'}, \tilde{e}_2,...,\tilde{e}_n$ линейно эквивалентен исходному базису.

Осталось рассмотреть случай, в котором все $a_{ii} = 0, i = 1,..,n.$ Так как форма ненулевая существуют i, j такие, что $a_{i,j} \neq 0$. Тогда замена переменных

$$x_1 = x_1^{'} + x_2^{'}$$

$$x_2 = x_1^{'} - x_2^{'} \quad (6.26)$$

$$x_3 = x_3^{'}$$

приведет к форме, содержащей

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1^{'})^2 - 2a_{12}(x_2^{'})^2,$$

т.е. к форме , рассмотренной выше.

Замена (6.26) означает

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ \dots \\ x_n^{'} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Определитель матрицы, стоящей в (6.27), равен –2, (в чем можно убедиться, вычтя из второй его строки первую), т.е. отличен от 0 и замена (6.26) означает переход к новому базису.

<u>Пример.</u> При $a_{11} \neq 0$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{12}x_2^2 = \mu_1\tilde{x}_1^2 + \ldots + \mu_2\tilde{x}_2^2,$$

где $\mu_1 = \frac{1}{a_{11}}, \mu_2 = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$,

$\tilde{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}\tilde{x}_2$

$\tilde{x}_2 = 0 * x_1 + 0 * \tilde{x}_2$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Является обратной матрицей для матрицы C перехода к новому базиса соответствующей преобразованию координат (6.28), т.е.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

(Пояснение: $|A| = a_{11},\ A_{11} = 1, A_{12} = 0, A_{21} = (-1)^{1+2}a_{12} = -a_{12}, a_{22} = a_{11}$, используем формулу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix})$$

Значит, $(\bar{e}_1', \bar{e}_2') = (\bar{e}_1, \bar{e}_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

т.е. $\bar{e}_1' = \frac{1}{a_{11}}\bar{e}_1, \bar{e}_2' = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

Формулу (6.20) часто преобразуют, использую переменные

$z_i = \sqrt{|\mu_i|}\tilde{x}_i,$

В результате чего получаем формулу вида

$\pm z_{i1}^2 \pm \ldots \pm z_{ir}^2, r \le n$ **(6.28)**

Теорема 6.4.

При переходе к любому новому базису ранг матрицы квадратичной формы не меняется. Будем называть его рангом квадратичной формы. Эта величина равна количеству отличных от нуля коэффициентов в (6.20)
Теорему оставим без доказательства.

Квадратичную форму можно различными способами привести к виду (6.28). Однако при этом имеет место теорема.

Теорема 6.5 (Закон инерции квадратичных форм)

При любом преобразовании заданной квадратичной формы к виду (6.28) количество положительных чисел среди ????? чисел $_{}_1, _{}_{_}, _{}_n$равно ??? количества отрицательных чисел среди них сохраняются. Таким образом, все её представления в виде (6.28) отличаются только порядком слагаемых. И эта теорема оставлена без доказательства.

§4. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы

Определение. Если для всех $\bar{x} \neq 0$ квадратичная форма (6.19) принимает положительное значение, то она называется положительно определенной. Если для всех она принимает отрицательные значения, то она называется отрицательно определенной. Если всех $\bar{x} \neq 0$ ее значения не отрицательны, она называется положительно полуопределенной, если все ее значения неотрицательны она называется отрицательно полуопределенной.

Пример. В трех мерном пространстве форма

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$$

Положительно определена,

$$-x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2 - \ldots$$

Отрицательно определена,

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 -$$

Положительно полуопределена,

$$-x_2{}^2 - x_3{}^2 -$$

Отрицательно полуопределена

Если для форм, приведенных к виду (6.20) вопрос об их определенности очевиден, то в общем случае формы (6.19) с матрицей A получена следующая теорема.

<u>Теорема 6.6</u> (Критерий Сильвестра).

Для квадратичной матрицы A назовем ее главным минорами определители.

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.29)$$

Квадратичная форма с матрицей A положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры (6.29) матрицы A положительны.

Она отрицательно определена, если

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots.$

Т.е. если знаки миноров чередуются, начиная со знаком - .

Мы не будем доказывать и эту теорему, укажем лишь способ запомнить сформулированное в ней правило.

Для положительно определенной формы

$$x_1{}^2 + \dots + x_n{}^2$$

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

Т.е. главные миноры > 0

Для отрицательно определенной формы

$$-x_1{}^2 - \dots - x_n{}^2$$

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \dots$$

Знаки миноров (6.29) чередуются, начиная со знака - .

§1. Определение группы. Примеры.

Определение. Пусть G – множество и пусть каждой паре элементов $x \in G, y \in G$ сопоставим элемент $z \in G$, что будем записывать так: $x_0 y = zn$ будем говорить, что на множестве G задана бинарная операция. Множество G называется группой, если определенная выше операция обладает свойствами (аксиомами группы):

1. ассоциативности, т.е. $(x_0 y_0)z = x_0(y_0 z)$, для любых $x, y, z \in G$
2. существует нейтральный элемент, обозначаемый $e \in G$ такой, что для любого $x \in G$ выполняются равенства $x_0 e = e_0 x = x$;
3. Для любого $x \in G$ существует обратный элемент, обозначаемый x^{-1}такой, что $x_0 x^{-1} = x_0{}^{-1} x = e$

Если кроме этих свойств, выполняется также: для любых $x, y \in G$ $x_0 y = y_0 x$, то группа называется коммутативной или абелевой.

Легко доказать, что нейтральный элемент группы единственный, и что обратный элемент группы также определен однозначно.

Рассмотрим примеры групп. Отметим, что в них мы указываем как множество, так и бинарную операцию, поскольку одно и тоже множество, снабженное различными бинарными операциями, может дать различные группы.

Примеры групп:

1. Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения $a + b$. Выполнение аксиом групп очевидно. Нейтральным элементом является число 0. Обратимый элемент по сложению для числа a равен $-a$. Группа является коммутативной. Также являются группами по сложению рациональные числа, действительные числа, комплексные числа. «Группы, операцию в которых называют сложением», часто называют аддитивными группами Отметим, что натуральные числа $\mathbb{N}$ не являются группой по сложению, т.к. 0, не является натуральным числом и, разумеется для $a \in \mathbf{N}$ число $-a$ не принадлежит $\mathbb{N}$.
2. Группа $\mathbb{R}^x$, состоящая из отличных от 0 действительных чисел с операцией умножения. Нейтральный элемент в ней – число 1, обратный элемент по умножению для числа $a \neq 0$ равен $\frac{1}{a}$. Группа также абелева. Точно также образуют группу по умножению все

отличные от 0 рациональные числа, все отличные от 0 комплексные числа. Отличные от 0 целые числа не образуют группу по умножению, т.к. обратное к целому числу не равному 1, не является целым числом.

3. Любое векторное множество представляет собой абелеву группу по сложению. Например, матрицы размера $m \times n$ с ?????? ?????? образом операцией сложения, образуют группу.
4. Группа $G\mathcal{L}(n, \mathbb{R})$. Её элементами являются все невырожденные матрицы порядка n, а операция – обычное умножение матриц. Так как невырожденность матрицы равносильна отличию от 0 ее определителя, все матрицы из имеют обратные. Единичная матрица разумеется, равна $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ и $G\mathcal{L}(n, \mathbb{R})$ дает пример некоммутативной группы.
5. Группа симметрий c_nориентированного правильного n-угольника, (состоящая из поворотов n-угольника на углы). Групповая операция состоит в последовательном выполнении поворотов. Эти повороты можно изобразить матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$,…, $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$,…, $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} & \sin\frac{2\pi(n-1)}{n} \\ \sin\frac{2\pi(n-1)}{n} & \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} \end{pmatrix}$

Групповой операции соответствует произведение матриц. Единичная матрица- нейтральный элемент группы. Обратной для матрицы $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$ поворот на угол $\frac{2\pi k}{n}$ является матрица $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ -\sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$ соответствующая обратному повороту, т.е. $-\frac{2\pi k}{n}$.Легко видеть, что:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ -\sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi(k+1)}{n} & -\sin\frac{2\pi(k+1)}{n} \\ \sin\frac{2\pi(k+1)}{n} & \cos\frac{2\pi(k+1)}{n} \end{pmatrix}.$$

И, значит

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}^k.$$

Это означает, что все элементы группы C_n-это $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$, где a-это поворот на угол $\frac{2\pi k}{n}$. Такая группа называется циклической.

6. Группа симметрий D_n правильного n-угольника состоит из матриц, к которым добавлены матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ -\sin\frac{2\pi k}{n} & -\cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} & -\sin\frac{2\pi(n-1)}{n} \\ -\sin\frac{2\pi(n-1)}{n} & -\cos\frac{2\pi(n-1)}{n} \end{pmatrix}$$

Например, D_3 совпадает с группой симметрии молекулы C_2H_6.

7. Группа симметрии тетраэдра T состоит из вращений вокруг каждой из верхних с осью вращения, перпендикулярной плоскости основания и из вращений вокруг осей, соединяющих середины противоположных ребер.

T - группа симметрии молекулы CH_4.

§2. Конечные группы.

<u>Определение.</u> Порядком группы G называется количество ее элементов .Порядок обозначается $|b|$.

Группы с конечным числом элементов называются конечными группами или группами конечного порядка.

Примеры 1-4 предыдущего параграфа- бесконечные группы, примеры 5-7 – конечные группы.

<u>Определение.</u> Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой группы G, если оно само является группой относительно операции, имеющейся в группе G.

<u>Примеры:</u> 1.Группа Z целых чисел по сложению- подгруппа Q группы рациональных чисел по сложению, Q- подгруппа группы R действительных чисел по сложению.

2. Любое подпространство векторного пространства- его подгруппа по сложению.

Теорема 7.1 (Теорема Лагранжа)

Если H - подгруппа конечной группы G, то число $|H|$ делит число $|G|$.

Доказательство:

Назовем левым ??? классом по подгруппе H множество элементов группы G, имеющих вид $gh, h \in H$. Сменный класс обозначим так: gH.

Докажем, что если сменный класс g_1H и g_2H пересекаются, т.е. имеют общие элементы, то они совпадают. Пусть $g \in g_1H$ и $g \in g_2H$. Это означает, что существуют $h_1 h_2 \in H$ такие, что $g \in g_1h_1$ $g \in g_2h_2$, т.е. $g_1h_1 = g_2h_2$, откуда $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, т.е. g_1 имеет вид g_2h, где $h = h_2h_1^{-1} \in H$ и, следовательно, $g_1 \in g_2H$. Аналогично, $g_2 = g_1h_1h_2^{-1} \in g_1H$.

Из $g_1 \in g_2H$ следует, что $g_2H \subset g_1H$, поэтому $g_1H = g_2H$.

Это означает, что вся группа G представляет собой объединение конечного числа непересекающихся сменных классов, в каждом из которых $|H|$ элементов, т.е. $|G|$ кратно $|H|$, что и утверждалось.

Обозначим $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$.При изучении определителей мы рассматривали перестановки (также называемые подстановками) этих чисел, которые можно рассматривать, как взаимнооднозначные отображения X_n на себя. Множество всех перестановок обозначается S_n.

Введём операцию умножения перестановок, понимая под произведением перестановок их последовательное выполнение.

Умножение ассоциативно, нейтральный элемент- тождественная перестановка, оставляющая все числа на своих местах. Обратный элемент- обратная подстановка. Ранее мы записывали перестановку в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \_\_\_\_ 2 \ldots n \\ \sigma(1) \_ \sigma(2) \ldots \sigma(n) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Понимая под $\delta(1), \delta(2), \ldots, \delta(n)$ соответствующим образом расположенные числа $1,2,\ldots,n$.

Удобнее не ограничивать себя перестановками вида (7.8) , а допускать запись δ в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 \ldots\ldots\ldots i_n \\ \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_n) \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

т.е. допускать любой порядок столбцов в матрице перестановки (7.3).

Если $\tau = \begin{pmatrix} 12\ldots n \\ \tau(1)\tau(2)\ldots\tau(n) \end{pmatrix}$ (7.4)

То для любого k существует такое j_k, что

$\tau(j_k) = i_k$ (7.5)

(i_k - числа первой строки (7.3)).

Тогда перестановка $\sigma\tau$ - результат последовательного применения перестановки τ, затем σ выражается следующим образом, ввиду (7.3)-(7.5):

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} j_1 \ldots & j_n \\ \tau(j_1)\ldots\tau(j_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \ldots\ldots\ldots i_n \\ \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \ldots\ldots\ldots i_n \\ \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \ldots\ldots\ldots j_n \\ \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_n) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} j_1 \ldots\ldots\ldots j_n \\ \sigma(\tau(j_1))\ldots\sigma(\tau(j_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \ldots\ldots\ldots j_n \\ \sigma\tau(j_1)\ldots\sigma\tau(j_n) \end{pmatrix}.$$

Обратную для перестановки (7.3) σ_1 перестановку получим по правилу

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_n) \\ i_1 \ldots\ldots\ldots i_n \end{pmatrix}.$$

Итак, S_n-группа. При $n \geq 3$ эта группа не является коммутативной.

Действительно

$$\begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 2\_1\_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 1\_3\_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 3\_1\_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 1\_3\_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 2\_1\_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\_2\_3 \\ 2\_3\_1 \end{pmatrix}$$

Будем называть транспозицией перестановку вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\_2\ldots i\ldots j\ldots n \\ 1\_2\ldots i\ldots j\ldots n \end{pmatrix}, i \leq j \quad (7.6)$$

И равные ей перестановки вида (7.3).

Без доказательства сформулируем теорему.

<u>Теорема.</u> Любая группа G конечного порядка является подгруппой некоторой группы перестановок.